Sumowanie szeregów numerycznych

Hubert Kowalski

March 2023

1 Wstęp

Celem projektu jest zbadanie zachowania liczb zmiennoprzecinkowych w środowisku języków programowania. W moim przypadku został użyty język Java.

2 Hipotezy

- H1: Sumowanie od końca daje dokładniejsze wyniki niż sumowanie od początku
- H2: Używając rozwinięcia wokół 0 (szereg MacLaurina), przy tej samej liczbie składników szeregu dokładniejsze wyniki uzyskujemy dla małych argumentów
- H3: Sumowanie elementów obliczanych na podstawie poprzedniego daje dokładniejsze wyniki niż obliczanych bezpośrednio ze wzoru

Oraz odpowiedzieć na pytanie:
Q1: Jak zależy dokładność obliczeń (błąd) od liczby składników?

3 Metoda

Badanie zachowania zostało wykonane w spósób sformułowania czterech sposobów obliczania przybliżenia funkcji cosinus przy pomocy sumowania 20 elementów szeregów potęgowych. Wzór na sam szereg potęgowy wygląda następująco:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

3.1 Sposoby

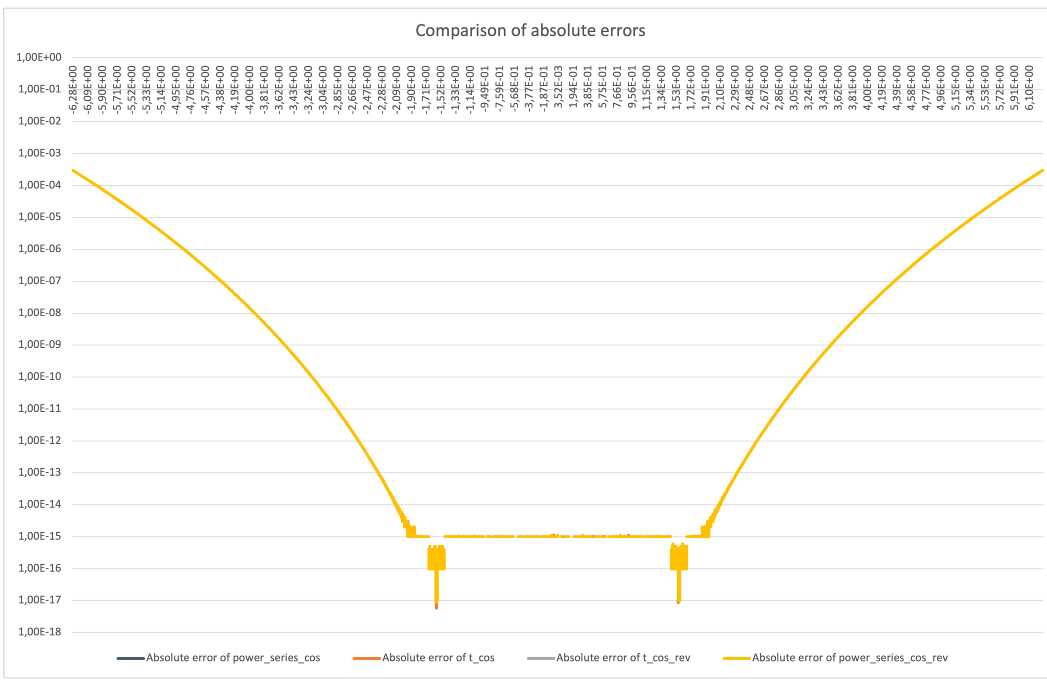
Badanie zostało wykonane na cztery sposoby:

- V1 (t_cos) Sumując elementy szeregu potęgowego obliczane bezpośrednio ze wzoru Taylora w kolejności od początku
- V2 (t_cos_rev) Sumując elementy szeregu potęgowego obliczane bezpośrednio ze wzoru Taylora w kolejności od końca
- V3 (power_series_cos) Sumując elementy szeregu potęgowego od początku ale obliczając kolejny wyraz szeregu na podstawie poprzedniego
- V4 (power_series_cos_rev) Sumując elementy szeregu potęgowego od początku ale obliczając kolejny wyraz szeregu na podstawie końca

3.2 Błędy absolutne

Błędy absolutne zostały wyliczone na podstawie funkcji cos z biblioteki Math Javy. Dodatkowo obliczenia zostały wykonane dla 1 000 000 próbek.

Wykres błędów absolutnych ma się następująco:



Wykres został przeskalowany logarytmicznie, żeby uwydatnić błędy, które znajdowały się przy brzegach zakresu $[-2\pi; 2\pi]$ maksymalny błąd jaki popełniają wszystkie funkcje to ok. 1,00E-03.

Porównanie średnich błędów absolutnych ma się następująco:

	means of errors		
t_cos	t_cos_rev	power_series_cos	power_series_cos_rev
1,31686317601169E-05	1,31686317601304E-05	1,31686317601041E-05	1,31686317601177E-05

3.3 Odpowiedzi na hipotezy

Dzięki tym danym jestem w stanie odpowiedzieć na podane hipotezy

3.4 H1

Odpowiedź: Hipoteza ta jest fałszywa, ponieważ średnia błędu absolutnego t_cos_rev jest o 1,35356E-17 większa od t_cos, analogicznie średnia power_series_rev jest o 1,36321E-17 większa od power_series_cos_rev.

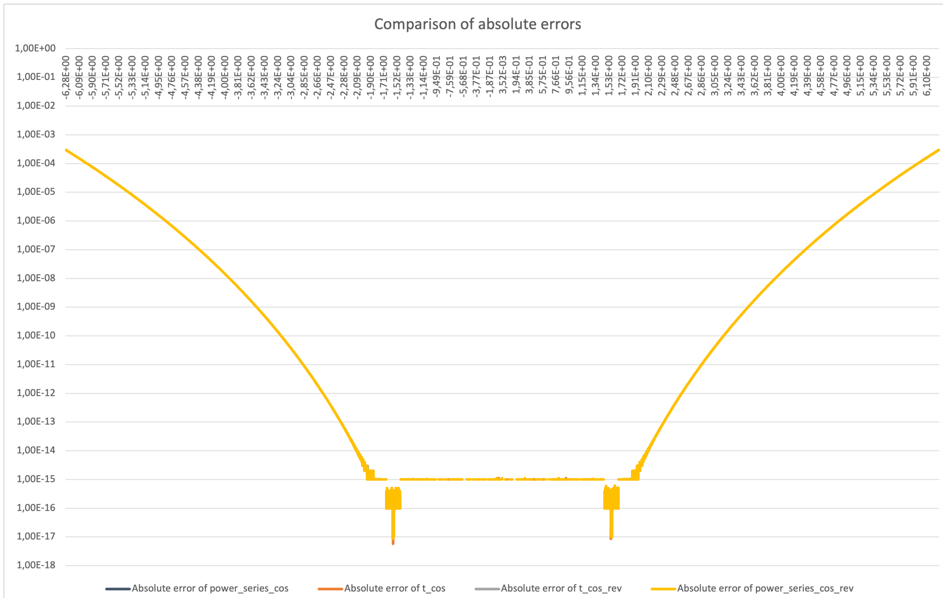
3.5 H2

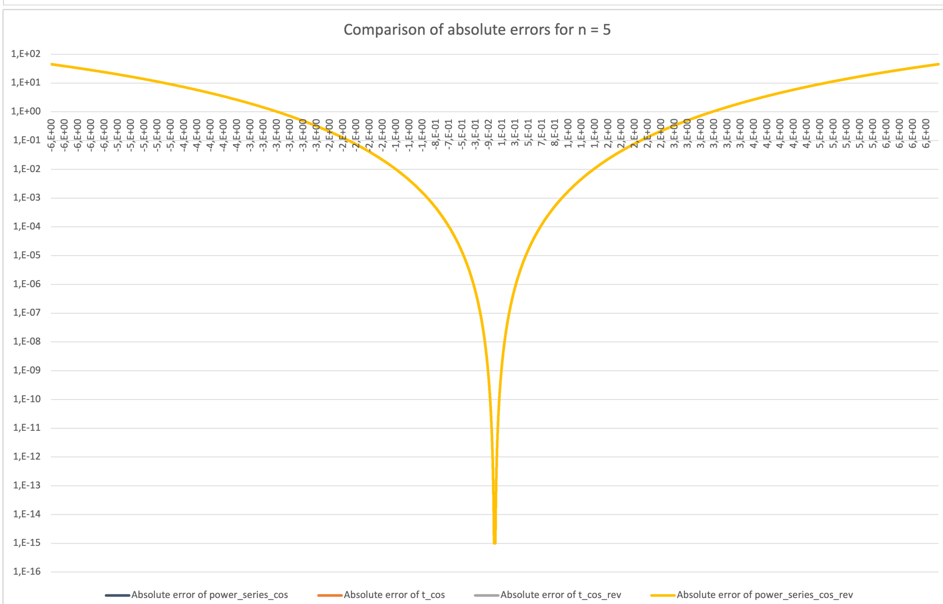
Odpowiedź: Jest to prawda patrząc na wykres jesteśmy w stanie to stwierdzić, ponieważ wykres błędu absolutengo w okół zera daje wartości bliższe zeru niż na skrajach przedziału.

3.6 H3

Odpowiedź: Tak, to prawda. Średnia błędu absolutnego power_series_cos jest o 1,28088E-17 mniejsza od błędu t_cos, analogicznie sumując je od końca różnica wynosi 1,27123E-17.

3.7 Q1





Porównanie wykresów błędów dla $n = 20$ i $n = 5$

Odpowiedź: Błąd jest tym mniejszy im więcej sumujemy składników szeregu. Wynika to z samego twierdzenia Taylora oraz sami możemy to zauważyć zwiększając ilość elementów sumy w samym skrypcie.