Zadania 5 – Wzór Taylora, wielomian Taylora

1. a) Zapisz wzór Taylora do rzędu $n = 3$, dla funkcji $f(x) = \sqrt{x+1}$ wokół punktu $x_0 = 0$ (wzór Maclaurin'a).

   b) Wykorzystaj wielomian Taylora P_3 do obliczenia przybliżonej wartości: $\sqrt{0{,}5}$, $\sqrt{0{,}75}$ oraz $\sqrt{1{,}5}$. Oblicz błąd przybliżenia korzystając z R.

   c) Wykorzystaj resztę R_3 do oszacowania maksymalnego błędu jaki popełniamy, wykorzystując wielomian P_3, do obliczania wartości funkcji $f(x) = \sqrt{x+1}$ na przedziale $[0, 1]$.

2. a) Zapisz wzór Taylora do rzędu $n = 3$, dla funkcji $f(x) = (x + 1)\ln x$ wokół punktu $x_0 = 1$.

   b) Wykorzystaj wartość wielomianu Taylora $P_3(0{,}5)$ do aproksymacji wartości $f(0{,}5)$. Oszacuj błąd przybliżenia wykorzystując resztę $R_3(0{,}5)$. Oblicz błąd przybliżenia, korzystając z R.

   b) Wykorzystaj resztę R_3 do oszacowania maksymalnego błędu jaki popełniamy, wykorzystując wielomian P_3, do obliczania wartości funkcji f na przedziale $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

3. Dla funkcji $f(x) = \ln(x + 1)$

   a) wykaż, że n-ta pochodna wyraża się wzorem

   $$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

   b) uzasadnij, że wielomian Taylora rzędu n wokół punktu $x_0 = 0$, dany jest wzorem

   $$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k,$$

   c) zapisz wzór reszty R_n i korzystając z niej, wyznacz n tak, aby błąd popełniany przy aproksymacji wartości funkcji f wielomianem P_n na przedziale $[0, \frac{1}{2}]$, był nie większy od 10^{-6}.

4. Wykaż rozwijając odpowiednią funkcję we wzór Maclaurin'a ($x_0 = 0$), że

   $$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_n(x)$$

   $$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_n(x)$$

   Zapisz wzory reszt i korzystając z nich wyznacz n tak, aby błąd popełniany przy aproksymacji wielomianem Maclaurin'a rzędu n wartości $\sin(x)$ i odpowiednio $\cos(x)$, dla $x \in [0, \pi/4]$, był nie większy od 10^{-6}.

5. Rozwiąż zadania (BF p. 15): **7** a) b) c) d), **9** a) b) c), **10**, **19**