Zadania 1 - Rachunek prawdopodobieństwa

Uwaga. W zdaniach dystrybuantę definiujemy jako funkcję $F(x) = P(X \leqslant x)$.

1. Rzucamy jeden raz kostką, której rozkład prawdopodobieństwa liczby wypadniętych oczek podany jest w tabeli.

ω_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

a) Zapisz w tabeli rozkład prawdopodobieństwa zmiennych losowych X i Y

$$X(\omega) = \begin{cases} -50 & \text{dla } \omega \in \{1,2\} \\ 40 & \text{dla } \omega \in \{3,4\} \\ 50 & \text{dla } \omega \in \{5,6\}. \end{cases} \qquad Y(\omega) = \begin{cases} -200 & \text{dla } \omega \in \{1\} \\ 50 & \text{dla } \omega \in \{2,3,4,5\} \\ 500 & \text{dla } \omega \in \{6\}. \end{cases}$$

b) Wyznacz dystrybuanty zmiennych losowych X i Y oraz narysuj ich wykresy.

2. Rzucamy dwa raz monetą dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła jest równe $\frac{2}{3}$. Zmienna losowa X przyjmuje wartość 500 jeżeli wypadną dwa orły, 100 jeżeli wypadnie jeden orzeł oraz -100 w pozostałych przypadkach. Podaj rozkład zmiennej losowej X i narysuj wykres dystrybuanty.

3. W tabeli podany jest rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X. Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej X i narysuj jej wykres.

a)

x_i	-1	1	5
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

b)

ω_i	-2	0	2	4
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

4. W tabeli podany jest rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.

x_i	-3	1	3	5	7
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej X i narysuj jej wykres.

5. Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -5 \\ 1/5 & \text{dla } x \in [-5, 2) \\ 4/5 & \text{dla } x \in [2, 7) \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 7. \end{cases}$$

Podaj, jakie wartości przyjmuje zmienna losowa X z niezerowym prawdopodobieństwem.

6. Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} x < -3 \\ 1/3 & \text{dla } x \in [-3, 1) \\ 2/3 & \text{dla } x \in [1, 5) \\ 1 & \text{dla } x \in [5, \infty). \end{cases}$$

Podaj, jakie wartości przyjmuje zmienna losowa X z niezerowym prawdopodobieństwem.

7. Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ 1 - 1/2^n & \text{dla } x \in [n, n+1), \ n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Narysuj wykres dystrybuanty, jakie wartości przyjmuje zmienna losowa X z niezerowym prawdopodobieństwem?

8. Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 1 \\ 1 - 1/n & \text{dla } x \in [n, n+1), \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Narysuj wykres dystrybuanty, jakie wartości przyjmuje zmienna losowa X z niezerowym prawdopodobieństwem?

9. Oblicz EX i $VarX$ zmiennej losowej z Zadania 1.

10. Oblicz EX i $VarX$ zmiennej losowej z Zadania 2.

11. Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -2 \\ 1/3 & \text{dla } x \in [-2, 2) \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Oblicz $P(X < -2)$, $P(X \leqslant -2)$, $P(X \geqslant 2)$ i $P(X > \frac{3}{2})$.

12. Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 4 \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 4. \end{cases}$$

Oblicz $P(X < 0)$, $P(X \leqslant 0)$, $P(X \geqslant 4)$ i $P(X = 5)$.

13. Zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda = 1$.
Oblicz $E(5X - 3)$ i $Var(5X - 100)$.

14. Zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda = 2$.
Oblicz $E(3X + 5)$ i $Var(2X - 1)$.

15. Oblicz prawdopodobieństwo, że zmienna lodowa X o rozkładzie dwumianowym $B(100, 1/2)$ przyjmuje wartość 50. Oblicz to samo prawdopodobieństwo dla zmiennej losowej Y o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda = 50$. Porównaj prawdopodobieństwa, że zmienne losowe X i odpowiednio Y przyjmują wartości ze zbioru $A = \{20, 40, 60, 80\}$, $B = (-\infty, 50]$, $C = (50, \infty)$.

16. Oblicz prawdopodobieństwo, że zmienna lodowa X o rozkładzie dwumianowym $B(100, 1/4)$ przyjmuje wartość 25. Oblicz to samo prawdopodobieństwo dla zmiennej losowej Y o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda = 25$. Porównaj prawdopodobieństwa, że zmienne losowe X i odpowiednio Y przyjmują wartości ze zbioru $A = \{10, 30, 50, 70\}$. $B = (-\infty, 30)$, $C = [30, \infty)$.

Co potrafisz po tych zajęciach?

- Obliczasz wartość oczekiwaną, wariancję i odchylenie standardowe dla rozkładów dyskretnych, wyznaczasz dystrybuantę. Mając dystrybuantę potrafisz obliczyć prawdopodobieństa zadanych zdarzeń.

- Znasz rozkład dwumianowy, Poissona. Wiesz o asymptotycznej zależności między rozkładem dwumianowym, a rozkładem Poissona. Obliczasz dla zmiennej losowej X o tych rozkładach prawdopodobieństwa typu

$$P(X \in \{2, 8, 10\}),\ P(X \in [2, 10)),\ P(X \leqslant 5),\ P(X > 20).$$