Estymatory parametrów rozkładu

Joanna Czarnowska[1]

[1]Uniwersytet Gdański
Instytut Matematyki

Estymatory parametrów rozkładu – metoda momentów

W metodzie momentów (MOM), nieznane parametry rozkładu, uzyskujemy porównując momenty teoretyczne z momentami empirycznymi.

Przykład. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą z rozkładu Poissona z nieznanym parametrem $\lambda > 0$. Jest jeden parametr, zatem wystarczy porównać wartość oczekiwaną rozkładu ze średnią empiryczną: $EX = \overline{X}_n$.

Ponieważ dla rozkładu Poissona $EX = \lambda$, zatem estymatorem momentów nieznanego parametru λ jest: $\hat{\lambda} = \overline{X}_n$.

Estymatory parametrów rozkładu – metoda momentów

W metodzie momentów (MOM), nieznane parametry rozkładu, uzyskujemy porównując momenty teoretyczne z momentami empirycznymi.

Przykład. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą z rozkładu Poissona z nieznanym parametrem $\lambda > 0$. Jest jeden parametr, zatem wystarczy porównać wartość oczekiwaną rozkładu ze średnią empiryczną: $EX = \overline{X}_n$.

Ponieważ dla rozkładu Poissona $EX = \lambda$, zatem estymatorem momentów nieznanego parametru λ jest: $\hat{\lambda} = \overline{X}_n$.

Przykład. Niech $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Porównując wartość oczekiwaną rozkładu wykładniczego ze średnią empiryczną

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \overline{X}_n,$$

otrzymujemy estymator momentów nieznanego parametru λ

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}_n}.$$

Zauważ, że estymatory są zmiennymi losowymi. Możemy analizować ich wartość oczekiwaną, wariancję czy odchylenie standardowe.

Metoda momentów – przykład dla rozkładu Poissona

Poniższa 100-elementowa realizacja została wygenerowana z rozkładu Poissona o parametrze $\lambda = 10$

```
  [1] 11  9  7 19  8  9  9  7  7 17 10 11  9  9 10
 [16]  6 14 10  6 11 11  8  9  7 14 12  9  8 12 16
 [31]  5 13  9  9  9  7  8  8 12 16 13 14 12 10 11
 [46] 10  7  9  7  5 12  5  5 11 10  6  7 12  5 13
 [61] 13 14 14  6 10 11 13 16  9  9  9 16  5 11  7
 [76] 10 11 11 10 11  6 11 10  9  9 10  9  9  6  9
 [91] 11 14  8  5 14  7 13 12 12 13
```

Wykorzystując estymator otrzymany metodą momentów, dla rozkładu Poissona, otrzymujemy $\hat{\lambda} = \overline{X}_n = 9{,}98$.

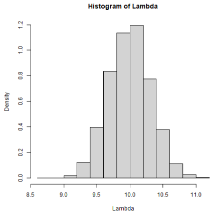
Metoda momentów – przykład dla rozkładu Poissona

Poniższa 100-elementowa realizacja została wygenerowana z rozkładu Poissona o parametrze $\lambda = 10$

```
  [1] 11  9  7 19  8  9  9  7  7 17 10 11  9  9 10
 [16]  6 14 10  6 11 11  8  9  7 14 12  9  8 12 16
 [31]  5 13  9  9  9  7  8  8 12 16 13 14 12 10 11
 [46] 10  7  9  7  5 12  5  5 11 10  6  7 12  5 13
 [61] 13 14 14  6 10 11 13 16  9  9  9 16  5 11  7
 [76] 10 11 11 10 11  6 11 10  9  9 10  9  9  6  9
 [91] 11 14  8  5 14  7 13 12 12 13
```

Wykorzystując estymator otrzymany metodą momentów, dla rozkładu Poissona, otrzymujemy $\hat{\lambda} = \overline{X}_n = 9{,}98$.

Na wykresie obok mamy histogram z wynikami estymacji, dla 10 000 próbek liczności $n = 100$, wygenerowanych z rozkładu Pois(10).
Średnia z uzyskanych wyników wynosi 10, odchylenie standardowe 0,31.



Zobacz Przykład 1 i Przykład 2 w skrypcie 04Estymatory-wyklad.R

Estymatory największej wiarygodności

Przykład. Mamy poniżej próbę z rozkładu zero-jedynkowego o nieznanym parametrze p, czyli prawdopodobieństwie wypadnięcia jedynki $P(X = 1) = p$.

0 0 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0
0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1

Przyjmujemy, że najbardziej wiarygodna jest ta wartość p, przy której wylosowanie danego ciągu jest najbardziej prawdopodobne, czyli największe jest prawdopodobieństwo

$$L(p) = P(X{=}x_1)P(X{=}x_2)\cdots P(X{=}x_n) =$$

$$= p^{x_1+\ldots x_n}(1-p)^{n-(x_1+\ldots x_n)}.$$

Estymatory największej wiarygodności

Przykład. Mamy poniżej próbę z rozkładu zero-jedynkowego o nieznanym parametrze p, czyli prawdopodobieństwie wypadnięcia jedynki $P(X=1)=p$.

0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1

Przyjmujemy, że najbardziej wiarygodna jest ta wartość p, przy której wylosowanie danego ciągu jest najbardziej prawdopodobne, czyli największe jest prawdopodobieństwo

$$L(p) = P(X=x_1)P(X=x_2)\cdots P(X=x_n) =$$

$$= p^{x_1+\ldots x_n}(1-p)^{n-(x_1+\ldots x_n)}.$$

Łatwo pokazać, że funkcja wiarygodności L przyjmuje największą wartość, dla

$$\hat{p} = \arg\max_{p\in[0,1]} L(p) = \arg\max_{p\in[0,1]} \ln(L(p)) = \overline{x}_n.$$

Estymator $\hat{p} = \overline{X}_n$ nazywa się estymatorem największej wiarygodności parametru p, dla rozkładu zero-jedynkowego.

Funkcja wiarygodności

Dla zmiennej losowej dyskretnej X, o rozkładzie zależnym od parametru $\theta \in \Theta$ (θ może być wektorem parametrów), definiujemy funkcję wiarygodności

$$L(\theta) = P(X = x_1; \theta) \cdot P(X = x_2; \theta) \cdots P(X = x_n; \theta), \tag{1}$$

gdzie $x_1, \ldots, x_n$ są obserwowanymi wartościami zmiennej losowej X.

W przypadku rozkładu ciągłego o gęstości f z parametrem $\theta \in \Theta$ (np. dla rozkładu normalnego $\theta = (\mu, \sigma)$), funkcja wiarygodności ma postać

$$L(\theta) = f(x_1; \theta) \cdot f(x_2; \theta) \cdots f(x_n; \theta). \tag{2}$$

Estymatory największej wiarygodności (MLE)

Jako estymator parametru θ (o zakresie zmienności Θ) bierzemy tą wartość, która maksymalizuje funkcję wiarygodności L. Taki estymator $\hat{\theta}$ nazywamy estymatorem największej wiarygodności (MLE) parametru θ.

Optymalizacja funkcji wiarygodności (**??**) i (**??**) jest równoważna optymalizacji logarytmu funkcji wiarygodności, co zwykle jest prostszym zagadnieniem

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta \in \Theta} L(\theta) = \arg\max_{\theta \in \Theta} \ln(L(\theta)).$$

Estymator MLE – dla rozkładu Poissona

Funkcja wiarygodności dla rozkładu Poissona

$$L(\lambda) = P(Y = x_1) \cdot P(Y = x_2) \cdots P(Y = x_n) =$$

$$\frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{x_2}}{x_2!} e^{-\lambda} \cdots \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}}{x_1! x_2! \cdots x_n!} \cdot e^{-n\lambda}.$$

Estymator MLE – dla rozkładu Poissona

Funkcja wiarygodności dla rozkładu Poissona

$$L(\lambda) = P(Y = x_1) \cdot P(Y = x_2) \cdots P(Y = x_n) =$$

$$\frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{x_2}}{x_2!} e^{-\lambda} \cdots \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{(x_1+x_2+\cdots+x_n)}}{x_1! x_2! \cdots x_n!} \cdot e^{-n\lambda}.$$

Logarytm funkcji wiarygodności

$$h(\lambda) = \ln(L(\lambda)) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \ln \lambda - n\lambda - \ln(x_1! x_2! \cdot \cdots \cdot x_n!).$$

Stąd miejscem zerowym pochodnej

$$h'(\lambda) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{\lambda} - n.$$

jest $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i = \overline{x_n}$. I w tym punkcie funkcja h, a zatem też funkcja L, przyjmuje największą wartość na przedziale $(0, \infty)$.

Estymator MLE – dla rozkładu Poissona

Funkcja wiarygodności dla rozkładu Poissona

$$L(\lambda) = P(Y = x_1) \cdot P(Y = x_2) \cdots P(Y = x_n) =$$

$$\frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{x_2}}{x_2!} e^{-\lambda} \cdots \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{(x_1+x_2+\cdots+x_n)}}{x_1!x_2!\cdots x_n!} \cdot e^{-n\lambda}.$$

Logarytm funkcji wiarygodności

$$h(\lambda) = \ln(L(\lambda)) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \ln \lambda - n\lambda - \ln(x_1!x_2! \cdot \cdots \cdot x_n!).$$

Stąd miejscem zerowym pochodnej

$$h'(\lambda) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{\lambda} - n.$$

jest $\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} x_i = \overline{x_n}$. I w tym punkcie funkcja h, a zatem też funkcja L, przyjmuje największą wartość na przedziale $(0, \infty)$.

Stąd estymatorem największej wiarygodności parametru λ jest

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} X_i = \overline{X_n}.$$

Jest taki sam jak estymator uzyskany metodą momentów.

Estymator MLE – dla rozkładu wykładniczego

Przykład. Funkcja wiarygodności dla rozkładu wykładniczego

$$L(\lambda) = \lambda e^{-\lambda x_1} \cdots \lambda e^{-\lambda x_n} = \lambda^n e^{-\lambda(x_1+\ldots+x_n)}.$$

Uzasadnij, że

$$\hat{\lambda} = \arg\max_{\lambda>0} L(\lambda) = \arg\max_{\lambda>0} \ln(L(\lambda)) = \frac{1}{\overline{X}_n}.$$

Estymator parametru λ, otrzymany metodą największej wiarygodności jest taki sam, dla rozkładu wykładniczego, jak otrzymany metodą momentów.

Estymatory największej wiarygodności

Dla wielu rozkładów, problem optymalizacyjny

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta \in \Theta} L(\theta) = \arg\max_{\theta \in \Theta} \ln(L(\theta)),$$

zwykle nie jest prosty. Do jego rozwiązania wykorzystujemy odpowiednie narzędzia – na przykład R – i zaimplementowane tam funkcje.

Zobacz Przykłady3-4 w skrypcie 04Estymatory-wyklad.R