Przedziały ufności

Joanna Czarnowska[1]

[1]Uniwersytet Gdański
Instytut Informatyki

Estymacja przedziałowa – estymacja punktowa

O estymacji punktowej mówimy wtedy, gdy mając próbę $X_1, \ldots, X_n$, wyznaczamy nieznany parametr θ, wykorzystując wybrany estymator $\hat{\theta} = T(X_1, \ldots, X_n)$. Na przyład, wartość oczekiwaną czy wariancję, obliczamy za pomocą estymatorów

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S_n^2 = \frac{1}{n-1}(X_i - \overline{X}_n)^2.$$

Estymacja punktowa nie daje żadnych informacji na temat wiarygodności uzyskanego wyniku.

Rozszerzeniem estymacji punktowej jest estymacja przedziałowa.

Przedział ufności dla nieznanego parametru θ

Definicja. Przedziałem ufności (CI – Confidence Interval) o poziomie ufności $1-\alpha$, dla parametru θ, nazywamy taki przedział o końcach losowych (θ_1, θ_2), że

$$P(\theta < \theta_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{i} \quad P(\theta > \theta_2) = \frac{\alpha}{2},$$

gdzie

$$\theta_1 = \theta_1(X_1, \ldots, X_n), \quad \theta_2 = \theta_2(X_1, \ldots, X_n)$$

są zmiennymi losowymi wyznaczonymi na podstawie próby $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Zauważmy, z definicji wynika że $P(\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2) = 1 - \alpha$.

Co oznacza poziom ufności?

Przykładowo przyjmując $1 - \alpha = 95\%$, średnio 95% tak wyliczanych przedziałów powinno zawierać szukany parametr θ.

Przedział ufności dla μ

Model 1

Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jest próbą z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ o nieznanych parametrach μ i σ. Przedział ufności dla μ ma postać

$$\left[\overline{X}_n - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right], \tag{1}$$

gdzie $t_{\frac{\alpha}{2}} = t(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha/2$ rozkładu t-Studenta o $n-1$ stopniach swobody oraz

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2.$$

Przykładowo, dla $\alpha = 5\%$ i próby liczności $n = 10$, kwantyl $t(97{,}5\%, 9) \approx 2{,}26$, zatem otrzymamy następujący przedział ufności dla μ, na poziomie ufności 95%

$$\left[\overline{X}_n - 2,26\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + 2,26\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right].$$

Model 1 – skąd taki wzór?

Fakt 1. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$. Zmienna losowa

$$T = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}}, \tag{2}$$

gdzie $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$, ma rozkład t-Studenta o $n-1$ stopniach swobody.

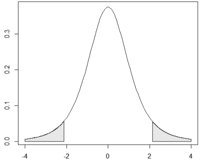
Uwaga. Zobacz Przykład 1a)b) w skrypcie 11PrzedzialyUfnosci.R

Model 1 – skąd taki wzór?

Dla danego α, można znaleźć takie liczby t_1 i t_2, dla których

$$P(t_1 < T < t_2) = 1 - \alpha,$$

gdzie T jest zmienną losową o rozkładzie $t(n-1)$. Wystarczy wziąć kwantyle



$$t_1 = t(\alpha/2, n-1), \quad t_2 = t(1-\alpha/2, n-1).$$

Wtedy, po przekształceniu

$$P\left(t_1 \leqslant \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}} \leqslant t_2\right) = 1 - \alpha,$$

otrzymamy

$$P\left(\overline{X}_n - t_2\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X}_n - t_1\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Stąd, wykorzystując zależność między kwantylami: $t_1 = -t_2$, która wynika z symetrii rozkładu $t(n-1)$, otrzymujemy (1)

$$\left[\overline{X}_n - t_2\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X}_n + t_2\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right].$$

Przedział ufności dla μ (brak normalności)

Dla próbek o dużej liczności, rozkład zmiennej losowej z Modelu 1, możemy aproksymować rozkładem $N(0,1)$. To pozwoli na uzyskanie poniższego przedziału ufności, dla wartości oczekiwanej.

Model 2

Nich $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą prostą o dużej liczności ($n \geqslant 100$), z rozkładu o nieznanych μ i σ. Wówczas, przedział ufności dla μ taki, że

$$\left[\overline{X}_n - u(1-\alpha/2)\cdot\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + u(1-\alpha/2)\cdot\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right],$$

w przybliżeniu, ma poziom ufności równy $1-\alpha$, gdzie $u(1-\alpha/2)$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha/2$ rozkładu $N(0,1)$.

Przedział ufności dla wariancji σ^2

Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jest próbą z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$. Przedział ufności, na poziomie ufności $1-\alpha$, dla wariancji σ^2 wynosi:

$$\left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2(\frac{\alpha}{2}, n-1)}\right],$$

gdzie $\chi^2(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)$, $\chi^2(\frac{\alpha}{2}, n-1)$ są kwantylami rzędu odpowiednio $1-\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{\alpha}{2}$ rozkladu chi-kwadrat o $n-1$ stopniach swobody, a $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$.

Przedział ufności dla wariancji – skąd taki wzór?

Fakt 2. Dla próby $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$ mamy kolejny ładny fakt. Zmienna losowa

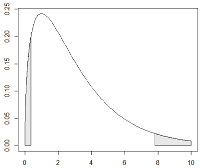
$$\chi^2 = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2},$$

gdzie $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$, ma rozkład chi-kwadrat o $n-1$ stopniach swobody.

Uwaga. Zobacz Przykład 2a i 2b w skrypcie 11PrzedzialyUfnosci.R

Przedział ufności dla wariancji – skąd taki wzór?

Jeżeli tym razem oznaczymy przez $\chi^2(p, n-1)$ kwantyl rzędu p rozkładu chi-kwadrat o $n-1$ stopniach swobody, to mamy



$$P\left(\chi^2(\alpha/2, n-1) \leqslant \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \leqslant \chi^2(1-\alpha/2, n-1)\right) = 1 - \alpha,$$

skąd po przekształceniu otrzymujemy podaną postać przedziału ufności (sprawdź).

Regresja – przedział ufności dla predykcji

Niech $Y = b_0 + b_1 x + \varepsilon$, $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$, będzie klasycznym modelem regresji liniowej, z estymatorami współczynników β_0, β_1 oraz wariancji $\hat{\sigma}^2$ (zobacz wykład 10RegresjaLiniowa.pdf).

Predykcja Y^* z modelu, dla $x = x^*$ to wartość

$$\hat{y}^* = \beta_0 + \beta_1 x^*.$$

Fakt 3. Przy przyjętych założeniach modelu, unormowany błąd predykcji

$$T = \frac{Y^* - \hat{y}^*}{\underbrace{\hat{\sigma} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \overline{x}_n)^2}{n s_x^2}}}_{M}} \tag{3}$$

ma rozkład t-Studenta o $n-2$ stopniach swobody.

Korzystając z (3) i postępując podobnie jak w Modelu 1, otrzymamy przedział ufności dla predykcji Y^*, na poziomie ufności $1-\alpha$

$$[\hat{y}^* - t(1{-}\alpha/2, n{-}2) \cdot M, \hat{y}^* + t(1{-}\alpha/2, n{-}2) \cdot M],$$

gdzie $t(1{-}\alpha/2, n{-}2)$ jest kwantylem rzędu $1{-}\alpha/2$ rozkładu t-Studenta o $n{-}2$ stopniach swobody.

Uwaga. Zobacz Przykład 1g) w skrypcie 10RegresjaLiniowa.Rmd

Kroswalidacja, metody MC

Uwaga. Zobacz Przykład 2 w skrypcie 10RegresjaLiniowa.Rmd