Aproksymacje i i interpolacje 2

Joanna Czarnowska[1]

[1]Uniwersytet Gdański
Instytut Informatyki

Interpolacje wielomianami

Zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa, każdą funkcję ciągłą na przedziale domkniętym, można dowolnie przybliżyć za pomocą wielomianu odpowiednio wysokiego stopnia.

Twierdzenie Weierstrassa. (BF, Th.3.1, p.106) Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$. Dla każdego $\varepsilon > 0$, istnieje wielomian P taki, że

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon,$$

dla każdego $x \in [a, b]$.

Interpolacja Lagrange'a (BF, p.108-114)

Interpolacja Lagrange'a to metoda numeryczna przybliżania funkcji, wielomianem stopnia co najwyżej $n (n \geqslant 1)$, nazywanym wielomianem Lagrange'a, który w $n+1$ punktach zwanych węzłami interpolacji, przyjmuje wartości takie same jak przybliżana funkcja.

Interpolacja liniowa

Interpolacja Lagrange'a funkcji f wielomianem stopnia co najwyżej $n = 1$, sprowadza się do wyznaczenia równania prostej przechodzącej przez dwa punkty $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ należące do funkcji f.

Wielomian Lagrange'a stopnia jeden dla funkcji f, ma zatem wzór

$$P(x) = \underbrace{\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}}_{L_0(x)} f(x_0) + \underbrace{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}_{L_1(x)} f(x_1),$$

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1).$$

Wielomian P jest jedynym wielomianem stopnia jeden, przechodzącym przez wybrane dwa punkty.

Wielomian Lagrange'a

Mamy $n+1$ ($n \geqslant 1$) punktów

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), \tag{1}$$

o różnych wartościach $x_0, x_1, \dots, x_n$, należących do funkcji f. Zatem $y_i = f(x_i),\ i = 0, 1, \dots, n$.

Problem. Wyznaczenie wielomianu stopnia co najwyżej n, przechodzącego przez punkty (1).

Wykorzystamy do tego celu wielomian

$$w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n),$$

który jest wielomianem stopnia $n+1$ i ma miejsca zerowe w punktach $x_0, x_1, \dots, x_n$. Dla $k = 0, 1, 2, \dots, n$, definiujemy wielomiany

$$w_{-k}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n),$$

które nie zawierają w iloczynie jednomianu $x - x_k$.

Wielomian Lagrange'a

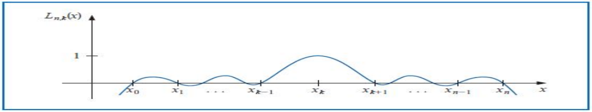
W kolejnym kroku, definiujemy wielomiany $L_0, L_1, \ldots, L_n$ stopnia n

$$L_k(x) = \frac{w_{-k}(x)}{w_{-k}(x_k)} = \frac{x - x_0}{x_k - x_0} \frac{x - x_1}{x_k - x_1} \cdots \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_k - x_n} =$$

$$= \prod_{i=0, i \neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

Zauważmy, że $L_k(x_k) = \frac{w_{-k}(x_k)}{w_{-k}(x_k)} = 1$, dla każdego $k = 0, 1, 2, \ldots n$ oraz

$$L_k(x_i) = 0, \text{ jeśli } x_i \neq x_k.$$



Wielomian Lagrange'a. Interpolacja Lagrange'a

Definicja

Wielomian zdefiniowany następująco

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + \ldots + f(x_n)L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x), \tag{2}$$

nazywamy wielomianem Lagrange'a funkcj f o węzłach (1).

Twierdzenie. (BF, Th.3.2, p.110) Niech $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ będą warościami funkci f w $n+1$ różnych punktach $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Wielomian (2) jest jedynym wielomianem stopnia co najwyżej n takim, że

$$f(x_k) = P(x_k), \text{ dla } k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Interpolacja Lagrange'a

Przykad 1. (BF: Ex.2, p.110)

a) Sprawdź, że
$$P(x) = \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44},$$
jest wielomianem Lagrange'a stopnia dwa, dla funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$, dla węzłów: $x_0 = 2$, $x_1 = 2.75$ i $x_2 = 4$.

b) Wykorzystaj ten wielomian do aproksymacji wartości funkcji $f(3)$. Wyznacz błąd bezwzględny przybliżenia: $|P(3) - f(3)|$.

Zobacz Przyklad **1**a)b) w skrypcie 08Aproksymacje-Interpolacje2.R

Interpolacja Lagrange'a z zadaną dokładnością

Twierdzenie. (BF: Th.3.3, p.112) Niech $f \in C^{n+1}[a, b]$ i niech $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą różnymi punktami w $[a, b]$. Dla każdego $x \in [a, b]$ istnieje liczba c_x w przedziale (a, b) taka, że

$$f(x) = P(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}_{R(x)},$$

gdzie P jest wielomianem Lagrange'a, danym wzorem (2).

Resztę

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n),$$

wykorzystujemy do oszacowania błędu, jaki popełniamy obliczając wartości funkcj f za pomocą wielomianu P.

Interpolacja Lagrange'a z zadaną dokładnością

Przykład 1. cd (BF, Ex.3, str. 113)

a) Wykorzystując powyższe twierdzenie uzasadnij, że reszta przy interpolacji wielomianem Lagrange'a P funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$, z węzłami $x_0 = 2$, $x_1 = 2.75$ i $x_2 = 4$, dana jest wzorem

$$R(x) = -\frac{1}{c_x^4}(x-2)(x-2.75)(x-4)$$

$$-\frac{1}{c_x^4}\left(x^3 - \frac{35}{4}x^2 + \frac{49}{2} - 22\right).$$

b) Wykorzystaj resztę do oszacowania błędu, jaki popełniamy aproksymaując wartości funkcji f wielomianem P, na przedziale $[2,4]$.

c) Porównaj z aproksymacją funkcji f na przedziale $[2,4]$ wielomianem Taylora rzędu dwa, wokół punktu $x_0 = 3$

$$P_3^T(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-3) + \frac{1}{27}(x-3)^2 = \frac{1}{27}x^2 - \frac{9}{27}x + 1, \quad R_3(x) = -\frac{1}{c_x^4}(x-3)^3.$$

Zobacz Przyklad **1**c)d) w skrypcie 08Aproksymacje-Interpolacje.R