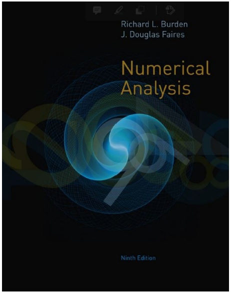
Aproksymacje i interpolacje 1

Joanna Czarnowska[1]

[1]Uniwersytet Gdański
Instytut Informatyki

Literatura


Richard L. Burden
J. Douglas Faires
Numerical Analysis
Ninth Edition

Aproksymacje wielomianami

Zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa dowolną funkcję f ciągłą na przedziale domkniętym, można dowolnie przybliżyć za pomocą wielomianu odpowiednio wysokiego stopnia.

Twierdzenie Weierstrassa. (BF, Th.3.1, p.106) Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$. Dla każdego $\varepsilon > 0$, istnieje wielomian P taki, że

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon,$$

dla każdego $x \in [a, b]$.

Wzór Taylora

Twierdzenie. (Th.1.14, p.10) Niech $f : (a, b) \to \mathrm{R}$ będzie funkcją, która ma ciągłe pochodne do rzędu n ($n \geqslant 1$) oraz ma też pochodną rzędu $(n+1)$. Niech $x_0 \in (a, b)$ będzie ustalonym punktem. Wtedy, dla każdego punktu $x \in (a, b)$ istnieje punkt c_x pomiędzy x_0 i x taki, że

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{P_n(x)} + R_n(x), \tag{1}$$

gdzie reszta $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ jest postaci

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{2}$$

Wzór (1) nazywamy wzorem Taylora, wielomian P_n – wielomianem Taylora rzędu n funkcji f, a resztę (2) – resztą w postaci Lagrange'a.

Wzór Maclaurin'a

Jeśli $x_0 = 0$, to mówimy o wzorze Maclaurin'a

$$f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{P_n(x)} + R_n(x), \qquad (3)$$

gdzie reszta $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ jest postaci

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

dla pewnego punktu c_x pomiędzy $x_0 = 0$ i x.

Wzór (3) nazywamy wzorem Maclaurin'a, wielomian P_n – wielomianem Maclaurin'a rzędu n, funkcji f.

Wzór Taylora (wzór Maclaurin'a)

Jeśli przyjmiemy oznaczenie, że $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$, to wielomian Taylora (Maclaurin'a) rzędu $n = 0, 1, 2 \ldots$, możemy zapisać następująco

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i \qquad \left(P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i \right). \tag{4}$$

Jednocześnie $P_0(x) = f(x_0)$.

Wielomian Taylora - przykład

Przykład 1a) Funkcja $f(x) = e^x$ ma pochodną dowolnego rzędu $f^{(n)}(x) = e^x$, $n = 1, 2, \ldots$ Po obliczeniu $f(0) = f^{(n)}(0) = 1$ i podstawieniu do (4), otrzymujemy kolejne wielomiany Maclaurin'a

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = 1 + x,$$

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24},$$

$$P_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120},$$

$$\ldots$$

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Ladny wykres: BF, Fig.3.2, p.107

Aproksymacja wielomianem Taylora – zastosowanie

Wzór Maclaurin'a dla funkcji $f(x) = e^x$

$$f(x) = \underbrace{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{e^{cx}}{(n+1)!} x^{n+1}}_{R_n(x)} .$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \frac{e^{cx}}{(n+1)!} x^{n+1} .$$

Przykład 1b) Podaj przybliżenie dziesiętne liczby e z dokładnością do 0,01.

Przykład 1c) Wyznacz n tak, aby różnica (bezwzględna) między wartością funkcji $f(x) = e^x$ i wartością wielomianu Maclaurin'a P_n rzędu n funkcji f, dla każdego $x \in [0, 1]$, nie przekraczała 0,01 .

$$\left(\forall_{x\in[0,1]} \; |R_n(x)| = |e^x - P_n(x)| \leqslant 10^{-2}\right)$$

Zobacz Przykład 1 w skrypcie 08AproksymacjeInterpolacje1.R.

Aproksymacja wielomianem Taylora – zastosowanie

Przykład 2. (BF, Example 3, p.11)

a) Zapisz wzór Maclaurina dla funkcji $f(x) = \cos x$ do rzędu $n = 2$ ($n = 3$).

b) Wykorzystaj otrzymane rozwinięcie do obliczenia cos(0,01).

c) Wykorzystaj otrzymane rozwinięcie do obliczenia całki $\int_0^{0.1} \cos x dx$.

Zobacz Przykład 2 w skrypcie 08AproksymacjeInterpolacje1.R.

Wzór Maclaurin'a dla funkcji *cosinus*

Pochodna rzędu n funkcji $f(x) = \cos x$ jest równa

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Stąd wzór Maclaurin'a do rzędu $2n$, ma postać

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{P_{2n}(x)} + R_{2n}(x),$$

gdzie reszta

$$R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(c_x)}{(2n+1)!} = \frac{\cos(c_x + (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2})}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Przykład 2. (BF, Table 3.1, str. 107)

a) Zapisz wzór Taylora funkcji $f(x) = 1/x$ do rzędu n, wokół punktu $x_0 = 1$.

b) Przeanalizuj aproksymację wartości $f(3)$ wielomianami Taylora P_n, dla $n = 0, 1, 2, \ldots, 7$.

Wyznaczamy pochodne do rzędu n

$$f(x) = x^{-1}$$
$$f'(x) = (-1)x^{-2}$$
$$f''(x) = (-1)(-2)x^{-3}$$
$$f'''(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4}$$
$$\cdots$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2)(-3)\ldots(-n)\, x^{-(n+1)} = (-1)^n n!\, x^{-(n+1)}$$

Aproksymacja wielomianem Taylora – zastosowanie

Po obliczeniu $f(1) = 1 = f^{(0)}(1)$ oraz $f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$ i podstawieniu do (4), otrzymujemy

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 1 - (x-1)$$

$$P_2(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2$$

$$P_3(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3$$

$$\dots$$

$$P_n(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots + (-1)^n (x-1)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (x-1)^i$$

Wartości $P_0(3), P_2(3), \dots, P_7(3)$ wynoszą kolejno: $1, -1, 3, -5, 11, -21, 43, -85$. Zatem dosyć istotnie różnią się od wartości funkcji $f(3) = 1/3$.

Zobacz Przykład 3 w skrypcie 08AproksymacjeInterpolacje1.R

Aproksymacja Taylora daje dobre przybliżenie funkcji f w niewielkim otoczeniu $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ punktu x_0, dla pozostałych punktów różnice w wartościach są zwykle duże.