Zadania 2 – rozkłady ciągłe

1. Zmienna losowa ma rozkład jednostajny na odcinku $[0,1]$. Oblicz prawdopodobieństwo: $P(\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{3}{4})$, $P(X < 1/2)$, $P(X > 1/2)$.

2. Zmienna losowa ma rozkład jednostajny na odcinku $[2,6]$. Oblicz prawdopodobieństwo: $P(3 \leqslant X < 5)$, $P(X \leqslant 3$, $P(X > 3)$.

3. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 2$. Oblicz $P(X > 3)$, $P(X \leqslant 1)$, $P(X \in (1,3)$.

4. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 3$. Oblicz $P(X \geqslant 4)$ oraz $P(X < 2)$, $P(X \in [2,4])$.

5. Zmienna losowa X ma rozkład normalny o parametrach $m = 0$, $\sigma = 1$. Oblicz: $P(X < 1)$, $P(X \leqslant -1)$, $P(-2 \leqslant X < 2)$, $P(|X| < 3)$.

6. Zmienna losowa X ma rozkład normalny o parametrach $m = 0$, $\sigma = 1$. Oblicz: $P(X \leqslant 0.2)$, $P(X < -0.1)$, $P(-0.2 < X < 0.1)$, $P(|X-1| < 0.5)$.

7. Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 0 \\ x & \text{dla } x \in (0,1] \\ 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

Wyznacz gęstość zmiennej X.

8. Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{dla } x \in (0,1] \\ 1 - \frac{1}{2x} & \text{dla} x > 1. \end{cases}$$

Wyznacz gęstość zmiennej X.

9. Przyjmujemy, że czas wyrażony we frakcji godziny potrzebny studentowi na udzielenie odpowiedzi na pytanie jest zmienną losową X o gęstości zadanej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + x & \text{dla } x \in (0,1) \\ 0 & \text{dla } x \notin (0,1) \end{cases}$$

a) Wyznacz dystrybuantę zmiennej X i oblicz $F(-1), F(0), F(\frac{3}{4}), F(1)$.

b) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że student odpowie na pytanie w czasie krótszym niż pół godziny.

c) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że student odpowie na pytanie w ostatniej minucie.

10. Czas pozostawania pewnego towaru na półce sklepowej mierzony w godzinach modelujemy jako zmienną losową X o funkcji gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20000}{(x+100)^3} & \text{dla } x \in (0,\infty) \\ 0 & \text{dla } x \notin (0,\infty). \end{cases}$$

Oblicz prawdopodobieństwo pozostawania tego towaru na półce przez

a) co najmniej 200 godzin,

b) co najwyżej 100 godzin,

c) od 80 do 120 godzin.

11. Wiedząc, że $EX = 2$ i $VarX = 1$ oblicz: E(5X-20) i $Var(2X - 8)$.

12. Rzucono trzema monetami. Niech X oznacza liczbę uzyskanych orłów. Oblicz EX, $VarX$ oraz EY i $VarY$, gdzie $Y = 3X + 5$.

13. Niech $EX^2 = 6$, $EX = 2$. Oblicz $E(5X + 1)$ i $Var(6X + 2)$.

14. Niech $EX^2 = 1$, $EX = \frac{1}{2}$. Oblicz $E(6X^2 - 3)$ i $Var(3X - 8)$.

15. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 4]$. Oblicz $E(2X + 1)$, $E(X^2 + 5)$.

16. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[2, 8]$. Oblicz $E(3X - 1)$, $E(2X^3 + 6)$.

17. Zmienna losowa ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 2]$. Oblicz EY i $VarY$, jeżeli:
a) $Y = 2X^2$, b) $Y = 1 - X^3$.

18. Zmienna losowa ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 1$. Oblicz EY i $VarY$, jeżeli:
a) $Y = 2X^2$, b) $Y = 1 - X^2$

19. Niech dla pewnego $c \in \mathbb{R}$ zmienna losowa X będzie zmienną losową o gęstości zadanej wzorem $f(x) = c \exp\{-x^2 + 6x\}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wyznacz c i oblicz EX i $Var(X)$.