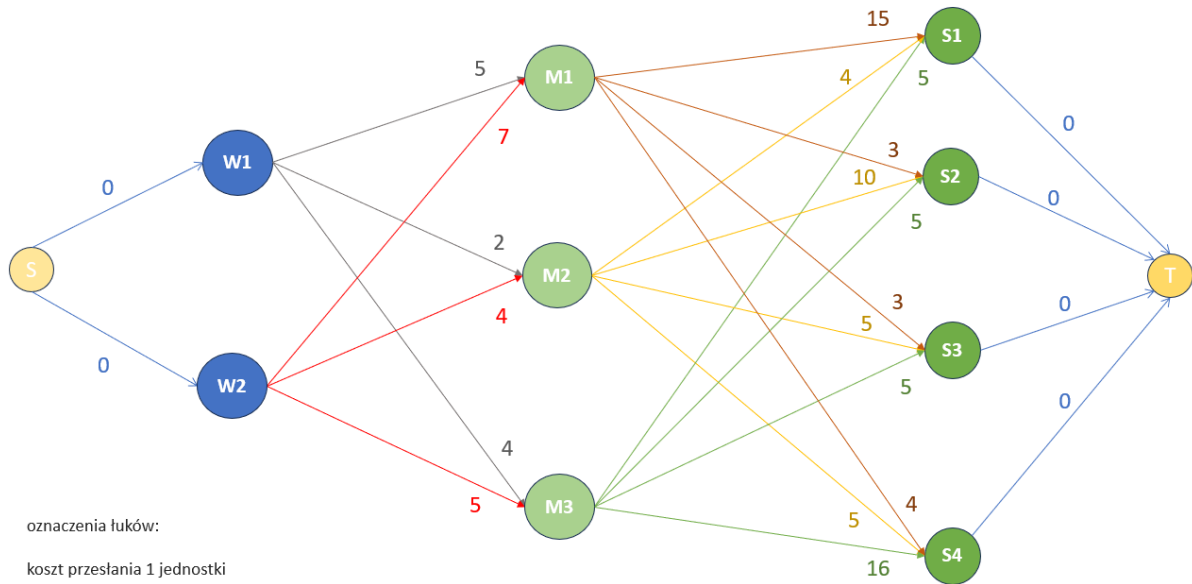


1. WSTĘP

Celem zadania było sformułowanie modelu sieci wielotowarowej, gdzie 2 rodzaje produktów są rozprowadzane z wytwórni do sklepów z wykorzystaniem magazynów jako stacji pośrednich. Wymagane było spełnienie ograniczeń produkcji, zapotrzebowania oraz pojemności magazynów w celu minimalizacji całkowitych kosztów przesłania produktów (transport + koszt utrzymania magazynów).



Rysunek 1. Szkic sieci z kosztami transportu.

2. SFORMUŁOWANIE MODELU

zbiory:

$WYTWÓRNIE = \{ W1, W2 \}$

$MAGAZYNY = \{ M1, M2, M3 \}$

$SKLEPY = \{ S1, S2, S3, S4 \}$

parametry:

M – duża stała w celu zarządzania granicami wartości progowych (przy opcjach magazynowych)

$produkcja, zapotrzebowanie, koszty_W_to_M, koszty_M_to_S$ – parametry sieci wielotowarowej

Parametry zostały zainicjowane wartościami podanymi w instrukcji:

```
param M = 9999;

param produkcja:          W1  W2 :=
P1  41  34
P2  105 116;

param zapotrzebowanie:    S1 S2 S3 S4 :=
P1  18 12 15 16
P2  38 46 53 51;

param koszty_W_to_M:      M1 M2 M3 :=
W1  5  2  4
W2  7  4  5;

param koszty_M_to_S:      S1 S2 S3 S4 :=
M1  15 3  3  4
M2  4 10 5  5
M3  5  5  5 16;
```

Rysunek 2. Wartości parametrów.

zmienne:

$m1_1, m2_1, m2_2$ – zmienne binarne reprezentują przekroczenie „progów” magazynowych
magazyn 1 ma opcje: 0 - 94 lub 95 - 109
magazyn 2 ma opcje: 0, 1 - 88, 89 - 109

$m3_n$ – ilość modułów magazynu n3 w których można pomieścić po 14 jednostek

$m1_quantity, m2_quantity, m3_quantity$ – ilość produktów w magazynach

$m1_cost, m2_cost, m3_cost$ – koszty utrzymania magazynów [tys. PLN]

ilości produktów na danych połączeniach:

$ilosc_P1_W_to_M \{WYTWÓRNIE, MAGAZYNY\}$, $ilosc_P2_W_to_M \{WYTWÓRNIE, MAGAZYNY\}$,
 $ilosc_P1_M_to_S \{MAGAZYNY, SKLEPY\}$, $ilosc_P2_M_to_S \{MAGAZYNY, SKLEPY\}$

funkcja celu:

Funkcją celu jest suma kosztów, którą minimalizujemy:

$\min ((ilość\ przesyłanego\ towaru \cdot koszty\ połączeń) + koszty\ magazynów))$

Koszty połączeń oraz magazynów są niezależne od typu produktu, natomiast ze względu na ograniczenia produkcji i zapotrzebowania, zmienne „ilość” były zapisane w oddzielnie dla produktów P1 i P2. Na Rysunku 3 pokazana jest rozwinięta funkcja celu (z implementacji AMPL), z wykorzystaniem zmiennych „ilość”, mnożonych przez parametry „koszty”.

```
minimize F:      sum {w in WYTWÓRNIE, m in MAGAZYNY} ilosc_P1_W_to_M[w, m]*koszty_W_to_M[w, m]
+               sum {w in WYTWÓRNIE, m in MAGAZYNY} ilosc_P2_W_to_M[w, m]*koszty_W_to_M[w, m]
+               sum {m in MAGAZYNY, s in SKLEPY} ilosc_P1_M_to_S[m, s]*koszty_M_to_S[m, s]
+               sum {m in MAGAZYNY, s in SKLEPY} ilosc_P2_M_to_S[m, s]*koszty_M_to_S[m, s]
+               m1_cost + m2_cost + m3_cost;
```

Rysunek 3. Funkcja celu w implementacji AMPL.

ograniczenia:

Ograniczenia progów pojemnościowych magazynu 1. Zmienna binarna $m1_1 = 0$ jeśli wartość 94 jednostek nie została przekroczona, lub $= 1$ jeśli jest ich więcej.

$m1_quantity \geq 0$
 $m1_quantity \leq 94 + M \cdot m1_1$
 $m1_quantity \leq 94 - M \cdot (1 - m1_1)$
 $m1_quantity \leq 109$

$m1_quantity = (\sum \{w \text{ in } WYTWÓRNIE\} ilosc_P1_W_to_M[w, M1])$
 $+ (\sum \{w \text{ in } WYTWÓRNIE\} ilosc_P2_W_to_M[w, M1])$

Wprowadzenie stałej M umożliwia elastyczne zarządzanie górną granicą $m1_quantity$ w zależności od warunków spełnienia zmiennej binarnej $m1_1$. M została ustawiona na 9999, tak by była dużo większa niż oczekiwane wartości zmiennych, aby skutecznie "zdominować" warunki nieliniowe.

Ograniczenie kosztów magazynu 1 uzależnione od zmiennej binarnej ***m1_1***.

$$m1_cost \geq 348$$

$$m1_cost \geq 440 - M \cdot (1 - m1_1)$$

Analogicznie do magazynu nr 1, jednakże w tym przypadku mamy 2 progi, więc użyte zostały dwie zmienne binarne.

$$m2_quantity \geq 0$$

$$m2_quantity \leq 0 + M \cdot m2_1$$

$$m2_quantity \leq 88 - M \cdot (1 - m2_1)$$

$$m2_quantity \geq 88 - M \cdot (1 - m2_2)$$

$$m2_quantity \leq 109$$

$$m2_quantity = (\text{sum} \{w \text{ in WYTWÓRNIE} \} ilosc_P1_W_to_M[w, M2]) \\ + (\text{sum} \{w \text{ in WYTWÓRNIE} \} ilosc_P2_W_to_M[w, M2])$$

Ograniczenie kosztów magazynu nr 2:

$$m2_cost \geq 0$$

$$m2_cost \geq 324 - M \cdot (1 - m2_1)$$

$$m2_cost \geq 512 - M \cdot (1 - m2_2)$$

Magazyn nr 3 ma budowę modułową, dlatego wprowadzona została zmienna typu *integer* ***m3_n***, która oznacza ilość użytych modułów.

$$m3_quantity \geq 0$$

$$m3_quantity \leq 14 \cdot m3_n$$

$$m3_quantity = (\text{sum} \{w \text{ in WYTWÓRNIE} \} ilosc_P1_W_to_M[w, M3]) \\ + (\text{sum} \{w \text{ in WYTWÓRNIE} \} ilosc_P2_W_to_M[w, M3])$$

Każdy moduł kosztuje 18 tysięcy:

$$m3cost \geq 18 \cdot m3_n$$

Ograniczenie produkcji tak by ilości wysyłanych produktów nie przekraczały danych parametrów:

dla *w* in WYTWÓRNIE:

$$produkcja[P1, w] \geq \text{sum} \{m \text{ in MAGAZYNY} \} ilosc_P1_W_to_M[w, m]$$

dla *w* in WYTWÓRNIE:

$$produkcja[P2, w] \geq \text{sum} \{m \text{ in MAGAZYNY} \} ilosc_P2_W_to_M[w, m]$$

Ograniczenie równowagi w węzłach magazynów (wpływy = wypływy):

dla m in MAGAZYNY:

$$\text{sum} \{w \text{ in WYTWÓRNIE}\} \text{ilosc_P1_W_to_M}[w, m] = \text{sum} \{s \text{ in SKLEPY}\} \text{ilosc_P1_M_to_S}[m, s]$$

dla m in MAGAZYNY:

$$\text{sum} \{w \text{ in WYTWÓRNIE}\} \text{ilosc_P2_W_to_M}[w, m] = \text{sum} \{s \text{ in SKLEPY}\} \text{ilosc_P2_M_to_S}[m, s]$$

Ograniczenie zapotrzebowania, tak by ilości wysyłanych produktów nie przekraczały parametrów:

dla s in SKLEPY:

$$\text{zapotrzebowanie}[P1, s] \leq \text{sum} \{m \text{ in MAGAZYNY}\} \text{ilosc_P1_M_to_S}[m, s]$$

dla s in SKLEPY:

$$\text{zapotrzebowanie}[P2, s] \leq \text{sum} \{m \text{ in MAGAZYNY}\} \text{ilosc_P2_M_to_S}[m, s]$$

3. WYNIKI

Wartość funkcji celu: 2851 tys. = **2 851 000 [PLN]**

Tabela 1. Ilość produktów P1 i P2 przesyłanych z wytwórni do magazynów.

	P1	P2
W1 - M1	41	53
W1 - M2	0	52
W1 - M3	0	0
W2 - M1	0	0
W2 - M2	2	34
W2 - M3	18	49

Tabela 2. Ilość produktów P1 i P2 przesyłanych z magazynów do sklepów.

	P1	P2
M1 – S1	0	0
M1 – S2	12	0
M1 – S3	15	53
M1 – S4	14	0
M2 – S1	0	35
M2 – S2	0	0
M2 – S3	0	0
M2 – S4	2	51
M3 – S1	18	3
M3 – S2	0	46
M3 – S3	0	0
M3 – S4	0	0

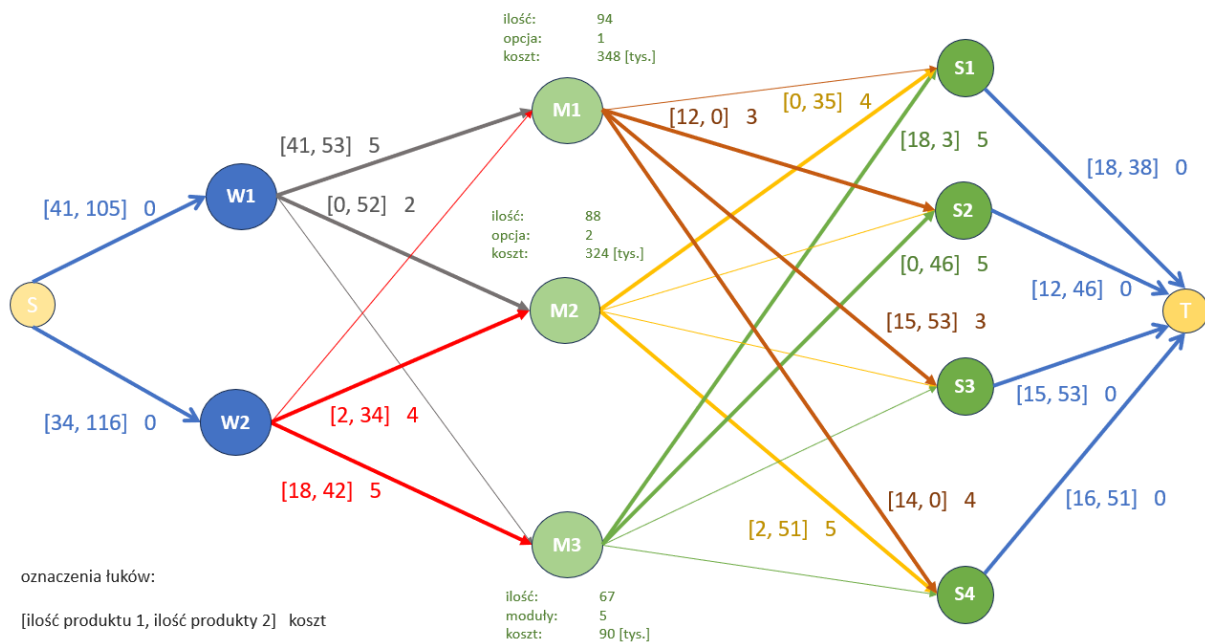
Tabela 3. Pozostałe zmienne.

m1_1	0
m2_1	1
m2_2	0
m3_n	5
m1_quantity	94
m2_quantity	88
m3_quantity	67
m1_cost	348
m2_cost	324
m3_cost	90

Wszystkie wartości kosztów podane są w tysiącach [tys. PLN].

Po „ręcznej” weryfikacji wszystkie ograniczenia dot. produkcji, zapotrzebowania oraz limitów miejsc w magazynach zostały spełnione. Rysunek 4 pokazuje znalezione rozwiązanie. W porównaniu z Rysunkiem 1, widać że pominięte zostały połączenia o wysokim koszcie (równym np. 16 czy 10).

Solver wybrał pierwszą opcję magazynu nr 1 (pojemność do 94 jednostek) i zapełnił go w całości, w magazynie nr 2 wybrał drugą opcję (pojemność do 88 jednostek) i również wykorzystał całe dostępne miejsce. Resztę jednostek ulokował w magazynie nr 4, składającym się z 5 modułów, gdzie na max 70 jednostek znalazło się 67. W kontekście ilości całkowitego przepływu produktów jedynie 3 niewykorzystane miejsca w magazynie to bardzo dobry wynik.



Rysunek 4. Szkic znalezionej rozwiązania.