MODELOWANIE MATEMATYCZNE

PROJEKT 1

Student: **Hubert Groen**

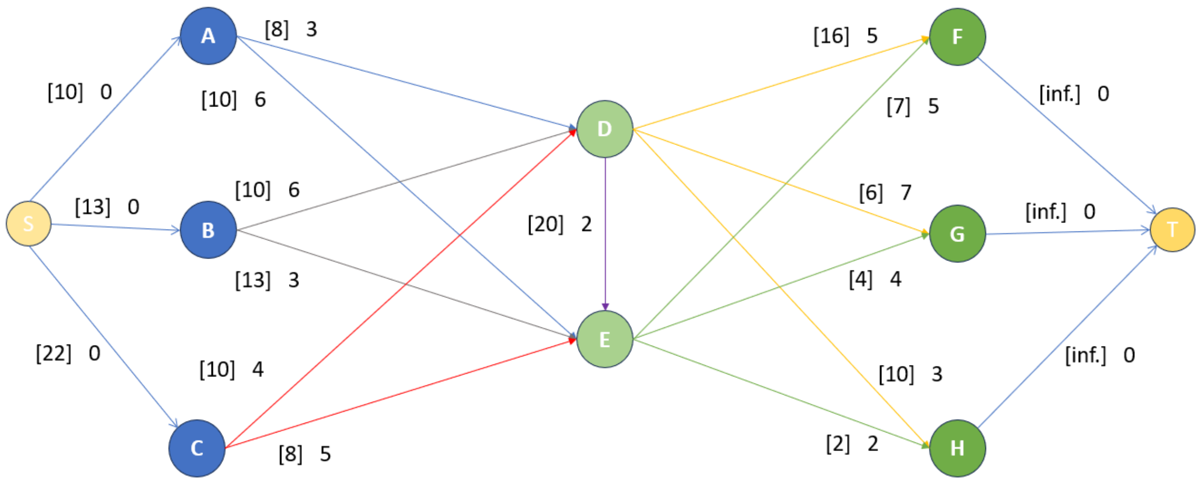
Nr albumu: **307866**

Data: **13.11.2023**

1. SIEĆ PRZEPŁYWOWA

1.1. Opis problemu

Problem do rozwiązania w tym zadaniu to **problem najtańszego przepływu**, przy spełnieniu ograniczeń zapotrzebowania na węgiel w elektrowniach i zdolności wydobywczych kopalń.



Rysunek 1. Sieć przepływowa z przepustowościami i kosztami.

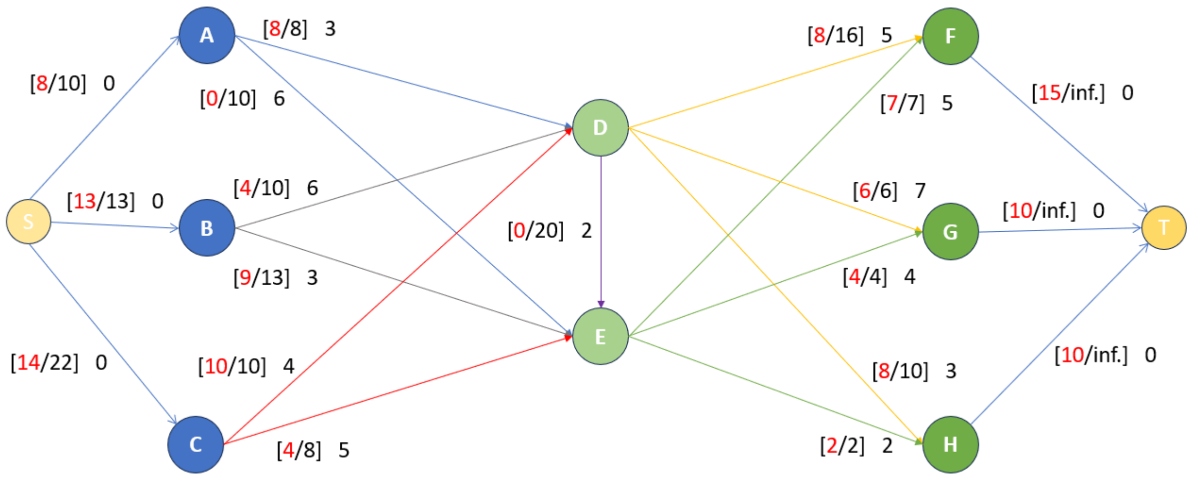
W nawiasach kwadratowych znajduje się przepustowość danych krawędzi (wyrażone w **tys. ton**), a po liczba po prawej stronie od nawiasu oznacza ich koszt, za którego jednostkę przyjęto [**tys. USD**] - kwota arbitralna, wybrana na potrzeby opisu zadania.

1.2. Rozwiązanie

Rozwiązanie zostało znalezione algorytmicznie formułując zadanie programowania liniowego (pokazane w 1.3).

Sumaryczny koszt przepływu to: **296 [tys. USD]**

Po „ręcznym” sprawdzeniu wszystkie ograniczenia zostały spełnione. W takiej konfiguracji dziennie przesyłane jest **35 tys. ton** i zaspokaja to zapotrzebowanie wszystkich elektrowni.



Rysunek 2. Rozwiązanie.

1.3. Sformułowanie zadanie programowania liniowego

Zmienne decyzyjne (wszystkie odcinki transportu kolejowego):

x_{AD}, x_{BD}, x_{CD}, x_{AE}, x_{BE}, x_{CE} - ilość węgla [tys. ton] przewożonego z kopalń A, B, C do stacji D i E

x_{DF}, x_{DG}, x_{DH}, x_{EF}, x_{EG}, x_{EH} - ilość węgla [tys. ton] przewożonego z kopalń A, B, C do stacji D i E

x_{DE} - ilość węgla [tys. ton] przewożonego pomiędzy stacjami pośrednimi (z D do E)

Do zmiennych decyzyjnych można by dodać krawędzie SA, SB, SC oraz FT, GT, HT, by zapisać na nich ograniczenia wydobycia/poboru. Natomiast zapiszę te ograniczenia w postaci sumy wejść węzłów, przez co dodatkowe zmienne nie będą potrzebne.

Funkcja celu:

$$\min \quad 3x_{AD} + 6x_{AE} + 6x_{BD} + 3x_{BE} + 4x_{CD} + 5x_{CE} + 2x_{DE} + 7x_{DF} + 5x_{EF} + 7x_{DG} + 4x_{EG} + 3x_{DH} + 2x_{EH}$$

Ograniczenia źródeł (zdolności wydobywcze kopalń):

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x_{AD}} + \boldsymbol{x_{AE}} \leq \mathbf{10}$$

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x_{BD}} + \boldsymbol{x_{BE}} \leq \mathbf{13}$$

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x_{CD}} + \boldsymbol{x_{CE}} \leq \mathbf{22}$$

Ograniczenia ujść (zapotrzebowanie elektrowni):

$$\boldsymbol{x_{DF}} + \boldsymbol{x_{EF}} >= \mathbf{15}$$

$$\boldsymbol{x_{DG}} + \boldsymbol{x_{EG}} >= \mathbf{10}$$

$$\boldsymbol{x_{DH}} + \boldsymbol{x_{EH}} >= \mathbf{10}$$

Tutaj równanie może być zapisane za pomocą **>=** lub **=**, wynik będzie taki sam, ponieważ funkcja będzie minimalizowana.

Ograniczenia przepustowości na poszczególnych odcinkach:

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x_{AD}} \leq \mathbf{8} \quad \mathbf{0} \leq \boldsymbol{x_{AE}} \leq \mathbf{10} \quad \mathbf{0} \leq \boldsymbol{x_{BD}} \leq \mathbf{10} \quad \mathbf{0} \leq \boldsymbol{x_{BE}} \leq \mathbf{13} \quad \mathbf{0} \leq \boldsymbol{x_{CD}} \leq \mathbf{10} \quad \mathbf{0} \leq \boldsymbol{x_{CE}} \leq \mathbf{8}$$

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x_{DF}} \leq \mathbf{16} \quad \mathbf{0} \leq \boldsymbol{x_{EF}} \leq \mathbf{7} \quad \mathbf{0} \leq \boldsymbol{x_{DG}} \leq \mathbf{6} \quad \mathbf{0} \leq \boldsymbol{x_{EG}} \leq \mathbf{4} \quad \mathbf{0} \leq \boldsymbol{x_{DH}} \leq \mathbf{10} \quad \mathbf{0} \leq \boldsymbol{x_{EH}} \leq \mathbf{2}$$

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x_{DE}} \leq \mathbf{20}$$

Równowaga w węzłach:

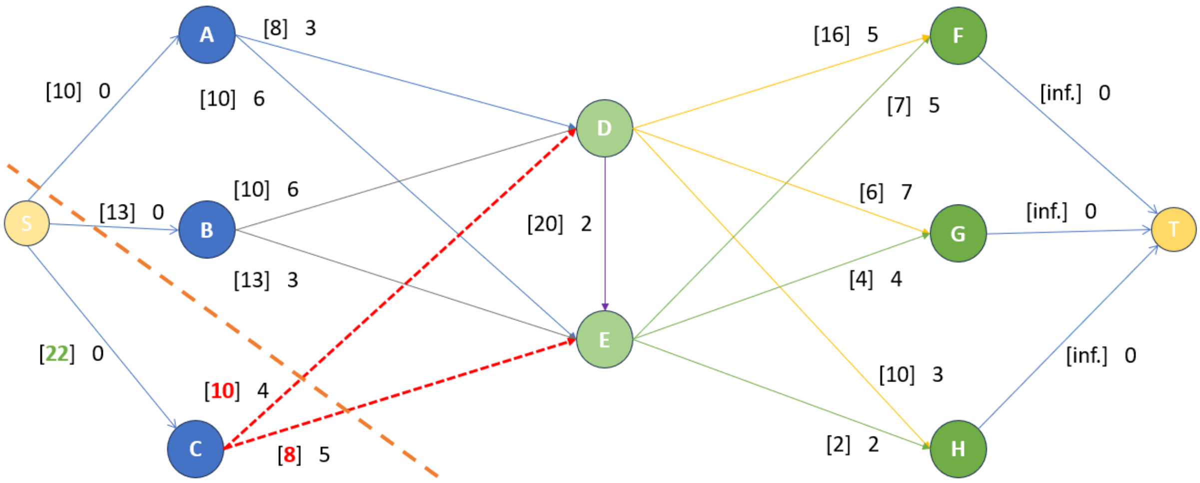
$$\boldsymbol{x_{AD}} + \boldsymbol{x_{BD}} + \boldsymbol{x_{CD}} = \boldsymbol{x_{DE}} + \boldsymbol{x_{DF}} + \boldsymbol{x_{DG}} + \boldsymbol{x_{DH}}$$

$$\boldsymbol{x_{AE}} + \boldsymbol{x_{BE}} + \boldsymbol{x_{CE}} + \boldsymbol{x_{DE}} = \boldsymbol{x_{EF}} + \boldsymbol{x_{EG}} + \boldsymbol{x_{EH}}$$

1.4. Przekrój o najmniejszej przepustowości

Linia przekroju o najmniejszej przepustowości (**41 tys. ton**) zaznaczona jest na pomarańczowo. Daje on informację o „wąskim gardle” (ang. *bottleneck*) znajdującym się na łukach **C-D** i **C-E**, ponieważ ich łączna przepustowość to **18 tys. ton**, a zdolność wydobywcza kopani **C** wynosi **22 tys. ton**. Pokazuje to, że odcinki transportowe wychodzące z tej kopalni, nie zostały przystosowane do możliwości wydobywczych.

W kopalniach A i B, nie ma tego problemu i suma przepustowości dla odcinków eksportu węgla jest większa niż ich zdolności wydobywcze, co oznacza, że ich ograniczeniem są po prostu możliwości wydobywcze.

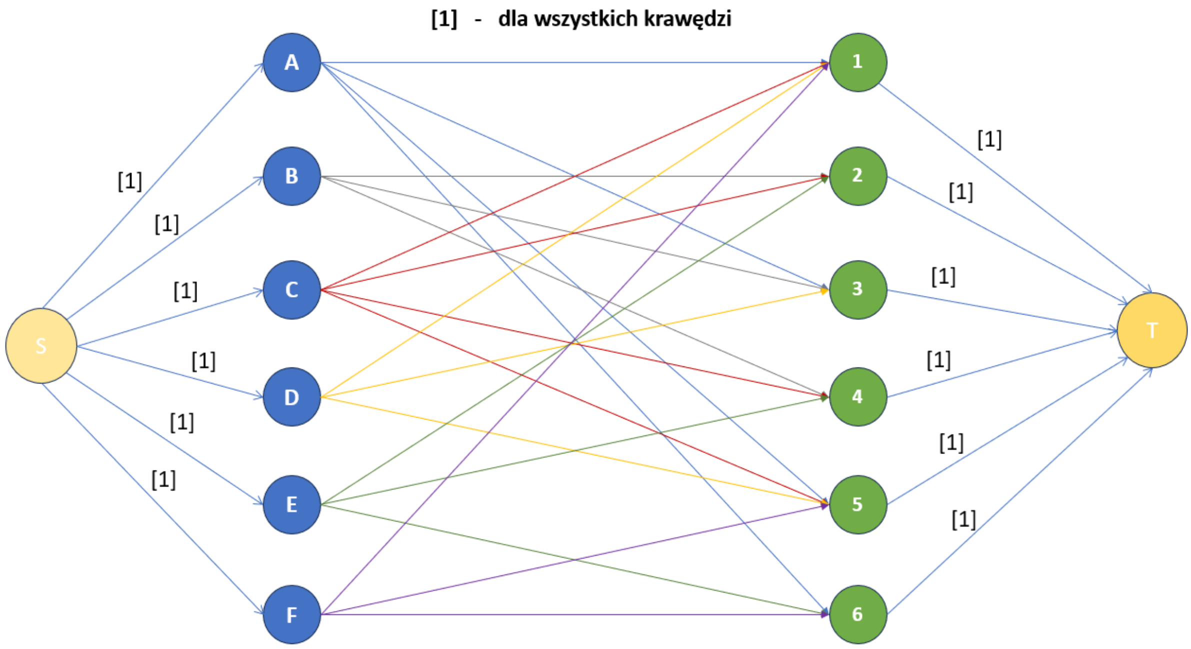


Rysunek 3. Przekrój.

2. ZADANIE PRZYDZIAŁU

2.1. Przydział zespołów do projektów

Ten problem to przykład **zadania maksymalnego skojarzenia (przydziału)**.



Rysunek 4. Szkic sieci przepływowej ZESPOŁY – ZADANIA.

Wszystkie łuki mają przepustowość 1 (oznaczone w [ ]). Koszt w tej części zadania jest pomijany.

Zmienne decyzyjne:

$x_{A1}, x_{A3}, x_{A5}, x_{A6}, x_{B2}, x_{B3}, x_{B4}, x_{C1}, x_{C2}, x_{C4}, x_{C5}, x_{D1}, x_{D3}, x_{D5}, x_{E2}, x_{E4}, x_{E6}, x_{F1}, x_{F5}, x_{F6}$

Które reprezentują dozwolone łuki x_{ZP} , czyli przypisanie zespołu Z do projektu P. Dozwolone, ponieważ nie wszystkie kombinacje są możliwe co wynika z treści zadania. Jak w poprzednim zadaniu pomijam wpisanie krawędzi od S do ZEPSŁÓW oraz od PROJEKTÓW do T jako zmiennych decyzyjnych, a ograniczenia na nich zapiszę w postaci równowagi węzłów.

Funkcja celu:

$$\max \ (\boldsymbol{x_{A1} + x_{A3} + x_{A5} + x_{A6} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4} + x_{C1} + x_{C2} + x_{C4} + x_{C5} + x_{D1} + x_{D3} + x_{D5} + x_{E2} + x_{E4} + x_{E6} + x_{F1} + x_{F5} + x_{F6}})$$

Ograniczenia zespołów (jeden zespół może realizować tylko jeden projekt):

$$\boldsymbol{x_{A1} + x_{A3} + x_{A5} + x_{A6} = 1} \qquad \boldsymbol{x_{B2} + x_{B3} + x_{B4} = 1}$$

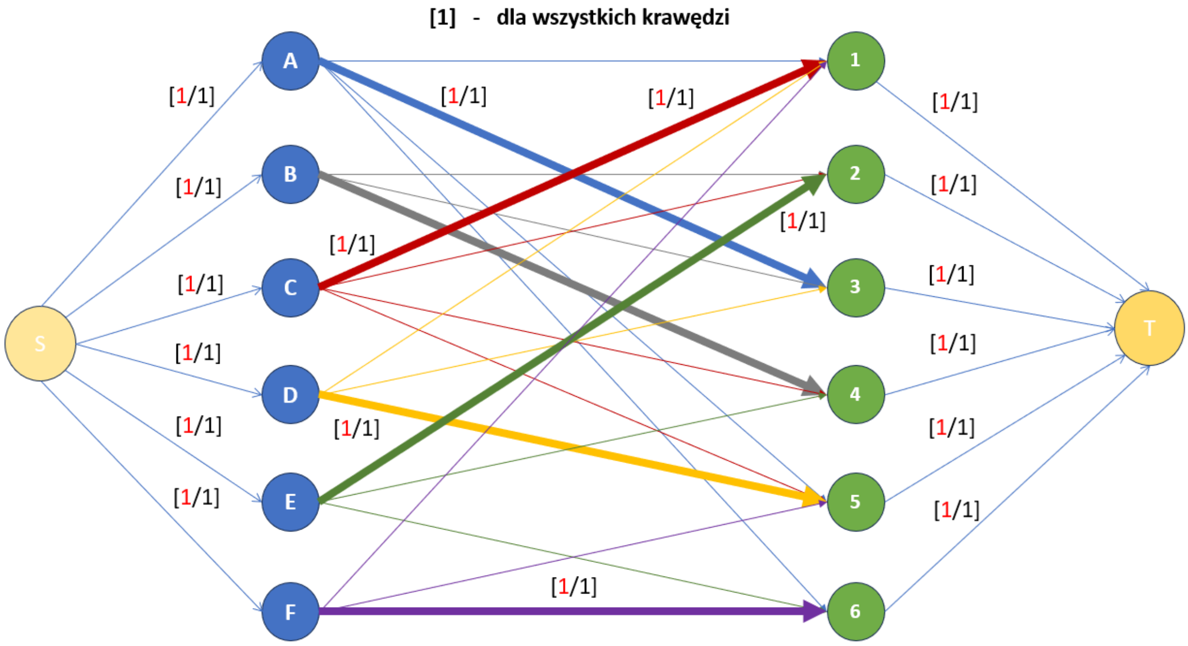
$$\boldsymbol{x_{C1} + x_{C2} + x_{C4} + x_{C5} = 1} \qquad \boldsymbol{x_{D1} + x_{D3} + x_{D5} = 1}$$

$$\boldsymbol{x_{E2} + x_{E4} + x_{E6} = 1} \qquad \boldsymbol{x_{F1} + x_{F5} + x_{F6} = 1}$$

Ograniczenia projektów (jeden projekt może być realizowany tylko przez jeden zespół):

$$\boldsymbol{x_{A1} + x_{C1} + x_{D1} + x_{F1} = 1} \quad \boldsymbol{x_{B2} + x_{C2} + x_{E2} = 1} \quad \boldsymbol{x_{A3} + x_{B3} + x_{D3} = 1}$$

$$\boldsymbol{x_{B4} + x_{C4} + x_{E4} = 1} \quad \boldsymbol{x_{A5} + x_{C5} + x_{D5} + x_{F5} = 1} \quad \boldsymbol{x_{A6} + x_{E6} + x_{F6} = 1}$$



Rysunek 5. Jedno z możliwych rozwiązań przydziału zespołów do projektów.

Jest to jest to rozwiązanie znalezione ręcznie, jedno z wielu możliwych. Napisany przeze mnie algorytm zadania liniowego o podanych ograniczeniach znalazł 28 rozwiązań, w tym powyższe.

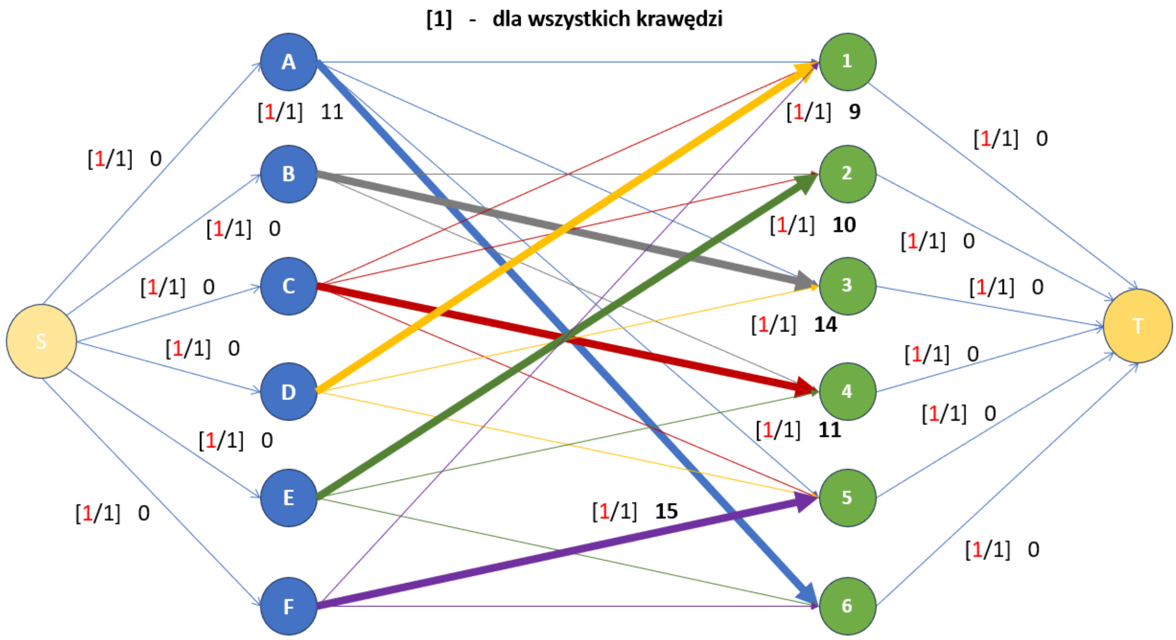
2.2. Minimalizacja kosztów realizacji projektów

Jeśli uwzględnimy koszty realizacji projektów przez poszczególne zespoły otrzymamy do rozwiązania **zadanie najtańszego skojarzenia (przydziału)**.

W matematycznym sformułowaniu zmianie ulegnie tylko funkcja celu – zmienne decyzyjne pomnożymy przez koszt. Koszty przepływów zostały umieszczone na opisach krawędzi i przyjęto że wyrażone są w [tys. USD]. Ograniczenia pozostaną takie same.

Zmieniona funkcja celu:

$$\max\ (\boldsymbol{15x_{A1} + 11x_{A3} + 13x_{A5} + 11x_{A6} + 12x_{B2} + 14x_{B3} + 16x_{B4} + 14x_{C1} + 16x_{C2} + 11x_{C4} + } \\ \boldsymbol{+ 17x_{C5} + 9x_{D1} + 12x_{D3} + 13x_{D5} + 19x_{E2} + 12x_{E4} + 16x_{E6} + 12x_{F1} + 15x_{F5} + 18x_{F6}})$$



Rysunek 6. Przy założeniu że jeden zespół może realizować tylko jeden projekt.

Sumaryczny koszt = 70 [tys. USD]

2.3. Minimalizacja terminu realizacji puli projektów

Funkcja celu:

$$\boldsymbol{F} = \mathbf{min}(\mathbf{max}\ \_\boldsymbol{cost_i}), \qquad \forall_i \in \{1,2,3,4,5,6\}$$

Funkcja celu ma za zadanie minimalizować maksymalny składnik – najdłuższe zadanie.

Ograniczenia czasowe dla składników *max_cost*:

$$\mathbf{max}\ \_\boldsymbol{cost_1} = \mathbf{15} \cdot \boldsymbol{x_{A1}} + \mathbf{14} \cdot \boldsymbol{x_{C1}} + \mathbf{9} \cdot \boldsymbol{x_{D1}} + \mathbf{12} \cdot \boldsymbol{x_{F1}}$$

$$\mathbf{max}\ \_\boldsymbol{cost_2} = \mathbf{12} \cdot \boldsymbol{x_{B2}} + \mathbf{16} \cdot \boldsymbol{x_{C2}} + \mathbf{10} \cdot \boldsymbol{x_{E2}}$$

$$\mathbf{max}\ \_\boldsymbol{cost_3} = \mathbf{11} \cdot \boldsymbol{x_{A3}} + \mathbf{14} \cdot \boldsymbol{x_{B3}} + \mathbf{12} \cdot \boldsymbol{x_{D3}}$$

$$\mathbf{max}\ \_\boldsymbol{cost_4} = \mathbf{16} \cdot \boldsymbol{x_{B4}} + \mathbf{11} \cdot \boldsymbol{x_{C4}} + \mathbf{12} \cdot \boldsymbol{x_{E4}}$$

$$\mathbf{max}\ \_\boldsymbol{cost_5} = \mathbf{13} \cdot \boldsymbol{x_{A5}} + \mathbf{17} \cdot \boldsymbol{x_{C5}} + \mathbf{13} \cdot \boldsymbol{x_{D5}} + \mathbf{15} \cdot \boldsymbol{x_{F5}}$$

$$\mathbf{max}\ \_\boldsymbol{cost_6} = \mathbf{11} \cdot \boldsymbol{x_{A6}} + \mathbf{16} \cdot \boldsymbol{x_{E6}} + \mathbf{18} \cdot \boldsymbol{x_{F6}}$$

Ograniczenia zespołów (jeden zespół może realizować tylko jeden projekt):

$$\boldsymbol{x_{A1} + x_{A3} + x_{A5} + x_{A6}} = \mathbf{1} \qquad \boldsymbol{x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}} = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{x_{C1} + x_{C2} + x_{C4} + x_{C5}} = \mathbf{1} \qquad \boldsymbol{x_{D1} + x_{D3} + x_{D5}} = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{x_{E2} + x_{E4} + x_{E6}} = \mathbf{1} \qquad \boldsymbol{x_{F1} + x_{F5} + x_{F6}} = \mathbf{1}$$

Ograniczenia projektów (jeden projekt może być realizowany tylko przez jeden zespół):

$$\boldsymbol{x_{A1} + x_{C1} + x_{D1} + x_{F1}} = \mathbf{1} \qquad \boldsymbol{x_{B2} + x_{C2} + x_{E2}} = \mathbf{1} \qquad \boldsymbol{x_{A3} + x_{B3} + x_{D3}} = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{x_{B4} + x_{C4} + x_{E4}} = \mathbf{1} \qquad \boldsymbol{x_{A5} + x_{C5} + x_{D5} + x_{F5}} = \mathbf{1} \qquad \boldsymbol{x_{A6} + x_{E6} + x_{F6}} = \mathbf{1}$$

Rozwiązanie problemu min max – wprowadzenie dodatkowej zmiennej reprezentującej minimalizowaną wartość i ograniczenie jej od dołu:

$$\max(\max\ \_cost_i) = y$$

Ostateczna funkcja celu:

$$\boldsymbol{F = \min y}$$

$y \geq \max\ \_cost_i$, $\forall_i \in \{1,2,3,4,5,6\}$

oraz wszystkie ograniczenia wymienione powyżej.

Po obliczeniach w programie optymalne rozwiązanie to przypisanie zespołów w ten sposób:

PROJEKT	ZESPÓŁ	DŁUGOŚĆ REALIZACJI [miesiąc]
1	F	12
2	E	10
3	B	**14** (najdłuższy projekt)
4	C	11
5	D	13
6	A	11

Termin realizacji najdłuższego projektu, a zarazem całego przedsięwzięcia, wynosi **14 miesięcy**.

<u>Dodatkowe sprawdzenie:</u>

Podane wartości są bardzo zbliżone. Żeby lepiej pokazać wykorzystanie tego rozwiązania, załóżmy, że zespół A może wykonać każde zadanie w 5 miesięcy (pozostałe wartości pozostają bez zmian) oraz zniosę ograniczenie że jeden zespół może wykonywać tylko jedno zadanie.

PROJEKT	ZESPÓŁ	DŁUGOŚĆ REALIZACJI [miesiąc]
1	F	**12** (najdłuższy projekt)
2	E	10
3	D	**12** (najdłuższy projekt)
4	C	11
5	A	5
6	A	5

W takim przypadku termin realizacji całego przedsięwzięcia wynosi **12 miesięcy**, ponieważ opłaca się przydzielić zespołowi A dwa zadania.

3. ZADANIE 3

Funkcja celu – suma ważona S_1 i S_2:

$$\min F = A \cdot \max(S_1) + \mathrm{B} \cdot S_2 \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{F = A \cdot \min(\max S_1) + B \cdot \min S_2}$$

S_1 – zbiór wszystkich względnych odchyleń

- celem zadania jest minimalizacja największego odchylenia $\mathbf{min}(\mathbf{max}\,\boldsymbol{S_1})$

S_2 – suma wszystkich względnych odchyleń

- celem zadania jest jej minimalizacja ($\mathbf{min}\,\boldsymbol{S_2}$)

Sformułowanie funkcji celu z takich składników może być korzystne ze względu analizy, ponieważ:

- maksymalne względne odchylenie pozwala skupić się na najbardziej niepożądanych / ekstremalnych przypadkach,

- suma wszystkich względnych odchyleń to adekwatna miara do analizy ogólnego błędu modelu.

Użycie sumy ważonej pozwala na dostosowanie wpływu każdego kryterium na ogólną funkcję celu. Ważenie może być dostosowane do specyficznych wymagań lub preferencji analityka.

Zmienne decyzyjne:

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ - ceny towarów po modyfikacjach, wyrażone w [USD]

Ograniczenia wynikające z treści zadania:

1. $x_1 + x_3 + x_8 \geq 1.12 \cdot (240 + 138 + 200) \quad \rightarrow \quad x_1 + x_3 + x_8 \geq 647.36$
2. $x_3 + x_5 \leq 0.93 \cdot (138 + 144) \quad \rightarrow \quad x_3 + x_5 \leq 262.26$
3. $x_3 \geq 0.8 \cdot x_7$
4. $\sum_{i=1}^{8} x_i = 1989$

Rozwiązanie problemu wartości bezwzględnej:

Odchylenie od wartości bazowej: $b_i - x_i$, może być dodatnie lub ujemne.

b_i – cena bazowa i-tego produkty
xi – cena po modyfikacjach i-tego produktu

Z tego względu należy wprowadzić dodatkowe zmienne, które je reprezentują:

$$\boldsymbol{b_i - x_i = od_i^+ - od_i^-},$$

gdzie ograniczamy odchyłki od dołu: $\mathrm{od}_\mathrm{i}^+ \geq 0, \mathrm{od}_\mathrm{i}^- \geq 0 \quad \forall_\mathrm{i} \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

A zatem względne odchylenia od bazowych cen produktów, możemy zapisać w ten sposób:

$$|\boldsymbol{b_i - x_i}| = \boldsymbol{od_i^+ + od_i^-}, \quad od_i^+ \geq 0, od_i^- \geq 0 \quad \forall_i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\},$$

co podstawimy w do składników S_1 oraz S_2 funkcji celu:

$$S_1 = max(od_i^+ + od_i^-), \qquad \forall_i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{8} od_i^+ + od_i^-$$

A zmodyfikowaną funkcję celu oraz ograniczenia:

$$\boldsymbol{F = A \cdot \min\big(max(od_i^+ + od_i^-)\big) + B \cdot \min\left(\sum_{i=1}^{8} od_i^+ + od_i^-\right)}$$

$\forall_i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$od_i^+ \geq 0, \ \forall_i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$od_i^- \geq 0, \ \forall_i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Rozwiązanie problemu *min max*:

$\min(\max(od_i^+ + od_i^-)), \qquad \forall_i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

W tym celu wprowadzamy dodatkowa zmienną reprezentującą minimalizowaną wartość:

$y = \max(od_i^+ + od_i^-), \qquad i\ ograniczamy\ ją\ od\ dołu:\ y \geq od_i^+ + od_i^-, \ \forall_i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Finalna funkcja celu:

Ostateczna postać funkcji celu z jej ograniczeniami możemy zapisać w ten sposób:

$$\boldsymbol{F = A \cdot \min(y) + B \cdot \min\left(\sum_{i=1}^{8} od_i^+ + od_i^-\right)}$$

$y \geq od_i^+ + od_i^-, \ \forall_i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$od_i^+ \geq 0, \ \forall_i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$od_i^- \geq 0, \ \forall_i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

I również ograniczenia wynikające z treści zadania, ale z podstawieniem odchyłek:

$\sum_{j \in I} -od_j^+ + od_j^- \geq 69.36, \qquad I = \{1,3,8\}$

$\sum_{j \in I} -od_j^+ + od_j^- \leq -19.74, \qquad I = \{3,5\}$

$-od_3^+ + od_3^- - 0.8 \cdot (-od_7^+ + od_7^-) \geq 20.4$

$$\sum_{i=1}^{8} -od_i^+ + od_i^- = 0$$

Po znalezieniu optymalnego rozwiązania ceny produktów po modyfikacjach obliczamy w ten sposób:

$\boldsymbol{x_i = b_i - od_i^+ + od_i^-}, \qquad \forall_i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Za jednostkę cen produktów został przyjęty dolar [USD].