



与时间无

6021 人关

如果看了这篇文章你还不**懂**傅里叶变换，那就过来掐死我吧（二）

Heinrich · 13 小时前

上一篇文章发出来之后，为了掐死我，大家真是很下工夫啊，有拿给姐姐看的，有拿给妹妹看的，还有拿给女朋友看的，就是为了听到一句“完全看不懂啊”。幸亏我留了个心眼，不然就真的像标题配图那样了。我的文章题目是，如果看了这篇文章你“还”不懂就过来掐死我，潜台词就是在你学了，但是没学明白的情况下看了还是不懂，才过来掐死我。

另外，想跟很多人抱歉，因为评论太多了，时间有限，不能给每个人回复，还望大家谅解。但是很感谢一直在评论区帮忙解答读者问题的各位，就不一一@了。

这里郑重感谢大连海事大学的吴楠老师，一位学识渊博、备课缜密、但授课不拘一格的年轻教师！当时大三他教我通信原理，但是他先用了4节课帮我们复习了很多信号与系统的基本概念，那个用乐谱代表频域的概念就是他讲的，一下子让我对这门课豁然开朗，才有了今天的这篇文章。

————今天的定场诗有点长————

下面继续开始我们无节操的旅程：

上次的关键词是：从侧面看。这次的关键词是：从下面看。

在第二课最开始，我想先回答很多人的一个问题：傅里叶分析究竟是干什么用的？这段相对比较枯燥，已经知道了的同学可以直接跳到下一个分割线。

先说一个最直接的用途。无论听广播还是看电视，我们一定对一个词不陌生——频道。频道频道，就是频率的通道，不同的频道就是将不同的频率作为一个通道来进行信息传输。下面大家尝试一件事：

先在纸上画一个 $\sin(x)$ ，不一定标准，意思差不多就行。不是很难吧。

好，接下去画一个 $\sin(3x) + \sin(5x)$ 的图形。

别说标准不标准了，曲线什么时候上升什么时候下降你都不一定画的对吧？

好，画不出来不要紧，我把 $\sin(3x) + \sin(5x)$ 的曲线给你，但是前提是你不知道这个曲线的方程式，现在需要你把 $\sin(5x)$ 给我从图里拿出去，看看剩下的是什么。这基本是不可能做到的。

但是在频域呢？则简单的很，无非就是几条竖线而已。

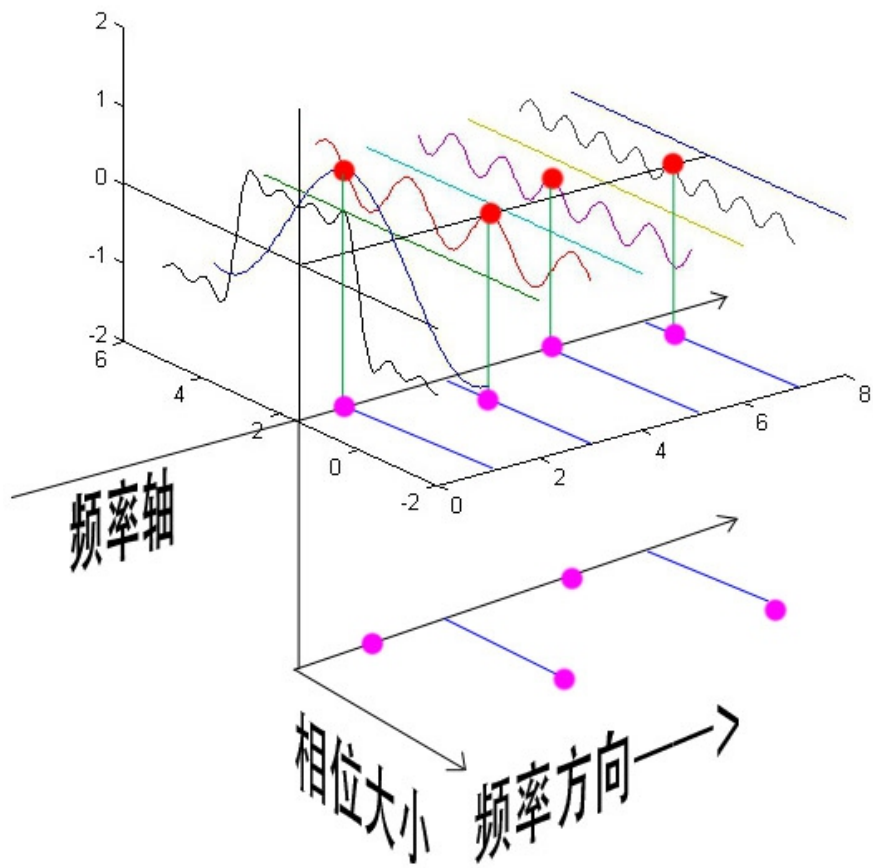
所以很多在时域看似不可能做到的数学操作，在频域相反很容易。这就是需要傅里叶变换的地方。尤其是从某条曲线中去除一些特定的频率成分，这在工程上称为滤波，是信号处理最重要的概念之一，只有在频域才能轻松的做到。

再说一个更重要，但是稍微复杂一点的用途——求解微分方程。（这段有点难度，看不懂的可以直接跳过这段）微分方程的重要性不用我过多介绍了。各行各业都用的到。但是求解微分方程却是一件相当麻烦的事情。因为除了要计算加减乘除，还要计算微分积分。而傅里叶变换则可以让微分和积分在频域中变为乘法和除法，大学数学瞬间变小学算术有没有。

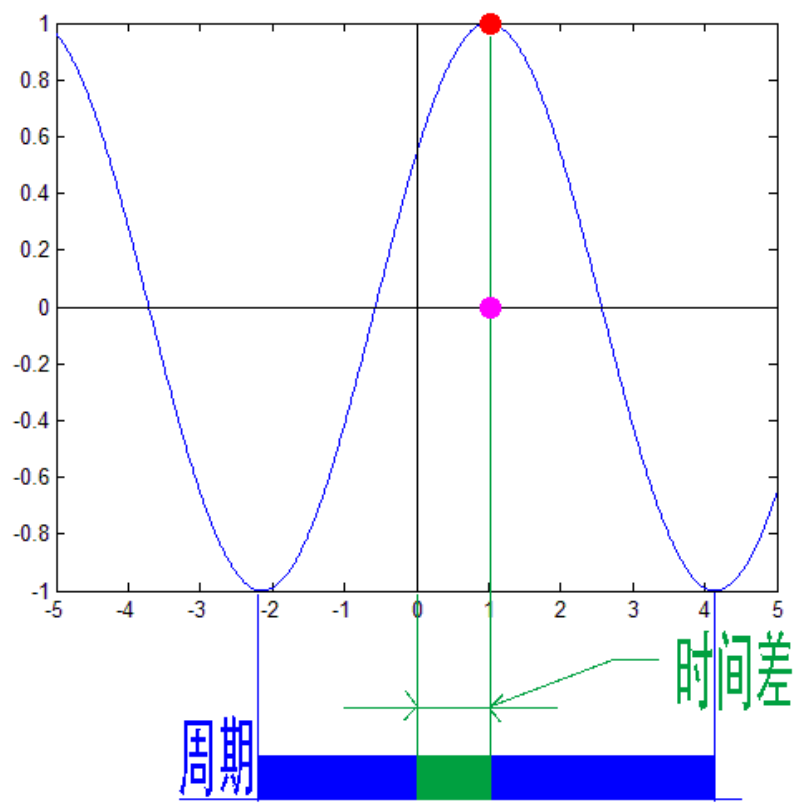
傅里叶分析当然还有其他更重要的用途，我们随着讲随着提。

下面我们继续说相位谱：

通过时域到频域的变换，我们得到了一个从侧面看的频谱，但是这个频谱并没有包含时域中全部的信息。因为频谱只代表每一个对应的正弦波的振幅是多少，而没有提到相位。基础的正弦波 $A \cdot \sin(\omega t + \theta)$ 中，振幅，频率，相位缺一不可，不同相位决定了波的位置，所以对于频域分析，仅仅有频谱（振幅谱）是不够的，我们还需要一个相位谱。那么这个相位谱在哪呢？我们看下图，这次为了避免图片太混乱，我们用7个波叠加的图。



鉴于正弦波是周期的，我们需要设定一个用来标记正弦波位置的东西。在图中就是那些小红点。小红点是距离频率轴最近的波峰，而这个波峰所处的位置离频率轴有多远呢？为了看的更清楚，我们将红色的点投影到下平面，投影点我们用粉色点来表示。当然，这些粉色的点只标注了波峰距离频率轴的距离，并不是相位。

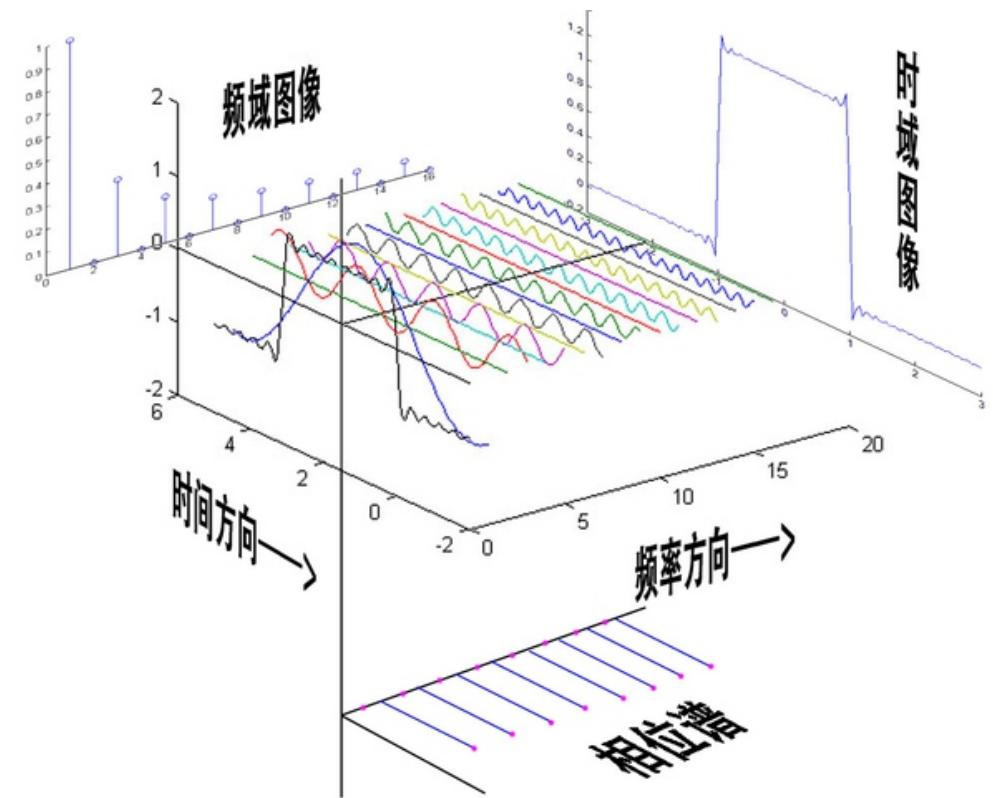


这里需要纠正一个概念：时间差并不是相位差。如果将全部周期看作 2π 或者 360° 的话，相位差则是时间差在一个周期中所占的比例。我们将时间差除周期再乘 2π ，就得到了相位差。

在完整的立体图中，我们将投影得到的时间差依次除以所在频率的周期，就得到了最下面的相位谱。所以，频谱是从侧面看，相位谱是从下面看。下次偷看女生裙底被发现的话，可以告诉她：“对不起，我只是想看看你的相位谱。”

注意到，相位谱中的相位除了 0 ，就是 π 。因为 $\cos(t + \pi) = -\cos(t)$ ，所以实际上相位为 π 的波只是上下翻转了而已。对于周期方波的傅里叶级数，这样的相位谱已经是很简单的了。另外值得注意的是，由于 $\cos(t + 2\pi) = \cos(t)$ ，所以相位差是周期的， π 和 3π ， 5π ， 7π 都是相同的相位。人为定义相位谱的值域为 $(-\pi, \pi]$ ，所以图中的相位差均为 π 。

最后来一张大集合：



好了，你是不是觉得我们已经讲完傅里叶级数了？

抱歉让你失望了，以上我们讲解的只是傅里叶级数的三角函数形式。接下去才是最究极的傅里叶级数——指数形式傅里叶级数。但是为了能更好的理解指数形式的傅里叶级数，我们还需要一个工具来帮忙——欧拉公式。

欧拉公式，以及指数形式的傅里叶级数，我们下一讲再讲。谢谢大家（鞠躬）。

今天讲的部分不多，但是希望大家能够理解，我也有自己的生活，留给知乎的时间并不多，但是我很喜欢在知乎与别人交流的过程。上一次的那些文章大家知道我当时写了多久么？四天，每天写6小时那种，而且当时还是在假期。主要是图太不好做了，有人问到作图的方法，其实就是简单的MATLAB+PHOTOSHOP，作图的确是很费时间，但是我相信做出这些图是值得的，因为我相信图一定比文字更好理解。也希望可以将这些自己学习时的感受和经验更完整的分享给需要的人。

所以请大家稍微有点耐心，我会认真把这个故事讲完。也谢谢大家的理解和支持。

最后推荐一下@张苏的答案：[如何学会傅里叶变换？](#)



如果看了这篇文章你还不理解傅里叶变换，那就过来掐死我吧

76 条评论



云天河

沙发诶，大连海事大学果然人才辈出！（我会说我也是么）

13 小时前



于轩燃

哇！太好了！有第二篇了。不过上一篇有好多问题想请教。不过打算整体看完汇总一下再问！

13 小时前



钟少奋

用图片说话真是易懂！上一篇用乐谱说明频域真是值得拍案叫绝。讲完傅里叶变换后可否讲一讲拉普拉斯变换的理解？

13 小时前

2 赞



hanc

还不睡

12 小时前



李思存

用图片说话真是易懂！上一篇用乐谱说明频域真是值得拍案叫绝。讲完傅里叶变换后可否讲一讲拉普拉斯变换的理解？ ----- 然后还有z变换...

12 小时前



王郁森

作为一个高中狗，虽然仍然不明白它的具体应用，但是居然大体看懂了作者所讲的大部分知识.....不得不佩服作者，讲解十分简洁明了！

12 小时前



洋芋芳 回复 王郁森

莫非你也失眠了

12 小时前



潘天琅

感谢作者，高中狗表示真的是一看就懂，真的觉得以前看名字就发怵的数学内容一下子就简单起来了！

12 小时前



陈陈

前排挤挤

12 小时前



唐道远

非常感谢~

12 小时前



贾名

太赞了，要是刚学信号那会儿看了肯定少走很多弯路，支持！！

12 小时前



巴清心

作者太牛了，早看到说不定数学就不会这么渣了

11 小时前



魏军

必须要赞

11 小时前



赵军

真心这些题主，加油继续

10 小时前



张新宇

加油~

9 小时前



Homaebic

终于更新了

9 小时前



张苏 回复 巴清心

傅立叶变换在普通的微积分课程中权重并不高 在信号与系统等课程中才开始展现威力的

9 小时前



哈斯巴根

大赞啊大赞。。。虽然高中生貌似还用不到。。。但轻轻松松地懂了还是很不错的
。。。作者坚持啊，不要挖坑。。。

9 小时前



王郁森 回复 洋芋芳

本来想要早点睡，结果1点的时候自己醒了.....

8 小时前



王云见

恨不得点101赞...

8 小时前

显示更多评论

写下你的评论...