数值偏微分方程课程报告1

陈柏锦

2025-10-13

摘要

本文实现并应用CSR（Compressed Sparse Row，压缩行存储）格式来存储和计算由二维Dirichlet边界泊松方程离散产生的稀疏线性方程组。报告给出CSR核心要素、矩阵装配（包括普通矩形域与切除三角形形成的非凸域），以及基本运算（SpMV、上/下三角与对角提取）以支持Jacobi与Gauss–Seidel迭代。针对网格上标记为pt_type=2的“近斜界面”点，本文根据实际代码（mesh.cpp）采用特殊非对称格式近似拉普拉斯，从而在靠近斜率为2的边界处获得更好的离散与求解性能。

1 任务与目标

实现CSR稀疏矩阵存储格式，核心功能：

1. 存储元素：非零元个数 nnz、矩阵规模 (m, n)、每行起始位置（row_ptr）、非零元列索引（col_idx）以及元素值（val）。
2. 构造稀疏矩阵：以二维Dirichlet边界泊松方程系数矩阵为例（五点格式为主），并支持通过屏蔽三角区域形成的非凸域。
3. 基本操作：矩阵向量乘法（SpMV）、提取上下三角、提取对角线（服务于Jacobi/GS等迭代求解）。

2 CSR 存储格式

CSR（行压缩）用三条数组表示 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 的非零结构：

- **row_ptr**（长度 $m+1$）：第 i 行的非零条目在 `col_idx/val` 中的范围为 $[\texttt{row\_ptr}[i], \texttt{row\_ptr}[i+1])$。
- **col_idx**（长度 nnz）：对应非零条目的列索引（0-based）。
- **val**（长度 nnz）：对应非零条目的数值。

元信息包括 m, n, nnz。装配时常由三元组(i, j, val)累积后经排序与扫描压缩为CSR。

3 二维泊松方程与矩阵装配

考虑正拉普拉斯问题

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = g \quad \text{on } \partial\Omega,$$

在规则张量网格上，内点 (i,j) 的五点格式

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_y^2} = f_{i,j}$$

对应行系数：

$$A_{p,p} = \frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}, \quad A_{p,p\pm1(\text{x邻})} = -\frac{1}{h_x^2}, \quad A_{p,p\pm n_x(\text{y邻})} = -\frac{1}{h_y^2}.$$

Dirichlet 边界行替换为单位行：$A_{p,p} = 1,\ b_p = g$。

3.1 点类型与装配规则

网格点按 `pt_type` 分类：

- **pt_type=0**（不可用）：位于被切除三角形内部，不参与装配。
- **pt_type=1**（边界）：Dirichlet 边界，行置单位，b 取边值。
- **pt_type=3**（内部/常规）：采用标准五点格式，持有左右上下四个邻接条目与对角线。
- **pt_type=2**（近斜界面）：靠近斜率为2的斜界面（由三角切除形成的非凸边界）。为避免使用被移除点并增强稳定性，采用特殊非对称格式近似 Δu（见下文）。

3.2 近斜界面特殊格式（pt_type=2）

根据源码（mesh.cpp）对 `pt_type=2` 的行，使用如下条目（只在相应邻居存在且为活动点时加入）。设当前活动点线性索引为 p，其四个特别使用的邻居为 $(i-1,j)$、$(i+1,j+1)$、$(i,j-1)$、$(i-1,j-1)$，则离散行中非对角与对角系数为

$$\begin{aligned}
A_{p,\,p(i-1,j)} &= -\frac{2}{h_x^2}, \\
A_{p,\,p(i,\,j-1)} &= -\frac{2}{h_y^2}, \\
A_{p,\,p(i+1,j+1)} &= -\frac{1}{h_x h_y}, \\
A_{p,\,p(i-1,j-1)} &= \ \ \frac{1}{h_x h_y}, \\
A_{p,p} &= -\sum_{\substack{q\neq p \\ \text{同一行}}} A_{p,q}.
\end{aligned}$$

上述格式可理解为沿斜界面方向的一侧差分与混合项的组合，避免访问被移除区域的节点，同时在几何非凸、网格与界面不对齐的情形下，保持离散在预解后的对角占优性

说明 对于 `pt_type=2` 的条目，系数并非标准五点格式，包含了跨对角（$(i \pm 1, j \pm 1)$）的混合项。实际装配时，仅当对应邻居有效（映射线性索引$\neq -1$）时才写入该非零元。

4 CSR 基本操作

4.1 SpMV：$y \leftarrow Ax$

CSR 的 SpMV 为逐行线性扫描（时间复杂度 $O(\text{nnz})$），访存连续，有利于缓存与向量化。

4.2 提取上/下三角与对角线

按行扫描，保留满足条件的条目并重建CSR：

- 下三角 R（含对角）：$j \le i$；
- 上三角 U（含对角）：$j \ge i$；
- 对角线 D：$j = i$；若缺失可置 ε（提高迭代稳健性）。

5 迭代方法与实现要点

Jacobi $D = \text{diag}(A)$，$R = A - D$，更新

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(b - R\,x^{(k)}).$$

实现上用一次非零线性扫描累加每行的非对角贡献（支持OpenMP并行），再并行更新新解。

Gauss–Seidel 按行顺序前代入：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)}\right).$$

本工程采用对非零元单次线性扫描（先按行、列排序或直接利用CSR行段），在同一sweep中就地更新 x，避免重复索引与额外存储。

6 数值实验与误差分析

非凸域（切三角） 通过屏蔽三组三角区域，形成不规则边界，靠近斜界面处采用 `pt_type=2` 特殊格式。实验（日志）显示：$n = 22817$（自由度），非零元$nnz = 111{,}781$，GS 收敛迭代步数 31194，最终残差范数 8.19×10^{-7}，用时约 15.41s；误差指标 $\|e\|_\infty \approx 2.64 \times 10^{-5}$，$\|e\|_2 \approx 8.99 \times 10^{-6}$。与标准五点相比，近界面处的非对称项能减少访问无效节点带来的误差与发散风险。

矩形域（naive）结果补充　完整矩形域（无切除），外边界为Dirichlet 并使用同一解析解。该例装配得到 $nnz = 162{,}693$，自由度 $n = 33{,}153$。Gauss–Seidel 在容差 10^{-10} 下收敛于第 52055 次迭代；误差为 $\|e\|_\infty \approx 5.0 \times 10^{-5}$，$\|e\|_2 \approx 1.509 \times 10^{-5}$。在当前分辨率下，矩形域误差略高于非凸域结果，主要由于：(i) 自由度增加使条件数增大，GS 收敛更慢，迭代终止时误差更受迭代误差影响；(ii) 误差度量覆盖区域不同（非凸域排除了三角切除区），导致整体指标可有细微差异。提升精度的途径包括网格加密、切换到更高效的Krylov方法（如CG/PCG）或多重网格预条件。

案例	自由度 n	非零元 nnz	GS迭代步	误差（$\|e\|_\infty$ / $\|e\|_2$）
非凸域（R形）	22,817	111,781	31,194	2.64×10^{-5} / 8.99×10^{-6}
矩形域	33,153	162,693	52,055	5.00×10^{-5} / 1.509×10^{-5}

表 1: 两种区域下的装配规模、GS收敛与误差对比（公用解析解与边界条件）。

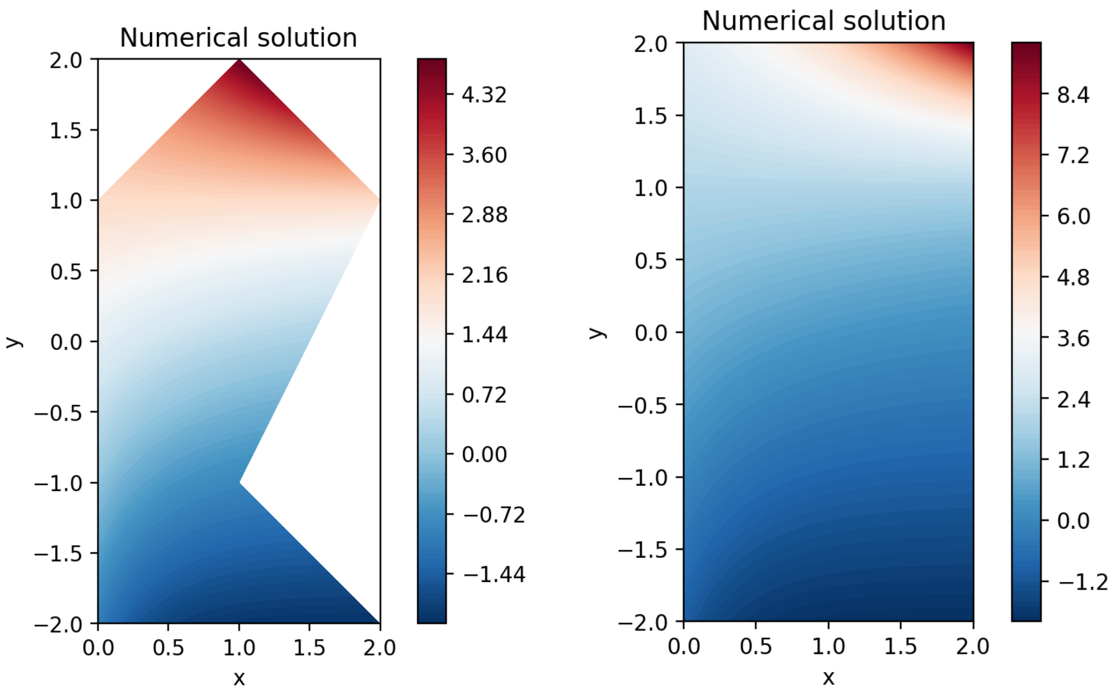

图 1: 左：非凸域数值解；右：矩形域数值解。

7　结论

本文实现了CSR稀疏格式、二维泊松方程系数矩阵装配与基本稀疏运算，并在Jacobi与Gauss–Seidel迭代中验证了其有效性。针对靠近斜率为2的复杂边界，代码对 `pt_type=2` 采用了特殊非对称格式，既避免了访问被切除区域，又在数值上保持了良好收敛。

代码与数据　矩阵与解存储于 `results/` 目录；绘图脚本见 `plot.py` 与 `naive.py`。