**Aufgabe 1.**

| Die Menge... | $A$ | $B$ | $D$ | $E$ | $G$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ist identisch mit der Menge... | $F$ | $C$ | $J$ | $H$ | $I$ |
| | $\{0\}$ | $\emptyset$ | $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ | $\{\sqrt{2}\}$ | $\mathbb{Q}$ |

Da man nicht vier Zuordnungen richtig und eine falsch haben konnte, gab es für drei richtige Zuordnungen noch einen Punkt geschenkt.

Bei den Notizen zu den Lösungen fand ich teilweise Mengen wie $\{\emptyset\}$ und $\{\mathbb{Q}\}$. Ich habe dafür keine Punkte abgezogen, aber Sie sollten sich für die Zukunft klarmachen, dass keine dieser beiden Mengen in der Aufgabe vorkam.

25 Teilnehmer erreichten die volle Punktzahl, im Schnitt gab es 1,0 Punkte. (Durchschnittswerte auf eine Stelle nach dem Komma gerundet.)

**Aufgabe 2.** $R_1$ ist nicht symmetrisch; z.B. ist $(1, 3) \in R_1$, aber $(3, 1) \notin R_1$. $R_1$ ist jedoch reflexiv auf $M$ und transitiv.

$R_2$ ist nicht transitiv; z.B. ist $(1, 2) \in R_2$, $(2, 3) \in R_2$, aber $(1, 3) \notin R_2$. $R_2$ ist jedoch reflexiv auf $M$ und symmetrisch.

$R_3$ ist nicht reflexiv auf $M$, denn $(2, 2) \notin R_3$. $R_3$ ist jedoch symmetrisch und transitiv.

Beachten Sie bitte, dass Aussagen wie $\{(1, 3)\} \in R_1$, $\{1, 3\} \in R_1$ oder $(2, 2) \in M$, die ich häufiger gelesen habe, *falsch* sind! Außerdem heißt es *Tupel* und nicht „Tüpel", und *symmetrisch* schreibt man mit Doppel-*m*.

Stilistische Anmerkung: Benutzen Sie nicht mathematische Symbole als Bestandteile von Sätzen. Sowas wie „$(1, 2)$ ist $\in R_2$" oder „$\forall x$ muss $(x, x) \in R_3$" oder „$2 \wedge 3 \in M$" schreibt man nicht!

59 Teilnehmer erreichten die volle Punktzahl, die Durchschnittspunktzahl war 1,8.

**Aufgabe 3.** Der kleinstmögliche Funktionswert ist $f(0) = \lceil 2 \cdot 0 + 1 \rceil = 1$. Wenn 10 zum Definitionsbereich der Funktion gehören würde, hätte $f(10)$ den Wert $\lceil 2 \cdot 10 + 1 \rceil = 21$. Aber diesen Wert erhält man z.B. auch durch $f(9.9)$. Ebenso wird jeder ganzzahlige Wert zwischen 1 und 21 angenommen, z.B. $4 = f(1.4)$. Daher ist der Wertebereich von $f$ die Menge $\{1, 2, 3, \ldots, 21\}$, die 21 Elemente hat.

Ich habe in der Vorlesung ausdrücklich darauf hingewiesen, dass $[0, 10)$ *nicht* die Menge $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ ist. Das ist aber offensichtlich bei vielen nicht angekommen.

Auch bei dieser Aufgabe fanden sich teilweise völlig sinnlose Aussagen wie z.B. „$[0, 20] \in \mathbb{Z}$“ in den Lösungen.

13 Teilnehmer haben beide Punkte bekommen, im Schnitt gab es 0,4 Punkte.

**Aufgabe 4.** Das wäre die richtige Lösung gewesen. Die zweite Zeile ist natürlich einfach das Gegenteil der ersten und die vierte das Gegenstück zur dritten. Die Menge ganz rechts ist die leere Menge.

| | {0,42} | [0,42) | [0,42)$\cap\mathbb{Z}$ | [0,42)$\cap\mathbb{Q}$ | [0,42)$\setminus\mathbb{Q}$ | [0,42)$\setminus\mathbb{R}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| endlich | ✓ | | ✓ | | | ✓ |
| unendlich | | ✓ | | ✓ | ✓ | |
| abzählbar | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ |
| überabzählbar | | ✓ | | | ✓ | |

Was auch nicht jedem klar war: Jede endliche Menge ist nach Definition abzählbar. Ergo ist jede überabzählbare Menge unendlich.

27 Teilnehmer erreichten die volle Punktzahl, der Durchschnitt war 1,3.

**Aufgabe 5.** Mit der arithmetischen Summenformel geht es so:

$$
\begin{aligned}
&55 + 60 + 65 + 70 + 75 + \cdots + 285 + 290 + 295 + 300 \\
&= 5 \cdot (11 + 12 + 13 + 14 + 15 + \cdots + 57 + 58 + 59 + 60) \\
&= 5 \cdot \sum_{k=11}^{60} k = 5 \cdot \left( \sum_{k=1}^{60} k - \sum_{k=1}^{10} k \right) = 5 \cdot \left( \frac{60 \cdot 61}{2} - \frac{10 \cdot 11}{2} \right) \\
&= \frac{5}{2} \cdot (3660 - 110) = \frac{5}{2} \cdot 3550 = 8875
\end{aligned}
$$

So geht's noch eleganter:

$$
\begin{array}{rccccccccccccccl}
 & & 55 & + & 60 & + & 65 & + & \ldots & + & 290 & + & 295 & + & 300 & \\
= \frac{1}{2} \cdot & \Big( & 55 & + & 60 & + & 65 & + & \ldots & + & 290 & + & 295 & + & 300 & + \\
 & & 300 & + & 295 & + & 290 & + & \ldots & + & 65 & + & 60 & + & 55 & \Big) \\
= \frac{1}{2} \cdot & \Big( & 355 & + & 355 & + & 355 & + & \ldots & + & 355 & + & 355 & + & 355 & \Big)
\end{array}
$$

Damit ergibt sich dann $\frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 355$, was natürlich auch 8875 ist.

Diese Aufgabe war nahezu identisch mit einer aus der letzten Klausur. Daher kann ich auch den Kommentar dazu fast unverändert übernehmen:

Es ging *nicht* um die Summe $\sum_{k=55}^{300} k$, obwohl viele das offenbar dachten.

Das und viele Rechenfehler (z.B. auch häufig falsche Klammerung) erklären den relativ schwachen Durchschnitt von 1,0 Punkten. Immerhin 22 Teilnehmer schafften aber doch die volle Punktzahl.

**Aufgabe 6.** $f$ ist surjektiv, denn jede rationale Zahl wird tatsächlich „getroffen". $f$ ist aber nicht injektiv, z.B. ist $f(1,2) = \frac{1}{2} = f(2,4)$.

Diese Aufgabe war wörtlich identisch mit einer, die vor einem Jahr schon mal gestellt wurde. Wenn Sie sich gründlich vorbereitet hatten, waren das also zwei geschenkte Punkte. Dafür mussten Sie aber auch sauber begründen. Für Unsinn wie „$\frac{1}{2} \in f$" oder „$(1,2) = 0.5$" gab es Punktabzüge.

Die Aufgabe ist mit einem Durchschnitt von 1,8 natürlich sehr gut ausgefallen. Die volle Punktzahl gab es in 53 Fällen.

**Aufgabe 7.** Wenn man geschickt kürzte, musste man nicht viel rechnen:

$$\begin{aligned}
\frac{7! \cdot 88 \cdot 9 \cdot \binom{41}{22}}{10! \cdot \binom{41}{21}} &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 88 \cdot 9 \cdot \binom{41}{22}}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \binom{41}{21}} = \frac{88 \cdot 9 \cdot \binom{41}{22}}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \binom{41}{21}} \\
&= \frac{11 \cdot \frac{41 \cdot 40 \cdot \cdots \cdot 21 \cdot 20}{22 \cdot 21 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1}}{10 \cdot \frac{41 \cdot 40 \cdot \cdots \cdot 22 \cdot 21}{21 \cdot 20 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1}} \\
&= \frac{11 \cdot 41 \cdot 40 \cdot \cdots \cdot 21 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 20 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 41 \cdot 40 \cdot \cdots \cdot 22 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 21 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1} \\
&= \frac{11 \cdot 20}{10 \cdot 22} = \frac{2}{2} = 1
\end{aligned}$$

Das war fast genauso wie in der letzten Klausur. Sie hätten also auf sowas vorbereitet sein können, und viele waren es offenbar auch.

Es gab aber auch recht viele Rechenfehler. Häufig lag es nach meiner Meinung einfach daran, dass Sie sich durch Ihr eigenes Geschmiere haben verwirren lassen. Außerdem hatten manche Teilnehmer wohl noch nie einen Binomialkoeffizienten gesehen. Und schließlich: $\frac{8}{8}$ ist *nicht* 0…

24 Teilnehmer erreichten die volle Punktzahl. Der Schnitt lag bei 1,0.

**Aufgabe 8.** Beide Tiere können diesen Satz an einem Tag sagen, an dem sie lügen, wenn der vorherige Tag ein „Wahrheitstag" war. Das ist für den Löwen der Montag und für das Einhorn der Donnerstag. Sie können ihn aber auch an einem Wahrheitstag sagen, wenn sie am Tag vorher wirklich gelogen haben. Für den Löwen wäre das der Donnerstag, für das Einhorn der Sonntag. Da beide es sagen, muss es ein Donnerstag gewesen sein.

Diese Aufgabe hat sicher einigen den Hals gerettet. 64 (!) Teilnehmer haben die volle Punktzahl erreicht. Der Schnitt lag deshalb bei 1,9.

**Aufgabe 9.** Die Zahlen 42, 23 und 10 sind irrelevant. Es reicht, dass es genug Bären von der jeweiligen Farbe gibt. Entscheidend ist das grüne Bärchen: entweder man nimmt es, oder man nimmt es nicht. Wenn man das grüne Bärchen nimmt, kann man sich noch vier weitere Bärchen nehmen und dabei unter drei Farben auswählen. Dafür gibt es $\frac{(4+2)!}{4!2!} = 15$ Möglichkeiten.[1] Wenn man das grüne Bärchen *nicht* nimmt, kann man sich fünf Bärchen nehmen und dabei ebenfalls unter drei Farben auswählen. Dafür gibt es $\frac{(5+2)!}{5!2!} = 21$ Möglichkeiten. Zusammen hat man also $15 + 21 = 36$ Möglichkeiten.

Man kann es auch etwas komplizierter machen: Es gäbe $\frac{(5+3)!}{5!3!} = 56$ Möglichkeiten, wenn genug grüne Bärchen vorhanden wären. Man muss also davon *alle* Möglichkeiten abziehen, bei denen man mehr als ein grünes entnimmt. Das sind eine (alle fünf sind grün) plus drei (vier sind grün) plus $\frac{(2+2)!}{2!2!} = 6$ (drei sind grün) plus $\frac{(3+2)!}{3!2!} = 10$ (zwei sind grün), also ingesamt 20. $56 - 20$ ist natürlich auch 36.

Wie ich in der Vorlesung schon sagte, bringt es wenig, einfach nur irgendeine Formel anzuwenden. Viele haben das aber doch gemacht. Ein Teilnehmer kam dabei z.B. auf über 35 Millionen Möglichkeiten, ohne das besonders verwunderlich zu finden.

Ab dieser Aufgabe trennte sich etwas die Spreu vom Weizen. Nur sieben Teilnehmer haben sie komplett richtig gelöst. Im Schnitt gab es 0,4 Punkte.

**Aufgabe 10.** Für $i = 1, 2, 3$ sei jeweils $A_i$ die Menge der Zahlen, die die $i$-te Bedingung erfüllen. Sicher ist $|A_1| = 99 - 9 = 90$. $A_2$ besteht aus den Zahlen (in Siebenerschritten) von $1 \cdot 7$ bis $142 \cdot 7 = 994$, hat also 142 Elemente. $A_3$ hat offensichtlich $3 \cdot 9 = 27$ Elemente. In $A_1 \cap A_2$ sind die Zahlen von $2 \cdot 7 = 14$ bis $14 \cdot 7 = 98$, also insgesamt 13 Stück. In $A_1 \cap A_3$ sind genau neun Zahlen. In $A_2 \cap A_3$ sind nur die Zahlen 7, 77 und 777. $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ ist schließlich $\{77\}$. Mit dem Inklusions-Exklusions-Prinzip ergibt sich als Antwort nun:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 90 + 142 + 27 - 13 - 9 - 3 + 1 = 235$$

In der letzten Stunde vor der Klausur hatte ich noch mal ausdrücklich darauf hingewiesen, wie wichtig es ist, die Aufgaben genau durchzulesen und auf Wörter

[1] Es handelt sich um Kombinationen mit Wiederholungen.

wie „mindestens" zu achten. Hat aber nicht bei allen gefruchtet. Ebenso haben einige das Wort *positiv* generös überlesen.

Ein Teilnehmer kam auf mehr als 11 Millionen solcher Zahlen. Respekt! Und wie kann man es für realistisch halten, dass mehr als 700 der 999 Zahlen, die kleiner als 1000 sind, durch 7 teilbar sind? Schließlich: Die Anzahl der Zahlen unter 1000, die durch 7 teilbar sind, kann nicht $\frac{1000}{7}$ sein, weil das keine ganze Zahl ist!

Auch hier nur sehr wenige, die die Aufgabe komplett richtig gelöst haben, nämlich vier. Viele andere hatten die richtige Idee, sind aber am Addieren und Subtrahieren von dreistelligen Zahlen gescheitert. Durchschnittspunktzahl: 0,5.

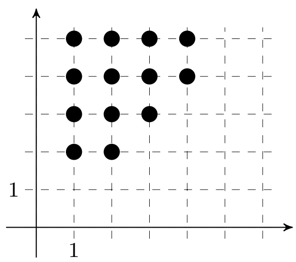
**Aufgabe 11.** Die Zahlen, die in Frage kommen, müssen einem der Muster $ggg$, $ggu$, $gug$, $ugg$, $gg$ oder $g$ entsprechen, wobei natürlich $g$ für eine gerade Ziffer und $u$ für eine ungerade steht. Andererseits ist jede Zahl, die so einem Muster entspricht, eine gültige Wahl, und sowohl für $g$ als auch für $u$ gibt es im Prinzip jeweils fünf Möglichkeiten. Ist die erste Position des Musters jedoch ein $g$, so gibt es dort nur vier Möglichkeiten, sonst würde man die Null mitzählen. Somit ergibt sich insgesamt:

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 4 = 17 \cdot 25 + 20 + 4 = 449$$

Unvermeidlich natürlich auch bei einer solchen Aufgabe, dass jemand eine Antwort wie „5000" abgibt. Andererseits hätte auch eine Antwort wie „105" Ihnen selbst seltsam vorkommen sollen. Ist es wirklich realistisch, dass die genannte Eigenschaft nur auf etwa 10% der Zahlen zutrifft?

Nur zwei Teilnehmer haben die volle Punktzahl erreicht. Was aber auch daran lag, dass viele die Aufgabe gar nicht bearbeitet haben. Einigen anderen habe ich noch einen Punkt für einen nicht ganz richtigen, aber zumindest brauchbaren Ansatz gegeben. Im Durchschnitt macht das 0,4.

**Aufgabe 12.** So hätte es aussehen sollen:



Wertepaare, die man für $(x, y)$ einsetzen kann, damit man diese 13 Punkte erreicht, sind z.B.

$$\begin{array}{cccc} (1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) \\ (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4.1) \\ (1,3) & (2,3) & (3,3.1) & \\ (1,2.1) & (2,2.1) & & \end{array}$$

Punkte weiter oben erreicht man nicht, weil $y$ und damit $\lfloor y \rfloor$ maximal 5 sein kann. Punkte weiter links erreicht man nicht, weil $x$ und damit $\lfloor x \rfloor$ immer mindestens den Wert 1 hat. Der Punkt $(5, 5)$ gehört nicht dazu, weil dann $y$ den Wert 5 haben müsste ($y > 5$ geht ja nicht) und das $x < y$ widerspricht. Der Punkt $(1, 1)$ gehört nicht dazu, weil immer $y > 2$ und damit $\lfloor y \rfloor \geq 2$ gilt. Und schließlich gehören Punkte $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ unterhalb der (orangen) Hauptdiagonalen nicht dazu, weil für die $m > n$ gelten würde. Für $(x, y)$ mit $(\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor) = (m, n)$ könnte dann aber nicht $x < y$ gelten.

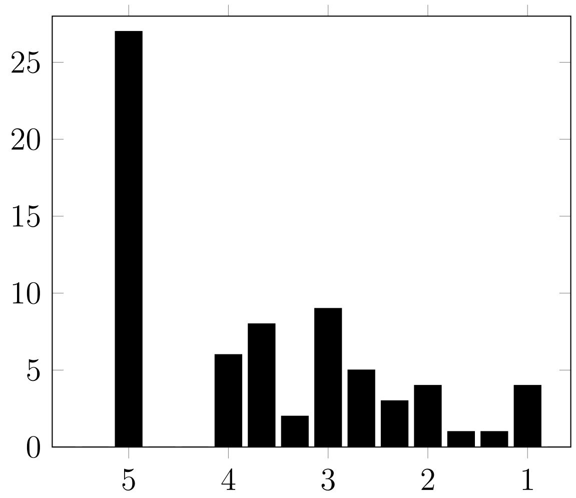
Zu der Aufgabe gehörte der Hinweis, dass $A$ nur aus endlich vielen Elementen besteht. Trotzdem bestanden einige Teilnehmer darauf, dass $A$ unendlich sei.

Ansonsten habe ich die Aufgabe für relativ leicht gehalten. Das stimmte aber wohl nicht. Nur fünf Teilnehmer haben sie richtig gelöst. Bei vielen anderen habe ich beide Augen zugedrückt und für eine „ungefähr“ richtige Lösung noch eine Punkt vergeben. Durchschnitt: 0,6.

## Weitere Kommentare

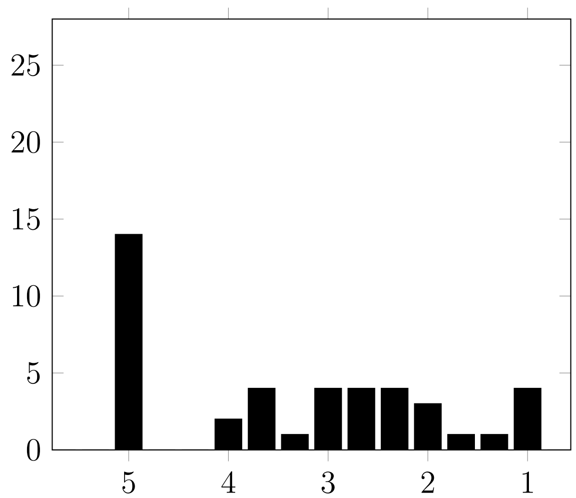
- Pro Aufgabe gab es zwei Punkte, die jedoch nur vergeben wurden, wenn die Aufgabe komplett richtig gelöst wurde. Bei kleineren Fehlern oder erkennbar guten Ansätzen gab es noch einen Punkt. Bruchteile von Punkten wurden nicht vergeben.
- Man musste zehn Punkte gesammelt haben, um zu bestehen. Für 19 Punkte oder mehr gab es die Note 1,0.
- Es gab vier glatte Einsen! Ein Teilnehmer hat sogar 21 Punkte erreicht. Leider darf ich dem aber auch nur die Note 1,0 geben.
- Insgesamt ist die Klausur gut ausgefallen, aber es hätte ruhig noch besser sein können.

## Ergebnisse




Von 71 Teilnehmern haben 44 – also ca. 62% – bestanden. Die Durchschnittsnote war 3,7.

Und hier noch einmal eine Version der Statistik, in der nur Erstsemester vorkommen:




Von 42 (!!!) Teilnehmern haben 28 – also etwa 67% – bestanden. Die Durchschnittsnote war 3,4.