Aufgabensammlung Mathe MS

Mir ist schon klar, dass alte Klausuren die Runde machen. Daher erspare ich Ihnen mit diesem Dokument die Suche danach. Sie finden hier alle Aufgabentypen, die bisher in Klausuren und Testaten vorkamen. (Und auch solche, die bisher nicht verwendet wurden.) Weil ich faul bin und auch nicht unendlich viele Ideen habe, werde ich evtl. einige von diesen Aufgaben (oder Variationen davon) wiederverwenden. Auf jeden Fall eignen sie sich zum Üben. Die Liste wird ab und zu aktualisiert. Siehe Datum unten.

In einer typischen Matheklausur müssen Sie 20 von diesen Aufgaben bearbeiten und mindestens zehn richtig beantworten, um zu bestehen. Außerdem haben Sie für einen Teil (!) der Aufgaben einen PC mit PYTHON zur Verfügung und dürfen den auch verwenden.

Noch ein paar Tipps und Hinweise:

- Es ist natürlich sinnvoll, zu üben und alte Aufgaben zu rechnen. Es ist aber sehr dumm, sich *nur* darauf zu verlassen. Die beste Vorbereitung auf Klausuren und Testate ist das *Verstehen* des Stoffs. Ich erlebe leider immer wieder, dass Klausurteilnehmer an Aufgaben scheitern, die gegenüber den gelernten nur minimal verändert wurden, weil sie nur stumpf ein Verfahren gepaukt haben, ohne zu begreifen, was sie da eigentlich machen.
- Die mit einem Stern ($\star$) markierten Aufgaben sollte man mit dem Wissen aus der Vorlesung auch *ohne* Computer lösen können. (Ggf. heißt das, dass Sie auf eine Antwort wie 2^{77} oder $\sqrt{5}$ kommen können, ohne dass Sie die Zahl wirklich von Hand *ausrechnen* sollen. Sie sollten also so weit kommen, dass Sie den Rest mit einem einfachen Taschenrechner erledigen können.)
- Ich gehe grundsätzlich davon aus, dass Sie die entsprechenden Kapitel im Buch gelesen und die Aufgaben dort bearbeitet haben. Wenn Sie das nicht machen, ist das Ihr Problem ...
- Wenn Sie eine Aufgabe nicht verstehen, fragen Sie bitte im EMIL-Forum nach.
- Ich veröffentliche absichtlich keine Lösungen. Vertrauen Sie nicht Lösungen, die Sie von Ihren Kommilitonen bekommen haben, sondern lösen Sie die Aufgaben selbst! Sollten Sie gar nicht weiterkommen, können Sie gerne in meiner Sprechstunde vorbeikommen; dafür ist sie da.
- Einige der Aufgaben in dieser Liste ähneln sich sehr. Das ist auch Absicht, damit Sie eine Vorstellung davon bekommen, was mit der *Variation* einer Aufgabe gemeint ist.
- Lesen Sie sich bitte den Abschnitt über exakte Antworten und Runden auf den nächsten beiden Seite aufmerksam durch.
- Bei Multiple-Choice-Fragen ist es durchaus möglich, dass *keine* Antwort richtig ist. Ebenso kann es sein, dass *alle* Antworten korrekt sind.
- Bei Angaben wie *Seite 82[78]* bezieht sich die Zahl in eckigen Klammern auf die erste Auflage.
- **In Ihren nächsten Klausuren und Testaten kommen garantiert auch neue Aufgaben vor, die noch nicht in der Aufgabensammlung stehen!**

Prof. Dr. Edmund Weitz Hamburg, 27. März 2023

Exakte Antworten und Runden

Sie lernen im ersten Semester, dass man viele Zahlen, die in der Mathematik vorkommen, nicht exakt als „Kommazahlen“ darstellen kann. Das gilt beispielsweise für Werte wie $\sqrt{7}$ oder π. Wenn bei einer Aufgabe nicht explizit etwas anderes steht, dann wird eine exakte Antwort erwartet. Anderenfalls wird die Antwort *nicht* gewertet! Dazu ein paar Beispiele:

- Was ist die positive Lösung der Gleichung $x^2 - 1 = 2$? Die richtige Antwort ist $\sqrt{3}$. Die Antwort 1.73 ist *falsch* und die Antwort 1.7320508075688772 ist *auch* falsch! Es ist in diesem Fall egal, wie viele Nachkommastellen Sie angeben.

- Wie viele Möglichkeiten gibt es, drei von sieben verschiedenen Schokoriegeln auszuwählen, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt? Die richtige Antwort ist 35. Die Antwort 35.0 ist *falsch* – auch wenn Ihr Computer Ihnen das anzeigt. Man könnte zwar argumentieren, dass das rein technisch korrekt ist, aber wenn Sie in so einem Fall 35.0 schreiben, dann zeugt das von tiefem Unverständnis, für das es keine Punkte gibt.

- Ein Kreis hat den Durchmesser 6. Welche Fläche[1] hat ein Fünftel des Kreises? Die richtige Antwort ist $\frac{9}{5}\pi$. Auch hier wäre $1.8\,\pi$ rein technisch nicht falsch, würde aber in Klausuren und Testaten nicht gewertet werden. Wenn eine Zahl also als Bruch ausgedrückt werden kann, dann soll sie auch so hingeschrieben werden. Wenn die Antwort $\frac{1}{3}$ ist, dann ist 0.33333 ganz falsch und $0.\overline{3}$ wird auch nicht gewertet.

- Ergebnisse sollen immer so einfach wie möglich hingeschrieben werden. Wenn die richtige Antwort $\frac{3}{4}$ ist, dann sind $\frac{6}{8}$ oder $\frac{9}{12}$ keine akzeptable Antworten. Und erst recht kann man nicht $\sqrt{16}$ oder $\frac{4}{1}$ schreiben, wenn die Antwort 4 ist. (Das ist alles schon vorgekommen!)

Merken Sie sich als Grundregel: Wenn in der Aufgabenstellung nicht von Runden, Nachkommastellen oder signifikanten Stellen die Rede ist, haben Dezimalpunkte oder -kommata in Ihrer Lösung nichts zu suchen! (Die einzige Ausnahme von dieser Regel sind Aufgaben wie 119, bei denen es ausdrücklich um „Kommazahlen“ geht.)

Was ist aber mit Aufgaben wie 322, bei denen gerundet werden *soll*? Wenn Sie überhaupt nicht wissen, wie gerundet wird, oder wenn Sie sich nicht sicher sind, dann schauen Sie sich zuerst die folgenden Videos an: `https://youtu.be/s0gPyypiGOs` und `https://youtu.be/-MmKccBJoaQ`. Den Rest erkläre ich auch anhand von Beispielen:

- Wenn bei einer Aufgabe steht, dass Sie etwas auf … Stellen nach dem Komma angeben sollen, dann ist damit immer gemeint, dass Sie runden sollen. Das bedeutet, wie in den Videos erklärt wird, dass Sie *die* Zahl mit … Nachkommastellen angeben sollen, die am dichtesten an der richtigen Lösung liegt. Wichtig ist also in erster Linie, dass Sie *richtig* runden. $\sqrt{6}$ auf zwei Stellen nach dem Komma ist beispielsweise 2.45 und *nicht* 2.44.

- Es ist *falsch*, „zur Sicherheit“ möglichst viele Stellen anzugeben. Der Sinus von 20° auf drei Stellen nach dem Komma ist 0.342 und *nicht* 0.3420201.

- Es ist aber auch falsch, Stellen wegzulassen.[2] Das gilt auch für Nullen! $\frac{\pi}{3}$ auf eine Stelle nach dem Komma ist 1.0 und *nicht* 1.

[1] In der Mathematik arbeitet man normalerweise anders als in der Physik nicht mit Einheiten. Sie müssen also nicht so etwas wie „FE“ oder „Flächeneinheiten“ schreiben. Die einzige Ausnahme sind Winkel, bei denen das Zeichen ° notwendig ist, wenn der Winkel in Grad angegeben wird, und bei denen *kein* Einheitenzeichen stehen darf, wenn der Winkel in Bogenmaß angegeben wird.

[2] Falls Ihnen das kleinlich vorkommt: Die korrekte Angabe signalisiert, inwieweit man dem Ergebnis trauen kann. In diesem Sinne ist die Zahl 12.40 „genauer“ als 12.4. Da Sie auch den korrekten Gebrauch der Fachsprache lernen sollen, ist der Unterschied wichtig.

- Wenn etwas gerundet angeben werden soll, dann muss die Antwort eine Zahl und kein „gemischter“ Term sein. $\sqrt{7} \cdot \pi$ auf zwei Stellen nach dem Komma ist 8.31 und *nicht* $2.65\,\pi$.
- Wenn wie in Aufgabe 287 nach *bestimmten* Nachkommastellen gefragt wird, dann hat das nichts mit Runden zu tun. π^2 auf drei Stellen nach dem Komma ist 9.870, aber die dritte Nachkommastelle von π^2 ist 9 und *nicht* 0.
- Machen Sie sich den Unterschied zwischen Nachkommastellen und signifikanten Stellen klar. (Das wird auch in den Videos erklärt.) π auf vier signifikante Stellen gerundet ist 3.142 und *nicht* 3.1416.
- Sollen Sie als Dezimaltrennzeichen einen Punkt oder ein Komma verwenden? Ich verwende im Unterricht und im Buch einen Punkt, aber Sie können auch ein Komma verwenden, wenn Sie möchten. Dann müssen Sie das aber auch konsequent machen und sich überlegen, wie Sie Ausdrücke wie $\{3.14, 12.7, 0.77\}$ oder $[1.5, 2.6]$ schreiben wollen, ohne dass es zu Missverständnissen kommt. Zumindest in den Mathematik-Modulen empfehle ich den konsistenten Gebrauch des Punktes als Dezimaltrennzeichen. Das passt dann auch zur Darstellung in PYTHON.

Sollte Ihnen bei den obigen Ausführungen etwas nicht klar sein, dann fragen Sie gerne im Forum des EMIL-Raums nach.

1. Erste Schritte mit Python

1

Berechnen Sie die Summe $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2$.

2

Berechnen Sie die Summe $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \cdots + 49^2$.

⋆3

Geben Sie die Summe der ersten 100 ungeraden natürlichen Zahlen an.

⋆4

Geben Sie die Summe der ersten 50 natürlichen Zahlen an, die größer als 200 sind.

Das sind einfache Programmierübungen, in denen es um Iteration geht. Wenn Sie die Funktion `sumFn` (Seite 9 im Buch) verstanden haben, sollten Sie das hinbekommen, indem Sie diese jeweils leicht abändern. (Wie kommt man z.B. von einer ungeraden Zahl zur nächsten? Indem man zwei addiert.)
Sie sollten sich diese Aufgaben noch einmal anschauen, nachdem in Kapitel 8 die Funktion `range` eingeführt wurde, weil es damit wesentlich eleganter geht.
Die mit einem Stern markierten Aufgaben können Sie auch ohne Rechner lösen, nachdem Sie Kapitel 16 bearbeitet haben.

5

Berechnen Sie die Summe $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \cdots - 54^3 + 55^3$.

Im Unterschied zu den vorherigen Aufgaben wechselt hier das Vorzeichen. Tipp: Einen Vorzeichenwechsel erreicht man z.B. durch Multiplikation mit -1.

6

Berechnen Sie das Produkt $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot 33$.

Das funktioniert so ähnlich wie bei den Summen. Sie sollten die Aufgaben 10 und 11 im Buch bearbeitet haben und Sie sollten verstanden haben, dass (und warum) man bei Summen mit null und bei Produkten mit eins anfängt.

7

Geben Sie die kleinste natürliche Zahl n an, für die $n^7 + 1$ kleiner als 2^n ist.

Die Idee in diesem Fall ist, dass Sie eine Schleife schreiben, die der Reihe nach für $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ und so weiter durchprobiert, ob die Bedingung erfüllt ist. Für n^7 kann man in Python `n*n*n*n*n*n*n` schreiben, aber kürzer ist `n**7`.

8

Sei $f(n) = -n^3 + 100n^2 - 1800n + 6500$. Für wie viele natürliche Zahlen $n < 100$ gilt die Ungleichung

$10^9 \cdot f(n) > 2^n$?

Auch hier geht es darum, die möglichen Kandidaten innerhalb einer Schleife durchzuprobieren. Gleichzeitig müssen die Erfolgsfälle aber auch noch in einer *Zählvariable* – die initial natürlich den Wert null hat – gezählt werden, damit man am Ende die Gesamtzahl hat.

2. Ganze Zahlen

⋆9

Konvertieren Sie die Zahl 1234567_{10} in das Siebenersystem.

Siehe Aufgabe 25 im Buch. Man kann dafür auch eine Funktion schreiben, die so ähnlich wie die aus Aufgabe 33 arbeitet.

⋆10

Geben Sie die Summe der ersten 100 natürlichen Zahlen an, die durch 7 teilbar sind.

⋆11

Geben Sie die Summe der ersten 100 positiven natürlichen Zahlen an, die durch 7 teilbar sind.

⋆12

Geben Sie die Summe der natürlichen Zahlen unter 100 an, die durch 7 teilbar sind.

Auch hier geht es um Schleifen, zusätzlich aber auch um bedingte Anweisungen. Ob eine Zahl sich durch eine andere teilen lässt, kann man mit dem Operator `%` prüfen – siehe Aufgabe 33 im Buch. Außerdem sollen Sie hier lernen, einen *Zähler* wie in Aufgabe 8 zu verwenden: eine Variable, die anfangs den Wert null hat und die in jedem Schleifendurchlauf um eins erhöht wird. Damit können Sie z.B. feststellen, wie viele Zahlen Sie schon aufsummiert haben.
Beachten Sie auch, dass es wichtig ist, Aufgaben genau zu lesen. Die Aufgaben 10 und 11 unterscheiden sich nur durch ein Wort, aber es kommen unterschiedliche Ergebnisse heraus. Und natürlich macht es auch einen Unterschied aus, ob man von den *ersten 100 Zahlen* redet, die eine bestimmte Bedingung erfüllen, oder ob man stattdessen die *Zahlen unter 100* betrachtet, die diese Eigenschaft haben.

13

Wie viele natürliche Zahlen gibt es, deren Quadrat kleiner als 5000 und durch 8 teilbar ist?

Hier geht es nicht darum, Zahlen zu summieren, sondern sie sollen einfach nur *gezählt* werden. Dazu eignet sich der oben erwähnte Zähler. Der Test ist in diesem Fall ein bisschen komplizierter. Lesen Sie genau: Nicht die Zahl selbst, sondern ihr Quadrat soll kleiner als 5000 und durch 8 teilbar sein. Und muss man die Null auch mitzählen? (Wenn Sie sich nicht sicher sind, schauen Sie sich Aufgabe 85[82] im Buch an.)

14

Wie viele natürliche Zahlen gibt es, deren Quadrat zwischen den Zahlen 3000 und 300000 liegt?

Eine Variante der vorherigen Aufgabe.

15

Welches ist die kleinste natürliche Zahl, deren Quadrat größer als 5000 und durch 8 teilbar ist?

Wenn Sie Aufgabe 13 lösen konnten, dürfte diese auch kein Problem für Sie sein. Grundsätzlich findet man die *kleinste* natürliche Zahl mit einer bestimmten Eigenschaft immer, indem man ein Programm schreibt, das nacheinander alle Zahlen der Reihe nach durchprobiert.
Falls Sie sich fragen, wie man eine Schleife abbricht, wenn man das gefunden hat, wonach man sucht: Man verwendet dafür am besten den Befehl `break` – siehe z.B. meine Lösung zu Aufgabe 111[107] im Buch. Es geht aber auch anders. Man kann z.B. einer Variable `found` den Wert null geben und sie um eins erhöhen, wenn etwas gefunden wurde. Ihre `while`-Schleife brechen Sie dann ab, wenn `found` größer als null ist. (Eleganter geht das mit booleschen Werten, die in Kapitel 3 eingeführt werden.)

⋆16

Welche von den folgenden Zahlen ist die größte?

- ◯ 11110001001000000_2
- ◯ 5056447_8
- ◯ $1E240_{16}$

Mit Python kann man so eine Aufgabe natürlich ohne Nachdenken lösen, indem man Präfixe wie `0b` (siehe Aufgabe 29 im Buch) verwendet. *Mit* Nachdenken und *ohne* Computer geht es aber sogar noch einfacher, weil die Antwort hier nur von der Anzahl der Ziffern abhängt – siehe Aufgabe 26 im Buch. Und ganz allgemein: Wenn es bei einer Ankreuzfrage wie hier *runde* Felder gibt, die wie *Radiobuttons* aussehen, dann ist immer genau *eine* Antwort richtig.

⋆17

Wie viele Ziffern hat die binäre Darstellung von $4^{412341234} + 1$?

Ich würde Ihnen empfehlen, diese Aufgabe ohne Computer zu lösen. Sie werden sehen, dass das eigentlich ganz einfach ist. Tipp: $4 = 2^2$.

⋆18

Sei k eine positive natürliche Zahl. Wie viele Ziffern braucht man, um k binär darzustellen?

- ☐ $1 + \lceil \log_2 k \rceil$
- ☐ $\lceil \log_2 (k+1) \rceil$
- ☐ $1 + \lfloor \log_2 k \rfloor$

☐ $\lfloor \log_2(k+1) \rfloor$

Mit $\lceil\ \rceil$ ist Aufrunden gemeint (siehe die Lösung zu Aufgabe 23 im Buch), mit $\lfloor\ \rfloor$ Abrunden. Wenn es bei einer Ankreuzfrage wie hier eckige Felder gibt, die wie *Checkboxen* aussehen, dann können eine oder mehrere Antworten richtig sein. Und es ist durchaus auch möglich, dass alle Antworten falsch oder alle Antworten richtig sind.

⋆19

Was passiert mit der Binärdarstellung, wenn man eine Zahl quadriert?

☐ Die Anzahl der Ziffern wird verdoppelt.

☐ Die Anzahl der Einsen wird größer.

☐ Die Anzahl der Einsen wird verdoppelt.

☐ Die Anzahl der Nullen wird größer.

☐ Die Anzahl der Nullen wird verdoppelt.

☐ Die Anzahl der Nullen rechts von der letzten Eins wird verdoppelt.

☐ Die Anzahl der Einsen links von der ersten Null (bzw. die Gesamtanzahl der Einsen, wenn es keine Nullen gibt) wird verdoppelt.

⋆20

Was berechnet man in Python mit `(a//b)*b`, wenn `a` und `b` natürliche Zahlen sind?

☐ `(a//b)*b` ist dasselbe wie `(a*b)//b`.

☐ Man berechnet `a`.

☐ Man berechnet `b`.

☐ Man berechnet `a%b`.

☐ Man berechnet `a-a%b`.

☐ Man berechnet `a%b-a`.

☐ Man berechnet `a+a%b`.

Bei beiden Aufgaben sollten Sie vielleicht einfach mal ein bisschen rumprobieren und sich dann bei den Antworten, die nach Ihrer Meinung richtig sind, überlegen, *warum* sie richtig sind.

21

Die Zahl 181 hat die seltene Eigenschaft, dass ihre Binärdarstellung mehr Nullen (nämlich drei) enthält als die ihres Quadrates (die nur zwei Nullen enthält):

$$181 = 10110101_2 \qquad 181^2 = 111111111111001_2$$

Geben Sie die kleinste natürliche Zahl an, die ebenfalls diese Eigenschaft hat und die größer als 181 ist.

Hier liegt es nahe, den Computer suchen zu lassen. Wie man die Anzahl der Nullen der Binärdarstellung herausbekommt, sollten Sie in diesem Kapitel gelernt haben. Siehe auch Aufgabe 19 oben.

⋆22

In der Kryptographie arbeitet man teilweise mit sehr großen Zahlen. Wie viele Bits braucht man *ungefähr*, um eine 300-stellige Dezimalzahl binär zu speichern?

◯ 300 ◯ 600 ◯ 700 ◯ 1000 ◯ 2^{300}

Im zweiten Kapitel gibt es eine Formel, mit der man das berechnen kann, aber man kann sich auch mit einer Abschätzung behelfen. Eine oft hilfreiche Faustregel für solche Abschätzungen ist, dass 2^{10} *ungefähr* 10^3 ist. (Das sind kilo und kibi.)

23

Sei n die kleinste natürliche Zahl, für deren Darstellung im Hexadezimalsystem man mindestens acht Ziffern braucht, von denen mindestens vier die Ziffer `A` sind. Geben Sie n im Dezimalsystem an.

Man kann die Zahl einfach hexadezimal hinschreiben, wenn man die Aufgabe verstanden hat. Die Umrechnung kann dann Python erledigen.

⋆24

Welches ist die größte Zahl, die man mit vier Zweien, Potenzen und ggf. Klammern aufschreiben kann? Damit sind also Zahlen wie 222^2, 22^{22}, 22^{2^2} oder $\left(22^2\right)^2$ gemeint. Begründen Sie Ihre Antwort!

Die Aufgabe passt nicht direkt zum Kapitel, ist aber an dieser Stelle ganz sinnvoll, weil bei Stellenwertsystemen Potenzen eine zentrale Rolle spielen und erfahrungsgemäß viele Studierende Schwierigkeiten mit diesem Thema haben.

3. Modulare Arithmetik

⋆25

Was berechnet man in Python mit `(a>>k)<<k`, wenn `a` und `k` natürliche Zahlen sind?

- ☐ `(a>>k)<<k` ist dasselbe wie `(a<<k)>>k`.
- ☐ Es kommt immer `a` heraus.
- ☐ Man berechnet `(a/k)*k`.
- ☐ Man berechnet `(a//k)*k`.
- ☐ Man berechnet `(a/2**k)*2**k`.
- ☐ Man berechnet `(a*2**k)/2**k`.

Hier könnte man dieselbe Bemerkung wie bei Aufgabe 20 wiederholen.

26

Der folgende Code würde Ihren Rechner überfordern. Es dauert zu lange und wahrscheinlich reicht auch der Speicherplatz nicht aus. Aber welchen Wert müsste `a` denn am Ende haben?

```
a = 9222
k = 2
while k < 1000000:
    a >>= k
    a += 1
    a <<= 1000001-k
    k += 1
```

Vielleicht ersetzen Sie 1000000 erst einmal durch eine kleine Zahl und lassen sich Zwischenergebnisse ausgeben. (Sicher muss man dann auch 1000001 durch eine andere Zahl ersetzen!) Durch Probieren sollte man darauf kommen, was die richtige Antwort ist.
Die Frage, *warum* bestimmte Werte herauskommen, ist allerdings etwas schwieriger. Das sei als Knobelaufgabe denen überlassen, die sich damit beschäftigen wollen. Auf jeden Fall lernt man etwas, wenn man darüber nachdenkt.

⋆27

Berechnen Sie in $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ den Wert $7 \cdot 7 + 10 \cdot 7$.

Solche Aufgaben sollten Sie sowohl von Hand (zumindest für kleine Zahlen) als auch mithilfe des Computers lösen können. Wenn Sie Kapitel 3 durchgearbeitet haben, sollte das eigentlich kein Problem sein. Wichtig ist dabei, dass Sie den korrekten Umgang mit dem Operator `%` üben: Wann darf man ihn einsetzen und wo muss man ggf. Klammern setzen?

28

Wie viele verschiedene Lösungen hat die Gleichung $20x^2 + 25x + 50 = 0$ in $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$?

29

Für wie viele Elemente x von $\mathbb{Z}/160\mathbb{Z}$ gilt $x^3 = x$?

Bei solchen Aufgaben sollen Sie wieder etwas *zählen* wie weiter oben schon. Natürlich rechnen Sie hier modular, also mit `%`.
Wenn es um Mengen der Form $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ geht, wissen Sie außerdem, dass Sie nur endlich viele Fälle durchprobieren müssen, bei Aufgabe 28 z.B. nur die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 99$. Beachten Sie außerdem, dass Sie nicht zu viele Fälle betrachten. Wenn Sie außer $0, 1, 2, \ldots, 99$ auch noch die Zahl 100 betrachten, so haben Sie die Null doppelt gezählt. (Abgesehen davon, dass nach der Definition im Buch diese Zahl gar nicht zur Menge $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ gehört.)

30

Sei $a = 29$ und $b = 10^6$. Die Zahl $c = a^b$ hat deutlich mehr als eine Million Dezimalstellen. Was sind die letzten beiden Ziffern von c (also die beiden ganz rechts)?

> Zunächst eine Warnung: Es gibt Aufgaben, bei denen die Zahlen absichtlich so groß sind, dass man sie nicht einfach eintippen kann, weil der Computer viel zu viel Zeit bräuchte, um sie auszurechnen oder sie darzustellen. Ihnen ist hoffentlich klar, dass c so eine Zahl ist, weil der Exponent zu groß ist. (Außerdem steht in der Aufgabe ja sogar, dass c mehr als eine Million Dezimalstellen hat.)
> Wie kommt man mithilfe der modularen Arithmetik an die letzten beiden Dezimalziffern einer Zahl? Das müsste nach dem Durcharbeiten von Kapitel 3 eigentlich klar sein. Mithilfe der Funktion `pow` (Aufgabe 165[157] im Buch) kann man dann diese Aufgabe ohne Nachdenken lösen.
> Aber ich finde ja, man lernt mehr, wenn man auch mal nachdenkt: Lassen Sie sich von einem Programm jeweils die letzten beiden Dezimalziffern von $29^0, 29^1, 29^2, 29^3, \ldots, 29^{13}$ ausgeben. Was fällt Ihnen auf? Beachten Sie, dass man statt a^{10^6} auch $(a^{10})^{10^5}$ schreiben kann.

⋆31

Sei $k = 10^9$. Was sind die letzten drei Ziffern (also die drei ganz rechts), wenn man $3^k + 4$ im Binärsystem darstellt?

> Das ähnelt der vorherigen Aufgabe. Nur geht es hier um das Binär- statt um das Dezimalsystem. Könnten Sie die Aufgabe auch beantworten, wenn es um die letzte Ziffer im Oktalsystem ginge?

⋆32

Ist $2^{3\,000\,000} + 41$ durch 7 teilbar?

> Wenn Sie Aufgabe 68[59] im Buch bearbeitet haben, wissen Sie auch, wie Sie hier vorgehen sollten.

⋆33

Welche der folgenden Aussagen sind für alle $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ und alle $n \in \mathbb{N}^+$ wahr?

- ☐ Aus $a \equiv b \pmod{n}$ und $c \equiv d \pmod{n}$ folgt $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{n}$.
- ☐ Aus $a \equiv b \pmod{n}$ und $c \equiv d \pmod{n}$ folgt $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.
- ☐ Aus $a \equiv b \pmod{n}$ und $c \equiv d \pmod{n}$ folgt $a \cdot b \equiv c \cdot d \pmod{n}$.
- ☐ Aus $a \equiv b \pmod{n}$ und $c \equiv d \pmod{n}$ folgt $a + b \equiv c + d \pmod{n}$.
- ☐ Aus $a \equiv b \pmod{n}$ folgt $a \cdot a \equiv b \cdot b \pmod{n}$.
- ☐ Aus $a \equiv b \pmod{n}$ folgt $a + a \equiv b + b \pmod{n}$.

> Bei dieser Aufgabe geht es eigentlich nur darum, ob Sie Kapitel 3 aufmerksam gelesen und verstanden haben. Zwei der obigen Aussagen stehen wortwörtlich im Buch, zwei andere folgen daraus, wenn man für c und d entsprechende Ersetzungen vornimmt. Und zwei der Aussagen stimmen nicht mal dann, wenn man Kongruenz durch Gleichheit ersetzt. Das sollten Sie sich durch ein einfaches Gegenbeispiel klarmachen.

34

Geben Sie eine möglichst kleine Zahl $n > 1$ an, für die die folgenden vier Zahlen modulo n alle kongruent sind: $16, 42, 55, 81$.

> Die Antwort ist nicht 2, weil zwar $16 \equiv 42 \pmod 2$, aber nicht $16 \equiv 55 \pmod 2$ gilt. Die Antwort ist auch nicht 3, weil schon $16 \equiv 42 \pmod 3$ falsch ist. Und so weiter. Das sieht so aus, als wäre es am einfachsten, ein Programm zu schreiben, das die Kandidaten der Reihe nach durchprobiert wie in Aufgabe 15 oben.

⋆35

Geben Sie von der Binärdarstellung von $10^{14\,000}$ das erste und das letzte Bit an.

⋆36

Geben Sie von der Binärdarstellung von $100^{14\,000} + 3$ die letzten beiden Bits an.

⋆37

Geben Sie von der Binärdarstellung von $17^{42\,000\,000} + 15$ die letzten drei Bits an.

> Diese Aufgaben haben große Ähnlichkeit mit Aufgabe 30; es geht hier nur um Zweierpotenzen statt um Zehnerpotenzen. Man braucht für keine dieser Aufgaben einen Computer: Aufgabe 35 ist besonders einfach, weil 10 eine gerade Zahl ist. Bei Aufgabe 36 kann man sich z.B. fragen, was herauskommt, wenn man $100^{14000} = 10^{28000}$ durch $1000 = 10^3$ teilt. (Siehe auch Aufgabe 45 im Buch.) Und bei Aufgabe 37 reicht die Überlegung, dass 17 sich als $2 \cdot 8 + 1$ schreiben lässt.

⋆38

Wenn a eine natürliche Zahl ist, deren Dezimaldarstellung fünf Ziffern hat, wie viele Stellen hat dann die Binärdarstellung von a mindestens?

⋆39

Wenn a eine natürliche Zahl ist, deren Dezimaldarstellung sechs Ziffern hat, wie viele Stellen hat dann die Binärdarstellung von a höchstens?

⋆40

Wenn a eine natürliche Zahl ist, deren Dezimaldarstellung sechs Ziffern hat, wie viele Stellen hat dann die Binärdarstellung von a^2 höchstens?

> Diese Aufgaben lassen sich fast ohne Nachdenken lösen, indem man sich nur überlegt, welches jeweils die größte bzw. die kleinste Zahl ist, die man dezimal mit fünf oder sechs Ziffern schreiben kann. Den Rest kann dann der Computer machen. Es kann aber gerade auch für angehende Informatiker nicht schaden, sich in diesem Zusammenhang noch mal die Aufgaben 21 bis 23 im Buch vorzunehmen.

⋆41

Welche der folgenden Zahlen sind durch 7 teilbar?

☐ 17025_8 ☐ 17137_8 ☐ 17141_8

Das kann man mit dem Computer machen, aber es geht noch schneller im Kopf, wenn man Aufgabe 73[71] im Buch bearbeitet hat.

4. Negative Zahlen

★42

Kreuzen Sie alle Lösungen der Gleichung $(x-2)\cdot(x-4)=0$ in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ an.

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

Hier geht es um das gleiche Prinzip wie bei Aufgabe 28. Diese Aufgabe sollten Sie zur Übung auch ohne Computer lösen können. (Dabei sollte Ihnen auffallen, dass es sich hier um eine quadratische Gleichung handelt, die mehr als zwei Lösungen hat.)

★43

Geben Sie die Binärdarstellung (Zweierkomplement) von -46 auf einem 16-Bit-Computer an.

Das wird im Buch erklärt und Sie sollten es einfach mal von Hand gemacht haben. Beachten Sie, dass das Ergebnis anders ausgesehen hätte, wenn in der Aufgabe beispielsweise von einem 32-Bit-Computer die Rede gewesen wäre.

44

Welchen Wert hat die Variable `c` nach Ausführung des folgenden Codes?

```
c = 0
k = 1
for n in range(2 ** 40):
    c += k
    k *= -1
```

`2**40` schreibt man in Python, um 2^{40} zu berechnen – siehe Seite 80 im Buch. Da `range` „offiziell“ erst in Kapitel 8 eingeführt wird, hier noch mal eine äquivalente Version ohne `range`, die ein bisschen unübersichtlicher ist:

```
c = 0
k = 1
n = 0
while n < 2 ** 40:
    c += k
    k *= -1
    n += 1
```

45

Welchen Wert hat die Variable `c` nach Ausführung des folgenden Codes?

```
c, k = 42, 1
for n in range(3 ** 40):
    k *= -1
    c += 2*k
```

46

Welchen Wert hat die Variable `c` nach Ausführung des folgenden Codes?

```
c = -1
for n in range(5 ** 40):
    c += (n % 5) - 2
```

47

Welchen Wert hat die Variable `c` nach Ausführung des folgenden Codes?

```
c, k = 42, 1
for n in range(3 ** 40):
    c += 3 * k
    k = (k + 2) % 3
c = c % 3
```

48

Welchen Wert hat die Variable `c` nach Ausführung des folgenden Codes?

```
c = 0
k = 1
for n in range(0, 3 ** 40):
    c += (k - 1)
    k = (k + 1) % 3
```

49

Welchen Wert hat die Variable `c` nach Ausführung des folgenden Codes?

```
c = 1
for i in range(2222222222):
    c = (11 * c) % 13
```

Alle obigen Codebeispiele haben gemeinsam, dass man sie nicht einfach so laufen lassen kann, weil es zu lange dauern würde. Daher sollte man Ausdrücke wie `5**40` erst mal durch kleinere Werte ersetzen und sich innerhalb der Schleife mit `print` die Werte der Variablen ausgeben lassen. Dann kann man immer ein bestimmtes *Muster* erkennen. Mithilfe der modularen Arithmetik kann man damit dann auf die richtige Antwort kommen.

50

Probieren Sie den folgenden Code *nicht* aus; der Speicher Ihres Rechners reicht ggf. nicht dafür aus! Aber welcher Wert müsste am Ende ausgegeben werden?

```
ls = [42]
for i in range(1,42):
    ls += ls
len(ls)
```

51

Probieren Sie den folgenden Code *nicht* aus; der Speicher Ihres Rechners reicht ggf. nicht dafür aus! Aber welcher Wert müsste am Ende ausgegeben werden?

```
ls = [41,42,43]
for i in range(1,42):
    ls += ls
len(ls)
```

52

Probieren Sie den folgenden Code *nicht* aus; der Speicher Ihres Rechners reicht ggf. nicht dafür aus! Aber welcher Wert müsste am Ende ausgegeben werden?

```
ls = [42]
for i in range(42):
    ls += (ls+ls)
len(ls)
```

53

Probieren Sie den folgenden Code *nicht* aus; der Speicher Ihres Rechners reicht ggf. nicht dafür aus! Aber welcher Wert müsste am Ende ausgegeben werden?

```
ls = [42]
for i in range(0,100,2):
    ls += ls
len(ls)
```

Auch bei diesen Aufgaben geht es um Code, den man nicht einfach so ausprobieren kann. Man muss sich wieder an das richtige Ergebnis „herantasten“. Mit dem Operator `+` werden hier jeweils zwei Listen hintereinander gehängt. Das ist ein Vorgriff auf Seite 82[78] im Buch.

⋆54

Welche der folgenden Zahlen sind durch 11 teilbar?

☐ 0 ☐ $10^{10^{10}}$ ☐ $10^{13^{13}}$ ☐ $10^{13^{13}}+1$

★55

Sei $a = 10^{43^{42}} + 1$ Welche der folgenden Zahlen sind durch 11 teilbar?

☐ -11 ☐ a ☐ a^2 ☐ $a + 10$

★56

Sei $a = 2 \cdot 10^{43^{42}} + 1$ Welche der folgenden Zahlen sind durch 11 teilbar?

☐ $a + 120a$ ☐ $a - 1$ ☐ $a + 1$ ☐ a^2

Wenn Sie Aufgabe 95[92] im Buch bearbeitet haben, können Sie diese Aufgaben alle im Kopf lösen. Dabei muss man sich nur klarmachen, dass man statt 10^k auch $(-1)^k$ rechnen kann und dass für die zweite Potenz nur relevant ist, ob k gerade oder ungerade ist. Und ob Zahlen wie 43^{42} oder 10^{10} gerade oder ungerade sind, sehen Sie hoffentlich sofort, oder? (Um zu wissen, ob $a + 120a$ durch 11 teilbar ist, muss man a übrigens nicht mal kennen.)
Achtung: $10^{43^{42}}$ ist *nicht* dasselbe wie $(10^{43})^{42}$. Das sollte eigentlich aus der Schule bekannt sein und wird hier noch mal wiederholt. Siehe dazu auch die Aufgaben 234[224], 235[225] und 236[226] im Buch. Machen Sie außerdem nicht den Fehler, im Exponenten modular zu rechnen. Mehr Information dazu in Aufgabe 67[66] im Buch.

5. Euklids Algorithmus

57

Geben Sie den größten gemeinsamen Teiler von 471 694 074 821, 471 766 128 373 und 471 757 130 107 an; also die größte Zahl, die alle drei Zahlen teilt.

Das sollen Sie natürlich mit dem Computer machen. Aber die Funktion `gcd` will zwei Argumente haben und nicht drei. Was muss man also tun?

★58

Der größte gemeinsame Teiler von 18 und 11 ist 1. Geben Sie ganze Zahlen a und b an, so dass $1 = 18a + 11b$ gilt.

Das ist eine Anwendung des erweiterten euklidischen Algorithmus und eine Vorbereitung auf das nächste Kapitel. Ich empfehle Ihnen, das mal ohne Computer auszurechnen.

6. Division

★59

Geben Sie zwei Zahlen aus $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$ an, deren Produkt verschwindet, obwohl beide Zahlen nicht null sind.

Hier geht es um die Dinge, die auf Seite 66[64] im Buch besprochen werden. Sie können auf zwei solche Paare einfach durch Rumprobieren kommen. Es ist aber auch ganz instruktiv, wenn Sie sich mithilfe eines Computerprogramms mal *alle* Produkte ausgeben lassen, die die Aufgabe lösen. Dann sehen Sie, was die Faktoren mit der Zahl 27 zu tun haben.
In der Mathematik sagt man übrigens, dass etwas *verschwindet*, wenn der entsprechende Ausdruck null ist. Das hätten Sie aber auch im Index des Buches nachschlagen können.

⋆60

Für wie viele Zahlen a aus $\mathbb{Z}/42\mathbb{Z}$ ist die Gleichung $5x = a$ in $\mathbb{Z}/42\mathbb{Z}$ nicht lösbar?

Auch hier geht es um Seite 66[64] des Buches. Weil hier nach der *Anzahl* aller Zahlen gefragt ist, die eine bestimmte Eigenschaft haben, könnte man ein Programm schreiben, das das Zählen erledigt. Beachten Sie aber, dass Sie dafür zwei verschachtelte Schleifen brauchen: eine, die die möglichen Werte für a durchgeht, und eine weitere, die jeweils prüft, ob die Gleichung lösbar ist, indem sie alle möglichen Werte für x durchprobiert.
(Nebenbei kann man diese spezielle Frage aber auch ganz ohne Computerhilfe sofort beantworten, wenn man das Kapitel aufmerksam gelesen hat ...)

61

Für wie viele Zahlen a aus $\mathbb{Z}/42\mathbb{Z}$ ist die Gleichung $5x^2 + 3 = a$ in $\mathbb{Z}/42\mathbb{Z}$ nicht lösbar?

Hier geht es zwar nicht direkt um Seite 66[64] des Buches, aber ansonsten lässt sich das wie die vorherige Aufgabe lösen.

⋆62

Berechnen Sie den Quotienten $\frac{2}{9}$ in $\mathbb{Z}_{23}$.

Nach dem Durcharbeiten von Kapitel 6 sollte klar sein, wie man das macht. Insbesondere sollte hoffentlich klar sein, was überhaupt gemeint ist und das das Ergebnis eine der Zahl $0, 1, 2, \ldots, 22$ sein muss. (Siehe z.B. Aufgabe 129[124] im Buch.)
Für kleine Zahlen wie in dieser Aufgabe kann man durch Probieren auf die Lösung kommen und auch ein Programm schreiben, das das Probieren durchführt. Es ist aber empfehlenswert, sich auch mal zu überlegen (und mit Zettel und Stift nachzuvollziehen), wie man das effizienter machen könnte: indem man nämlich mithilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus erst $\frac{1}{9}$ in $\mathbb{Z}_{23}$ berechnet und dann mit zwei multipliziert.

63

Berechnen Sie den Wert $\left(\frac{2}{9}\right)^{1\,000\,000}$ in $\mathbb{Z}_{11}$.

Dies ist quasi eine Fortsetzung der letzten Aufgabe. Für das Berechnen der Potenz sollten Sie sich an Aufgabe 54 erinnern oder die Funktion `pow` (Aufgabe 165[157] im Buch) verwenden.

⋆64

Geben Sie eine von 1 verschiedene Zahl an, die in $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ einen Kehrwert hat.

Der „Witz“ an dieser Aufgabe ist natürlich, dass in $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ nicht jede Zahl einen Kehrwert hat, weil 24 keine Primzahl ist. Wenn Sie Kapitel 6 aufmerksam gelesen haben, können Sie sofort eine Antwort angeben.

65

Wie viele Elemente von $\mathbb{Z}/802\mathbb{Z}$ sind bezüglich der Multiplikation invers zu sich selbst?

Die Tabelle auf Seite 65[63] im Buch zeigt, dass in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ zwei Zahlen invers zu sich selbst sind, nämlich 1 und 5. (Mit anderen Worten: 1 ist der Kehrwert von 1 und 5 der Kehrwert von 5.) Um die Frage für $\mathbb{Z}/802\mathbb{Z}$ zu beantworten, sollten Sie am besten ein kleines Programm schreiben.

66

Wie viele Elemente von $\mathbb{Z}/4242\mathbb{Z}$ haben keinen Kehrwert?

Das hat sehr viel Ähnlichkeit mit der Aufgabe davor.

67

Wie viele Elemente von $\mathbb{Z}/93\mathbb{Z}$ lassen sich als Quadrat eines Elements von $\mathbb{Z}/93\mathbb{Z}$ darstellen? [Beispiel: 51 ist das Quadrat von 12.]

Die Tabelle auf Seite 65[63] im Buch zeigt, dass in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ vier Zahlen Quadrate sind, nämlich 0, 1, 3 und 4 – die Zahlen auf der Hauptdiagonale. Um die Frage für $\mathbb{Z}/93\mathbb{Z}$ zu beantworten, sollten Sie am besten ein kleines Programm schreiben. Wie bei Aufgabe 60 werden zwei Schleifen nötig sein.
Allerdings lässt sich das in Python auch in einer einzigen Zeile lösen, wenn man sich mit *Mengen* auskennt. Darum sollten Sie sich die Aufgabe noch mal anschauen, nachdem Sie Kapitel 15 hinter sich haben.

68

Wie viele Elemente von $\mathbb{Z}/802\mathbb{Z}$ haben bezüglich der Multiplikation kein inverses Element?

69

Geben Sie eine natürliche Zahl n an, für die $6 \cdot 7 = 13$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gilt.

Zwei weitere Aufgaben, mit denen Sie üben können, kleine Programm zu schreiben, die durch Zählen bzw. Probieren ein Ergebnis finden.

70

Die korrekte ISBN lautet `365821564X`. Welche der folgenden Fehler werden durch das Verfahren erkannt?

- ☐ `345821566X`
- ☐ `365881564X`
- ☐ `365281564X`
- ☐ `365728964X`
- ☐ `365821577X`

71

Nur eine der folgenden ISBN ist korrekt. Welche ist es?

- ○ `3658215657`
- ○ `3662604621`
- ○ `3034603274`
- ○ `148421177X`
- ○ `3764361246`

> Diese beiden Aufgaben sind tatsächlich so gemeint, dass Sie für jede Zeichenfolge nachrechnen sollen, ob es sich um eine korrekte ISBN handelt. Wenn man gerade keinen Computer zur Hand hat, kann man das zur Not auch im Kopf machen; ist vielleicht eine ganz gute Übung.

7. Der chinesische Restsatz

72

Geben Sie die *kleinste positive* Lösung des folgenden Kongruenzsystems an:

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 5 \\ x &\equiv 3 \pmod 4 \\ x &\equiv 6 \pmod 7 \end{aligned}$$

73

Geben Sie die *größte negative* Lösung des folgenden Kongruenzsystems an:

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 3 \\ x &\equiv 2 \pmod 4 \\ x &\equiv 6 \pmod 7 \end{aligned}$$

> Sie wissen nach der Lektüre von Kapitel 7 natürlich, wie Sie Python dazu bringen, die Aufgabe für Sie zu lösen. Aber achten Sie darauf, dass es sich hier um zwei unterschiedliche Aufgabentypen handelt. Außerdem wird man auch nicht dümmer, wenn man eine der Aufgaben wirklich mal von Hand rechnet. Die Zahlen sind nicht besonders groß und man erwirbt dabei weitere Routine im Umgang mit der modularen Arithmetik.

74

Für welche a hat das folgende Kongruenzsystem *keine* Lösung?

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod 4 \\ x &\equiv 2 \pmod a \\ x &\equiv 3 \pmod 7 \end{aligned}$$

- ☐ $a = 9$
- ☐ $a = 3$
- ☐ $a = 6$
- ☐ $a = 8$
- ☐ $a = 5$

75

Geben Sie eine natürliche Zahl a zwischen 31 und 39 an, für die das folgende Kongruenzsystem *keine* Lösung hat.

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{5} \\ x &\equiv 2 \pmod{a} \\ x &\equiv 3 \pmod{7} \end{aligned}$$

76

Geben Sie die *kleinste* natürliche Zahl a an, die größer als 1 ist und für die das folgende Kongruenzsystem *keine* Lösung hat.

$$\begin{aligned} x &\equiv 42 \pmod{107} \\ x &\equiv 1 \pmod{a} \\ x &\equiv 18 \pmod{169} \end{aligned}$$

> Diese Aufgaben lassen sich alle durch Probieren lösen (oder mithilfe eines Programms, das für Sie probiert). Wenn Sie Kapitel 7 aufmerksam gelesen haben, dann wissen Sie aber auch, unter welchen Bedingungen ein Kongruenzsystem *immer* eine Lösung hat. Darum muss man eigentlich gar nicht so viel rumprobieren, sondern kann ganz gezielt sagen, welche Werte jeweils für a infrage kommen.

8. Primzahlen

⋆77

Geben Sie zwei Zahlen an, die beide nicht durch 10 teilbar sind und deren Produkt 10000 ist.

> Wenn Sie nicht sofort auf eine Lösung kommen, dann zerlegen Sie 10000 in Primfaktoren. Dadurch sollte klar werden, wie es geht.

⋆78

Kreuzen Sie die kanonische Primfaktorzerlegung von 9999 an.

- ○ $9 \cdot 11 \cdot 101$
- ○ $3^2 \cdot 10 \cdot 111$
- ○ $3^2 \cdot 11 \cdot 101$
- ○ $3^2 \cdot 1111$
- ○ $3^2 \cdot 11^2$
- ○ $3 \cdot 3333$

⋆79

Geben Sie die kanonische Primfaktorzerlegung von 69384 an.

⋆80

Wie viele verschiedene Primteiler hat die Zahl 69384?

Hier geht es eigentlich nur darum, ob die Begriffe Ihnen etwas sagen. Wenn Sie Aufgabe 141[136] im Buch bearbeitet haben, sind Sie im Vorteil.

81

Welche von den Zahlen, deren Primfaktorzerlegung keine Zahlen außer 2, 3, 5 und 7 enthält, liegt am dichtesten an 4242?

Hier sollte man am besten ein kleines Programm schreiben. Und bevor Sie weiterlesen, überlegen Sie am besten erst mal selbst, wie man das machen könnte.
Eine Möglichkeit: Schreiben Sie eine kleine Hilfsfunktion, die testet, ob eine Zahl außer 2, 3, 5 und 7 keine Primfaktoren hat, indem sie so lange wie möglich durch diese vier Zahlen teilt und dann prüft, ob das, was übrigbleibt, größer als eins ist. Starten Sie nun die Suche nach so einer Zahl bei 4242 und suchen Sie gleichzeitig „vorwärts“ und „rückwärts“, also prüfen Sie erst $4242 + 1$ und $4242 - 1$, dann $4242 + 2$ und $4242 - 2$, und so weiter.

82

Geben Sie die 42. Primzahl an.

Es gibt fertige Funktionen, die so eine Frage für Sie beantworten können. Man kann aber z.B. auch das Sieb des Eratosthenes verwenden.

⋆83

Seien p_1, p_2 und p_3 drei *verschiedene* Primzahlen. Geben Sie den größten gemeinsamen Teiler von $p_1^2 p_2 p_3^3$ und $p_1 p_2^3$ an.

Wenn d der gesuchte größte gemeinsame Teiler ist, dann muss jeder Teiler von d auch $p_1^2 p_2 p_3^3$ und $p_1 p_2^3$ teilen. Ist also p_4 eine Primzahl, die *nicht* zu den dreien aus der Aufgabenstellung gehört, dann darf nicht $p_4 \mid d$ gelten. Darf p_3 ein Teiler von d sein? Und was ist mit p_1^2?
Umgekehrt muss jede Zahl, die sowohl $p_1^2 p_2 p_3^3$ als auch $p_1 p_2^3$ teilt, auch d teilen. Das gilt zum Beispiel für p_1.

⋆84

Sei p eine Primzahl. Wie viele verschiedene positive Teiler hat p^7?

⋆85

Seien p und q zwei verschiedene Primzahlen. Wie viele verschiedene positive Teiler hat $p^2 q$?

Hier geht es darum, dass man *alle* Teiler einer Zahl kennt (und nicht nur die Primteiler), wenn man ihre Primfaktorzerlegung kennt. Vergessen Sie dabei nicht die trivialen Teiler. p^3 hat z.B. die Teiler p und p^2, aber auch noch 1 und p^3.

⋆86

Seien p und q zwei verschiedene Primzahlen und $a = p^2q^3$ sowie $b = p^3q$. Welche der folgenden Aussagen kann man mit Sicherheit folgern?

- ☐ a und b sind verschieden.
- ☐ a und b sind teilerfremd.
- ☐ a ist größer als b.
- ☐ $a + 1$ ist keine Primzahl.

> Hier benötigt man u.a. den Fundamentalsatz der Arithmetik. Beachten Sie außerdem, dass mit p^2q^3 und p^3q nicht unbedingt die *kanonische* Primfaktorzerlegung gemeint ist und dass p und q verschieden sein sollen. (Was würde sich denn ändern, wenn p und q identisch wären?)

⋆87

Wenn p_1 bis p_n die ersten n Primzahlen sind und n größer als 1 ist, welche der folgenden Aussagen sind dann mit Sicherheit wahr?

- ☐ $p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n$ ist eine Primzahl.
- ☐ $1 + p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n$ ist eine Primzahl.
- ☐ $1 + p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n$ ist durch keines der p_i teilbar.
- ☐ $p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n$ ist keine Primzahl.

> Wenn Ihnen zu dieser Aufgabe nichts einfällt, dann lesen Sie sich noch mal die Herleitung des Satzes von Euklid im Buch durch.

⋆88

Wenn man $\pi(10^8)$ durch 10^8 teilt, was kommt dann ungefähr heraus?

◯ $\frac{1}{8}$ ◯ $\frac{1}{\ln 10^8}$ ◯ 10^{-8} ◯ $\ln 10^8$ ◯ 8

89

Welcher der folgenden Werte ist die beste Schätzung für die Anzahl der Primzahlen bis 10^{14}?

◯ $8 \cdot 10^{11}$ ◯ $3 \cdot 10^{12}$ ◯ $7 \cdot 10^{12}$ ◯ $2 \cdot 10^{13}$

> Um solche Aufgaben lösen zu können, muss man natürlich zuerst wissen, was mit $\pi(n)$ im Zusammenhang mit Primzahlen gemeint ist. Sie werden außerdem feststellen, dass die Zahlen in den Aufgaben absichtlich so groß gewählt wurden, dass Ihnen die Funktion `primepi` nicht helfen kann. Sie müssen also stattdessen den Primzahlsatz anwenden.

90

Um wie viel Prozent weicht die Schätzung des Primzahlsatzes vom richtigen Wert $\pi(420\,000\,000)$ ab? Geben Sie eine (gerundete) *ganze* Prozentzahl an!

Diese Zahl ist klein genug für `primepi`. Sie müssen nur noch Ihr Wissen über Prozentrechnung aus dem Gedächtnis hervorkramen.

91

Welche der folgenden Zahlen liegt am dichtesten an der 10^{14}-ten Primzahl?

- ◯ $7 \cdot 10^{13}$
- ◯ $3 \cdot 10^{14}$
- ◯ $8 \cdot 10^{14}$
- ◯ $3 \cdot 10^{15}$

92

$2^{107} - 1$ ist eine Primzahl. Die wievielte ist es ungefähr?

- ◯ Die $8 \cdot 10^{29}$-te.
- ◯ Die $2 \cdot 10^{30}$-te.
- ◯ Die $5 \cdot 10^{30}$-te.
- ◯ Die $8 \cdot 10^{30}$-te.
- ◯ Die $2 \cdot 10^{31}$-te.

93

$p = 2^{127} - 1$ ist eine Primzahl. Wie viele Primzahlen sind kleiner als p?

- ◯ Ungefähr $2 \cdot 10^{36}$.
- ◯ Ungefähr $5 \cdot 10^{36}$.
- ◯ Ungefähr $8 \cdot 10^{36}$.
- ◯ Ungefähr $2 \cdot 10^{37}$.

94

Die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto einen Gewinn zu erzielen, liegt bei ungefähr $P = 1.9\,\%$. Wenn man das mit der Wahrscheinlichkeit vergleicht, unter den ersten n natürlichen Zahlen zufällig eine Primzahl auszuwählen, für welches n kommt man P am nächsten?

- ◯ 10^{10}
- ◯ 10^{20}
- ◯ 10^{40}
- ◯ 10^{80}

Auch bei diesen Aufgaben werden Sie den Primzahlsatz benötigen.

95

Wie viele Primzahlen liegen ungefähr zwischen 10^{20} und 10^{21}?

- ◯ $1.9 \cdot 10^{19}$
- ◯ $2.1 \cdot 10^{19}$
- ◯ $2.2 \cdot 10^{18}$
- ◯ $1.8 \cdot 10^{20}$

96

Sei $a = 10^{20}$. Wie viele Primzahlen liegen ungefähr zwischen a und der a-ten Primzahl?

○ $9 \cdot 10^{19}$ ○ $3 \cdot 10^{20}$ ○ $7 \cdot 10^{20}$ ○ $9 \cdot 10^{20}$

Wenn Sie wissen, wie viele Primzahlen unterhalb von a bzw. unterhalb von b liegen, dann wissen Sie auch, wie viele Primzahlen *zwischen* a und b liegen, oder?

97

Wenn wir mal annehmen, dass `isprime` bis 10^{18} korrekt funktioniert, was müsste dann bei folgendem Code ungefähr (auf drei Stellen nach dem Komma) als Ergebnis herauskommen?

```
from sympy import isprime

n = 10**18
c = 0
for i in range(n):
    if isprime(i):
        c += 1
c/n
```

Das ist wieder ein Beispiel für Code, den man nicht ausprobieren kann, weil es zu lange dauern würde. Wenn Sie die Aufgaben davor lösen konnten, dürfte diese aber auch kein Problem sein. Beachten Sie, dass ganz am Ende noch dividiert wird. (Zu `isprime` siehe Aufgabe 154[146] im Buch.)

98

Wie viele Stellen hat die 10^{18}-te Primzahl, wenn man sie im Dezimalsystem schreibt?

99

Wie viele (im Dezimalsystem) 30-stellige Primzahlen gibt es ungefähr?

100

Wie viele Stellen hat die 10^{18}-te Primzahl, wenn man sie im Binärsystem schreibt?

Hier wird neben dem Primzahlsatz mal wieder der Zusammenhang zwischen einer Zahl und der Anzahl ihrer Dezimalstellen benötigt. Erinnern Sie sich an die Aufgaben 38 bis 40 weiter oben.

⋆101

Wenn man sich eine Liste aller vierstelligen Primzahlen, bei denen eine Ziffer dreimal vorkommt, anschaut, dann kommt eine Ziffer in der gesamten Liste nie vor. Welche ist es?

Man könnte ein Programm dafür schreiben, aber schneller geht es wahrscheinlich, wenn man etwas nachdenkt. Die Antwort hat etwas mit der bekannten Teilbarkeitsregel für drei zu tun.

⋆102

Wie viele sechsstellige Primzahlen gibt es, bei denen alle sechs Ziffern identisch sind?

Für diese Aufgabe könnte man wortwörtlich den Kommentar zur vorherigen übernehmen.

103

Ein *Primzahlzwilling* ist ein Paar von Primzahlen, deren Differenz zwei ist. Der erste Primzahlzwilling ist $(3, 5)$. Welches ist der siebte Primzahlzwilling?

104

Ein *Primzahlzwilling* ist ein Paar von Primzahlen, deren Differenz zwei ist. Wie viele Primzahlzwillinge liegen zwischen 2000 und 4000?

In beiden Fällen bietet es sich an, ein kleines Programm zu schreiben. Verwenden Sie dafür die in Aufgabe 154[146] im Buch vorgestellte Funktion `isprime`.

⋆105

Man nennt einen Quader *schön*, wenn seine Oberfläche und sein Volumen (als Zahlen, ohne Maßeinheit) übereinstimmen. Geben Sie die drei (ganzzahligen) Seitenlängen eines schönen Quaders mit dem Volumen 256 an.

Mit etwas Nachdenken kommt man darauf, dass das was mit der Primfaktorzerlegung des Volumens zu tun hat.

106

Sei p_k die k-te Primzahl, also $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ und so weiter. Geben Sie die Summe

$$\sum_{k=103}^{156} p_k = p_{103} + p_{104} + p_{105} + \cdots + p_{156}$$

an.

So etwas kam ganz am Anfang der Liste schon vor. Der Unterschied ist nur, dass jetzt Primzahlen auftauchen. Es gibt eine im Buch erwähnte SymPy-Funktion, die hier sehr hilfreich sein kann. (Das Summenzeichen $\sum$ ist ein Vorgriff auf Kapitel 16, kommt aber typischerweise schon in der Schule dran.)

9. Anwendung: Primzahltests

⋆107

Bei welchen Zahlen gibt der Miller-Rabin-Test *immer* eine korrekte Antwort?

- [ ] Primzahlen
- [ ] zusammengesetzte Zahlen

- [ ] ungerade Zahlen
- [ ] Carmichael-Zahlen

⋆108

Welche der folgenden Aussagen über den Miller-Rabin-Test stimmen?

- [ ] Wenn die Eingabe eine Primzahl ist, ist die Ausgabe des Tests immer korrekt.
- [ ] Wenn die Ausgabe „Primzahl“ ist, dann ist diese Ausgabe garantiert korrekt.
- [ ] Weil der Test probabilistisch ist, kann die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler beliebig groß werden.
- [ ] Man kann die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler durch Wiederholungen verringern.

> Beide Aufgaben sollten nach aufmerksamer Lektüre von Kapitel 9 kein Problem sein. Da steht nämlich alles drin, was man wissen muss.

109

Wenn Sie mit dem Miller-Rabin-Test prüfen, ob 385 eine Primzahl ist, bei welchen der folgenden Startwerte erhalten Sie dann eine falsche Antwort?

- [ ] 54
- [ ] 67
- [ ] 219
- [ ] 221

> Probieren Sie es einfach aus. Der Code steht ja im Buch.

110

$p = 2\,760\,727\,302\,517$ ist eine Primzahl. Geben Sie den Kehrwert von $853\,662\,459\,626$ in $\mathbb{Z}_p$ an.

> Der gesuchte Kehrwert von a ist eine Zahl b mit $a \cdot b = 1$ (wobei wir in $\mathbb{Z}_p$ rechnen). Nach dem kleinen Satz von Fermat gilt $a^{p-1} = 1$. Na? (Verwenden Sie unbedingt auch Aufgabe 165[157] aus dem Buch.)

111

Welchen Wert hat die Variable `c` nach Ausführung des folgenden Codes?

```
p = 23
c = 0
for n in range(p**p):
    c += pow(n,p-1,p)
c
```

> Auch hier hilft einem der kleine Satz von Fermat weiter. Oder die hinter Aufgabe 48 erläuterte Strategie, sich schrittweise an Muster heranzutasten.

11. Rationale Zahlen

⋆112

Geben Sie die Dezimalzahl $0.4\overline{72} = 0.4727272727272\ldots$ als *gekürzten* Bruch an.

⋆113

Geben Sie die Dezimalzahl $1.3\overline{72} = 1.3727272727272\ldots$ als *gekürzten* Bruch an.

Eigentlich ist das Schulstoff aus der Mittelstufe. Wie das geht, wird aber im Buch noch mal erklärt. Und bei der Bruchrechnung kann man sich von der Bibliothek FRACTIONS helfen lassen.

⋆114

Kreuzen Sie die Zahlen an, die man *dezimal* mit endlich vielen Nachkommastellen darstellen kann:

☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{2}{5}$ ☐ $\frac{3}{16}$ ☐ $\frac{21}{28}$ ☐ $\frac{1}{70}$

Siehe dazu Aufgabe 180[171] im Buch. Denken Sie daran, dass man die Brüche ggf. erst kürzen muss.

13. Das IEEE-Format

⋆115

Geben Sie die Binärzahl 0.1011_2 dezimal als Bruch an.

Siehe dazu Aufgabe 197[187] im Buch.

⋆116

Geben Sie die Binärzahl $0.0\overline{01} = 0.0010101010101010101\ldots$ dezimal als *gekürzten* Bruch an.

Siehe dazu Aufgabe 198[188] im Buch.

⋆117

Kreuzen Sie die Zahlen an, die man *binär* mit endlich vielen Nachkommastellen darstellen kann:

☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{2}{5}$ ☐ $\frac{3}{16}$ ☐ $\frac{15}{20}$ ☐ $\frac{1}{7}$

Siehe dazu Aufgabe 199[189] im Buch und die Bemerkung zu Aufgabe 114 oben.

⋆118

Kreuzen Sie die Zahlen an, die man *oktal* mit endlich vielen Nachkommastellen darstellen kann:

☐ $\frac{3}{5}$ ☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{7}{28}$ ☐ $\frac{5}{16}$ ☐ $\frac{2}{11}$

Wenn Sie die Aufgaben 114 und 117 verstanden haben, dann sollte der Transfer ins Oktalsystem auch kein Problem mehr sein.

119

Geben Sie die Zahl 0.7_{10} in Binärdarstellung an.

Wenn Sie die Aufgaben 200[190] und 201[191] im Buch bearbeitet haben, dann wissen Sie, was hier zu tun ist.

⋆120

Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen über das IEEE-Format die an, die wahr sind:

- ☐ Man kann nur endlich viele Zahlen korrekt darstellen.
- ☐ Es wird immer so gerundet, dass die letzte Binärstelle der Mantisse gerade ist.
- ☐ Eine Maschinenzahl kann Repräsentant für verschiedene Zahlen sein.
- ☐ Die dezimale Genauigkeit des *double*-Formats beträgt 53 Stellen.

⋆121

Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen über das IEEE-Format die an, die wahr sind:

- ☐ Jede Maschinenzahl ist „Stellvertreter“ für unendlich viele rationale Zahlen.
- ☐ Jede rationale Zahl kann beliebig gut approximiert werden.
- ☐ Man kann nur endlich viele Zahlen korrekt darstellen.
- ☐ Zwischen je zwei Maschinenzahlen findet man immer noch eine weitere.
- ☐ Der Abstand zweier benachbarter Maschinenzahlen ist immer gleich.

Das sind offenbar zwei Aufgaben, mit denen lediglich überprüft wird, ob Sie Kapitel 13 gelesen und verstanden haben. Die Antworten stehen alle im Buch.

⋆122

Die Zahl $\frac{2}{5}$ sieht binär so aus: $0.\overline{0110}_2$. Kreuzen Sie an, welche von den folgenden Bitfolgen die Mantisse (ohne *hidden bit*) ist, wenn diese Zahl im IEEE-Format *double* dargestellt wird.

- ◯ `0011001100110011001100110011001100110011001100110011`
- ◯ `1001100110011001100110011001100110011001100110011001`
- ◯ `1001100110011001100110011001100110011001100110011010`
- ◯ `0110011001100110011001100110011001100110011001100110`

◯ 1100110011001100110011001100110011001100110011001100

⋆123

Die Zahl $\frac{4}{5}$ sieht binär so aus: $0.\overline{1100}_2$. Wenn diese Zahl im IEEE-Format *double* dargestellt wird, welche Ziffer kommt in der 52-stelligen Mantisse (ohne *hidden bit*) häufiger vor?

- ◯ Die Eins kommt häufiger vor als die Null.
- ◯ Die Null kommt häufiger vor als die Eins.
- ◯ Es kommen gleich viele Einsen und Nullen vor.

⋆124

Wie sieht die 52-stellige Mantisse (ohne *hidden bit*) aus, wenn die Zahl $2^{55} + 8$ im IEEE-Format *double* dargestellt wird?

◯ 0000000000000000000000000000000000000000000000000001

◯ 1000000000000000000000000000000000000000000000000001

◯ 0000000000000000000000000000000000000000000000000010

◯ 1000000000000000000000000000000000000000000000000010

Bei diesen Aufgaben können Sie mit dem Simulator überprüfen, ob Sie richtig liegen. Der steht allerdings in einer Klausur nicht zu Ihrer Verfügung; darum sollten Sie auch verstehen, warum die Mantisse so aussieht, wie sie aussieht.

⋆125

Welche der folgenden Zahlen lassen sich im IEEE-Format *double* (64 Bit) exakt darstellen?

☐ π ☐ 0.5 ☐ 3.14 ☐ 2^{-42} ☐ $2^{53} - 1$ ☐ $2^{53} + 1$

⋆126

Welche der folgenden Zahlen lassen sich im IEEE-Format *double* (64 Bit) exakt darstellen?

☐ 0.375 ☐ 1.41 ☐ $\sqrt{\frac{1}{4}}$ ☐ $\sqrt{2}$ ☐ $2^{53} + 2$ ☐ $2^{53} + 3$

Wann lassen sich Zahlen in diesem Format *nicht* exakt darstellen? Wenn die Anzahl der Bits nicht ausreicht. Das kann passieren, wenn man zu viele Stellen bräuchte – siehe dazu das Beispiel auf Seite 136[130] im Buch. Und es passiert natürlich „erst recht“, wenn man unendlich viele Stellen bräuchte — siehe Aufgabe 117 weiter oben. Letzteres gilt insbesondere auch für irrationale Zahlen, von denen hier einige im Vorgriff auf das nächste Kapitel schon vorkommen.

⋆127

Kreuzen Sie die Aussagen an, die wahr sind:

- [ ] Beim mathematischen Runden liegen die gerundeten Werte immer dichter an den tatsächlichen Werten als beim kaufmännischen Runden.
- [ ] Beim mathematischen Runden liegen die gerundeten Werte häufiger dichter an den tatsächlichen Werten als beim kaufmännischen Runden.
- [ ] Computer verwenden mathematisches Runden, weil es sich leichter implementieren lässt als kaufmännisches Runden.
- [ ] In der Dezimaldarstellung ist kaufmännisches Runden genauer, in der Binärdarstellung aber mathematisches Runden.
- [ ] Wenn nach IEEE 754 gerechnet wird, wird immer mathematisch gerundet.
- [ ] Wenn nach IEEE 754 gerechnet wird, wird immer kaufmännisch gerundet.

Hier gilt die gleiche Anmerkung wie bei den Aufgaben 120 und 121 oben.

⋆128

Wie viele verschiedene IEEE-754-Maschinenzahlen mit dem Exponenten 42 gibt es im Format *double*?

○ 2^{52}	○ 2^{53}	○ 2^{54}	○ 2^{55}
○ $52!$	○ $53!$	○ $54!$	○ $55!$

Siehe dazu insbesondere Aufgabe 206[196] im Buch. Und denken Sie an das Vorzeichen!

⋆129

Zwei Zahlen stimmen in Binärdarstellung bis zur n-ten Nachkommastelle (inklusive) überein. Was kann man über ihre Differenz d mit Sicherheit sagen?

- [ ] d ist auf jeden Fall kleiner als 2^{-n+1}.
- [ ] d ist auf jeden Fall nicht größer als 2^{-n+1}.
- [ ] d ist auf jeden Fall kleiner als 2^{-n}.
- [ ] d ist auf jeden Fall nicht größer als 2^{-n}.
- [ ] d ist auf jeden Fall kleiner als 2^{-n-1}.
- [ ] d ist auf jeden Fall nicht größer als 2^{-n-1}.

Bedenken Sie, dass sich hinter der n-ten Stelle beliebig viele Ziffern unterscheiden können und dass auch unendlich viele Nachkommastellen möglich sind.

130

Sie geben in Python `a=42E-306` und `x=a/2**n` ein, wobei `n` eine natürliche Zahl sein soll. Was ist der kleinstmögliche Wert für `n`, der dafür sorgt, dass `x` im IEEE-754-Format (mit 64 Bit) denormalisiert dargestellt wird?

Es bietet sich an, für diese Aufgabe mit dem Simulator zu arbeiten.

131

Geben Sie die Zahl

$$\frac{116\,221\,925\,867\,626}{2^{53} + \sqrt{529}}$$

als *gekürzten* Bruch an.

Es sieht so aus, als müsse man hier einfach die Brüche von PYTHON ihre Arbeit verrichten lassen, aber es gibt einen gefährlichen Haken! Die Aufgabe befindet sich nicht ohne Grund gerade in diesem Kapitel.

132

Sie haben gelernt, dass beispielsweise die Zahl, die PYTHON als `0.1` anzeigt, intern *nicht* exakt der rationalen Zahl $0.1 = 1/10$ entspricht. Welche der folgenden angezeigten Zahlen entspricht exakt der jeweils intern gespeicherten Zahl?

`0.2`   `0.0078125`   `3.4e+20`   `4.2e-10`   `3.4e+23`

Es gibt in PYTHON verschiedene Möglichkeiten, sich die interne Repräsentation einer Fließkommazahl anzeigen zu lassen. (Und die werden natürlich im Buch auch gezeigt – z.B. auf Seite 131[125].) Denken Sie auch darüber nach, unter welchen Bedingungen *ganze* Zahlen exakt bleiben, wenn man sie als Fließkommazahlen speichert!

14. Irrationale Zahlen

⋆133

Kreuzen Sie die Zahlen an, die man *oktal* mit endlich vielen Nachkommastellen darstellen kann:

☐ $\frac{3}{8}$ ☐ $\frac{2}{7}$ ☐ $\sqrt{\frac{1}{4}}$ ☐ $\frac{75}{200}$ ☐ $\sqrt{\frac{1}{2}}$

Noch mal so eine Aufgabe wie 118 oben. Allerdings kommen hier auch irrationale Zahlen vor.

⋆134

Kreuzen Sie die Zahlen an, die *nicht* rational sind.

☐ 0.50000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000 . . .

☐ 0.11212312341121231234112123123411212312341121231234112123123411212312 3 . . .

- [ ] $0.112123123412345123456123456712345678123456789123456789101234567891011\ldots$
- [ ] $0.318424242424242424242424242424242424242424242424242424242424242424242\ldots$
- [ ] $0.010010001000010000010000001000000010000000010000000001000000000010000\ldots$

Alle Zahlen sind so gemeint, dass es nach einem hoffentlich erkennbaren Muster immer so weiter geht; daher die Punkte am Ende. (Falls Sie sich bei so einer Zahl in einer Prüfung nicht sicher sind, wie das Muster gemeint ist, dann fragen Sie bitte nach.) Wie man an so eine Aufgabe herangehen muss, steht bereits im ersten Absatz von Kapitel 14.

⋆135

Kreuzen Sie von den folgenden Zahlen die an, die irrational sind:

☐ $\sqrt{81}$ ☐ $\sqrt{91}$ ☐ $\sqrt{100}$ ☐ $\sqrt{101}$ ☐ $\sqrt{111}$ ☐ $\sqrt{121}$

⋆136

Kreuzen Sie von den folgenden Zahlen die an, die irrational sind:

☐ $\sqrt{8}$ ☐ $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ ☐ $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$ ☐ $\sqrt{81}$ ☐ $\sqrt{111}$ ☐ $\sqrt{121}$

⋆137

Kreuzen Sie von den folgenden Zahlen die an, die rational sind:

☐ $\dfrac{1}{\sqrt{16}}$ ☐ $\sqrt{\dfrac{1}{16}}$ ☐ $\dfrac{\sqrt{111}}{111}$ ☐ $\sqrt{\dfrac{3}{75}}$ ☐ $\sqrt{121}$ ☐ $\sqrt{\sqrt{121}}$

⋆138

p und q seien zwei verschiedene Primzahlen. Kreuzen Sie die irrationalen Zahlen an:

☐ $1/p$ ☐ $\sqrt{p}$ ☐ $\sqrt{pq}$ ☐ $\sqrt{p^2}$ ☐ $\sqrt{p^2q}$ ☐ $\sqrt{p^3}$ ☐ $\sqrt{p^2q^2}$

Wenn Sie die Aufgaben 218[208], 219[209] und 220[210] im Buch bearbeitet haben, wissen Sie, was Sie hier tun müssen. (Dabei kann man sich auch vom Computer helfen lassen, wenn man im Kopfrechnen nicht so gut ist.)

139

Kreuzen Sie von den folgenden Zahlen die an, die irrational sind:

☐ $\mathrm{e}-\mathrm{e}$ ☐ π ☐ 42π ☐ $\dfrac{\sqrt{\pi^2}}{\pi}$ ☐ π^0

Siehe dazu insbesondere Seite 140 sowie die Aufgaben 231[221] und 232[222] im Buch.

140

Geben Sie einen Bruch an, der sich von $\sqrt{3}$ um weniger als 10^{-4} unterscheidet.

Bei dieser Aufgabe und den folgenden geht es darum, dass sich jede irrationale Zahl beliebig gut durch rationale Zahlen approximieren (annähern) lässt. Mit *beliebig gut* ist gemeint, dass man statt 10^{-4} auch 10^{-42} oder eine noch viel kleinere Zahl nehmen könnte.
Speziell diese Aufgabe lässt sich mit einem einfachen Taschenrechner lösen: Wenn zwei Zahlen bis zur n-ten Nachkommastelle gleich sind, dann unterscheiden sie sich um nicht mehr als 10^{-n}. Man muss sich also einfach den Anfang der Zahl $\sqrt{3}$ anschauen und daraus einen Bruch machen.

141

Geben Sie einen Bruch an, dessen Quadrat sich um weniger als 10^{-2} von 5 unterscheidet.

Es ist eine gute Übung, sich klarzumachen, dass diese Aufgabe sich von der vorherigen eigentlich nur durch die Formulierung unterscheidet.

142

Geben Sie einen Bruch an, der sich von $1/\sqrt{3}$ um weniger als 10^{-2} unterscheidet und dessen Nenner einen kleineren Betrag als 10 hat.

Durch die Zusatzforderung mit dem Nenner kann man diese Aufgabe nicht mehr ganz so einfach lösen wie Aufgabe 140. Dafür kann man aber recht einfach ein Programm schreiben, das eine Antwort sucht: Als Nenner kommen nur die Zahlen von 1 bis 9 infrage und der Zähler muss kleiner als der Nenner sein. (Warum eigentlich?)

143

Zwischen $\pi - 3$ und $\sqrt{10} - 3$ liegen unendlich viele Brüche. Bei wie vielen dieser Brüche ist der Nenner kleiner als 20, wenn sie in gekürzter Form mit positivem Zähler und Nenner dargestellt werden?

Hier können Sie das Programm, das Sie für Aufgabe 142 geschrieben haben, mit kleinen Modifikationen wiederverwenden.

144

Geben Sie einen Bruch q an, der die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

- q ist größer als $\sqrt{5}$.
- $q - \sqrt{5}$ ist kleiner als 10^{-4}.
- Der Nenner von q ist positiv und kleiner als $100\,000$.

Wenn Sie die vorherigen Aufgaben lösen konnten, dann können Sie auch diese lösen. Sie müssen nur das bereits geschriebene Programm noch mal erweitern.

15. Mengen

145

Geben Sie die Zahl an, die unter den Elementen der Menge $\{z/n : z, n \in \mathbb{N}^+ \text{ und } n \leq 50\}$ die beste Näherung für π ist.

Das ist eine Approximationsaufgabe wie Aufgabe 140 weiter oben. Diese hier ist nur in der Sprache der Mengenlehre formuliert.

⋆146

Kreuzen Sie von den folgenden Mengen die an, die das Element 11 enthalten:

- ☐ $\{x \in \mathbb{Z}\colon x^2 < 100\}$
- ☐ $\{mn\colon m, n \in \mathbb{P}\}$
- ☐ $\{x \in \mathbb{N}\colon x < 100\}$
- ☐ $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}$
- ☐ $\{x \in \mathbb{Q}\colon x \neq 0 \text{ und } x^{-1} \geq 11\}$

⋆147

Kreuzen Sie von den folgenden Mengen die an, die das Element 42 enthalten:

- ☐ $\{m - n\colon m, n \in \mathbb{N}\}$
- ☐ $\{x \in \mathbb{Q}\colon x \neq 0 \text{ und } x^{-1} < 1\}$
- ☐ $\{x \in \mathbb{Z}\colon x^2 \leq 49\}$
- ☐ $\{x \in \mathbb{P}\colon x < 100\}$
- ☐ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

⋆148

Welche der folgenden Mengen enthält das Element 42?

$$
\begin{aligned}
A &= \{\, p/q : p, q \in \mathbb{N}^+ \text{ und } q > 42 \,\} \\
B &= \{\, p/q : p, q \in \mathbb{N}^+ \text{ und } q < p \,\} \\
C &= \mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} \\
D &= \{\, pq : p, q \in \mathbb{P} \,\} \\
E &= \{\, p + q : p, q \in \mathbb{P} \,\} \\
F &= \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Bei den meisten Aufgaben aus diesem Kapitel ist erfahrungsgemäß die Hauptschwierigkeit für viele, die beschreibende Mengenschreibweise zu verstehen. Dafür gibt es auch kein Patentrezept, weil es unendlich viele Möglichkeiten gibt, Mengen hinzuschreiben. Sie müssen das einfach lesen lernen, wie man eine neue Sprache lernt.
Ist 11 ein Element von $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 100\}$? Die Antwort ist ja, wenn 11 erstens ein Element von $\mathbb{Z}$ ist und wenn zweitens das Quadrat von 11 kleiner als 100 ist. (Ist es das?) Ist 11 ein Element von $\{mn : m, n \in \mathbb{P}\}$? Die Antwort ist ja, wenn man 11 als Produkt zweier Primzahlen schreiben kann.

(Kann man das? Der Fundamentalsatz der Arithmetik gibt Ihnen die Antwort.) Und ist 25 ein Element von $\{mn : m, n \in \mathbb{P}\}$? Ja, weil $25 = 5 \cdot 5$ gilt. In der Definition der Menge steht nicht, dass m und n *verschiedene* Primzahlen sein müssen!

⋆149

Sei A die Menge der durch 3 teilbaren Primzahlen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ $A = \{3\}$
- ☐ $A = \mathbb{P} \cap \{\, 3n : n \in \mathbb{N} \,\}$
- ☐ $A = \mathbb{P} \cup \{\, 3n : n \in \mathbb{N} \,\}$
- ☐ $A \subseteq \mathbb{P}$
- ☐ $A = \{\, p \in \mathbb{P} : p \bmod 3 = 1 \,\}$

⋆150

Sei A die Menge aller irrationalen reellen Zahlen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ $A = \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}$
- ☐ $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- ☐ $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}$
- ☐ $A \subseteq \mathbb{Q}$
- ☐ $A \cap \mathbb{Q} = \varnothing$

Hier geht es hauptsächlich darum, Mengenverknüpfungen wie $\cap$, $\cup$ und $\setminus$ zu verstehen. Natürlich sollte man auch im Kopf haben, aus welchen Zahlen Standardmengen wie $\mathbb{P}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ bestehen. Mit diesen Symbolen, die Sie teilweise schon aus der Schule kennen, werden Sie immer wieder zu tun haben.

⋆151

Jeweils zwei der unten aufgeführten Mengen sind gleich. Finden Sie die entsprechenden Paare.

$A = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}$	$B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 8\} \cup \mathbb{N}$
$C = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}$	$D = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = x \text{ und } x < 1\}$
$E = \mathbb{N} \cup \{42\}$	$F = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = x \text{ und } x < 0\}$
$G = \{2\sqrt{2}\}$	$H = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 8 \text{ und } x > 0\}$
$I = \{n \in \mathbb{N} : n^2 \leq 0\}$	$J = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 8 \text{ und } x > 0\}$

⋆152

Jeweils zwei der unten aufgeführten Mengen sind gleich. Finden Sie die entsprechenden Paare.

$A = \mathbb{R} \cup \mathbb{Q}$	$B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 8\} \cup \mathbb{N}$
$C = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}$	$D = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = x \text{ und } x < 1\}$

$E = \mathbb{N} \setminus \{-42\}$ $\qquad$ $F = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = x \text{ und } x < 0\}$

$G = \{n \in \mathbb{N} : n + n = n\}$ $\qquad$ $H = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 8 \text{ und } x > 0\}$

$I = \{2\sqrt{2}\}$ $\qquad$ $J = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 8 \text{ und } x > 0\}$

⋆153

Jeweils zwei der unten aufgeführten Mengen sind gleich. Finden Sie die entsprechenden Paare.

$A = \mathbb{N} \cup \{42\}$ $\qquad$ $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 8\}$

$C = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 0\}$ $\qquad$ $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 8\}$

$E = \{2\sqrt{2}\}$ $\qquad$ $F = \{x \in \mathbb{Z} : 42 + x = 42\}$

$G = \mathbb{N} \cap \mathbb{Q}$ $\qquad$ $H = D \setminus \mathbb{Q}$

$I = (E \cap E) \cup E$ $\qquad$ $J = E \setminus E$

⋆154

Jeweils zwei der unten aufgeführten Mengen sind gleich. Finden Sie die entsprechenden Paare.

$A = \mathbb{N} \setminus \{-42\}$ $\qquad$ $B = \{8.4\}$

$C = \{n \in \mathbb{N} : n < 0\}$ $\qquad$ $D = \{x \in \mathbb{R} : 5x = 42\}$

$E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0\}$ $\qquad$ $F = \{x \in \mathbb{Z} : 5x = 42\}$

$G = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}$ $\qquad$ $H = \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}$

$I = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ $\qquad$ $J = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R})$

Aufgaben wie die obigen kommen so ziemlich in jeder Klausur vor und fallen trotzdem immer wieder nur recht mittelmäßig aus. Um sie richtig zu lösen, muss man alle Konzepte aus dem 15. Kapitel verstanden haben und man muss auch genau lesen. Z.B. unterscheiden sich die Definitionen der Mengen H und J in Aufgabe 151 nur durch einen Buchstaben, aber es sind völlig unterschiedliche Mengen. (Den Unterschied versteht man, wenn man Kapitel 14 nicht übersprungen hat.)

⋆155

Sei $A = \{n \in \mathbb{N} : n > 1\} \setminus \mathbb{P}$. Welche der folgenden Mengen ist identisch mit A?

- ☐ $\{mn : m, n \in \mathbb{P}\}$
- ☐ $\{p + 1 : p \in \mathbb{P}\}$
- ☐ $\{n \in \mathbb{P} : n \in \mathbb{N} \text{ und } n > 1\}$
- ☐ $\{mp : p \in \mathbb{P} \text{ und } m \in \mathbb{Z} \text{ und } m > 1\}$

Der Schlüssel für die Lösung dieser Aufgabe ist Kapitel 8.

⋆156

Wie viele Elemente hat die folgende Menge?

$$\left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N}^+ \text{ und } |pq| \leq 3\right\}$$

Es gibt unendlich viele Brüche, aber es gibt nur wenige Möglichkeiten, ein Produkt ganzer Zahlen zu bilden, dessen Betrag nicht größer als drei ist. Es lohnt sich nicht, dafür ein Programm zu schreiben.

⋆157

Seien die folgenden Mengen gegeben:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 0\}$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ und } x^2 > 0\}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ $A \subseteq B \subseteq C$
- ☐ $A \subseteq C \subseteq B$
- ☐ $B \subseteq A \subseteq C$
- ☐ $B \subseteq C \subseteq A$
- ☐ $C \subseteq A \subseteq B$
- ☐ $C \subseteq B \subseteq A$

Man kann diese Teilmengenbeziehungen auch ohne Mengen formulieren und vielleicht sollten Sie das zur Übung mal machen. $A \subseteq B$ bedeutet zum Beispiel: Wenn x positiv ist, dann ist auch x^2 positiv. Entsprechend bedeutet $B \subseteq A$: Wenn x^2 positiv ist, dann ist auch x positiv. Nur eine von beiden Aussagen ist korrekt.
So etwas wie $C \subseteq A \subseteq B$ ist übrigens eine Abkürzung für $C \subseteq A$ und $A \subseteq B$, genau wie $x = y = z$ eine Abkürzung für $x = y$ und $y = z$ ist.

⋆158

Sei $A = \{n \in \mathbb{N} : 3 \mid n\}$ und $B = \{n \in \mathbb{N} : 42 \mid n\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ $A \subseteq B$
- ☐ $B \subseteq A$
- ☐ A und B sind disjunkt.
- ☐ $A \cap B = A$
- ☐ $A \cup B = A$
- ☐ $A \cap B = B$
- ☐ $A \cup B = B$

Auch das lässt sich ohne Mengen formulieren. $A \cap B = A$ kann man beispielsweise interpretieren als: n ist genau dann durch 3 teilbar, wenn n durch 3 und durch 42 teilbar ist. (Stimmt das?)

⋆159

Sei C eine Menge und seien A und B Teilmengen von C. Welche der folgenden Aussagen sind dann immer wahr?

- ☐ $A \cap (C \setminus (A \cup B)) \subseteq A$
- ☐ $A \cap (C \setminus (A \cup B)) = A$
- ☐ $A \cap (C \setminus (A \cup B)) \subseteq A \cap B$
- ☐ $A \cap B \subseteq A \cap (C \setminus (A \cup B))$
- ☐ $A \cap (C \setminus (A \cup B)) \subseteq A \cup B$
- ☐ $A \cap (C \setminus (A \cup B)) = A \cup B$

Aufgabe 253[242] im Buch ist eine gute Vorbereitung für eine Aufgabe wie diese.

16. Endliche Kombinatorik

⋆160

Sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$. Geben Sie ein geordnetes Paar an, das Element von $A^2 \setminus B^2$, aber *nicht* Element von $(A \setminus B)^2$ ist.

Hier geht es um das Mengenprodukt, das ab Aufgabe 274[263] im Buch eingeführt wird. Die Schreibweise A^2, die für manche anfangs verwirrend ist, wird auf Seite 174[168] im Buch erläutert.

⋆161

Geben Sie die Mächtigkeit von $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| = 1\}$ an.

Die Mächtigkeit einer Menge ist einfach die Anzahl ihrer Elemente. Begriff und Schreibweise werden in Aufgabe 277[266] im Buch eingeführt. Um diese Aufgabe zu lösen, muss man sich also einfach überlegen, wie viele reelle Zahlen die Gleichung $|x^2 - 1| = 1$ erfüllen.

⋆162

Sei $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Geben Sie die Mächtigkeit von $B = \{xy \colon x, y \in A\}$ an.

⋆163

Sei A die Menge der ersten 22 Primzahlen und $B = \{\frac{m}{n} \colon m, n \in A\}$. Geben Sie die Mächtigkeit von B an.

⋆164

Sei A die Menge der ersten 23 Primzahlen und B die Menge $\{\mathrm{ggT}(m, n) \colon m, n \in A\}$. Geben Sie die Mächtigkeit von B an.

⋆165

Sei A die Menge der ersten 40 Primzahlen und B die Menge $\{mn : m, n \in A\}$. Geben Sie die Mächtigkeit von B an.

⋆166

Sei A die Menge der ersten 40 Primzahlen und $B = \{mn\colon m, n \in A \text{ und } m \neq n\}$. Geben Sie die Mächtigkeit von B an.

Diverse sehr ähnliche Aufgabe, bei denen es um die Mächtigkeit von Mengen geht. Der entscheidende Punkt ist dabei, dass Elemente nicht doppelt gezählt werden. In Aufgabe 162 kann man z.B. die Produkte $0 \cdot 3$ und $2 \cdot 0$ bilden, aber es kommt beide Male die Null heraus, die nur einmal als Element von B gezählt wird.
Solche Aufgaben kann man in Python häufig in einer Zeile lösen, wenn man den Umgang mit Mengen in dieser Programmiersprache verstanden hat. Man kann aber alle diese Aufgaben auch mit Nachdenken sowie Zettel und Stift lösen.

⋆167

Sei $A = \{p \in \mathbb{P} : p < q\}$. Für welche Primzahl q gilt $|A \times A| = 100$?

⋆168

Sei $A = \{p \in \mathbb{P} : p + 1 \leq q\}$. Für welche Primzahl q gilt $|A \times A| = 100$?

Die Frage besteht aus zwei Teilen. Sie müssen sich erst überlegen, wie groß A sein muss, und dann, welches q dafür sorgt, dass A genau diese Größe hat.
Beachten Sie den subtilen Unterschied zwischen beiden Aufgaben. Kommt in beiden Fällen dasselbe heraus?

⋆169

Die Mengen A und B sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} A &= \{\{n, n+1, n+2\} : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \leq 42\} = \{\{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \ldots, \{42,43,44\}\} \\ B &= \{X \cap Y : X, Y \in A \text{ und } X \neq Y\} \end{aligned}$$

Wie viele Elemente hat B?

Das kann man ganz einfach mit Python lösen, wenn man die Mengenschreibweise versteht und weiß, was man eingeben muss. Was ändert sich, wenn man die Bedingung $X \neq Y$ weglässt? Überlegen Sie erst selbst, bevor Sie den Computer die Frage beantworten lassen.

⋆170

Wie viele Elemente hat die Menge B?

$$\begin{aligned} A_n &= \{\, (n+k) \bmod 42 : k \in \{0,1,2,3\} \,\} \qquad (n \in \mathbb{N}) \\ B &= \{\, A_m \cap A_n : m, n \in \mathbb{N} \text{ und } A_m \neq A_n \,\} \end{aligned}$$

Eine Variantion der vorherigen Aufgabe. Was hat sich geändert? Wird die Aufgabe dadurch schwieriger oder einfacher?

⋆171

Sortieren Sie die folgenden Mengen nach Mächtigkeit.

$$\begin{aligned} A &= \{\, n \bmod 42 : n \in \mathbb{N}^+ \,\} \\ B &= \{\, 42 \bmod n : n \in \mathbb{N}^+ \,\} \\ C &= \{\, n \in \mathbb{N} : n^2 = 42 \,\} \\ D &= \{\, n \in \mathbb{N} : n^2 < 42 \,\} \\ E &= \{\, n \in \mathbb{N} : n \mid 42 \,\} \end{aligned}$$

Hier müssen Sie also erstens die Mengenschreibweise verstehen und sich dann zweitens überlegen, wie viele Elemente die einzelnen Mengen haben. Dabei hilft Ihnen offensichtlich, wenn Sie noch wissen, was Sie in den vorherigen Kapiteln gelernt haben.

⋆172

A, B und C sind Mengen, die jeweils 30 Elemente haben. $A \cap B$ hat fünf Elemente, $A \cap C$ hat sechs Elemente. Ferner sind $A \cap B$ und $A \cap C$ disjunkt und es gilt $|A \cup B \cup C| = 70$. Wie viele Elemente hat $B \cap C$?

Bei dieser Aufgabe geht es um das Inklusions-Exklusions-Prinzip. Überlegen Sie, welche Informationen Sie haben, und welche Sie herausfinden sollen.

⋆173

Wie viele dreistellige natürliche Zahlen, die *mindestens* eine der drei folgenden Bedingungen erfüllen, gibt es?

(i) Die erste Ziffer ist ungerade.

(ii) Die Zahl ist durch 2 teilbar.

(iii) Die Zahl ist durch 5 teilbar.

Erlaubt sind also z.B. die Zahlen 103, 452 und 425, aber auch 152 oder 300. *Nicht* erlaubt sind etwa 42 (nicht dreistellig) oder 421.

174

Wie viele verschiedene Zeichenketten der Länge 4, die *mindestens* eine der folgenden Bedingungen erfüllen, kann man aus den 8 Buchstaben `A` bis `H` konstruieren?

(i) Der erste Buchstabe ist `A`.

(ii) Der zweite Buchstabe ist `B`.

(iii) Der dritte Buchstabe ist `C`.

Erlaubt sind also z.B. die Zeichenketten `ADBH` oder `DBDH`, aber auch `AHCC` oder `ABCA`.

175

Wie viele verschiedene Zeichenketten der Länge 4, die *mindestens* eine der folgenden Bedingungen erfüllen, kann man aus den 6 Buchstaben `A` bis `F` konstruieren?

(i) Der erste Buchstabe ist `A`.

(ii) Der zweite Buchstabe ist `B`.

(iii) Die ersten beiden Buchstaben sind unterschiedlich.

Erlaubt sind also z.B. die Zeichenketten `AABF` oder `BBDF` oder `CFCC` oder `ABCA`.

176

Wie viele verschiedene Zeichenketten der Länge 4, die *mindestens* eine der folgenden Bedingungen erfüllen, kann man aus den 8 Buchstaben `A` bis `H` konstruieren?

(i) Der erste Buchstabe ist `A`.

(ii) Der zweite Buchstabe ist `B`.

(iii) Die letzten beiden Buchstaben sind gleich.

Erlaubt sind also z.B. die Zeichenketten `ACBH` oder `CBDH` oder `CAHH` oder `ACCC`.

177

Wie viele verschiedene Zeichenketten der Länge 4, die *mindestens* eine der folgenden Bedingungen erfüllen, kann man aus den 7 Buchstaben `A` bis `G` konstruieren?

(i) Der erste Buchstabe ist `A`.

(ii) Der zweite Buchstabe ist `B`.

(iii) Die letzten beiden Buchstaben sind verschieden.

Erlaubt sind also z.B. die Zeichenketten `ACGG` oder `CBDG` oder `CAEF` oder `ACCC`.

178

Wie viele verschiedene Zeichenketten der Länge 4, die *mindestens* eine der folgenden Bedingungen erfüllen, kann man aus den 7 Buchstaben `A` bis `G` konstruieren?

(i) Der erste Buchstabe ist `A`.

(ii) Der zweite Buchstabe ist `B`.

(iii) Alle vier Buchstaben sind verschieden.

Erlaubt sind also z.B. die Zeichenketten `ACEE` oder `BBDF` oder `CAEF` oder `ABCD`.

Alle sechs Aufgaben oben lassen sich mit dem Inklusions-Exklusions-Prinzip lösen. Es gibt teilweise auch andere Wege, aber wenn Sie das besagte Prinzip verwenden, haben Sie eine Methode, die immer funktioniert.
Wenn Sie nicht wissen, wie man das Prinzip anwendet, dann schauen Sie sich noch mal die Aufgaben 281[270] und (etwas schwerer) 280[269] im Buch an.

⋆179

Geben Sie die Summe $3 + 4 + 5 + \cdots + 175 + 176$ an.

⋆180

Berechnen Sie die folgende Summe: $\displaystyle\sum_{k=12}^{44}(k+3)$

⋆181

Berechnen Sie die Summe $30 + 35 + 40 + 45 + \cdots + 445 + 450 + 455$.

> Bei diesen Aufgaben können Sie einerseits üben, wie man sowas mit Python ausrechnet, andererseits sollten Sie das aber auch mal ohne Computer und mit der Gaußschen Summenformel machen.

182

Welchen Wert muss k haben, damit $\displaystyle\sum_{n=k}^{110}(n^2+n+1) = 425546$ gilt?

183

Welchen Wert muss b haben, damit $\displaystyle\sum_{n=42}^{b}(n^2+n+3) = 950309$ gilt?

184

Welchen Wert muss b haben, damit $\displaystyle\sum_{n=42}^{b}(an^2+an+3a) = 950309a$ gilt? (a ist positiv und reell.)

> Weitere Aufgaben zu Summen. Hier ist jeweils die Summe vorgegeben und Sie sollen einen anderen Parameter finden. Bei einer der Aufgaben muss man eine der Rechenregeln für Summen anwenden.
> Es gibt verschiedene Wege, diese Aufgabe zu lösen. Mathematiker würden das von Hand mit einer der Faulhaberschen Formeln machen. Man kann aber auch den Computer probieren lassen, indem man eine Schleife schreibt, die nach der Lösung sucht. Nachdem wir uns mit Computeralgebrasystemen beschäftigt haben, werden Sie sehen, dass Computer solche Fragen auch direkt beantworten können.

185

Sei $p = 7$. Geben Sie die kleinste natürliche Zahl n an, für die sich $\sum_{i=0}^{n} p^{-i}$ um weniger als 10^{-14} von $\frac{p}{p-1}$ unterscheidet.

> Das ist wieder eine Approximationsaufgabe wie weiter oben ab Aufgabe 140 und sie lässt sich ähnlich lösen. Der Unterschied ist nur, dass man in diesem Fall erst mal die Summenschreibweise entziffern muss.

⋆186

Sei c eine reelle Zahl und seien m und n natürliche Zahlen mit $m < n$. Man kann die Summe $\sum_{k=m}^{n} c$ als ac schreiben. Geben Sie a an.

Die Frage kann im Prinzip auch von einem Computeralgebrasystem beantwortet werden, aber das ist nicht der Sinne der Aufgabe. Man kann sie eigentlich ohne Aufwand durch „scharfes Hinsehen“ lösen, wenn man sich klarmacht, was da eigentlich summiert wird.

$\star$187

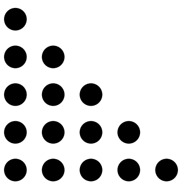
Sei c eine reelle Zahl und seien m, n und p natürliche Zahlen mit $m < n$. Ferner sei $A = \sum_{k=m}^{n} c$ und $B = \sum_{k=m+p}^{n+p} c$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ◯ $A < B$
- ◯ $A = B$
- ◯ $A > B$
- ◯ Ob eine der obigen drei Aussagen gilt, hängt von c ab.

Wenn Sie Aufgabe 186 verstanden haben, sollte auch diese kein Problem sein.

188

Eine *Dreieckszahl* ist eine positive Zahl, die sich als Summe der Form $\sum_{k=1}^{n} k$ darstellen lässt. Die ersten fünf Dreieckszahlen sind also 1, 3, 6, 10 und 15. Wie viele der ersten 500 Dreieckszahlen sind Quadratzahlen?

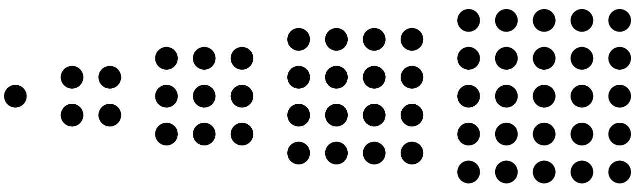


189

Und wie viele der ersten hundert positiven Quadratzahlen sind Dreieckszahlen?

190

Eine *Tetraederzahl* ist eine positive Zahl, die sich als Summe der Form $\sum_{k=1}^{n} k^2$ darstellen lässt. Die ersten fünf Tetraederzahlen sind also 1, 5, 14, 30 und 55. (Warum nennt man diese Zahlen wohl Tetraederzahlen?) Welche Tetraederzahl liegt am dichtesten an 4242?



Drei Aufgaben, bei denen es sich anbietet, den Computer nach der Lösung suchen zu lassen. (Wie die erste kann man auch die dritte „umdrehen“.)

$\star$191

Geben Sie das folgende Produkt als *gekürzten* Bruch an: $\prod_{k=5}^{41} \frac{k}{k+1}$

⋆192

Geben Sie das folgende Produkt als *gekürzten* Bruch an: $\prod_{k=3}^{42} \frac{k^2}{k^2+k}$

> Ein gutes Computeralgebrasystem kann das. Aber schneller geht es, wenn man einfach mal die ersten Faktoren hinschreibt und ein paar Sekunden nachdenkt.

⋆193

Welchen Wert hat das Produkt $a \cdot (a+a) \cdot (a+a+a) \cdot \dots \cdot (a+a+\dots+a)$, wenn es aus ingesamt n Faktoren besteht?

○ n^a ○ a^n ○ $a!$ ○ $n!$ ○ $n!a^n$ ○ $n!n^a$ ○ $a!a^n$ ○ $a!n^a$

⋆194

Welchen Wert hat das Produkt $a \cdot (a+a) \cdot (a+a+a) \cdot \dots \cdot (a+a+\dots+a)$, wenn es aus ingesamt $2n$ Faktoren besteht?

○ $2n!$ ○ $(2n)!$ ○ $2n!a^n$ ○ $2n!a^{2n}$ ○ $(2n)!a^n$ ○ $(2n)!a^{2n}$

⋆195

Welchen Wert hat das Produkt $\prod_{k=1}^{2n}(-ka)$?

○ $2\,n!\,a^{2n}$ ○ $-\,2\,n!\,a^{2n}$ ○ $(2n)!\,a^{2n}$ ○ $-\,(2n)!\,a^{2n}$ ○ $n!\,(2a)^n$ ○ $-\,n!\,(2a)^n$

> Drei sehr ähnliche Aufgaben. Bei allen drei Aufgaben würde ich empfehlen, sich das Produkt wirklich mal für ein kleines n hinzuschreiben und es zu vereinfachen. Dann sollte eigentlich schon alles klar sein. Beachten Sie, dass $(2n)!$ und $2\,n!$ nicht dasselbe ist. (Ich verwende nicht absichtlich zwei verschiedene Schreibweisen, um Sie zu verwirren…)

⋆196

Geben Sie das folgende Produkt als gekürzten Bruch an:

$$\left(\prod_{k=3}^{142} \frac{(k-1)!}{k!}\right) \cdot 143!$$

> Wenn Sie die Aufgabe verstehen, dann können Sie sie auch mit Zettel und Stift und ohne Computer lösen.

17. Permutationen, Variationen und Kombinationen

⋆197

Berechnen Sie den Binomialkoeffizienten $\binom{42}{3}$.

Eine kleine Fingerübung ...

⋆198

Wie viele dreistellige Dezimalzahlen gibt es, bei denen entweder alle Ziffern gerade oder alle Ziffern ungerade sind? (Hinweis: 007 und 042 sind keine dreistelligen Zahlen.)

Gibt es von beiden Sorten gleich viele Zahlen?

⋆199

Sei $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$. Geben Sie (in korrekter Schreibweise) ein Element von $\wp(A) \setminus \wp(B)$ an.

⋆200

Sei $A = \{1, 2, 4\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$. Wie viele Elemente hat die Menge $\wp(A) \setminus \wp(B)$?

Diese beiden Aufgaben dienen dazu, sich mit der Potenzmenge vertraut zu machen, und es ist empfehlenswert, sie ohne Computerhilfe zu bearbeiten. Die korrekte Schreibweise ist wichtig, weil es sich hier um *Mengen von Mengen* handelt. $\{42\}$ ist z.B. nicht dasselbe wie $\{\{42\}\}$ und ohnehin nicht dasselbe wie 42.

⋆201

Durch Umsortieren der Ziffern kann man aus 234456 andere Zahlen machen, z.B. 423654 oder 564234. Wie viele verschiedene Zahlen (inklusive 234456) kann man auf diese Art erhalten?

⋆202

Durch Umsortieren der Buchstaben kann man aus `MISSISSIPPI` andere Zeichenketten machen, z.B. `IIIIMPPSSSS` oder `PMISISISISP`. Wie viele verschiedene Zeichenketten (inklusive `MISSISSIPPI`) kann man auf diese Art erhalten?

Worum geht es beim Umsortieren? Sind das Permutationen, Kombinationen oder Variationen? Spielt es eine Rolle, dass gewisse Ziffern bzw. Buchstaben doppelt vorkommen? (Und was ändert sich, wenn nur Zeichenketten gezählt werden, die mit `M` anfangen?)

⋆203

Wie viele verschiedene Zahlen gibt es, die man als Produkt von genau fünf (nicht notwendig verschiedenen) Primzahlen unter 18 darstellen kann? (Beispiele für solche Zahlen sind 2^5 oder $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$.)

⋆204

Wie viele verschiedene Zahlen gibt es, die man als Produkt von vier oder weniger (nicht notwendig verschiedenen) Primzahlen unter 18 darstellen kann? (Beispiele für solche Zahlen sind 2^4 oder 3^2 oder $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$ oder $11 \cdot 13$ oder 7.)

⋆205

Wie viele verschiedene Zahlen gibt es, die man als Produkt von zwei, drei oder vier (nicht notwendig verschiedenen) Primzahlen unter 18 darstellen kann? (Beispiele für solche Zahlen sind 2^4 oder 3^3 oder $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$ oder $11 \cdot 13$.)

> Erhält man bei jeder Auswahl von n Primzahlen ein anderes Produkt? (Und wenn ja, wieso?) Kommt es auf die Reihenfolge an? Spielt bei den Aufgaben ggf. das leere Produkt (siehe Aufgabe 297[285] im Buch) eine Rolle?

⋆206

Wie viele Teilmengen von $\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$ gibt es, die mindestens eine Primzahl enthalten?

> Fangen wir mit einer einfacheren Frage an: Wie viele Teilmengen hat die Menge denn überhaupt? Und es ist ebenfalls einfacher, sich zu überlegen, wie viele Teilmengen es gibt, die *keine* Primzahl enthalten. Wenn Sie diese beiden Informationen haben, ist die Aufgabe schon gelöst!

⋆207

Sei $A = \{p \in \mathbb{P} : p < 40\}$ und $B = \{n \in \mathbb{N} : n > 10\}$. Wie viele Mengen gibt es, die sowohl Teilmenge von A als auch Teilmenge von B sind? (Beispielsweise ist $\{19, 29, 31\}$ so eine Menge.)

> Eine der beiden Mengen ist unendlich, aber das macht nichts. Eine Menge ist genau dann Teilmenge von A *und* B, wenn sie Teilmenge von welcher Menge ist?

⋆208

Wie viele Mengen von natürlichen Zahlen gibt es, die mindestens zwei Elemente enthalten und deren größtes Element kleiner als 16 ist?

⋆209

Wie viele Teilmengen von $\mathbb{N}$ gibt es, die höchstens 14 Elemente enthalten und deren größtes Element kleiner als 16 ist?

> Wie bei Aufgabe 206 oben ist es auch bei diesen beiden leichter, jeweils das Gegenteil von dem auszurechnen, was man eigentlich ausrechnen soll.

⋆210

Wie viele natürliche Zahlen gibt es, die kleiner als 10 000 sind und in deren Dezimaldarstellung vier verschiedene Ziffern vorkommen? (Führende Nullen gelten nicht als Ziffern, also wäre 0421 *nicht* so eine Zahl.)

Überlegen Sie zunächst, wie viele Ziffern die Zahlen haben, um die es geht. Dann überlegen Sie, was als erste Ziffer infrage kommt. Und so weiter. Siehe auch Aufgabe 343[329] im Buch.

⋆211

Bei wie vielen Zahlen aus der Menge $\{n \in \mathbb{N} : 200000 \leq n < 1000000\}$ kommen in der Dezimaldarstellung sechs verschiedene Ziffern vor?

Wenn Sie Aufgabe 210 lösen konnten, dann können Sie diese auch lösen.

⋆212

Wie viele natürliche Zahlen gibt es, die kleiner als 4096_{10} sind und in deren *Oktaldarstellung* vier verschiedene Ziffern vorkommen? (Führende Nullen gelten nicht als Ziffern, also wäre 0421_8 *nicht* so eine Zahl.)

Offenbar fast dieselbe Aufgabe wie Nummer 210. Was ändert sich beim Wechsel vom Dezimal- zum Oktalsystem?

⋆213

Wie viele ganze Zahlen zwischen 64 und 128 gibt es, deren Binärdarstellung ein Palindrom ist?

Denken Sie zunächst über die Anzahl der Ziffern nach. Und dann überlegen Sie, wie viele dieser Ziffern man frei wählen kann und wie viele sich zwangsläufig aus den bereits gewählten ergeben.
Ein *Palindrom* ist übrigens eine Zeichenkette, bei der es keinen Unterschied macht, ob man sie von vorne nach hinten oder von hinten nach vorne liest, z.B. das Wort `RENTNER` oder die Zahl 4224.

⋆214

Den Ausdruck $(1 + x)^{19}$ kann man nach dem binomischen Lehrsatz auch als $\sum_{k=0}^{19} a_k x^k$ schreiben. Geben Sie den Koeffizienten a_{12} an, der vor x^{12} steht.

Schreiben Sie zunächst mal mithilfe des binomischen Lehrsatzes hin, was herauskommt, wenn man kleinere Potenzen wie $(1 + x)^3$ oder $(1 + x)^4$ ausmultipliziert. Dann sollte klar sein, wie die Aufgabe gemeint ist und dass sie nicht schwer ist.
Dem Begriff *Koeffizient* sind Sie hoffentlich schon im Zusammenhang mit Polynomen begegnet. Im Ausdruck

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 = 1 \cdot x^0 + 2 \cdot x^1 + 1 \cdot x^2$$

sind die Koeffizienten z.B. 1, 2 und 1.

⋆215

Den Ausdruck $(2+x)^{11}$ kann man nach dem binomischen Lehrsatz auch als $\sum_{k=0}^{11} a_k x^k$ schreiben. Geben Sie den Koeffizienten a_9 an, der vor x^9 steht.

⋆216

Den Ausdruck $(1+2x)^{11}$ kann man nach dem binomischen Lehrsatz auch als $\sum_{k=0}^{11} a_k x^k$ schreiben. Geben Sie den Koeffizienten a_9 an, der vor x^9 steht.

⋆217

Den Ausdruck $(x-1)^{11}$ kann man nach dem binomischen Lehrsatz auch als $\sum_{k=0}^{11} a_k x^k$ schreiben. Geben Sie den Koeffizienten a_{10} an, der vor x^{10} steht.

> Das sind offenbar alles Variationen von Aufgabe 214. Wenn Sie sich jeweils klarmachen, was sich gegenüber dieser Aufgabe geändert hat, sollten auch diese Aufgaben nicht schwer sein. Zur Not sollte man auch hier einfach Zettel und Stift zur Hand nehmen und mal ein paar Beispiele selbst ausrechnen.

⋆218

Sei $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Kreuzen Sie an, welche von den folgenden Formeln für $(1+x)^n$ korrekt ist.

- ☐ $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$
- ☐ $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{n-i} x^i$
- ☐ $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^n$
- ☐ $\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} x + \binom{n}{n-2} x^2 + \cdots + \binom{n}{0} x^n$
- ☐ $\binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}$

⋆219

Sei $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}^+$. Welche von den folgenden Formeln sind korrekt?

- ☐ $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$
- ☐ $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{n-i} x^i$
- ☐ $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i}$
- ☐ $(1+x)^n - 1 = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i$
- ☐ $(1+x)^n - 1 = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{n-i} x^i$
- ☐ $(1+x)^n - 1 = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i}$

> Aufgabe 214 und die darauf folgenden sollten eigentlich eine gute Vorbereitung auf diese beiden gewesen sein. Insbesondere bei Aufgabe 219 unterscheiden sich die einzelnen Terme nur minimal. Das ist gerade der Witz: man muss genau hinschauen!

⋆220

Wie viele vierstellige gerade Zahlen gibt es, bei denen keine Ziffer doppelt vorkommt? (Zahlen wie 8, 42 oder 112 gelten nicht als vierstellig.)

Eine sehr ähnliche Aufgabe kam in dieser Liste schon vor. Allerdings hat sich bei dieser hier ein kleines Detail geändert.

⋆221

Wie viele fünfstellige Zahlen gibt es, in deren Darstellung weniger als fünf verschiedene Ziffern vorkommen? (Gemeint sind Zahlen wie 12341, 42420 oder 77777.)

Wie bei anderen kombinatorischen Fragen vorher ist es auch hier einfacher, die Fragestellung umzudrehen und das Gegenteil auszurechnen. Das haben Sie sogar schon gemacht, falls Sie alle Aufgaben vorher bearbeitet haben.

⋆222

In einer Tüte mit Gummibärchen befinden sich noch 42 rote Bärchen, 23 gelbe, zehn blaue und leider nur noch ein grünes. Sie dürfen sich acht Gummibärchen aus der Tüte nehmen. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür? (Die Reihenfolge spielt natürlich keine Rolle und wie üblich kann man Gummibärchen gleicher Farbe nicht unterscheiden.)

Diese Aufgabe steht wortwörtlich so im Buch – mit Lösung. Aber das ist Ihnen natürlich längst aufgefallen, weil Sie die Aufgaben im Buch ja alle bearbeitet haben…

223

Wir definieren rekursiv $a_0 = 2$ und $a_{n+1} = a_n^{11}$ für $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie $a_{42} \bmod 7$ an.

Hier können Sie das Programmieren rekursiver Definitionen in PYTHON üben. Aus dem dritten Kapitel wissen Sie noch, dass Sie die ganze Zeit in $\mathbb{Z}_7$ rechnen dürfen, darum werden die Zwischenergebnisse auch nicht übermäßig groß.

224

Die sogenannten *Fibonacci-Zahlen* werden durch $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$ rekursiv definiert. Geben Sie die kleinste Fibonacci-Zahl an, die größer als eins und ein Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

225

Algen bedecken am 1. Juni 0.01% der Fläche eines Sees. An jedem folgenden Tag verdreifacht sich diese Fläche. Wann wird der See zu mehr als der Hälfte mit Algen bedeckt sein?

Zwei weitere Aufgaben mit rekursiv definierten Funktionen, die man beide mit Computerhilfe lösen sollte.

226

Eine *Kubikzahl* ist eine Zahl die die dritte Potenz einer positiven natürlichen Zahl ist. Die ersten vier Kubikzahlen sind also 1, 8, 27 und 64. Geben Sie die kleinste Kubikzahl an, die die Summe dreier Kubikzahlen ist.

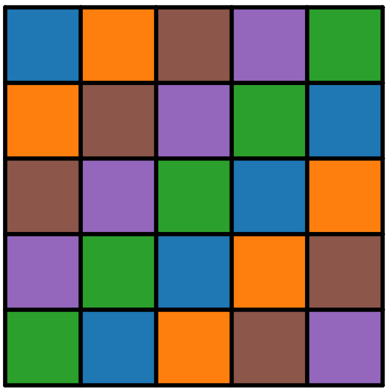
> Hier bietet es sich an, ein Programm zu schreiben, das die Aufgabe durch Probieren löst. Weil das ein kombinatorisches Problem ist, ist die Aufgabe dem 17. Kapitel zugeordnet.

⋆227

Frau Meier will eine Wand in ihrer Wohnung neu verfliesen. Sie muss dafür 25 Fliesen in quadratischer Form anbringen und hat sich in den Kopf gesetzt, dass sie auf jeden Fall die folgenden Regeln einhalten will:

- In der obersten Reihe sitzen fünf Fliesen in fünf verschiedenen Farben.
- In jeder folgenden Reihe wiederholt sich das Muster aus der Zeile darüber, allerdings zyklisch um eine Position nach links verschoben.

Das könnte z.B. so aussehen:



Frau Meier hat Fliesen in sieben verschiedenen Farben zur Verfügung und von jeder Farbe mindestens acht Fliesen. Wie viele verschiedene Muster kann sie nach den obigen Regeln erstellen?

> Die entscheidende Beobachtung bei dieser Aufgabe ist, dass nach dem Platzieren der ersten paar Fliesen bereits feststeht, wie der Rest der Wand verfliest werden muss. Man kann sich also auf einen kleinen Teil des Musters konzentrieren.

⋆228

Sie sollen ein neues Design für die Website des Departments entwickeln, das mit nur vier Farben auskommt. Sie haben insgesamt 42 Farben zur Verfügung, aus denen Sie vier auswählen sollen. (Die Reihenfolge spielt keine Rolle.) Zu diesen 42 Farben gehören allerdings auch rosa und türkis und gemäß Auftrag des Departments dürfen Sie zwar eine dieser beiden Farben auswählen, aber *nicht* beide gleichzeitig. Wie viele Wahlmöglichkeiten haben Sie?

> Tipp: Hier sollte man zwei Zahlen voneinander subtrahieren. Die beiden Zahlen lassen sich jeweils mit „Standardformeln“ (siehe Aufgabe 326[314] im Buch) berechnen.

⋆229

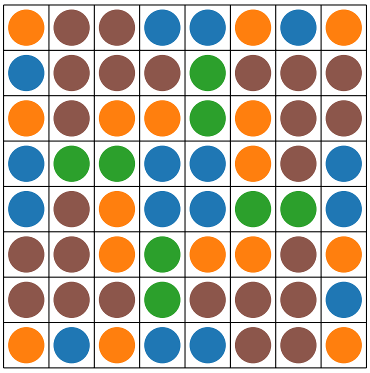
Die folgende Funktion gibt eine *sortierte* Liste von k Zahlen aus, die jeweils zufällig aus den natürlichen Zahlen von 1 bis n ausgewählt wurden. Wie viele verschiedene Ausgaben kann der Funktionsaufruf `foo(7,23)` liefern?

```
from random import randrange
def foo(n,k):
    return sorted([randrange(1,n+1) for i in range(k)])
```

Auch das lässt sich mit einer der sechs „Standardformeln" machen. Man muss sich nur überlegen, worum es hier eigentlich geht – Permutationen, Kombinationen oder Variationen?

⋆230

Auf ein aus 8×8 Feldern bestehendes Quadrat wird auf jedes Feld ein farbiger Chip gelegt, wodurch sich ein Muster ergibt. Die einzige Bedingung ist, dass sich das Muster nicht ändern darf, wenn man das Quadrat um 90, 180 oder 270 Grad dreht. Wie viele verschiedene Muster sind möglich, wenn man fünf Farben zur Verfügung hat? (Wie man an dem Beispiel sieht, müssen nicht alle Farben verwendet werden. Es ist u.a. auch möglich, für alle 64 Felder dieselbe Farbe zu verwenden.)



Eine weitere Aufgabe für eines der sechs Standardverfahren. Der „Haken" ist in diesem Fall, dass man aufgrund der angegebenen Bedingung nicht so viel Auswahl hat, wie man zunächst denkt. (Wenn man beispielsweise ganz oben rechts einen Chip hingelegt hat, dann steht damit für drei andere Felder bereits fest, welche Farbe sie erhalten müssen.)

⋆231

In einem Behälter befinden sich 25 Kugeln. Auf jeder Kugel ist eine Primzahl aufgedruckt und diese Primzahlen sind alle verschieden. Nacheinander werden 12 Kugeln dem Behälter entnommen, die aufgedruckte Primzahl wird jeweils notiert und die Kugel wird wieder zurückgelegt. (Dieselbe Kugel kann also mehrfach entnommen werden.) Am Ende wird das Produkt der 12 notierten Zahlen ausgerechnet. Wie viele verschiedene Produkte können auf diese Art gebildet werden?

Und noch eine Aufgabe für die sechs Standardverfahren. Hier braucht man zusätzlich den Fundamentalsatz der Arithmetik.

232

Wie viele verschiedene Teilmengen hat die folgende Menge?

$$\{\, p/q : p, q \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \text{ und } q \text{ ist ungerade} \,\}$$

So eine Menge kommt am Ende des 15. Kapitels vor. Man lässt sie sich wohl am besten vom Computer generieren, damit man nicht den Überblick verliert. Wie man die Anzahl der Teilmengen berechnet, wissen Sie, oder?

18. Unendliche Mengen

⋆233

Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die wahr sind.

- [x] $4 \in [3,5]$
- [x] $3 \in [3,5)$
- [x] $5 \in (3,5]$
- [x] $[3,4] \cap (4,5] = \varnothing$

Eine Aufwärmaufgabe zu Intervallen, die im 18. Kapitel eingeführt werden und die schon aus der Schule bekannt sein sollten.

⋆234

Welche der folgenden Mengen sind Intervalle?

- [x] $[40,42] \setminus \{42\}$
- [ ] $[40,42] \setminus \{41\}$
- [ ] $[40,42] \setminus [40,42)$
- [x] $[40,41] \setminus [42,43]$
- [ ] $[40,41] \cap [42,43]$
- [ ] $[40,41] \cup [42,43]$

⋆235

Welche der folgenden Mengen sind echte Intervalle?

- [x] $[40,42] \setminus [40,41)$
- [x] $[40,41] \setminus \mathbb{N}$
- [ ] $[40,42] \setminus [40,42)$
- [ ] $[40,41] \setminus \mathbb{Q}$
- [x] $[40,41] \cap [41,43]$
- [ ] $(40,42) \setminus \mathbb{N}$

⋆236

Welche der folgenden Mengen sind echte Intervalle?

- [x] $[40,42] \setminus [40,41)$
- [x] $[40,41] \setminus \mathbb{N}$
- [ ] $[40,42] \setminus [40,42)$
- [x] $[40,41) \cup \{41\}$
- [x] $[40,41] \setminus \{41\}$
- [ ] $(40,41) \cup [41,42]$

⋆237

Welche der folgenden Mengen sind echte Intervalle?

- [x] $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \in (0,1]\}$
- [x] $\{x \in \mathbb{R}_{>0} : x^2 \in (0,1]\}$
- [ ] $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \in (0,1]\}$
- [ ] $[40,41] \setminus \mathbb{Q}$
- [ ] $[40,41] \cap [41,43]$
- [ ] $(40,42) \setminus \mathbb{N}$

⋆238

Welche der folgenden Mengen sind echte Intervalle?

- [x] $\{x \in \mathbb{R} : x > 3\}$
- [x] $\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 3\}$
- [x] $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 3\}$
- [ ] $[40,41] \setminus \mathbb{Q}$
- [ ] $[40,41] \cap [41,43]$
- [x] $[-42,-41) \setminus \mathbb{Z}$

⋆239

In der folgenden Liste kommt eine Menge nur einmal vor. Kreuzen Sie diese an:

- ( ) $[3,5] \cap [4,6]$ — [4,5]
- ( ) $(3,5] \cap [4,6)$ — [4,5]
- ( ) $(3,5] \cap [4,6]$ — [4,5]
- ( ) $[3,5) \cup [4,6]$ — [3,6]
- (x) $(4,6] \cap [3,5]$ — (4,5]
- ( ) $[4,6] \cup [3,5]$ — [3,6]

Weitere Aufgaben zum Thema Intervalle. Man sollte dabei der Empfehlung von Seite 220[208] im Buch folgen. Beachten Sie außerdem den Unterschied zwischen Intervallen und *echten* Intervallen.

240

Wie viele Elemente enthält die Menge $\{\, (p,q) : p,q \in \mathbb{P} \cap [0, 10^{21}] \,\}$ ungefähr?

○ $4.3 \cdot 10^{38}$ ○ $3.9 \cdot 10^{40}$ ○ $3.6 \cdot 10^{42}$ ○ $3.3 \cdot 10^{44}$

x = ((10**21)/log(10**21)) float(x*x)

⋆241

Sei $A = \mathbb{Z} \cap [-4, 3)$. Wie viele Teilmengen hat A?

Um die Anzahl der Teilmengen ging es schon im 17. Kapitel. Das wird hier mit Intervallen kombiniert, macht es aber deswegen eigentlich nicht schwerer.

2**7 = 128

⋆242

Geben Sie an, wie viele Elemente die Menge $(\mathbb{N} \cap [0, 1000])^2$ enthält.

1001
*1001????????????????????????
????????????

243

Die Menge $(\mathbb{P} \cap [0, 10^{21}]) \times (\mathbb{N} \cap [0, 1000))$ enthält ungefähr $2.1 \cdot 10^m$ Elemente. Geben Sie den bestmöglichen Wert für m an, wobei natürlich $m \in \mathbb{N}$ gelten soll.

Wie im 16. Kapitel geht es hier wieder um das Mengenprodukt. Neu ist nur, dass in der Formulierung der Aufgabe Intervalle vorkommen. Für die Aufgaben, bei denen $\mathbb{P}$ eine Rolle spielt, müssen Sie sich außerdem an das achte Kapitel erinnern.

((10**21 / log(10**21))*1001).evalf()

⋆244

Sei $A = \{10/n : n \in \mathbb{N}^+\}$. Geben Sie das *kleinste* Intervall I oberhalb von A an. (Damit ist gemeint, dass sowohl $A \subseteq I$ als auch $A \not\subseteq J$ für jedes Intervall $J \subsetneq I$ gelten soll.)

(0,10] weil min 10/1 und max 10/ N

⋆245

Sei $A = \{m/n : m \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N}^+ \text{ und } |m| < |n|\}$. Geben Sie das *kleinste* Intervall I oberhalb von A an. (Damit ist gemeint, dass sowohl $A \subseteq I$ als auch $A \not\subseteq J$ für jedes Intervall $J \subsetneq I$ gelten soll.)

$I = [0, 2]$ ist z.B. ein Intervall oberhalb von $A = \{0, 1\}$, weil $A \subseteq I$ gilt. Aber I ist nicht das kleinste Intervall oberhalb von A, weil auch $J = [0, 2)$ ein Intervall oberhalb von A ist und $J \subsetneq I$ gilt. (Und J ist ebenfalls nicht das kleinste Intervall oberhalb von A.)

(-1,1)

⋆246

Wenn $a \in [2, 4)$ und $b \in [3, 6)$ gilt, in welchem Intervall befindet sich dann $a + b$? (Gesucht ist das *kleinstmögliche* Intervall, in dem $a + b$ *mit Sicherheit* liegt. Es gibt also nur eine mögliche Antwort.)

○ $[2, 10)$ ○ $[2, 10]$ ○ $[2, 6)$ ○ $[2, 6]$ ● $[5, 10)$ ○ $[5, 10]$

Wenn man Summen der Form $a+b$ mit $a \in [2,4)$ und $b \in [3,6)$ bildet, was ist dann die kleinste Zahl, die herauskommen kann? Und gibt es auch ein größtmögliches Ergebnis? Oder gibt es stattdessen vielleicht eine kleinstmögliche positive Zahl, die *nicht* herauskommen kann?

$\star$247

Wenn $a \in (2,4]$ und $b \in [3,6)$ gilt, in welchem Intervall befindet sich dann $a+b$? (Gesucht ist das *kleinstmögliche* Intervall, in dem $a+b$ *mit Sicherheit* liegt. Es gibt also nur eine mögliche Antwort.)

- ○ $(2,6)$
- ○ $(2,6]$
- ○ $[2,6)$
- ○ $[2,6]$
- ● $(5,10)$
- ○ $(5,10]$
- ○ $[5,10)$
- ○ $[5,10]$

Offenbar wurde gegenüber der vorherigen Aufgabe nur eine Kleinigkeit geändert. Ändert sich dadurch auch die Antwort?

$\star$248

Wenn $a \in [2,4]$ und $b \in [10,20]$ gilt, in welchem Intervall befindet sich dann $b-a$? (Gesucht ist das *kleinstmögliche* Intervall, in dem $b-a$ *mit Sicherheit* liegt. Es gibt also nur eine mögliche Antwort.)

- ○ $[2,20]$
- ○ $[8,16]$
- ○ $[6,18]$
- ○ $[8,18]$
- ● $[6,16]$

$\star$249

Sei $M = \{\, ab : a \in [1,2] \text{ und } b \in [-2,1) \,\}$. Was ist das größte Element von M?

- ○ 1
- ● 2
- ○ 4
- ○ M hat kein größtes Element.

$\star$250

Sei $M = \{\, ab : a \in [-1,\frac{2}{3}) \text{ und } b \in [-\frac{3}{2},3] \,\}$. Was ist das größte Element von M?

- ● 3/2
- ○ 2
- ○ 3
- ○ M hat kein größtes Element.

$\star$251

Sei $a \in [-1,2]$ und $b \in [-2,1)$. In welchen der folgenden Intervalle liegt ab *mit Sicherheit*?

- ■ $[-4,2]$
- □ $[-4,2)$
- □ $(-4,2]$
- □ $[-2,4]$
- □ $(-2,4]$
- □ $[-2,4)$

[2*-2,-1*-2] = [-4,2]

Weitere Aufgaben, bei denen man sich ähnliche Fragen wie bei Aufgabe 246 stellen muss.

⋆252

Welche der folgenden Mengen sind endlich?

$[40,42] \setminus [40,41)$	$\{-40,-41\} \setminus \mathbb{N}$	● $[40,42] \setminus [40,42)$
$[40,41] \setminus \mathbb{Q}$	● $[40,41] \cap [41,43]$	● $[40,41] \cap [42,43]$

⋆253

Welche der folgenden Mengen sind endlich?

$[40,42] \setminus [40,41)$	● $\{-40,-41\} \setminus \mathbb{Q}$	● $[40,42] \setminus [40,42)$
$[40,42) \cap (41,43]$	$\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 10\}$	$\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 10\}$

Dies ist vielleicht die richtige Stelle, noch einmal auf das auf Seite 220[208] im Buch erwähnte Missverständnis hinzuweisen. Außerdem sei hier explizit gesagt, dass die leere Menge endlich ist. (Sie hat null Elemente.)

⋆254

Welche der folgenden Mengen sind endlich?

$\wp(\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}^+)$ $\quad$ $\wp(\mathbb{N}) \setminus \wp(\mathbb{N}^+)$ $\quad$ $\{n \in \mathbb{N} : -n \in \mathbb{N}\}$ $\quad$ $\{-n : n \in \mathbb{N}\}$

was ist das für ein zeichen????

Hier hilft es sicher sehr, wenn man die Mengenschreibweise (Kapitel 15) verstanden hat. Dann ist es nämlich eigentlich ganz leicht.

⋆255

Jeweils zwei der unten aufgeführten Mengen sind gleich. Finden Sie die entsprechenden Paare.

[38,43]	$A = [38,43) \cup \{38,40,43\}$	$B = [38,40) \cup (38,40]$	[38,40]
{40}	$C = [40,40] \setminus (40,43]$	$D = [40,43] \setminus \{40\}$	(40,43]
[38,40]	$E = [38,43] \setminus (40,43]$	$F = [38,43] \cap (40,43]$	[38,40]
[38,43]	$G = [38,40] \cup [40,43]$	$H = \{38,40\}$	38,40
{40}	$I = [38,40] \cap [40,43]$	$J = [38,40] \setminus (38,40)$	38,40

⋆256

Jeweils zwei der unten aufgeführten Mengen sind gleich. Finden Sie die entsprechenden Paare.

[38,40]	$A = [38,40) \cup (38,40]$	$B = [40,40] \setminus (40,43]$	40
(38,44)	$C = [38,43) \cup \{n \in \mathbb{N} : 38 < n < 44\}$	$D = \{x \in \mathbb{R} : 40 < x \leq 43\}$	(40,43]
[38,40]	$E = [38,43] \setminus (40,43]$	$F = [38,43] \cap (40,43]$	(40,43]
[38,43]	$G = [38,40] \cup [40,43]$	$H = \{x \in [38,40] : x/2 \in \mathbb{N}\}$	38,40
40	$I = [38,40] \cap [40,43]$	$J = [38,40] \setminus (38,40)$	38.40

⋆257

Jeweils zwei der unten aufgeführten Mengen sind gleich. Finden Sie die entsprechenden Paare.

{0-21}
{0-21}
{43}

$A = \mathbb{Z} \cap [0, 22)$ $\quad$ $B = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 42\}$

$C = \{n \in \mathbb{N} : 2n \leq 42\}$ $\quad$ $D = \{|X| : X \in \wp(B)\}$

$E = \{43\}$ $\quad$ $F = \{m \in D : m + 1 \in D\}$

$G = D \setminus B$ $\quad$ $H = \{z \in \mathbb{Z} : |z| \in B\}$

$I = \{z \in \mathbb{Z} : |z| < 43\}$ $\quad$ $J = \mathbb{N} \cap [-42, 44)$

Mehrere Aufgaben, die Aufgabe 151 ähneln, in denen nun aber auch Intervalle vorkommen.

⋆258

Sei $A = [0, 9] \cap \mathbb{N}$. Wie viele Elemente hat $\wp(\wp(A))$?

Solche Aufgaben kennen Sie schon aus dem 16. Kapitel. Hier kommen nun noch Intervalle mit ins Spiel.

2**1024

259

Welchen Wert hat die Variable `s` nach Ausführung des folgenden Codes?

```
def foo ():
    k = 0
    while True:
        yield k
        k += 1

c, s = 0, 0
for i in foo():
    s = (s + i) % 3
    c += 1
    if c > 33333333334:
        break
```

Diese Aufgabe hat große Ähnlichkeit mit Aufgabe 44. Der Unterschied ist nur, dass das hier mithilfe von Generatoren formuliert wird.

260

Wenn man in den Kasten unten `True` einsetzt, wird `foo` eine Generator-Funktion, die die Menge $A = \{\, p \in \mathbb{Q} : 0 < p < 1 \,\}$ rekursiv aufzählt. Was muss man in den Kasten einsetzen, damit in dieser Aufzählung jedes Element aus A nur einmal vorkommt?

```
from fractions import Fraction
from math import *                          # <-- Das ist ein Hinweis...
```

```
def foo ():
    i = 3
    while True:
        for m in range(1, ceil(i / 2)):
            n = i - m
            if [          ] :
                yield Fraction(m, n)
        i += 1
```

Setzen Sie zunächst mal `True` in den Kasten ein und lassen Sie sich ein paar Werte von `foo` ausgeben. Sie werden sehen, dass z.B. Zahlen wie 1/2 und 2/3 recht früh mehrfach vorkommen. Auf Seite 216[204] im Buch wird eine Methode gezeigt, wie man sowas verhindern kann, aber einen Hinweis auf die Lösung, die hier gesucht wird, finden Sie eher in Aufgabe 358[339] im Buch.

261

Die folgende Generator-Funktion soll alle Primzahlen rekursiv aufzählen, wenn man sie als `foo()` aufruft. Was muss im Kasten stehen, damit das funktioniert? (Sie dürfen *keine* Funktionen verwenden, die man erst importieren müsste.)

```
from math import sqrt

def foo (n = False):
    k = 2
    while not n or k <= n:
        X = True
        for p in foo(sqrt(k)):
            if [          ] :
                X = False
                break
        if X:
            yield k
        k += 1
```

Eine ähnliche Fragestellung wie in der Aufgabe davor und eigentlich sogar leichter. Man muss sich nur daran erinnern, wie die ersten „naiven“ Primzahltests im achten Kapitel aussahen.

262

Welche Menge wird von der folgenden Generator-Funktion rekursiv aufgezählt? Geben Sie die Antwort in beschreibender Mengenschreibweise (und nicht in Worten) an.

```
def foo ():
```

{e E N : e mod 2 != 0}

```
    i = 1
    while True:
        yield i
        i += 2
```

263

Welche Menge wird von der folgenden Generator-Funktion rekursiv aufgezählt? Geben Sie die Antwort in beschreibender Mengenschreibweise (und nicht in Worten) an.

```
def foo ():
    i = 2
    while True:
        yield i
        i *= 3
```

{e E N : 2*3**e}

264

Welche Menge wird von der folgenden Generator-Funktion rekursiv aufgezählt? Geben Sie die Antwort in beschreibender Mengenschreibweise (und nicht in Worten) an.

```
def foo ():
    i = 2
    while True:
        yield i
        i *= 4
```

{e E N : 2*4**e}

265

Welche Menge wird von der folgenden Generator-Funktion rekursiv aufgezählt? Geben Sie die Antwort in beschreibender Mengenschreibweise (und nicht in Worten) an.

```
from math import gcd
from fractions import Fraction

def foo ():
    i = 1
    while True:
        for k in range(i, 2*i):
            if gcd(k, i) == 1:
                yield Fraction(k, i)
        i += 1
```

x:x E Q

266

Welche Menge wird von der folgenden Generator-Funktion rekursiv aufgezählt? Geben Sie die Antwort in beschreibender Mengenschreibweise (und nicht in Worten) an.

```
def foo ():
    f, k = 1, 1
```

```
    while True:
        yield f
        f *= k
        k += 1
```

{ e E N : e! }

Diese Aufgaben sind alle sehr ähnlich und bestehen aus zwei einfachen Teilen: Zuerst lässt man sich von dem jeweiligen Generator ein paar Werte ausgeben und erkennt daran hoffentlich ein Muster. Dann beschreibt man dieses Muster so, wie man es in Kapitel 15 gelernt hat.
Bei keiner dieser Aufgaben gibt es *die* richtige Antwort, weil es unendlich viele Möglichkeiten gibt, das Ergebnis zu formulieren. Es gibt allerdings auch unendlich viele Möglichkeiten, eine falsche Menge zu beschreiben oder gar völligen Unsinn aufzuschreiben – siehe z.B. Seite 162[156] im Buch.
Wenn Sie beispielsweise erkannt haben, dass alle geraden natürlichen Zahlen ausgegeben werden, so könnte Ihre Antwort $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$ sein oder auch $\{n \in \mathbb{N} : 2 \mid n\}$. Allerdings wäre $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$ *keine* akzeptable Antwort, weil dabei nicht die beschreibende Mengenschreibweise verwendet wird.

$\boxed{267}$

Die folgende Generator-Funktion zählt bei jedem Aufruf eine andere Menge von natürlichen Zahlen auf. Welches ist die kleinste positive natürliche Zahl, die garantiert nie aufgezählt wird?

```
from random import randrange

def foo ():
    i = 0
    while True:
        i += 1
        yield randrange(1,i+3)**i
```

schreitt 1 1*1 2*1 3*1
schritt 2 1*2 2* 2 3*2 4*2

die 5 fehlt

1- 4
1-5
1-6

$\boxed{268}$

Die folgende Generator-Funktion zählt bei jedem Aufruf eine andere Menge von natürlichen Zahlen auf. Welches sind die drei kleinsten natürlichen Zahlen, die garantiert nie aufgezählt werden?

```
from sympy import prime
from random import randrange

def foo ():
    i = 0
    while True:
        i += 1
        p = 1
        for k in range(i):
            p *= prime(randrange(1,i+2))
        yield p
```

0,2,4

Da hier der Zufall eine Rolle spielt, können Sie sich nicht darauf verlassen, dass Sie die Antwort dadurch sehen, dass Sie den jeweiligen Generator einfach mehrfach laufen lassen. Sie müssen die Funktionen schon *verstehen* und sich dann fragen: Ist es möglich, dass 0 ausgegeben wird? Ist es möglich, dass 1 ausgegeben wird? Und so weiter…
Die Funktion `randrange` kennen Sie aus dem neunten Kapitel.

269

Was würde hier herauskommen, wenn in der zweiten Zeile nicht vier, sondern zweihundert Einsen stünden?

```
def foo ():
    for i in range(1,1111): # 200 Einsen!
        while i%10==0:
            i //= 10
        if i==1:
            yield 42
len([k for k in foo()])
```

Das ist wieder so eine Aufgabe, bei der man das Programm nicht einfach laufen lassen kann, weil es zu lange dauern würde. Man muss also wohl ein bisschen rumprobieren und nachdenken…

⋆270

Wo befindet sich die Zahl 6/17 im Calkin-Wilf-Baum? (Die Antwort sollte so etwas wie „n-te Position von links in der m-ten Zeile“ sind.)

Wie könnte man an diese Frage herangehen? Man könnte eines der Programme aus dem 18. Kapitel verwenden. Aber nach meiner Meinung ist es sogar einfacher, wenn man ohne Computer die in dem Kapitel beschriebene „Rekonstruktion“ des Weges durchrechnet.

19. Funktionen

⋆271

Welche der folgenden Mengen von Paaren sind rechtseindeutig?

- [ ] $\{(1,2),(2,2),(3,2),(4,2)\}$
- [ ] $\{(5,6),(6,7),(7,8),(8,9)\}$
- [ ] $\{(2,1),(2,2),(8,7),(9,8)\}$
- [ ] $\{(z^2,z) : z \in \mathbb{Z}\}$
- [ ] $\{(z^3,z) : z \in \mathbb{Z}\}$

Zum Aufwärmen eine Aufgabe, in der der Begriff der Rechtseindeutigkeit wiederholt wird.

272

f, g und h seien Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die durch $f(x) = 5x$, $g(x) = x+3$ sowie $h = f \circ g$ definiert sind. Außerdem schreiben wir h^2 für $h \circ h$, h^3 für $h \circ h^2$, h^4 für $h \circ h^3$ und so weiter. Berechnen Sie den Wert $h^7(42)$.

> Hier geht es um die Komposition von Funktionen. Außerdem wird wie im 17. Kapitel eine Funktion rekursiv definiert.

⋆273

Gegeben seien diese beiden Funktionen:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x + 3 \end{cases}$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Funktionen injektiv sind:

☐ $f + g$ ☐ $f \cdot g$ ☐ $f \circ g$ ☐ $g \circ f$

⋆274

Gegeben seien diese beiden Funktionen:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x - 4 \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -2x - 4 \end{cases}$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Funktionen injektiv sind:

☐ $f + g$ ☐ $f \circ g$ ☐ $f \cdot g$ ☐ $g \circ f$

⋆275

Gegeben seien diese beiden Funktionen:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Funktionen injektiv sind:

☐ $f \cdot g$ ☐ $f + g$ ☐ $g \circ f$ ☐ $f \circ g$

⋆276

Gegeben seien diese beiden Funktionen:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases}$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Funktionen injektiv sind:

☐ $f \cdot g$ ☐ $f \circ g$ ☐ $f \circ f$ ☐ $g \circ g$

Was mit der Addition und der Multiplikation von Funktionen gemeint ist, wurde in Aufgabe 390[369] im Buch erklärt. Bei der Komposition muss natürlich darauf geachtet werden, dass diese nicht kommutativ ist – siehe Aufgabe 389[368] im Buch.
Für Funktionen wie diese hier, die reelle Zahlen auf reelle Zahlen abbilden, ist bei der Frage nach der Injektivität außerdem Aufgabe 384[363] im Buch hilfreich.

⋆277

Seien f und g Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ Wenn f injektiv ist, dann ist $f \circ g$ garantiert auch injektiv.
- ☐ Wenn g injektiv ist, dann ist $f \circ g$ garantiert auch injektiv.
- ☐ Wenn f nicht injektiv ist, dann kann $f \circ g$ unmöglich injektiv sein.
- ☐ Wenn g nicht injektiv ist, dann kann $f \circ g$ unmöglich injektiv sein.

Durch die Aufgaben davor haben Sie ja schon Beispielmaterial für diese Aufgabe gesammelt. Hilfreich ist es auch, die Rollen von f und g an die Funktionen $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto 2^x$ (oder umgekehrt) zu vergeben. Im Endeffekt kann man so eine Aufgabe aber nur durch Nachdenken und Rückgriff auf die Definition lösen.

⋆278

Gegeben seien diese beiden Funktionen:

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ (x, y) \mapsto x \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ x \mapsto (x, x) \end{cases}$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Funktionen injektiv sind:

☐ g ☐ f ☐ $f \circ g$ ☐ $g \circ f$

⋆279

Gegeben seien diese beiden Funktionen:

$$f : \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ (x, y) \mapsto y + 1 \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ x \mapsto (x - 1, x + 1) \end{cases}$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Funktionen injektiv sind:

☐ g ☐ f ☐ $f \circ g$ ☐ $g \circ f$

⋆280

Gegeben seien diese beiden Funktionen:

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ (x, y) \mapsto xy \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ x \mapsto (x, x) \end{cases}$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Funktionen injektiv sind:

☐ g ☐ f ☐ $f \circ g$ ☐ $g \circ f$

⋆281

Gegeben seien diese beiden Funktionen:

$$f : \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ x \mapsto (x, x + 1) \end{cases}$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Funktionen injektiv sind:

☐ g ☐ f ☐ $f \circ g$ ☐ $g \circ f$

⋆282

Gegeben seien diese beiden Funktionen:

$$f : \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ (x, y) \mapsto xy \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ x \mapsto (x, x^2) \end{cases}$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Funktionen injektiv sind:

☐ g ☐ f ☐ $f \circ g$ ☐ $g \circ f$

⋆283

Gegeben seien diese beiden Funktionen:

$$f : \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y) \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ (x, y) \mapsto (y - 1, x + 1) \end{cases}$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Funktionen injektiv sind:

☐ f ☐ g ☐ $f \circ g$ ☐ $g \circ g$

Hier geht es um zweistellige Funktionen und um solche, bei denen die Funktionswerte Paare statt Zahlen sind. Daher muss man sich zunächst klarmachen, wann zwei Paare gleich bzw. verschieden sind. Es ist sicher auch hilfreich, sich noch mal die Aufgaben 395[374] und 396[375] im Buch anzuschauen.
Bei allen Aufgaben sollten Sie zunächst einfach mal testweise ein paar Werte einsetzen; das öffnet Ihnen dann meistens schon die Augen. Setzen Sie in f aus Aufgabe 278 beispielsweise $(42, 0)$ und $(42, 1)$ ein.

⋆284

Gegeben seien diese beiden Funktionen:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases}$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Funktionen $\mathbb{R}$ surjektiv auf $\mathbb{R}$ abbildet:

☐ $f \cdot g$ ☐ $f \circ g$ ☐ $f \circ f$ ☐ $g \circ g$

Da es hier wieder um Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ geht, kann man die Frage am einfachsten dadurch beantworten, dass man die Graphen der jeweiligen Funktionen skizziert (und sich dabei fragt, was Surjektivität in diesem Fall graphisch bedeuten würde).

⋆285

Gegeben sei die Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x \mapsto kx \end{cases}$$

mit $n = 20$ und $k = 6$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- [ ] f ist injektiv.
- [ ] f ist surjektiv.
- [ ] f ist bijektiv.

Durch das Einsetzen von ein paar konkreten Werten wird klar, dass die Aufgabe eigentlich ganz einfach ist. Beachten Sie, dass es um modulare Arithmetik geht.

21. Computeralgebra

286

Welchen Wert muss $n > 0$ haben, damit $\sum_{k=1}^{n} \frac{nk}{n+1} = 21n$ gilt?

SymPy kann Ihnen den Wert auf der linken Seite der Gleichung ausrechnen. Wenn Sie den noch ein bisschen vereinfachen, bleibt eine Gleichung für n übrig, die man mit dem Wissen der Sekundarstufe 1 lösen kann.

287

Geben Sie die dreißigste Nachkommastelle von $\sqrt{5}$ an.

288

Geben Sie die sechste Nachkommastelle von $e^{\pi\sqrt{67}}$ an.

289

Geben Sie die sechzehnte Nachkommastelle von $\sqrt{3/5}$ an.

290

Geben Sie die sechste Nachkommastelle von $e^{\pi\sqrt{163}}$ an.

291

Geben Sie die vierzehnte Nachkommastelle von $\sum_{k=30}^{10\,000} \frac{1}{k}$ an.

Bei diesen Aufgaben geht es darum, dass Ihnen ein Computeralgebrasystem theoretisch beliebig viele Nachkommastellen einer Zahl angeben kann. In SymPy wird das mit den ab Seite 257[243] im Buch beschriebenen Funktionen gemacht. Dabei gibt es aber diverse Fallstricke zu beachten, die in diesem Notebook beschrieben werden. Weitere Informationen zu Themen wie Nachkommastellen und Runden finden Sie auch in diesem Video.

⋆292

Geben Sie die dritte Nachkommastelle von $10^{100}/7$ an.

⋆293

Geben Sie die dritte Nachkommastelle von $10^{1\,000\,000}/7$ an.

Eine Zahl wie $10^{1\,000\,000}$ ist natürlich zu groß für Python, aber man kann die Aufgabe sogar mit einem simplen Taschenrechner lösen. Können Sie die dritte Nachkommastelle von $1/7$ angeben? Was ändert sich, wenn stattdessen nach der dritten Nachkommastelle von $10/7$ oder $100/7$ gefragt wird? Falls Ihnen die Antwort jetzt noch nicht klar ist, lesen Sie sich noch mal das elfte Kapitel durch.
(Übrigens kann einem hier auch SymPy helfen, aber das sollten Sie dann selbst herausfinden.)

294

Geben Sie den folgenden Ausdruck in möglichst einfacher Form an:

$$(n^2+2)^2 - \sum_{k=1}^{n} 4k^3$$

Den Minuenden sollten Sie mithilfe der binomischen Formel selbst vereinfachen können und den Subtrahenden kann SymPy für Sie ausrechnen. Wenn beide dann vor Ihnen stehen, werden Sie sehen, wie man das noch weiter vereinfachen kann.

295

Kreuzen Sie die kleinste der folgenden vier Zahlen an.

- ◯ $-1+10^{-18}$
- ◯ $-1+10^{-17}$
- ◯ $\cos(\pi\cdot\cos(\ln(\pi+20)))$
- ◯ $\cos(\ln(\pi+20))$

296

Kreuzen Sie die kleinste der folgenden vier Zahlen an.

- ◯ $\cos(\ln(\pi+20))$
- ◯ $\cos(\pi\cdot\cos(\ln(\pi+20)))$
- ◯ $\sin(2017\cdot\sqrt[5]{2})$
- ◯ $-9\cdot 2\,071\,723\cdot 5\,363\,222\,357\cdot 10^{-17}$

Wenn man diese Zahlen einfach so in Python eingibt, kann man teilweise gar keinen Unterschied erkennen. (Den Grund dafür haben Sie im 13. Kapitel gelernt.) Mithilfe von SymPy sieht man jedoch, dass es sich tatsächlich um lauter verschiedene Zahlen handelt.

37. Folgen und Grenzwerte

⋆297

Welche der folgenden Aussagen über die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind wahr?

- [ ] Die Folge ist eine Funktion.
- [ ] Die Folge ist eine injektive Funktion.
- [ ] Die Folge konvergiert gegen 1 und −1.
- [ ] Die Folge ist bestimmt divergent.

⋆298

Sei $a_n = (-2)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- [ ] Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Funktion.
- [ ] Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine injektive Funktion.
- [ ] Die Folge $(1/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
- [ ] Die Folge $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent.

Hier geht es anhand von zwei einfachen Folgen zunächst mal um die ganz grundlegenden Begriffe. Wenn Sie das 37. Kapitel gelesen haben, sollten diese Aufgaben kein Problem für Sie sein.

⋆299

Geben Sie den Grenzwert dieser Folge an:

$$\left(\frac{2n^2 + 2n^4 + 2n + 4n^4 - \pi}{2017 - n^3 - \frac{1}{7}n^4 + 4n}\right)$$

Man könnte SymPy befragen. Aber wenn Sie die im Buch ab Seite 464[446] beschriebene Methode verstanden haben, dann haben Sie die Frage schon beantwortet, bevor Sie die Folge überhaupt eingetippt haben.

⋆300

Welchen Wert muss a haben, damit der Grenzwert dieser Folge 42 ist?

$$\left(\frac{(4n + a) \cdot (an + 4)}{2n^2 + 18}\right)$$

⋆301

Welcher Wert ist ausschlaggebend für den Grenzwert dieser Folge?

$$\left(\frac{(b + an^2)(b - an^2)}{42n^2(n^2 + n + 1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

○ a

- ◯ b
- ◯ $a+b$
- ◯ $a-b$
- ◯ ab
- ◯ Der Grenzwert ist unabhängig von a und b immer gleich.

Berechnen Sie zunächst jeweils den Grenzwert. Das geht wie in Aufgabe 299. Der Rest sollte hoffentlich klar sein.

⋆302

Geben Sie die kleinste natürliche Zahl k an, die dafür sorgt, dass diese Folge eine Nullfolge ist:

$$\left(\frac{(4n^3+3)\cdot(3n^4+4)}{12n^{2k}+7}\right)$$

Auch bei dieser Aufgabe ist es von Vorteil, wenn Sie die im Buch ab Seite 446[464] beschriebene Methode verstanden haben.

303

Was muss man für a einsetzen, damit der Grenzwert dieser Folge $1/\mathrm{e}$ ist?

$$\left(\left(1+\frac{3a}{n}\right)^{2n}\right)$$

304

Welche positive reelle Zahl muss man für a einsetzen, damit die Folge

$$\left(\frac{(1+a/n)^{an}}{\mathrm{e}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

gegen e^{35} konvergiert?

305

Welche Zahl muss man für a einsetzen, damit die Folge

$$\left(\sqrt{\left(\frac{n}{n-a}\right)^{-n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

gegen e^{12} konvergiert?

Im Prinzip können Sie hier wie bei Aufgabe 300 vorgehen. Beim Berechnen der Grenzwerte kann Ihnen SymPy helfen.

⋆306

Genau eine der vier Folgen unten konvergiert gegen e. Kreuzen Sie diese an.

○ $\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right)$ ○ $\left(\left(\frac{2+2n}{2n}\right)^n\right)$ ○ $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ ○ $\left(\left(\frac{n+2}{n}\right)^n\right)$

⋆307

Genau eine der vier Folgen unten konvergiert gegen e. Kreuzen Sie diese an.

○ $\left(\left(\frac{3n}{3n+3}\right)^n\right)$ ○ $\left(\left(\frac{3n}{3+3n}\right)^{-n}\right)$ ○ $\left(\frac{3n+3}{3n}\right)$ ○ $\left(\left(\frac{n+3}{n}\right)^n\right)$

⋆308

Geben Sie den Grenzwert der Folge $\left(\left(\frac{n^2}{n^2+2n+1}\right)^n\right)$ an.

⋆309

Geben Sie den Grenzwert der Folge $\left(\left(\frac{n^2+3n}{n^2+6n+9}\right)^{n+42}\right)$ an.

Theoretisch könnte man diese Aufgaben mithilfe der Informationen aus dem 37. Kapitel alle mit Zettel und Stift lösen. Sie werden aber wahrscheinlich SymPy einsetzen und das ist eigentlich viel zu einfach. Erfahrungsgemäß scheitern aber viele am korrekten Eintippen der Folgen, weil ihnen Regeln wie „Punktrechnung vor Strichrechnung" und die entsprechende Operatorrangfolge in Programmiersprachen nicht geläufig sind. (Siehe dazu auch die Aufgaben 1 und 2 im Buch.)

⋆310

Geben Sie die Menge der möglichen Wert für a an, für die der Grenzwert dieser Folge kleiner als 1 ist. (Hinweis: Es handelt sich um ein Intervall.)

$$\left(\frac{(an^2+2)\cdot(an^2-2)}{n+2n^2+3n^3+4n^4}\right)$$

Siehe Aufgabe 300. Der Unterschied ist nur, dass Sie sich hier überlegen müssen, wie groß bzw. wie klein a maximal sein darf.

⋆311

Sei (a_n) eine Folge, deren Folgenglieder alle von null verschieden sind. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

☐ Wenn (a_n) bestimmt divergiert, dann ist $(1/a_n)$ eine Nullfolge.

☐ Wenn (a_n) eine Nullfolge ist, dann divergiert $(1/a_n)$ bestimmt.

☐ Wenn (a_n) eine Nullfolge ist, dann ist $(42a_n)$ auch eine Nullfolge.

☐ Wenn $(42a_n)$ eine Nullfolge ist, dann ist (a_n) auch eine Nullfolge.

Diese Aufgabe lässt sich mithilfe der Rechenregeln beantworten, die im Buch ab Seite 462[444] besprochen werden. Siehe auch Aufgabe 701[671] im Buch.

39. Die Landau-Symbole

★312

Kreuzen Sie von den folgenden Mengen die an, die beschränkt sind:

- [ ] $\{\, \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}$ und $n \neq 0$ und $m + n \leq 1\,000\,000 \,\}$
- [ ] $[-4, \infty) \cap (-\infty, 4]$
- [ ] $\mathbb{N} \setminus \mathbb{P}$
- [ ] $\{\, \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}^+$ und $m + n \leq 1\,000\,000 \,\}$
- [ ] $\{\, a \bmod b : a, b \in \mathbb{N}^+$ und $b \leq 42 \,\}$

★313

Kreuzen Sie von den folgenden Mengen die an, die beschränkt sind:

- [ ] $\{x \in [0, \infty) : x^2 \leq x\}$
- [ ] $\{x \in [0, \infty) : \sqrt{x} < x\}$
- [ ] $[0, 42] \setminus \mathbb{N}$
- [ ] $\mathbb{N} \setminus [0, 42]$
- [ ] $\mathbb{N} \cap [0, 42]$
- [ ] $\{a^{p-1} \bmod p : a \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{P}\}$

★314

Kreuzen Sie von den folgenden Mengen die an, die beschränkt sind:

- [ ] $\{x \in [0, \infty) : x^3 \leq x\}$
- [ ] $\{x \in \mathbb{R} : x^3 \leq x\}$
- [ ] $[0, 42] \setminus \mathbb{N}$
- [ ] $\mathbb{N} \cup [0, 42]$
- [ ] $\mathbb{N} \cap [0, 42]$

★315

Kreuzen Sie von den folgenden Mengen die an, die beschränkt sind:

- [ ] $\{\, m/n : m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $m \leq n \,\}$
- [ ] $\{\, m/n : m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $n \leq m \,\}$
- [ ] $[-4, \infty) \setminus [4, \infty)$
- [ ] $\{\, \lfloor a/42 \rfloor : a \in \mathbb{N} \,\}$

☐ $\{\, a \bmod 42 : a \in \mathbb{N} \,\}$

Um diese Aufgaben lösen zu können, muss man natürlich verstanden haben, wann man eine Menge als *beschränkt* bezeichnet. Noch wichtiger ist aber, dass man die entsprechenden Mengenbeschreibungen überhaupt lesen kann – siehe Kapitel 15. Wenn Ihnen klar ist, aus welchen Elementen eine Menge besteht, ist die Frage, ob sie beschränkt ist, im Allgemeinen ganz einfach zu beantworten.

⋆316

Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die wahr sind:

☐ $3^n \in \mathcal{O}(2^{n+42})$

☐ $n^2 2^n \in \mathcal{O}(2^n)$

☐ $n^2 2^n \in \mathcal{O}(3^n)$

☐ $2^{n+42} \in \mathcal{O}(3^n)$

☐ $n \log n \in \mathcal{O}(n^2)$

⋆317

Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die wahr sind:

☐ $n^2 2^n \in \mathcal{O}(2^n)$

☐ $n^2 2^n \in \mathcal{O}(3^n)$

☐ $2^{n+42} \in \mathcal{O}(3^n)$

☐ $\displaystyle\prod_{k=0}^{3} (n+k) \in \mathcal{O}(n^3)$

☐ $(\log n)^2 \in \mathcal{O}(n^2)$

⋆318

Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die wahr sind:

☐ $(n^4 + n^3 + n^2 + n)^4 \in \mathcal{O}(n^{10})$

☐ $2^{2n} \in \mathcal{O}(3^n)$

☐ $2^{3n} \in \mathcal{O}(9^n)$

☐ $\displaystyle\prod_{k=1}^{3} (n^k + k) \in \mathcal{O}(n^3)$

☐ $(2^n)^2 \in \mathcal{O}(2^n)$

Alle Aufgaben lassen sich bereits mithilfe der Zusammenfassung auf Seite 490[472] des Buches lösen, wenn man ein paar simple Umformungen aus der Schule beherrscht. Eine Alternative, die nicht immer, aber häufig klappt: Bilden Sie den Quotienten aus der Definition der $\mathcal{O}$-Notation und lassen Sie SymPy ermitteln, ob dieser konvergiert, wenn n gegen unendlich geht. (Siehe Seite 487[469] im Buch.)

⋆319

Geben Sie eine natürliche Zahl a an, für die die folgenden drei Aussagen *alle* wahr sind.

- $2^{2n+42} \in \mathcal{O}(a^n)$
- $2^{3n} \in \mathcal{O}(a^n)$
- $3^{2n} \notin \mathcal{O}(a^n)$

Es gibt in diesem Fall nur eine mögliche Antwort. Und auf die kommt man ganz leicht, wenn man in der Lage ist, die Potenzen, die in der Aufgabenstellung vorkommen, zu vereinfachen.

22. Elementargeometrie

⋆320

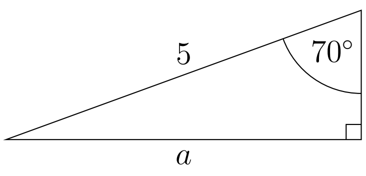
Der Punkt P hat die Koordinaten $(12, 0)$. Der Abstand vom Ursprung zum Punkt Q ist 13. Geben Sie die Koordinaten von Q an.

Bei fast allen geometrischen Fragen lohnt es sich immer, zuerst nach rechtwinkligen Dreiecken zu suchen. Hier würde sich z.B. der Satz des Pythagoras anbieten – siehe Seite 267[251] im Buch.

⋆321

Von dem rechtwinkligen Dreieck unten kennen Sie die Länge der Hypotenuse und den Winkel oben rechts. Wie berechnet man die Länge der Kathete a?

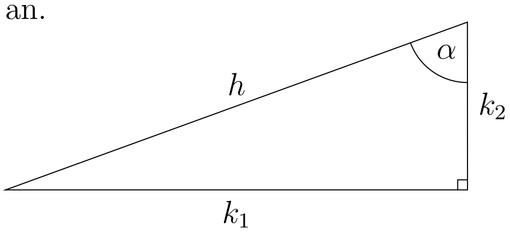
- ◯ $a = \dfrac{5}{\cos 20°}$
- ◯ $a = \dfrac{5}{\sin 70°}$
- ◯ $a = 5 \cdot \sin 20°$
- ◯ $a = 5 \cdot \cos 70°$
- ◯ $a = 5 \cdot \cos 20°$



Bei dieser Aufgabe geht es lediglich darum, ob man die Definition von Sinus und Kosinus verstanden hat. Siehe Seite 268[252] im Buch.

322

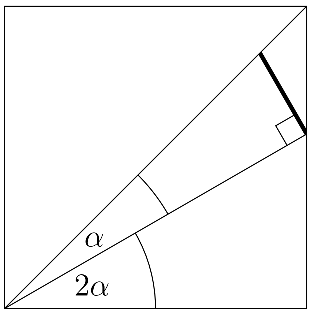
Unten sehen Sie eine Skizze eines rechtwinkligen Dreieckes. Die Kathete k_1 hat die Länge 8 und der Winkel α beträgt 70°. Geben Sie die Länge der Hypotenuse h auf zwei Stellen nach dem Komma an.



Auch hier wird eine trigonometrische Funktion benötigt.

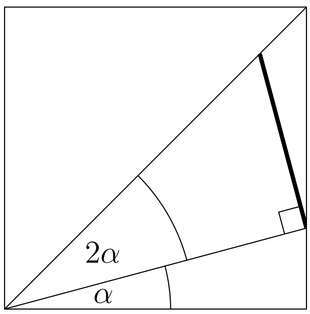
323

Die Länge der Diagonale in dem Quadrat unten ist 35. Geben Sie die Länge der fett eingezeichneten Strecke auf zwei Stellen nach dem Komma genau an.



324

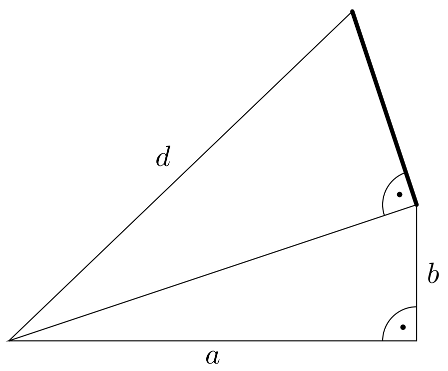
Die Länge der Diagonale in dem Quadrat unten ist 35. Geben Sie die Länge der fett eingezeichneten Strecke auf zwei Stellen nach dem Komma genau an.



Überlegen Sie sich jeweils zuerst, wie groß der Winkel α ist. Dann kommen Sie in zwei Schritten zur Lösung.

325

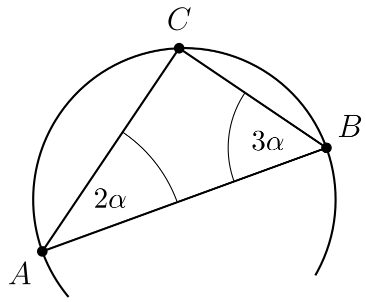
In der folgenden Skizze haben a, b und d die Längen 6, 2 und 7. Die rechten Winkel sind markiert. Geben Sie die Länge der fett eingezeichneten Strecke auf zwei Stellen nach dem Komma an.



Auch hier kommt man mit dem bekanntesten aller mathematischen Sätze weiter.

326

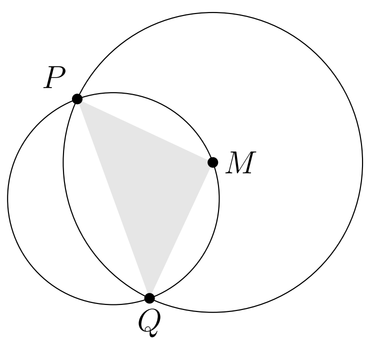
Der Radius des Kreises ist 50. Die Strecke von A nach B geht durch den Mittelpunkt. Geben Sie die Länge der Strecke von B nach C auf zwei Stellen nach dem Komma genau an.



Falls Sie keine Idee haben, wie man das lösen könnte, dann lesen Sie sich die Lösung von Aufgabe 522[494] im Buch durch.

⋆327

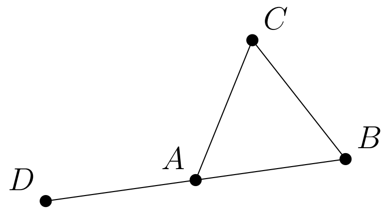
Die Punkte P und Q haben den Abstand 2 voneinander und liegen jeweils auf beiden Kreisen. M liegt auf dem kleinen Kreis und ist gleichzeitig der Mittelpunkt des großen Kreises. Der kleine Kreis hat den Durchmesser 2. Geben Sie die Fläche des grauen Dreiecks an.



Auch hier kann man den Hinweis zu Aufgabe 326 oben verwenden.

328

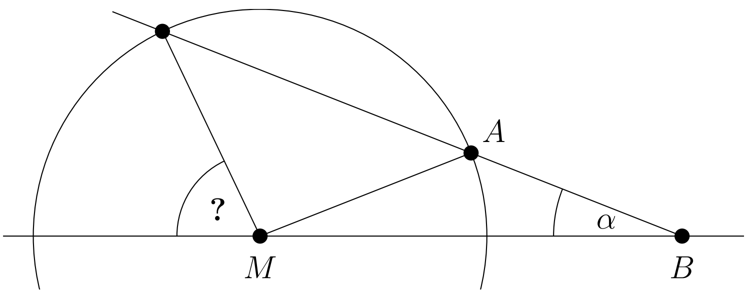
In der folgenden Skizze bilden A, B und C die Ecken eines gleichseitigen Dreieckes mit der Seitenlänge 5. A ist außerdem der Mittelpunkt der Strecke von B nach D. Geben Sie den Abstand der Punkte C und D auf zwei Stellen nach dem Komma an.



Tipp: Fällen Sie das Lot von C auf die Gerade durch A und B. Das liefert Ihnen ein rechtwinkliges Dreieck.

⋆329

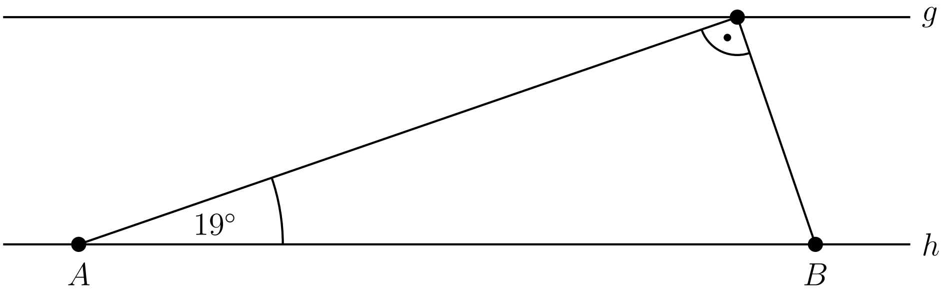
M ist der Mittelpunkt des Kreises. Die Strecken AM und AB sind gleich lang. Geben Sie den durch ein Fragezeichen markierten Winkel in Abhängigkeit von α an.



In einem gleichschenkligen Dreieck sind bekanntlich immer zwei Winkel gleich groß. Alles, was Sie sonst noch wissen müssen, finden Sie auf den ersten paar Seiten des 22. Kapitels.

330

Die Geraden g und h sind parallel und haben den Abstand 5. Geben Sie den Abstand der Punkte A und B auf zwei Stellen nach dem Komma an.



In der Skizze sind noch ein paar rechtwinklige Dreiecke „versteckt“, mit deren Hilfe man die Aufgabe leicht lösen kann.

$\star$331

Ein gleichschenkliges Dreieck hat die Seitenlängen 10, 13 und 13. Geben Sie seine Fläche an.

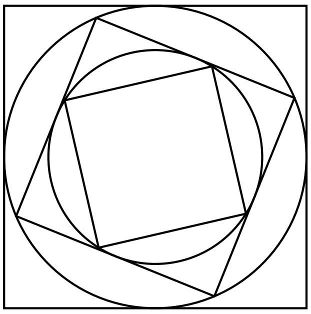
$\star$332

Eine Seite eines Rechtecks hat die Länge 9 und eine Diagonale die Länge 41. Geben Sie die Fläche des Rechtecks an.

Machen Sie sich in beiden Fällen zunächst eine Skizze. Falls Sie vergessen haben, wie man Flächen von Rechtecken und rechtwinkligen Dreiecken berechnet, schlagen Sie Seite 267[251] im Buch auf.

$\star$333

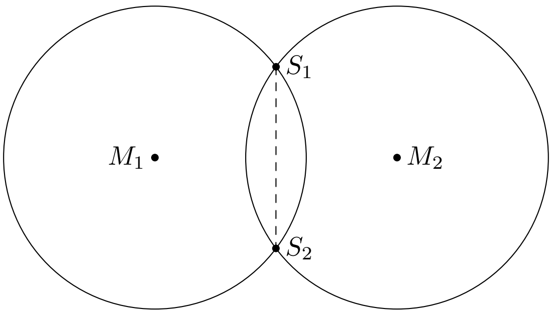
In der folgenden Skizze sind drei Quadrate und zwei Kreise dargestellt. Figuren, die sich berühren, berühren sich immer in exakt vier Punkten. Das kleinste Quadrat hat die Seitenlänge 2. Geben Sie die Fläche des größten Quadrates an.



Man kann anhand der Seitenlänge eines Quadrates die Länge der Diagonale ermitteln und umgekehrt.

334

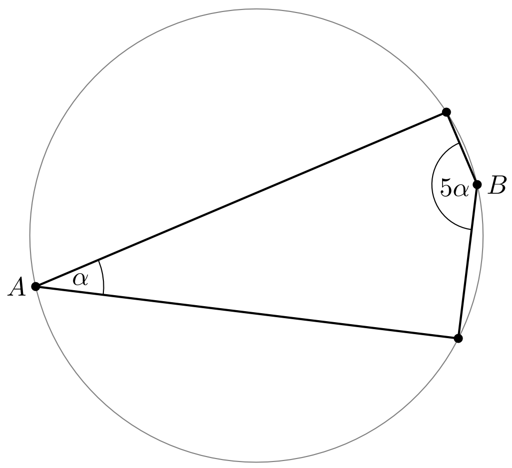
Die beiden Kreise haben beide den Radius 10. Der Abstand ihrer Mittelpunkte M_1 und M_2 ist 16. Geben Sie den Abstand der Schnittpunkt S_1 und S_2 auf zwei Stellen nach dem Komma an.



Wenn man die „richtigen“ rechtwinkligen Dreiecke erkennt, braucht man im Prinzip nur den Satz des Pythagoras.

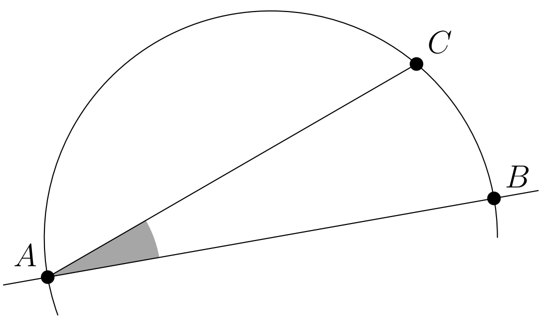
$\star$335

Die Strecke von A nach B ist ein Durchmesser des Kreises. Geben Sie den Winkel α in Grad an.



336

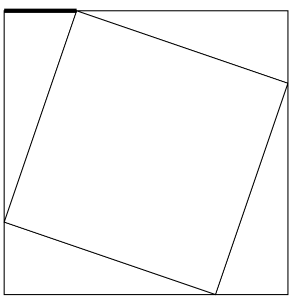
Die Strecke AB ist der Durchmesser des Kreises, die Strecke AC hat die Länge 7 und der eingezeichnete Winkel beträgt 40°. Geben Sie den Radius des Kreises auf zwei Stellen nach dem Komma an.



Hier hilft in beiden Fällen ebenfalls der Hinweis zu Aufgabe 326 oben.

⋆337

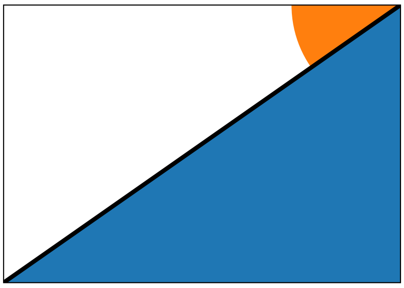
Das innere Quadrat hat die Fläche 1369. Das fett hervorgehobene Streckenstück hat die Länge 12. Geben Sie die Fläche des äußeren Quadrats an.



Man sollte wissen, wie man die Fläche eines Quadrates berechnet. Der Rest ist – wie so oft – Pythagoras.

338

Die fett eingezeichnete Diagonale des Rechtecks hat die Länge 4. Der orange Winkel beträgt 35 Grad. Geben Sie die Fläche des blauen Dreiecks gerundet auf zwei Stellen nach dem Komma an.



Ein deutlich erkennbares rechtwinkliges Dreieck, von dem einer der anderen beiden Winkel sowie eine Seitenlänge bekannt sind. Das sollte eigentlich kein Problem sein.

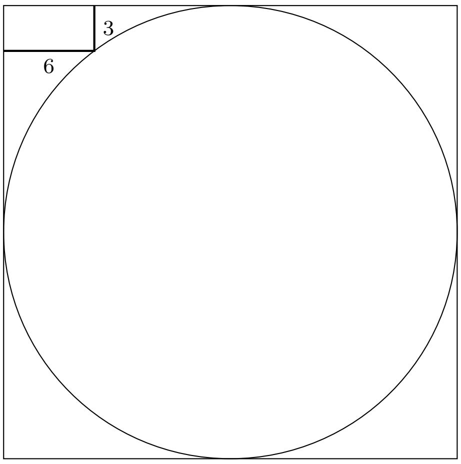
⋆339

Ein regelmäßiges Sechseck hat die Seitenlänge 3. Geben Sie seinen Flächeninhalt an.

Unterteilen Sie das Sechseck in gleichseitige Dreiecke und wenden Sie dann den Satz des Pythagoras an.

⋆340

Welchen Radius hat der Kreis?



Man muss ein bisschen nachdenken, aber man braucht nur den Satz des Pythagoras.

23. Die trigonometrischen Funktionen

⋆341

Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die wahr sind:

☐ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

☐ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin 2x = \sin x \cos x$.

☐ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin 2x = 2 \sin^2 x$.

☐ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin 2x = 2 \cos^2 x$.

Hier geht es um die Additionstheoreme.

$\star$342

Welche von den folgenden Aussagen gelten für *alle* $x \in \mathbb{R}$?

☐ $\sin(x + 42\pi) = \sin x$

☐ $\cos(x + 43\pi) = \cos x$

☐ $\sin(x + 5\pi/2) = \cos x$

☐ $\cos(x + 3\pi/2) = \sin x$

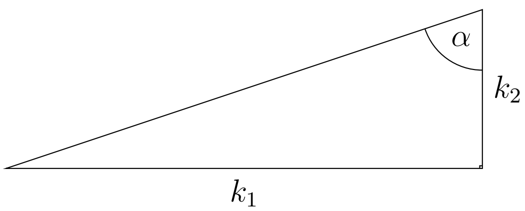
☐ $\cos(x + 3\pi) = -\cos x$

☐ $\sin(x + 3\pi) = -\sin x$

Die wesentlichen Hinweise zu dieser Aufgabe finden Sie auf Seite 280[264] im Buch.
Hier oder auch bei Aufgabe 341 (in beiden Fällen geht es um Aussagen über *alle* $x \in \mathbb{R}$) ist es übrigens *keine* gute Idee, SymPy zu verwenden. Wenn SymPy bei der Eingabe `x+x==2*x` den Wert `True` zurückgibt, dann können Sie sich *sicher* sein, dass die Gleichung $x + x = 2x$ wirklich für alle x gilt. Wenn Sie für `sin(2*x)==2*sin(x)*cos(x)` aber die Antwort `False` erhalten, dann kann das auch einfach nur bedeuten, dass SymPy eine Umformung „übersehen“ hat oder dass die „Frage“ nicht so verstanden wurde, wie Sie sie gemeint haben. Das Problem haben Sie nicht nur mit SymPy, sondern potentiell mit allen Computeralgebrasystemen.
Ein sicherer Beweis dafür, dass $\sin 2x = 2 \sin^2 x$ beispielsweise nicht stimmen kann, ist hingegen die Angabe eines einzigen Arguments x, für das sich links und rechts unterschiedliche Werte ergeben.

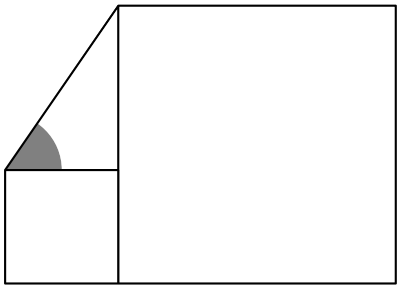
343

In dem rechtwinkligen Dreieck unten sollen nur die Seiten $k_1 = 6$ und $k_2 = 2$ bekannt sein. Geben Sie den Winkel α in Grad auf zwei Stellen nach dem Komma an.



344

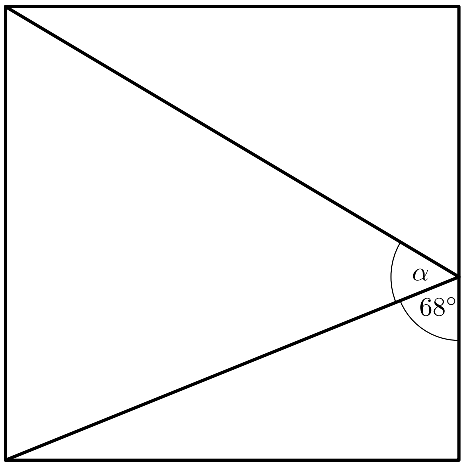
Die Fläche des rechten Quadrats ist genau sechsmal so groß wie die Fläche des linken Quadrats. Geben Sie den grau eingezeichneten Winkel in Grad auf zwei Stellen nach dem Komma an.



Diese Aufgaben sind Beispiele dafür, wie man die ab Seite 284[268] im Buch vorgestellten Arkusfunktionen einsetzt.

345

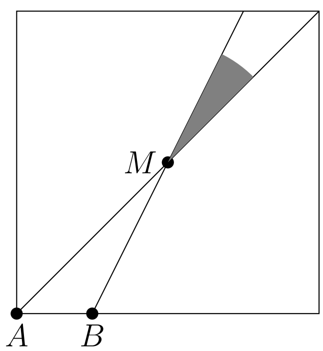
Das äußere Viereck ist ein Quadrat. Geben Sie den Winkel α in Grad auf eine Stelle nach dem Komma an.



Es gibt diverse Möglichkeiten, diese Aufgabe zu lösen. Es empfiehlt sich aber auf jeden Fall, mit dem rechtwinkligen Dreieck unten anzufangen. Da die Lösung offenbar nicht vom Maßstab abhängt, können Sie für das Quadrat eine Seitenlänge wählen, mit der man einfach rechnen kann, z.B. 1.

346

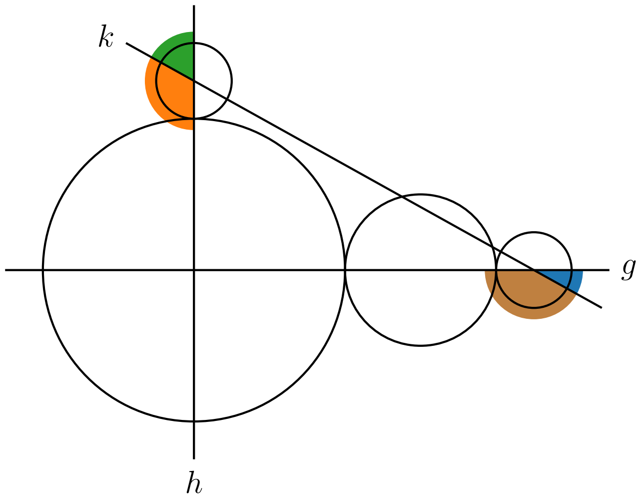
In der folgenden Skizze ist M der Mittelpunkt des Quadrats und die Länge der Strecke von A nach B beträgt ein Viertel der Seitenlänge des Quadrats. Geben Sie den eingezeichneten Winkel in Grad auf eine Stelle nach dem Komma genau an.



Hier kann man beispielsweise mit dem Arkustangens arbeiten. Aber zuerst muss man mal wieder ein rechtwinkliges Dreieck finden, über das man genügend Informationen hat.

347

Die beiden kleinen Kreise haben dieselbe Größe und ihr Radius ist halb so lang wie der des mittelgroßen Kreises. Dessen Radius ist wiederum halb so lang wie der des großen Kreises. Geben Sie alle farblich hervorgehobenen Winkel in Grad auf eine Stelle nach dem Komma an.



Damit es nicht zu Missverständnissen kommt, hier noch ein paar Details, die aber hoffentlich aus der Skizze bereits hervorgehen: Benachbarte Kreise sollen sich jeweils genau in einem Punkt berühren. Die Mittelpunkte der Kreise liegen auf den Geraden g bzw. h, die senkrecht aufeinander stehen. (Der Mittelpunkt des großen Kreises liegt auf beiden Geraden.) Die Gerade k verläuft durch die Mittelpunkte der beiden kleinen Kreise.

Hier gibt es nur ein rechtwinkliges Dreieck zu „entdecken".

24. Analytische Geometrie: Koordinaten

348

Geben Sie die Polarkoordinaten von $(-1, -\sqrt{3})$ an. (Winkel φ in Bogenmaß und $|\varphi| \le \pi$.)

349

Geben Sie die Polarkoordinaten von $(-\sqrt{3}, 1)$ an. (Winkel φ in Grad und $|\varphi| \le 180°$.)

Die Umwandlung von kartesischen in Polarkoordinaten wird im 24. Kapitel beschrieben. Beachten Sie bei diesen Aufgaben, dass die Winkel in einer bestimmten Form angegeben werden sollen und dass in beiden Fällen eine *exakte* Antwort erwartet wird.

350

Der Punkt P hat den Abstand 10 vom Nullpunkt und liegt auf der Geraden $y = -4x$ auf der rechten

Seite der y-Achse. Geben Sie die kartesischen Koordinaten von P auf zwei Stellen nach dem Komma genau an.

351

Der Punkt P liegt auf dem Kreis um den Nullpunkt mit dem Durchmesser 18 und auf der Geraden $y = -5x$ auf der rechten Seite der y-Achse. Geben Sie die kartesischen Koordinaten von P auf zwei Stellen nach dem Komma genau an.

352

Der Punkt $P = (3, y)$ hat den Abstand 6 vom Nullpunkt und liegt oberhalb der x-Achse. Geben Sie die Polarkoordinaten von P an. (Winkel φ in Grad auf zwei Stellen nach dem Komma und mit $|\varphi| \leq 180°$.)

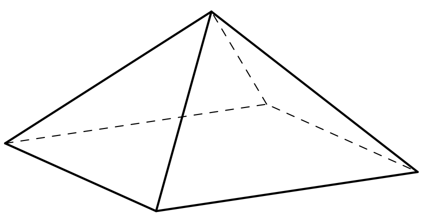
353

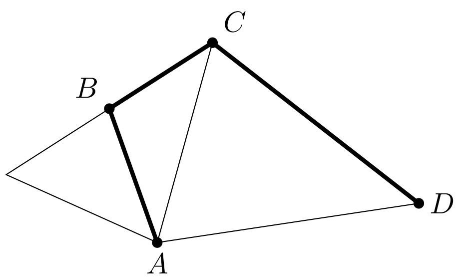
Eine Ameise krabbelt 70 cm geradeaus. Dann dreht sie sich um 10° nach links und krabbelt weitere 20 cm geradeaus. Schließlich dreht sie sich ein zweites Mal um 10° nach links und krabbelt noch einmal 30 cm. Wie weit ist sie jetzt vom Ausgangspunkt entfernt? Antwort bitte in Meter (!) auf zwei Stellen nach dem Komma genau.

Mithilfe einer Skizze und den Erfahrungen aus dem 22. Kapitel sollte sich das jeweils lösen lassen. Vielleicht erinnern Sie sich ja aus der Schule auch noch an Steigungsdreiecke.

⋆354

Die Grundfläche der Pyramide in der Skizze ist ein Quadrat mit dem Flächeninhalt $4h^2$. Die Spitze befindet sich in der Höhe h über dem Mittelpunkt. Ein Tourist legt den rechts eingezeichneten Weg von A nach D über B und C zurück, wobei B genau auf halber Höhe liegt. Wie lang ist der Weg in Abhängigkeit von h?





Entscheidend an einer Aufgabe wie dieser ist, dass man sie lösen kann, indem man sich einfach die Koordinaten der vier Punkte überlegt (nachdem man sich vorher entschieden hat, wo der Ursprung sein soll). Man braucht *keine* Trigonometrie! Man muss allerdings ein bisschen rechnen, es kommen Wurzeln vor und das Ergebnis ist nicht „schön“.

25. Vektoren

355

Geben Sie den folgenden Vektor an:

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \pi \\ \sin \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \frac{3\pi}{2} \\ \sin \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wenn Sie die Addition von Vektoren verstanden haben, sollte das nun wirklich kein Problem sein. Es wird allerdings eine *exakte* Antwort erwartet.

⋆356

Seien $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ zwei verschiedene Punkte in der Ebene, die beide nicht der Nullpunkt sind. Welche der folgenden Punkte liegen auf der Verbindungsgeraden von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$? (Wie üblich werden hier Punkte mit ihren Ortsvektoren identifiziert.)

☐ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ ☐ $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ ☐ $1/3 \cdot (2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ ☐ $1/3 \cdot (\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$ ☐ $1/3 \cdot (4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

⋆357

Seien $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ zwei verschiedene Punkte in der Ebene, die beide nicht der Nullpunkt sind. Welche der folgenden Punkte liegen auf der Verbindungsstrecke zwischen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$? (Wie üblich werden hier Punkte mit ihren Ortsvektoren identifiziert.)

☐ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ ☐ $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ ☐ $1/3 \cdot (2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ ☐ $1/3 \cdot (\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$ ☐ $1/3 \cdot (4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

Hier geht es um Affinkombinationen, siehe Seite 303[287] im Buch. Beachten Sie den subtilen Unterschied zwischen den beiden Aufgaben.

⋆358

Seien $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{v}$ die Vektoren $(4,5,6)^T$ und $(1,-2,3)^T$ und g die Gerade $\boldsymbol{p}+\mathbb{R}\boldsymbol{v}$. Welchen Wert muss a haben, damit der Punkt $(1,a,-3)$ auf g liegt?

Falls Sie nicht wissen, wie das geht, dann lösen Sie zuerst die Aufgaben auf Seite 302[286] im Buch. Das hochgestellte T wird im Kapitel über Matrizen eingeführt. An dieser Stelle geht es einfach darum, Platz zu sparen. Mit $(4,5,6)^T$ ist der Vektor aus $\mathbb{R}^3$ gemeint, dessen drei Komponenten 4, 5 und 6 sind.

⋆359

Sei $f\colon [0,5] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \sqrt{x} - 2$ gegeben. Ferner seien $x_0 = 1$ und $x_1 = 4$. Geben Sie die durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ verlaufende Gerade in der Form $y = mx + c$ an.

⋆360

Sei $f\colon [0,5] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \sqrt{x} - 2$ gegeben. Ferner seien $x_0 = 1$ und $x_1 = 4$. Geben Sie die durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ verlaufende Gerade in Punkt-Richtungs-Form an.

Hier geht es lediglich darum, dass eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt ist. Die Aufgaben sind nur etwas verklausuliert formuliert, damit es nicht zu einfach ist und damit Sie das Lesen der mathematischen Fachsprache üben können.
Ein Ausdruck wie $f\colon [0,5] \to \mathbb{R}$ ist übrigens eine Abkürzung für den Satz: f ist eine Funktion mit Definitionsbereich $[0,5]$ und Zielmenge $\mathbb{R}$. Ich habe leider vergessen, das im Buch zu erwähnen.

26. Matrizen

⋆361

Seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{5\times 3}$. Welche der folgenden Produkte kann man bilden?

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$ $\quad$ $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ $\quad$ $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ $\quad$ $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ $\quad$ $\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}$ $\quad$ $\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$ $\quad$ $\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}$ $\quad$ $\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}$ $\quad$ $\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}$

Das kennen Sie schon, wenn Sie Aufgabe 487[459] aus dem Buch bearbeitet haben.

⋆362

Sei $\boldsymbol{M}$ die folgende Matrix. Geben Sie den ersten Eintrag der ersten Zeile von $\boldsymbol{M}^4$ an.

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 3 \\ \pi & 9 & -42 \end{pmatrix}$$

Mit $\boldsymbol{M}^4$ ist natürlich $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{M}$ gemeint. Bevor Sie das in den Computer eintippen, sollten Sie mal $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{M}$ von Hand ausrechnen. Dann werden Sie sehen, dass die Aufgabe ganz einfach ist und man gar keine elektronischen Hilfsmittel benötigt.

⋆363

Sei n eine positive natürliche Zahl und $\boldsymbol{A}$ die folgende Matrix:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie sieht der erste Eintrag in der zweiten Zeile von $\boldsymbol{A}^n$ aus?

○ $2^{n+1}-2$ ○ $2^{n-1}-2$ ○ $2^{n+1}+2$ ○ $2^{n-1}+2$
○ $2^{n+2}-1$ ○ $2^{n-2}-1$ ○ $2^{n+2}+1$ ○ $2^{n-2}+1$

Probieren Sie es einfach mal mit kleinen Werten für n aus.

⋆364

Ergänzen Sie die folgende Matrix $\boldsymbol{A}$ so, dass $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$ gilt.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 & \boxed{} & -3 \\ -3 & 42 & -3 & 7 \\ 1 & -3 & 2\pi & \boxed{} \\ -3 & \boxed{} & 2 & -\sqrt{8} \end{pmatrix}$$

Das ist eher eine Aufgabe für die Grundschule, bei der es nur darum geht, dass man verstanden hat, was beim Transponieren gemacht wird.

⋆365

Für die folgende Matrix gilt $\boldsymbol{M}^T = \boldsymbol{M}$. Geben Sie d an.

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} a & 2 & b \\ a & b & a-2b \\ 2a & d & c \end{pmatrix}$$

Etwas schwerer als die vorherige Aufgabe, aber eigentlich auch ganz leicht. Man muss nacheinander diverse Schlüsse ziehen. Zum Beispiel ist es offensichtlich, welchen Wert a haben muss.

⋆366

Geben Sie eine 2×2-Matrix $\boldsymbol{A}$ an, für die $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ gilt. Die Nullmatrix und die Einheitsmatrix zählen *nicht* als Lösungen.

⋆367

Geben Sie eine 2×2-Matrix $\boldsymbol{A}$ an, für die $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$ gilt. Die Nullmatrix und die Einheitsmatrix zählen *nicht* als Lösungen.

⋆368

Geben Sie eine 2×2-Matrix $\boldsymbol{A}$ an, für die $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{A}$ gilt. Die Nullmatrix zählt *nicht* als Lösung.

⋆369

Man nennt eine quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ *symmetrisch*, wenn $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$ gilt. Geben Sie zwei *verschiedene* 2×2-Matrizen an, die *nicht* symmetrisch sind, deren Produkt aber symmetrisch ist.

Bei diesen Aufgaben geht es darum, was bei der Matrizenmultiplikation so passieren kann. Mit ein bisschen Rumprobieren findet man in allen Fällen schnell eine Lösung. Tipp: Fangen Sie mit einer der „verbotenen“ Lösungen an und modifizieren Sie diese ein bisschen.

$\star$370

Man nennt eine quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ *symmetrisch*, wenn $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$ gilt. Welche der folgenden Aussagen gelten für alle symmetrischen Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ sowie alle reellen Zahlen λ?

- [ ] $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^T$
- [ ] $\lambda\boldsymbol{A} = (\lambda\boldsymbol{A})^T$
- [ ] $\lambda\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{A}^T$
- [ ] $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^T - \boldsymbol{B}^T$
- [ ] $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^T - \boldsymbol{A}^T$

Wenn Sie sich diese Gleichungen auf dem Papier jeweils für kleine Matrizen einfach mal hinschreiben, ist sofort offensichtlich, was davon stimmen kann und was nicht.

27. Lineare Gleichungssysteme

$\star$371

Ermitteln Sie die eindeutige Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 8 \\ x + 4y + 5z &= 0 \\ 2x + y + z &= 32 \end{aligned}$$

Wie Sie das lösen, ist natürlich im Endeffekt egal. Ich empfehle aber, das zu Übungszwecken mal von Hand mit dem Gaußverfahren zu machen. Gleichzeitig sollten Sie auch wissen, wie SymPy solche Aufgaben übernehmen kann.

$\star$372

Ermitteln Sie die eindeutige Lösung des folgenden Gleichungssystems, wobei a eine reelle Konstante sein soll.

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 + a \\ x + z &= 2 \\ x - z &= 0 \end{aligned}$$

$\star$373

Ermitteln Sie die eindeutige Lösung des folgenden Gleichungssystems in Abhängigkeit von der reellen Konstante a:

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + z &= 2 \\ x - z &= 0 \end{aligned}$$

Bei solchen Aufgaben kann die Lösung von a abhängen, aber das muss nicht notwendig so sein.

⋆374

Welchen Wert muss a haben, damit $(0,2,0)^T$ die eindeutige Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems ist?

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ y + z &= 2 \\ x + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Tipp: Lösen Sie das System mit SymPy. Der Rest sollte dann unproblematisch sein.

⋆375

Genau eines der folgenden drei linearen Gleichungssysteme hat keine Lösung. Welches?

○ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 7 & -7 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$ ○ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 7 & -7 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$ ○ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 7 & -7 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$

Mit Computerhilfe ist das eigentlich zu einfach. Man kann aber auch durch ganz simple Zeilenumformungen sofort sehen, welches der drei Systeme keine Lösung hat. Mit dem Wissen aus dem 30. Kapitel wird die Aufgabe noch leichter.

29. Lineare Abbildungen

⋆376

Die Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x - 2y \\ 4x - z \end{pmatrix} \end{cases}$$

soll durch eine Matrix als $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}$ dargestellt werden. Geben Sie die Matrix $\boldsymbol{A}$ an.

Hier geht es um den grundlegenden Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen. Die wichtigste Aussage ist dabei die über die Spalten der Matrix auf Seite 343[327] des Buches.

⋆377

Die Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5ax - 2y \\ 4x - z \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

soll durch eine Matrix als $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}$ dargestellt werden. Geben Sie die Matrix $\boldsymbol{A}$ an.

Stellen Sie erst anhand der Abbildungsvorschrift eine Matrix auf, in der a vorkommt und überlegen Sie dann, durch welches a die zweite Bedingung erfüllt wird.

$\star$378

Die lineare Abbildung f von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ bildet $(1,0)^T$ auf $(2,1)^T$ und $(0,1)^T$ auf $(2,-4)^T$ ab. Geben Sie den Vektor $f((3,2)^T)$ an.

$\star$379

Die lineare Abbildung f von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ hat die Eigenschaften $f(\boldsymbol{e}_1) = 5\boldsymbol{e}_1$ und $f(\boldsymbol{e}_2) = 7\boldsymbol{e}_2$. f soll durch eine Matrix als $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}$ dargestellt werden. Geben Sie die Matrix $\boldsymbol{A}$ an.

Hier gilt in beiden Fällen die gleiche Anmerkung wie bei Aufgabe 376 oben. Falls Sie zwischendurch die Bedeutung von Symbolen wie $\boldsymbol{e}_i$ vergessen haben sollten, benutzen Sie den Index der mathematischen Symbole ab Seite 977[931] im Buch.

$\star$380

Die lineare Abbildung f von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ bildet $(1,0)^T$ auf $(2,1)^T$ und $(0,2)^T$ auf $(2,-4)^T$ ab. Geben Sie den Vektor $f((3,2)^T)$ an.

Stellen Sie $(3,2)^T$ als Linearkombination von $(1,0)^T$ und $(2,1)^T$ dar und nutzen Sie dann die Linearität aus, die linearen Abbildungen ihren Namen gibt – siehe Punkt (iii) auf Seite 349[333] im Buch.

$\star$381

Die lineare Abbildung f von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ bildet $(1,0)^T$ auf $(2,1)^T$ und $(0,2)^T$ auf $(2,-4)^T$ ab. f soll durch eine Matrix als $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}$ dargestellt werden. Geben Sie die Matrix $\boldsymbol{A}$ an.

$\star$382

Die lineare Abbildung f von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ bildet $(1,0)^T$ auf $(2,1)^T$ und $(-1,1)^T$ auf $(2,-4)^T$ ab. f soll durch eine Matrix als $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}$ dargestellt werden. Geben Sie die Matrix $\boldsymbol{A}$ an.

$\star$383

Gegeben seien die folgenden $\mathbb{R}^3$-Vektoren:

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}-4\\5\\7\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bildet $\boldsymbol{e}_1$ auf $\boldsymbol{v}_1$ ab, $\boldsymbol{e}_2$ auf $\boldsymbol{v}_2$ und $\boldsymbol{v}_3$ auf $\boldsymbol{v}_4$. Geben Sie den Funktionswert $f(\boldsymbol{w})$ an.

Für diese Aufgaben können Sie die Lösungsstrategien für die Aufgaben 376 und 380 verbinden.

⋆384

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei eine Drehung um den Nullpunkt, die $(2,0)^T$ auf $(1,\sqrt{3})^T$ abbildet. f soll durch eine Matrix als $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}$ dargestellt werden. Geben Sie die Matrix $\boldsymbol{A}$ an.

Wenn Sie wissen, wohin $(2,0)^T$ abgebildet wird, dann wissen Sie auch, wohin $(1,0)^T$ abgebildet wird – siehe die Bemerkung zu Aufgabe 380 oben. Und da f eine Drehung um den Nullpunkt ist, wissen Sie dann auch, was mit $(0,1)^T$ passiert. Schauen Sie sich die Skizze auf Seite 346[330] im Buch an.

385

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei eine Drehung um den Nullpunkt, die den Punkt $(0,2)^T$ auf $(-0.684, 1.879)^T$ (gerundet) abbildet. f soll durch eine Matrix als $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}$ dargestellt werden. Geben Sie die Matrix $\boldsymbol{A}$ an, wobei die Komponenten auf zwei Stellen nach dem Komma genau sein sollen.

Das geht wie bei der Aufgabe vorher. Allerdings kann man hier keine exakte Antwort mehr geben.

386

Die folgende Matrix ist (gerundet) eine Drehmatrix. Geben Sie den Drehwinkel in Grad auf zwei Stellen nach dem Komma an.

$$\begin{pmatrix} 0.939693 & -0.342020 \\ 0.342020 & 0.939693 \end{pmatrix}$$

Diese Aufgabe ist sogar noch einfacher als die beiden davor und Sie erhalten mehr Informationen, als Sie eigentlich brauchen.

⋆387

Welche der folgenden Matrizen bewirken in der Ebene $\mathbb{R}^2$ eine Drehung um $30°$ im mathematisch positiven Sinn?

- ☐ $\begin{pmatrix} \sin 30° & \cos 30° \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} \cos 30° & \sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} \cos 30° & \cos 30° \\ -\sin 30° & \sin 30° \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} -\cos 30° & \sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

Schauen Sie sich ggf. auf Seite 346[330] im Buch noch mal an, welche Form eine Drehmatrix hat und vergleichen Sie das mit den Matrizen hier. Beachten Sie, dass es mehr als eine Art geben kann, dieselbe Matrix hinzuschreiben.

⋆388

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine injektive lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ f bildet Geraden auf Geraden ab.
- ☐ f bildet Kreise auf Kreise ab.

- ☐ f bildet Quadrate auf Quadrate ab.
- ☐ f bildet Rechtecke auf Rechtecke ab.
- ☐ f bildet Quadrate auf Rechtecke ab.
- ☐ f bildet Dreiecke auf Dreiecke ab.

> Hier ist zu beachten, dass f injektiv sein soll. Daher können gewissen Sonderfälle (Seite 349[333]) nicht eintreten.

389

M sei die 2×2-Matrix, die eine Spiegelung an der Geraden $y = x/3$ beschreibt. Geben Sie M an, wobei die Einträge auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet sein sollen.

> Wenn man den Winkel herausbekommt, kann man die Matrix direkt aus dem Buch abschreiben.

30. Inverse Matrizen und Determinanten

⋆390

f und g seien lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. f bildet $(2,0)^T$ auf $(2,4)^T$ und $(0,1)^T$ auf $(2,2)^T$ ab. g ist durch

$$g(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{v}$$

definiert. Geben Sie die Matrix zur linearen Abbildung $g \circ f$ an.

> Hier geht es um den Zusammenhang zwischen der Komposition von linearen Abbildungen und der Multiplikation von Matrizen – siehe Seite 354[338] im Buch. Dafür brauchen Sie natürlich zuerst mal die Matrix für f.

⋆391

Geben Sie eine 2×2-Matrix an, die singulär ist und von deren vier Komponenten mindestens zwei nicht null sind.

⋆392

Geben Sie eine 2×2-Matrix an, die singulär ist und deren vier Komponenten alle verschieden sind.

> Wenn man weiß, welche Eigenschaften eine singuläre Matrix hat, ist das ganz einfach. Ich sage an dieser Stelle aber auch gleich etwas, das für die meisten Aufgaben in diesem Kapitel gilt und das ich nicht jedes Mal wiederholen werde: Die zentrale Aussage auf Seite 370[354] des Buches ist der Schlüssel, mit dessen Hilfe sich viele Fragen sehr elegant beantworten lassen.

$\star 393$

Sei $\boldsymbol{b}$ der Vektor $(3,1)^T$. Geben Sie einen zur x-Achse parallelen Vektor $\boldsymbol{a}$ an, für den das von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannte Parallelogramm die Fläche 5 hat.

Hier geht es um den Zusammenhang zwischen den Determinanten von 2×2-Matrizen und der Fläche von Parallelogrammen, der im 30. Kapitel ausführlich thematisiert wird.

$\star 394$

Geben Sie für die folgende Matrix $\boldsymbol{A}$ den Vektor $\boldsymbol{v}$ mit $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} = (2,3)^T$ an.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Stichworte für diese Aufgabe sind die inverse Matrix und der Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und linearen Gleichungssystemen.

$\star 395$

Gegeben sei die folgende Matrix $\boldsymbol{A}$. Berechnen Sie die Determinante von $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Beziehung (30.4) auf Seite 370[353] des Buches macht Ihnen das Leben leichter.

$\star 396$

Gegeben sei die folgende Matrix $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{B}$ sei die Matrix $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A})^T$. Berechnen Sie die Determinante von $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}$.

Hier können Sie zusätzlich (30.3) von Seite 364[348] des Buches verwenden.

$\star 397$

Sei $\boldsymbol{E}_{21}$ die 21×21-Einheitsmatrix. Geben Sie die Determinante von $-\boldsymbol{E}_{21}$ an.

$\star 398$

Sei $\boldsymbol{E}_{10}$ die 10×10-Einheitsmatrix. Geben Sie die Determinante von $3 \cdot \boldsymbol{E}_{10}$ an.

⋆399

Sei $\boldsymbol{E}_{10}$ die 10×10-Einheitsmatrix. Geben Sie die Determinante von $\boldsymbol{E}_{10} + \boldsymbol{E}_{10}$ an.

⋆400

Sei $\boldsymbol{E}_{10}$ die 10×10-Einheitsmatrix. Geben Sie die Determinante von $(\boldsymbol{E}_{10} + \boldsymbol{E}_{10})^{-1}$ an.

⋆401

Sei n eine natürliche Zahl, $m = 10n + 1$ und $\boldsymbol{E}_m$ die $m \times m$-Einheitsmatrix. Geben Sie die Determinante von $-\boldsymbol{E}_m$ an.

⋆402

Sei $\boldsymbol{E}_3$ die 3×3-Einheitsmatrix. Welchen Wert muss a haben, damit $\det\big((a\boldsymbol{E}_3)^{-1}\big) = 27$ gilt?

⋆403

Sei $\boldsymbol{E}_n$ die $n \times n$-Einheitsmatrix. Welchen Wert muss a haben, damit $\det(a\boldsymbol{E}_n) = n$ gilt?

Die relevante Vorbereitung für diese Aufgaben sind die Aufgaben 553[525], 561[533] und 562[534] im Buch.

404

Welchen Wert muss a haben, damit die folgende Determinante den Wert 3 hat?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

⋆405

Welche beiden Werte für a sorgen dafür, dass die Matrix $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}$ die Determinante 9 hat?

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & a & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Determinante (oder lassen Sie sie berechnen) und Sie erhalten jeweils einen Wert, der von a abhängt. Dann müssen Sie nur noch eine einfache Gleichung lösen.

⋆406

Geben Sie eine 2×2-Matrix $\boldsymbol{A}$ an, für die $\det(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}) + \det(\boldsymbol{A})$ gilt. Die Nullmatrix zählt *nicht* als Lösung.

Siehe dazu auch Aufgabe 563[535] im Buch.

⋆407

Was ist der größtmögliche Wert der folgenden Determinante, wenn für a beliebige reelle Zahlen eingesetzt werden dürfen?

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ \pi & 42 & 1 \\ -3 & a & 0 \end{vmatrix}$$

Auch hier kommt als Determinante ein von a abhängender Wert heraus. Wie kann man diesen Wert maximieren? (Rein technisch ist das eine Extremwertaufgabe. Sie ist aber so einfach, dass man die Lösung sofort sehen sollte. Notfalls interpretieren Sie die Determinante als Funktion von a und skizzieren Sie deren Funktionsgraphen.)

408

Welchen Wert muss a haben, damit die folgende Matrix singulär ist?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wenn Ihnen die weiter oben erwähnten Zusamenhänge klar sind, dann sehen Sie sofort, dass diese Aufgabe sich eigentlich gar nicht von Aufgabe 404 unterscheidet.

409

Welche der folgenden Matrizen kann für keinen reellen Wert a singulär werden?

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ \pi & 42 & 1 \\ -3 & a & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ \pi & 42 & 1 \\ 3 & a & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ \pi & -42 & 1 \\ 3 & a & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -a & 2 & 0 \\ \pi & -42 & 1 \\ 3 & -a & 0 \end{pmatrix}$$

410

Seien a und b reelle Zahlen mit $|a| = |b| > 0$. Welche der folgenden Matrizen sind singulär?

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ \pi & 42 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ \pi & 42 & 1 \\ b & a & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -42 & \pi & 1 \\ 0 & b & 23 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -a & 0 & b \\ \pi & 1 & -42 \\ b & 0 & -a \end{pmatrix}$$

Auch hier geht es wie bei Aufgabe 408 um den Zusammenhang zwischen der Regularität einer quadratischen Matrix und ihrer Determinante. Für eine der beiden Aufgaben muss man sich zudem an eine Eigenschaft des Absolutbetrages erinnern.

411

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3/2 & 5/4 & 7/4 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die Matrix $\boldsymbol{B}$ an, für die $\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{A}$ gilt.

Da Sie einen Computer zur Verfügung haben, sollten Sie den wohl auch benutzen. Allerdings wird im 30. Kapitel auch gezeigt, wie man das von Hand machen könnte, und bei so einer kleinen Matrix ist das auch nicht so aufwendig.

⋆412

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die Determinante von $\boldsymbol{A}^{-1}$ an.

Für die Beantwortung dieser Frage müssen Sie $\boldsymbol{A}^{-1}$ nicht kennen. Siehe Aufgabe 562[534] im Buch.

⋆413

Die durch $(v_1, v_2)^T \mapsto (v_1 + 7v_2, v_1 + 3v_2)^T$ definierte lineare Abbildung bildet den Einheitskreis auf eine Ellipse ab. Welche Fläche hat diese Ellipse?

⋆414

Die durch $(v_1, v_2)^T \mapsto (v_1 + 7v_2, v_1 + 3v_2)^T$ definierte lineare Abbildung bildet einen Kreis mit dem Radius 2 auf eine Ellipse ab. Welche Fläche hat diese Ellipse?

⋆415

Die durch $(v_1, v_2, v_3)^T \mapsto (v_1 + 7v_2 + 2v_3, v_1 + 3v_2 + 2v_3, v_1 + v_2 + v_3)^T$ definierte lineare Abbildung bildet einen Würfel mit dem Volumen 1 auf einen Spat ab. Welches Volumen hat dieser Spat?

⋆416

Die durch $(v_1, v_2, v_3)^T \mapsto (3v_1 + 7v_2 + 2v_3, v_1 + 3v_2 + 2v_3, v_1 + v_2 + v_3)^T$ definierte lineare Abbildung bildet einen Würfel mit der Kantenlänge 2 auf einen Spat ab. Welches Volumen hat dieser Spat?

⋆417

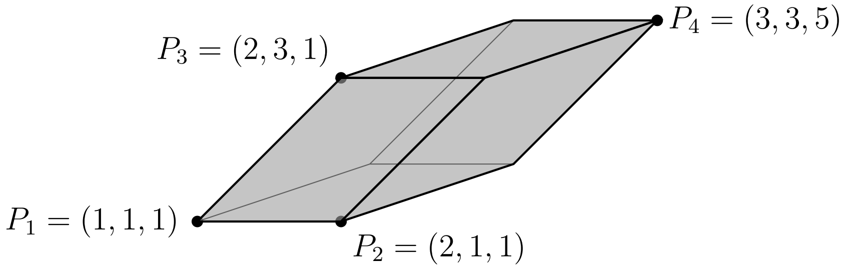
Die durch $(v_1, v_2, v_3)^T \mapsto (av_1 + v_2 + 2v_3, v_1 + 2v_2, v_1 + 3v_2 + v_3)^T$ definierte lineare Abbildung bildet einen Würfel mit dem Volumen 2 auf einen Spat ab. Welche beiden Werte kann man für a einsetzen, damit der Spat das Volumen 3 hat?

Bei den obigen Aufgaben geht es jeweils um den Zusammenhang zwischen der Determinante und verallgemeinerten Volumina. Siehe Seite 368[352] im Buch. Natürlich muss man auch wissen, wie man

Flächen von Kreisen und Volumina von Würfeln berechnet.

⋆418

Berechnen Sie das Volumen des folgenden Spats:

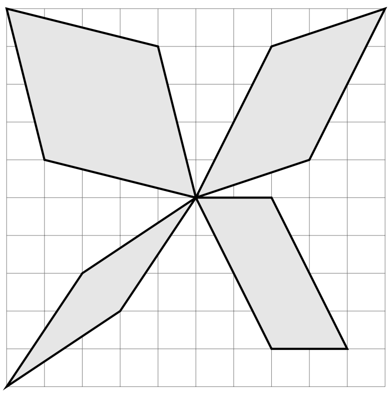


(Der Spat wurde *nicht* maßstabsgetreu gezeichnet. Relevant sind nur die Koordinaten.)

Siehe dazu Seite 361[345] im Buch.

⋆419

Berechnen Sie die Fläche des folgenden, aus *Parallelogrammen* bestehenden „Sterns“. (Alle Eckpunkte haben ganzzahlige Koordinaten.)



Siehe Aufgabe 393 weiter oben.

⋆420

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bildet das Einheitsquadrat mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ und $(0,1)$ auf ein Parallelogramm ab, von dem die beiden Eckpunkte $(3,0)$ und $(5,2)$ bekannt sind. Geben Sie die Determinante der zu f gehörenden Matrix an. [Es gibt zwei mögliche Antworten.]

Machen Sie sich eine Skizze. Weil f linear ist, kennen Sie auf jeden Fall noch einen dritten Eckpunkt des Parallelogramms.

$\star 421$

Sei $\boldsymbol{A}$ die folgende reguläre Matrix:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie eine reguläre 2×2-Matrix $\boldsymbol{B}$ an, für die $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ *nicht* regulär ist.

Evtl. müssen Sie hier ein bisschen rumprobieren. Sowas in der Art haben Sie in Aufgabe 392 oben schon mal gemacht. Beachten Sie, dass $\boldsymbol{B}$ regulär sein muss.

$\star 422$

Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die für alle Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wahr sind:

- [ ] Wenn $\boldsymbol{A}$ regulär ist, dann ist $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}$ auch regulär.
- [ ] Wenn $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ regulär sind, dann ist $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ auch regulär.
- [ ] Wenn $\boldsymbol{A}$ regulär ist, dann ist $42 \cdot \boldsymbol{A}$ auch regulär.
- [ ] Wenn $\boldsymbol{A}$ regulär ist, dann ist $\boldsymbol{A}^{-1}$ auch regulär.
- [ ] Wenn $\boldsymbol{A}$ regulär ist, dann ist $\boldsymbol{A}^T$ auch regulär.
- [ ] Wenn $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ regulär sind, dann ist $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ auch regulär.

$\star 423$

Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die für alle Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wahr sind:

- [ ] $\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \det(\boldsymbol{A})$
- [ ] $\det(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A}) \cdot \det(\boldsymbol{B})$
- [ ] $\det(\boldsymbol{A}^T) = \det(\boldsymbol{A})$
- [ ] $\det(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A}) + \det(\boldsymbol{B})$
- [ ] $\det(42 \cdot \boldsymbol{A}) = 42 \cdot \det(\boldsymbol{A})$
- [ ] $\det(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A})^2$

$\star 424$

Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die für alle Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ wahr sind:

- [ ] $\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \det(\boldsymbol{A}^T)$
- [ ] $\det(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A}) \cdot \det(\boldsymbol{B})$
- [ ] $\det(-\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A})$
- [ ] $\det(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A}) + \det(\boldsymbol{B})$
- [ ] $\det(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}) + \det(\boldsymbol{A}) + \det(\boldsymbol{A}) + \det(\boldsymbol{A})$
- [ ] $\det(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A})^2$

★425

Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die für alle quadratischen Matrizen $\boldsymbol{A}$ wahr sind:

- ☐ $\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \det(\boldsymbol{A}^T)$
- ☐ $\det(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}) = 2 \cdot \det(\boldsymbol{A})$
- ☐ $\det(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}) = 2 \cdot \det(\boldsymbol{A})$
- ☐ $\det(\boldsymbol{A}^T) = 1/\det(\boldsymbol{A})$
- ☐ $\det(42 \cdot \boldsymbol{A}) = 42 \cdot \det(\boldsymbol{A})$

Das sind alles Varianten derselben Aufgabe und man kann sie ohne Probleme lösen, wenn man das 30. Kapitel durchgearbeitet und verstanden hat. Siehe auch Aufgabe 421 oben.

★426

Gegeben seien diese drei Funktionen:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ 2x + y \end{pmatrix} \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ 2x + 1 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ 2x - 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Funktionen injektiv sind:

☐ f ☐ g ☐ h ☐ $g + h$ ☐ $f \circ f$

Solche Aufgaben kamen im 19. Kapitel schon vor. Hier können Sie aber zusätzlich die Mittel der linearen Algebra einsetzen. Bei linearen Abbildungen können Sie an der Determinante erkennen, ob sie injektiv sind. Affine Abbildungen sind Kompositionen aus linearen Abbildungen und Translationen, und Translationen sind offenbar immer injektiv.

★427

Welche der folgenden Matrizen ist für *jeden* reellen Wert a regulär?

$$\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$$

Eine Variante von Aufgabe 409 oben.

31. Das Skalarprodukt

★428

Die $\mathbb{R}^2$-Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ haben die Längen $\sqrt{10}$ und $\sqrt{15}$. Ferner gilt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$. Wie lang ist der Vektor $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$?

Was bedeutet $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ geometrisch? (Seite 378[362] im Buch.) Machen Sie sich eine Skizze.

⋆429

Die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ sind zueinander orthogonal, $\boldsymbol{a}$ hat die Länge $\sqrt{2}$ und $\boldsymbol{b}$ hat die Länge $\sqrt{3}$. Berechnen Sie das Skalarprodukt $(2\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$.

Hier brauchen Sie Aufgabe 566[538] aus dem Buch und den Zusammenhang aus der vorherigen Aufgabe.

⋆430

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei eine Drehung um den Nullpunkt und $\boldsymbol{a} = (3,4)^T$. Geben Sie $\|f(\boldsymbol{a})\|$ an.

⋆431

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei eine Drehung um den Nullpunkt. Welche der folgenden Funktionswerte für $(2,0)^T$ sind dann unmöglich?

☐ $(\sqrt{2}, \sqrt{2})^T$ ☐ $(1,1)^T$ ☐ $(0,0)^T$ ☐ $(1,-1)^T$ ☐ $(1,\sqrt{2})^T$

Drehungen sind Beispiele für orthogonale Abbildungen, durch die sich grundlegende Eigenschaften von Vektoren nicht ändern – siehe Seite 384[368] im Buch.

432

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei eine Drehung um den Nullpunkt. Ferner sei $\boldsymbol{v} = (1,2)^T$ und $\boldsymbol{w} = (2,-1)^T$. Geben Sie die Norm von $f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{w})$ auf zwei Stellen nach dem Komma an.

Außer der Orthogonalität müssen Sie hier auch noch die Linearität von f ausnutzen – siehe Aufgabe 380 weiter oben.

⋆433

Sei $\boldsymbol{v} = (1,2,3)^T$, $\boldsymbol{w} = (2,a,2)^T$ und $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$. Welchen Wert muss a haben, damit $\boldsymbol{x}$ senkrecht auf $\boldsymbol{e}_3$ steht?

Berechnen Sie erst $\boldsymbol{x}$ und erinnern Sie sich dann an Aufgabe 428 oben. Siehe auch die Bemerkung zu Aufgabe 379 weiter oben.

⋆434

Kreuzen Sie alle Vektoren an, die sowohl normiert als auch orthogonal zu $(3,4)^T$ sind.

☐ $\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ☐ $\frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Beide Bedingungen lassen sich mithilfe des Skalarproduktes überprüfen.

⋆435

Seien $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ Vektoren im Raum $\mathbb{R}^3$, die alle senkrecht aufeinander stehen (und die alle *nicht* der Nullvektor sind). Welche der folgenden Fälle können eintreten?

- ☐ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$
- ☐ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$
- ☐ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c}$
- ☐ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{a}$
- ☐ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{c}$

Die für diese Aufgabe relevanten Eigenschaften von $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ finden Sie auf Seite 379[363] im Buch.

⋆436

Geben Sie einen Vektor an, der senkrecht auf den beiden Vektoren $(-4, -3, -2)^T$ und $(-1, 1, -4)^T$ steht und der außerdem normiert ist.

⋆437

Geben Sie einen Vektor an, der senkrecht auf den beiden Vektoren $(3, -4, 2)^T$ und $(-1, -1, 4)^T$ steht und der außerdem die Norm 3 hat.

Auch hier spielt offenbar das Vektorprodukt eine Rolle. Allerdings soll der gesuchte Vektor auch noch eine bestimmte Länge haben – siehe Aufgabe 571[543] im Buch.

⋆438

Welchen Wert muss a haben, damit die beiden Vektoren $(1, 4, 3)^T$ und $(2, -2, a)^T$ senkrecht aufeinander stehen?

Siehe die Bemerkung zu Aufgabe 428 weiter oben.

⋆439

Geben Sie einen Vektor an, der senkrecht auf der Ebene E steht und die Norm 3 hat.

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

⋆440

Sei E die Ebene, in der die Punkte $(1, 2, 3)$, $(4, -2, 5)$ und $(0, 1, 7)$ liegen. Geben Sie einen Vektor an, der senkrecht auf E steht und die Norm 3 hat.

Siehe Aufgabe 437 weiter oben.

⋆441

Kreuzen Sie die Punkte an, die in der Ebene E aus der vorherigen Aufgabe liegen.

☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Eigentlich hätte man diese Aufgabe schon im 25. Kapitel stellen können.

⋆442

Was kann man für a einsetzen, damit die folgende Matrix orthogonal ist?

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

⋆443

Was kann man für a einsetzen, damit die folgende Matrix orthogonal ist?

$$a \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Die wesentliche Gleichung für das Überprüfen der Orthogonalität finden Sie auf Seite 384[368] im Buch. Das führt in beiden Fällen auf eine einfache Gleichung für a.

444

Sei $\boldsymbol{v} = (1,2,3)^T$ und $\boldsymbol{w} = (1,3,2)^T$. Ferner sei $\boldsymbol{M}$ eine orthogonale Matrix. Geben Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\boldsymbol{Mv}$ und $\boldsymbol{Mv} + \boldsymbol{Mw}$ in Grad auf zwei Stellen nach dem Komma an.

Hier ist auch die Bemerkung hinter Aufgabe 431 relevant.

⋆445

Eine Matrix $\boldsymbol{M}$ heißt *symmetrisch*, wenn $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^T$ gilt. Geben Sie eine 2×2-Matrix an, die sowohl orthogonal als auch symmetrisch ist und die *nicht* die Einheitsmatrix ist.

Mit ein bisschen Rumprobieren kommen sie drauf.

⋆446

Welchen Wert muss a haben, damit die folgende Matrix eine Spiegelungsmatrix ist?

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

Man hätte diese Aufgabe schon im 25. Kapitel stellen können, aber wenn Sie das Buch bis zum 31. Kapitel durchgearbeitet haben, ist sie noch leichter.

⋆447

Die Ebene E ist in hessescher Normalenform angegeben:

$$E = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} - 7 = 0\}$$

Geben Sie den Abstand des Punktes $P = (5, 6, 1)$ von E an.

Wie man mithilfe der hesseschen Normalenform solche Abstände berechnet, wird im Buch auf den Seiten 379[363] bis 382[366] erklärt. Beachten Sie, dass *Abstände* nie negativ sein können, *gerichtete Abstände* aber schon.

⋆448

Geben Sie die hessesche Normalenform der folgenden Ebene an:

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Siehe Aufgabe 589[561] im Buch.

449

Die Ebene E ist folgendermaßen definiert:

$$E = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} - 5 = 0\}$$

Geben Sie den Abstand des Punktes $P = (5, 6, 0)$ von E auf zwei Stellen nach dem Komma an.

Befindet sich diese Ebene bereits in hessescher Normalenform oder muss man noch was ändern?

450

Sei E die Ebene, in der die Punkte $(1, 2, 3)$, $(4, -2, 5)$ und $(0, 1, 7)$ liegen. Geben Sie den Abstand des Punktes $P = (5, 6, 0)$ von E auf zwei Stellen nach dem Komma an.

451

Die Gerade g steht senkrecht auf dem Vektor $(5, 6)^T$ und enthält den Punkt $(3, -1)$. Geben Sie den Abstand von $(7, 2)$ zu g auf zwei Stellen nach dem Komma genau an.

452

Die Ebene E steht senkrecht auf dem Vektor $(5, 4, 6)^T$ und enthält den Punkt $(1, 2, 3)$. Geben Sie den Abstand von $(7, 8, 9)$ zu E auf zwei Stellen nach dem Komma genau an.

453

Geben Sie den Abstand von $(7, 2)$ zur Geraden $g = (3, 1)^T + \mathbb{R}(2, 2)^T$ auf zwei Stellen nach dem Komma genau an.

454

Die Gerade g geht durch den Punkt $P = (-1, 2, 3)$ und schneidet die Ebene

$$E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

nicht. Geben Sie den Abstand von g und E auf zwei Stellen nach dem Komma an.

Weitere Aufgaben zum Thema hessesche Normalenform und Abstand.

⋆455

Sei E die Ebene, in der die Punkte $(1, 2, 3)$, $(4, -2, 5)$ und $(0, 1, 7)$ liegen. Geben Sie einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten an, dessen Abstand von E genau 3 ist.

Ermitteln Sie zunächst mal die hessesche Normalenform von E und schreiben Sie dann die allgemeine Formel für den Abstand eines Punktes (x, y, z) zu E hin. Dann werden Sie sehen, dass der Rest ganz einfach ist.

⋆456

Die Gerade g steht senkrecht auf dem Vektor $(3, 4)^T$ und enthält den Punkt $(3, -1)$. Zwei von den folgenden Punkten liegen auf derselben Seite von g. Welche beiden sind es?

☐ $(-1, 2)$ ☐ $(-1, 0)$ ☐ $(0, 1)$ ☐ $(1, 1)$

Auch so eine Frage lässt sich mithilfe der hesseschen Normalenform beantworten, weil diese ja den *gerichteten* Abstand liefern kann.

457

Die beiden Geraden f und g sind durch Normalenformen wie in (31.3) im Buch angegeben:

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y - 11 = 0\}$$
$$g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 4y + 5 = 0\}$$

Geben Sie den Winkel zwischen f und g in Grad auf eine Stelle nach dem Komma an.

Der Winkel zwischen zwei Geraden ist der Winkel zwischen den Richtungsvektoren. Und wie man den ausrechnet, lernt man in diesem Kapitel. Hier sind die Richtungsvektoren aber nicht angegeben. Welche Vektoren kann man stattdessen verwenden?

⋆458

$\boldsymbol{A}$ sei die Matrix der Spiegelung an der y-Achse. $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ seien 2×2-Matrizen mit den Determinanten 4 und 24. Geben Sie die Determinante von $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{C}^T$ an.

⋆459

$\boldsymbol{A}$ sei eine Drehmatrix. $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ seien Matrizen mit den Determinanten 6 und 24. Geben Sie die Determinante von $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{C}^T$ an.

Wenn man die wichtigsten Rechenregeln für Determinanten sowie die Determinanten von Drehungen und Spiegelungen parat hat, dann kann man solche Aufgaben locker im Kopf lösen.

⋆460

f sei eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ mit der Matrix $\boldsymbol{A}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- [ ] Wenn f eine Drehung um den Nullpunkt ist, dann gilt $\det \boldsymbol{A} = 1$.
- [ ] Wenn f eine Drehung um den Nullpunkt ist, dann ist auch $f \circ f$ eine.
- [ ] Wenn $\det \boldsymbol{A} = 1$ gilt, dann ist f eine Drehung.
- [ ] Wenn $\det \boldsymbol{A} = 1$ gilt, dann ist f eine orthogonale Abbildung.
- [ ] Wenn die Determinante von $\boldsymbol{A}$ negativ ist, dann ist f eine Spiegelung.

Alles, was man für diese Aufgabe wissen muss, steht im 31. Kapitel oder in denen davor.

32. Anwendung: Homogene Koordinaten

⋆461

Sei f die Spiegelung an der y-Achse, g die durch $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v} + (2, 3)^T$ definierte Translation und h die Drehung um den Nullpunkt um $-90°$. Geben Sie die homogene Matrix an, die die Abbildung $f \circ g \circ h$ repräsentiert.

Siehe Aufgabe 608[580] im Buch sowie das Beispiel davor. Die in dieser Aufgabe vorkommenden linearen Abbildungen f und h sind so einfach, dass man ihre Matrizen sofort hinschreiben kann – siehe die Bemerkung zu Aufgabe 376 weiter oben.

462

In der Ebene $\mathbb{R}^2$ soll um den Punkt $(2,1)$ um $20°$ im Uhrzeigersinn gedreht werden. Geben Sie von der zugehörigen homogenen 3×3-Matrix (in deren unterer Zeile wie üblich $0, 0, 1$ steht) den dritten Eintrag der ersten Zeile auf zwei Stellen nach dem Komma genau an.

So etwas wird im Buch ab Seite 392[374] ausführlich vorgerechnet.

⋆463

Geben Sie die homogene Matrix an, die die Spiegelung der Ebene $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $y = -x + 2$ beschreibt.

Und noch eine sehr ähnliche Aufgabe ...

34. Ausblick: Abstrakte Vektorräume

464

In dieser Aufgabe soll in $\mathbb{Z}_{17}$ gerechnet werden! $\mathbf{A}$ sei die Matrix $\mathbf{M}^3 \cdot \mathbf{N}^{-1}$, wobei

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 3 \\ 15 & 4 & 4 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 12 \\ 1 & 11 & 4 \\ 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

gelten soll. Geben Sie $\mathbf{A}$ an.

465

Bei dieser Aufgabe soll in $\mathbb{Z}_{97}$ gerechnet werden. Geben Sie die erste Zeile der zu

$$A = \begin{pmatrix} 74 & 34 & 16 & 89 \\ 17 & 39 & 18 & 26 \\ 25 & 18 & 2 & 46 \\ 30 & 80 & 20 & 77 \end{pmatrix}$$

inversen Matrix A^{-1} an.

Die entscheidende Aussage bei beiden Aufgaben ist, dass in $\mathbb{Z}_{17}$ bzw. in $\mathbb{Z}_{97}$ gerechnet werden soll. Daher müssen die Einträge von $\mathbf{A}$ alle Elemente von $\mathbb{Z}_{17}$ sein. Der Rest solle eigentlich ein Kinderspiel sein, wenn man den Computer verwenden darf.

466

Welchen Wert muss a haben, damit die folgende Matrix über $\mathbb{Z}_5$ singulär ist?

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Siehe Aufgabe 408 oben. Der Unterschied ist nur, dass die Antwort in diesem Fall natürlich ein Element von $\mathbb{Z}_5$ sein muss.

467

Für welche Primzahl p ist die folgende Matrix über $\mathbb{Z}_p$ singulär?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

468

Für welche Primzahl $p > 2$ ist die folgende Matrix über $\mathbb{Z}_p$ singulär?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bei beiden Aufgaben kann man den Computer nach so einem p suchen lassen, wenn man weiß, was man eingeben muss.

⋆469

Ermitteln Sie in $\mathbb{Z}_7$ die eindeutige Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ x + 4y + 5z &= 0 \\ 2x + y + z &= 4 \end{aligned}$$

Siehe Aufgabe 371 weiter oben und die im Buch auf den Seiten 419[401] und 420[402] vorgestellten SymPy-Verfahren. Die Lösung muss natürlich aus Elementen von $\mathbb{Z}_7$ bestehen!

470

Sie erhalten den mit dem $(7, 4)$-Hamming-Code aus dem Buch codierten Vektor $(1, 1, 1, 1, 0, 1, 0)^T$.

Bei der Übertragung ist ein Fehler aufgetreten und ein Bit ist falsch. Welche „Nachricht“ sollte verschickt werden? (Also: Wie sehen die korrekten vier Datenbits in der richtigen Reihenfolge aus?)

Siehe dazu insbesonder Seite 423[405] im Buch.

35. Komplexe Zahlen

★471

Welche der folgenden Aussagen treffen für die Gleichung $\sqrt{x-1}+2=1$ zu?

- [ ] Die Gleichung hat keine reelle Lösung.
- [ ] $x=2$ ist eine Lösung der Gleichung.
- [ ] Die Lösungsmenge der Gleichung ist $\{-2,2\}$.

★472

α und β seien reelle Zahlen mit der Eigenschaft $\alpha^2+\beta^2=1$. Welche der Aussagen können dann auf keinen Fall wahr sein?

- [ ] $\alpha \geq 1$ oder $\beta \geq 1$
- [ ] $\alpha \geq 1$ und $\beta \geq 1$
- [ ] $\alpha < -1$
- [ ] $\alpha > 1$

> Zwei Aufgaben zum Warmwerden, in denen es noch gar nicht um komplexe Zahlen, sondern nur um Schulwissen geht.

★473

Zwei der folgenden fünf Werte sind identisch. Kreuzen Sie die beiden an.

☐ i^2 ☐ i^3 ☐ i^{12} ☐ $1/\mathrm{i}$ ☐ i

★474

Zwei der folgenden fünf Werte sind identisch. Kreuzen Sie die beiden an.

☐ i^2 ☐ i^5 ☐ i^{42} ☐ $1/\mathrm{i}$ ☐ i^{-4}

> Ein paar Fingerübungen mit der imaginären Einheit. Verwenden Sie nicht den Computer, sondern denken Sie lieber nach!

★475

Welche komplexen Zahlen z haben die Eigenschaft $|z| = |\Re(z)| + |\Im(z)|$?

- [ ] Keine komplexe Zahl hat diese Eigenschaft.
- [ ] Nur die Null hat diese Eigenschaft.
- [ ] Nur reelle Zahlen haben diese Eigenschaft.
- [ ] Es gibt auch echt komplexe Zahlen, die diese Eigenschaft haben.
- [ ] Alle komplexen Zahlen haben diese Eigenschaft.

$\star$476

Welche komplexen Zahlen z haben die Eigenschaft $z + \overline{z} \notin \mathbb{R}$?

- ☐ Keine komplexe Zahl hat diese Eigenschaft.
- ☐ Nur rein imaginäre Zahlen haben diese Eigenschaft.
- ☐ Alle echt komplexen Zahlen haben diese Eigenschaft.
- ☐ Alle komplexen Zahlen haben diese Eigenschaft.

Auch hier geht es um neue Begriffe. Wenn Ihnen die alle klar sind, sind die Aufgaben eigentlich ganz einfach.

$\star$477

Berechnen Sie den Quotienten $(21 - \mathrm{i})/(2 + 3\mathrm{i})$ und geben Sie ihn in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit reellen Zahlen a und b an.

Da soll man nun tatsächlich mal von Hand etwas ausrechnen ...

478

Geben Sie das Argument von $(5+\mathrm{i})/(3-\mathrm{i})$ in Bogenmaß auf zwei Stellen nach dem Komma an.

Das kann der Computer für Sie ausrechnen, wenn Sie wissen, was die Begriffe bedeuten und was Sie eingeben müssen. Als Übung ist es aber vielleicht empfehlenswert, den Quotienten von Hand auszurechnen und nur für das Argument elektronische Hilfe in Anspruch zu nehmen.

$\star$479

Sei $a > 0$. Geben Sie den Betrag der komplexen Zahl $3a - 4a\mathrm{i}$ in einer Form an, in der keine Wurzelzeichen oder Betragsstriche vorkommen.

Aus der Voraussetzung $a > 0$ können Sie folgern, dass a reell sein muss, weil so eine Aussage für echt komplexe Zahlen keinen Sinn ergibt. Rechnen Sie den Betrag von Hand aus und vereinfachen Sie das Ergebnis.

$\star$480

Für die komplexe Zahl $z = 5a + 12a\mathrm{i}$ gilt $|z| = 39$ und $\Im(z) < 0$. Geben Sie den Imaginärteil von z an.

Schreiben Sie den Betrag von z in Abhängigkeit von a auf. Weil Sie wissen, dass da 39 herauskommen muss, können Sie nach a auflösen. Es gibt zwei mögliche Antworten, aber wegen der Information über den Imaginärteil kommt nur eine infrage.

481

Geben Sie die eindeutig bestimmte *negative* Zahl a an, für die der Betrag der komplexen Zahl $a+35\mathrm{i}$ genau 37 ist.

482

Geben Sie die kleinste natürliche Zahl n an, für die der Betrag der komplexen Zahl $23+n\mathrm{i}$ größer als 42 ist.

In beiden Fällen rechnen Sie erst den Betrag aus und haben dadurch dann genügend Informationen, um a bzw. n zu ermitteln.

483

Geben Sie die kleinste natürliche Zahl n an, für die die komplexe Zahl $26+n\mathrm{i}$ außerhalb des Kreises mit Radius 42 und Mittelpunkt 0 liegt.

Auch hier geht es um den Betrag, wie Sie hoffentlich selbst bemerkt haben.

⋆484

Sei z eine komplexe Zahl mit negativem Realteil und positivem Imaginärteil. Was kann man über die Lage von z^2 in der Gaußschen Zahlenebene dann mit Sicherheit aussagen?

- ☐ z^2 liegt oberhalb der reellen Achse.
- ☐ z^2 liegt unterhalb der reellen Achse.
- ☐ z^2 liegt links von der imaginären Achse.
- ☐ z^2 liegt rechts von der imaginären Achse.

⋆485

Sei z eine komplexe Zahl mit negativem Realteil und positivem Imaginärteil. Was kann man über die Lage von z^2 in der Gaußschen Zahlenebene dann mit Sicherheit aussagen?

- ☐ $\Im(z^2)$ ist positiv.
- ☐ $\Im(z^2)$ ist negativ.
- ☐ $\Re(z^2)$ ist positiv.
- ☐ $\Re(z^2)$ ist negativ.

⋆486

Sei z eine komplexe Zahl mit negativem Realteil und positivem Imaginärteil. Was kann man über die Lage von $1/z$ in der Gaußschen Zahlenebene dann mit Sicherheit aussagen?

- ☐ $1/z$ liegt oberhalb der reellen Achse.
- ☐ $1/z$ liegt unterhalb der reellen Achse.
- ☐ $1/z$ liegt links von der imaginären Achse.

- [ ] $1/z$ liegt rechts von der imaginären Achse.

⋆487

Sei z eine komplexe Zahl mit negativem Realteil und positivem Imaginärteil. Welche der folgenden Zahlen können mit Sicherheit *nicht* z^3 sein?

- [ ] $2 + \mathrm{i}$
- [ ] $-1 + 2\mathrm{i}$
- [ ] $2 - 3\mathrm{i}$
- [ ] $-3 - 2\mathrm{i}$

⋆488

Sei $z \neq 0$ eine komplexe Zahl mit $\Re(z) = 2 \cdot \Im(z)$. Was kann man über die Lage von z^2 in der Gaußschen Zahlenebene dann mit Sicherheit aussagen?

- [ ] z^2 liegt oberhalb der reellen Achse.
- [ ] z^2 liegt unterhalb der reellen Achse.
- [ ] z^2 liegt links von der imaginären Achse.
- [ ] z^2 liegt rechts von der imaginären Achse.

⋆489

Sei z eine komplexe Zahl, die weder auf der reellen noch auf der imaginären Achse liegt. Welche der folgenden Aussagen sind dann mit Sicherheit wahr?

- [ ] z und $1/z$ haben dasselbe Argument.
- [ ] z und $1/z$ haben unterschiedliche Argumente.
- [ ] $1/z$ liegt auf der imaginären Achse.
- [ ] $1/z$ liegt nicht auf der imaginären Achse.
- [ ] $\Im(z)$ und $\Im(1/z)$ haben dasselbe Vorzeichen.
- [ ] $\Im(z)$ und $\Im(1/z)$ haben unterschiedliche Vorzeichen.

> Bei all diesen Aufgaben geht es um die geometrische Bedeutung der Multiplikation komplexer Zahlen, die im Buch ab Seite 432[414] erklärt wird. Beachten Sie, dass es auch beim Kehrwert $1/z$ um das Multiplizieren geht: $z \cdot 1/z$ muss 1 ergeben. Und was würde sich bei Aufgabe 488 ändern, wenn nach $\overline{z^2}$ statt nach z^2 gefragt würde?

490

Sei a eine positive reelle Zahl und $z = 3a + a\mathrm{i}$. Geben Sie das Argument von z^3 in Bogenmaß auf zwei Stellen nach dem Komma an.

⋆491

Sei z eine komplexe Zahl mit dem Argument $\pi/2$. Geben Sie das Argument von z^{42} als Element von $[0, 2\pi)$ an.

⋆492

Sei z eine komplexe Zahl mit dem Argument $\pi/2$. Geben Sie das Argument von z^{42} in Grad an.

⋆493

Sei a eine positive reelle Zahl und $z = a + a\mathrm{i}$. Geben Sie das Argument von z^{10} als Element von $[0, 2\pi)$ an.

> Auch hier geht es um die komplexe Multiplikation und darum, was man über den Winkel des Produktes sagen kann.

494

Geben Sie die Lösung der Gleichung $x^2 - \mathrm{i}x - 7 - 9\mathrm{i} = 0$, deren Realteil positiv ist, in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit reellen Werten a und b an.

495

Geben Sie die Lösung der Gleichung $x^4 - (10 - 2\mathrm{i})x^3 + (33 - 20\mathrm{i})x^2 - (34 - 66\mathrm{i})x - 68\mathrm{i} = 0$, die am weitesten von der reellen Achse entfernt ist, in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit reellen Werten a und b an.

496

Geben Sie den Abstand der beiden Lösungen der folgenden Gleichung an.

$$x^2 + (2 + 5\mathrm{i})x + 35 = -65\mathrm{i}$$

> Im Buch wird gezeigt, wie man quadratische Gleichungen mit komplexen Koeffizienten von Hand lösen kann. Sie werden aber wahrscheinlich lieber die SymPy-Funktion `solve` verwenden.

497

Wie viele *verschiedene* Lösungen hat die Gleichung $x^5 - 8x^4 + 26x^3 - 40x^2 + 25x = 0$?

498

Wie viele echt komplexe Lösungen hat die Gleichung $x^6 - 4x^5 + 4x^4 + 4x^3 - 5x^2 = 0$?

> Für Gleichungen, deren Grad höher als vier ist, gibt es keinen allgemeinen Lösungsformeln. Trotzdem wird SymPy diese Gleichungen hier exakt lösen können. Wenn Sie schon dem Computer die ganze Arbeit überlassen, dann können Sie ja mal überlegen, warum diese beiden Gleichungen „eigentlich“ nur Gleichungen vierten Grades sind.

499

Welchen Wert muss die reelle Zahl a haben, damit die Gleichung

$$x^3 - 5x^2 + (a^2 + 2a + 8)x - (3a^2 + 6a + 6) = 0$$

nur zwei verschiedene Lösungen hat?

Die Lösungsmenge hängt offenbar von a ab und hat typischerweise drei Elemente. Für ein bestimmtes a werden daraus aber zwei.

⋆500

Die Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ hat die beiden Lösungen $z_1 = 3 + d\mathrm{i}$ und $z_2 = \overline{z_1}$ mit $d \in \mathbb{R}$. Geben Sie a an.

⋆501

Für die beiden Lösungen z_1 und z_2 der Gleichung $x^2 - ax + 9\mathrm{i} = 0$ mit $a \in \mathbb{C}$ gilt $z_2 = \mathrm{i}z_1$. Geben Sie den Absolutbetrag $|z_1|$ an.

⋆502

Sei $d \in \mathbb{C}$. Die beiden Lösungen x_1 und x_2 von $x^2 - 2x + d = 0$ seien konjugiert zueinander. Geben Sie die Realteile der Lösungen an.

⋆503

Sei $d \in \mathbb{C}$. Die beiden Lösungen x_1 und x_2 von $x^2 - (4 + 9\mathrm{i})x + d = 0$ haben die Differenz i. Geben Sie die Realteile der Lösungen an.

504

Die Gleichung $x^2 + a\mathrm{i}x + b = 0$ hat die beiden Lösungen $z_1 = 5 + d\mathrm{i}$ und $z_2 = -\overline{z_1}$. Welchen Wert muss die reelle Zahl d haben, damit $a = 6$ gilt?

In allen Fällen geht es um die Zerlegung in *Linearfaktoren*: Man muss die Gleichung jeweils als $(x - z_1)(x - z_2)$ schreiben können.

⋆505

Geben Sie die Summe $\displaystyle\sum_{k=3}^{100} \frac{1}{\mathrm{i}^k}$ an.

⋆506

Geben Sie das Argument der Summe $\displaystyle\sum_{k=3}^{100} \frac{1}{\mathrm{i}^k}$ in Grad an.

Siehe hierzu auch Aufgabe 473. Schauen Sie sich mal ein paar der Summanden an. Wie viele verschiedene Ergebnisse kann es geben, wenn man statt 3 und 100 andere Grenzen für die Summe nimmt?

⋆507

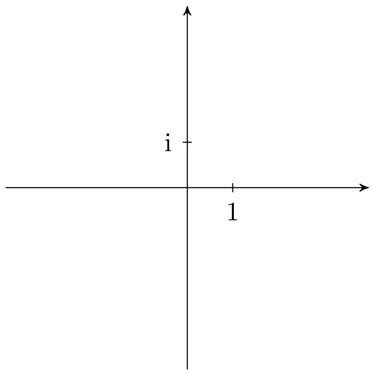
Geben Sie eine *reguläre* 2×2-Matrix an, deren vier Einträge alle echt komplex sind, deren Determinante aber reell ist.

Wie üblich kann man sowas mit ein bisschen Rumprobieren hinbekommen. Es geht hauptsächlich darum, das Rechnen mit komplexen Zahlen zu üben. Beachten Sie, dass die Matrix regulär sein soll.

★508

Zeichnen Sie in der folgenden Skizze deutlich erkennbar den Wertebereich der Funktion f ein.

$$f : \begin{cases} [1,2] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto 1 + t \cdot \mathrm{i} \end{cases}$$



Hier geht es darum, sich die Lage von komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene klarzumachen. Beachten Sie, dass der Definitionsbereich von f nur aus reellen Zahlen besteht.

★509

Was ist der größte Funktionswert, den die Funktion f annehmen kann?

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathrm{i}^k} \right| \end{cases}$$

Haben Sie die Empfehlung hinter Aufgabe 506 befolgt? Die könnten Sie jetzt ganz gut gebrauchen.

★510

Die komplexe Zahl z liegt im achsenparallelen Rechteck (inklusive der Kanten) mit den Ecken $-1-\mathrm{i}$ und $3+2\mathrm{i}$. Die komplexe Zahl w liegt im achsenparallelen Rechteck (inklusive der Kanten) mit den Ecken $-1+3\mathrm{i}$ und $1-\mathrm{i}$. Wie groß kann der Betrag von wz höchstens sein?

Machen Sie sich eine Skizze!

★511

Geben Sie eine komplexe Zahl z an, für die sowohl $z \neq \overline{z}$ als auch $z^2 = \overline{z^2}$ gilt.

Das ist nicht schwer und es gibt viele Möglichkeiten. Es geht nur darum, ob Sie die Definition des Konjugierens verstanden haben.

42. Grenzwerte und Stetigkeit

512

Welche der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig?

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2+x+1 & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x^2+x+1 & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor & \lfloor x \rfloor \text{ gerade} \\ 1 - x + \lfloor x \rfloor & \lfloor x \rfloor \text{ ungerade} \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor & \lfloor x \rfloor \text{ gerade} \\ \lfloor x \rfloor - x & \lfloor x \rfloor \text{ ungerade} \end{cases}$$

513

Welche der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig?

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin x & x \in [0, 2\pi] \\ 0 & x \notin [0, 2\pi] \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \cos x & x \in [0, 2\pi] \\ 0 & x \notin [0, 2\pi] \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} -x & x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$

Bei beiden Aufgaben kann man sich einfach die Funktionen zeichnen lassen (Kapitel 41) und dann die anschauliche Faustregel von Seite 521[503] des Buches verwenden.

⋆514

Seien f und g stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Ferner seien $f(3)$, $g(3)$ und $f(4)$ positiv. Aus welcher der folgenden Aussagen kann man folgern, dass die Funktion $f \cdot g$ im Intervall $(3, 4)$ mindestens eine Nullstelle hat?

○ $g(4) > 0$ ○ $g(4) \geq 0$ ○ $g(4) < 0$ ○ $g(4) \leq 0$ ○ $g(4) = 0$ ○ $g(4) = f(4)$

⋆515

Seien f und g stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Ferner seien $f(3) \cdot g(3)$ und $f(4)$ negativ. Aus welcher der folgenden Aussagen kann man folgern, dass die Funktion $f \cdot g$ im Intervall $(3, 4)$ mindestens eine Nullstelle hat?

○ $g(4) > 0$ ○ $g(4) \geq 0$ ○ $g(4) < 0$ ○ $g(4) \leq 0$ ○ $g(4) = 0$ ○ $g(4) \neq f(4)$

⋆516

Die Funktion $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$ ist auf ganz $[0, 10]$ stetig. Außerdem weiß man, dass $f(n) = (-2n)^n$ für $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ gilt. Wie viele Nullstellen muss f im Intervall $[0, 10]$ mindestens haben?

⋆517

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig. Außerdem weiß man, dass $f(n) = (n-1)^n$ für $n \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ gilt. Wie viele Nullstellen muss f mindestens haben?

518

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig. Außerdem weiß man, dass für ganze Zahlen m mit $|m| \leq 4$ immer $f(m) = \cos m$ gilt. Wie viele Nullstellen muss f mindestens haben?

519

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und hat an den folgenden Stellen denselben Funktionswert wie das Polynom $p(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$:

$$x = -2.3 \qquad x = -1.7 \qquad x = -0.4 \qquad x = 0.2 \qquad x = 1.1 \qquad x = 2.5$$

Wie viele Nullstellen muss f mindestens haben?

⋆520

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(2) = 42$ und $f(4) = 43$. Welche der folgenden Aussagen sind dann mit Sicherheit wahr?

- [ ] Der Wertebereich von f ist eine Teilmenge von $[42, 43]$.
- [ ] $[42, 43]$ ist eine Teilmenge des Wertebereichs von f.
- [ ] $42 \leq f(3) \leq 43$
- [ ] $42 < f(3) < 43$

⋆521

f ist eine stetige Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit $x^2 - 1 < f(x) < x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wie viele Nullstellen muss f mindestens haben?

Alle diese Aufgaben lassen sich mit dem Zwischenwertsatz lösen – siehe Seite 522[504] im Buch. Eine Skizze ist oft hilfreich.
Wenn gefragt ist, wie viele Nullstellen eine Funktion *mindestens* haben muss, dann ist null immer eine richtige Antwort, weil *jede* Funktion mindestens null Nullstellen hat. Sie können sich hoffentlich denken, dass es so nicht gemeint ist, sondern dass Sie die größtmögliche richtige Antwort geben sollen.

522

Geben Sie den folgenden Grenzwert an: $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^{\frac{\ln 6}{x} \cdot (\sin 2x) \cdot (\cos x)}$

Wie man sowas mit SymPy macht, wird im Buch auf Seite 520[502] erklärt.

⋆523

Sei f die folgende auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion. Geben Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ an.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

- ○ 0
- ○ 2
- ○ 42
- ○ Der Grenzwert existiert nicht.

Hier wird der Computer nicht helfen. Aber durch Nachdenken und das genaue Studieren der Definition kommt man weiter.

524

Geben Sie mithilfe des Bisektionsverfahrens die Lösung der Gleichung $e^x \sin x = 42$, die zwischen 5 und 8 liegt, auf zwei Stellen nach dem Komma an.

525

Die Funktionen $\sin(1 + x^2)$ und $x^3 - 1$ schneiden sich zwischen $x = -2$ und $x = 2$. Geben Sie die x-Koordinate des Schnittpunktes auf vier Stellen nach dem Komma genau an. [Hinweis: Bisektionsverfahren]

Siehe dazu Aufgabe 775[744] im Buch.

43. Reihen: unendliche Summen

⋆526

Geben Sie die ersten drei Partialsummen der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ an.

⋆527

Geben Sie die ersten drei Partialsummen der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$ an.

⋆528

Die erste Partialsumme von $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3}{2k+3}$ ist $\frac{3}{7}$. Geben Sie die vierte Partialsumme an.

Hier geht es offenbar nur um das Üben des neuen Begriffs.

529

Geben Sie die größte Partialsumme der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5-k}{k^3}$ an.

Eine ähnliche Aufgabe wie die beiden davor. Nur muss man hier tatsächlich ein bisschen nachdenken und die ersten paar Reihenglieder mal aufschreiben.

530

Geben Sie den Wert der (konvergenten) Reihe $\displaystyle\sum_{k=6}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ an.

531

Geben Sie den Wert der (konvergenten) Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3}{5^k}$ an.

Das Berechnen von Reihensummen mit SymPy wird im Buch auf Seite 537[519] erläutert.

532

Welchen Wert muss q haben, damit die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ gegen 42 konvergiert?

533

Welchen Wert muss n haben, damit die Reihe $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{2}{3^k}$ gegen $1/27$ konvergiert?

534

Welchen Wert muss a haben, damit die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a \ln b)^k}{k!}$ gegen b^2 konvergiert?

535

Welchen Wert muss b haben, damit die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a \ln b^2)^k}{k!}$ gegen 2^a konvergiert?

536

Welchen Wert muss a haben, damit die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a \ln b^2)^k}{k!}$ gegen b^{10} konvergiert?

537

Welchen Wert muss k haben, damit die Reihe $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ gegen 42^{-1} konvergiert?

Auch hier kann Ihnen SymPy helfen. Sie müssen nach dem Ermitteln der Reihensumme aber jeweils noch eine einfache Gleichung lösen.

538

Geben Sie das kleinste $n \in \mathbb{N}$ an, für das $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ größer als 10 ist.

Hier geht es um die harmonische Reihe, die im Buch ab Seite 531[513] besprochen wird. Man schreibt hier am besten eine kleine Python-Funktion, die den gesuchten Wert ermittelt.

⋆539

Kreuzen Sie die Reihen an, die für *kein* $a > 0$ konvergieren.

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+a}{7n}$ ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n^2} - 1\right)$ ☐ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3a^n}{n!}$ ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$

Hier kann man sich zunächst fragen, ob man es mit einer der Reihen zu tun hat, die ab Seite 535[516] im Buch vorgestellt werden. Außerdem kann man in einigen Fällen auch das Nullfolgenkriterium anwenden, das auf Seite 534[515] im Buch vorgestellt wird.

⋆540

Kreuzen Sie die Reihen an, die absolut konvergieren.

☐ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-42)^n}{n!}$ ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+n}$ ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{2n}$

Absolute Konvergenz wird im Buch auf Seite 536[518] besprochen.

541

Geben Sie die kleinste natürliche Zahl n an, für die sich π^2 und $\sum_{k=1}^{n} 6k^{-2}$ um weniger als 10^{-4} unterscheiden.

Hier geht es um das *Basler Problem* – siehe Seite 535[517] im Buch. Siehe auch Aufgabe 185 weiter oben.

542

Geben Sie die kleinste natürliche Zahl n an, für die sich $\mathrm{e}^3 + \mathrm{e}^{-3}$ und

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2 \cdot 9^k}{(2k)!}$$

um weniger als 10^{-6} unterscheiden.

Eine Variante der vorherigen Aufgabe.

543

Wie viele Summanden braucht man *mindestens*, damit sich die folgende Summe um weniger als 10^{-3} von π unterscheidet?

$$4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \dots$$

544

Wie viele Faktoren braucht man *mindestens*, damit sich das folgende Produkt um weniger als 10^{-3} von $\pi/2$ unterscheidet?

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdot\ldots$$

Solche Formeln kommen im 52. Kapitel vor. Aber Sie müssen das Kapitel nicht gelesen haben, um die Aufgaben lösen zu können. Das geht mit der gleichen Methode wie bei Aufgabe 541 oben.

44. Die Exponentialfunktion

⋆545

Geben Sie den Grenzwert dieser Folge an:

$$\left(\exp\left(\frac{2n^2+2n^4+3n+4n^4-2\pi}{2017-n^5+6n^4+4n}\right)\right)$$

SymPy kann das natürlich berechnen. Schneller geht es aber, wenn man sich an Aufgabe 299 weiter oben erinnert und die Rechenregel für Folgen von Seite 524[506] im Buch verwendet.

⋆546

Welche der folgenden Aussagen sind für alle positiven reellen Zahlen a und b wahr?

- ☐ $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- ☐ $\ln(a+b) = \ln a \cdot \ln b$
- ☐ $\ln(a^b) = b\ln a$
- ☐ $\ln(a^b) = a\ln b$
- ☐ $\ln(1/a) = (\ln a)^{-1}$
- ☐ $\ln(1/a) = -\ln a$

⋆547

Welche der folgenden Aussagen sind für alle positiven reellen Zahlen a und b wahr?

- ☐ $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$
- ☐ $\ln(a-b) = \ln a/\ln b$
- ☐ $\ln(1/a) = (\ln a)^{-1}$
- ☐ $\ln(1/a) = -\ln a$
- ☐ $a^b = \mathrm{e}^{a\ln b}$
- ☐ $a^b = \mathrm{e}^{b\ln a}$

Siehe Seite 544[526] im Buch und dort insbesondere auch die Aufgaben 803[770] und 804[771].

⋆548

Seien b und c positive reelle Zahlen und $x = \mathrm{e}^{b\ln c}$. Geben Sie einen möglichst einfachen Ausdruck für $x^{-2/b}$ an, in dem weder x und e noch Logarithmen vorkommen.

Hier braucht man die Definition (44.2) von Seite 544[526] im Buch und bekannte Rechenregeln für Potenzen.

$\star$549

Welcher der folgenden Werte löst die Gleichung $a^x = 5/a^2$?

◯ $(\log_a 5) - 2$ ◯ $(\log_a 5) + 2$ ◯ $\log_a(5-2)$ ◯ $\log_a(5+2)$

◯ $\sqrt[a]{5} - 2$ ◯ $\sqrt[a]{5} + 2$ ◯ $\sqrt[a]{5-2}$ ◯ $\sqrt[a]{5+2}$

$\star$550

Welcher der folgenden Werte löst die Gleichung $7^x = 2^{2x+1}$?

◯ $\log_7 2$ ◯ $\ln 7/4$ ◯ $\sqrt[4]{7/2}$ ◯ $\log_{7/4} 2$ ◯ 42

$\star$551

Sei $a > 0$. Welcher der folgenden Werte löst die Gleichung $a^x = 42a$?

◯ $x = \dfrac{\ln a}{\ln 42} - 1$ ◯ $x = \dfrac{\ln a}{\ln 42} + 1$ ◯ $x = \sqrt[a]{42+1}$ ◯ $x = \sqrt[a]{42} - 1$

◯ $x = \dfrac{\ln 42}{\ln a} - 1$ ◯ $x = \dfrac{\ln 42}{\ln a} + 1$ ◯ $x = \sqrt[a]{42-1}$ ◯ $x = \sqrt[a]{42} + 1$

Bei diesen Aufgaben geht es darum, dass Logarithmen als Umkehrfunktionen definiert sind – siehe Seite 545[527] im Buch.

552

Eine der größten bisher mit Computerhilfe gefundenen Primzahlen hat ca. $9.38 \cdot 10^6$ Dezimalstellen. Wie viele Stellen hat ihre Binärdarstellung? Geben Sie diese Zahl auf zwei signifikante Stellen gerundet an.

Auch das hat etwas mit Logarithmen zu tun. Und mit Dingen, die Sie bereits im ersten Semester gelernt haben.

$\star$553

Welchen Wert muss a haben, damit die beiden folgenden Funktionen identisch sind?

$$f\colon \begin{cases} (0,\infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \log_7 \sqrt[3]{x} \end{cases} \qquad g\colon \begin{cases} (0,\infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{a \ln x}{\ln 7} \end{cases}$$

$\star$554

Führen Sie den folgenden Code *nicht* aus, sondern denken Sie nur über ihn nach:

```
s = 0
for i in range(10**10):
    s += 2*log(i+1)
```

Welchen Wert hätte `s` am Ende, wenn alle Berechnungen exakt durchgeführt würden?

$$\ln(10^{20}!) \qquad \ln\big((10^{10}!)^2\big) \qquad \big(\ln(10^{10}!)\big)^2$$

$$\sum_{k=1}^{10^{10}} \ln(2k+2) \qquad \ln\Big(\sum_{k=1}^{10^{10}} 2k\Big) \qquad 2\ln\Big(\sum_{k=1}^{10^{10}} k\Big)$$

Bei diesen beiden Aufgaben kann man die Rechenregeln für Logarithmen gut gebrauchen.

45. Integrale: kontinuierliche Summen

⋆555

Seien f und g integrierbare Funktionen mit $\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 17$ und $\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x = -3$. Ferner sei g gerade. Geben Sie $\int_{-3}^{3}(f(x) + 2g(x))\,\mathrm{d}x$ an.

Hier geht es um die einfachen Rechenregeln für Integrale, die man auf den Seiten 557[539] und 580[540] im Buch findet. Was eine *gerade* Funktion ist, wurde auf Seite 280[264] im Buch definiert.

556

Geben Sie $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ auf zwei Stellen nach dem Komma an.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \exp(-x^2) & x \le 0 \\ \sqrt{\ln(x+1)} & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Es bietet sich an, die im Buch vorgestellte Funktion `quad` zu verwenden.

557

Geben Sie die größte natürliche Zahl n an, für die $n < \displaystyle\int_0^4 42\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ gilt.

558

Geben Sie die kleinste natürliche Zahl n an, für die $42 < \displaystyle\int_0^4 n\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ gilt.

559

Geben Sie die kleinste natürliche Zahl n an, für die $42 < \displaystyle\int_0^{100} \exp(-t^2/n)\,\mathrm{d}t$ gilt.

560

Geben Sie die kleinste natürliche Zahl n an, für die $\displaystyle\int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\sqrt{t^3}+2t+1}}$ größer als 10 ist.

561

Geben Sie eine Zahl x an, für die $\displaystyle\int_{-x}^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ sich um weniger als 0.01 von 0.5 unterscheidet.

562

Sei $g_n = \displaystyle\int_{-n}^{n} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$. Geben Sie die kleinste natürliche Zahl n an, für die sich g_n^2 um weniger als 0.0001 von π unterscheidet.

563

Geben Sie einen Bruch a/b an, der die beiden folgenden Eigenschaften hat:

(i) $\displaystyle\int_0^{a/b} 42\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ unterscheidet sich um weniger als 0.01 von 30.

(ii) Für den Nenner b gilt: $0 < b \leq 1000$.

564

In der Wahrscheinlichkeitstheorie tauchen manchmal solche Ausdrücke auf:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mu-x}^{\mu+x} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}t$$

Berechnen Sie den Wert $P(2)$ auf zwei Stellen nach dem Komma, wobei $\mu = 10$ und $\sigma = 3.6$ gelten soll.

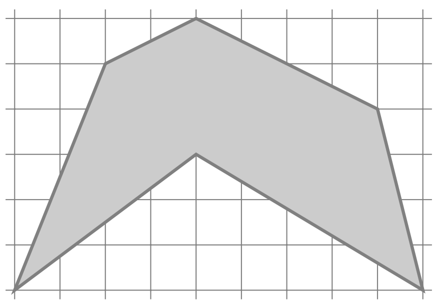
565

Das Integral $\displaystyle\int_0^x t\sin t\,\mathrm{d}t$ ist für $x = 5$ negativ und für $x = 4$ positiv. Finden Sie eine Zahl $x \in [4, 5)$, für die der Betrag des Integrals kleiner als 10^{-5} ist. Geben Sie die ersten drei Nachkommastellen dieser Zahl ein. [Hinweis: Das Integral hängt stetig von x ab.]

Das sind alles Approximationsaufgaben, die ja in unterschiedlichen Varianten schon seit Aufgabe 140 immer wieder auftauchen. Auch hier kann `quad` sehr hilfreich sein. Evtl. hilft auch das Bisektionsverfahren.

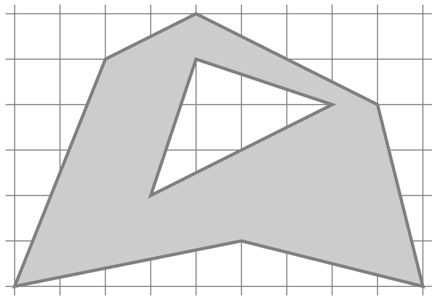
⋆566

Geben Sie die grau markierte Fläche an. (Die Fläche eines Gitterquadrats ist 1. Alle Eckpunkte liegen auf Schnittpunkten von Gitterlinien.)



⋆567

Geben Sie die grau markierte Fläche an. (Die Fläche eines Gitterquadrats ist 1. Alle Eckpunkte liegen auf Schnittpunkten von Gitterlinien.)



Hier geht es offenbar um die Gaußsche Trapezformel.

568

Geben Sie den exakten Wert von

$$\pi \cdot \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(5t)^2}\,\mathrm{d}t\Big)^{-2}$$

in möglichst einfacher Form an.

Hier geht es eigentlich nur darum, den Ausdruck unfallfrei einem Computeralgebrasystem zu übergeben.

46. Ableitungen: lineare Approximationen

569

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2$. Bekanntlich kann man $f'(2)$ durch

$$g(h) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

approximieren, wenn h sehr klein ist. Geben Sie die kleinste natürliche Zahl n an, für die $g(10^{-n})$ sich um weniger als 10^{-4} von $f'(2)$ unterscheidet.

570

Berechnen Sie numerisch (also ohne SymPy) die Ableitung der folgenden Funktion an der Stelle $x = 0.425$ auf zwei Stellen nach dem Komma. (Betrachten Sie die Funktion als „Black Box“.)

```
from math import erfc, lgamma, expm1
f = lambda x: lgamma(erfc(expm1(x))+3)
```

Und schon wieder Approximationsaufgaben. . .

⋆571

An welcher Stelle hat die Funktion $x \mapsto e^{x^2+2x}$ eine waagerechte Tangente?

⋆572

Für welches x hat die Funktion $x \mapsto \ln(x^2 - 4x + 5)$ eine waagerechte Tangente?

⋆573

Welchen Wert muss a haben, damit die Funktion $x \mapsto e^{x^2+ax}$ an der Stelle $x = 3$ eine waagerechte Tangente hat?

⋆574

Sei $f(x) = 2e^x$ und g die Ableitung der Funktion $x \mapsto f(x)^2$. Geben Sie die Steigung von g an der Stelle $x = 0$ an.

⋆575

Sei $f(x) = x^2 - x + 7$ und $g(x) = -x^2/2 + 2x - 5$. An welcher Stelle x haben f und g dieselbe Steigung?

⋆576

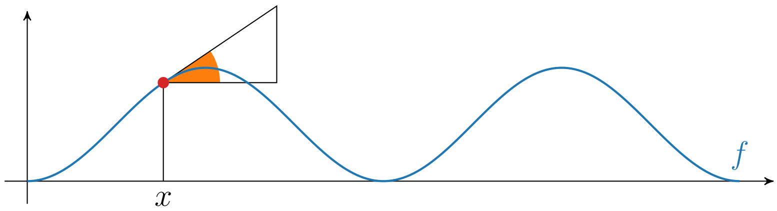
Sei $f(x) = \exp(a^2x) \cdot \sin(ax)$. Welchen Wert muss a haben, damit $f'(0) = 4$ gilt?

⋆577

An welcher Stelle hat die auf $(0, \infty)$ definierte Funktion $x \mapsto -\ln(42/x)$ die Ableitung $1/7$?

578

Die Funktion f ist durch $f(x) = \sin^2 x$ definiert. Geben Sie den Steigungswinkel des Funktionsgraphen von f an der Stelle $x = 6/5$ in Grad auf zwei Stellen nach dem Komma an.



Offenbar geht es bei all diesen Aufgaben um die Ableitung und deren geometrische Bedeutung. Alle Ableitungen sollten Sie im Prinzip schon mit Schulwissen und ohne Computerhilfe berechnen können. Im Buch (Seite 577[559]) wird aber auch gezeigt, wie SymPy Ihnen dabei helfen kann.

⋆579

Welche der folgenden jeweils auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen haben nirgends eine waagerechte Tangente?

$$f_1(x) = 2x^2 - 3x + 5 \qquad f_2(x) = e^{2x} \qquad f_3(x) = e^{x^2} \qquad f_4(x) = -3x + 42$$

⋆580

An wie vielen Stellen besitzt die Funktion $x \mapsto \exp(x^3 - 12x)$ eine waagerechte Tangente?

Sie kennen Funktionen, die nie den Funktionswert null haben. Und wie ist das mit Produkten?

581

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \mathrm{e}^x(3x - x^2 - 1)$ definiert. Auf welchem Intervall hat diese Funktion eine positive Steigung?

- ◯ $(-2, 1)$
- ◯ $(1, 3)$
- ◯ $(-2, -1)$
- ◯ $(-\infty, -2)$
- ◯ $(1, \infty)$
- ◯ $(-1, 2)$

582

Zwischen 1 und 2 hat die Ableitung von $\ln(x^2 + 2x)$ genau einmal einen ganzzahligen Wert. Geben Sie diesen Wert an.

Hinweis für diese beiden Aufgaben: Kapitel 41.

⋆583

Seien f und g Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $(0, \infty)$, die auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar sind. Welche der folgenden Funktionen sind dann ebenfalls auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar?

☐ $x \mapsto f(x) + g(x)$ ☐ $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ ☐ $x \mapsto f(x)/g(x)$ ☐ $x \mapsto \ln(f(x))$

Die Regeln, die im 46. Kapitel besprochen werden, sagen nicht nur etwas darüber aus, wie man die Ableitungen von Summen, Produkten, etc. berechnet, sondern auch darüber, ob diese Ableitungen überhaupt existieren.

⋆584

Seien f und g Funktionen von $[3, 4]$ nach $\mathbb{R}$ mit $f(3) = g(4)$ und $f(4) = g(3)$. Welche der folgenden Bedingungen garantieren, dass f und g mindestens einen Punkt gemeinsam haben?

- ☐ f und g sind beide differenzierbar.
- ☐ f und g sind beide stetig.
- ☐ f und g sind beide integrierbar.
- ☐ f ist stetig und g differenzierbar.
- ☐ f ist stetig und g integrierbar.
- ☐ f ist differenzierbar und g integrierbar.

Hier geht es um den Zwischenwertsatz und den Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit, der am Ende des 46. Kapitels thematisiert wird.

48. Der Fundamentalsatz der Analysis

585

Berechnen Sie mit SymPy den Wert a_8/a_6, wobei a_n folgendermaßen definiert sein soll:

$$a_n = \int_0^\infty t^{n-1} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$$

Wenn man gelernt hat, wie man SymPy zum (exakten) Integrieren einsetzen kann, muss man diese Aufgabe eigentlich nur unfallfrei abtippen können,

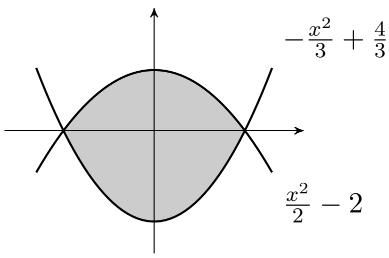
⋆586

Sei F die Stammfunktion von $f(x) = x^4$ mit $F(1) = 16/5$. Geben Sie $F(3)$ an.

Hier geht es darum, dass es mehr als eine Stammfunktion gibt. Wodurch unterscheiden sich verschiedene Stammfunktionen von f?

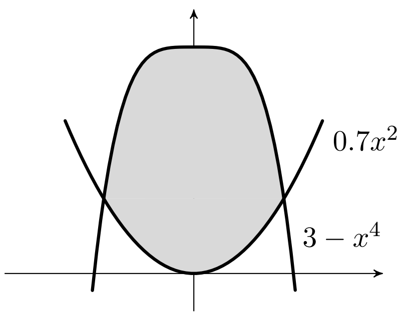
587

Geben Sie die grau markierte Fläche an.



588

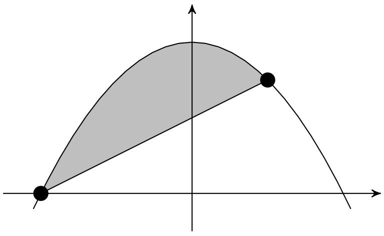
Geben Sie die grau markierte Fläche auf zwei Stellen nach dem Komma an.



Die gesuchte Fläche ergibt sich als Summe bzw. Differenz zweier Integrale. Zunächst muss man allerdings die Integrationsgrenzen herausfinden. Dabei kann einem SymPys Funktion `solve` helfen.

589

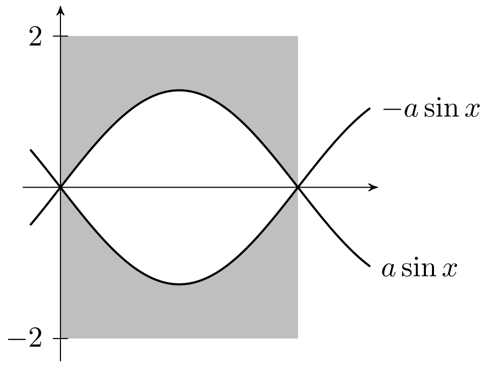
In der folgenden Skizze sehen Sie den Graphen der durch $x \mapsto 2 - x^2/2$ definierten Funktion. Die beiden hervorgehobenen Punkte haben die x-Koordinaten -2 und 1. Geben Sie den exakten Wert der grau markierten Fläche an.



So ähnlich wie die beiden Aufgaben vorher. Allerdings muss man erst mal die Geradengleichung haben.

590

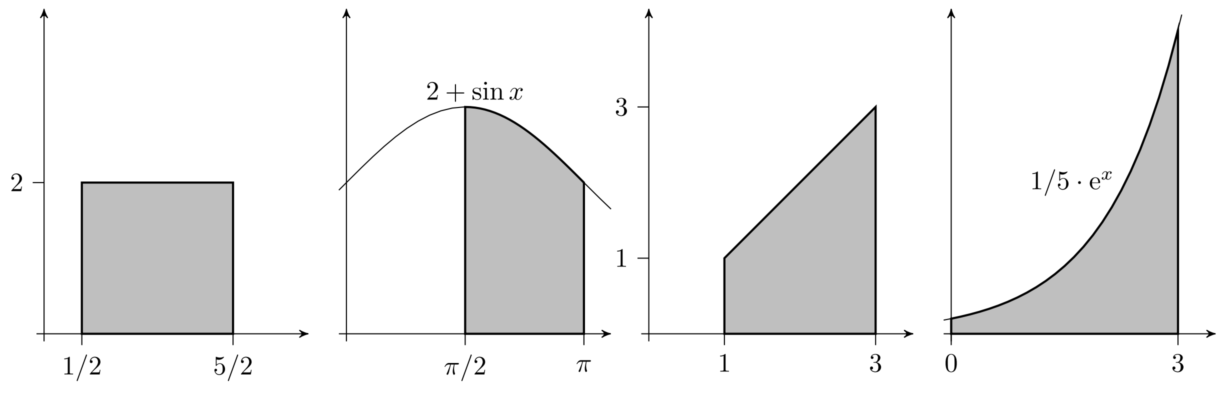
Was muss man für a einsetzen, damit die graue Fläche den Wert 10 hat? Geben Sie a auf zwei Stellen nach dem Komma an.



Wenn Sie die beiden vorherigen Aufgaben lösen konnten, dann dürfte diese hier auch kein Problem sein. Wenn Sie exakt integrieren, können sie einen von a abhängenden Wert für die Fläche erhalten.

591

Markieren Sie deutlich erkennbar, welche von den folgenden vier Flächen die größte ist.



Auch hier muss man integrieren, um Flächen zu berechnen. Die Flächen sind natürlich alle fast gleich groß, damit die Aufgabe nicht zu einfach ist.

592

Sei $\text{Si}(x)$ der Integralsinus. Geben Sie den Wert $\text{Si}'(3\pi/2)$ an.

593

Geben Sie a und b so an, dass der PYTHON-Code

```
from sympy import *
2*sqrt(pi)*erf(3)
```

dieses Integral berechnet:

$$\int_{-b}^{b} ae^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Bei diesen beiden Aufgaben geht es um *spezielle Funktionen*, die am Ende des 48. Kapitels besprochen werden. Wenn Sie nicht wissen, wie Sie an die zweite Aufgabe herangehen sollen, dann geben Sie das Integral einfach mal in SYMPY ein.

49. Polynome

⋆594

Kreuzen Sie die Aussagen an, die wahr sind.

- ☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} -5x^2 + 12x - 27 = \infty$
- ☐ $\lim\limits_{x\to\infty} x^7 = \infty$
- ☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} \sum_{k=0}^{5} x^k = \infty$
- ☐ $\lim\limits_{x\to\infty} (1-x)^3 = \infty$

Siehe Aufgabe 878[843] im Buch.

⋆595

p und q seien Polynome mit den Graden 7 und 9. Welchen Grad hat die Ableitung $(pq)'$?

⋆596

p und q seien beide Polynome n-ten Grades mit $n \in \mathbb{N}^+$. Geben Sie den Grad der Ableitung des Polynoms $p \cdot q$ an.

⋆597

p sei ein Polynom n-ten Grades mit $n \in \mathbb{N}^+$. Geben Sie den Grad der Ableitung des Polynoms $p \cdot p$ an.

Hier geht es um den Grad des Produktes von Polynomen (siehe Seite 606[588] im Buch) und darum, wie sich der Grad durch Ableiten ändert.

⋆598

p und q seien beide Polynome fünften Grades und r sei die zweite Ableitung des Polynoms $p \cdot q$. Wie viele verschiedene Nullstellen kann r maximal haben?

Den Zusammenhang zwischen dem Grad eines Polynoms und der maximalen Anzahl seiner Nullstellen finden Sie im Buch auf Seite 611[591].

⋆599

Sei p ein Polynom sechsten Grades. Welche der folgenden Aussagen sind auf jeden Fall wahr?

- ☐ p kann nicht mehr als sechs verschiedene Nullstellen haben.
- ☐ p hat genau sechs verschiedene Nullstellen.
- ☐ p hat mindestens sechs verschiedene Nullstellen.
- ☐ Mindestens eine der Nullstellen von p ist echt komplex.
- ☐ Alle Nullstellen von p sind komplex.
- ☐ Mindestens eine der Nullstellen von p ist reell.

Hier geht es um ähnliche Fragen wie bei der vorherigen Aufgabe. Bei den Aussagen, die nicht wahr sind, kann man sich mithilfe von Linearfaktoren jeweils ganz einfach Gegenbeispiele konstruieren.

600

Schreiben Sie $x^3 + 5x^2 + 4x - 10$ als Produkt von Linearfaktoren.

Siehe Seite 611[591] im Buch und insbesondere Aufgabe 888[851] dort.

601

Geben Sie das eindeutig bestimmte Polynom dritten Grades an, das durch die vier Punkte $(-1, 7)$, $(0, 5)$, $(1, 5)$ und $(2, 19)$ geht.

602

Sei p das eindeutig bestimmte Polynom maximal dritten Grades, das durch die vier Punkte $(-2, -30)$, $(-1, -3)$, $(0, 10)$ und $(1, 21)$ geht. Geben Sie $p(2)$ an.

603

Sei p das eindeutig bestimmte Polynom maximal dritten Grades, das durch die vier Punkte $(-2, -30)$, $(-1, a)$, $(0, 10)$ und $(1, 21)$ geht. Welchen Wert muss a haben, damit $p(2) = 58$ gilt?

604

Sei p das eindeutig bestimmte Polynom maximal dritten Grades, das durch die vier Punkte $(-2,-30)$, $(-1,a)$, $(0,10)$ und $(1,21)$ geht. Welchen Wert muss a haben, damit p den Grad zwei hat?

605

Sei p das eindeutig bestimmte Polynom maximal dritten Grades, das durch die vier Punkte $(-2,-10)$, $(0,3)$, $(1,7)$ und $(3,9)$ geht. Geben Sie $\lim_{x\to\infty} p(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} p(x)$ an.

> Mehrere Aufgaben zur Polynominterpolation, die ausführlich am Ende des 49. Kapitels besprochen wird.

606

Sei p das eindeutig bestimmte Polynom maximal dritten Grades, das durch die vier Punkte $(1,0)$, $(3,0)$, $(5,a)$ und $(7,0)$ geht. Welches der folgenden Intervalle ist die Menge aller $a \in \mathbb{R}$, für die $\lim_{x\to-\infty} p(x) = \infty$ gilt?

- ◯ $(0,\infty)$
- ◯ $[0,\infty)$
- ◯ $(-\infty,0)$
- ◯ $(-\infty,0]$
- ◯ $(16,\infty)$
- ◯ $(-\infty,-16)$

> Auch hier geht es um Polynominterpolation. Es sollte ein Polynom herauskommen, in dem a vorkommt, und die Frage ist, für welche a das Polynom den Grenzwert aus der Aufgabenstellung hat.

607

Sei $f(x) = \cos x$ und p das Polynom zweiten Grades, das f an den Stellen -2, 0 und 2 interpoliert. Geben Sie den folgenden Wert auf zwei Stellen nach dem Komma an:

$$\sqrt{\int_{-2}^{2} (f(x) - p(x))^2 \,\mathrm{d}x}$$

608

Sei $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ und p das Polynom zweiten Grades, das f an den Stellen -3, 0 und 3 interpoliert. Geben Sie den folgenden Wert auf zwei Stellen nach dem Komma an:

$$\sqrt{\int_{-3}^{3} (f(x) - p(x))^2 \,\mathrm{d}x}$$

609

Sei $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$ und p das Polynom zweiten Grades, das f an den Stellen -4, 0 und 4 interpoliert. Geben Sie den folgenden Wert auf zwei Stellen nach dem Komma an:

$$\sqrt{\int_{-4}^{4} (f(x) - p(x))^2 \,\mathrm{d}x}$$

Mit solchen Ausdrücken werden wir es im Kapitel über Fourier-Analysis zu tun haben. Hier geht es aber nur um eine Kombination aus Polynominterpolation und Integration. Beachten Sie, dass man aus der Formulierung „auf zwei Stellen nach dem Komma“ schließen kann, dass es nicht um einen exakten Wert geht. Man kann also die Funktion `quad` statt SymPys `integrate` verwenden.

⋆610

$f(x) = 3(x+2)(x-1)$ und $g(x) = a(x-2)(x-1)$ haben an der Stelle $x = 1$ beide eine Nullstelle. Sie sollen (als Spline) so zusammengesetzt werden, dass sie dort auch dieselbe Ableitung haben. Welchen Wert muss a dafür haben?

Um Splines geht es im Buch ab Seite 617[597]. Hier muss man offenbar nur die Ableitungen der beiden Polynome berechnen und dann nach a auflösen.

611

Die beiden folgenden Polynome haben an der Stelle a denselben Funktionswert:

$$p(x) = 3x^3 - (3a+9)x^2 + (9a+6)x - 6a + 2$$
$$q(x) = 2x^3 - 6ax^2 + 6a^2x - 2a^3 + 2$$

p und q sollen dort (als Spline) so zusammengesetzt werden, dass sie bei a auch dieselbe Ableitung haben. Was ist der größte Wert, den man für a wählen kann?

Die Aufgabe ähnelt der vorherigen, aber man kann schon aus der Aufgabenstellung schließen, dass es mehr als einen möglichen Wert für a geben muss.

⋆612

Geben Sie ein Polynom vierten Grades an, das nur reelle Nullstellen hat und das die x-Achse bei $x = 1$ und $x = -2$ schneidet und sie sonst nirgends schneidet oder berührt.

⋆613

Sei p ein monisches Polynom vierten Grades, das nur reelle Nullstellen hat und das die x-Achse bei $x = 1$ und $x = -1$ und sonst nirgends schneidet bzw. berührt. Geben Sie alle Werte an, die für das Absolutglied von p infrage kommen.

In beiden Fällen kann man sich die entsprechenden Polynome aus Linearfaktoren zusammenbauen.

⋆614

Sei p ein Polynom zweiten Grades und q ein Polynom fünften Grades. Welche der folgenden Aussagen sind auf jeden Fall wahr?

- ☐ p und q können an nicht mehr als 5 Stellen übereinstimmen.
- ☐ $\lim_{x\to\infty}(p(x)+q(x)) = -\lim_{x\to-\infty}(p(x)+q(x))$
- ☐ $\lim_{x\to\infty}(p(x)\cdot q(x)) = -\lim_{x\to-\infty}(p(x)\cdot q(x))$

☐ $\lim_{x\to\infty} (p(x)/q(x)) = 0$

Für einen der vier Punkte sollte man sich an Kapitel 37 erinnern. Ein anderer hat etwas mit Polynominterpolation zu tun.

51. Potenz- und Taylorreihen

★615

Sei p ein Polynom vierten Grades und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = T_5 p(x; 0) - T_4 p(x; 0)$ definiert. Geben Sie den Wert $f(42)$ an.

★616

Sei p ein Polynom zweiten Grades, q ein Polynom fünften Grades und die Funktion $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $r(x) = p(x) \cdot q(x) + 42$ definiert. Welchen Grad hat das Taylorpolynom $T_9 r(x; 0)$?

Die Taylorpolynome von Polynomen sind besonders einfach. Siehe dazu auch Fußnote 3 auf Seite 631[611] im Buch.

★617

Sei g die Sinusfunktion und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = T_{42} g(x; 0) - T_{41} g(x; 0)$ definiert. Geben Sie den Wert $f(42)$ an.

Siehe dazu Aufgabe 912[874] im Buch.

★618

Sei f die durch $f(x) = (x - 1)^{-1}$ für $x \neq 1$ definierte Funktion. Sie sollen dazu das Taylorpolynom $T_2 f(x; 0)$ in der Form $ax^2 + bx + c$ angeben. Netterweise hat jemand für Sie schon die Rechenarbeit erledigt:

```
from sympy import *
x = symbols("x")

[diff(1/(x-1), x, k).subs(x, 0) for k in range(3)]
```

Das Ergebnis ist `[-1, -1, -2]`. Wie sieht also $T_2 f(x; 0)$ aus?

Da hier schon alles auf dem Silbertablett serviert wird, muss man eigentlich nur die Definition des Taylorpolynoms verstanden haben.

★619

Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die wahr sind:

☐ Jede stetige Funktion ist integrierbar.

- [ ] Jede integrierbare Funktion ist differenzierbar.
- [ ] Jede stetige Funktion ist differenzierbar.
- [ ] Jede integrierbare Funktion ist stetig.
- [ ] Jede differenzierbare Funktion ist integrierbar.
- [ ] Jede differenzierbare Funktion ist stetig.

⋆620

Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die wahr sind:

- [ ] Jede integrierbare Funktion ist stetig.
- [ ] Jede stetige Funktion ist analytisch.
- [ ] Jede stetige Funktion ist integrierbar.
- [ ] Jede analytische Funktion ist stetig.
- [ ] Jede integrierbare Funktion ist analytisch.
- [ ] Jede analytische Funktion ist integrierbar.

⋆621

Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die wahr sind:

- [ ] Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion ist stetig.
- [ ] Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion ist differenzierbar.
- [ ] Die Ableitung einer stetig differenzierbaren Funktion ist stetig.
- [ ] Die Ableitung einer stetig differenzierbaren Funktion ist differenzierbar.
- [ ] Die Ableitung einer glatten Funktion ist stetig.
- [ ] Die Ableitung einer glatten Funktion ist differenzierbar.
- [ ] Die Ableitung einer glatten Funktion ist glatt.

Das, was man für diese Aufgabe wissen muss, steht entweder im 51. Kapitel oder wurde schon in den Kapiteln zur Differential- und Integralrechnung besprochen.

622

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch $f(x) = \mathrm{e}^{2x^4} + \mathrm{e}^{x^2}$ definiert. Geben Sie den Koeffizienten zu x^4 im Taylorpolynom $T_4 f(x; 0)$ an.

Siehe Aufgabe 618 oben.

⋆623

In einem Buch ist von einer Funktion f die Rede, die „hinreichend glatt“ sein soll. Später taucht in dem Buch das Taylorpolynom $T_5 f(x;1)$ auf. Welche von den folgenden Eigenschaften muss f an der Stelle 1 *mindestens* haben, damit man dieses Polynom berechnen kann? (Kreuzen Sie nur *eine* Aussage an!)

- ○ f muss 5-mal differenzierbar sein.
- ○ f muss 5-mal stetig differenzierbar sein.
- ○ f muss 6-mal differenzierbar sein.
- ○ f muss glatt sein.
- ○ f muss analytisch sein.

Siehe dazu Fußnote 4 auf Seite 631[611] im Buch.

★624

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-4)^k$ hat den Konvergenzradius 2. Welche der folgenden Aussagen folgen daraus mit Sicherheit?

- ☐ Die Reihe konvergiert für $x=-1$.
- ☐ Die Reihe konvergiert für $x=1$.
- ☐ Die Reihe konvergiert für $x=2$.
- ☐ Die Reihe konvergiert für $x=3$.

Mehr dazu ab Seite 639[619] im Buch. Achten Sie dort insbesondere auf das Vorzeichen in der Darstellung (51.7).

53. Die Exponentialfunktion im Komplexen

625

Wenn man $(1-\mathrm{i}\sqrt{3})/2$ als $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ schreibt, welchen Wert hat dann die reelle Zahl x?

626

Wenn man $3-5\mathrm{i}$ als $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ mit $r,x\in\mathbb{R}$ schreibt, welchen Wert hat dann r?

627

In der Gleichung $2+3\mathrm{i}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ sei $r\in\mathbb{R}$ und $x\in[0,2\pi)$. Geben Sie x auf drei Stellen nach dem Komma an.

★628

Sei a eine positive reelle Zahl und $z=\mathrm{e}^{a\mathrm{i}}$. Geben Sie das Argument von $2z^3$ an.

Im Prinzip sind das alles Aufgaben zur Polardarstellung komplexer Zahlen. Siehe dazu Seite 669[647] im Buch.

⋆629

Welche der folgenden Funktionen haben als Wertebereich den kompletten Einheitskreis?

$$f_1 : \begin{cases} [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \end{cases} \qquad f_2 : \begin{cases} [0, 2\pi) \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} \end{cases} \qquad f_3 : \begin{cases} [0, \pi) \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} \end{cases} \qquad f_4 : \begin{cases} [0, 2\pi) \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \end{cases}$$

⋆630

Welche der folgenden Funktionen sind injektiv?

$$f_1 : \begin{cases} [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \end{cases} \qquad f_2 : \begin{cases} [0, 2\pi) \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} \end{cases} \qquad f_3 : \begin{cases} [0, \pi) \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} \end{cases} \qquad f_4 : \begin{cases} [0, 2\pi) \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \end{cases}$$

⋆631

Genau eine Zahl kommt als Wert der folgenden Funktion doppelt vor. Welche ist es?

$$f : \begin{cases} [-\pi, \pi] \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \end{cases}$$

> Alle drei Aufgaben haben etwas mit der Eulerformel zu tun. Siehe dazu insbesondere die Erläuterungen ab Seite 666[644] im Buch.

⋆632

Sei $z_k = a_k + b_k\mathrm{i}$ mit reellen Zahlen a_k und b_k. Was muss gelten, damit $\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$ auf dem Einheitskreis liegt? (Genau eine Antwort ist richtig.)

- ◯ $a_1 + a_2$ muss reell sein.
- ◯ b_1 und b_2 müssen identisch sein.
- ◯ $b_1 + b_2$ muss reell sein.
- ◯ a_1 und $-a_2$ müssen identisch sein.
- ◯ a_1 und a_2 müssen identisch sein.
- ◯ b_1 und $-b_2$ müssen identisch sein.

> Berechnen Sie $\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$ mithilfe der Rechengesetze für Potenzen. Dann schauen Sie sich die Formeln am Ende von Seite 669[647] im Buch an.

⋆633

x ist eine Ihnen nicht bekannte reelle Zahl und z hat den Wert $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$. Welche Fläche hat das Viereck mit den Ecken z, $\mathrm{i}z$, $-z$ und $-\mathrm{i}z$?

> Hier geht es wieder um die geometrische Bedeutung der Multiplikation komplexer Zahlen. Machen Sie sich eine Skizze!

★634

Sei $x = 3^{3^{3^3}}$. Geben Sie den Wert $e^{i\pi x}$ an. (Achtung: x ist zu groß für Python!)

★635

Sei $x = 3^{3^{3^3}}$. Geben Sie den Wert i^x an. (Achtung: x ist zu groß für Python!)

Da man x nicht so einfach ausrechnen kann, geht es offenbar nur um eine bestimmte Eigenschaft von x, die man auch ohne Rechnen erkennen kann. Vielleicht schauen Sie sich noch mal die Grafik auf Seite 667[645] sowie die Tabelle auf Seite 665[643] im Buch an. (Zur Potenz siehe auch die Bemerkung zu Aufgabe 56 weiter oben.)

54. Fourier-Analysis

636

Die Vektoren $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{26} \cdot (5, 12, 13)^T$ und $\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{22}} \cdot (3, 2, -3)^T$ bilden ein Orthonormalsystem. Geben Sie den Punkt Q in $\mathbb{R}\mathbf{v} + \mathbb{R}\mathbf{w}$ an, der von $P = (1, 2, 3)$ den geringsten Abstand hat.

Siehe dazu Formel (54.3) im Buch.

637

Sei g die durch $g(x) = \sqrt[3]{1 + x^2}$ definierte Funktion, die man nicht analytisch integrieren kann. Welche der Fourierkoeffizienten a_0, a_1, a_2, b_1 und b_2 kann man ohne Rechnen angeben?

Lassen Sie sich g plotten. Hat die Funktion irgendwelche Symmetrien? Siehe Seite 673 f.[651 f.] im Buch.

★638

Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die falsch sind:

- ☐ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, \mathrm{d}x = 0$ gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$.
- ☐ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, \mathrm{d}x = 0$ gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$.
- ☐ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, \mathrm{d}x = 0$ gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$.
- ☐ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, \mathrm{d}x = 1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.
- ☐ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, \mathrm{d}x = 1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Siehe dazu Aufgabe 953[915] im Buch.

639

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch $f(x) = 3x - 42$ definiert. Geben Sie den Koeffizienten zu $\sin 2x$ im Fourierpolynom $F_2 f(x)$ an.

640

Sei $f(x) = 3\mathrm{e}^{-x^2}$. Geben Sie den Koeffizienten zu $\cos 2x$ im Fourierpolynom $F_2 f(x)$ auf zwei Stellen nach dem Komma an.

Wie man die Koeffizienten berechnet, steht im Buch auf Seite 678[656]. Beachten Sie, dass es bei einer Aufgabe um eine exakte Antwort und bei einer um eine Näherungslösung geht. Siehe dazu die Bemerkung hinter Aufgabe 609 weiter oben.

641

Im Kapitel über Fourier-Analysis haben wir den Abstand der Funktionen f und g so definiert:

$$\|f - g\| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

Berechnen Sie für die durch $f(x) = x^2$ definierte Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ den Abstand $\|f - F_2 f\|$ auf zwei Stellen nach dem Komma.

642

Im Kapitel über Fourier-Analysis haben wir den Abstand der Funktionen f und g so definiert:

$$\|f - g\| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^2 + 1$ definiert. Wie groß muss n mindestens sein, damit $\|f - F_n f\|$ kleiner als $1/10$ ist?

Sowas in der Art kam in Aufgabe 607 weiter oben schon mal vor. Der Unterschied ist nur, dass hier noch Fourierpolynome vorkommen. Verwenden Sie `quad`, weil Sie den exakten Wert des Integrals in beiden Aufgaben nicht benötigen.

⋆643

Sei $F(x) = \sum_{k=-2}^{2} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ mit folgenden Koeffizienten:

$$c_{-2} = 2 + \mathrm{i}, \quad c_{-1} = -\mathrm{i}, \quad c_0 = 1, \quad c_1 = \mathrm{i}, \quad c_2 = 2 - \mathrm{i}$$

Wenn man $F(x)$ als $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ schreibt, welchen Wert hat a_2 dann?

⋆644

Das Fourierpolynom

$$F(x) = (2\pi^2 - 12) \cdot \sin x + 3\mathrm{i} \cdot \sin 2x - 4 \cos x + \cos 2x + \pi^2/3$$

soll in der Form $F(x) = \sum_{k=-2}^{2} c_k e^{ikx}$ geschrieben werden. Geben Sie c_2 an.

Bei diesen beiden Aufgaben geht es um die Umrechnung zwischen den verschiedenen Darstellungen, die auf Seite 687[665] im Buch beschrieben wird.

56[55]. Diskrete Fouriertransformation

⋆645

Wenn man wie im Buch $\omega_8 = e^{2i\pi/8}$ setzt, welche von den folgenden achten Einheitswurzeln sind dann primitiv?

☐ ω_8^0 ☐ ω_8^1 ☐ ω_8^2 ☐ ω_8^3 ☐ ω_8^4 ☐ ω_8^5 ☐ ω_8^6 ☐ ω_8^7

⋆646

Wie viele primitive zwölfte Einheitswurzeln gibt es?

647

Wenn wir mit r_n die Anzahl der primitiven n-ten Einheitswurzeln bezeichnen, welcher der folgenden Werte ist dann der größte?

○ r_{11} ○ r_{15} ○ r_{20} ○ r_{24}

Siehe dazu die Aufgaben 983[931] und 984[932] im Buch.

⋆648

Sei wie im Buch ω_n als $e^{2i\pi/n}$ definiert. Welche der folgenden Aussagen sind dann wahr?

☐ Für jedes n hat eine von den Potenzen $\omega_n^0, \omega_n^1, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}$ den Wert -1.

☐ Die Summe der Potenzen $\omega_n^0, \omega_n^1, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}$ ist 0.

☐ Die Summe der Potenzen $\omega_n^0, \omega_n^1, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}$ ist 1.

☐ ω_{12}^9 ist eine primitive 12-te Einheitswurzel.

☐ ω_{12}^{10} ist eine primitive 12-te Einheitswurzel.

☐ ω_{12}^{11} ist eine primitive 12-te Einheitswurzel.

☐ $\omega_n^k \cdot \omega_n^{-k} = 1$ für alle $k \in \{0, \dots, n-1\}$

☐ $\omega_n^k + \omega_n^{-k} = 0$ für alle $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Zusätzlich zu dem, was Sie für die vorherigen Aufgaben brauchten, helfen Ihnen hier noch die Aufgaben 985[933] und 991[939] aus dem Buch.

$\star 649$

Wenn man wie im Buch $\omega_{42} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/42}$ setzt, welchen Wert hat dann die folgende Summe?

$$\sum_{k=1}^{41} \omega_{42}^k$$

Wenn Sie Aufgabe 648 oben bearbeitet haben, haben Sie diese Aufgabe eigentlich auch schon gelöst. Da braucht man keinen Computer mehr.

$\star 650$

Wenn man eine diskrete Fouriertransformation mit 10 reellen Samples wie im Buch durchführt, für welche der folgenden Schwingungen erhält man dann Koeffizienten?

☐ $\sin 10x$	☐ $\sin 2x$	☐ $\cos 2x$
☐ $\sin 5x$	☐ $\cos 10x$	☐ $\cos 5x$

Beachten Sie dazu auch die Bemerkung über eine gerade Anzahl von Samples auf Seite 712[674] im Buch.

$\star 651$

Manche Hunde können Töne bis zu einer Frequenz von 65 kHz wahrnehmen. Wie viele Samples pro Sekunde braucht man mindestens, wenn man CDs für Hunde aufnehmen will?

Das ist eine Frage zum Nyquist-Shannon-Abtasttheorem.

652

Sei M_ν die folgende Matrix:

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \nu & \nu^2 & \nu^3 \\ 1 & \nu^2 & \nu^4 & \nu^6 \\ 1 & \nu^3 & \nu^6 & \nu^9 \end{pmatrix}$$

Welchen Wert muss ν haben, damit man in $\mathbb{Z}_{29}$ die Multiplikation mit M_ν als schnelle Fouriertransformation durchführen kann? (Es gibt zwei mögliche Antworten. Eine reicht.)

Es geht hier um die Rollen, die 12 und 233 auf Seite 727[689] im Buch spielen.

653

p ist ein Polynom zweiten Grades und q ein Polynom dritten Grades. Von dem Polynom pq kennen Sie die folgenden Werte:

$$(-2, 64), (-1, -20), (0, -48), (1, 10), (2, 160), (3, 1104)$$

Geben Sie $(pq)(-3)$ an.

Hier geht es um die Idee, dass man Polynome multiplizieren kann, indem man nur ein paar Funktionswerte des Produktes ausrechnet. Das ist natürlich ein Job für die Polynominterpolation.

654

Nach dem kleinen Satz von Fermat ist jedes Element von $\mathbb{Z}_{59}$ außer der Null eine 58-te Einheitswurzel. Wie viele von diesen Einheitswurzeln sind primitiv?

655

Finden Sie die kleinste Primzahl p, für die es in $\mathbb{Z}_p$ 32 verschiedene 32-te Einheitswurzeln gibt. Finden Sie außerdem die kleinste natürliche Zahl q, für die modulo p sowohl $q^{32} \equiv 1$ als auch $q^{16} \equiv -1$ gilt.

Das sieht mal wieder nach Aufgaben für den Computer aus. Den kleinen Satz von Fermat kennen Sie hoffentlich noch aus dem 9. Kapitel.

656

Wenn man in $\mathbb{Z}_{97}$ mit $n = 32$ und der Einheitswurzel $\nu = 19$ rechnet, welcher Wert steht dann in der Matrix $\mathbf{M}$ von Seite 716[678] in der zwölften Zeile an der sechsten Stelle?

Hier müssen Sie einfach nur „übersetzen“.