

电动力学B

Bin HU

bhu@bnu.edu.cn

Astro@BNU

Office: 京师大厦9907

7. 带电粒子和电磁场的 相互作用

[只考本透明片上所列内容（例题，概念）]

[本章重点]

1. 辐射场 vs 库伦场
2. 频谱分析
3. 引致辐射
4. 同步辐射
5. 切伦科夫辐射
6. 散射

7.1 运动带电粒子的势 & 辐射电磁场

1. 任意运动带电粒子的势 在外力作用下, 带电粒子沿某一特定轨道运动, 设其位矢为 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_e(t)$, 它是时间 t 的已知函数. 我们要计算这个运动带电粒子所激发的电磁势. 如图 6-1, 在场点 \mathbf{x} 处, 在时刻 t 的势是粒子在较早的时刻 t' 激发的, 该时刻粒子处

于 $\mathbf{x}_e(t')$ 点上, 其运动速度为 $\mathbf{v}(t')$, 粒子与场点的距离为

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_e(t')| = c(t - t'). \quad (1.1)$$

为了计算带电粒子激发的势, 我们把粒子看作在小体积内电荷连续分布的极限. 由第五章 (2.12)、(2.13) 式, 推迟势的一般公式为

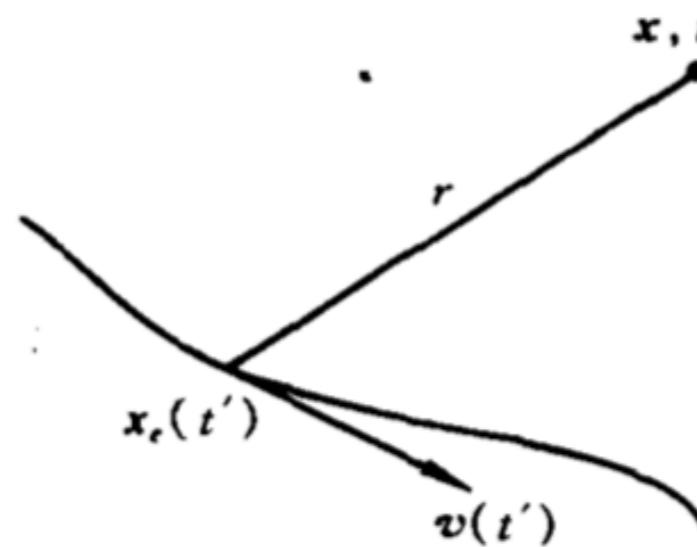


图 7-1

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\rho\left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 r} dV', \quad (1.2)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\mu_0 \mathbf{J}\left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi r} dV'.$$

对带电粒子来说, $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$, \mathbf{v} 为粒子在辐射时刻 $t' = t - \frac{r}{c}$ 的速度.

由(1.2)式看出, 势依赖于粒子运动的速度, 但不依赖于加速度. 因

此, 我们可以选一个在粒子辐射时刻相对静止的参考系 $\tilde{\Sigma}$. 在 $\tilde{\Sigma}$ 上
观察, (\tilde{x}, \tilde{t}) 点上势的瞬时值与静止点电荷的势相同, 即

$$\tilde{\varphi} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 \tilde{r}}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = 0. \quad (1.3)$$

式中 e 为粒子的电荷, \tilde{r} 为在 $\tilde{\Sigma}$ 上观察的粒子与场点的距离, $\tilde{r} = c(\tilde{t} - \tilde{t}')$.

现在变回原参考系 Σ 上. 在 Σ 上观察, 粒子在时刻 t' 的运动速度为 \mathbf{v} , 因此 \mathbf{v} 也就是参考系 $\tilde{\Sigma}$ 相对于 Σ 的运动速度. 对势(1.3)式应用洛伦兹变换式[第六章(5.16)式]得

[作业]

$$\mathbf{A} = \frac{\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\varphi}}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{e\mathbf{v}}{4\pi\epsilon_0 c^2 \tilde{r}}, \quad (1.4)$$

$$\tilde{\varphi} = \frac{\tilde{\varphi}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 \tilde{r}}.$$

式中 \tilde{r} 仍然是在 $\tilde{\Sigma}$ 上测得的距离. 用洛伦兹变换式[第六章(3.7)式]可以把它改用 Σ 系上的距离表出:

$$\tilde{r} = c(\tilde{t} - \tilde{t}') = \frac{c(t - t') - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{r - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{r}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

把上式代入(1.4)式中得

$$\mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{4\pi\epsilon_0 c^2 \left(r - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{r} \right)}, \quad \varphi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 \left(r - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{r} \right)}. \quad (1.5)$$

(1.5)式称为李纳 - 维谢尔(Liénard - Wiechert)势. 注意上式右边各量都是在时刻 $t' = t - \frac{r}{c}$ 所取的值, 例如 $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t')$, $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e(t')$ 等.

把势对场点空时坐标 \mathbf{x} 和 t 求导数可得电磁场强. 注意(1.5)式右边是 t' 的函数, 而求电磁场时要对 \mathbf{x} 和 t 求导数. 由

$$t' = t - \frac{r}{c} = t - \frac{\sqrt{[\mathbf{x} - \mathbf{x}_e(t')]^2}}{c}, \quad (1.6)$$

此式给出 t' 为 \mathbf{x} 和 t 的隐函数. 因此我们必须先求 $\partial t'/\partial t$ 和 $\nabla t'$. 由(1.6)式

$$\begin{aligned}\frac{\partial t'}{\partial t} &= 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial r(t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = 1 + \frac{1}{cr} \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_e(t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} \\ &= 1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{cr} \frac{\partial t'}{\partial t}.\end{aligned}$$

式中 $\mathbf{v} = \partial \mathbf{x}_e(t') / \partial t'$ 是粒子在时刻 t' 的速度. 由上式解得

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{r}{r - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c}} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c}}, \quad (1.7)$$

式中 \mathbf{n} 为 \mathbf{r} 方向单位矢量.

我们再求(1.6)式对 \mathbf{x} 的梯度. 由于 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_e(t')|$ 为 \mathbf{x} 和 t' 的函数, 而 t' 又隐含 \mathbf{x} , 因此

$$\begin{aligned}\nabla t' &= -\frac{1}{c} \nabla r = -\frac{1}{c} \nabla r \Big|_{t'=\text{常数}} -\frac{1}{c} \frac{\partial r(t')}{\partial t'} \nabla t' \\ &= -\frac{\mathbf{r}}{cr} + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{cr} \nabla t'.\end{aligned}$$

由此解出

$$\nabla t' = -\frac{\mathbf{r}}{c \left(r - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c} \right)} = -\frac{\mathbf{n}}{c \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} \right)}. \quad (1.8)$$

有了公式(1.7)和(1.8), 就可以由势的公式(1.5)求出电磁场. 下面我们先计算 $v \ll c$ 情形, 然后再讨论一般情况.

2. 偶极辐射 先研究 $v \ll c$ 情形. 在此情形下,(1.7)和(1.8)式简化为

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1, \quad \nabla t' = -\frac{\mathbf{r}}{cr} = -\frac{\mathbf{n}}{c}. \quad (1.9)$$

把势 \mathbf{A} 和 φ 的公式(1.5)对时空坐标微分后再令 $v \rightarrow 0$, 得

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \underbrace{\nabla \times \mathbf{A} \Big|_{t'=\text{常数}}}_{\text{---}} + \nabla t' \times \underbrace{\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'}}_{\text{---}}.$$

右边第一项为

[推导]

$$\frac{e \mathbf{v} \times \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3},$$

它与 r^2 成反比. 右边第二项用(1.9)式代入得与 r 成反比的辐射场:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mathbf{r}}{cr} \times \frac{e \dot{\mathbf{v}}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} = \frac{e \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 c^3 r^2}. \quad (1.10)$$

[作业] $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi = -\frac{e \dot{\mathbf{v}}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} + \frac{er}{4\pi\epsilon_0 r^3} - \nabla t' \frac{\partial \varphi}{\partial t'}$

$$= \frac{er}{4\pi\epsilon_0 r^3} - \frac{e \dot{\mathbf{v}}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} + \frac{r}{cr} \frac{e \dot{\mathbf{v}} \cdot r}{4\pi\epsilon_0 cr^2}$$

$$= \frac{er}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}). \quad (1.11)$$

电场 \mathbf{E} 分为两项. 第一项是静电荷的库仑场, 第二项是横向的, 且当 $r \rightarrow \infty$ 时与 r 一次方成反比, 这项是辐射场. 库仑场与 r^2 成反比, 它存在于粒子附近, 当 r 大时可以略去. 略去库仑场后, 得低速运动粒子当有加速度 $\dot{\mathbf{v}}$ 时激发的辐射电磁场

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{v}}), \quad (1.12)$$

$$\mathbf{B} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{n} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E}.$$

令 $\mathbf{p} = ex_e$ 为带电粒子的电偶极矩, 则 $\ddot{\mathbf{p}} = e\dot{\mathbf{v}}$, (1.12)式和第五章 (3.17)式所得的电偶极辐射公式一致. 因此, 低速运动带电粒子当加速时激发电偶极辐射.

辐射能流、方向性和辐射功率的计算和第五章 § 3 相同. 以 Θ 代表 r 和 \dot{v} 的夹角, 辐射能流为

$$\mathbf{S} = \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \sin^2 \Theta \mathbf{n}, \quad (1.13)$$

因子 $\sin^2 \Theta$ 表示辐射的方向性. 在与 \dot{v} 垂直的方向上辐射最强. 总辐射功率为

$$P = \int \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} r^2 d\Omega = \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}. \quad (1.14)$$

以上公式可以近似地应用于 X 射线辐射问题上, X 射线连续谱部分是由入射电子碰到靶上受到减速而产生的. 当电子突然变速时, 产生一脉冲电磁波, 形成 X 射线的连续谱部分. 在 § 3 中研究辐射的频谱分析时, 再进一步讨论这问题.

下加速运动带电粒子的电磁场(1.10)和(1.11)式. 我们看出电磁场分两部分. 一部分是库仑场, 另一部分是和加速度有关的辐射场. 对(1.10)和(1.11)式作洛伦兹变换, 可以得到任意运动速度下带电粒子激发的电磁场. 这电磁场同样分为两部分. 一部分是由库仑场作洛伦兹变换而得的, 这部分的性质已于第六章 § 5 中讨论过; 另一部分是和加速度 \dot{v} 有关的辐射场. 下面我们用李纳 - 维谢尔势直接计算运动带电粒子的辐射电磁场.

7.2 高速运动带电粒子 的辐射

[课下自学]

在电子加速器和其他高能粒子加速器中,带电粒子的速度都非常接近于光速.在宇宙空间中也存在着大量高速运动的带电粒子.因此,研究 $v \sim c$ 情形下高速运动带电粒子的辐射具有重要的实际意义.本节先一般导出 $v \sim c$ 情形下带电粒子辐射场的能流、辐射功率和角分布的公式,讨论角分布的特点,然后分别研究 $\dot{\mathbf{v}} // \mathbf{v}$ 和 $\dot{\mathbf{v}} \perp \mathbf{v}$ 两情形下的辐射.

1. 高速运动带电粒子的辐射功率和角分布 先计算能流.由(1.17)和(1.18)式,

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \\ &= \epsilon_0 c E^2 \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

代入电场(1.17)式得

$$\mathbf{S} = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \frac{\left| \mathbf{n} \times \left[\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right] \right|^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} \right)^6} \mathbf{n}. \quad (2.2)$$

能流 \mathbf{S} 是用观察时间 t 计算的单位时间内垂直通过单位横截面的电磁能量.当我们计算总辐射功率时,需要把能流对一个大球面积分.由(1.7)式,观察时间 dt 和粒子辐射时间 dt' 是不同的,而且对不同方向 dt/dt' 亦不同.如果我们用观察时间 dt 来计算功率,则所得的功率不是粒子在同一时间 dt' 的发射功率.如图 7-2,设粒

子在时间 dt' 内由 P_1 点运动到 P_2 点.在时间 $t = t' + \frac{R}{c}$ 观察,粒子在初时刻 t' 的辐射场到达以 P_1 为球心,以 R 为半径的球面上,而在末时刻 $t' + dt'$ 的辐射场到达以 P_2 为球心,以 $R - cdt'$ 为半径的球面上,因而粒子在 dt' 时间内的辐射能量位于这两球面之间的区域.由图可见,在不同方向上,这能量需要不同的时间 dt 才能通过外球面.因为电磁辐射是由于带电粒子加速运动引起的,所以,在计算辐射功率时,用时间 dt' 来计算比较方便.以 $P(t')$ 表示在 t' 单位时间内的辐射功率,有

$$P(t') = \int \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \frac{dt}{dt'} r^2 d\Omega. \quad (2.3)$$

把(2.2)式代入得

$$P(t') = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \oint \frac{\left| \mathbf{n} \times \left[\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right] \right|^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} \right)^5} d\Omega, \quad (2.4)$$

辐射功率的角分布为

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\left| \mathbf{n} \times \left[\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right] \right|^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} \right)^5}. \quad (2.5)$$

由上式可以看出高速运动带电粒子辐射角分布的特点.令 θ 为 \mathbf{n} 与 \mathbf{v} 的夹角.当 $v \approx c$ 时,因子 $1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} = 1 - \frac{v}{c} \cos\theta$ 在 $\theta \approx 0$ 方向变得很小,因此辐射能量强烈地集中于朝前方向.当 $\frac{v}{c} \approx 1$ 和

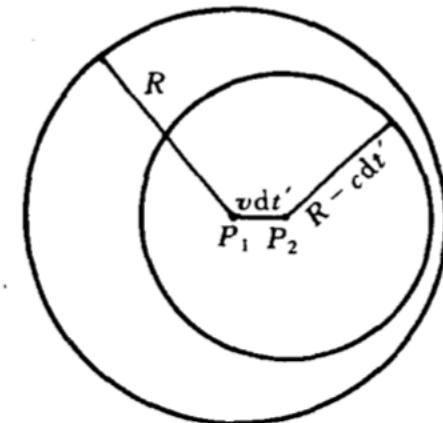


图 7-2

$\theta \approx 0$ 时因子 $1 - \frac{v}{c} \cos\theta$ 可写为

$$\begin{aligned} 1 - \frac{v}{c} \cos\theta &\approx 1 - \frac{v}{c} \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \approx 1 - \frac{v}{c} + \frac{\theta^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right), \end{aligned} \quad (2.6)$$

式中 $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$. 因而角分布因子为

$$\left(1 - \frac{v}{c} \cos\theta\right)^{-5} \approx \frac{32}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)^5}. \quad (2.6a)$$

由此式看出, 不管加速度方向如何, 辐射能量主要集中于沿 v 方向锥角为

$$\Delta\theta \sim \frac{1}{\gamma}$$

的射束之内. v 愈接近于 c 时这效应愈显著. 例如能量为 500MeV 的电子, 它的 γ 值 $\approx 10^3$, 因此, 当它受到加速时激发的辐射集中于 $\Delta\theta \sim 10^{-3}$ 弧度之内.

2. $\dot{v} \parallel v$ 情形 此情形 $v \times \dot{v} = 0$, 由(1.17)和(1.18)式得

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{v}})}{\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c}\right)^3}, \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \frac{\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{v}}}{\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c}\right)^3}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

辐射能流为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \frac{\sin^2\theta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos\theta\right)^6} \mathbf{n}. \quad (2.8)$$

式中 θ 为 \mathbf{n} 与 \mathbf{v} 的夹角. 辐射角分布为

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = r^2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \frac{dt}{dt'} = \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2\theta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos\theta\right)^5}. \quad (2.9)$$

辐射角分布与低速情形相比如图 7-3 所示.

辐射功率为

$$\begin{aligned} P(t') &= \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int \frac{\sin^2\theta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos\theta\right)^5} d\Omega \\ &= \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^6. \end{aligned} \quad (2.10)$$

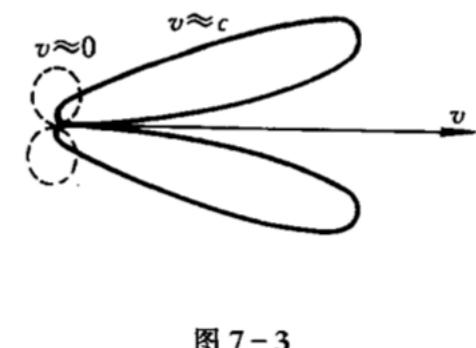


图 7-3

上式把辐射功率用加速度 $\dot{\mathbf{v}}$ 表示出来. 事实上, 由于粒子速度不能超过光速, 所以当 $v \rightarrow c$ 时, 在一定作用力下, 加速度 $\dot{\mathbf{v}}$ 的值变得很小. 因此, 改用粒子所受的力 F 来表示辐射功率是比较方便的. 在 $\dot{\mathbf{v}} \parallel \mathbf{v}$ 情形, 由相对论力学方程,

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m \dot{\mathbf{v}}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \gamma^3 m \dot{\mathbf{v}}, \quad (2.11)$$

得辐射功率

$$P(t') = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3} F^2. \quad (2.12)$$

由此式可见在一定作用力下, 直线运动粒子的辐射功率与粒子能量无关.

3. $\dot{v} \perp v$ 情形 选坐标系如图 7-4 所示. 设在时刻 t' 粒子的瞬时速度 \mathbf{v} 沿 z 轴, 加速度 $\dot{\mathbf{v}}$ 沿 x 轴. 设 \mathbf{n} 与 \mathbf{v} 的夹角为 θ , 有 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = v \cos\theta$, $\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = 0$. 由图可见

$$\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \dot{v} \sin\theta \cos\phi,$$

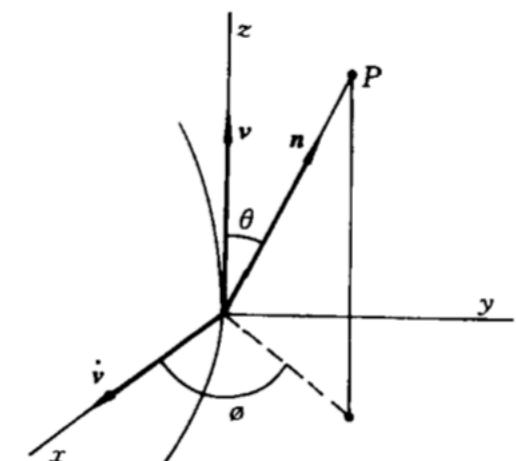


图 7-4

因而

$$\begin{aligned}
& \mathbf{n} \times \left[\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right] = (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) - \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \right) \dot{\mathbf{v}} \\
& = |\dot{\mathbf{v}}| \sin \theta \cos \phi \left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) - \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right) \dot{\mathbf{v}}, \\
& \left| \mathbf{n} \times \left[\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right] \right|^2 \\
& = \dot{\mathbf{v}}^2 \left[\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \phi \right].
\end{aligned}$$

代入(2.5)式得辐射角分布(图 7-5)

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)^5}. \quad (2.13)$$

上式对 $d\Omega$ 积分得辐射

功率

$$P(t') = \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^4. \quad (2.14)$$



图 7-5

在 $\dot{\mathbf{v}} \perp \mathbf{v}$ 情形由相对论力学方程得

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m \dot{\mathbf{v}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m \dot{\mathbf{v}}.$$

用作用力 F 表出的粒子辐射功率为

$$P(t') = \frac{e^2 F^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \gamma^2 \quad (2.15)$$

由此可见, 在一定作用力下, 当粒子的加速度 $\dot{\mathbf{v}} \perp \mathbf{v}$ 时, 它的辐射功率与粒子能量平方成正比.

以上结果对电子加速器有重要意义. 目前有两种类型的电子加速器, 一类是直线型的, 另一类是圆周型的. 在后一类电子加速器中, 用一定电磁作用力使电子加速时, 电子由于受到加速而产生

辐射, 辐射功率与电子能量平方成正比. 电子能量愈高, 辐射损耗就愈大. 当辐射损耗等于加速器所提供的功率时, 电子就不再受到加速. 直线型加速器由于辐射损耗与电子能量无关, 因而加速能量不受这限制. 因此, 目前能量较高的电子加速器一般采用直线型.

7.3 辐射的频谱分析

带电粒子加速时产生辐射，这种辐射往往是脉冲形式的。例如在 X 射线管内，一定能量的电子碰到金属靶上，在很短的时间内突然减速，在这段时间内它辐射出脉冲电磁波。又例如高速运动电子作圆周运动时，它在每一瞬时所产生的辐射是一个狭窄的射束，对于在轨道平面附近的一个观察者来说，该射束在很短的时间内扫过，因此观察者所看到的辐射也是脉冲形的。对一个脉冲作频谱分析，可以得出它所含的各个频率分量，这在实际应用上是一个重要问题。本节我们先给出频谱分析的一般公式，然后研究一些具体情形下的辐射频谱。

1. 频谱分析的一般公式 以 $f(t)$ 表示某一时间函数, 它可以代表电流、势或电磁场. 设 $f(t)$ 表为傅里叶积分

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega, \quad (3.1)$$

f_{ω} 是 $f(t)$ 的角频率为 ω 的傅里叶分量. (3.1) 式的逆变换为

$$f_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (3.2)$$

设 $f(t)$ 是实函数, 由上式定义的 f_{ω} 一般是复数. 由 $f(t)$ 为实数的条件可以得到负频分量与正频分量的关系. 取(3.2)式的复共轭得

$$f_{\omega}^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = f_{-\omega}. \quad (3.3)$$

因此, 负频分量和正频分量不是独立的, 而是互为复共轭.

若某一物理量正比于 $f^2(t)$, 则它对 t 的积分可以变为 $|f_{\omega}|^2$

对 ω 的积分：

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} \cdot 2\pi f_{-\omega} d\omega \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f_{\omega}|^2 d\omega = 4\pi \int_0^{\infty} |f_{\omega}|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (3.4)$$

现在我们把傅里叶变换应用到电磁场问题上. 首先把电流密度 $\mathbf{J}(x, t)$ 表为傅里叶积分

$$\mathbf{J}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J}_{\omega}(x) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (3.5)$$

逆变换式为

$$\mathbf{J}_{\omega}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J}(x, t) e^{i\omega t} dt. \quad (3.6)$$

把(3.5)式代入矢势公式得

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c}\right)}{r} dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{r} dV' \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J}_{\omega}(\mathbf{x}') e^{-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} d\omega \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega \int \frac{\mathbf{J}_{\omega}(\mathbf{x}') e^{i\frac{\omega}{c}r}}{r} dV'.
\end{aligned}$$

因此,矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ 的 ω 分量为

$$\mathbf{A}_{\omega}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_{\omega}(\mathbf{x}') e^{i\frac{\omega}{c}r}}{r} dV'. \quad (3.7)$$

把(3.6)式的积分变量写为 t' ,代入上式得

$$\mathbf{A}_{\omega}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{8\pi^2} \int e^{i\omega\left(t' + \frac{r}{c}\right)} dt' \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t')}{r} dV'. \quad (3.8)$$

对于一个电荷为 e 的带电粒子,设其位矢为 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_e(t)$,速度为 $\mathbf{v}(t)$,则它的电荷密度和电流密度为

$$\rho(\mathbf{x}, t) = e\delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}_e(t)],$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = e\mathbf{v}(t)\delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}_e(t)]. \quad (3.9)$$

代入(3.8)式,对粒子体积积分后,相当于把 \mathbf{x}' 换作粒子的坐标 $\mathbf{x}_e(t')$.因此

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{8\pi^2} \int \frac{e\mathbf{v}(t')}{r} e^{i\omega(t' + \frac{r}{c})} dt', \quad (3.10)$$

式中 r 为带电粒子位置 $\mathbf{x}_e(t')$ 到场点 \mathbf{x} 的距离.

若粒子在有限区域内运动,而我们在远处观察辐射场,可选区域内某点为坐标系原点,设从原点到场点的距离为 R ,由图 7-6,有

$$r \approx R - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_e(t'). \quad (3.11)$$

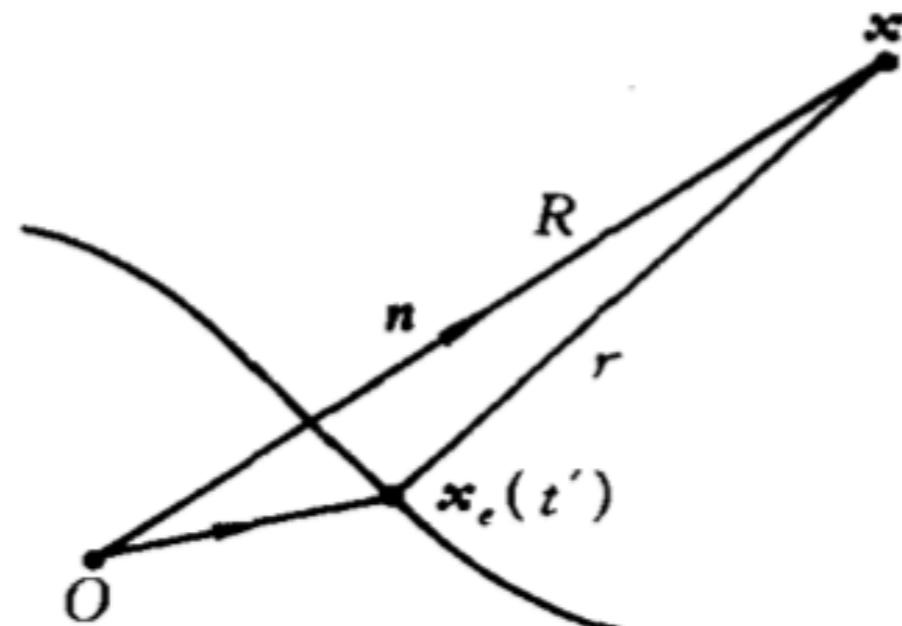


图 7-6

在(3.10)式中,相因子内的 r 用上式代入,而分母的 r 可以简单地代为 R ,得

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{x}) = \frac{e}{8\pi^2 \epsilon_0 c^2} \frac{e^{ikR}}{R} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}(t') e^{i\omega(t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_e}{c})} dt'. \quad (3.12)$$

式中 $k = \omega/c$ 为该频率分量的波数. 由第五章(1.12)和(1.13)式得辐射电磁场的 ω 分量

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\omega &= ik \times \mathbf{A}_\omega \\ &= \frac{ie\omega}{8\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{e^{ikR}}{R} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times \mathbf{v}(t') e^{i\omega(t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_e}{c})} dt' \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\omega &= -c\mathbf{n} \times \mathbf{B}_\omega \\ &= -\frac{ie\omega}{8\pi^2 \epsilon_0 c^2} \frac{e^{ikR}}{R} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) e^{i\omega(t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_e}{c})} dt'. \end{aligned} \quad (3.14)$$

利用

$$\frac{d}{dt'} e^{i\omega(t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_e}{c})} = i\omega \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \right) e^{i\omega(t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_e}{c})},$$

$$\frac{d}{dt'} \left[\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v})}{1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}} \right] = \frac{\mathbf{n} \times \left[\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right]}{\left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \right)^2},$$

将(3.14)式分部积分,可以把它变为另一形式

$$E_\omega(\mathbf{x}) = \frac{e}{8\pi^2 \epsilon_0 c^2} \frac{e^{ikR}}{R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{n} \times \left[\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right]}{\left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \right)^2} e^{i\omega \left(t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_e}{c} \right)} dt', \quad (3.15)$$

利用 $t = t' + \frac{1}{c}(R - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_e)$, $dt' = \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \right)^{-1} dt$, 上式可化为

$$E_\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int E(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt,$$

其中 $E(\mathbf{x}, t)$ 为(1.17)式. 由此看出, 用频谱分析方法导出的 $E(\mathbf{x}, t)$ 和以前用李纳-维谢尔势导出的表示式一致. 用(3.15)或(3.14)式都可以计算 E_ω .

现在对辐射能量作频谱分析. 辐射能量的角分布为

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} R^2 dt. \quad (3.16)$$

把(2.1)式代入得

$$\frac{dW}{d\Omega} = \epsilon_0 c R^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}^2(t) dt = 4\pi \epsilon_0 c R^2 \int_0^{\infty} |\mathbf{E}_\omega|^2 d\omega.$$

其中我们应用了(3.4)式. 因此, 频率为 ω 的单位频率间隔辐射能量角分布为

$$\frac{dW_\omega}{d\Omega} = 4\pi \epsilon_0 c R^2 |\mathbf{E}_\omega|^2. \quad (3.17)$$

此式对 $d\Omega$ 积分即得单位频率间隔辐射能量

$$W_\omega = 4\pi \epsilon_0 c \oint |\mathbf{E}_\omega|^2 R^2 d\Omega. \quad (3.18)$$

(3.14—15)、(3.17—18)式是频谱分析的主要公式. 下面我们讨论一些具体情形下的辐射频谱.

方向性

2. 低速运动带电粒子在碰撞过程中的辐射频谱 当带电粒子入射到物质靶上时, 它和靶内原子中的电子和原子核碰撞, 在碰撞过程中减速, 因而产生辐射. 这种辐射称为轫致辐射. X 射线的连续谱部分属于这种辐射. 现在我们计算当入射电子速度 $v \ll c$ 时所产生的辐射频谱. **bremsstrahlung / braking radiation**

在(3.15)式中, 由于 $x_e(t) \sim vt$, 因此相因子中的 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_e/c$ 可以忽略(即偶极辐射条件), 分母中的 $\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}$ 亦可忽略, 因而

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{x}) = \frac{e}{8\pi^2 \epsilon_0 c^2} \frac{e^{ikR}}{R} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{v}}) e^{i\omega t'} dt'. \quad (3.19)$$

设粒子在很短的时间 τ 内减速, 因而上式的积分区为 $\Delta t' \sim \tau$. 若 $\omega \ll \frac{1}{\tau}$, 则相因子 $e^{i\omega t'} \approx 1$, 因而

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\omega(\mathbf{x}) &\approx \frac{e}{8\pi^2 \epsilon_0 c^2} \frac{e^{ikR}}{R} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{v}}) dt' \\ &= \frac{e}{8\pi^2 \epsilon_0 c^2} \frac{e^{ikR}}{R} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \Delta \mathbf{v}). \quad (\omega\tau \ll 1) \end{aligned} \quad (3.20)$$

● 犁

(軛)

rèn ㄖㄣˋ

1. 阻止车轮转动的木头，车开动时，则将其抽走：发～（喻事业开始）。
2. 柔弱，情怠。
3. 古同“仞”。

式中 $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}$ 为粒子在时间 τ 内的速度改变量. 设 n 与 $\Delta \mathbf{v}$ 的夹角为 Θ , 由(3.17)式得频率为 ω 的单位频率间隔辐射能量角分布

[推导]

$$\frac{dW_\omega}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c^3} |\Delta \mathbf{v}|^2 \sin^2 \Theta. \quad (\omega\tau \ll 1) \quad (3.21)$$

对 $d\Omega$ 积分后得辐射能量

$$W_\omega = \frac{e^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c} \left(\frac{\Delta \mathbf{v}}{c} \right)^2. \quad (\omega\tau \ll 1) \quad (3.22)$$

注意当 $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ 时, W_ω 与 ω 无关.

当 $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ 时, (3.19)式中相因子 $e^{i\omega t}$ 迅速振荡, 积分值趋于零, 因此,

$$W_\omega \approx 0. \quad (\omega\tau \gg 1) \quad (3.23)$$

辐射频谱如图 7-7(a)所示.

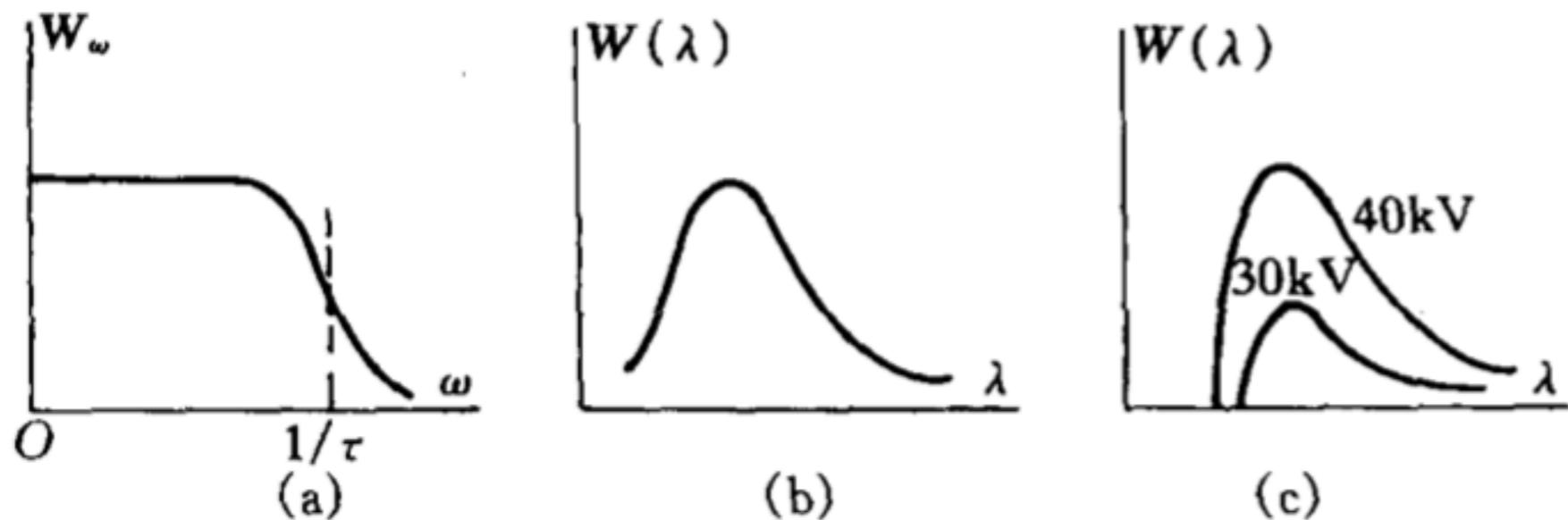


图 7-7

由 $\omega = 2\pi c / \lambda$, 可得辐射能量按波长的分布

$$(3.22 \text{ & } 3.23) \quad W(\lambda) = W_\omega \left| \frac{d\omega}{d\lambda} \right| \approx \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0} \left(\frac{\Delta v}{c} \right)^2 \frac{1}{\lambda^2}, \quad (\lambda \gg c\tau) \quad (3.24)$$

==>

$$W(\lambda) \approx 0. \quad (\lambda \ll c\tau)$$

$W(\lambda)$ 如图 7-7(b)所示.

以上结果可以应用于 X 射线的连续谱分析上。实验测量出的连续谱分布如图 7-7(c) 所示。当入射电子能量增大时，辐射增强，这点可以用(3.22)式中 $\Delta\nu$ 增大来解释。当 λ 较大时，辐射能量按波长的分布和经典公式(3.24)相符。但是在短波长范围，实验结果最显著的特点是有一个尖锐的截止波长，相应的截止频率 ω_c 与电子入射动能 E_e 成正比，有关系式

$$\hbar\omega_c = E_e, \quad (3.25)$$

式中

$$\hbar = 1.05457266(63) \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}. \quad (3.26)$$

射电 $h \equiv 2\pi\hbar$ 称为普朗克(Planck)常数。这关系只有用量子理论才能解释，它表示电磁能量是量子化的，频率为 ω 的光子具有能量 $\hbar\omega$ 。伽马暴 当 ω 小时，光子数目很多，经典电磁理论近似成立。当 ω 大时，在过程中只涉及小量光子，电磁场的量子化性质显著地表现出来，因而经典理论在这情形下不能适用。

以 $N(\omega)$ 表示光子数分布，由(3.22)式得

$$N(\omega)d\omega = \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon_0 c} \left(\frac{\Delta v}{c} \right)^2 \frac{d\omega}{\hbar\omega} = \frac{2\alpha}{3\pi} \left(\frac{\Delta v}{c} \right)^2 \frac{d\omega}{\omega}. \quad (\omega\tau \ll 1) \quad (3.27)$$

式中

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.0359845(61)}. \quad (3.28)$$

α 称为精细结构常数,是光谱学和量子电动力学的基本常数之一.在量子场论中, α 是表征电磁相互作用强度的常数.(3.27)式表示低能光子数目与光子能量成反比.当 $\omega \rightarrow 0$ 时, $N(\omega) \rightarrow \infty$,但总能量是有限的.

3. 高速圆周运动带电粒子的辐射频谱 设有一高速运动($v \approx c$)的带电粒子作圆周运动.由上节(2.6)式,在每一瞬间粒子产生的辐射都集中于沿 v 方向的狭窄射束内,射束的张角为

$$\Delta\theta \sim \frac{1}{\gamma}. \quad (3.29)$$

γ 等于粒子总能量与静止能量之比. 因此, 当粒子作圆周运动时, 它产生的辐射好象一个旋转的探射灯一样. 在远处的 P 点上观察, 粒子每转一周时射束只在很短的时间 Δt 内扫过, 因而在 P 点上观察到的辐射是周期性的脉冲波形(图 7-8).

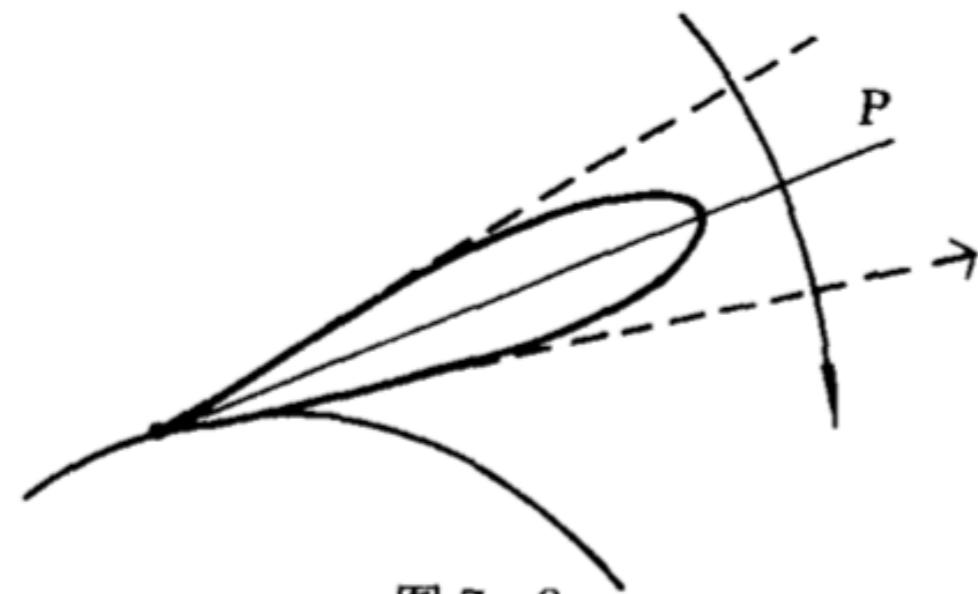


图 7-8

设轨道半径为 ρ , 粒子走过路程 $\rho\Delta\theta$ 的时间为

$$\Delta t' = \frac{\rho\Delta\theta}{v} \sim \frac{\rho}{c\gamma}. \quad (3.30)$$

在 P 点上观察到脉冲的持续时间为

$$\Delta t = \left(\frac{dt}{dt'} \right) \Delta t',$$

式中 $\langle \rangle$ 表示平均值. 由(1.7)和(2.6)式,

[Sec. 7.2]

$$\frac{dt}{dt'} = 1 - \frac{v}{c} \cos\theta \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right).$$

由于 $\langle \theta^2 \rangle \sim 1/\gamma^2$, 因此

$$\left(\frac{dt}{dt'} \right) \sim \frac{1}{\gamma^2},$$

因此由(3.30)式得

$$\Delta t \sim \frac{\rho}{c\gamma^3}. \quad (3.31)$$

当脉冲时间为 Δt 时, 频谱主要分布于 $\omega \lesssim \omega_c$ 范围内, 其中

$$\omega_c \sim \frac{1}{\Delta t} \sim \frac{c}{\rho} \gamma^3 = \omega_0 \gamma^3 \quad (3.32)$$

ω_0 为粒子圆周运动的角频率.

强磁场

圆周运动是周期性的,因此它的辐射可展为傅里叶级数,频谱是基频 ω_0 的整数倍,包括从 ω_0 到 $\sim \omega_c$ 的各分量. 用(3.14)式精确计算出的辐射频谱如图 7-9 所示. 例如当电子能量为 100MeV, $\rho = 0.4\text{m}$ 时, $\omega_0 \sim 8 \times 10^8 \text{s}^{-1}$, $\gamma \sim 200$, $\omega_c \sim 6 \times 10^{15}$, $\lambda_c \sim 3000\text{\AA}$. 辐射频谱盖过可见光部分. 这种辐射在电子同步加速器中观察到, 实验结果与理论计算相符. 在天文观测中也看到这种同步辐射, 它是由高速运动带电粒子在天体的磁场中作圆周运动而辐射出来的.

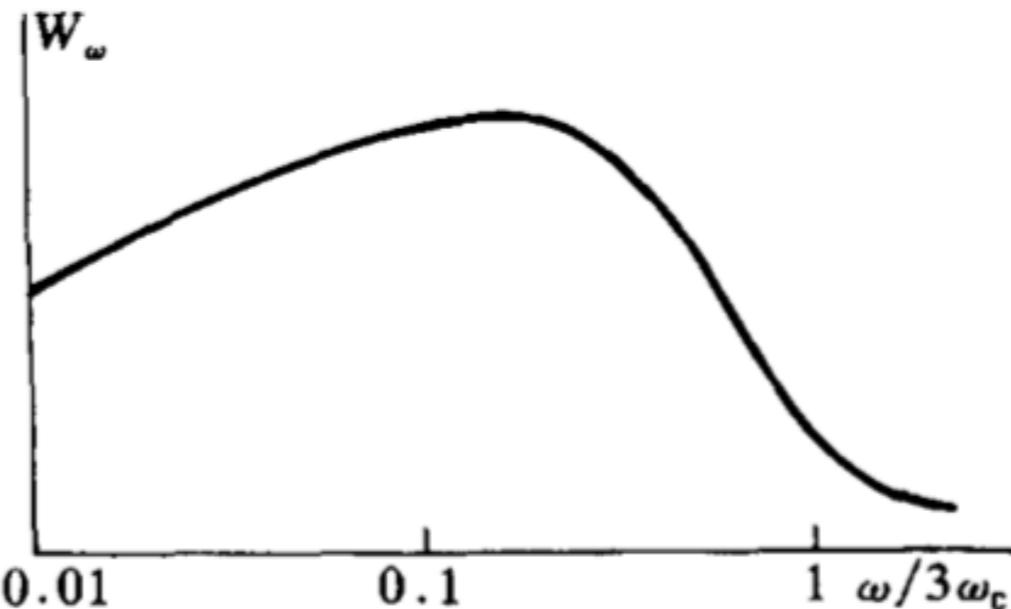
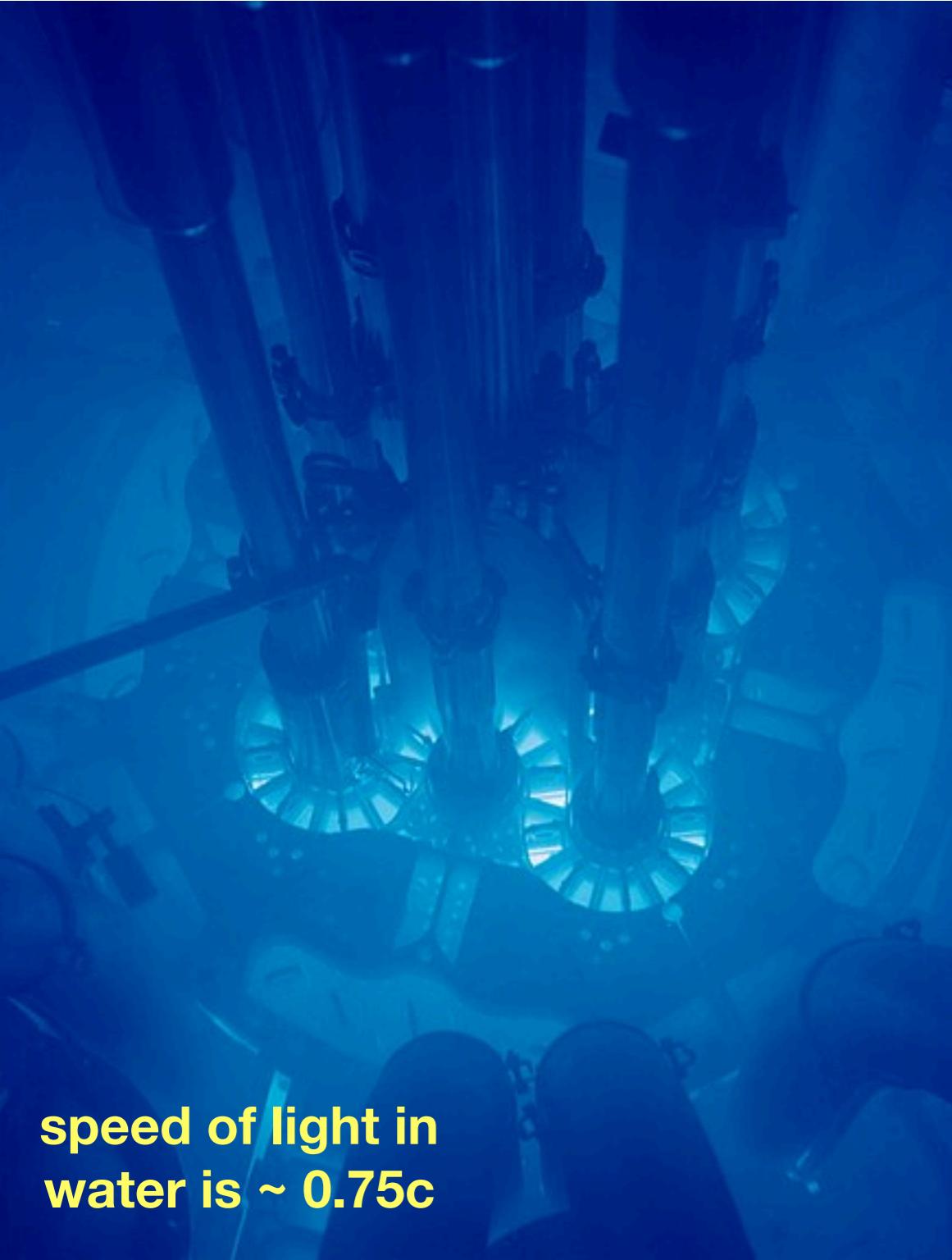


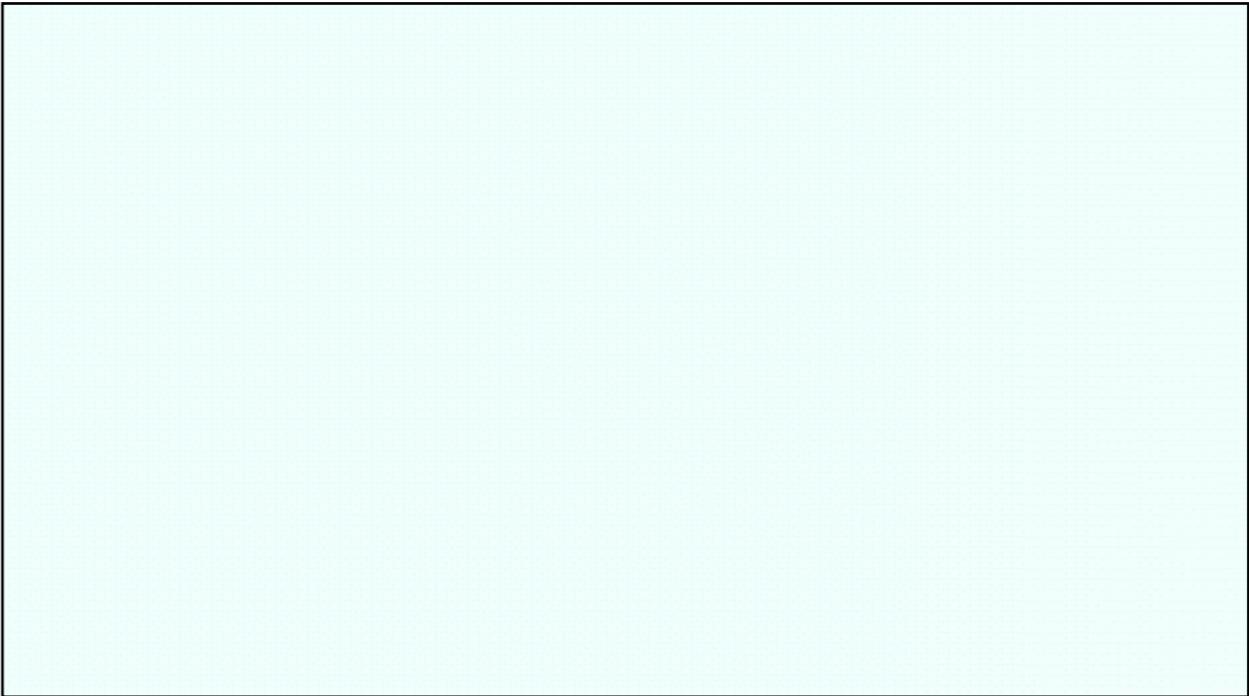
图 7-9

7.4 Cerenkov radiation



speed of light in
water is $\sim 0.75c$

blue glory of nuclear
reactor under the water



The speed of source of the light (charged particle)
is greater than light



A common analogy is the sonic boom of a supersonic aircraft or bullet. The sound waves generated by the supersonic body propagate at the speed of sound itself; as such, the waves travel slower than the speeding object and cannot propagate forward from the body, instead forming a shock front. In a similar way, a charged particle can generate a light shock wave as it travels through an insulator.

在真空中,匀速运动带电粒子不产生辐射电磁场.但是当带电粒子在介质内运动时,介质内产生诱导电流,由这些诱导电流激发次波,当带电粒子的速度超过介质内的光速时,这些次波与原来粒子的电磁场互相干涉,可以形成辐射电磁场.这种辐射称为切伦柯夫辐射.

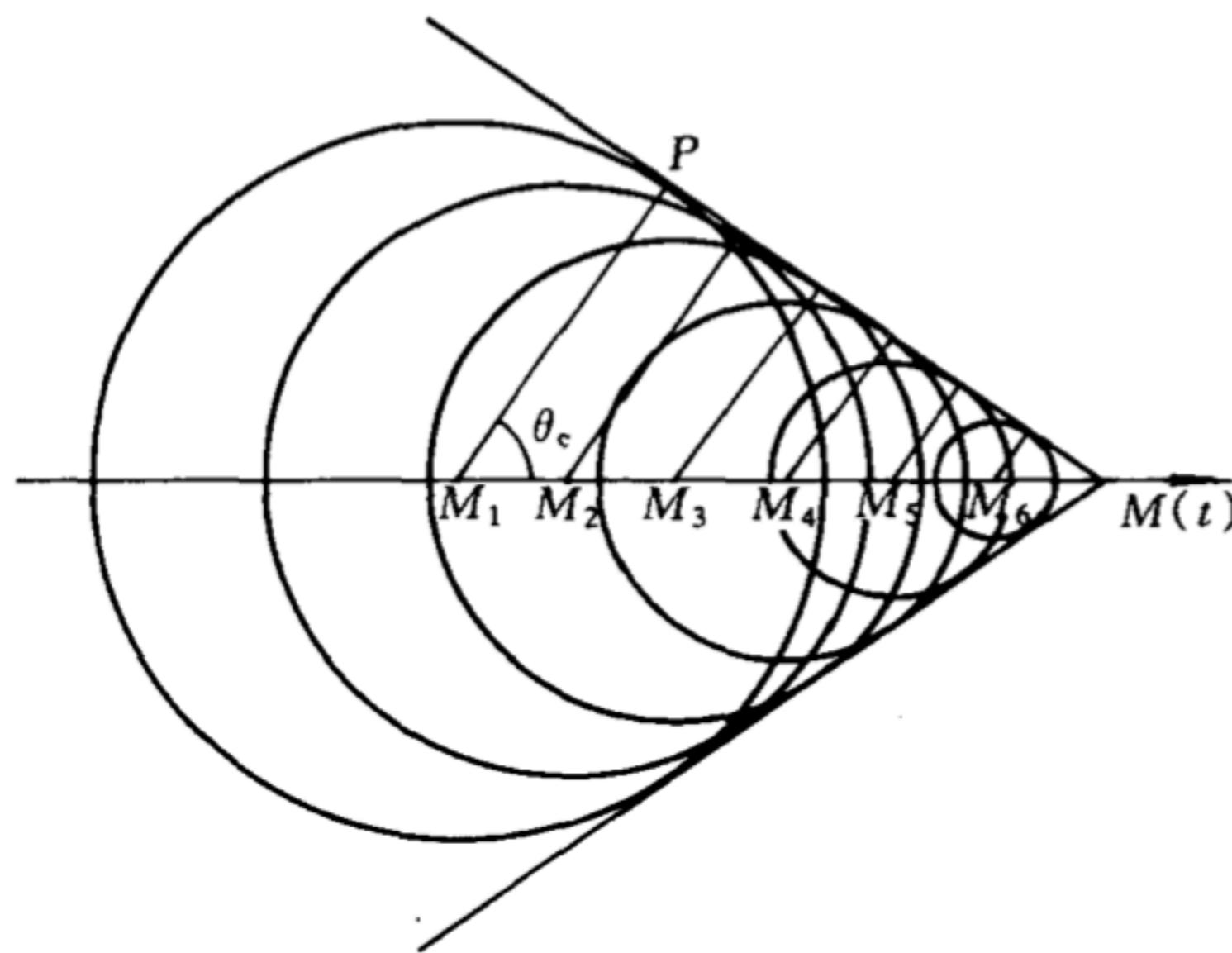


图 7-10

切伦柯夫辐射的物理机制如图 7-10 所示. 设在介质内粒子作匀速运动,速度 v 超过介质内的光速 c/n (n 为折射率). 在粒子路径附近,介质的分子电流受到扰动,因而产生次波. 设粒子在时刻 t_1, t_2, \dots 依次经过 M_1, M_2, \dots 点, 在时刻 t 到达 M 点. 在同一时刻 t , M_1 处产生的次波已经到达半径为 M_1P 的球面上,

$$M_1P = \frac{c}{n}(t - t_1), \quad M_1M = v(t - t_1).$$

不难看出,若 $v > c/n$, 则粒子路径上各点所产生的次波在时刻 t 都在一个锥体之内. 在锥面上, 各次波互相叠加, 形成一个波面, 因而产生向锥面法线方向传播的辐射电磁波. 辐射方向与粒子运动方向的夹角 θ_c 由下式确定,

$$\cos\theta_c = \frac{c}{nv}. \tag{4.1}$$

由于切伦柯夫辐射是运动带电粒子与介质内的束缚电荷和诱

导电流所产生的集体效应,而在宏观现象中,介质内束缚电荷和诱导电流分布产生的宏观效应可以归结为电容率 ϵ 和磁导率 μ ,因此在研究切伦柯夫辐射时,我们可以对介质作宏观描述,即用 ϵ 和 μ 两参数来描述介质. 为简单起见,先假设 ϵ 和 μ 是不依赖于频率的常量,并设 $\mu = \mu_0$,因而介质内的光速为 $c/n = c/\sqrt{\epsilon_r}$,其中 n 为介质的折射率, ϵ_r 为相对电容率. 当 n 为常数时,介质内的标势和矢势方程为

$$\begin{aligned}\nabla^2\varphi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= -\rho/\epsilon, \\ \nabla^2\mathbf{A} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu\mathbf{J}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

ρ 和 \mathbf{J} 是自由电荷密度和自由电流密度,即运动带电粒子的电荷密度和电流密度.

设粒子以匀速 \mathbf{v} 作直线运动,其位矢为 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_e(t) = \mathbf{v}t$,它的电荷密度和电流密度为

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}, t) &= e\delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}_e(t)], \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &= e\mathbf{v}\delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}_e(t)].\end{aligned}\tag{4.3}$$

由于辐射,带电粒子的能量逐渐损耗,因而速度亦逐渐降低.但是由减速引起的效应是不大的,因此,下面我们假设粒子作匀速运动.

用频谱分析方法求解.真空中推迟势的傅里叶变换由(3.12)式给出,只要把该式相因子中的光速 c 换作介质中的光速 c/n 即得介质中推迟势的傅里叶变换

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{x}) = \frac{e}{8\pi^2\epsilon_0 c^2} \frac{e^{ikR}}{R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t' - \frac{n}{c}\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_e)} \mathbf{v}(t') dt'. \quad (4.4)$$

式中 \mathbf{n} 为辐射方向单位矢量.设 \mathbf{v} 沿 x 轴方向, \mathbf{n} 与 \mathbf{v} 夹角为 θ , 则 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_e = x_e \cos\theta$, 又 $\mathbf{v}(t')dt' = dx_e$, $t' = x_e/v$, 由(4.4)式得

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e}{8\pi^2\epsilon_0 c^2} \frac{e^{ikR}}{R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\left(\frac{1}{v} - \frac{n}{c}\cos\theta\right)x_e} dx_e. \quad (4.5)$$

$k = \frac{\omega}{c} n$ 为介质中波数.

磁场的傅里叶变换为

$$\mathbf{B}_\omega = ik \times \mathbf{A}_\omega = \frac{i\omega n}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{A}_\omega.$$

因为 \mathbf{n} 与 \mathbf{A}_ω 的夹角为 θ , 所以 \mathbf{B}_ω 的量值为

$$B_\omega = \frac{i\omega ne}{8\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{e^{ikR}}{R} \sin\theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \left(\frac{1}{v} - \frac{n}{c} \cos\theta \right) x_e} dx_e. \quad (4.6)$$

式中的积分是一个 δ 函数^①,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \left(\frac{1}{v} - \frac{n}{c} \cos\theta \right) x_e} dx_e = 2\pi \delta \left(\frac{\omega}{v} - \frac{\omega n}{c} \cos\theta \right), \quad (4.7)$$

因此,

$$B_\omega = \frac{i\omega ne}{4\pi \epsilon_0 c^3} \frac{e^{ikR}}{R} \sin\theta \delta \left(\frac{\omega}{v} - \frac{\omega n}{c} \cos\theta \right). \quad (4.8)$$

由 δ 函数的性质可见,

$$B_\omega = 0, \quad \text{若 } \cos\theta \neq \frac{c}{nv}.$$

如果粒子的运动速度 $v < \frac{c}{n}$, 则对所有 θ 值, $\cos\theta < \frac{c}{nv}$, 因此在这情形下没有辐射.

$$\textcircled{1} \quad \int_{-l}^l e^{ix} dx = \frac{2}{\kappa} \sin \kappa l, \text{ 函数}$$

$f(\kappa) = \frac{2}{\kappa} \sin \kappa l$ 的图形如 7-11 所示.

当 $l \rightarrow \infty$ 时, $f(0) = 2l \rightarrow \infty$, 而 $\kappa \neq 0$ 时的 $f(\kappa)$ 是一个周期趋于零的迅速振荡的函数, 因此可认为 $f(\kappa) = 0$, 当 $\kappa \neq 0$.

又 $\int_{-\infty}^{\infty} f(\kappa) d\kappa = 2\pi$. 因此, $f(\kappa) = 2\pi \delta(\kappa)$.

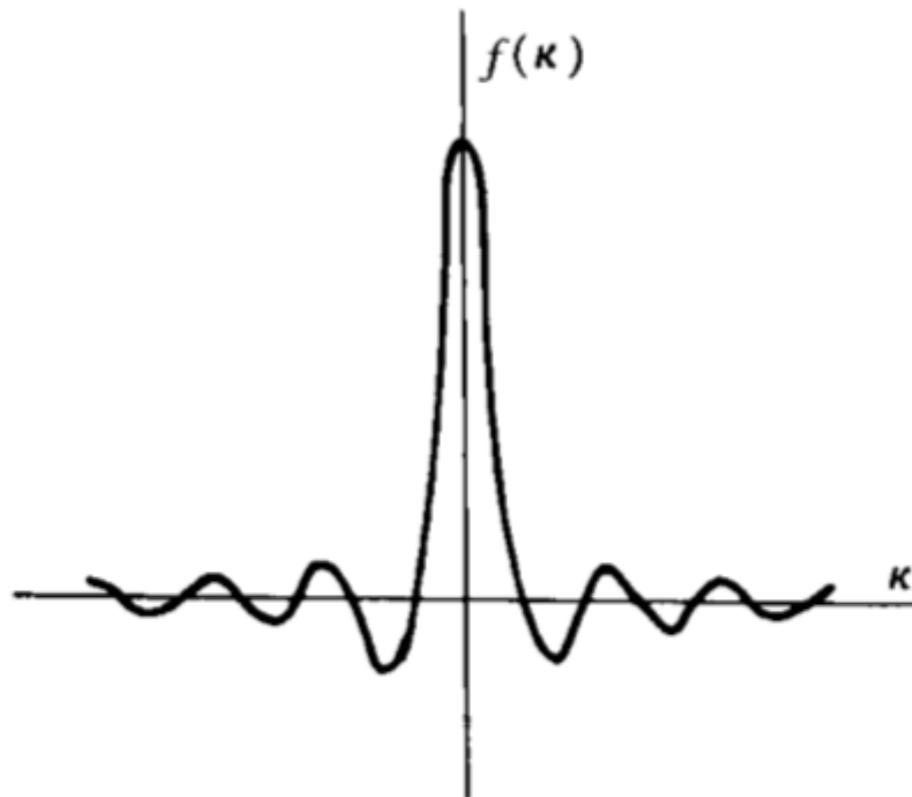


图 7-11

若粒子运动速度 $v > \frac{c}{n}$, 在 $\cos\theta = \frac{c}{nv}$ 方向上, B_ω 变为无穷大, 因此在这方向上出现辐射电磁场. 无穷大的出现是我们作了简化假设的结果. 上面我们假设折射率 n 是与 ω 无关的常数, 结果得到有一个确定的辐射角 θ_c , 满足 $\cos\theta_c = \frac{c}{nv}$, 在这单一辐射角下电磁场变为无穷大. 事实上, 介质的 n 是与 ω 有关的函数, 当 ω 很大时, 折射率 $n \rightarrow 1$, 因此辐射频谱在高频下截断, 辐射场不会在一个尖锐的辐射角下变为无穷大, 而是分布于有一定宽度的辐射角内.

用 $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = EH = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} BH = \frac{c}{n\mu} B^2$, 由(3.16)式可导出

$$\frac{dW_\omega}{d\Omega} = \frac{4\pi\epsilon_0 c^3 R^2}{n} |\mathbf{B}_\omega|^2. \quad (4.9)$$

把(4.8)式代入上式, 出现 δ 函数的平方. 我们可以把它作如下处理. 由(4.6)式, $|\mathbf{B}_\omega|^2$ 含有因子

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\frac{1}{v} - \frac{n}{c}\cos\theta)x_e} dx_e \right|^2.$$

我们把其中一个因子变为 δ 函数(4.7)式. 由于有这个 δ 函数因子, $\frac{1}{v} - \frac{n}{c} \cos\theta$ 只能取值 = 0, 因此, 另一个因子可写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta} dx_e = \int_{-\infty}^{\infty} dx_e,$$

因此,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \left(\frac{1}{v} - \frac{n}{c} \cos\theta \right) x_e} dx_e \right|^2 = 2\pi \delta \left(\frac{\omega}{v} - \frac{\omega n}{c} \cos\theta \right) \int_{-\infty}^{\infty} dx_e. \quad (4.10)$$

最后一个因子是粒子所走的无穷大路程. 这无穷大的出现也是我们作了简化假设的结果. 事实上, 粒子在介质中只走过有限的路程. 当路程 $L \gg$ 辐射波长时, 以上的计算仍然近似适用, 但 $\int_{-\infty}^{\infty} dx_e$ 应代为 L . 由(4.8)一(4.10)式我们得出粒子走过单位路

程时的单位频率间隔辐射能量角分布

$$\begin{aligned}\frac{d^2W_\omega}{d\Omega dL} &= \frac{e^2\omega^2n}{8\pi^2\epsilon_0c^3}\sin^2\theta \delta\left(\frac{\omega}{v} - \frac{\omega n}{c}\cos\theta\right) \\ &= \frac{e^2\omega^2n}{8\pi^2\epsilon_0c^3}\left(1 - \frac{c^2}{n^2v^2}\right)\delta\left(\frac{\omega}{v} - \frac{\omega n}{c}\cos\theta\right).\end{aligned}\quad (4.11)$$

δ 函数因子表示只有在 $\cos\theta = \frac{c}{nv}$ 方向上才有辐射. 单位路程单位频率间隔的辐射能量为

$$\begin{aligned}\frac{dW_\omega}{dL} &= \frac{e^2\omega^2n}{8\pi^2\epsilon_0c^3}\left(1 - \frac{c^2}{n^2v^2}\right) \oint \delta\left(\frac{\omega}{v} - \frac{\omega n}{c}\cos\theta\right) d\Omega \\ &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0c^2}\left(1 - \frac{c^2}{n^2v^2}\right)\omega.\end{aligned}\quad (4.12)$$

若计及折射率对 ω 的依赖关系 $n^2 = \epsilon(\omega)$, 可得

$$\frac{dW_\omega}{dL} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0c^2}\left[1 - \frac{c^2}{v^2\epsilon(\omega)}\right]\omega. \quad (4.13)$$

$$[\epsilon(\omega) > c^2/v^2].$$

在 §6 中我们研究介质的色散理论, 导出函数 $\epsilon(\omega)$ 的形式. 图 7-12 表典型的 $\epsilon(\omega)$ 曲线. 由图可见, 仅在一定的频率范围内满足 $\epsilon(\omega) > c^2/v^2$, 因此, 切伦柯夫辐射的频谱只包含这一频段. 由于 $\cos\theta_c = c/v\sqrt{\epsilon}$, 不同频率的电磁波的辐射角亦略有不同. 用滤波器选择一定的频带, 可以得到确定的 θ_c 值, 因而测定辐射角 θ_c 就可以定出粒子的速度 v . 现在切伦柯夫辐射广泛应用于粒子计数器中, 它的优点是只记录大于一定速度的粒子, 因而避免了低速粒子的干扰, 而且可以准确测量出粒子的运动速度.

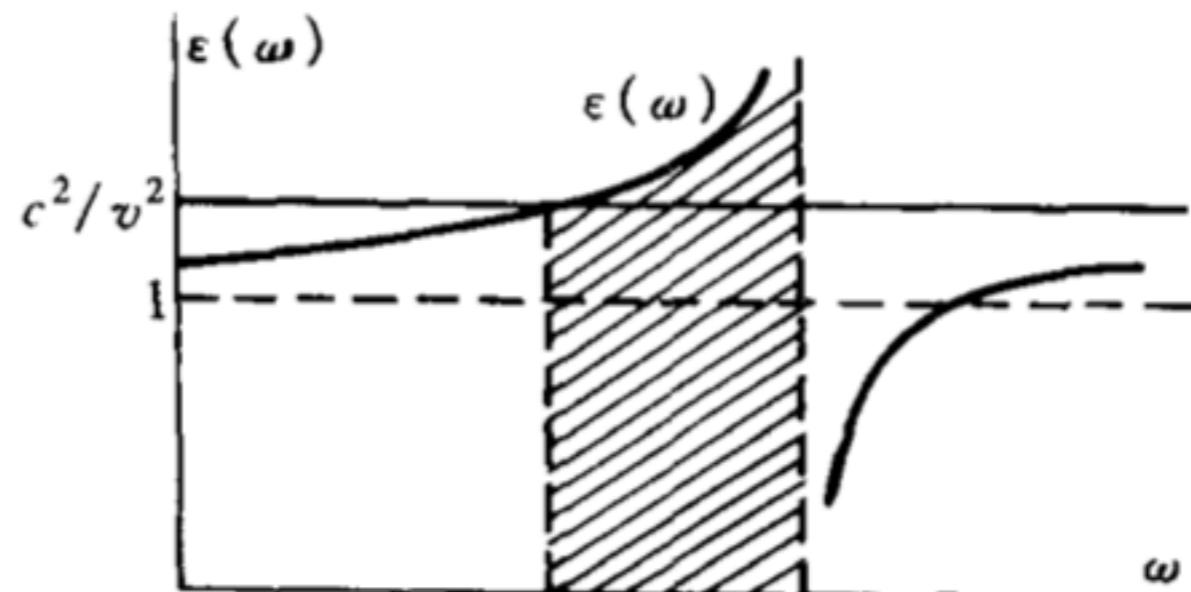
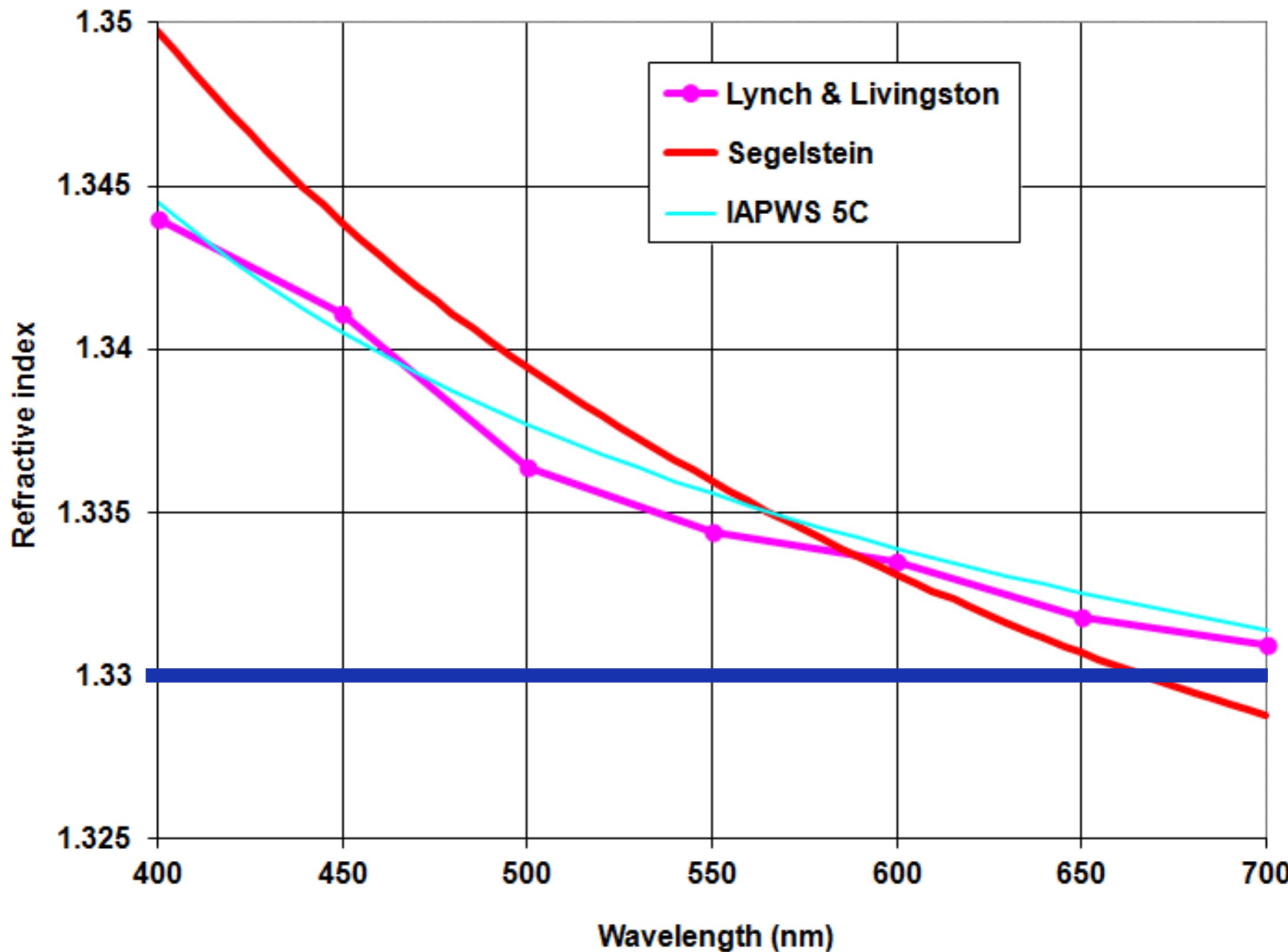


图 7-12



[课下自学]

7.5 back reaction

在以上各章我们指出,电荷和电磁场是相互作用的,一方面电荷激发电磁场,另一方面电磁场又对电荷有反作用.要完全解决电荷与电磁场系统的动力学问题,必须把两者之间的相互作用同时考虑,才能解出粒子的运动以及电磁场.

前几节研究带电粒子的辐射问题时,我们假设已经知道粒子的运动方程 $x = x_e(t)$,然后由粒子的加速度 \dot{v} 计算出辐射电磁场.这种做法显然是近似的.因为当粒子辐射电磁场时,一部分能量和动量被电磁场带走,因而粒子的运动必然受到阻尼.因此,粒子的运动不是单纯被外场作用力决定的,粒子所激发的场对粒子本身也有作用力.为了完全解出粒子的运动和它所辐射出的电磁场,必须在粒子的动力学方程中包含辐射场的反作用力在内.本节我们先研究一个带电粒子所激发的电磁场对粒子本身的反作用,然后讨论把反作用力考虑在内的带电粒子运动方程.通过研究表明,这个问题牵涉到粒子内部结构等根本性的物理问题,在经典电动力学范围内,这个问题是不可能完全解决的.因此,本节的理论是不完备的,它只能应用到某些特殊问题上.

1. 电磁质量 任意运动带电粒子的电磁场包括两个部分,一部分是存在于粒子附近的场,当粒子静止时它就是库仑场,当粒子运动时它和速度有关,可由库仑场作洛伦兹变换而得.这部分的特点是场量与 r^2 成反比,其能量主要分布于粒子附近,因此称为粒子的自场.另一部分是当粒子加速时激发的辐射场.这部分的特点之一是场量与 r 成反比,其能量可以辐射到任意远处.

现在先讨论自场对粒子的反作用.自场总是和粒子不可分割地联系在一起的,它的能量不能从粒子运动能量中分离出去.因此,当我们测量一个粒子的能量时,总是把这部分能量包括在内.根据相对论质能关系,一定的能量必然与一定的惯性质量相联系.

因此,测量出的粒子质量也必然包括自场的质量在内.这部分质量称为粒子的电磁质量,它不能从粒子的总质量中分离出来.

为了求出粒子的电磁质量,只需计算一个静止粒子的库仑场的总能量.库仑场的总能量依赖于粒子内部的电荷分布,不同的电荷分布有不同的总能量,但对一定大小的带电粒子来说,其数量级是相同的.为简单起见,假设粒子的电荷分布于半径为 r_e 的球面上.库仑场能量为

$$W = \int \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{r_e}^{\infty} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \\ = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_e} \quad (5.1)$$

由相对论质能关系,电磁质量为

$$m_{em} = \frac{W}{c^2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_e c^2}. \quad (5.2)$$

电磁质量 m_{em} 包括在测量出的电子质量 m 之内.电子质量除了电磁质量之外还可能有其他来源.以 m_0 表示非电磁起源的质量,则电子质量 m 为

$$m = m_0 + m_{em}. \quad (5.3)$$

电子质量的两部分用通常的测量方法是不能分离的.而且由于不知道电子内部电荷分布形状和电子的“半径” r_e ,用经典理论实际上也不能准确算出电磁质量的值.作为数量级估计,如果电子质量有显著的部分是来自电磁质量的话,由(5.2)和(5.3)式有

$$m \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_e c^2}.$$

通常定义经典电子半径为

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} = 2.81794092(38) \times 10^{-15} \text{ m}. \quad (5.4)$$

在高斯单位制中,

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2}. \quad (5.5)$$

经典电子半径 r_e 是由基本常数 e , m 和 c 构成的具有长度量纲的一个量, 在原子物理学中常引用到. 但我们必须注意, 在这线度内经典电动力学已不适用, 因而上面用经典模型描绘的电子结构图象不可能是正确的.

近年来由高能物理学实验的结果, 我们对有强相互作用(核力作用)的粒子(如质子、中子等)的电荷分布形状有一定的了解. 测定这些粒子电荷分布的均方根半径数量级为 10^{-15}m . 这数量级虽然和(5.5)式相符, 但其物理起源完全不同. 对这些粒子来说, 决定粒子大小的相互作用并不是电磁相互作用, 而是强相互作用. 对于象电子、 μ 子等没有强相互作用的粒子, 目前实验还不能定出它们的内部结构. 现有实验表明, 在直到 $\sim 10^{-18}\text{m}$ 范围内, 电子仍然象是一个点粒子. 虽然可以肯定电子内部是有结构的, 但是目前实验还未深入到揭示电子内部结构的线度之内. 从这些实验事实看出, 经典电子半径 r_e 根本不能正确反映电子内部结构的线度. 我们主要是把它作为一个具有长度量纲的量来引用.

虽然经典电动力学不能正确地描述电子的内部结构, 但是电磁质量的概念在量子理论中仍然是重要的. 在电子质量中, 很可能有一部分属于电磁质量. 但是在目前量子理论仍然未能计算出电子的电磁质量.

2. 辐射阻尼 现在我们研究带电粒子在加速时激发的电磁场对粒子本身的反作用力. 通常我们用给定的外力来控制带电粒子的运动. 例如在电子加速器中, 用给定的电磁场作用到电子上, 使电子作直线或圆周形的加速运动. 当电子受外力作用而加速时, 它辐射出电磁波, 把部分能量辐射出去, 因而粒子受到一个阻尼力. 以 \mathbf{F}_e 代表外力, \mathbf{F}_s 代表粒子激发的场对粒子本身的反作用力, 则粒子的运动方程应为

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_s. \quad (5.6)$$

现在我们从能量守恒的要求来考察 \mathbf{F}_s 应取什么形式. 为简单起见, 只讨论低速情形. 当粒子有加速度 $\ddot{\mathbf{v}}$ 时, 由(1.14)式, 它的辐射功率为

$$P = \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (5.7)$$

由于有能量辐射, 使粒子受到阻尼力 \mathbf{F}_s , 阻尼力对粒子所作的负功率应等于辐射功率, 因此

$$\mathbf{F}_s \cdot \mathbf{v} = -\frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (5.8)$$

稍加考虑可以看出上式是有问题的. 因为辐射功率的公式(5.7)是我们由远场计算出来的. 但当粒子加速时, 除了辐射能量之外, 粒子附近的场(包含与 r^2 成反比和与 r 成反比两项的叠加)亦发生变化, 因此严格应用能量守恒定律时, 应该把粒子附近电磁场能量的变化考虑在内, 而在(5.8)式中没有考虑到这一点. 因此(5.8)式不可能是对每一瞬时都成立的公式. 这点也可以由下述考虑看出: 粒子在某一瞬时的速度 \mathbf{v} 和加速度 $\ddot{\mathbf{v}}$ 一般是不相关的量, (5.8)式右边不能表为一个力乘上速度 \mathbf{v} 的形式, 因此(5.8)式不可能是每一瞬时成立的. 但是在一些重要的特殊情况, 由(5.8)式可以得到表示平均阻尼效应的 \mathbf{F}_s 的公式. 例如粒子作准周期运动情形, 当粒子运动一周后, 粒子附近的场回到原状态, 因此这时阻尼力所作的负功等于辐射出去的能量, 即(5.8)式对一周期积分是成立的. 设周期为 T , 有

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} \mathbf{F}_s \cdot \mathbf{v} dt &= - \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} dt \\ &= -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \Big|_{t_0}^{t_0+T} + \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt. \end{aligned}$$

当粒子运动一周后, \mathbf{v} 和 $\dot{\mathbf{v}}$ 回到原值, 因而上式右边第一项为零. 因此, 对一周期平均效应而言, 可取

$$\mathbf{F}_s = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{v}}. \quad (5.9)$$

F_s 称为粒子的自作用力. 由推导过程可知, 上式不是对每一瞬时成立的公式, 它只代表一种平均效应.

把带电粒子看作有一定电荷分布的小球体, 可以导出 F_s 的瞬时表示式. 但是这种推导牵涉到粒子内部结构等根本性问题, 而我们已经看到, 经典电动力学在这范围内是不适用的. 事实上, 用经典理论对自作用力瞬时值的推导都含有一些内在矛盾. 因此, 我们只把自作用力公式作为某些情况下平均效应的公式来应用.

概括起来, 带电粒子激发的电磁场对粒子本身的反作用可以分为两部分. 一部分表现为电子的电磁质量, 其效果已经包括在测量出的电子质量 m 之内, 因而在具体计算中不必再考虑它. 另一部分是辐射阻尼力, 这部分是可观测的自作用力, 在研究带电粒子运动时应把这种自作用力考虑在内.

3. 谱线的自然宽度 在原子内, 电子在两能级之间跃迁产生一定频率的辐射, 在光谱中表现为一条谱线. 谱线不是精确地单色的, 而是具有一定的频率分布宽度. 现在我们研究产生谱线宽度的内在原因.

用经典电动力学不能建立原子辐射的正确理论. 但是, 在研究某一现象时, 我们可以建立一定的模型, 对该现象的物理本质作出一定程度的分析.

一个经典振子辐射出一定频率的电磁波, 因此我们就用一个经典振子作为研究谱线宽度的模型, 分析产生谱线宽度的原因. 设振子在 x 轴上运动, 弹性恢复力为 $-\kappa x$, 则振子运动方程为

$$m\ddot{x} + \kappa x = F_s. \quad (5.10)$$

式中 F_s 为自作用力. 令 $\kappa/m = \omega_0^2$, 并把自作用力(5.9)式代入上式得

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} x. \quad (5.11)$$

在原子辐射情形, 自作用力比起弹性力是很小的(下面再具体验证这一点). 先忽略自作用力, 得谐振子运动方程

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

其解为谐振动

$$x = x_0 e^{-i\omega_0 t}, \quad (5.12)$$

ω_0 为振子的固有频率, x_0 为振幅.

现在我们加入阻尼力. 由近似解(5.12)式, 可令 $\ddot{x} \approx -\omega_0^2 \dot{x}$, 因而(5.11)式变为阻尼振子的运动方程

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (5.13)$$

式中

$$\gamma = \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}. \quad (5.14)$$

设(5.13)式的解具有形式

$$x = x_0 e^{-i\omega t}, \quad (5.15)$$

代入(5.13)式得 $\omega^2 + i\gamma\omega - \omega_0^2 = 0$, 当 $\gamma \ll \omega_0$ 时有

$$\omega \approx \omega_0 - \frac{i}{2}\gamma. \quad (5.16)$$

因此阻尼振子的解为

$$x = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega_0 t}. \quad (5.17)$$

在上面的解法中, 我们把阻尼力作为微扰来处理, 这只有在阻尼力远小于弹性恢复力的情形下才适用, 即要求满足条件 $\gamma \ll \omega_0$. 由(5.14)和(5.4)式, 此条件可写为 $r_e \omega_0 / c \ll 1$, 或

$$r_e \ll \lambda / 2\pi. \quad (5.18)$$

其中 λ 为辐射波长. 由于 $r_e \sim 10^{-15} \text{ m}$, 而对原子辐射来说, $\lambda \sim 10^{-7} \text{ m}$, 因此条件(5.18)式总是满足的.

解(5.17)式代表一个振幅不断衰减的振子. 振子能量衰减到原值 $1/e$ 的时间为振子的寿命. 由于振子能量正比于振幅的平方, 因此振子的寿命为

$$\tau = \frac{1}{\gamma}. \quad (5.19)$$

由于振子振幅衰减,它所辐射出的电磁波也不断减弱.设振子于某时刻开始激发,则在空间某点上观察到的电场强度为

$$E(t) = \begin{cases} E_0 e^{-\frac{1}{2}\pi e^{-i\omega_0 t}} & t > 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases} \quad (5.20)$$

式中 $t=0$ 代表最初激发的电磁波传至该点的时刻.(5.20)式不是纯正弦波,用频谱分析可以把它分解为不同频率正弦波的叠加. $E(t)$ 的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} E_\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} E_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= \frac{E_0}{2\pi i} \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\frac{\gamma}{2}}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

单位频率间隔的辐射能量正比于 $|E_\omega|^2$, 即

$$W_\omega \propto \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}.$$

以 W 表示总辐射能量,有

$$W_\omega = \frac{W}{2\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (5.22)$$

图 7-13 画出 W_ω 对 ω 的曲线.当 $\omega = \omega_0$ 时 W_ω 有极大值;当 $|\omega - \omega_0| = \frac{\gamma}{2}$ 时, W_ω 降为极大值的一半.因此, γ 称为谱线宽度,它等于振子寿命的倒数.

谱线宽度用波长 λ 表为

$$\Delta\lambda = \left| \Delta \left(\frac{2\pi c}{\omega} \right) \right| = \frac{2\pi c}{\omega_0^2} \Delta\omega = \frac{2\pi c}{\omega_0^2} \gamma.$$

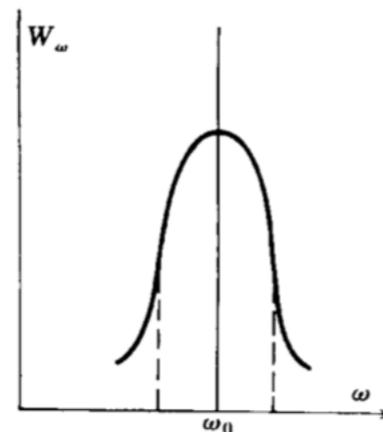


图 7-13

把(5.14)式代入得

$$\Delta\lambda = \frac{e^2}{3\epsilon_0 mc^2} \approx 1.2 \times 10^{-4} \text{ Å}. \quad (5.23)$$

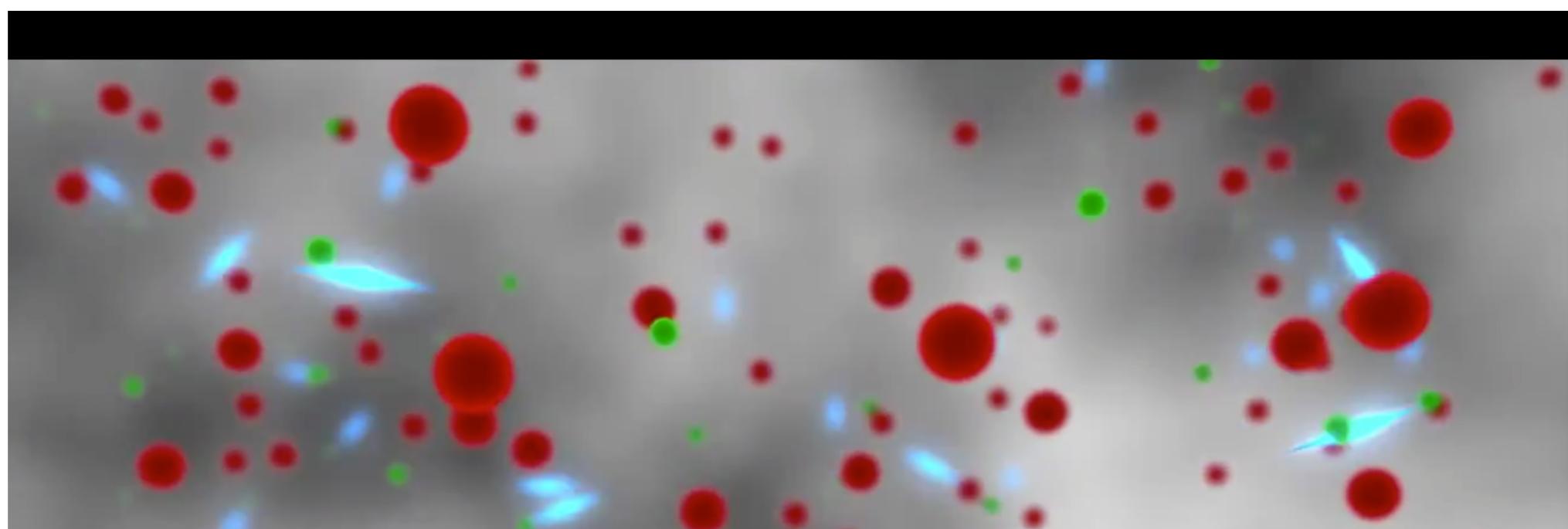
用经典振子作为原子辐射模型时,用波长 $\Delta\lambda$ 表出的谱线宽度为一个常数.但事实上原子谱线宽度的变化很大.有些谱线的宽度接近于经典宽度,而另一些谱线的宽度则远小于经典宽度.这事实表明原子辐射机制是不能完全用经典振子解释的.但是辐射反作用的概念以及寿命和宽度的关系是有普遍意义的.原子内电子由一激发态跃迁到较低能态时产生一定频率的辐射.由于辐射,原子激发态有一定的寿命.跃迁几率愈大,则辐射愈强,激发态寿命愈短,因而谱线宽度亦愈大.关系式 $\tau = 1/\gamma$ 仍然成立.

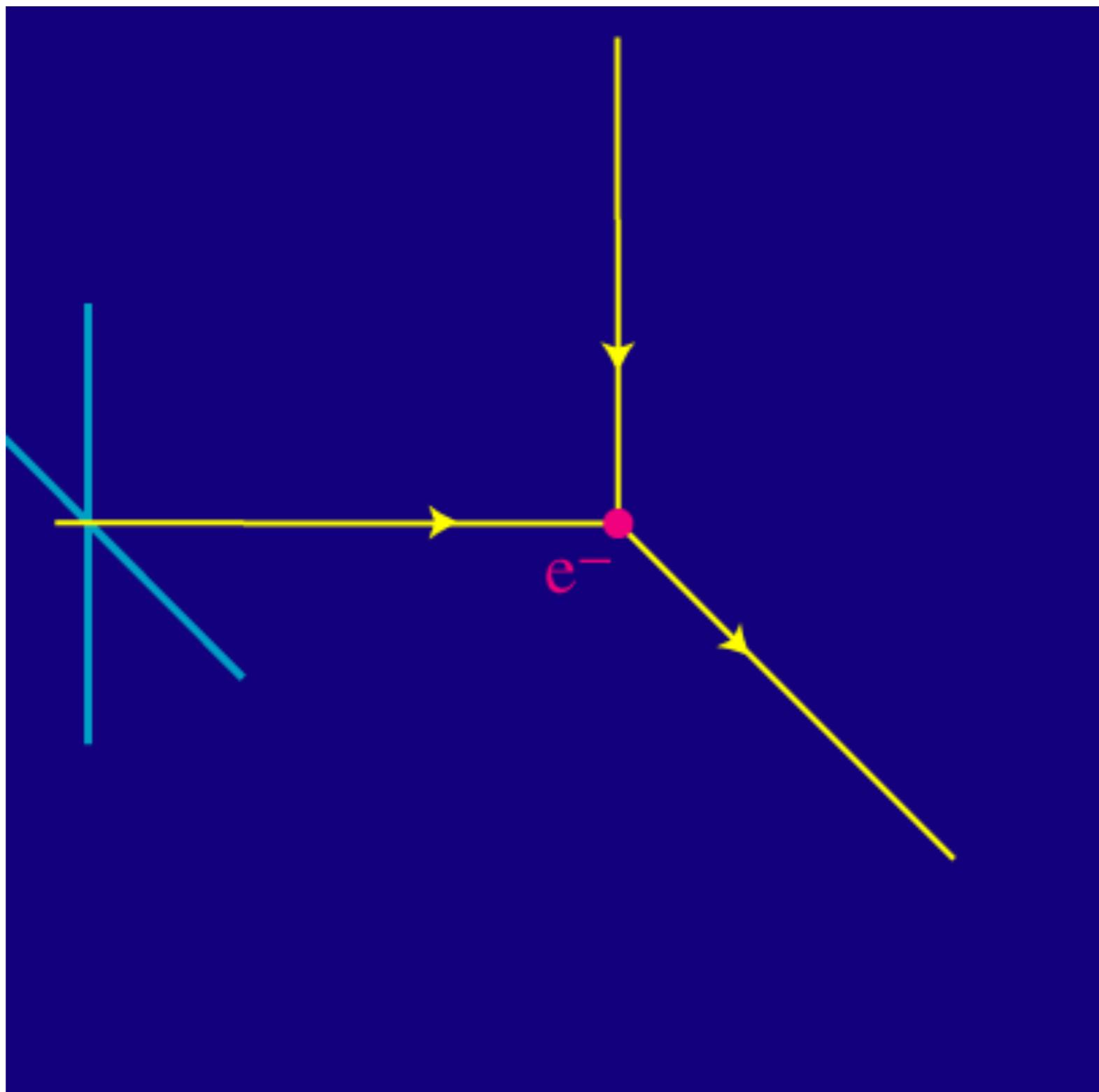
原子处于基态时是稳定的,不会产生辐射,这点是和经典理论有深刻矛盾的.按照经典理论,电子在原子核电场作用下运动,由于有加速度,必然向外辐射电磁波,因而电子运动的能量亦逐渐衰减,最后电子会掉到原子核内,因而根本不存在稳定的原子.这结论是和客观事实完全矛盾的.只有用量子理论才能解释基态的稳定性.

7.6 Scattering

当一定频率的外来的电磁波投射到电子上时,电磁波的振荡电场作用到电子上,使电子以相同频率作强迫振动.振动着的电子向外辐射出电磁波,把原来入射波的部分能量辐射出去,这种现象称为电磁波的散射.

本节先讨论自由电子对电磁波的散射,然后讨论束缚电子的情形,最后我们把这种微观理论应用到宏观物质中去,研究介质的





[credit: W. Hu]

介电常数随频率变化的规律,即介质的色散现象.

1. 自由电子对电磁波的散射 假设电子在外来电磁波作用下,它的运动速度 $v \ll c$. 在这情形下,电子运动的振幅 $\sim vT \ll cT = \lambda$, 其中 T 为周期, λ 为入射波的波长. 由于电子运动范围线度远小于波长, 我们可以用一固定点上的电场强度来代表作用于电子上的电场强度. 又因为 $v \ll c$, 而电磁波磁场作用力与电场作用力之比 $\sim v/c \ll 1$, 因此可忽略入射波的磁场对电子的作用力. 设入射波的电场强度为 $E_0 e^{-i\omega t}$, 包括自作用力在内的电子运动方程为

$$\vec{B} = \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}$$
$$\ddot{\vec{x}} - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m} \vec{x} = \frac{e}{m} E_0 e^{-i\omega t}. \quad (6.1)$$

[Sec. 7.5]

这方程的稳态解是频率为 ω 的强迫振动, 因而阻尼力中的 $\ddot{\vec{x}}$ 可代为 $-\omega^2 \dot{\vec{x}}$. 令

$$\gamma = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 m c^3} \quad (6.2)$$

电子运动方程可写为

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = \frac{e}{m} E_0 e^{-i\omega t}. \quad (6.3)$$

设 $x = x_0 e^{-i\omega t}$, 代入上式得

$$x_0 = -\frac{eE_0}{m(\omega^2 + i\omega\gamma)}. \quad (6.4)$$

由条件(5.18)式, 只要入射波的波长 $\lambda \gg r_e$, 则 $\gamma \ll \omega$, 因而阻尼力项可以忽略, 在这情形下(6.4)式可写为

$$x_0 = -\frac{eE_0}{m\omega^2} \quad \text{经典电子半径} \quad (6.5)$$

因而电子作强迫振动

$$x = -\frac{eE_0}{m\omega^2} e^{-i\omega t}. \quad (6.6)$$

由(1.12)式, 电子振动时所辐射的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{x}}), \quad (6.7)$$

式中 \mathbf{n} 为辐射方向单位矢量. 以 α 表示 \mathbf{n} 与入射场强 \mathbf{E}_0 的夹角, 得散射波的电场强度

$$E = \frac{e\ddot{x}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \sin\alpha = \frac{e^2 E_0}{4\pi\epsilon_0 m c^2 r} \sin\alpha. \quad (6.8)$$

平均散射能流为

$$\overline{S} = \frac{e^4 E_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 m^2 r^2} \sin^2\alpha = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \frac{r_e^2}{r^2} \sin^2\alpha, \quad (6.9)$$

式中 r_e 为经典电子半径.

入射波强度 I_0 定义为平均入射能流

$$I_0 = \overline{S}_0 = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2. \quad (6.10)$$

散射波能流(6.9)式可写为

$$\overline{S} = \frac{r_e^2}{r^2} \sin^2\alpha I_0. \quad (6.11)$$

\bar{S} 对球面积分得散射波总平均功率

$$P = \oint \bar{S} r^2 d\Omega = \frac{8\pi}{3} r_e^2 I_0. \quad (6.12)$$

这公式称为汤姆孙散射公式. 由于 I_0 是每秒垂直入射于单位截面上的能量, 由上式可见, 被散射的能量相当于入射到面积为 $\frac{8\pi}{3} r_e^2$ 的截面上的能量, 这面积称为自由电子对电磁波的散射截面, 以 σ 表示.

$$\sigma = \frac{\text{散射功率}}{\text{单位面积入射功率}} = \frac{P}{I_0} = \frac{8\pi}{3} r_e^2. \quad (6.13)$$

σ 称为汤姆孙(Thomson)散射截面.

$4\pi r_e^2$?

现在计算散射波的角分布. 取坐标系如图7-14所示. 设入射波沿 z 轴方向传播, 其电场强度 \mathbf{E}_0 与 x 轴的夹角为 ϕ . 设场点 P 在 xz 平面上, r 与 z 轴夹角为 θ , 与 \mathbf{E}_0 夹角为 α . α 与 θ, ϕ 间有关系

$$\cos\alpha = \sin\theta \cos\phi. \quad (6.14)$$

入射波一般是非偏振的, 因此我们把(6.11)式对 ϕ 求平均.

由

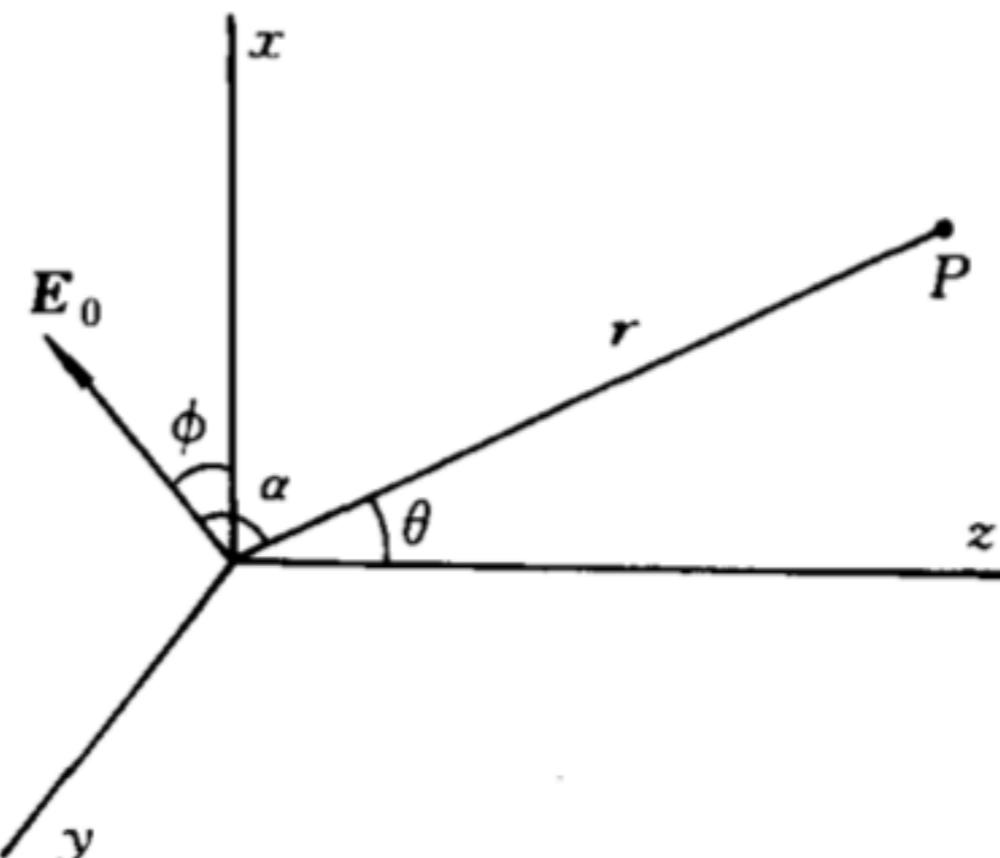


图 7-14

$$\overline{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi) d\phi = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta), \quad (6.15)$$

得对非偏振入射波的平均散射能流

$$\overline{S} = \frac{r_e^2}{r^2} \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) I_0. \quad (6.16)$$

单位立体角的散射功率与入射波强度 I_0 之比称为微分散射截面, 记为 $d\sigma/d\Omega$. 由(6.16)式得汤姆孙散射微分截面

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2}(1 + \cos^2 \theta).} \quad (6.17)$$

散射截面曲线如图 7-15 所示. 当入射光子能量远小于电子静止能量时, 即 $\hbar\omega \ll mc^2$, 实验结果与(6.17)式相符. 但当 $\hbar\omega$ 增大时, 散射波逐渐倾向前方, 而向后($\theta = \pi$)的散射减弱, 与汤姆孙散射公式有偏离, 如图中虚线所示. 用量子电动力学可以得到与实验完全相符的结果.

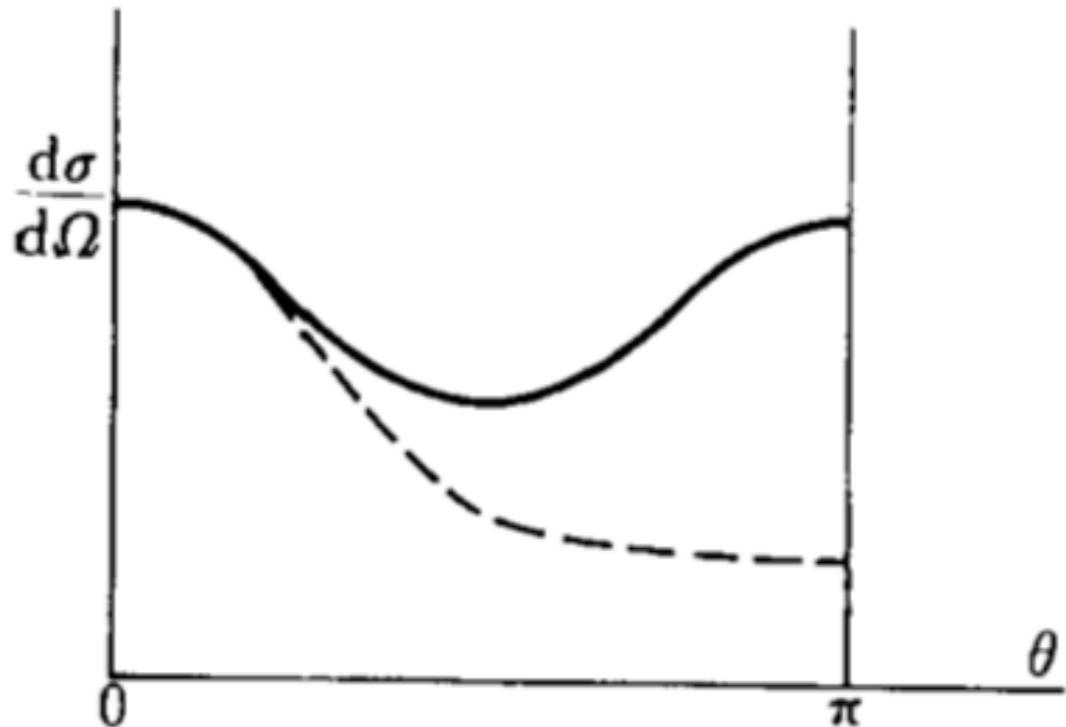


图 7-15

2. 束缚电子的散射 现在研究外来自电磁波投射到原子内束

束缚电子而被散射的情况.我们用谐振子作为原子内束缚电子的模型.设振子的固有频率为 ω_0 ,则在入射波电场 $E_0 e^{-i\omega t}$ 作用下的振子运动方程为

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \boxed{\omega_0^2 x} = \frac{e}{m} E_0 e^{-i\omega t}, \quad (6.18)$$

其中 γ 由(6.2)式给出.以 $x = x_0 e^{-i\omega t}$ 代入得这方程的稳态解

$$\begin{aligned} x &= \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} E_0 e^{-i\omega t} \\ &= \frac{e}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} E_0 e^{-i(\omega t - \delta)}, \\ \operatorname{tg} \delta &= \frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

散射波电场强度为

$$E = \frac{e \ddot{x}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \sin \alpha,$$

α 为散射方向与入射波电场 E_0 的夹角, 平均散射能流为

$$\bar{S} = \frac{e^4 E_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 m^2 r^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \sin^2 \alpha. \quad (6.20)$$

对球面积分得散射功率

$$P = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} I_0, \quad (6.21)$$

由此得散射截面

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}. \quad (6.22)$$

下面讨论几个不同频率范围下的截面:

(1) $\omega \ll \omega_0$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4, \quad (6.23)$$

即低频散射截面与 ω^4 成正比, 这种散射称为瑞利(Rayleigh)散射.

Why SKY is blue?



(2) $\omega \gg \omega_0$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2,$$

即过渡到自由电子散射.

(3) $\omega = \omega_0$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \left(\frac{\omega}{\gamma} \right)^2. \quad (6.24)$$

由于 $\omega_0 \gg \gamma$, 因此当 $\omega = \omega_0$ 时散射截面远远超出汤姆逊散射截面. 在这频率下散射截面有尖锐的极大值, 这现象称为共振现象.

3. 电磁波的吸收 在共振情形下, 入射波能量被振子强烈地吸收, 振子振幅增大, 直到由振子辐射出去的能量等于振子所吸收的入射波能量时, 振幅才达到稳定值. 当具有连续谱的电磁波投射到电子上时, 只有 $\omega \approx \omega_0$ 部分才被强烈吸收, 因而形成一条吸收谱线. 现在我们计算电子所吸收的入射波能量.

设入射波单位频率间隔入射于单位面积的能量为 $I_0(\omega)$, 把(6.21)式对 ω 积分, 得振子辐射的总能量

$$W = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \int_0^\infty \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} I_0(\omega) d\omega. \quad (6.25)$$

在上式积分中, 主要贡献来自 $\omega \approx \omega_0$ 处, 因而可以把 $I_0(\omega)$ 换作 $I_0(\omega_0)$ 而抽出积分号外. 在被积函数中, 除了因子 $\omega_0 - \omega$ 之外, 其余的 ω 都换作 ω_0 , 得

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} d\omega &\approx \frac{\omega_0^2}{4} \int_0^\infty \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\omega_0^2}{4} \int_{-\omega_0}^\infty \frac{du}{u^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \quad (u = \omega - \omega_0). \end{aligned}$$

由于 $\omega_0 \gg \gamma$, 可以把下限近似地取为 $-\infty$, 上式积分结果为 $\pi\omega_0^2/2\gamma$. 最后我们得到

$$W = 2\pi^2 r_e c I_0(\omega_0). \quad (6.26)$$

由能量守恒定律,上式也等于振子从入射波中吸收的总能量.共振现象是能量的吸收和再放射过程.

在经典理论中,我们用振子来代表一个束缚电子的运动.经典振子的固有频率对应于量子力学中从一能级到另一能级的能量差除以 \hbar ,即 $\omega_0 = \Delta E / \hbar$.当入射波频率 $\omega \approx \Delta E / \hbar$ 时,入射波能量被原子吸收,电子从基态跃迁到一个激发态.当电子从激发态跃迁回基态时,再放射出所吸收的能量.

4. 介质的色散 现代物理学的一个重要研究方向是用微观动力学机制来研究宏观物质的性质.关于宏观物质的电磁性质的讨论已超出本书范围之外,在这里我们只举出介质的色散问题作为一个特例来说明微观理论对宏观现象的应用.

当电磁波入射到介质内时,由电子散射的次波互相叠加,形成在介质内传播的电磁波.介质的宏观电磁现象决定于极化强度 P 和磁化强度 M 两个物理量,因此只需要研究这两个量对入射波场强和频率的依赖关系.这里我们限于讨论非铁磁物质,并只研究稀薄气体情况.

设介质中单位体积电子数为 N , 设每个电子以固有频率 ω_0 振动. 在稀薄气体近似下, 忽略分子之间的相互作用, 可以认为作用于电子上的电场等于外电场 \mathbf{E} . 设入射电磁波的电场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}.$$

在这外电场作用下, 由(6.19)式得介质的电极化强度

$$\mathbf{P} = N e \mathbf{x} = \frac{N e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \mathbf{E}, \quad (6.27)$$

由此得介质的电容率

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{N e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}. \quad (6.28)$$

相对电容率的实部 ϵ_r' 和虚部 ϵ_r'' 分别为

$$\epsilon_r' = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}, \quad (6.29)$$

$$\epsilon_r'' = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{\omega \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}.$$

实部 ϵ_r' 对 ω 的依赖关系称为色散, 虚部 ϵ_r'' 引起电磁波的吸收.

ϵ_r' 和 ϵ_r'' 对 ω 的依赖关系如图 7-16 所示. ϵ_r'' 在 $\omega = \omega_0$ 处有尖锐的极大值, 离 ω_0 较远处 $\epsilon_r'' \approx 0$.

以上假设电子只有一个固有频率 ω_0 . 实际上在原子中电子有多个固有频率 ω_i , 对应于从基态到不同激发态

的能量差除以 \hbar . 设单位体积固有频率为 ω_i 的电子数目为 Nf_i , 其中 f_i 为一分数, $\sum_i f_i = 1$. (6.28) 式应改为

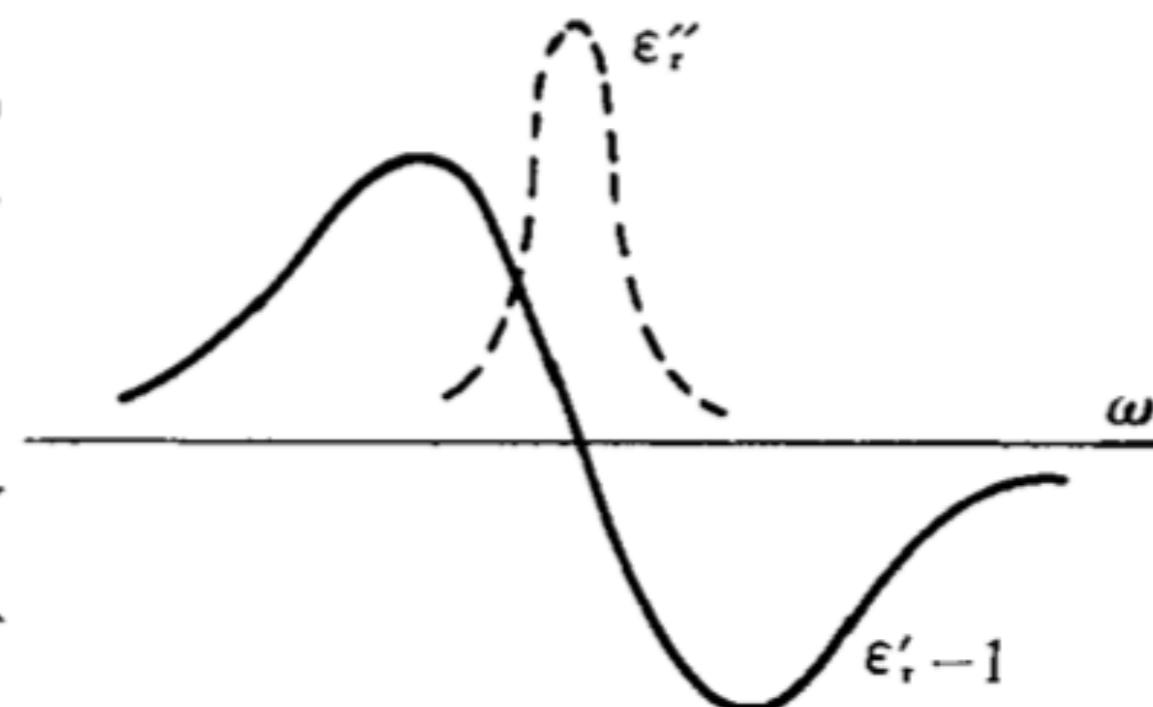


图 7-16

$$\epsilon = \epsilon_0 + \sum_i \frac{Ne^2}{m} \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i}, \quad (6.30)$$

γ_i 为第 i 个振子的阻尼系数.

介质的复折射率 $n + i\eta$ 为

$$n + i\eta = \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{\epsilon_r' + i\epsilon_r''}.$$

复折射率的实部 n 是通常测定的折射率. 由上式及(6.30)式得

$$\begin{aligned} n^2 - \eta^2 &= 1 + \sum_i \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{f_i(\omega_i^2 - \omega^2)}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma_i^2}, \\ \eta m &= \sum_i \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \frac{f_i\omega\gamma_i}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma_i^2}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

用量子力学可以推出类似的公式, 但 f_i 具有完全不同的意义, 它与电子从基态到第 i 个激发态的跃迁几率有关, 而且

$$\sum_i f_i \neq 1.$$