

# 电动力学B

Bin HU

[bhu@bnu.edu.cn](mailto:bhu@bnu.edu.cn)

Astro@BNU

Office: 南院F座101

# 3. 静磁场

稳恒电流产生的磁场

# 3.1 矢势&微分方程

我们考察恒定电流分布所激发的静磁场. 在给定的传导电流附近可能存在一些磁性物质, 在电流的磁场作用下, 物质磁化而出现磁化电流, 它反过来又激发附加的磁场. 磁化电流和磁场是互相制约的. 因此解决这类问题的方法也象解静电学问题一样, 即求微

1. 矢势 恒定电流磁场的基本方程是

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.2)$$

式中  $\mathbf{J}$  是自由电流密度.(1.1)和(1.2)式结合物质的电磁性质方程是解磁场问题的基础.

磁场的特点和电场不同.静电场是有源无旋场,电场线从正电荷出发而止于负电荷,静电场线永不闭合.静磁场则是有旋无源场,磁感应线总是闭合曲线.由于特性上的显著差异,描述磁场和电场的方法就有所不同.静电场由于其无旋性,可以引入标势来描述.磁场由于其有旋性,一般不能引入一个标势来描述整个空间的磁场,但是由于磁场的无源性,我们可以引入另一个矢量来描述它.根据矢量分析的定理(附录 I .17 式),

若

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

则  $\mathbf{B}$  可表为另一矢量的旋度

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.3)$$

$\mathbf{A}$  称为磁场的矢势.为了看出矢势  $\mathbf{A}$  的意义,我们考察(1.3)的积

分形式. 把  $\mathbf{B}$  对任一个以回路  $L$  为边界的曲面  $S$  积分, 得

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_L \mathbf{A} \cdot dl. \quad (1.4)$$

式中左边是通过曲面  $S$  的磁通量. 由上式, 通过一个曲面的磁通量只和这曲面的边界  $L$  有关, 而和曲面的具体形状无关. 如图 3-1, 设  $S_1$  和  $S_2$  是两个有共同边界  $L$  的曲面, 则

$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

这正是  $\mathbf{B}$  的无源性的表示. 因为  $\mathbf{B}$  是无源的, 在  $S_1$  和  $S_2$  所包围

$\psi$  : 规范自由度 (冗余自由度)

格物 =》 gauge



的区域内没有磁感应线发出，也没有磁感应线终止， $\mathbf{B}$  线连续地通过该区域，因而通过曲面  $S_1$  的磁通量必须等于通过曲面  $S_2$  的磁通量。这磁通量由矢势  $\mathbf{A}$  对  $S_1$  或  $S_2$  的边界  $L$  的环量表示。

因此，矢势  $\mathbf{A}$  的物理意义是它沿任一闭合回路的环量代表通过以该回路为界的任一曲面的磁通量。只有  $\mathbf{A}$  的环量才有物理意义，而每点上的  $\mathbf{A}(x)$  值没有直接的物理意义。

由矢势  $\mathbf{A}$  可以确定磁场  $\mathbf{B}$ ，但是由磁场  $\mathbf{B}$  并不能唯一地确定矢势  $\mathbf{A}$ 。举一个简单例子可以说明这点。设有沿  $z$  轴方向的均匀磁场

$$B_x = B_y = 0, B_z = B_0,$$

其中  $B_0$  为常量。由(1.3)式

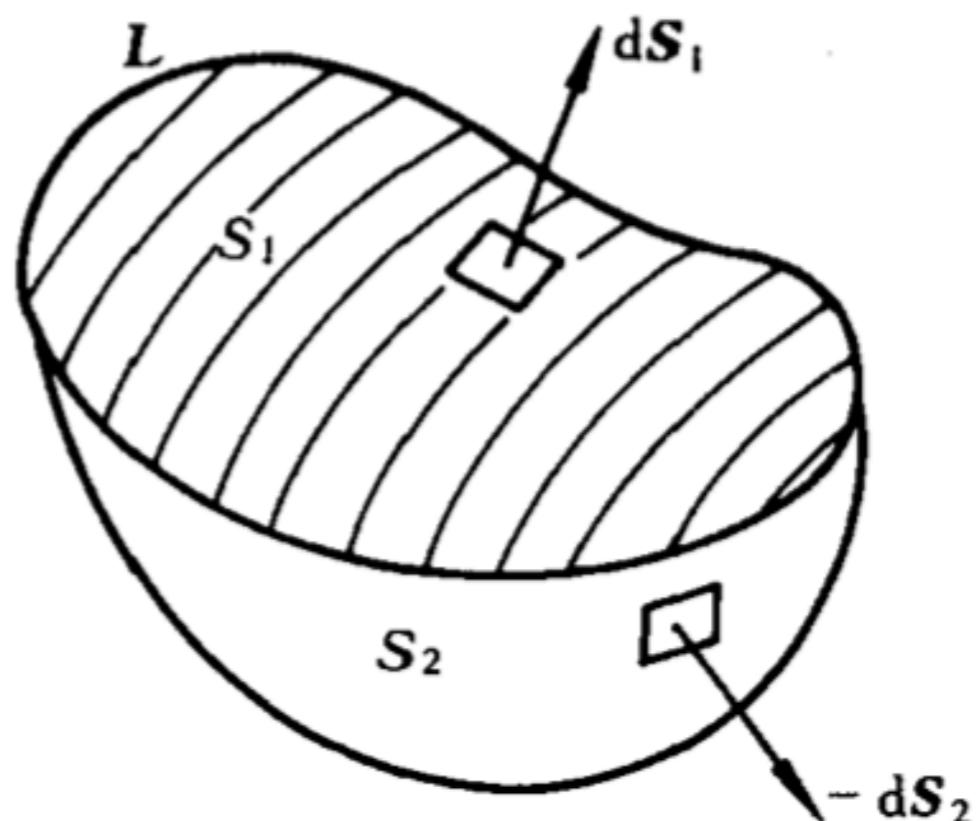


图 3-1

## 磁场

$$B_x = B_y = 0, B_z = B_0,$$

其中  $B_0$  为常量. 由(1.3)式

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0, \quad \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0.$$

不难看出有解

$$A_z = A_y = 0, A_x = -B_0 y;$$

还可以看出有另一解

$$A_z = A_x = 0, \quad A_y = B_0 x.$$

除了这两解外, 还存在其他解. 事实上, 因为任意函数  $\psi$  的梯度的旋度恒为零, 故有

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \psi) = \nabla \times \mathbf{A}.$$

即  $\mathbf{A} + \nabla \psi$  与  $\mathbf{A}$  对应于同一个磁场  $\mathbf{B}$ .  $\mathbf{A}$  的这种任意性是由于只有  $\mathbf{A}$  的环量才有物理意义, 而每点上的  $\mathbf{A}$  本身没有直接的物理意义.

由  $\mathbf{A}$  的这种任意性, 我们还可以对它加上一定的限制条件.

由下面的推导可知, 对  $\mathbf{A}$  加上辅助条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (1.5)$$

是特别方便的. 我们先说明对  $\mathbf{A}$  加上条件(1.5)式总是可以的, 也就是说总可以找到一个  $\mathbf{A}$ , 满足(1.5)式. 设有某一解  $\mathbf{A}$  不满足(1.5)式,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = u \neq 0,$$

我们另取一解

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi, \quad (1.6)$$

$\mathbf{A}'$  的散度为

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \psi = u + \nabla^2 \psi$$

取  $\psi$  为泊松方程

$$\nabla^2 \psi = -u$$

的一个解, 代入(1.6)式, 所得的  $\mathbf{A}'$  就满足  $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$ . 对  $\mathbf{A}$  所加的辅助条件称为规范条件. 下面我们所取的  $\mathbf{A}$  都满足规范条件  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ .

电磁波解中, 将其称为库仑规范或横规范

电磁力是一种规范理论。已知的四种基本相互作用，都是规范理论！冗余自由度！

**2. 矢势微分方程** 在均匀线性介质内有  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ . 把这关系和  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  代入(1.1)式, 得矢势  $\mathbf{A}$  的微分方程

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu \mathbf{J}. \quad (1.7)$$

由矢量分析公式(附录 I .25 式),

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

若取  $\mathbf{A}$  满足规范条件  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , 得矢势  $\mathbf{A}$  的微分方程

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} &= -\mu \mathbf{J}. \\ (\nabla \cdot \mathbf{A} &= 0) \end{aligned} \quad (1.8)$$

$\mathbf{A}$  的每个直角分量  $A_i$  满足泊松方程

$$\nabla^2 A_i = -\mu J_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

这些方程和静电势  $\varphi$  的方程

$$\nabla^2 \varphi = -\rho / \epsilon$$

有相同形式. 对比静电势的解第二章(1.7)式可得矢势方程(1.8)式的特解

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') dV'}{r}. \quad (1.9)$$

式中  $\mathbf{x}'$  是源点,  $\mathbf{x}$  为场点,  $r$  为由  $\mathbf{x}'$  到  $\mathbf{x}$  的距离.(1.9)式也就是我们在第一章中由毕奥 - 萨伐尔定律导出的公式(第一章 2.15 式, 该处讨论真空情形, 故  $\mu = \mu_0$ ). 在第一章中我们已证明(1.9)式满足条件  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , 因此(1.9)式确实是矢势微分方程的解.

在第一章中,我们从毕奥 - 萨伐尔定律出发,导出磁场的微分方程.本节我们把磁场的散度和旋度作为基本规律,从微分方程出发,引入矢势  $\mathbf{A}$ ,由  $\mathbf{A}$  的方程获得特解(1.9)式.求出  $\mathbf{A}$  以后,取旋度即可求出  $\mathbf{B}$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') dV'}{r} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int (\nabla \frac{1}{r}) \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} dV'.\end{aligned}\tag{1.10}$$

过渡到线电流情形,设  $I$  为导线上的电流强度,作代换  $\mathbf{J} dV' \rightarrow I d\mathbf{l}$  得

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \oint \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}.\tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(x') dV}{r} \\
 &= \frac{\mu}{4\pi} \int (\nabla \frac{1}{r}) \times \mathbf{J}(x') dV' \\
 &= \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} dV'.
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

过渡到线电流情形, 设  $I$  为导线上的电流强度, 作代换  $\mathbf{J} dV' \rightarrow I dl$  得

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \oint \frac{I dl \times \mathbf{r}}{r^3}. \tag{1.11}$$

这就是毕奥 - 萨伐尔定律.

当全空间中电流分布  $\mathbf{J}$  给定时, 由(1.9)或(1.10)式可以计算磁场. 对于电流和磁场互相制约的问题, 则必须解矢势微分方程的边值问题.

3. 矢势边值关系 由第一章(5.11)式,在两介质分界面上磁场的边值关系为

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \alpha. \quad (1.13)$$

磁场边值关系可以化为矢势  $\mathbf{A}$  的边值关系. 对于非铁磁介质, 矢势的边值关系为

$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}_2 - \nabla \times \mathbf{A}_1) = 0, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{n} \times \left( \frac{1}{\mu_2} \nabla \times \mathbf{A}_2 - \frac{1}{\mu_1} \nabla \times \mathbf{A}_1 \right) = \boldsymbol{\alpha}. \quad (1.15)$$

边值关系(1.14)式也可以用较简单的形式代替.在分界面两侧取一狭长回路(见第一章图 1-15),计算  $\mathbf{A}$  对此狭长回路的积分.当回路短边长度趋于零时,

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = (A_{2t} - A_{1t}) \Delta l,$$

另一方面,由于回路面积趋于零,有

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0,$$

因此,

$$A_{2t} = A_{1t}. \quad (1.16)$$

若取  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  规范,仿照第一章 § 5 关于法向分量边值关系的推导,可得

$$A_{2n} = A_{1n}. \quad (\nabla \cdot \mathbf{A} = 0) \quad (1.17)$$

(1.16)和(1.17)式合起来得

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1. \quad (1.18)$$

即在两介质分界面上,矢势  $\mathbf{A}$  是连续的.边值关系(1.18)式可以用来代替(1.14)式.

4. 静磁场的能量 由第一章 § 6, 磁场的总能量为

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV. \quad (1.19)$$

在静磁场中, 可以用矢势和电流表示总能量. 由  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , 及附录(I.21)式,

$$\begin{aligned}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} &= (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}.\end{aligned}$$

将此式代入(1.19)式中, 第一项可化为无穷远界面上的积分而趋于零, 因此

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dV. \quad (1.20)$$

和静电情形一样, 此式仅对总能量有意义, 不能把  $\frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}$  看作能量密度, 因为我们知道能量分布于磁场内, 而不仅仅存在于电流分布区域内.

在(1.20)式中, 矢势  $\mathbf{A}$  是电流分布  $\mathbf{J}$  本身激发的. 如果我们

布区域内.

在(1.20)式中,矢势  $\mathbf{A}$  是电流分布  $\mathbf{J}$  本身激发的. 如果我们要计算某电流分布  $\mathbf{J}$  在给定外磁场中的相互作用能量,以  $\mathbf{A}_e$  表示外磁场的矢势,  $\mathbf{J}_e$  表示产生该外磁场的电流分布, 则总电流分布为  $\mathbf{J} + \mathbf{J}_e$ , 总磁场矢势为  $\mathbf{A} + \mathbf{A}_e$ , 磁场总能量为

$$W = \frac{1}{2} \int (\mathbf{J} + \mathbf{J}_e) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{A}_e) dV.$$

此式减去  $\mathbf{J}$  和  $\mathbf{J}_e$  分别单独存在时的能量之后, 得电流  $\mathbf{J}$  在外场中的相互作用能

$$W_i = \frac{1}{2} \int (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_e + \mathbf{J}_e \cdot \mathbf{A}) dV. \quad (1.21)$$

因为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{8\pi} \int \frac{\mathbf{J}(x') dV'}{r}, \quad \mathbf{A}_e = \frac{\mu}{8\pi} \int \frac{\mathbf{J}_e(x') dV'}{r},$$

(1.21)式中两项相等, 因此电流  $\mathbf{J}$  在外场  $\mathbf{A}_e$  中的相互作用能量为

$$W_i = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_e dV. \quad (1.22)$$

推导

例 2 半径为  $a$  的导线圆环载电流  $I$ , 求矢势和磁感应强度.

图 3-2

解 线圈电流产生的矢势为

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{Id\mathbf{l}}{r}. \quad (1.25)$$

用球坐标  $(R, \theta, \phi)$ , 由对称性可知  $\mathbf{A}$  只有  $\phi$  分量,  $A_\phi$  只依赖于  $R, \theta$ , 而与  $\phi$  无关. 因此我们可以选定在  $xz$  面上的一点  $P$  来计算  $A_\phi$ , 在该点上  $A_\phi = A_y$ . 取(1.25)式的  $y$  分量, 由于

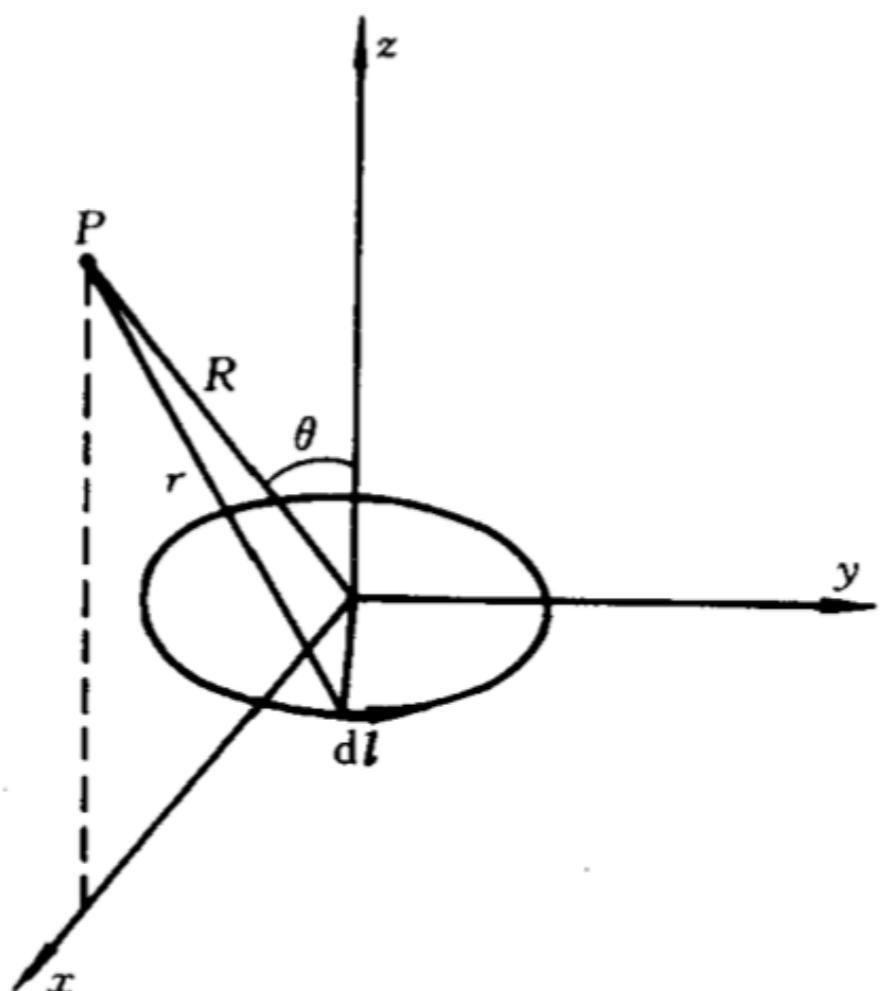


图 3-3

$$\begin{aligned} dI_y &= a \cos\phi' d\phi', \\ r &= |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \\ &= \sqrt{R^2 + a^2 - 2R a \sin\theta \cos\phi} \\ &= \sqrt{R^2 + a^2 - 2R a \sin\theta \cos\phi} \end{aligned}$$

得

$$A_\phi(R, \theta) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi' d\phi'}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \sin\theta \cos\phi'}}. \quad (1.26)$$

上式的积分可用椭圆积分表出. 当

$$2Ra \sin\theta \ll R^2 + a^2 \quad (1.27)$$

时, 可以较简单地算出近似结果. 把根式对  $2Ra \sin\theta \cos\phi' / (R^2 + a^2)$  展开. 在(1.26)式中, 展开式的偶次项对  $\phi'$  积分为零, 因此只需保留奇次项. 若我们要计算  $\mathbf{B}(R, \theta)$  到二级近似, 则  $A_\phi$  需要算到三级项.

$$\begin{aligned} A_\phi(R, \theta) &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi \sqrt{R^2 + a^2}} \int d\phi' \cos\phi' \left[ \frac{Ra \sin\theta \cos\phi'}{R^2 + a^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{2} \frac{R^3 a^3 \sin^3\theta \cos^3\phi'}{(R^2 + a^2)^3} \right] \quad \text{积化和差} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{4} \left[ \frac{Ra \sin\theta}{(R^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{15}{8} \frac{R^3 a^3 \sin^3\theta}{(R^2 + a^2)^{7/2}} \right]. \end{aligned} \quad (1.28)$$

此式的适用范围是  $2Ra \sin\theta \ll R^2 + a^2$ , 包括远场 ( $R \gg a$ ) 和近轴场 ( $R \sin\theta \ll a$ ). 为确定起见, 我们计算近轴场. 这情况下用柱坐标  $(\rho, \phi, z)$  较为方便. 展开式(1.28)实际上是对  $\rho^2 / (z^2 + a^2)$  的展开式. 取至  $\rho^3$  项, 有

场( $R \sin\theta \ll a$ ). 为确定起见, 我们计算近轴场. 这情况下用柱坐标 $(\rho, \phi, z)$ 较为方便. 展开式(1.28)实际上是对 $\rho^2/(z^2 + a^2)$ 的展开式. 取至 $\rho^3$ 项, 有

$$A_\phi(\rho, z) = \frac{\mu_0 I a^2 \rho}{4(z^2 + a^2)^{3/2}} \left[ 1 - \frac{3\rho^2}{2(z^2 + a^2)} + \frac{15}{8} \frac{\rho^2 a^2}{(z^2 + a^2)^2} \right]. \quad (1.29)$$

取  $\mathbf{A}$  的旋度, 得

$$B_\rho = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} = \frac{3\mu_0 I a^2 \rho z}{4(z^2 + a^2)^{5/2}} \left[ 1 + O\left(\frac{\rho^2}{z^2 + a^2}\right) \right], \quad (1.30a)$$

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{4(z^2 + a^2)^{3/2}} \left[ 1 + \frac{\rho^2}{z^2 + a^2} \left( \frac{15a^2}{4(z^2 + a^2)} - 3 \right) + \right. \\ &\quad \left. O\left(\left(\frac{\rho^2}{z^2 + a^2}\right)^2\right) \right]. \end{aligned} \quad (1.30b)$$

上式对任意  $z$  处的近轴场成立. 若求近原点处的场( $z, \rho \ll a$ ), 可

**Bi-taylor expansion**

把上式再对  $z/a$  展开, 得

$$B_\rho = \frac{3\mu_0 I \rho z}{4a^3},$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2a} \left[ 1 - \frac{3}{4a^2} (2z^2 - \rho^2) \right].$$

## 3.2 磁标势

由磁场环路定律得

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S},$$

其中  $L$  为  $S$  的边界. 如果回路  $L$  链环着电流, 即有电流穿过  $L$  所围曲面  $S$ , 则

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \neq 0,$$

在这种情形下  $\mathbf{H}$  和力学中的非保守力场相似, 因而不能引入标势. 但是在很多实际问题中, 我们不必求出整个空间中的磁场, 而只需求出某个局部区域的磁场. 在这局部区域内, 如果所有回路  $L$  都没有链环着电流, 则

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

因而在这个区域内可以引入标势. 举几个例说明这点. 例如一个线圈, 如果我们挖去线圈所围着的一个壳形区域  $S$ , 则在剩下的空间  $V$  中任一闭合回路都不链环着电流(图 3-4). 因此, 在除去这个壳形区域之后, 在空间中就可以引入磁标势来描述磁场. 又例如电磁铁, 我们想求出两磁极间隙处的磁场, 在这区域内也可以引入

磁标势.至于永磁体,它的磁场都是由分子电流激发的,没有任何自由电流,因此永磁体的磁场甚至在全空间(包括磁铁内部)都可以用标势描述.

总结起来,在某区域内能够引入磁标势的条件是该区域内的任何回路都不被电流所链环,就是说该区域是没有自由电流分布的单连通区域.要注意的是仅仅没有自由电流分布是不够的,例如在图 3-4 的情形中,我们不仅要除去有电流通过的线圈,而且要把线圈所围着的一个壳层 S 一起除去.

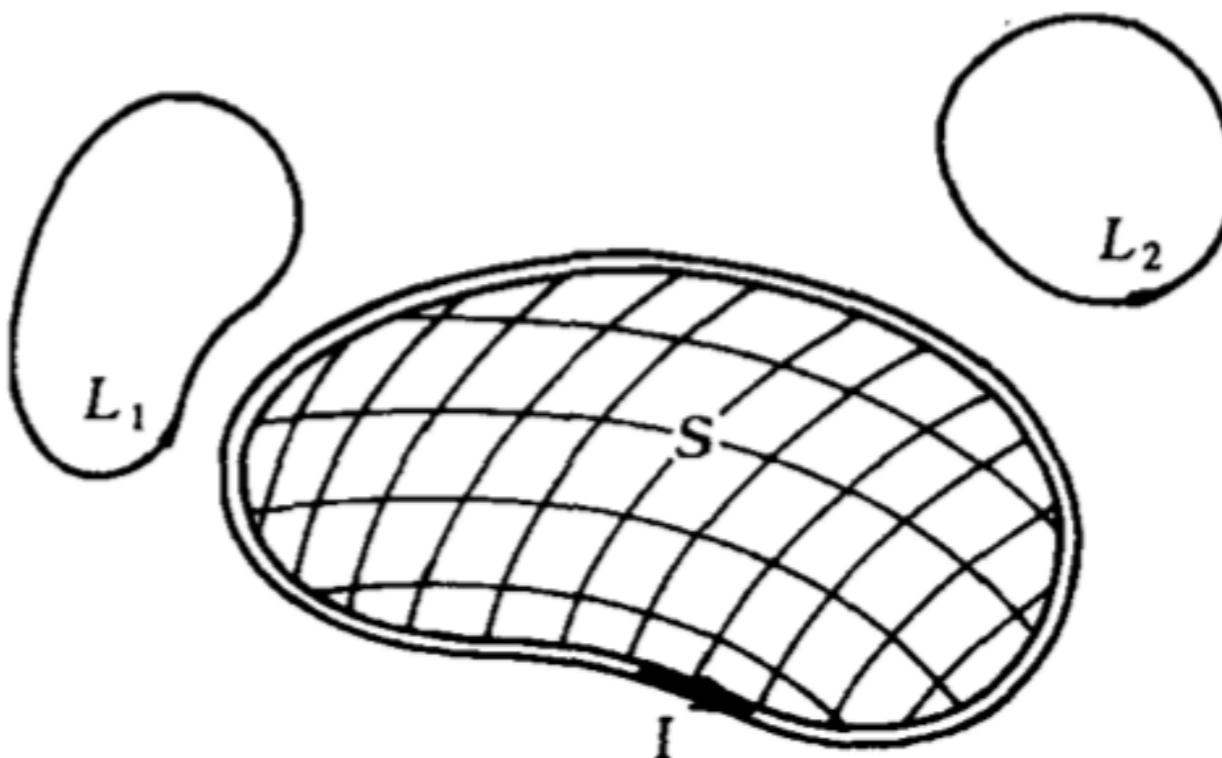


图 3-4

在  $J=0$  的区域内, 磁场满足方程

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = f(\mathbf{H}). \quad (2.3)$$

在(2.3)式中, 我们不写  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ , 而写为较一般的函数关系, 这是因为磁标势法的一个重要应用是求磁铁的磁场, 而在铁磁性物质中, 线性关系  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  不成立, 应由实验测定的磁化曲线和磁滞回线来确定  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  的函数关系. 函数  $f(\mathbf{H})$  不是单值的, 它依赖于磁化过程.

把(2.3)式代入(2.2)式得

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}. \quad (2.4)$$

如果我们把分子电流看作由一对假想磁荷组成的磁偶极子, 则物质磁化后就出现假想磁荷分布. 和电场中  $\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_p$  对应[见第一章(4.3)式], 假想磁荷密度为

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M}. \quad (2.5)$$

由(2.1),(2.4)和(2.5)式,在  $J=0$  区域内,  $\mathbf{H}$  所满足的微分方程可写为

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \rho_m / \mu_0, \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0. \quad (2.7)$$

这组方程和静电场微分方程

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = (\rho_f + \rho_p) / \epsilon_0, \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.9)$$

对比,差别仅在于没有自由磁荷,这是由于磁荷都是由分子电流的磁偶极矩假想而来的,到目前为止实验还没有发现以磁单极子形式存在的自由磁荷.

由(2.7)式,可以引入磁标势  $\varphi_m$ ,使

$$\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m. \quad (2.10)$$

用磁标势法时,  $\mathbf{H}$  和电场中的  $\mathbf{E}$  相对应. 这种对应只是形式上的, 在第一章中我们已经说明, 从物理本质上讲,  $\mathbf{B}$  表示总宏观磁场, 和电场中  $\mathbf{E}$  的地位相当.

把磁标势法中有关磁场的公式和静电场公式对比, 总结如下:

$$\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m. \quad (2.10)$$

用磁标势法时,  $\mathbf{H}$  和电场中的  $\mathbf{E}$  相对应. 这种对应只是形式上的, 在第一章中我们已经说明, 从物理本质上看,  $\mathbf{B}$  表示总宏观磁场, 和电场中  $\mathbf{E}$  的地位相当.

把磁标势法中有关磁场的公式和静电场公式对比, 总结如下:

静电场

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = (\rho_f + \rho_p) / \epsilon_0$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

$$\nabla^2 \varphi = -(\rho_f + \rho_p) / \epsilon_0$$

静磁场

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \rho_m / \mu_0 \quad (2.12)$$

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m \quad (2.15)$$

$$\nabla^2 \varphi_m = -\rho_m / \mu_0 \quad (2.16)$$

### 例 3 求电流线圈产生的磁标势

解 设电流线圈载有电流  $I$ , 它可以看作线圈所围的一个曲面上许多载电流  $I$  的小线圈组合而成. 设位于  $x'$  点上的小线圈的面元为  $d\mathbf{S}'$ , 它的磁矩为

$$d\mathbf{m} = I d\mathbf{S}'$$

小线圈所产生的磁场的磁标势是一个磁偶极子的磁标势(见下节)

$$d\varphi_m = \frac{d\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} = \frac{I}{4\pi} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}'}{r^3} = \frac{I}{4\pi} d\Omega,$$

其中  $d\Omega$  为面元  $d\mathbf{S}'$  对场点  $x$  所张开的立体角. 因此, 整个电流线圈产生的磁标势为

$$\varphi_m = \frac{I}{4\pi} \Omega, \quad (2.28)$$

$\Omega$  为线圈对场点  $x$  所张开的立体角.

如图 3-6, 若  $x$  点在线圈所围曲面的上方时, 则  $\Omega > 0$ ; 若  $x$

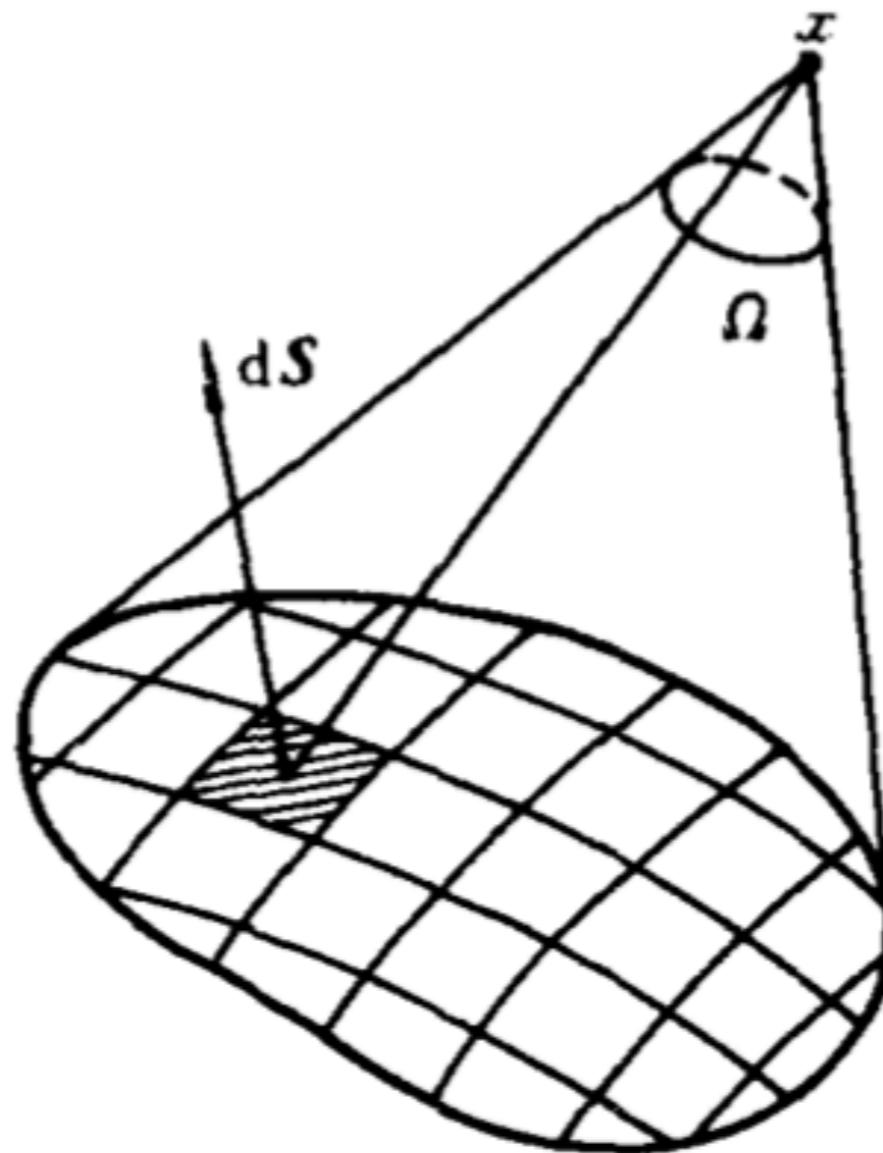


图 3-6

点在曲面下方，则  $\Omega < 0$ . 当  $x$  点跨过曲面时， $\Omega$  有不连续值  $\Delta\Omega = 4\pi$ . 因此，用磁标势法描述电流的磁场时，必须除去线圈所围的一个曲面.

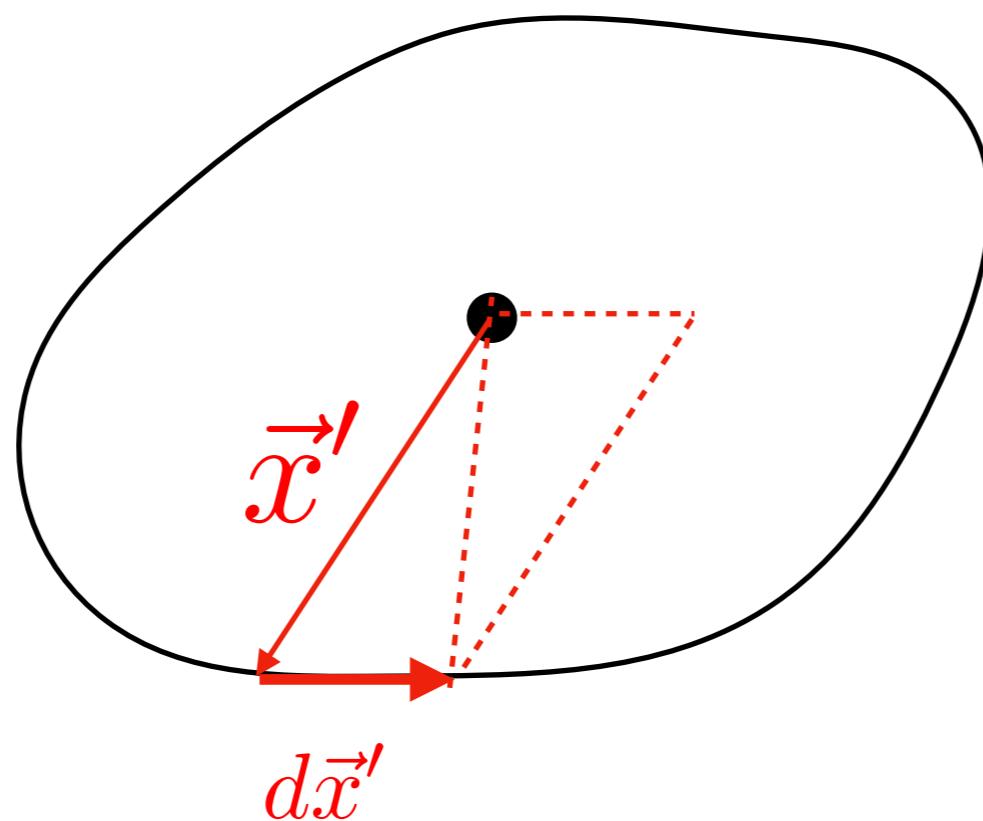
# 3.3 磁多极矩

1. 矢势的多极展开 给定电流分布在空间中激发的磁场矢势为

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') dV'}{r}. \quad (3.1)$$

如果电流分布于小区域  $V$  内, 而场点  $\mathbf{x}$  又距离该区域比较远, 我们可以把  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  作多极展开. 取区域内某点  $O$  为坐标原点, 把  $1/r$  的展开式[第二章(6.2)式]代入(3.1)式得

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \left[ \frac{1}{R} - \mathbf{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} \right]$$



$$\mathbf{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} \cdot \frac{I}{2} \oint (\mathbf{x}' \times d\mathbf{l}') \times \mathbf{R} = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3}, \quad (3.6)$$

式中

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint \mathbf{x}' \times d\mathbf{l}' \quad (3.7)$$

称为电流线圈的磁矩. 对体电流分布, 把  $I d\mathbf{l}' \rightarrow J dV'$ , 得磁矩

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV'. \quad (3.8)$$

对于一个小线圈, 设它所围的面元为  $\Delta \mathbf{S}$ , 有

$$\Delta \mathbf{S} = \frac{1}{2} \oint \mathbf{x}' \times d\mathbf{l}'.$$

因此

$$\mathbf{m} = I \Delta \mathbf{S}. \quad (3.9)$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{i,j} \mathbf{x}_i' \mathbf{x}_j' \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} + \dots] dV'. \quad (3.2)$$

展开式的第一项为

$$\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV'.$$

由恒定电流的连续性,可以把电流分为许多闭合的流管.对一个流管来说,

$$\int \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' = \oint I dl = I \oint dl = 0,$$

式中  $I$  为在该流管内流过的电流.因此有

$$\mathbf{A}^{(0)} = 0. \quad (3.3)$$

此式表示和电场情形不同,磁场展开式不含磁单极项,即不含与点电荷对应的项.

展开式(3.2)的第二项为

$$\mathbf{A}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \mathbf{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} dV'. \quad (3.4)$$

由于恒定电流可以分成许多闭合流管，我们先就一个闭合线圈情形计算上式。若线圈电流为  $I$ ，有

$$\mathbf{A}^{(1)} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \mathbf{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \mathbf{x}' \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} d\mathbf{l}'. \quad (3.5)$$

在被积式中， $\mathbf{R}/R^3$  为固定矢量，与积分变量无关。由于  $\mathbf{x}'$  为线圈上各点的坐标，因此  $d\mathbf{x}' = d\mathbf{l}'$ 。利用全微分绕闭合回路的线积分等于零，得

$$0 = \oint d[(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{R}) \mathbf{x}'] = \oint (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{R}) d\mathbf{l}' + \oint (d\mathbf{l}' \cdot \mathbf{R}) \mathbf{x}',$$

因此，

$$\begin{aligned} \oint (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{R}) d\mathbf{l}' &= \frac{1}{2} \oint [(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{R}) d\mathbf{l}' - (d\mathbf{l}' \cdot \mathbf{R}) \mathbf{x}'] \\ &= \frac{1}{2} \oint (\mathbf{x}' \times d\mathbf{l}') \times \mathbf{R}. \end{aligned}$$

$\mathbf{A}^{(1)}$  的表示式(3.5)可以写为

## 2. 磁偶极矩的场和磁标势 由(3.6)式可算出磁偶极矩的磁场

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^{(1)} &= \nabla \times \mathbf{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times (\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{R}}{R^3}) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ (\nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3}) \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right].\end{aligned}$$

由于当  $R \neq 0$  时有

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\nabla^2 \frac{1}{R} = 0, \quad (R \neq 0)$$

因此,

$$\mathbf{B}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3}. \quad (3.10)$$

在电流分布以外的空间中, 磁场应该可以用标势描述, 因此我们再把上式化为磁标势的梯度形式. 由于  $\mathbf{m}$  为常矢量, 由附录(I.23式),

$$\nabla \left( \mathbf{m} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) = \mathbf{m} \times \left( \nabla \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) + (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

(式中利用了  $\mathbf{R}/R^3$  的无旋性). 最后我们得

$$\mathbf{B}^{(1)} = -\mu_0 \nabla \varphi_m^{(1)}, \quad (3.11)$$

$$\varphi_m^{(1)} = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}}{4\pi R^3}. \quad (3.12)$$

与电偶极势[第二章(6.9)式]相比,可见磁偶极势形式上和电偶极势相似.一个小电流线圈可以看作由一对正负磁荷组成的磁偶极子,其磁偶极矩  $\mathbf{m}$  由(3.9)式确定.在电流分布区域以外的空间中可以用磁标势  $\varphi_m$  来描述磁场,这点是和上节所讨论的一般理论相符的.

一个任意电流线圈可以看作由它所围的一个曲面  $S$  上许多小电流线圈组合而成,因此它的总磁偶极矩为

$$\mathbf{m} = I \int_S d\mathbf{S}, \quad (3.13)$$

式中  $S$  是线圈所围的某一个曲面,这曲面不是唯一确定的.为使上式有意义,  $\mathbf{m}$  应不依赖于曲面的选取.事实上,设  $S_1$  和  $S_2$  为两个以该线圈为边界的曲面,则  $S_1$  和  $-S_2$ (负号表示取法线方向相反)合起来成为闭合曲面,因而有

$$\int_{S_1} d\mathbf{S} - \int_{S_2} d\mathbf{S} = \oint d\mathbf{S} = 0,$$

即

$$\int_{S_1} d\mathbf{S} = \int_{S_2} d\mathbf{S}.$$

因此,这两曲面给出相同的  $\mathbf{m}$  值.

3. 小区域内电流分布在外磁场中的能量 设外磁场  $B_e$  的矢势为  $A_e$ , 由(1.22)式, 电流分布  $J(x)$  在外磁场中的相互作用能量为

$$W = \int J \cdot A_e dV \quad (3.14)$$

载电流  $I$  的线圈在外磁场中的能量为

$$W = I \oint_L A_e \cdot d\mathbf{l} = I \int_S B_e \cdot d\mathbf{S} = I\Phi_e, \quad (3.15)$$

其中  $\Phi_e$  为外磁场对线圈  $L$  的磁通量. 取坐标系原点在线圈所在区域内适当点上. 若区域线度远小于磁场发生显著变化的线度, 则可以把  $\mathbf{B}_e(x)$  在原点邻域上展开,

$$\mathbf{B}_e(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_e(0) + \mathbf{x} \cdot \nabla \mathbf{B}_e(0) + \cdots.$$

代入(3.15)式得

$$W \approx I \mathbf{B}_e(0) \cdot \int_S d\mathbf{S} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e(0), \quad (3.16)$$

其中  $\mathbf{m}$  是电流线圈的磁偶极矩. 和电偶极子在外电场中的能量  $-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_e$  对比[第二章(6.25)式], 相差一个负号. 这是否意味着磁偶极子受外磁场作用时将会倾向于与外磁场反向呢? 事实不是这样. 因为(3.16)式是在假设线圈上的电流  $I$  以及产生外磁场的电流都不变的条件下导出的. 为了详细地分析这一问题, 我们设外场由另一带有电流  $I_e$  的线圈  $L_e$  产生. 把相互作用能写为形式[见(1.21)式]

$$W = \frac{1}{2} \left( I \oint_L \mathbf{A}_e \cdot d\mathbf{l} + I_e \oint_{L_e} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right)$$

$$W = \frac{1}{2} \left( I \oint_L \mathbf{A}_e \cdot d\mathbf{l} + I_e \oint_{L_e} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right) \\ = \frac{1}{2} (I\Phi_e + I_e\Phi), \quad (3.17)$$

其中  $\Phi$  为线圈  $L$  上的电流产生的磁场对线圈  $L_e$  的通量. 当线圈运动时,若保持电流  $I$  和  $I_e$  不变,则磁能的改变为

$$\delta W = \frac{1}{2} (I\delta\Phi_e + I_e\delta\Phi). \quad (3.18)$$

但是,由于磁通量改变,在线圈上产生感应电动势,它对电流作功,就会改变  $I$  和  $I_e$  的值.为了保持  $I$  和  $I_e$  不变,必须由电源提供能量,以抵抗感应电动势所作的功.在线圈  $L$  和  $L_e$  上的感应电动势分别为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_e}{dt}, \quad \mathcal{E}_e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

在时间  $\delta t$  内感应电动势所作的功为

$$\mathcal{E}I\delta t + \mathcal{E}_e I_e \delta t = -I\delta\Phi_e - I_e\delta\Phi$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_e. \quad (3.25)$$

(3.24)和(3.25)式与电偶极子在外电场中的相应公式[第二章(6.26)和(6.27)式]完全对应.

电源为抵抗此感应电动势必须提供能量

$$\delta W_s = I \delta \Phi_e + I_e \delta \Phi = 2 \delta W \quad (3.19)$$

才能保持  $I$  和  $I_e$  不变. 在此条件下,  $I$  和  $I_e$  分别单独存在时的磁能不变, 因此总磁场能量的改变等于相互作用磁能的改变  $\delta W$  (3.18)式.

现在体系包括有相互作用的三个方面: 外电源、电磁场、以及两个线圈上的电流. 必须把这三个方面包括在内, 才能应用能量守恒定律. 设线圈移动时场对它作功  $\delta A$ . 能量守恒要求: 电源提供的能量  $\delta W_s$  应等于总磁能的改变  $\delta W$  加上对线圈所作的功  $\delta A$ :

$$\delta W_s = \delta W + \delta A. \quad (3.20)$$

因此, 由(3.19)式,

$$\delta A = \delta W_s - \delta W = \delta W. \quad (3.21)$$

即对线圈所作的功等于磁能的增量而不是其减小量. 如果定义力学中的势函数  $U$  使作功等于势函数的减小, 应有

即对线圈所作的功等于磁能的增量而不是其减小量. 如果定义力学中的势函数  $U$  使作功等于势函数的减小, 应有

$$U = -W = - \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_e dV. \quad (3.22)$$

磁偶极子在外场  $\mathbf{B}_e$  中的势函数为

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e. \quad (3.23)$$

这式子和电偶极子在外电场中的能量  $-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_e$  完全对应.

磁偶极子在外磁场中所受的力是

$$\begin{aligned} F &= -\nabla U = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e) = \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{B}_e) + \mathbf{m} \cdot \nabla \mathbf{B}_e \\ &= \mathbf{m} \cdot \nabla \mathbf{B}_e. \end{aligned} \quad (3.24)$$

这里我们用了  $\nabla \times \mathbf{B}_e = 0$ , 这是由于产生外场的电流一般都不出现在磁矩  $\mathbf{m}$  所在的区域内.

磁偶极子所受的力矩为

$$L = -\frac{\partial}{\partial \theta} U = \frac{\partial}{\partial \theta} m B_e \cos \theta = -m B_e \sin \theta.$$

计及力矩的方向, 得