

# 电动力学B

Bin HU

[bhu@bnu.edu.cn](mailto:bhu@bnu.edu.cn)

Astro@BNU

Office: 京师大厦9907

全章重点

# 6. 狹義相對論

$c, \hbar$



# 6.1 相对论的实验基础



《指环王》

迈克尔孙 - 莫来 (Michelson - Morley) 实验 (1887 年) 是测量光速沿不同方向的差异的主要实验. 首先我们对地球运动所引起的效应作一数量级估计. 地球绕太阳运动的速度约为  $30 \text{ km/s}$ , 因而地球相对于“以太”参考系的运动速度  $v$  最小应有同一数量级. 根据理论推算 (由以下的推导可以看出), 当整个实验在地球上进行时, 由于地球“绝对运动”所引起的可观测效应只有  $(v/c)^2$  的数量级, 即  $10^{-8}$  数量级. 因此, 如果要设计一个实验观察地球绝对运动的效果, 该实验应达到  $10^{-8}$  的精确度. 19 世纪末的科学发展水平已使得这种精密测定成为可能.

迈克尔孙 - 莫来实验装置如图 6-1 所示. 由光源 S 发出的光线在半反射镜 M 上分为两束, 一束透过 M, 被  $M_1$  反射回到 M, 再被 M 反射而达目镜 T; 另一束被 M 反射至  $M_2$ , 再反射回 M 而直达目镜 T.

为叙述简单计, 设调整两臂长度使有效光程  $MM_1M = MM_2M = l$ . 设地球相对于“以太”的绝对运动速度  $v$  沿  $MM_1$  方向, 则由于光线  $MM_1M$  与  $MM_2M$  的传播时间不同, 因而有光程差, 在目镜 T 中将观察到干涉效应.

用经典速度合成法则可以算出光线  $MM_1M$  和  $MM_2M$  的传播时间. 经典速度合成法则如图 6-2 所示. 图中  $v$  表示观察者相对于以太的运动速度,  $u$  表示

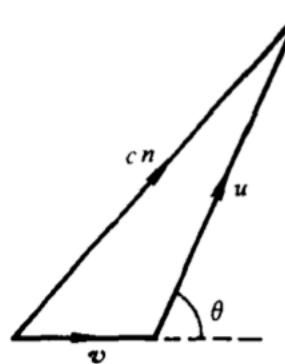


图 6-2

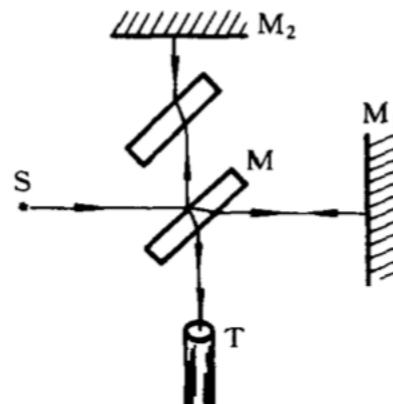


图 6-1

## Aether?

观察者参考系中所看到的沿  $\theta$  方向传播的光速,  $c$  是以太参考系的光速. 由图可见

$$c^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\theta,$$

解出  $u$  得

$$u = \sqrt{c^2 - v^2 \sin^2\theta} - v\cos\theta.$$

因此, 在地球上观察到沿  $v$  方向传播的光速为  $c - v$ , 逆着  $v$  方向传播的光速为  $c + v$ , 而垂直于  $v$  方向传播的光速为  $\sqrt{c^2 - v^2}$ . 因此, 光线  $MM_1M$  的传播时间为

$$t_1 = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2} \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (1.1)$$

光线  $MM_2M$  的传播时间为

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right). \quad (1.2)$$

两束光的光程差为

$$c\Delta t \approx l \frac{v^2}{c^2}. \quad (1.3)$$

把仪器转动  $90^\circ$ , 使两束光位置互换, 应该观察到干涉条纹移动个数为

$$\frac{2c\Delta t}{\lambda} \approx \frac{2l}{\lambda} \frac{v^2}{c^2}. \quad (1.4)$$

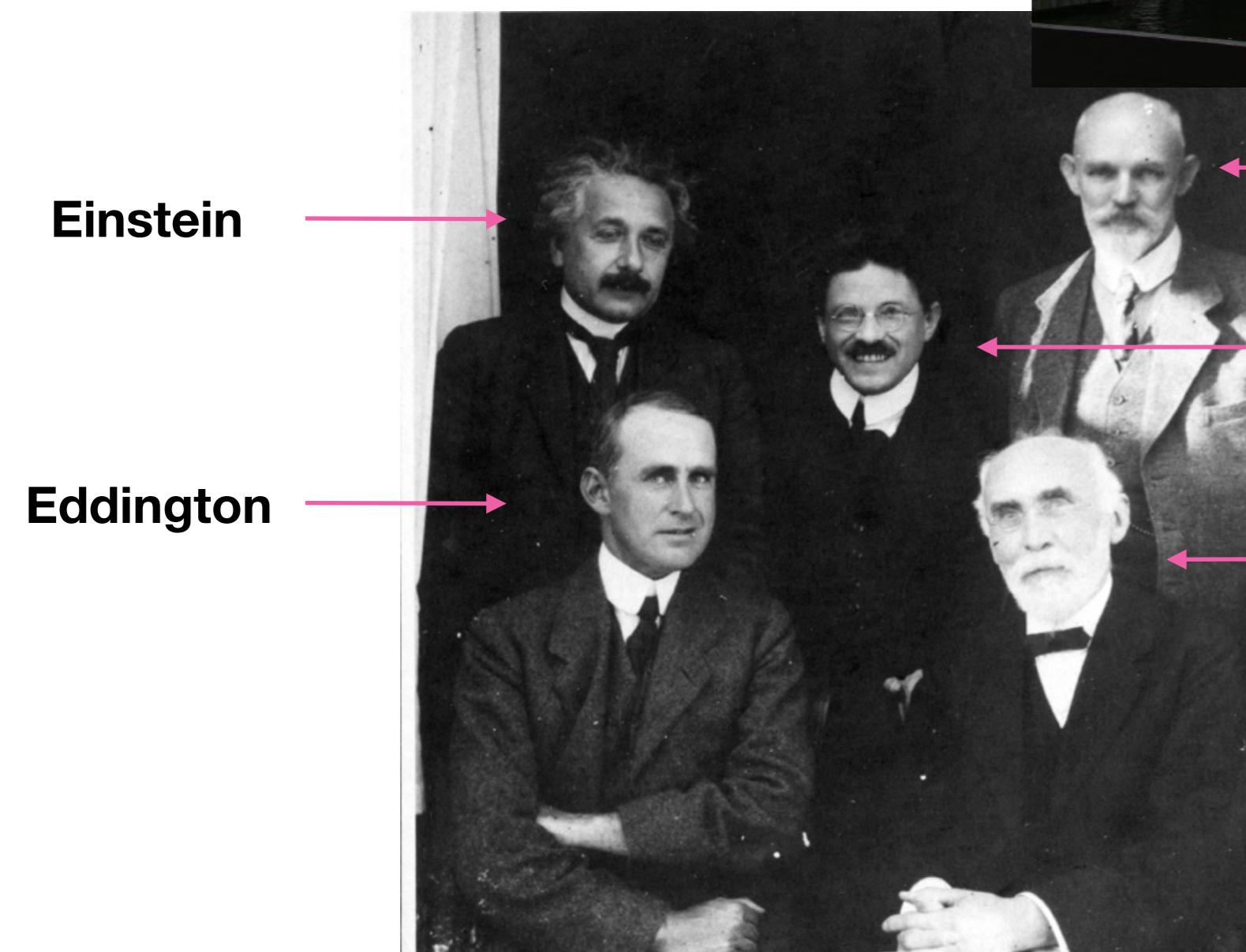
利用多次反射可以使有效臂长  $l$  达到 10 米左右. 设

$$\lambda \approx 5 \times 10^{-7} \text{ m}, \quad (v/c)^2 \approx 10^{-8},$$

则由 (1.4) 式, 干涉条纹应该移动 0.4 个左右, 而实验观察到的上限仅为 0.01 个.

## cosmic redshift?

# 6.2 相对论的基本原理 &洛伦兹变换



**1. 相对论的基本原理** 在总结新的实验事实之后,爱因斯坦(Einstein)提出了两条相对论的基本假设:

(1) 相对性原理 所有惯性参考系都是等价的.物理规律对于所有惯性参考系都可以表为相同形式.也就是不论通过力学现象,还是电磁现象,或其他现象,都无法觉察出所处参考系的任何“绝对运动”.相对性原理是被大量实验事实所精确检验过的物理学基本原理.

(2) 光速不变原理 真空中的光速相对于任何惯性系沿任一方向恒为  $c$ ,并与光源运动无关.

相对论的基本假设是和旧时空概念矛盾的.旧时空概念是从低速力学现象抽象出来的,集中反映在关于惯性坐标系的伽利略(Galileo)变换中.设惯性系  $\Sigma'$  相对于  $\Sigma$  以速度  $v$  运动,并选  $x$  和  $x'$  轴沿运动方向,伽利略变换式为

$$\begin{aligned}x' &= x - vt, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= t.\end{aligned}\tag{2.1}$$

(2.1)式所反映的时空观的特征是时间与空间的分离.时间在宇宙中均匀流逝着,而空间好象一个容器,两者之间没有联系,也不与物质运动发生关系.在低速现象中还没有暴露出这种观点的错误,但是在高速现象中旧时空观与客观实际的矛盾立即显示出来.

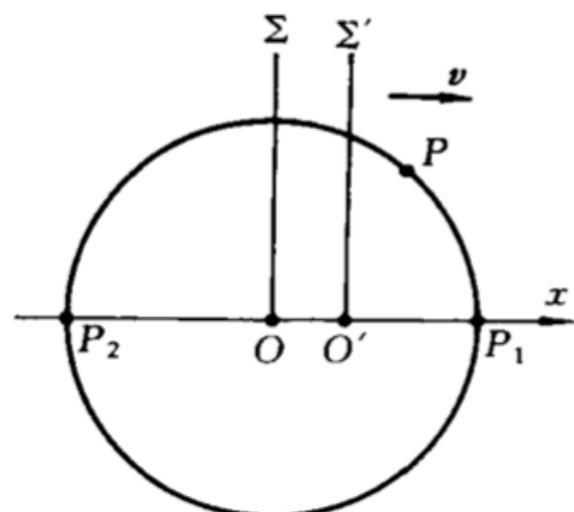


图 6-3

间隔一>测度

## 2. 间隔不变性 与旧时空观集中反映在伽利略变换式一样， 相对论时空观集中反映在从一惯性系到另一惯性系的时空坐标变

惯性系的概念本身要求从一惯性系到另一惯性系的时空坐标变换必须是线性的.设有一不受外力作用的物体相对于惯性系  $\Sigma$  作匀速运动, 它的运动方程由  $x$  和  $t$  的线性关系描述. 在另一惯性系  $\Sigma'$  上观察, 这物体也是作匀速运动, 因而用  $x'$  和  $t'$  的线性关系描述. 由此可知, 从  $(x, t)$  到  $(x', t')$  的变换式必须是线性的.

现在再考察光速不变性对时空变换的限制. 考虑两特殊事件 (参看图 6-3): 第一事件为光讯号在某时刻从  $O$  点发出, 第二事件是在另一地点  $P$  接收到该讯号. 选取两参考系的原点在闪光发出时刻重合, 并且同时开始计时, 即第一事件在两参考系中都用  $(0, 0, 0, 0)$  表示. 设物体  $P$  接收到讯号的空时坐标在两参考系上分别为  $(x, y, z, t)$  和  $(x', y', z', t')$ . 由于两参考系上测出的光速都是  $c$ , 因而有

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2,$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

就是说, 当二次式

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \quad (2.2)$$

为零时, 另一二次式

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 \quad (2.3)$$

亦为零.

上面我们选择了两特殊事件, 这两事件之间用光讯号联系着. 一般来说, 两事件不一定用光讯号联系, 它们可能用其他方式联

不仅是狭义相对论中的基础,  
也是广义相对论的基础!

狭义相对论: 惯性系统

广义相对论: 非惯性系统  
(只有引力相互作用)

线性 -> 没有相互作用 -> 惯性系  
(不受力)

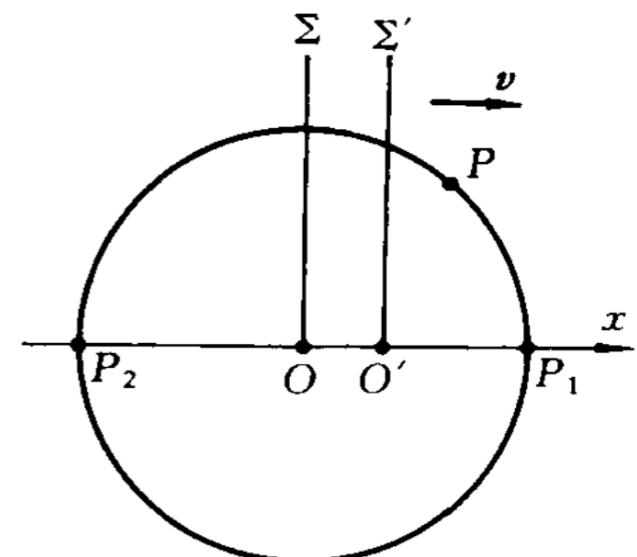


图 6-3

系,或者根本没有任何联系.以第一事件空时坐标为 $(0,0,0,0)$ ,则第二事件空时坐标 $(x,y,z,t)$ 可以是任意的.在这情形下,二次式(2.2)和(2.3)就不一定为零,而是可以取任何值.问题是,在一般情况下,二次式(2.2)和(2.3)应有什么关系?

通过线性变换,可以把二次式(2.3)变为关于 $x,y,z,t$ 的二次式 $F_2(x,y,z,t)$ .当二次式(2.3)为零时, $F_2(x,y,z,t)=0$ ,但同时二次式(2.2)亦等于零.因此,二次式 $F_2(x,y,z,t)$ 最多只与(2.2)式差一常因子.由此,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = A(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2).$$

式中因子 $A$ 只可能依赖于两参考系相对速度的绝对值(因为在空间中不存在特定方向).因为两参考系是等价的,反过来亦应有关系

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = A(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2).$$

由于系数 $A$ 不依赖于相对速度的方向,因此上面两式中的 $A$ 应该是一样的.比较以上两式可得 $A^2=1$ ,由变换的连续性应取 $A=+1$ .因此有

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2. \quad (2.4)$$

关系式(2.4)是光速不变性的数学表示,它是相对论时空观的一个基本关系.

二次式(2.2)的负值称为事件 $(x, y, z, t)$ 和事件 $(0, 0, 0, 0)$ 之间的间隔,用 $s^2$ 表示,

$$s^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2). \quad (2.5)$$

在另一惯性系中观察到这两事件的间隔 $s'^2$ 为

$$s'^2 = c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2). \quad (2.6)$$

关系式(2.4)可写为

$$s'^2 = s^2 \quad (2.7)$$

这关系称为间隔不变性,它表示两事件的间隔不因参考系变换而改变.

一般来说,两事件 $(x_1, y_1, z_1, t_1)$ 与 $(x_2, y_2, z_2, t_2)$ 的间隔为

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2. \quad (2.8)$$

在另一参考系上观察这两事件的空时坐标为

$$(x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) \text{ 和 } (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2),$$

其间隔为

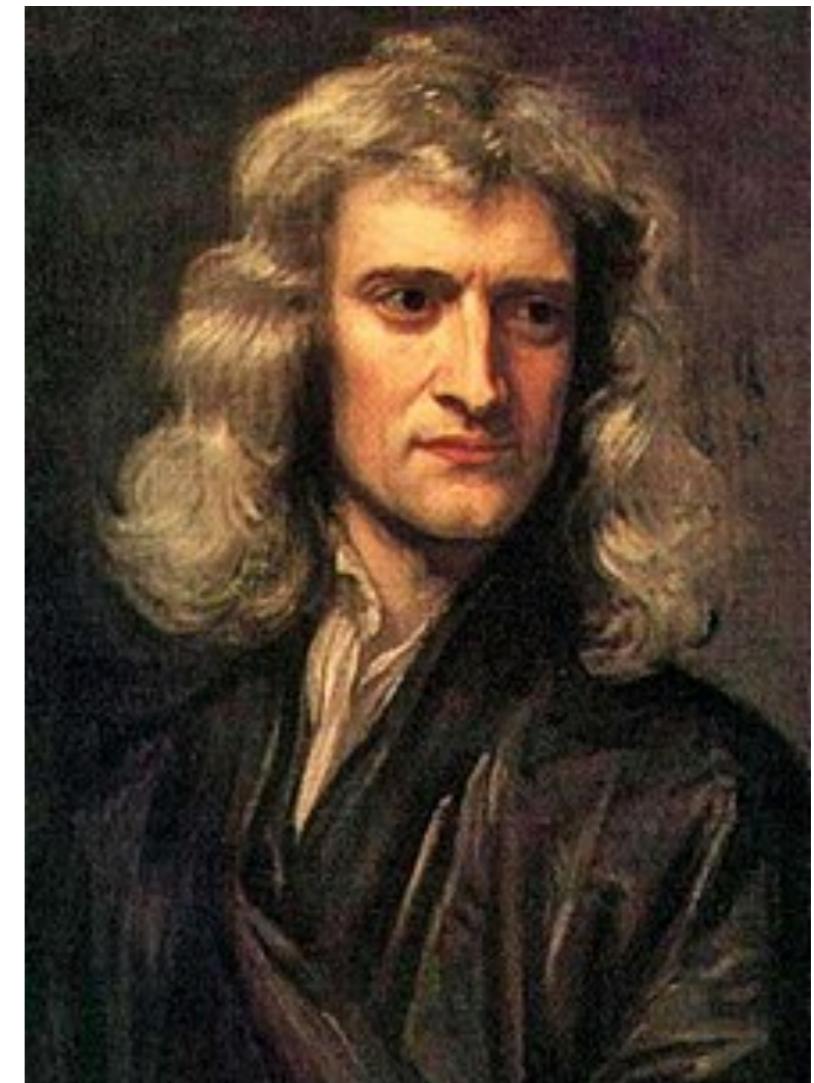
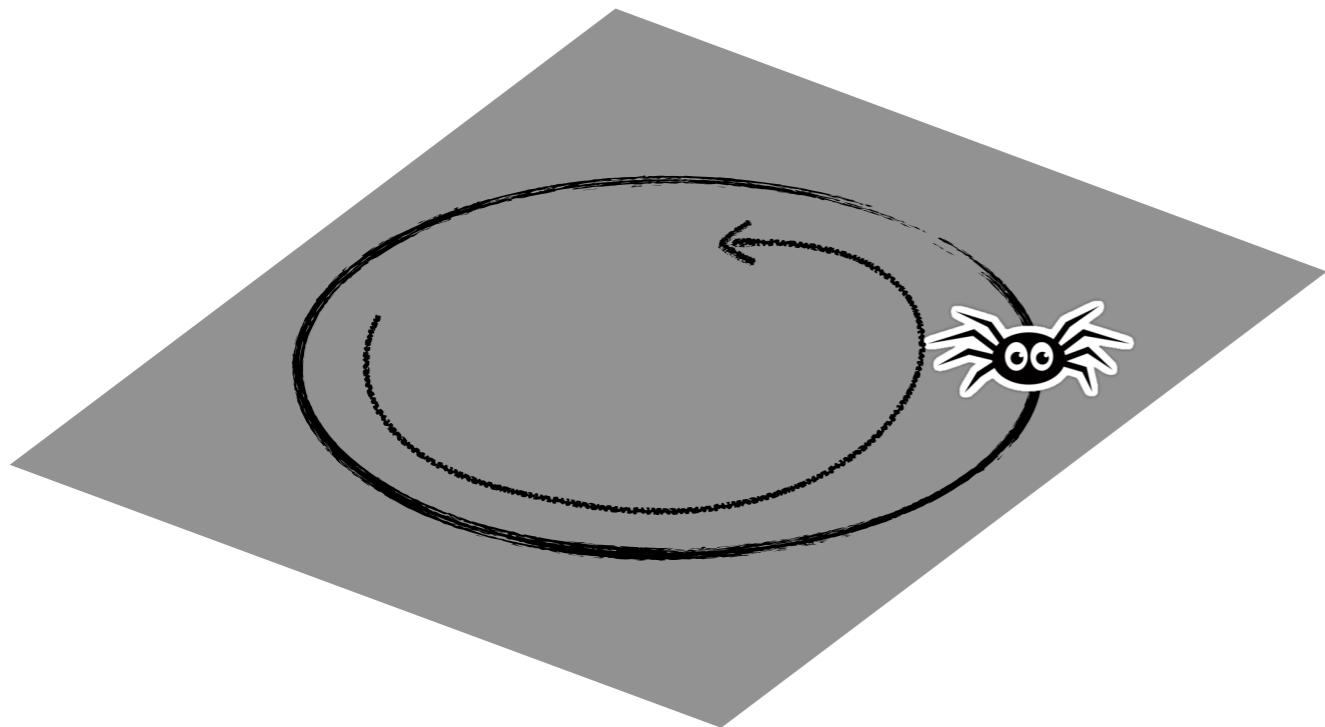
$$s'^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2. \quad (2.9)$$

由间隔不变性有  $s^2 = s'^2$ .

间隔是相对论时空观的一个基本概念.由(2.8)式,若两事件在同一地点相继发生,令  $t_2 - t_1 = \Delta t$ ,有  $s^2 = c^2 \Delta t^2$ .在这情形下间隔就是光速乘以时间的平方.若两事件同时在不同地点发生,则  $s^2 = -(\Delta x)^2$ .在这情形下,间隔就是两事件的空间距离平方的负值.由此可见,间隔概念是把时间与空间距离统一起来的一个概念,其物理含义在下一节中再进一步讨论.

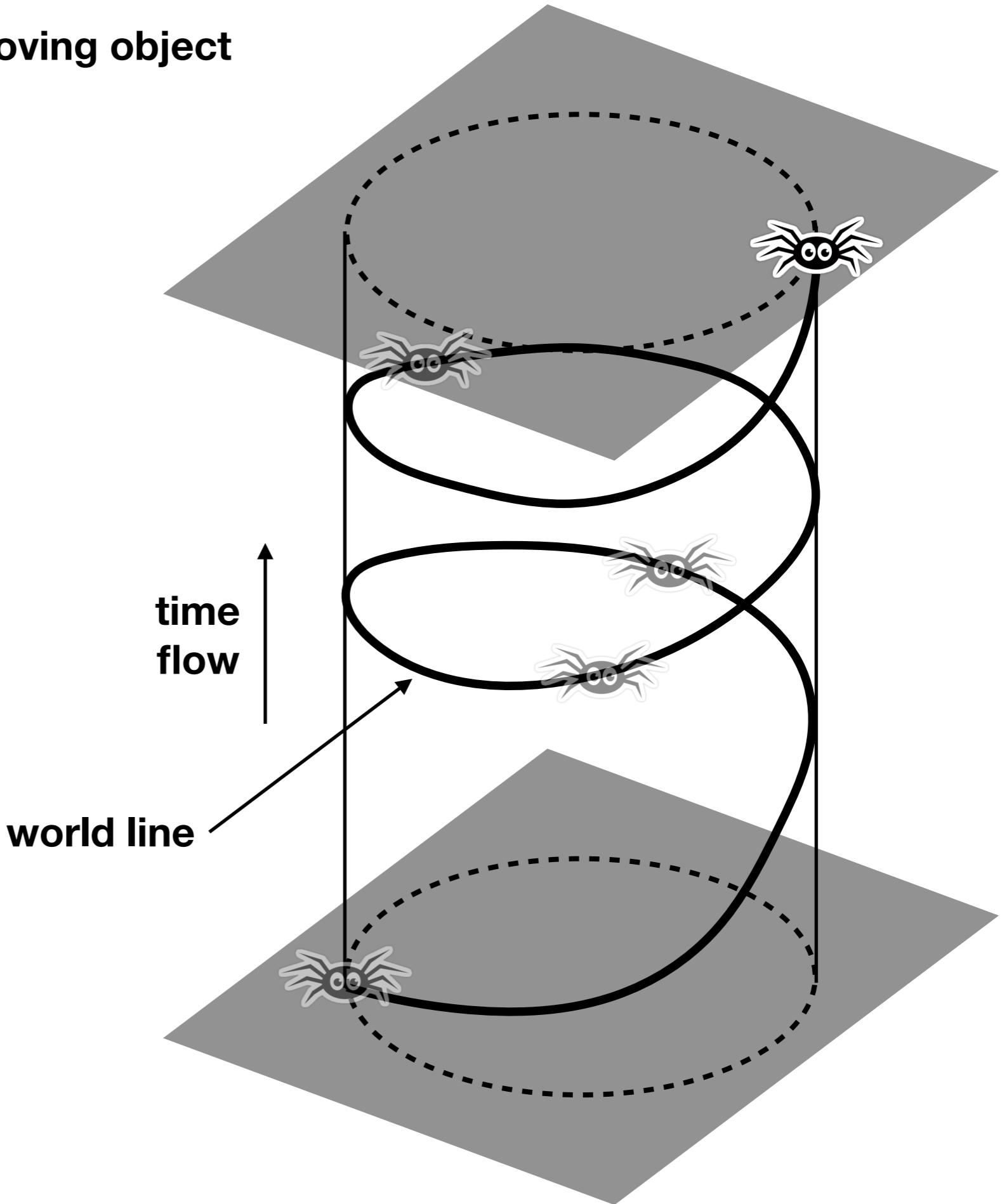
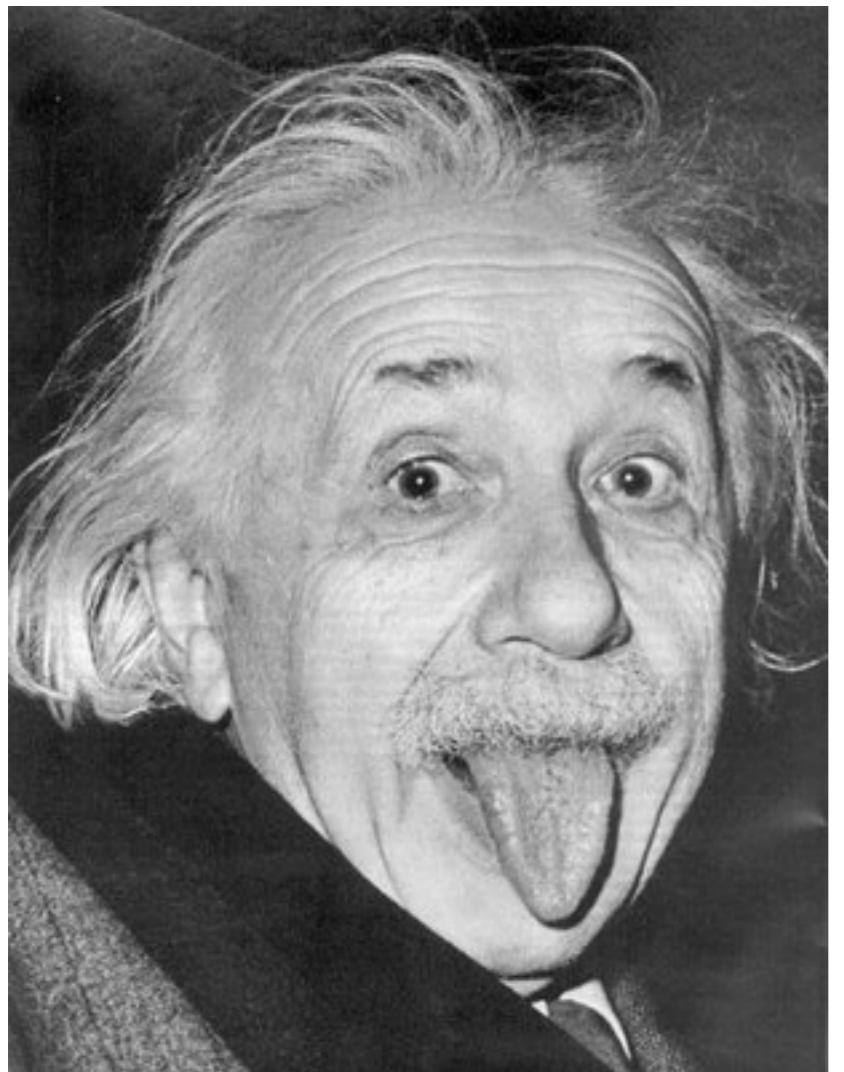
# 1. 4维时空观

3+1维



geodesic: the world line of the moving object

(最短线) under **ONLY** gravity



**例 1** 参考系  $\Sigma'$  相对于  $\Sigma$  以速度  $v$  沿  $x$  轴方向运动. 在  $\Sigma'$  上有一静止光源  $S$  和一反射镜  $M$ , 两者相距为  $z'_0$ . 从  $S$  上向  $z'$  轴方向发出闪光, 经  $M$  反射后回到  $S$ . 求两参考系上观察到的闪光发出和接收的时间间隔.

**解** 两参考系上观察到的物理过程如图 6-4 所示. 在  $\Sigma'$  上观察, 闪光发出和接收之间的时间为

$$\Delta t' = 2z'_0/c.$$

发出和接收是在同一地点  $S$  上发生, 因此

$$\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0.$$

两事件的间隔为

$$(\Delta s')^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 = 4z'^2_0.$$

在  $\Sigma$  上观察, 设闪光发出和接收之间的时间为  $\Delta t$ , 在这时间內, 光源已运动了  $\Delta x = v\Delta t$ . 光讯号传播的路程为

$$2\sqrt{z_0^2 + \frac{1}{4}v^2\Delta t^2} = c\Delta t.$$

因而

$$\Delta t = \frac{2z_0}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

$$\Delta x = v\Delta t = \frac{2vz_0}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

$$\Delta y = \Delta z = 0.$$

两事件的间隔为

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2$$

$$-\Delta z^2 = 4z_0^2.$$

与  $v$  正交方向的距离是不变的. 因为若  $z'_0 = \phi(v)z_0$ , 由相对性原理应有  $z_0 = \phi(-v)z'_0$ . 但由于空间没有特定方向,  $\phi(v)$  只能依赖于  $v$  的数值, 而不依赖于其方向. 由

$$z_0 = \phi(-v)\phi(v)z_0 = \phi^2(v)z_0$$

得  $\phi^2(v) = 1$ , 再由变换的连续性应有  $\phi(v) = 1$ , 因此

$$z_0 = z'_0.$$

比较以上所得公式, 得

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2.$$

由此可见, 在两参考系中观察到的两事件之间的时间是不同的, 但间隔  $\Delta s^2$  则是一样的.

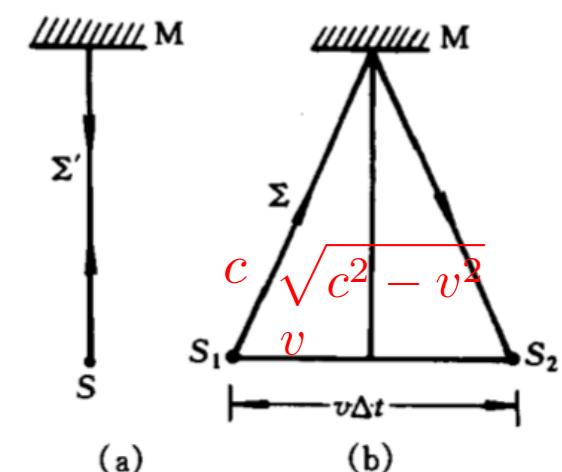


图 6-4

不变量一定意味着有新的对称性!  
(数学描述的简化)

**3. 洛伦兹变换** 根据变换的线性和间隔不变性(2.4)式, 可以导出相对论时空坐标变换关系. 为简单计, 选两坐标系的  $x$  轴和  $x'$  轴都沿  $\Sigma'$  相对于  $\Sigma$  的运动方向. 在这情形下,  $y$  和  $z$  不变, 变换具有特殊形式

$$ct' = a_{21}x + a_{22}ct.$$

由于  $x$  轴和  $x'$  轴正向相同, 应取  $a_{11} > 0$ ; 又由于时间  $t$  与  $t'$  的正向相同, 应取  $a_{22} > 0$ . 把(2.10)式代入(2.4)式得

$$\begin{aligned} (a_{11}x + a_{12}ct)^2 + y^2 + z^2 - (a_{21}x + a_{22}ct)^2 \\ = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2, \end{aligned}$$

比较系数得

$$\begin{aligned} a_{11}^2 - a_{21}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} &= 0, \\ a_{12}^2 - a_{22}^2 &= -1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

由上式的第一和第三式得

$$a_{11} = \sqrt{1 + a_{21}^2}, \quad a_{22} = \sqrt{1 + a_{12}^2}, \quad (2.12)$$

代入(2.11)第二式得

$$a_{12} = a_{21}. \quad (2.13)$$

这些系数都可以用  $\Sigma'$  相对于  $\Sigma$  的运动速度  $v$  表出. 设  $\Sigma'$  的原点为  $O'$ . 在  $\Sigma$  上观察,  $O'$  点以速度  $v$  沿  $x$  轴方向运动, 因此其坐标为  $x = vt$ . 但  $O'$  点在  $\Sigma'$  上的坐标永远是  $x' = 0$ . 因而由(2.10)第一式有

$$\begin{aligned} 0 &= a_{11}vt + a_{12}ct, \\ \frac{a_{12}}{a_{11}} &= -\frac{v}{c}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

由(2.12)–(2.14)式得

$$\begin{aligned} a_{11} = a_{22} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ a_{12} = a_{21} &= -\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}ct, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{aligned} \quad (2.10)$$

把(2.15)式代入(2.10)式得相对论时空坐标变换公式:

**要求: 会推导!**

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

由(2.16)式解出  $x, y, z, t$  可得反变换式. 用相对性原理可以更简单地导出反变换. 因为  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  是等价的, 所以从  $\Sigma$  系到  $\Sigma'$  系的变换应该与从  $\Sigma'$  系到  $\Sigma$  系的变换具有相同形式. 若  $\Sigma'$  相对于  $\Sigma$  的运动速度为  $v$  (沿  $x$  轴方向), 则  $\Sigma$  相对于  $\Sigma'$  的速度为  $-v$ . 因此只要把(2.16)式中的  $v$  改为  $-v$  即得反变换式

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

变换式(2.16)和(2.17)称为洛伦兹变换式, 它是同一事件在两不同参考系上观察的时空坐标之间的关系. 洛伦兹变换反映相对论的时空观, 其物理意义在下一节中再讨论.

**例 2** 在图 6-3 中, 设闪光从  $O$  点发出. 在  $\Sigma$  上观察, 光讯号于 1 秒之后同时被  $P_1$  和  $P_2$  接收到. 设  $\Sigma'$  相对于  $\Sigma$  的运动速度为  $0.8c$ , 求  $P_1$  和  $P_2$  接收到讯号时在  $\Sigma'$  上的时刻和位置.

解  $P_1$  接收到讯号在  $\Sigma$  上的空时坐标为  $(c, 0, 0, 1)$ . 这事件在  $\Sigma'$  上观察时, 由洛伦兹变换式(2.16)得  $(x, y, z, t)$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c - v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c}{3},$$

$$y' = 0,$$

$$z' = 0,$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{3}.$$

即  $P_1$  接收到讯号时在  $\Sigma'$  上的空时坐标为  $(\frac{c}{3}, 0, 0, \frac{1}{3})$ . 注意  $\Sigma'$  上测得沿  $x'$  轴方向的光速为  $x'/t' = c$ .

$P_2$  接收到讯号时在  $\Sigma$  上的空时坐标为  $(-c, 0, 0, 1)$ . 由洛伦兹变换式可得该事件在  $\Sigma'$  上的空时坐标为  $(-3c, 0, 0, 3)$ . 注意沿  $-x'$  轴方向的光速仍为  $c$ .

在  $\Sigma$  上同时的两事件( $P_1$  和  $P_2$  同时接收到讯号), 在  $\Sigma'$  上看来变为不同时,  $P_1$  接收到光波较早于  $P_2$  接收到光波.

在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  上观察到  $P_1$  和  $P_2$  接收到讯号这两事件之间的时间差别, 空间距离和间隔分别为

$$\Sigma: \Delta t = 0, \quad \Delta x = 2c, \quad \Delta s^2 = -4c^2,$$

$$\Sigma': \Delta t' = -\frac{8}{3}, \quad \Delta x' = \frac{10}{3}c, \quad \Delta s'^2 = -4c^2.$$

我们看到, 两参考系上测得  $P_1$  和  $P_2$  之间的距离不同, 但两事件的间隔是一致的.

从本节的两例题看出, 相对论的时间、距离是相对的, 同时性也是相对的, 但两事件的间隔却有绝对意义.

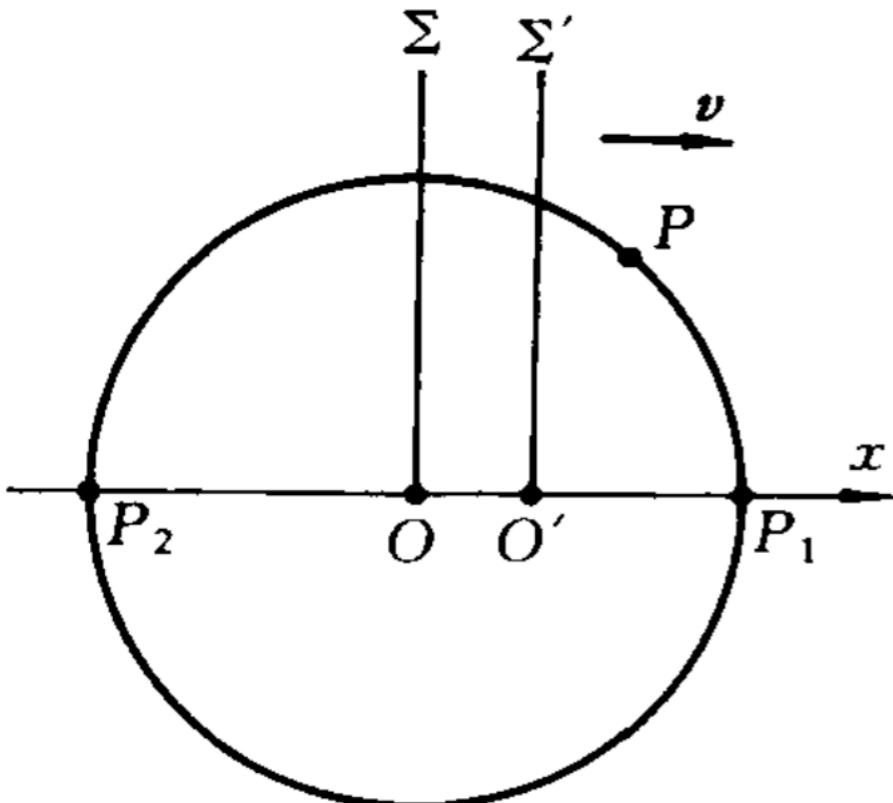
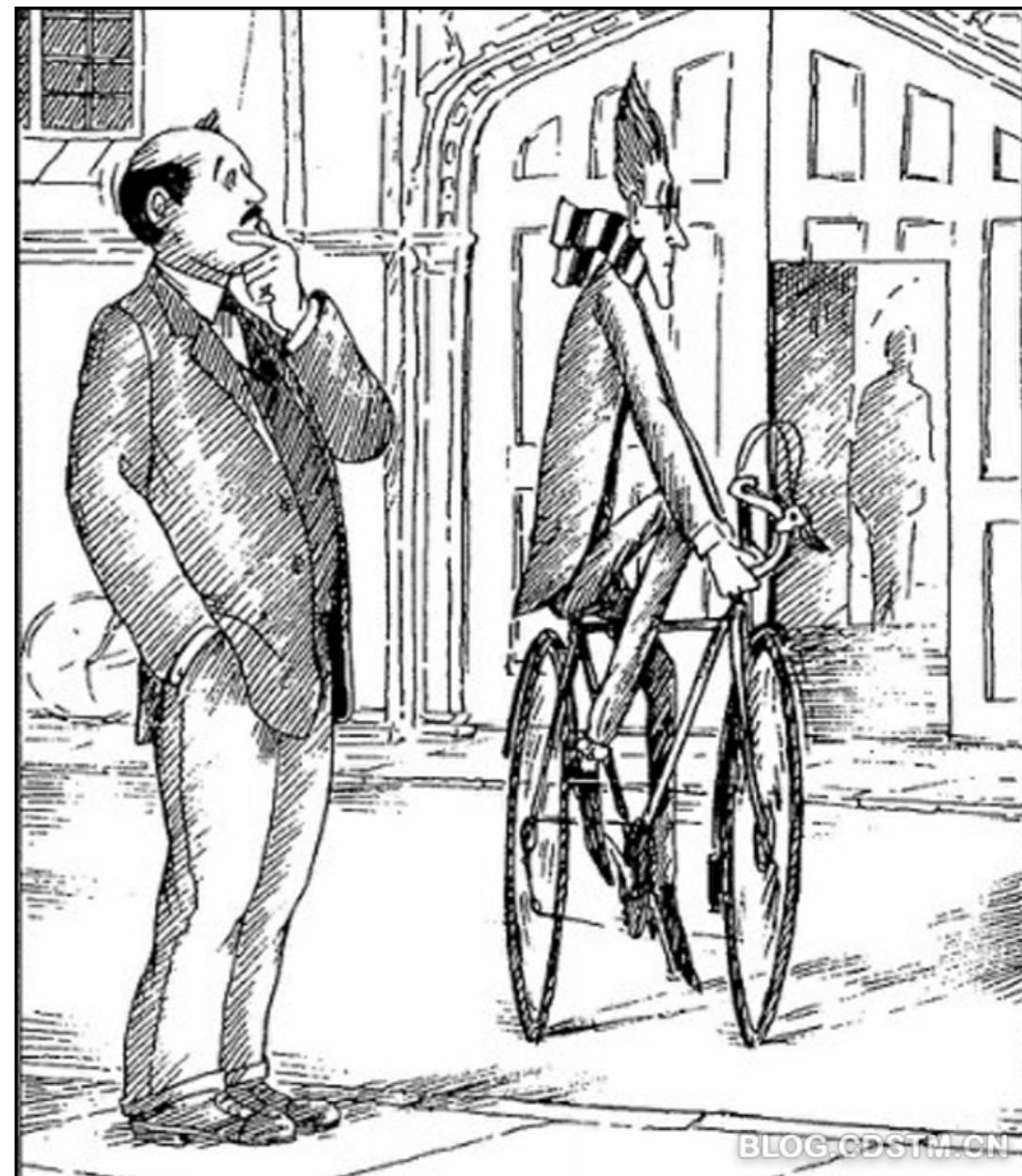
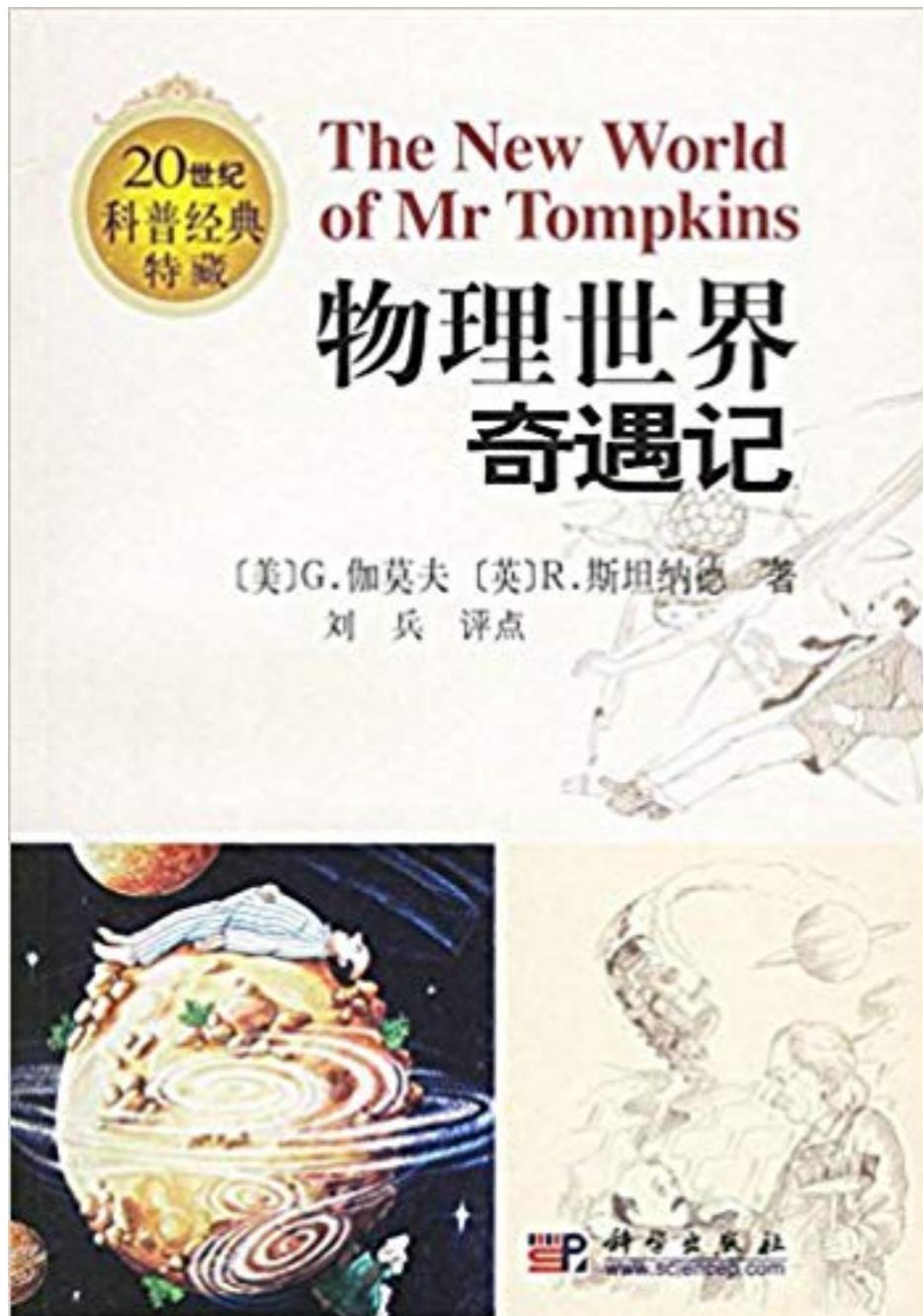


图 6-3

# 六字真言



# 6.3 相对论时空观

概括起来,事件  $P$  相对于事件  $O$  的时空关系可作如下的绝对分类:

- (1) 类光间隔  $s^2 = 0$ ,
- (2) 类时间隔  $s^2 > 0$ ,
  - (a) 绝对未来,即  $P$  在  $O$  的上半光锥内;
  - (b) 绝对过去,即  $P$  在  $O$  的下半光锥内;
- (3) 类空间隔  $s^2 < 0$ ,  $P$  与  $O$  绝对异地.

类时间隔和类空间隔是两种截然不同的时空关系,下面分点讨论它们.

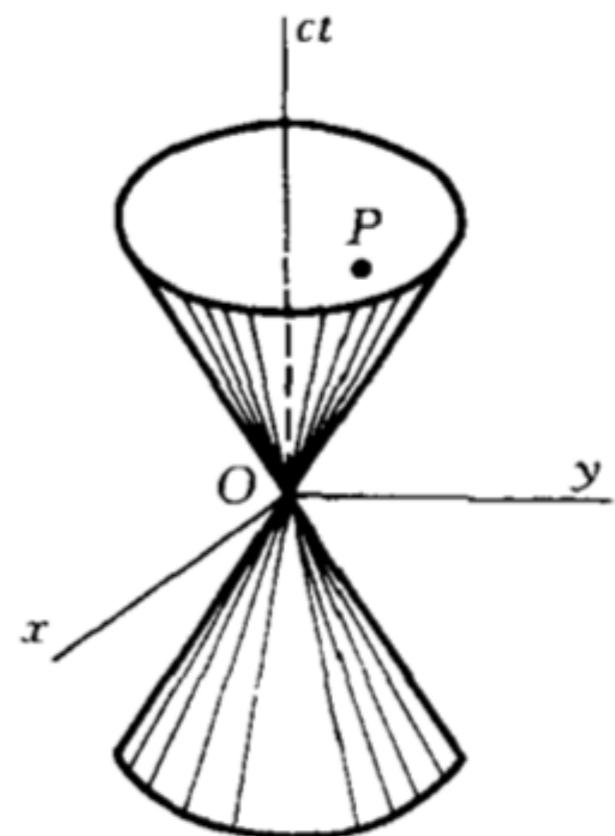


图 6-5

**1. 相对论时空结构** 上一节中我们引入了两事件的间隔的概念. 为简单起见, 以第一事件为空时原点  $(0, 0, 0, 0)$ , 设第二事件的空时坐标为  $(x, y, z, t)$ . 这两事件的间隔定义为

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t^2 - r^2. \quad (3.1)$$

式中  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  为两事件的空间距离.

两事件的间隔可以取任何数值. 我们区别三种情况:

- (1) 若两事件可以用光波联系, 有  $r = ct$ , 因而  $s^2 = 0$ ;
- (2) 若两事件可用低于光速的作用来联系, 有  $r < ct$ , 因而  $s^2 > 0$ ;

- (3) 若两事件的空间距离超过光波在时间  $t$  所能传播的距离, 有  $r > ct$ , 因而  $s^2 < 0$ .

由于从一个惯性系到另一个惯性系的变换中, 间隔  $s^2$  保持不变, 因此上述三种间隔的划分是绝对的, 不因参考系变换而改变.

(1) 若事件  $P$  与事件  $O$  的间隔  $s^2 = 0$ , 则  $r = ct$ , 因而  $P$  点在一个以  $O$  为顶点的锥面上. 这个锥面称为光锥. 凡在光锥上的点, 都可以和  $O$  点用光波联系.

(2) 若事件  $P$  与事件  $O$  的间隔  $s^2 > 0$ , 则  $r < ct$ , 因而  $P$  点在光锥之内. 这类型的间隔称为类时间隔.

(3) 若  $P$  与  $O$  的间隔  $s^2 < 0$ , 则  $r > ct$ ,  $P$  点在光锥外.  $P$  点不可能与  $O$  点用光波或低于光速的作用相联系. 这类型的间隔称为类空间隔.

间隔的这种划分是绝对的, 不因参考系而转变. 若对某参考系事件  $P$  在事件  $O$  的光锥内, 当变到另一参考系时, 虽然  $P$  的空时坐标都改变, 但  $s^2$  不变, 因此事件  $P$  保持在  $O$  的光锥内. 同样, 若对某参考系  $P$  在  $O$  的光锥外, 则对所有参考系事件  $P$  都在事件  $O$  的光锥外.

## 因果律&相互作用最大传播速度

根据上一点的讨论,若事件  $P$  在  $O$  的上半光锥内(包括锥面),则对任何惯性系  $P$  保持在  $O$  的上半光锥内,即  $P$  为  $O$  的绝对未来.这种间隔的特点是  $P$  与  $O$  可用光波或低于光速的作用相联系.因此,如果不存在超光速的相互作用,则两事件  $P$  与  $O$  发生因果关系的必要条件是  $P$  处于  $O$  的光锥内,这样  $O$  与  $P$  的先后次序在各参考系中相同,因而因果关系是绝对的.

由洛伦兹变换式也可以直接证明这点.在参考系  $\Sigma$  上,以  $(x_1, t_1)$  代表作为原因的第一事件,  $(x_2, t_2)$  代表作为结果的第二事件,有  $t_2 > t_1$ . 变换到另一参考系  $\Sigma'$  上,这两事件用  $(x'_1, t'_1)$  和  $(x'_2, t'_2)$  表示,由洛伦兹变换式得

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.2)$$

若这变换保持因果关系的绝对性,应有  $t'_2 > t'_1$ ,由上式应有条件

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right| < \frac{c^2}{v}. \quad (3.3)$$

设  $|x_2 - x_1| = u(t_2 - t_1)$ ,  $u$  代表由  $O$  到  $P$  的作用传播速度,由上式得

$$uv < c^2.$$

但固定于参考系  $\Sigma'$  上的物体同样可以用来传递作用,因而  $v$  也可以看作一种作用传播速度,由上式,若

$$u < c, \quad v < c, \quad (3.4)$$

则事件的因果关系就保证有绝对意义.根据现有大量实验事实,我们知道真空中的光速  $c$  是物质运动的最大速度,也是一切相互作用传播的极限速度.在这前提下,相对论时空观完全符合因果律的要求.

**GW170817**

**3. 同时相对性** 上面研究了类时间隔的性质,现在转到类空间间隔.由于类空间隔有  $r > ct$ ,而相互作用传播速度不超过  $c$ ,因此具有类空间隔的两事件不可能用任何方式联系,它们之间没有因果关系,其先后次序也就失去绝对意义.用洛伦兹变换式可以证明这点.设两事件  $(x_1, t_1)$  和  $(x_2, t_2)$  的间隔类空,有

$$|t_2 - t_1| < \frac{1}{c} |x_2 - x_1|. \quad (3.5)$$

若在参考系  $\Sigma$  上观察到

$$t_2 > t_1, \quad (3.6)$$

变换到另一参考系上,由洛伦兹变换式得

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.7)$$

若  $\Sigma'$  相对于  $\Sigma$  的速度  $v$  足够大,由(3.5)式总可以有

$$|t_2 - t_1| < \frac{v}{c^2} |x_2 - x_1|,$$

由(3.7)式即得

$$t'_2 < t'_1. \quad (3.8)$$

特别是,如果另一参考系  $\Sigma''$  相对于  $\Sigma$  的速度  $\bar{v}$  满足下式

$$|t_2 - t_1| = \frac{\bar{v}}{c^2} |x_2 - x_1|,$$

[由(3.5)式,这参考系必定存在]则由(3.7)式有

$$t''_2 = t''_1. \quad (3.9)$$

由(3.6)—(3.9)式可以看出类空间隔的特征.具有类空间隔的两事件,由于不可能发生因果关系,其时间次序的先后或者同时,都没有绝对意义,因不同参考系而不同.

在不同地点同时发生的两事件不可能有因果关系,因此同时

## 同一参考系内，可以谈论同时性！不同参考系内，则不能！

概念必然是相对的。由(3.7)式可知，若两事件对 $\Sigma$ 同时，即 $t_2 = t_1$ ，则一般而言， $t'_2 \neq t'_1$ ，即对 $\Sigma'$ 不同时（见上节例2）。

由同时相对性，可能产生如何对准两不同地点的时钟的问题。应该指出，在一定参考系内，这问题用经典方法已经可以解决。例如把某地点的一个钟缓慢移至另一地点，就可以和该点上的钟对准，从而核对两地点的计时。只要钟移动足够慢，相对论效应就可忽略。因此，在相对论中不产生另外定义同时的问题。当然，在实际测量中，最方便的方法是用光讯号来核对，只要对光传播时间作了修正，就可以核对两地点的时钟。因此，在同一参考系上，相对论的同时概念是和我们通常所指的同时概念一致的。在另一参考系 $\Sigma'$ 上，观察者也可以用相同方法来对准各点上的时钟。相对论效应用于，在一参考系中不同地点上对准了的时钟，在另一参考系上观察起来会变为不对准的。这就是同时相对性的意义。

类时间隔的绝对因果性和类空间隔的同时相对性是物质运动时空关系的两个方面，前者是起主导作用的。

**4. 运动时钟的延缓** 自然界中存在许多物理过程可以作为计时的基准,如分子振动或原子谱线的周期,粒子的衰变寿命等,都是计时的自然基准.现代科学技术都采用自然基准<sup>①</sup>,它们可以一般称为时钟.在不同参考系上可以用同一种物理过程作为计时基准,这样就可以比较不同参考系上的时间.现在的问题是,在不同参考系上观察同一个物理过程,其时间有什么关系?

设某物体内部相继发生两事件(例如分子振动一个周期的始点和终点).设  $\Sigma'$  为该物体的静止坐标系,在这参考系上观察到两事件发生的时刻为  $t'_1$  和  $t'_2$ ,其时间为  $\Delta\tau = t'_2 - t'_1$ .由于两事件发生在同一地点  $x'$ ,因此两事件的间隔为

$$\Delta s^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 = c^2 \Delta\tau^2. \quad (3.10)$$

在另一参考系  $\Sigma$  上观察,该物体以速度  $v$  运动,因此第一事件发生的地点  $x_1$  不同于第二事件发生的地点  $x_2$ . 设  $\Sigma$  上观察到两事件的空时坐标为  $(x_1, t_1)$  和  $(x_2, t_2)$ , 则两事件的间隔为

$$\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = c^2 \Delta t^2 - (\Delta x)^2. \quad (3.11)$$

由间隔不变性有

$$c^2 \Delta t^2 - (\Delta x)^2 = c^2 \Delta \tau^2.$$

但  $|\Delta x| / \Delta t = v$  为该物体相对于  $\Sigma$  的运动速度,因此

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.12)$$

式中  $\Delta \tau$  为该物体的静止坐标系测出的时间, 称为该物理过程的固有时, 而  $\Delta t$  为在另一参考系  $\Sigma$  上测得同一物理过程的时间. 在  $\Sigma$  上看到物体以速度  $v$  运动. 由(3.12)式,  $\Delta t > \Delta \tau$ , 表示运动物体上发生的自然过程比起静止物体的同样过程延缓了. 物体运动速度愈大, 所观察到的它的内部物理过程进行得愈缓慢. 这就是时间延缓效应. 这种效应是时空的基本属性引起的, 与钟的具体结构无关.

当局限于匀速运动时,时间延缓效应是相对效应.参考系  $\Sigma$  上看到固定于  $\Sigma'$  上的时钟变慢;同样,参考系  $\Sigma'$  上也看到固定于  $\Sigma$  上的时钟变慢.

如图 6-6(a),在  $\Sigma$  系上相距为  $l$  的两点上有对准了的时钟  $C_1$  和  $C_2$ ,在  $\Sigma$  系上观察以速度  $v$  运动的时钟  $C'$ .设当  $C'$  经过  $C_1$  时,各钟都指着时刻 0.当  $C'$  经过  $C_2$  时, $\Sigma$  系上的钟都指着时刻  $l/v$ ,但  $\Sigma$  上看到  $C'$  指着  $\tau < l/v$ .由于  $\tau$  为固有时,有

$$\frac{l}{v} = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.13)$$

$\tau < l/v$  说明在  $\Sigma$  系上看到运动时钟  $C'$  变慢.

当  $C_2$  指  $l/v$  时, $C'$  指  $\tau < l/v$ .这时两钟  $C_2$  和  $C'$  在同一地点,因而可以直接比较.问题在于, $\Sigma'$  上看到  $C_2$  所指的读数  $l/v$  大于固定在自己参考系上的时钟  $C'$  所指的读数  $\tau$ ,这是否意味着  $\Sigma'$  上看到  $\Sigma$  系上的时钟变快了呢?答案是否定的,下面我们说明这一点.

图 6-6(b)示  $\Sigma'$  上所看到的情况. 开始时  $C'$  与  $C_1$  同时指着时刻 0. 但由于同时的相对性, 原来在  $\Sigma$  系上对准了的时钟  $C_1$  和  $C_2$  在  $\Sigma'$  系上看来不是对准的. 在  $\Sigma'$  上认为  $C_1$  指 0 时,  $C_2$  指  $\delta$ .  $\delta$  可由洛伦兹变换求出.  $C_2$  指  $\delta$  这事件在  $\Sigma$  上的坐标为  $x = l, t = \delta$ ,

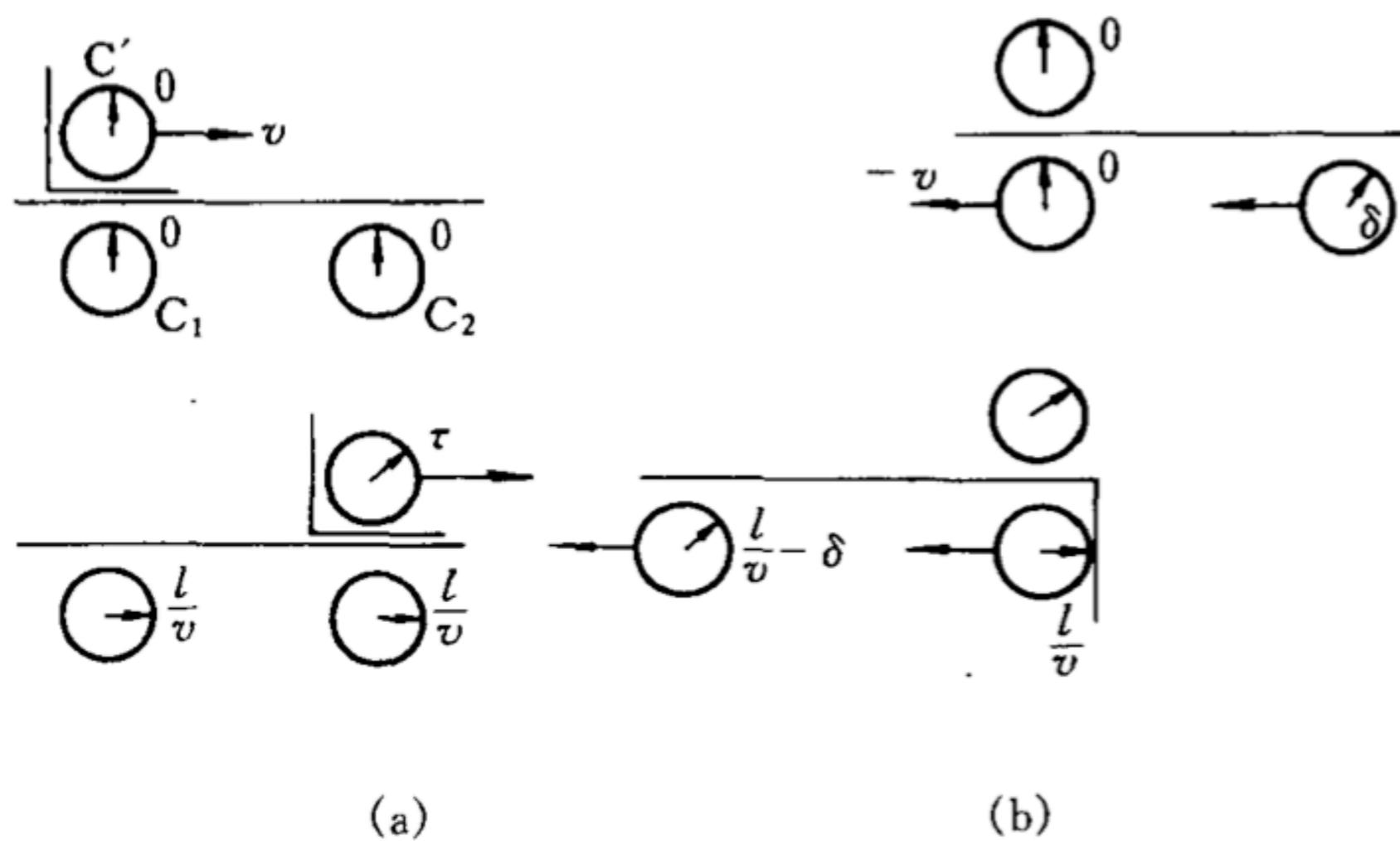


图 6-6

由洛伦兹变换得

$$t' = 0 = \frac{\delta - \frac{v}{c^2} l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

因此

$$\delta = \frac{v}{c^2} l. \quad (3.14)$$

在  $\Sigma'$  上看到  $C_2$  经过  $C'$  时,  $C'$  指  $\tau$ ,  $C_2$  指  $l/v$ , 但由于  $C_2$  是从  $\delta$  开始, 因此  $\Sigma'$  上看到  $C_2$  所示的经过时间为

$$\frac{l}{v} - \delta = \frac{l}{v} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \tau \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < \tau.$$

即  $\Sigma'$  上看到  $C_2$  同样是变慢的. **引力可以拖拽住时间的脚步**

在有加速运动情形, 时间延缓导致绝对的物理效应. 当一个时钟绕闭合路径作加速运动最后返回原地时, 它所经历的总时间小于在原地点静止时钟所经历的时间. 这效应通常称为双生子佯谬.

设时钟  $C$  固定于惯性参考系  $\Sigma$  上,  $C'$  相对于  $\Sigma$  作有加速度的运动. 设在某时刻  $t'$ ,  $C'$  相对于  $\Sigma$  的运动速度为  $v(t')$ . 若  $C'$  经历时间  $dt'$ , 则在  $\Sigma$  上测得的时间为

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t')}{c^2}}}.$$

假设时间延缓效应只依赖于速度而不依赖于加速度,上式就表示该瞬间的时间延缓效应.当 C' 绕闭合路径一周回到原地时,  $\Sigma'$  上测得的总时间为

$$\Delta t = \oint dt = \oint \frac{dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t')}{c^2}}} > \oint dt' = \Delta t'.$$

$\Delta t$  为 C 所示的时间,  $\Delta t'$  为 C' 所示的时间.因此,当时钟 C' 回到原地直接与 C 比较时,C' 绝对地变慢了.

这效应不是相对的.因为固定在 C' 上的参考系  $\Sigma'$  不是惯性系,因此不能在  $\Sigma'$  上应用狭义相对论的公式反过来推论  $\Delta t < \Delta t'$ .在  $\Sigma'$  上,应该用广义相对论的理论才能讨论这一问题.这点已超出本课程的范围.可以指出,用广义相对论的坐标变换,在  $\Sigma'$  上同样导出  $\Delta t' < \Delta t$  的结果,与上式相符.

动物体长度与该物体静止长度的关系. 如图 6-7, 设物体沿  $x$  轴方向运动, 以固定于物体上的参考系为  $\Sigma'$ . 若物体后端经过  $P_1$  点(第一事

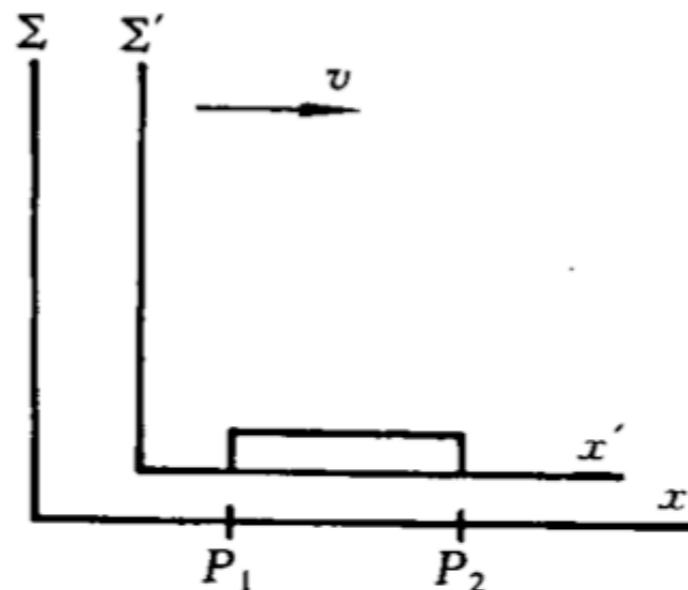


图 6-7

件)与前端经过  $P_2$  点(第二事件)相对于  $\Sigma$  同时, 则  $P_1P_2$  定义为  $\Sigma$  上测得的物体长度.

物体两端在  $\Sigma'$  上的坐标设为  $x'_1$  和  $x'_2$ . 在  $\Sigma$  上  $P_1$  点的坐标为  $x_1$ ,  $P_2$  点的坐标为  $x_2$ , 两端分别经过  $P_1$  和  $P_2$  的时刻为  $t_1 = t_2$ . 对这两事件分别应用洛伦兹变换式得

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

两式相减, 计及  $t_1 = t_2$ , 有

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.15)$$

式中  $x_2 - x_1$  为  $\Sigma$  上测得的物体长度  $l$  (因为坐标  $x_1$  和  $x_2$  是在  $\Sigma$  上同时测定的),  $x'_2 - x'_1$  为  $\Sigma'$  上测得的物体静止长度  $l_0$ . 由于物体对  $\Sigma'$  静止, 所以对测量时刻  $t'_1$  和  $t'_2$  没有任何限制. 由(3.15)式得

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3.16)$$

即运动物体长度缩短了. 和运动时钟延缓效应一样, 运动尺度缩短也是时空的基本属性, 与物体内部结构无关.

长度缩短效应是相对的. 以上我们证明了在  $\Sigma$  上观察固定于  $\Sigma'$  上的物体长度缩短了. 同样, 在  $\Sigma'$  上观察固定于  $\Sigma$  上的物体长度也是缩短了的. 这时要求在  $\Sigma'$  上同时测定该物体两端的坐标, 即要求  $t'_1 = t'_2$ . 应用反变换式(2.17)得

$$x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.17)$$

现在  $x_2 - x_1$  为静止长度  $l_0$ ,  $x'_2 - x'_1$  为运动长度  $l$ , 因此由上式得

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

与(3.16)式相符.注意(3.17)与(3.15)式并不矛盾,因为(3.15)式是在条件  $t_1 = t_2$  下成立的,而(3.17)式则是在条件  $t'_1 = t'_2$  下成立的.

时间延缓与长度缩短是相关的.例如宇宙线中含有许多能量极高的 $\mu$ 子,这些 $\mu$ 子是在大气层上部产生的.静止 $\mu$ 子的平均寿命只有  $2.197 \times 10^{-6}$ s,如果不是由于相对论效应,这些 $\mu$ 子以接近光速运动时只能飞越约 660m.但实际上很大部分 $\mu$ 子都能穿透大气层到达底部.在地面上的参考系把这现象描述为运动 $\mu$ 子寿命延长效应.但在固定于 $\mu$ 子的参考系看来,它的寿命并没有延长,而是由于它观察到大气层相对于它作高速运动,因而大气层的厚度缩小了,因此在 $\mu$ 子寿命以内可以飞越大气层.

## 速度变换公式

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt},$$

为物体相对于  $\Sigma$  的速度. 设  $\Sigma'$  相对于  $\Sigma$  沿  $x$  轴方向以速度  $v$  运动. 用洛伦兹变换式(2.16),

**v is constant vector**

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

取两式微分,

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dt,$$

$$dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1 - \frac{vu_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dt.$$

两式相除得

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \quad (3.18a)$$

同样可以求得

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}},$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}.$$

(3.18)式是相对论速度变换公式. 反变换式为

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}, \quad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}, \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}.$$

非相对论极限下( $v \ll c, |\mathbf{u}| \ll c$ )有

$$u_x \approx u'_x + v, \quad u_y \approx u'_y, \quad u_z \approx u'_z,$$

即过渡到经典速度变换公式.

**例 1** 证明若物体相对于一个参考系的运动速度  $|\mathbf{u}| < c$ , 则对任一参考系亦有  $|\mathbf{u}'| < c$ .

**解** 设物体在时间  $dt$  内的位移为  $d\mathbf{x}$ , 由间隔不变性有

$$c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = c^2 dt'^2 - (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2),$$

由  $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{u}$ ,  $d\mathbf{x}'/dt' = \mathbf{u}'$ , 得

$$(c^2 - u^2)dt^2 = (c^2 - u'^2)dt'^2$$

因为  $u < c$ , 左边为正数, 因此有

$$u' < c.$$

**例 2** 求匀速运动介质中的光速.

**解** 设介质沿  $x$  轴方向以速度  $v$  运动. 选参考系  $\Sigma'$  固定在介质上. 在  $\Sigma'$  上观察, 介质中的光速沿各方向都等于  $c/n$ , 其中  $n$  为折射率. 用(3.19)式得沿介质运动方向的光速

$$u_x = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{cn}}.$$

若  $v \ll c$ , 有

$$u_x \approx \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v, \quad (3.21)$$

逆介质运动方向传播的光速为

$$u_x = \frac{-\frac{c}{n} + v}{1 - \frac{v}{cn}} \approx -\frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v. \quad (3.22)$$

沿其他方向传播的光速也可以用类似方法求出.(3.21)和(3.22)式为斐索(Fizeau)水流实验所证实.

## 6.4 四维协变形式

**1. 三维空间的正交变换** 为了便于叙述四维时空变换, 我们先回顾一下三维空间的转动性质.

先看二维平面上的坐标系转动. 设坐标系  $\Sigma'$  相对于坐标系  $\Sigma$  转了一个角  $\theta$  (图 6-8). 设平面上一点  $P$  的坐标在  $\Sigma$  系为  $x, y$ ; 在  $\Sigma'$  系为  $x', y'$ . 新旧坐标之间有变换关系

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta, \\y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta.\end{aligned}\tag{4.1}$$

$OP$  长度平方为

$$OP^2 = x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = \text{不变量}.\tag{4.2}$$

满足(4.2)式的二维平面上的线性变换称为正交变换. 坐标系转动属于正交变换.

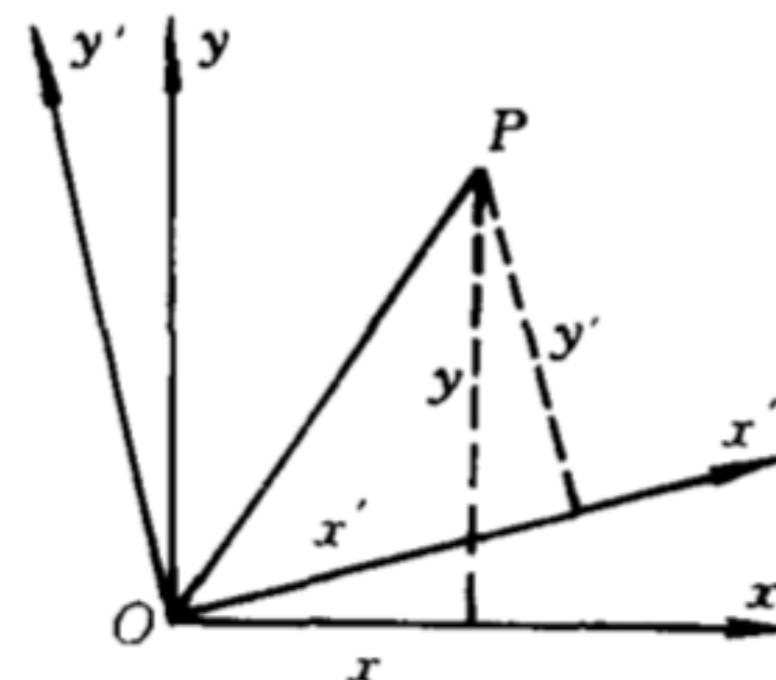


图 6-8

设 $\mathbf{v}$ 为平面上任意矢量。 $\mathbf{v}$ 在 $\Sigma$ 系中的分量为 $v_x, v_y$ ;在 $\Sigma'$ 系中的分量为 $v'_x, v'_y$ . 这些分量有变换关系,

$$\begin{aligned} v'_x &= v_x \cos\theta + v_y \sin\theta, \\ v'_y &= -v_x \sin\theta + v_y \cos\theta. \end{aligned} \quad (4.3)$$

矢量长度平方为

$$|\mathbf{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 = v'^2_x + v'^2_y = \text{不变量}. \quad (4.4)$$

由(4.1)–(4.4)式,任意矢量的变换与坐标变换具有相同形式.

现在讨论三维坐标转动. 设 $\Sigma$ 系的直角坐标为 $(x_1, x_2, x_3)$ ,  
 $\Sigma'$ 系的直角坐标为 $(x'_1, x'_2, x'_3)$ . 三维坐标线性变换一般具有形式

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned} \quad (4.5)$$

坐标系转动时距离保持不变,应有

$$x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \quad (4.6)$$

满足(4.6)式的线性变换称为正交变换. 空间转动属于正交变换,(4.5)式中的系数  $a_{ij}$  依赖于转动轴和转动角.

(4.5)式可写为

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.7)$$

在一般情形中, 当公式中出现重复下标时(如上式右边的  $j$ ), 往往都要对该指标求和. 以后为了书写方便起见, 我们省去求和符号. 除特别声明外, 凡有重复下标时都意味着要对它求和. 这是现代物理中通用的约定, 称为爱因斯坦求和约定. 由此, 变换式(4.7)可简写为

$$x'_i = a_{ij} x_j. \quad (4.8)$$

正交条件是

$$x'_i x'_i = x_i x_i = \text{不变量}. \quad (4.9)$$

由正交条件(4.9)式可得对变换系数  $a_{ij}$  的限制条件. 把(4.8)式代入(4.9)式左边, 得

$$a_{ij}x_j a_{ik}x_k = x_i x_i. \quad (4.10)$$

引入符号  $\delta_{ij}$ , 定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若 } i = j, \\ 0 & \text{若 } i \neq j. \end{cases} \quad (4.11)$$

(4.10)式右边可写为  $\delta_{jk}x_j x_k$ . 比较(4.10)式两边系数得

$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}. \quad (4.12)$$

这式代表正交变换条件.

把(4.8)式乘上  $a_{il}$  然后对  $i$  求和, 用正交条件(4.12)式得

$$a_{il}x_i' = a_{il}a_{ij}x_j = \delta_{lj}x_j = x_l.$$

由此得(4.8)式的反变换式

$$x_l = a_{il}x_i'. \quad (4.13)$$

变换系数可以写成矩阵形式

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

转置矩阵  $\tilde{a}$  定义为

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ji}. \quad (4.15)$$

正交条件(4.12)式可用矩阵乘法写为

$$\tilde{a}a = I, \quad (4.16)$$

式中  $I$  是单位矩阵.

2. 物理量按空间变换性质的分类 我们知道物理量可以分为标量、矢量、张量等类别,这种分类是根据物理量在空间转动下的变换性质来规定的.

(1) 标量 有些物理量在空间中没有取向关系,当坐标系转动时,这些物理量保持不变.这类物理量称为标量.如质量、电荷等都是标量.设在坐标系  $\Sigma$  中某标量用  $u$  表示,在转动后的坐标系

$$T'_{ii} = a_{ik}a_{il}T_{kl} = \delta_{kl}T_{kl} = T_{kk} = \text{不变量}.$$

因此,二阶张量可以分解为三个部分:

迹  $T_{ii}$ ,

无迹对称张量  $T_{ij} = T_{ji}$ ,  $T_{ii} = 0$ ,

反对称张量  $T_{ij} = -T_{ji}$ .

电四极矩就是一个无迹对称张量,它只有 5 个独立分量.

同样可定义高阶张量.但因较少用到,这里不再详述.

两矢量  $v$  和  $w$  的标积  $v_i w_i$  是一个标量.因为它在另一坐标系上的值

$$v_i' w_i' = a_{ij} v_j a_{ik} w_k = \delta_{jk} v_j w_k = v_j w_j = \text{不变量.}$$

在上式中, 指标  $i$  重复并从 1 到 3 求和, 这种运算称为指标的收缩. 指标  $i$  收缩后, 上式左边再没有剩下自由指标, 因此它是一个标量.

同样, 张量  $T_{ij}$  可以和一个矢量  $v_j$  作出乘积  $T_{ij} v_j$ . 在新坐标系中,

$$T'_{ij} v'_j = a_{ik} a_{jl} T_{kl} a_{jn} v_n = a_{ik} \delta_{ln} T_{kl} v_n = a_{ik} T_{kl} v_l.$$

此式具有矢量的变换关系. 因此,  $T_{ij} v_j$  是一个矢量. 这里指标  $j$  收缩后剩下自由指标  $i$ , 因此它是一个矢量.

由此, 只要看某式有多少个自由指标, 就可以判别它属于哪一类物理量.

$\Sigma'$ 中用  $u'$  表示. 由标量不变性有

$$u' = u.$$

(2) 矢量 有些物理量在空间中有一定的取向性, 这种物理量用三个分量表示, 当空间坐标按(4.8)式作转动变换时, 该物理量的三个分量按同一方式变换. 这类物理量称为矢量. 以  $v$  代表矢量, 它在坐标系  $\Sigma$  中的分量为  $v_i$ , 在转动后的  $\Sigma'$  系中的分量为  $v'_i$ . 与坐标变换(4.8)式对应, 有矢量变换关系

$$v'_i = a_{ij} v_j. \quad (4.17)$$

例如速度、力、电场强度和磁场强度等都是矢量.

有些微分算符也具有矢量性质. 例如  $\nabla$  算符, 它在  $\Sigma$  系中的分量为  $\partial/\partial x_i$ , 在  $\Sigma'$  系中的分量为  $\partial/\partial x'_i$ . 根据微分公式及(4.13)式有

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (4.18)$$

此变换关系与(4.17)式相同, 因此  $\nabla$  算符是一个矢量算符.

(3) 二阶张量 有些物理量显示出更复杂的空间取向性质. 这类物理量要用两个矢量指标表示, 有 9 个分量. 当空间转动时, 其分量  $T_{ij}$  按以下方式变换

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl}. \quad (4.19)$$

具有这种变换关系的物理量称为二阶张量. 例如应力张量, 电四极矩等是二阶张量.

二阶张量还可以进一步分类. 若  $T_{ij}$  对指标  $i, j$  对称,

$$T_{ij} = T_{ji},$$

则变换后的张量

$$\begin{aligned} T'_{ij} &= a_{ik}a_{jl}T_{kl} = a_{ik}a_{jl}T_{lk} = a_{il}a_{jk}T_{kl} \\ &= a_{jk}a_{il}T_{kl} = T'_{ji}. \end{aligned}$$

即变换后的张量仍是对称的. 同样, 反对称张量  $T_{ij} = -T_{ji}$  变换后保持反对称性. 又对称张量之迹  $T_{ii}$  是一个标量,

**3. 洛伦兹变换的四维形式** 以上我们指出,三维坐标转动是满足距离不变

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \text{不变量}$$

的线性变换

$$x_i' = a_{ij}x_j.$$

在第二节中我们又指出,洛伦兹变换是满足间隔不变

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - c^2 t'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 \quad (4.20)$$

的四维时空线性变换.如果形式上引入第四维虚数坐标

$$x_4 = i c t, \quad (4.21)$$

则间隔不变式可写为

$$x'_1^2 + x'_2^2 + x'_3^2 + x'_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \text{不变量}. \quad (4.22)$$

以后在下角指标中用拉丁字母代表 1—3, 希腊字母代表 1—4, 间隔不变式可写为

$$x'_\mu x'_\mu = x_\mu x_\mu = \text{不变量}. \quad (4.23)$$

一般洛伦兹变换是满足间隔不变性(4.23)式的四维线性变换

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu. \quad (4.24)$$

由此, 洛伦兹变换形式上可以看作四维空间的“转动”, 因而三维正交变换的关系可以形式上推广到洛伦兹变换中去. 但我们必须注意, 这四维空间的第四个坐标是虚数, 因此它是复四维空间, 不同于实数的四维欧几里得(Euclid)空间.

# 希臘字母表

大寫	小寫	發音	大寫	小寫	發音
A	$\alpha$	alpha	N	$\nu$	nu
B	$\beta$	beta	$\Xi$	$\xi$	xi
$\Gamma$	$\gamma$	gamma	O	$\circ$	omicron
$\Delta$	$\delta$	delta	$\Pi$	$\pi$	pi
E	$\varepsilon$	epsilon	P	$\rho$	rho
Z	$\zeta$	zeta	$\Sigma$	$\sigma$	sigma
H	$\eta$	eta	T	$\tau$	tau
$\Theta$	$\theta$	theta	Y	$\upsilon$	upsilon
I	$\iota$	iota	$\Phi$	$\phi$	phi
K	$\kappa$	kappa	X	$\chi$	chi
$\Lambda$	$\lambda$	lambda	$\Psi$	$\psi$	psi
M	$\mu$	mu	$\Omega$	$\omega$	omega

沿  $x$  轴方向的特殊洛伦兹变换(2.16)式的变换矩阵为

$$a = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

式中

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (4.26)$$

逆变换(2.17)式的变换矩阵为

$$a^{-1} = \tilde{a} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

容易验证, 变换(4.25)式满足正交条件

$$\tilde{a}a = I.$$

**4. 四维协变量** 在四维形式中,时间与空间统一在一个四维空间内,惯性参考系的变换相当于四维空间的“转动”.由于物质在时空中运动,描述物质运动和属性的物理量必然会反映出时空变换的特点.把三维情形推广,我们也可以按照物理量在四维空间转动(洛伦兹变换)下的变换性质来把物理量分类.在洛伦兹变换下不变的物理量称为洛伦兹标量或不变量.具有四个分量的物理量  $V_\mu$ ,如果它在惯性系变换下与坐标有相同变换关系,即

$$V'_\mu = a_{\mu\nu} V_\nu, \quad (4.28)$$

它就称为四维矢量.满足变换关系

$$T'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} T_{\lambda\tau} \quad (4.29)$$

的物理量  $T_{\mu\nu}$  称为四维张量.这些物理量(标量、矢量和各阶张量)在洛伦兹变换下有确定的变换性质,称为协变量.

例如间隔 (**line element**)

$$ds^2 = -dx_\mu dx_\mu \quad (4.30)$$

为洛伦兹标量.由(3.10)式,固有时

$$d\tau = \frac{1}{c} ds \quad (4.31)$$

也是洛伦兹标量.

现在我们介绍一个常用的四维矢量. 因物体的位移  $dx_\mu$  为四维矢量,  $d\tau$  为标量, 所以

$$\dot{U}_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} \quad (4.32)$$

是一个四维矢量. 这个四维矢量称为四维速度矢量. 而通常意义下的速度是

$$u_i = \frac{dx_i}{dt}. \quad (4.33)$$

(下角指标用拉丁字母表示由 1—3.)  $u_i$  不是四维矢量的分量. 因为当坐标系变换时,  $dx_i$  按四维矢量的分量变换, 但  $dt$  亦发生改变, 因此  $u_i$  就不按矢量方式变换. 事实上在上节中我们已得到  $u_i$

的变换式,它不同于洛伦兹变换.通常意义下的速度  $u_i$  是用参考系  $\Sigma$  的时间量度的位移变化率,而  $U_\mu$  是用固有时量度的位移变化率.因为

推导

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \equiv \gamma_u, \quad (4.34)$$

所以四维速度的分量是

$$U_\mu = \gamma_u (u_1, u_2, u_3, ic). \quad (4.35)$$

$U_\mu$  的前三个分量和普通速度联系着,当  $v \ll c$  时即为  $u$ ,因此  $U_\mu$  称为四维速度.参考系变换时,四维速度有变换关系

$$U_\mu' = a_{\mu\nu} U_\nu. \quad (4.36)$$

现在再介绍一个四维波矢量.设有一角频率为  $\omega$ ,波矢量为  $k$  的平面电磁波在真空中传播.在另一参考系  $\Sigma'$  上观察,该电磁波的频率和传播方向都会发生改变(多普勒效应和光行差效应).以  $\omega'$  和  $k'$  表示  $\Sigma'$  上观察到的角频率和波矢量.现在我们研究  $k$  和  $\omega$  如何变换.

不同坐标系下的观测者，对于事件的发生是无争议的！

只是对于，标定事件的时空坐标有争议！

电磁波的相位因子是

$$e^{i\phi}, \quad \phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t. \quad (4.37a)$$

在另一参考系观察的相位因子是

$$e^{i\phi'}, \quad \phi' = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \omega' t'. \quad (4.37b)$$

我们先看相位  $\phi$  和  $\phi'$  的关系。设参考系  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  的原点在时刻  $t = t' = 0$  重合。在该时刻，两参考系的原点上都观察到电磁波处于波峰，相位  $\phi = \phi' = 0$ 。取此事件为第一事件。在  $\Sigma$  系  $n$  个周期 ( $t = nT = 2\pi n / \omega$ ) 后，第  $n$  个波峰通过  $\Sigma$  系原点，相位为  $\phi = -2\pi n$ 。取此事件为第二个事件，它在  $\Sigma$  上的空时坐标为  $(x = 0, t = 2\pi n / \omega)$ ，在  $\Sigma'$  上的空时坐标  $(x', t')$  可用洛伦兹变换求得，而相位同样是  $\phi' = -2\pi n$ 。这是因为某个波峰通过某一时空点是一个物理事件，而相位只是计数问题，不应随参考系而变。因此，相位是一个不变量

$$\phi = \phi' = \text{不变量}. \quad (4.38)$$

由(4.37)式,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \omega' t' = \text{不变量}. \quad (4.39)$$

但我们知道  $\mathbf{x}$  与  $ict$  合为四维矢量  $x_\mu$ , 因此, 若  $\mathbf{k}$  与  $i\omega/c$  合为另一个四维矢量  $k_\mu$ , 它们按四维矢量方式变换, 有

$$k'_\mu x'_\mu = k_\mu x_\mu = \text{不变量}. \quad (4.40)$$

与(4.39)式相符. 由此我们得到一个四维波矢量

$$k_\mu = \left( \mathbf{k}, i \frac{\omega}{c} \right). \quad (4.41)$$

在洛伦兹变换下,  $k_\mu$  的变换式为

$$k'_\mu = a_{\mu\nu} k_\nu \quad (4.42)$$

对特殊洛伦兹变换(4.25)式, 有

推导!

$$\begin{aligned} k'_1 &= \gamma \left( k_1 - \frac{v}{c^2} \omega \right), \\ k'_2 &= k_2, \\ k'_3 &= k_3, \\ \omega' &= \gamma(\omega - vk_1). \end{aligned} \quad (4.43)$$

设波矢量  $k$  与  $x$  轴方向的夹角为  $\theta$ ,  $k'$  与  $x$  轴夹角为  $\theta'$ , 有

$$k_1 = \frac{\omega}{c} \cos\theta, \quad k'_1 = \frac{\omega'}{c} \cos\theta'$$

代入(4.43)式可解出

**推导!**  $\omega' = \omega \gamma \left( 1 - \frac{v}{c} \cos\theta \right), \quad (4.44)$

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma \left( \cos\theta - \frac{v}{c} \right)}. \quad (4.45)$$

这就是相对论的多普勒效应和光行差公式.

若  $\Sigma'$  为光源的静止参考系, 则  $\omega' = \omega_0$ ,  $\omega_0$  为静止光源的辐射角频率. 由(4.44)式得运动光源辐射的角频率

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma \left( 1 - \frac{v}{c} \cos\theta \right)}. \quad (4.46)$$

其中  $v$  为光源的运动速度,  $\theta$  为  $\Sigma$  上观察者看到辐射方向与光源运动方向的夹角. 当  $v \ll c$  时,  $\gamma \approx 1$ , (4.46) 式变为运动光源的经典多普勒效应公式

$$\omega \approx \frac{\omega_0}{1 - \frac{v}{c} \cos\theta}. \quad (v \ll c)$$

在垂直于光源运动方向观察辐射时, 经典公式给出  $\omega = \omega_0$ , 而相对论公式(4.46)给出

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (\theta = 90^\circ)$$

即在垂直于光源运动方向上, 观察到的辐射频率小于静止光源的辐射频率. 这现象称为横向多普勒效应. 横向多普勒效应为 Ives - Stilwell 实验所证实(见第 233 页注①), 它是相对论时间延缓效应的证据之一.

光行差公式(4.45)也可以由速度变换公式(3.18)导出. 设在参考系  $\Sigma$  上观察, 由光源辐射出的光线在  $xy$  面上, 与  $x$  轴有夹角  $\theta$ , 则

$$u_x = c \cos \theta, \quad u_y = c \sin \theta.$$

设  $\Sigma'$  系相对于  $\Sigma$  以速度  $v$  沿  $x$  轴方向运动, 在  $\Sigma'$  系上观察到光线与  $x'$  轴有夹角  $\theta'$ , 由(3.18)式得

$$\tan \theta' = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{u_y}{\gamma(u_x - v)} = \frac{\sin \theta}{\gamma \left( \cos \theta - \frac{v}{c} \right)},$$

与(4.45)式一致.

光行差较早为天文观测所发现(Bradley于1728年). 如图6-9(a), 设地球相对于太阳参考系  $\Sigma$  的运动速度为  $v$ , 在  $\Sigma$  上看到某恒星发出的光线的倾角为  $\alpha = \pi - \theta$ , 在地球上用望远镜观察该恒星时, 倾角变为  $\alpha' = \pi - \theta'$ . 由于  $v \ll c$ , 由(4.45)式得

$$\tan \alpha' \approx \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \frac{v}{c}}.$$

**5. 物理规律的协变性** 如果一个方程的每一项属于同类协变量, 在参考系变换下, 每一项都按相同方式变换, 结果保持方程形式不变. 举例来说, 设某方程具有形式

$$F_\mu = G_\mu, \quad (4.47)$$

其中  $F_\mu$  和  $G_\mu$  都是四维矢量. 在参考系变换下, 有

$$F'_\mu = a_{\mu\nu} F_\nu = a_{\mu\nu} G_\nu = G'_\mu.$$

因而在新参考系  $\Sigma'$  中有  $F'_\mu = G'_\mu$ , 这方程形式上和原参考系  $\Sigma$  中的方程(4.47)一致. 在参考系变换下方程形式不变的性质称为协变性. 相对性原理要求一切惯性参考系都是等价的. 在不同惯性系中, 物理规律应该可以表为相同形式. 如果表示物理规律的方程是协变的话, 它就满足相对性原理的要求. 因此, 用四维形式可以很方便地把相对性原理的要求表达出来. 只要我们知道某方程中各物理量的变换性质, 就可以看出它是否具有协变性.

本章重点

# 6.5 电动力学的相对论 不变性

**1. 四维电流密度矢量** 实验表明, 带电粒子的电荷与它的运动速度无关, 即电荷  $Q$  是一个洛伦兹标量,

$$Q = \int \rho dV = \text{不变量}.$$

当粒子静止时, 设电荷密度为  $\rho_0$ , 体元为  $dV_0$ . 若粒子以速度  $u$  运动, 则体元有洛伦兹收缩

$$dV = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dV_0.$$

为了保持总电荷  $Q$  的不变性, 电荷密度相应地增大

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma_u \rho_0. \quad (5.1)$$

当粒子以速度  $u$  运动时, 其电流密度为

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{u} = \gamma_u \rho_0 \mathbf{u}. \quad (5.2)$$

由(4.35)式看出, 如果引入电流密度的第四分量

$$J_4 = i c \rho, \quad (5.3)$$

则(5.1)和(5.2)式可以合为一个四维矢量

$$J_\mu = \rho_0 U_\mu, \quad (5.4)$$

式中  $U_\mu$  是四维速度矢量.

对应于四维空间矢量

$$x_\mu = (x, i c t), \quad (5.5)$$

有电流密度四维矢量

$$J_\mu = (J, i c \rho). \quad (5.6)$$

电流密度  $J$  和电荷密度  $\rho$  合为四维矢量显示出这两物理量的统一性. 当粒子静止时, 只有电荷密度  $\rho_0$ ; 当粒子运动时, 表现出有电流  $J$ , 同时电荷密度亦相应地改变.因此,  $\rho$  和  $J$  是一个统一的物理量的不同方面, 当参考系变换时, 它们有确定的变换关系.

由于相对论中时空的统一, 使得非相对论中的不同物理量显示出它们的统一性. 电流密度和电荷密度统一为四维矢量就是其中一个例子.

## 电荷守恒定律

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (5.7)$$

用四维形式表为

$$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \quad (5.8)$$

这方程显然有协变性. 因为左边是一个洛伦兹标量, 在惯性系变换下其值不变, 因而上式对任意惯性参考系成立.

**2. 四维势矢量** 现在我们研究麦克斯韦方程组的协变性. 在第五章中我们把麦克斯韦方程组通过势  $\mathbf{A}$  和  $\varphi$  表示出来. 先讨论势方程的协变性较为方便. 用势表出的电动力学基本方程组在洛伦兹规范下为[见第五章(1.9)式]

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}, \quad (5.9)$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

及规范条件(洛伦兹条件)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (5.10)$$

首先我们注意到,微分算符

$$\square \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad (5.11)$$

是洛伦兹标量算符.用这算符可以把(5.9)式写为

$$\begin{aligned} \square \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{J}, \\ \square \varphi &= -\mu_0 c^2 \rho. \end{aligned} \quad (5.12)$$

在上式中,电流密度  $\mathbf{J}$  激发矢势  $\mathbf{A}$ ,电荷密度  $\rho$  激发标势  $\varphi$ .既然  $\mathbf{J}$  和  $\rho$  构成一个四维矢量,在参考系变换下它们按一定方式变换,则  $\mathbf{A}$  和  $\varphi$  自然也应该统一为一个四维矢量,在参考系变换下互相变换.若  $\mathbf{A}$  和  $\varphi$  合为一个四维势矢量

$$A_\mu = \left( A, \frac{i}{c}\varphi \right), \quad (5.13)$$

则(5.12)式可以合写为

$$\square A_\mu = -\mu_0 J_\mu. \quad (5.14)$$

这方程两边都是四维矢量,因而有明显的协变性.

洛伦兹条件(5.10)式可以用四维形式表为

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \quad (5.15)$$

这方程也具有协变性.

在参考系变换下,四维势按矢量变换:

$$A_\mu' = a_{\mu\nu} A_\nu.$$

若  $\Sigma'$  相对于  $\Sigma$  沿  $x$  方向以速度  $v$  运动,由(4.25)式得势的变换关系

$$\begin{aligned}
A_x' &= \gamma \left( A_x - \frac{v}{c^2} \varphi \right), \\
A_y' &= A_y, \\
A_z' &= A_z, \\
\varphi' &= \gamma(\varphi - vA_x).
\end{aligned} \tag{5.16}$$

**3. 电磁场张量** 电磁场  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  用势表出为

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\
\mathbf{E} &= -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

其分量为

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \dots \\
E_1 &= i c \left( \frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} \right), \dots
\end{aligned} \tag{5.18}$$

引入一个反对称四维张量

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \tag{5.19}$$

由(5.18)式可见,电磁场构成一个四维张量

[作业: 验证! ]

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

用电磁场张量可以把麦克斯韦方程组写为明显的协变形式。  
这方程组中的一对方程

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J},$$

可以合写为

$$\underline{\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 \mathbf{J}_\mu}. \quad [作业: 验证!] \quad (5.21)$$

另一对方程

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\end{aligned}$$

可以合写为

$$\underline{\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0}. \quad [作业: 验证!] \quad (5.22)$$

由张量变换关系

$$F_{\mu\nu}' = a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} F_{\lambda\tau}$$

$$\boxed{\begin{aligned} E_1' &= E_1, \quad B_1' = B_1, \\ E_2' &= \gamma(E_2 - vB_3), \quad B_2' = \gamma\left(B_2 + \frac{v}{c^2}E_3\right), \\ E_3' &= \gamma(E_3 + vB_2), \quad B_3' = \gamma\left(B_3 - \frac{v}{c^2}E_2\right). \end{aligned}} \quad (5.23)$$

(5.23)式可写为更紧致的形式

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}\right)_{\perp}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

式中 $\parallel$ 和 $\perp$ 分别表示与相对速度 $v$ 平行和垂直的分量.

当 $v \ll c$ 时,(5.24)式过渡到非相对论电磁场变换式

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}. \quad (5.25)$$

矢势和标势统一为四维矢量以及电场和磁场统一为四维张量,反映出电磁场的统一性和相对性.电场和磁场是一种物质的两

个方面. 在给定参考系中, 电场和磁场表现出不同性质, 但是当参考系变换时, 它们可以互相转化. 例如在某参考系上观察一个静止电荷, 它只激发静电场, 只须用标势  $\varphi$  描述. 但是变换到另一参考系时, 电荷是运动的, 除了电场之外还有磁场, 必须同时用  $\mathbf{A}$  和  $\varphi$  描述.

关于电磁现象的参考系问题, 至此完全获得解决. 电动力学基本方程式对任意惯性参考系成立. 在坐标变换下, 势按四维矢量变换, 电磁场按四维张量变换.

**[作业]** 例 求以匀速  $v$  运动的带电荷  $e$  的粒子的电磁场.

解 选参考系  $\Sigma'$  固定在粒子上. 在  $\Sigma'$  上观察时, 粒子静止, 因而只有静电场, 其电磁场强度为

$$\mathbf{E}' = \frac{ex'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}, \quad \mathbf{B}' = 0. \quad (5.26)$$

设在参考系  $\Sigma$  上观察, 粒子以速度  $v$  沿  $x$  轴方向运动. 由变换式(5.24)的反变换( $v$  改为  $-v$ )得

$$\begin{aligned}
 E_x &= \frac{ex'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}, \quad B_x = 0, \\
 E_y &= \gamma \frac{ey'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}, \quad B_y = -\gamma \frac{v}{c^2} \frac{ez'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}, \quad (5.27) \\
 E_z &= \gamma \frac{ez'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}, \quad B_z = \gamma \frac{v}{c^2} \frac{ey'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}.
 \end{aligned}$$

我们还必须把上式用  $\Sigma$  系的距离表出. 设粒子经过  $\Sigma$  系原点的时刻为  $t = 0$ . 我们在同一时刻观察各点上的场值. 由洛伦兹变换式得(注意所有距离都是对  $\Sigma$  系同时确定的)

$$x' = \gamma x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (5.28)$$

代入(5.27)式得

$$E = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{ex}{4\pi\epsilon_0 \left[ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) r^2 + \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{c}\right)^2 \right]^{3/2}}, \quad (5.29)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}.$$

简单讨论一下所得结果. 当  $v \ll c$  时, 略去  $(v/c)^2$  级项, 得

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{e\mathbf{x}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \mathbf{E}_0, \\ \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}_0 = \frac{\mu_0 e \mathbf{v} \times \mathbf{x}}{4\pi r^3}.\end{aligned}\tag{5.30}$$

式中  $\mathbf{E}_0$  为静止粒子的静电场.

当  $v \sim c$  时, 在与  $\mathbf{v}$   $\perp$  的方向上,

$$\mathbf{E} = \gamma \frac{e\mathbf{x}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \gg \mathbf{E}_0,$$

在与  $\mathbf{v}$   $\parallel$  的方向上,

$$\mathbf{E} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{e\mathbf{x}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \ll \mathbf{E}_0.$$

电场分布如图 6-10 所示. 注意当  $v \rightarrow c$  时电场趋向于集中在与  $\mathbf{v}$  垂直的平面

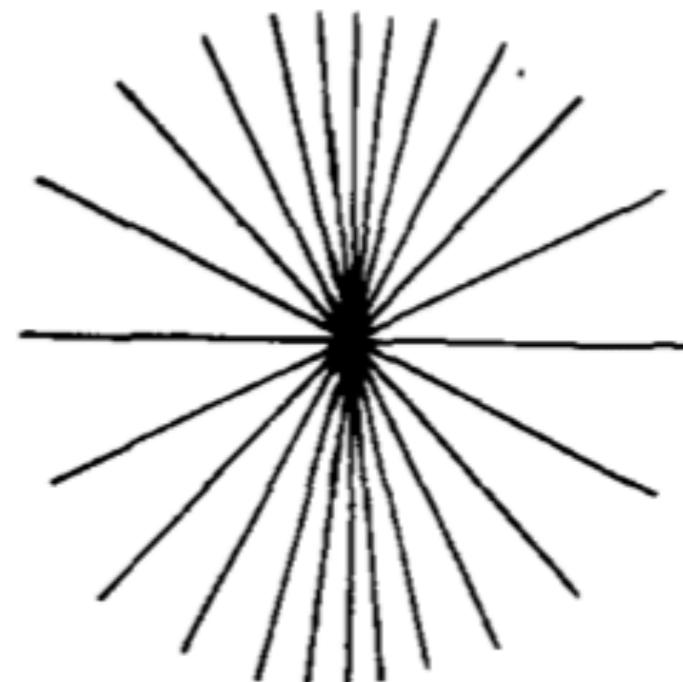


图 6-10

上,且  $\mathbf{B} \sim \frac{1}{c} \mathbf{e}_x \times \mathbf{E}$ ,类似于平面电磁波中  $\mathbf{B}$  与  $\mathbf{E}$  的关系.因此,高速运动带电粒子的电磁场类似于在一个横向平面上的电磁脉冲波.

**4. 电磁场的不变量** 用指标收缩,可以由电磁场张量  $F_{\mu\nu}$  构成洛伦兹不变量

$$\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = B^2 - \frac{1}{c^2} E^2. \quad (5.31)$$

我们还可以构造另一个洛伦兹不变量.为此引入四维全反对称张量  $\epsilon_{\mu\nu\lambda\tau}$ ,定义为:

$$\begin{aligned}\underline{\epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} = +1}, \quad & \text{若 } \mu\nu\lambda\tau \text{ 可以经过偶次置换变为 } 1234; \\ \underline{\epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} = -1}, \quad & \text{若 } \mu\nu\lambda\tau \text{ 可以经过奇次置换变为 } 1234; \\ \underline{\epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} = 0}, \quad & \text{若 } \mu\nu\lambda\tau \text{ 有任意两个指标相同.}\end{aligned} \quad (5.32)$$

全反对称张量在参考系变换下不变,因为由张量变换性质,

$$\begin{aligned}\epsilon'_{\mu\nu\lambda\tau} &= \alpha_{\mu\alpha}\alpha_{\nu\beta}\alpha_{\lambda\gamma}\alpha_{\tau\delta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = (\text{Det } a) \ \epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} \\ &= \epsilon_{\mu\nu\lambda\tau}\end{aligned}\quad (5.33)$$

其中  $\text{Det } a$  是变换矩阵的行列式,由(4.25)式, $\text{Det } a = 1$ .

利用全反对称张量,可以由电磁场张量构成另一不变量

$$\frac{i}{8} \ \epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} F_{\mu\nu} F_{\lambda\tau} = \frac{1}{c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \quad (5.34)$$

真空中的平面电磁波有  $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|/c$  和  $\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E}$ ,因此,两个不变量(5.31)和(5.34)都为 0. 这两性质都是洛伦兹不变的,即在任意惯性系上,平面电磁波都有  $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|/c$ ,且  $\mathbf{B}$  与  $\mathbf{E}$  正交.

# 6.6 相对论力学

1. 能量-动量四维矢量 经典力学的基本规律是牛顿定律

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (6.1)$$

式中  $\mathbf{F}$  是作用于物体上的力,  $\mathbf{p}$  是物体的动量.

(6.1)式对伽利略变换是协变的. 在相对论中, 为了保持洛伦兹协变性, 必须把(6.1)式修改为四维形式. 问题是怎样引入四维动量和四维力?

先分析动量问题. 在经典力学中, 设物体的质量为  $m$ , 运动速

度为  $\mathbf{v}$ , 则它的动量为  $m\mathbf{v}$ . 在相对论中速度  $\mathbf{v}$  不是一个协变量, 即不是一个四维矢量的分量. 但我们可以引入一个与速度有关的四维矢量[见(4.32)式]

$$U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx_\mu}{dt}. \quad (6.2)$$

利用四维速度矢量  $U_\mu$  可以定义四维动量矢量<sup>①</sup>

$$p_\mu = m_0 U_\mu. \quad (6.3)$$

这四维矢量的空间分量和时间分量是

$$p = \gamma m_0 \mathbf{v} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (6.4)$$

$$p_4 = i c \gamma m_0 = \frac{i}{c} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

[讨论: 无质量粒子]

当  $v \ll c$  时,  $\mathbf{p}$  趋于经典动量  $m_0 \mathbf{v}$ . 因此可以认为,  $\mathbf{p}$  是相对论中物体的动量.

现在讨论  $p_4$  的物理意义. 首先我们察看  $v \ll c$  情形下  $p_4$  的展开式

$$p_4 = \frac{i}{c} \left( m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots \right), \quad (6.5)$$

上式括号内第二项是物体的动能. 因此  $p_4$  与物体的能量有关. 设相对论中物体的能量为

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (6.6)$$

则

$$p_4 = \frac{i}{c} W. \quad (6.7)$$

$W$  包含物体的动能. 当  $v=0$  时动能为零, 因此相对论中物体的动能是

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2,$$

而总能量是

$$W = T + m_0 c^2. \quad (6.8)$$

从形式上看,  $W$  含有两部分, 一部分是物体的动能  $T$ , 另一部分是当物体静止时仍然存在的能量, 称为静止能量. 本来在非相对论中, 对能量附加一个常量是没有意义的. 但是在相对论情形, 我们必须进一步研究常数项  $m_0 c^2$  的物理意义. 这是因为  $m_0 c^2$  项的出现是相对论协变性要求的结果, 删去这项或者用其他常数代替这项都不符合相对论协变性的要求. 从物理上看, 自然界最基本的定律之一是能量守恒定律, 只有当附加项  $m_0 c^2$  可以转化为其他形式的能量时, 这项作为能量的一部分才有物理意义. 由此我们可以推论, 物体静止时具有能量  $m_0 c^2$ , 在一定条件下, 物体的静止能量可以转化为其他形式的能量.

北京是一座历史文化名城!



为了验证静止能量表示式  $m_0c^2$  与相对论协变性的关系, 我们具体考虑一个粒子转化过程. 设粒子 A 涅灭并转化为粒子系统 B(例如  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ ). 这过程表明 A 具有静止能量. 在 A 的静止参考系  $\Sigma'$  上, A 的能量就是静止能量  $W_0$ . 在涅灭过程中, 这能量部分地或全部地转变为粒子系统 B 的动能. 在  $\Sigma'$  上 A 的动量和能量是

$$p' = 0, \quad W' = W_0. \quad (6.9)$$

在另一参考系  $\Sigma$  上观察, 设粒子 A 以速度  $v$  沿  $x$  轴方向运动. 若动量与能量构成四维矢量, 则由洛伦兹变换式, 在  $\Sigma$  上的动量和能量是 推导: eq. (4.25) or (2.16)

$$p_x' = \frac{p_x' + \frac{v}{c^2} W'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad W = \frac{W' + v p_x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (6.10)$$

把(6.9)式代入得

$$p = \frac{\frac{W_0}{c^2} v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad W = \frac{W_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (6.11)$$

比较(6.11)和(6.4)式, 得

$$W_0 = m_0 c^2. \quad (6.12)$$

从这推导看出, 若物体具有静止能量  $W_0$ , 物体的动量与能量构成四维矢量, 则  $W_0$  只能是  $m_0 c^2$ .

由(6.7)式, 四维矢量  $p_\mu$  为

$$p_\mu = \left( p, \frac{1}{c} W \right). \quad (6.13)$$

$p_\mu$  称为能量 - 动量四维矢量, 或简称四维动量.

由  $p_\mu$  可构成不变量

$$p_\mu p^\mu = p^2 - \frac{W^2}{c^2} = \text{不变量}.$$

在物体静止系内,  $p = 0$ ,  $W = m_0 c^2$ , 因而不变量为  $-m_0^2 c^2$ . 因此

$$W^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4,$$
$$W = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}. \quad (6.14)$$

这是关于物体的能量、动量和质量的一条重要关系式.

**2. 质能关系** (6.12)式表示物体的质量  $m_0$  和静止能量  $W_0$  的关系, 称为质能关系式.

静止能量的揭示是相对论最重要的推论之一. 它指出静止粒子内部仍然存在着运动. 一定质量的粒子具有一定的内部运动能量. 反过来, 带有一定内部运动能量的粒子就表现出有一定的惯性质量.

质能关系式(6.12)对一个粒子适用, 对一组粒子组成的复合物体(如原子核或宏观物体)也适用. 在后一情形下,  $W_0$  是物体整体静止(即其质心静止)时的总内部能量, 它和物体的总质量  $M_0$

仍有关系  $W_0 = M_0 c^2$ . 这是因为由相对论协变性导出的关系式具有普遍意义,与物体具体结构无关.

当一组粒子构成复合物体时,由于各粒子之间有相互作用能以及有相对运动的动能,因而当物体整体静止时,它的总能量一般不等于所有粒子的静止能量之和,即  $W_0 \neq \sum_i m_{i0} c^2$ , 其中  $m_{i0}$  为第  $i$  个粒子的质量. 两者之差称为物体的结合能

$$\Delta W = \sum_i m_{i0} c^2 - W_0. \quad (6.15)$$

与此对应,物体的质量  $M_0 = W_0 / c^2$  亦不等于组成它的各粒子的质量之和,两者之差称为质量亏损

$$\Delta M = \sum m_{i0} - M_0. \quad (6.16)$$

质量亏损与结合能之间有关系

$$\Delta W = (\Delta M) c^2. \quad (6.17)$$

质能关系式在原子核和粒子物理中被大量实验很好地证实,它是原子能利用的主要理论根据.

在化学反应中利用到原子内部电子运动的能量,这对整个物体的内部能量来说只是非常小的一部分.在原子核反应中利用到与原子核质量亏损相联系的核内部运动能量.在粒子转化过程中,有可能把粒子内部蕴藏着的全部能量释放出来,变为可以利用的动能.例如当  $\pi^0$  介子衰变为两个光子时,由于光子静质量为零,因而  $\pi^0$  介子内部蕴藏着的全部能量  $m_{\pi^0}c^2$  被释放出来而转变为光子的动能.

质能关系式反映了作为惯性量度的质量与作为运动量度的能量之间的关系.在物质反应或转化过程中,物质的存在形式发生变化,运动的形式也发生变化,但不是说物质转化为能量.物质在转化过程中并没有消灭.例如过程  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ ,作为物质的  $\pi^0$  介子转化为作为物质的光子.光子同样是物质,它也可以在适当条件下转化为电子或其他粒子. $\pi^0$  衰变过程中释放出来的能量是由原来存在于  $\pi^0$  介子内的静止能量转化而来的,在转化过程中能量守恒.在

相对论中,能量守恒和动量守恒仍然是自然界最基本的定律.这两条定律在研究粒子转化过程中起着十分重要的作用.

引入

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

则(6.4)和(6.6)式可写为

$$p = mv,$$

$$W = mc^2.$$



用这种表示方法时,动量形式上和非相对论的公式一样,但现在  $m$  不是一个不变量,而是一个随运动速度增大的量.  $m$  可以看作一种等效质量,称为“运动质量”,而不变量  $m_0$  称为静止质量.(6.20)式也称为质能关系式,它是物体的总能量  $W$  和运动质量  $m$  之间的关系.

静止质量  $m_0$  是粒子的基本属性之一. 为简便起见, 下面我们所说的质量都是指静止质量. 具有一定静止质量的粒子在一定条件下可以衰变为总静止质量较小的粒子系统, 在这过程中原来粒子的静止能量部分地或全部地变为末态粒子系统的动能.

由质能关系式, 粒子的质量常用  $\text{MeV}/c^2$  作单位表出, 动量用  $\text{MeV}/c$  表出, 能量用  $\text{MeV}$  表出.

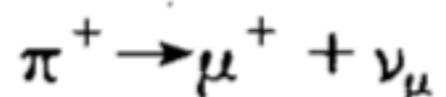
$$1\text{MeV} = 1.602189 \times 10^{-13}\text{J},$$

$$1\text{MeV}/c^2 = 1.782676 \times 10^{-30}\text{kg},$$

电子质量为

**[作业,讲解]**  $m_e = 0.5110034 \pm 0.0000014\text{MeV}/c^2.$

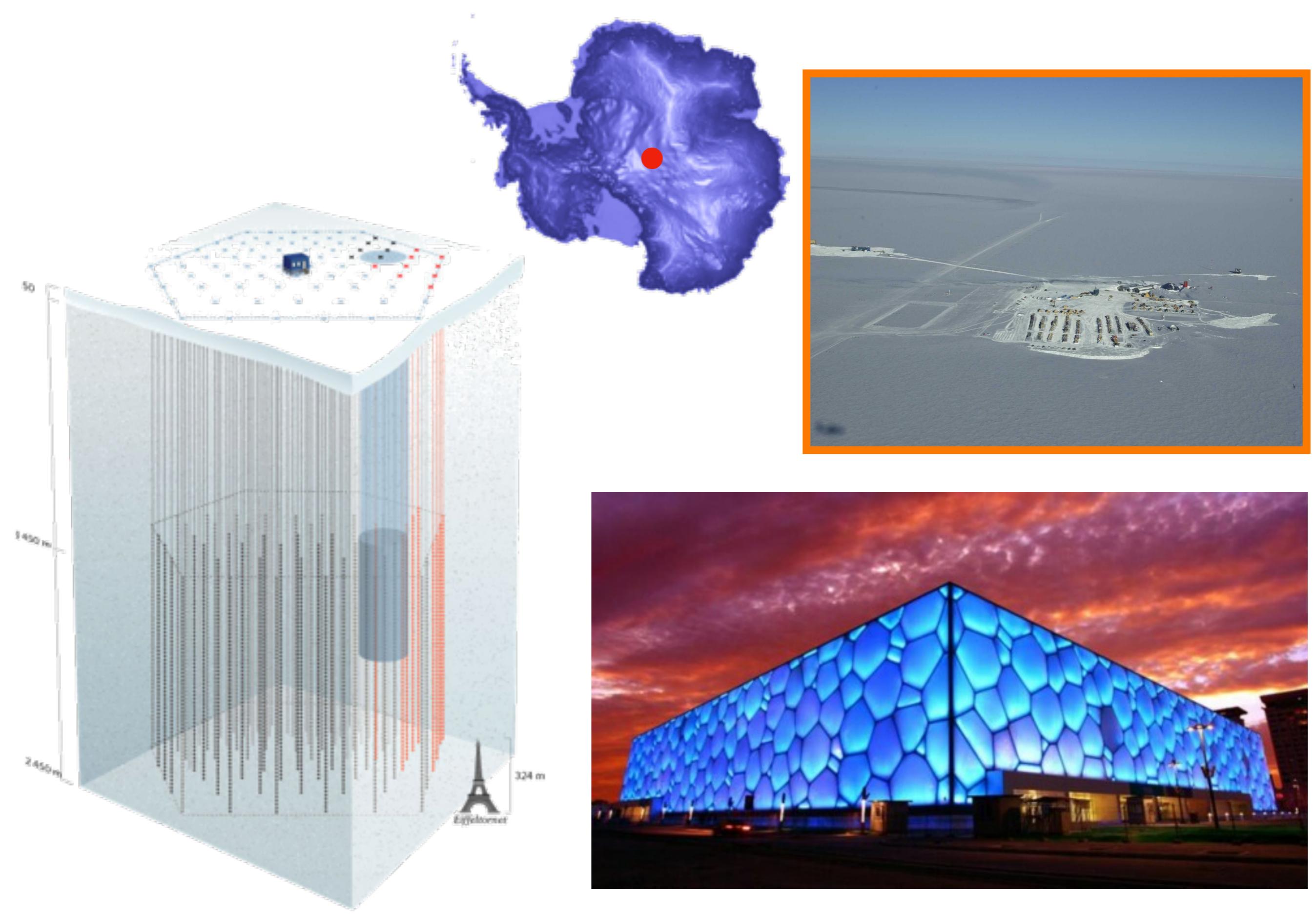
例 1 带电  $\pi$  介子衰变为  $\mu$  子和中微子



各粒子质量为

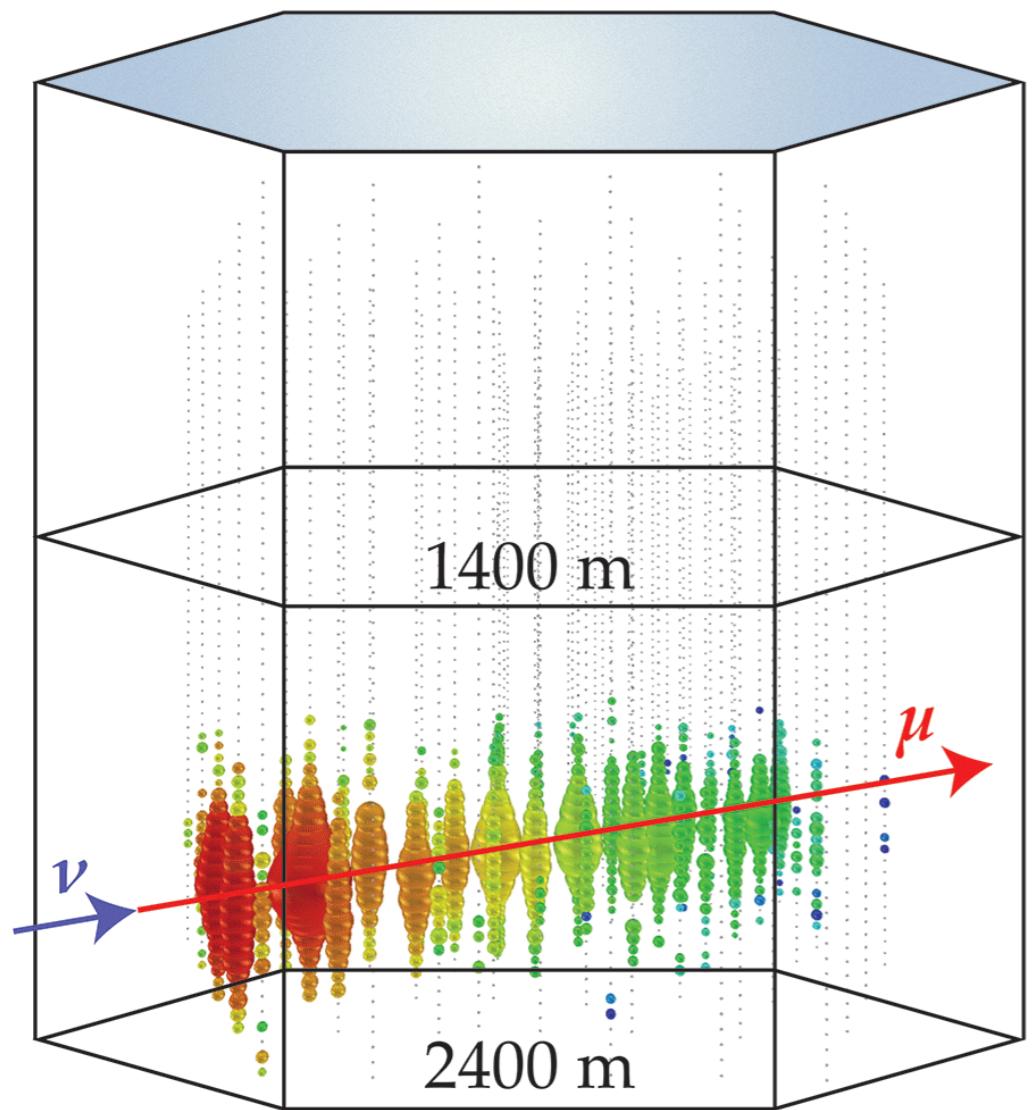
$$m_\pi = 139.57\text{MeV}/c^2,$$

$$m_\mu = 105.66\text{MeV}/c^2,$$

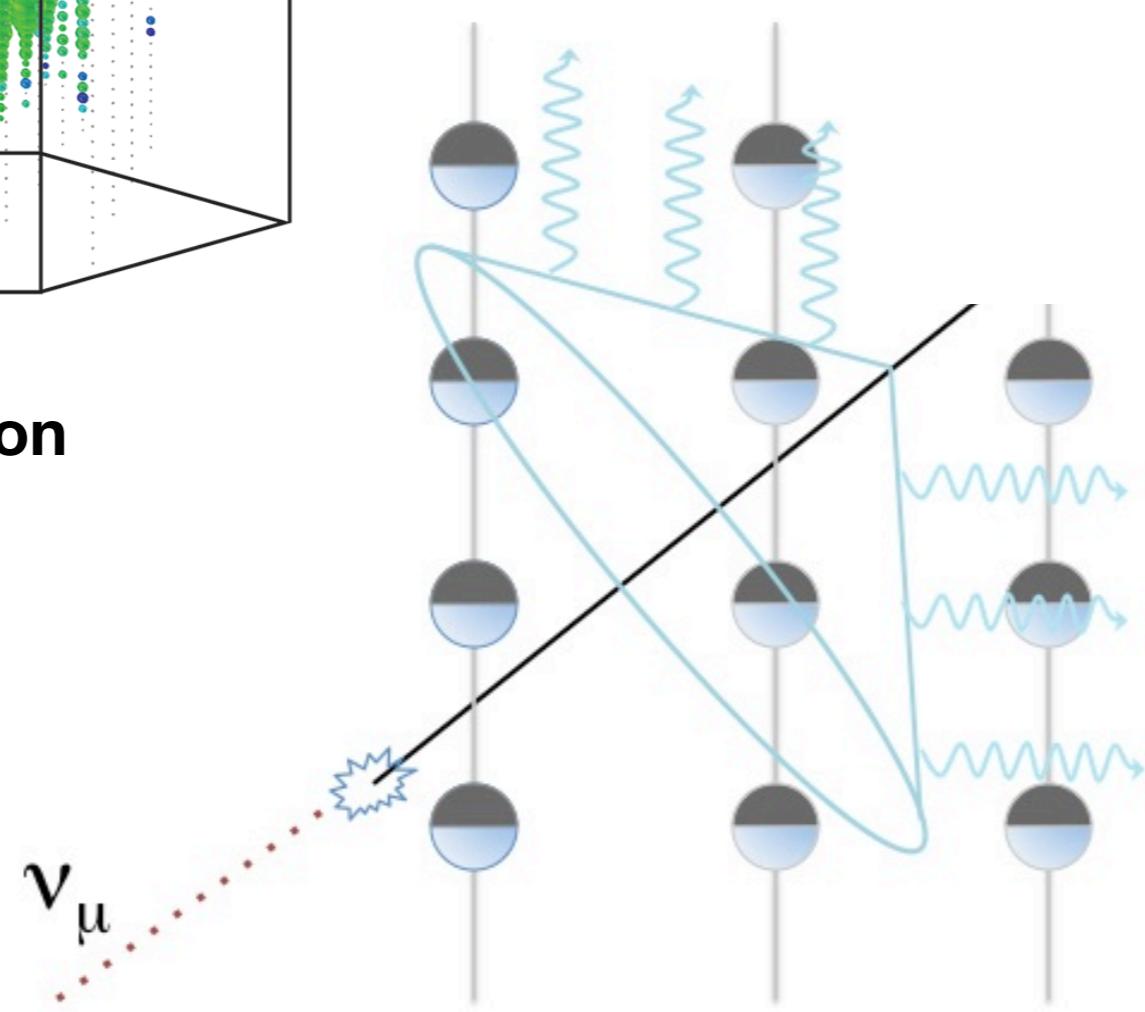


**ICECUBE**

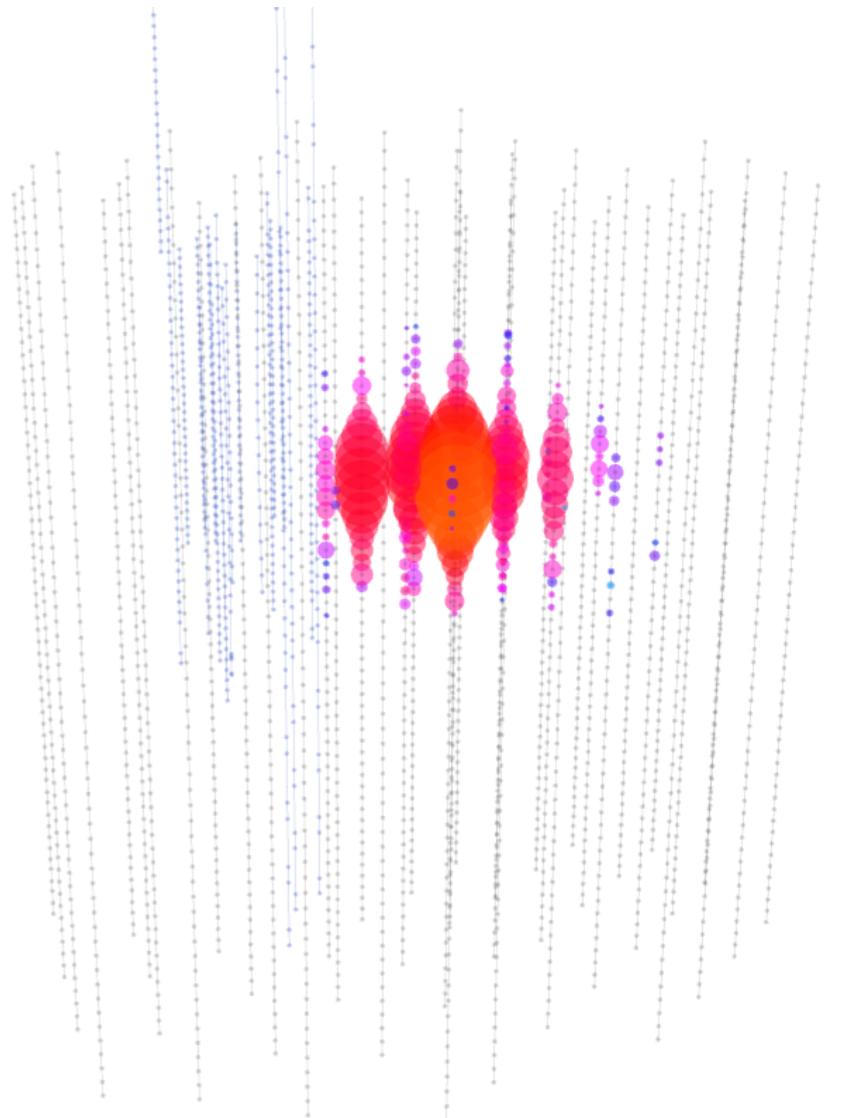
**水立方**



track-like event: muon



cascade-like event: tau



$$m_{\nu}=0,$$

求  $\pi$  介子质心系中  $\mu$  子的动量、能量和速度.

解 在  $\pi$  介子质心系中,  $\pi$  介子的动量和能量为

$$\mathbf{p} = 0, \quad W = m_\pi c^2.$$

设  $\mathbf{p}_{(\mu)}$  和  $\mathbf{p}_{(\nu)}$  分别是  $\mu$  子和中微子的动量, 它们的能量分别是

$$W_{(\mu)} = \sqrt{p_{(\mu)}^2 c^2 + m_\mu^2 c^2}. \quad W_{(\nu)} = p_{(\nu)} c.$$

由动量和能量守恒定律得

$$\mathbf{p}_{(\mu)} + \mathbf{p}_{(\nu)} = 0,$$

$$\sqrt{p_{(\mu)}^2 c^2 + m_\mu^2 c^2} + p_{(\nu)} c = m_\pi c^2.$$

由上面第一式得

$$|\mathbf{p}_{(\mu)}| = |\mathbf{p}_{(\nu)}| \equiv p,$$

代入第二式解出  $p$  得

$$p = \frac{m_\mu^2 - m_\pi^2}{2m_\pi} c,$$

$$W_{(\mu)} = m_\pi c^2 - pc = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2.$$

把粒子质量代入得

$$p = 29.79 \text{ MeV}/c, \quad W_{(\mu)} = 109.78 \text{ MeV}.$$

$\mu$  子的  $\gamma$  因子为

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{W_{(\mu)}}{m_\mu c^2} = \frac{109.78}{105.66} = 1.0390.$$

由此得出  $\mu$  子的速度

$$v = 0.2714 c.$$

**3. 相对论力学方程** 非相对论力学基本方程是牛顿定律 (6.1) 式. 现在我们把它修改为满足相对论协变性的方程. 根据上面的讨论, 动量和能量构成四维矢量  $p_\mu$ . 如果用固有时  $d\tau$  量度能

量动量变化率，则

$$\frac{dp_\mu}{d\tau}$$

是一个四维矢量。因此，如果外界对物体的作用可以用一个四维力矢量  $K_\mu$  描述，则力学基本方程可写为协变形式

$$K_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau}. \quad (6.21)$$

在低速运动情形， $K$  的空间分量应该过渡到经典力  $\mathbf{F}$ ，(6.21) 式应过渡到经典牛顿定律(6.1)式。 $K_\mu$  的第四分量  $K_4$  与空间分量  $\mathbf{K}$  有一定关系。由(6.6)，(6.14)和(6.4)式，

$$\begin{aligned} -icK_4 &= \frac{dW}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \\ &= \frac{c^2}{W} \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \quad [\text{推导}]$$

因此作用于速度为  $\mathbf{v}$  的物体上的四维力矢量为

$$K_\mu = (\mathbf{K}, \frac{i}{c} \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}). \quad (6.22)$$

相对论协变的力学方程包括以下两个方程

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \frac{d\mathbf{p}}{d\tau}, \\ \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} &= \frac{dW}{d\tau}.\end{aligned}\tag{6.23}$$

在上式中，动量和能量变化率是用固有时量度的. 为方便起见，我们把上式用参考系时间  $dt$  量度的变化率表出. 由  $dt = \gamma d\tau$ ，(6.23)式改写为

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \mathbf{K} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \\ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} &= \frac{dW}{dt}.\end{aligned}$$

若定义力为

$$\mathbf{F} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \mathbf{K}, \quad (6.24)$$

则相对论力学方程可以写为

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} &= \frac{dW}{dt}.\end{aligned}\quad (6.25)$$

第一式表示力  $\mathbf{F}$  等于动量变化率, 第二式表示力  $\mathbf{F}$  所作的功率等于能量变化率, 两式形式上和非相对论力学方程一致. 但需注意, (6.25)式中的  $p$  和  $W$  是相对论的动量和能量, 而且一般来说只有在低速运动情形下  $\mathbf{F}$  才等于经典力. 这里  $\mathbf{F}$  不是一个四维矢量的分量, 它的变换关系应由四维力矢量  $K_\mu$  的变换关系导出.

**4. 洛伦兹力** 相对论力学的一个重要应用是研究带电粒子在电磁场中的运动. 正是在电磁相互作用的领域里, 相对论作用力的形式已被完全确定. 在第一章中我们给出电磁场对带电粒子作用力的洛伦兹公式

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (6.26)$$

式中  $e$  为粒子的电荷,  $\mathbf{v}$  为粒子的运动速度. 现在我们证明, 洛伦兹力(6.26)式与(6.25)式中的  $\mathbf{F}$  具有相同变换性质. 为此只要证明  $\mathbf{F}$  可以写为(6.24)式的形式, 其中  $\mathbf{K}$  是一个四维矢量  $K_\mu$  的分量:

用电磁场张量  $F_{\mu\nu}$  和四维速度  $U_\nu$  构成一个四维矢量

$$K_\mu = e F_{\mu\nu} U_\nu, \quad (6.27)$$

容易验证

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} e (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (6.28)$$

**[作业]**

因而由(6.24)式即得力  $\mathbf{F}$  的表示式(6.26). 因此, 洛伦兹力公式满足相对论协变性的要求. 把(6.26)式代入(6.25)式所得的带电粒子在电磁场中的运动方程

$$\frac{dp}{dt} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6.29)$$

适用于任意惯性系,因而能够描述高速粒子的运动.(6.29)式和相对论的动量能量表示式是研究带电粒子在电磁场中运动问题的理论基础.近代高能带电粒子加速器的实践完全证实相对论力学方程的正确性.

相对论协变的力密度公式为

$$f_\mu = F_{\mu\nu} J_\nu, \quad (6.30)$$

其中  $J_\nu$  为四维电流密度矢量(5.6)式.容易验证,  $f_\mu$  的空间分量为

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (6.31)$$

即洛伦兹力密度公式[第一章(3.11)式].  $f_\mu$  的第四分量为

[作业]  $f_4 = \frac{i}{c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \quad (6.32)$

---

除了因子  $i/c$  外,就是电磁场对电荷系统作功的功率密度公式[第一章(6.4)式].因此,洛伦兹力密度公式和功率密度公式都是满足相对论协变性的要求的.

至此我们已经阐明，电动力学的基本规律，包括麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式，是适用于一切惯性参考系的物理学基本规律。

目前我们已知自然界中存在着四种基本相互作用：电磁相互作用，万有引力相互作用，强相互作用和弱相互作用。后两种相互作用是短程的，只存在于 $\lesssim 10^{-15}\text{m}$  范围以内，在该范围内量子效应已很显著，因此对这两种相互作用必须用量子理论来研究，不能用非量子理论的力学方程描述。电磁相互作用和万有引力相互作用是长程的。如上所述，电磁相互作用完全能够纳入狭义相对论的范围，非量子化的相对论性力学方程在一定条件下能够正确描述带电粒子的运动。关于万有引力相互作用，要使它成为相对论性的理论，必须把狭义相对论进一步推广为广义相对论。关于广义相对论的讨论已超出本书范围，有兴趣的读者可以参阅有关论著，这里

例 2 讨论带电粒子在均匀恒定磁场中的运动.

解 在均匀恒定磁场  $\mathbf{B}$  中, 带电粒子的运动方程为

$$\frac{dp}{dt} = e \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (6.33)$$

$$\frac{dW}{dt} = e \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (6.34)$$

由(6.34)式, 粒子的能量  $W$  为常量, 因而速度  $v$  的数值亦为常量. 由(6.33)式得

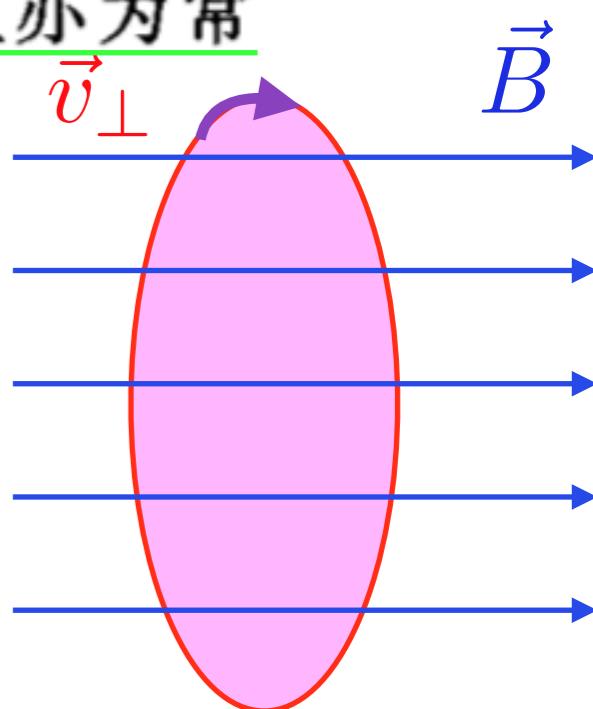
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d \mathbf{v}}{dt} = e \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

即

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{\gamma m_0} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (6.35)$$

式中字母上的一点表示对  $t$  微商. 把  $\mathbf{v}$  分解为与  $\mathbf{B}$  平行的分量  $\mathbf{v}_{//}$  和与  $\mathbf{B}$  垂直的部分  $\mathbf{v}_{\perp}$ , 由上式得

$$\dot{\mathbf{v}}_{//} = 0,$$



$$\dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \frac{e}{\gamma m_0} \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}. \quad (6.36)$$

由第一式得  $v_{\parallel}$  = 常量, 因而  $|\mathbf{v}_{\perp}|$  亦为常量. 第二式相当于在向心力  $e\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}$  作用下质量为  $m = \gamma m_0$  的粒子的非相对论运动方程, 这方程的解是圆周运动. 圆的半径  $a$  可由向心力等于作用力求出, 即

$$\frac{\gamma m_0 v_{\perp}^2}{a} = e v_{\perp} B,$$

$$a = \frac{\gamma m_0 v_{\perp}}{e B} = \frac{p_{\perp}}{e B}, \quad (6.37)$$

圆周运动的角频率为

$$\omega = \frac{v_{\perp}}{a} = \frac{e B}{\gamma m_0}. \quad (6.38)$$

在非相对论情形下,  $\omega = eB/m_0$ , 与粒子运动速度无关. 在相对论情形,  $\gamma$  随粒子能量增大, 因而频率下降.

[课下自习]

# 6.7 Hamiltonian & Lagrangian

1. 拉格朗日形式 在经典力学中,满足一定条件的动力学系统的运动方程可以表为拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (7.1)$$

其中  $q_i$  为广义坐标,  $\dot{q}_i$  为广义速度, 拉格朗日量  $L$  是广义坐标和广义速度的函数

$$L = L(q_i, \dot{q}_i). \quad (7.2)$$

例如在保守力场中运动的质点就是这种系统, 其中

$$L = T - V,$$

$T$  是粒子的动能,  $V$  是势能. 对某些非保守系统, 只要我们能够找出一个函数  $L(q_i, \dot{q}_i)$ , 使该系统的运动方程化为拉格朗日形式 (7.1), 就可以用分析力学的一般理论来研究该系统的运动. 下面我们看出, 在电磁场中带电粒子的运动就属于这情形.

电磁场中带电粒子的运动方程是(6.29)式

$$\frac{dp}{dt} = e(E + v \times B). \quad (7.3)$$

上式在相对论情形仍然成立, 其中粒子的动量  $p$  是(6.4)式

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (7.4)$$

现在我们试探能否找到一个拉格朗日量  $L$  使运动方程(7.3)化为拉氏方程(7.1)的形式? 为此, 我们先把(7.3)的右边用势  $\varphi$  和  $A$  表示出来.

$$E + v \times B = -\nabla \varphi - \frac{\partial A}{\partial t} + v \times (\nabla \times A). \quad (7.5)$$

在拉氏形式中, 坐标  $x$  和速度  $v = \dot{x}$  是独立变量,  $\nabla$  算符不作用在  $v$  的函数上, 因此

$$v \times (\nabla \times A) = \nabla(v \cdot A) - v \cdot \nabla A. \quad (7.6)$$

把(7.5),(7.6)式代入(7.3)式, 得

$$\frac{dp}{dt} = e \left[ -\nabla(\varphi - v \cdot A) - \frac{\partial A}{\partial t} - v \cdot \nabla A \right]. \quad (7.7)$$

由于粒子运动, 在时间  $dt$  有位移  $dx$ , 由此引起矢势  $A$  有增量  $dx \cdot \nabla A$ . 因此, 作用于粒子上的矢势总变化率为

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + v \cdot \nabla A. \quad (7.8)$$

由此可以把(7.7)式写为

$$\frac{d}{dt}(p + eA) = -e \nabla(\varphi - v \cdot A). \quad (7.9)$$

注意到动量  $p$  和矢势  $A$  可以分别写为

$$p_i = \frac{\partial}{\partial v_i} \left[ -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right],$$

$$A_i = \frac{\partial}{\partial v_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A},$$

因而运动方程(7.9)可以写为拉氏形式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad (7.10)$$

其中拉格朗日量  $L$  为

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}). \quad (7.11)$$

现在我们考察  $L$  的变换性质. 把上式乘以  $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ , 得

$$\gamma L = -m_0 c^2 + e A_\mu U_\mu. \quad (7.12)$$

式中  $U_\mu$  为四维速度矢量(4.35). 上式右边是洛伦兹不变量, 因此  $\gamma L$  也是洛伦兹不变量.

在分析力学中, 拉氏量对时间的积分是作用量

$$S = \int L dt = \int \gamma L d\tau, \quad (7.13)$$

其中  $d\tau$  是粒子的固有时. 由于  $\gamma L$  和  $d\tau$  都是不变量, 因而作用量  $S$  是洛伦兹不变量. 作用量的洛伦兹不变性在现代物理学中有重要意义, 这种不变性常常是找出一个物理系统的拉格朗日函数的重要依据. 下面我们说明从  $S$  的不变性就可以基本上确定带电粒子拉格朗日函数的形式.

先考虑自由粒子情形. 在这情形下, 粒子的状态由速度确定. 和粒子速度有关的协变量是四维速度  $U_\mu$ , 而由  $U_\mu$  只能构成一个不变量  $U_\mu U^\mu = -c^2$ . 因此  $\gamma L$  只能是一个洛伦兹不变常量  $a$ , 由此得

$$L = a \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

当  $v \ll c$  时, 上式应趋于非相对论的动能(除了可能有附加常数之外), 由此得  $a = -m_0 c^2$ , 因而自由粒子的拉格朗日函数为

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

当粒子在电磁场内运动时, 除了  $U_\mu$  之外,  $L$  还依赖于四维势  $A_\mu$  或电磁场张量  $F_{\mu\nu}$ . 由粒子的四维速度  $U_\mu$  与电磁场的四维势  $A_\mu$  可构成一个不变量  $U_\mu A_\mu$ , 因而  $\gamma L$  可以含有一项  $b U_\mu A_\mu$ ,  $b$  为一待定常数. 在静电场中, 当粒子运动速度  $v \ll c$  时, 这项应等于粒子在静电场中的负位能  $-e\varphi$ , 由此定出  $b = e$ . 因此, 由不变性的考虑我们确定带电粒子在电磁场中运动的拉格朗日量为(7.11)式.

**2. 哈密顿形式** 对于用拉氏量  $L$  描述的动力学系统, 广义动量  $P_i$  定义为

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (7.14)$$

$P_i$  也称为与广义坐标  $q_i$  共轭的正则动量. 系统的哈密顿量为

$$\mathcal{H} = \sum_i P_i \dot{q}_i - L, \quad (7.15)$$

$\mathcal{H}$  是广义坐标  $q_i$  和广义动量  $P_i$  的函数

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_i, P_i). \quad (7.16)$$

用哈密顿量可以把运动方程表为正则形式

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}, \quad (7.17)$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}. \quad (7.18)$$

回到电磁场中的带电粒子运动情形. 由(7.11)式, 正则动量  $\mathbf{P}$  是

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e A_i,$$

即

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + e\mathbf{A}, \quad (7.19)$$

式中  $\mathbf{p}$  是粒子的机械动量(7.5)式. 上式表明, 在电磁场中粒子的正则动量不等于它的机械动量, 而是附加上一项  $e\mathbf{A}$ .

由(7.15)式, 带电粒子的哈密顿量为

$$\mathcal{H} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \quad (7.20)$$

但  $\mathcal{H}$  应该用正则动量  $\mathbf{P}$  而不是用速度  $\mathbf{v}$  表出. 由(6.6), (6.14)和(7.19)式, 得

$$\mathcal{H} = \sqrt{(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2 c^2 + m_0^2 c^4} + e\varphi. \quad (7.21)$$

上式右边第一项是粒子的运动能量  $W$ (包括静止能量), 因而  $\mathcal{H}$  对应于  $p_\mu + eA_\mu$  的第四分量. 引入四维正则动量

$$P_\mu = p_\mu + eA_\mu, \quad (7.22)$$

则哈密顿量  $\mathcal{H}$  是  $P_\mu$  的第四分量

$$P_\mu = \left( P, \frac{i}{c} \mathcal{H} \right). \quad (7.23)$$

不难验证哈密顿方程(7.17)和(7.18)相当于原运动方程(7.3).

**3. 非相对论情形** 当  $v \ll c$  时, 以上给出的拉格朗日量和哈密顿量就变为非相对论情形下相应的量.

拉氏量(7.10)式当  $v \ll c$  时变为(除去一个不重要的附加常量)

$$L = \frac{1}{2} m_0 v^2 - e(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}). \quad (7.24)$$

哈密顿量(7.21)式变为

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m_0} (\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2 + e\varphi. \quad (7.25)$$

$\mathcal{H}$  和  $L$  仍满足关系式(7.15),

$$\mathcal{H} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - L. \quad (7.26)$$