

电动力学B

Bin HU

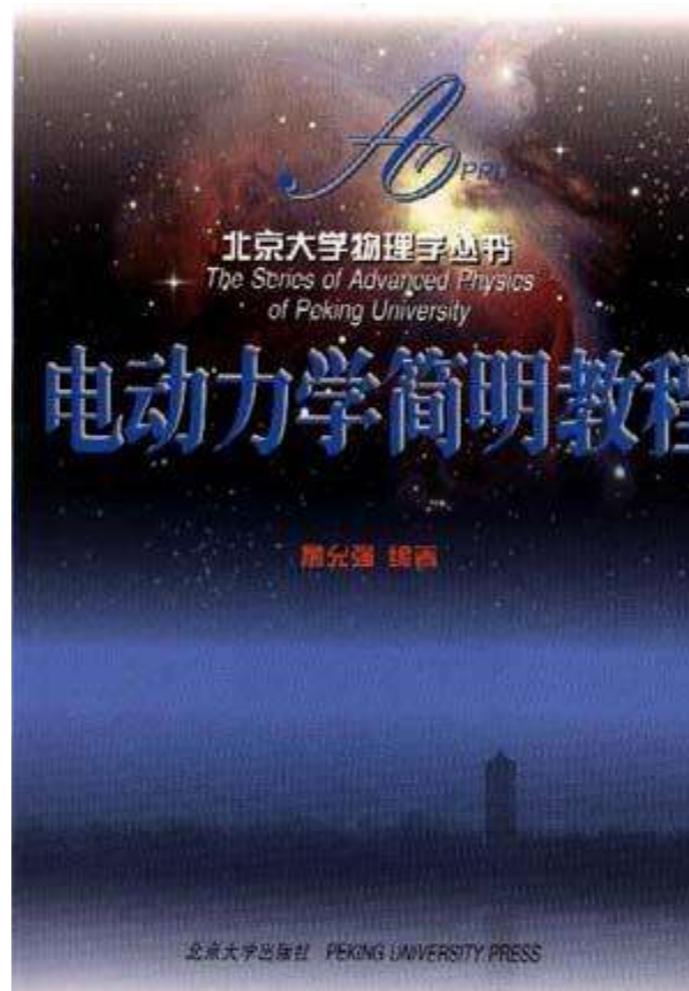
bhu@bnu.edu.cn

Astro@BNU

Office: 南院F座101



郭硕鸿



俞允强



周栋林

outline

	本课程	中科大
第一章： 电磁现象的普遍规律	(6hr)	(13hr)
第二章： 静电场	(6hr)	(9hr)
第三章： 静磁场	(6hr)	(6hr)
第四章： 电磁波的传播	(7hr)	(9hr)
第五章： 电磁波的辐射	(8hr)	(8hr)
第六章： 狹义相对论	(9hr)	(14hr)
第七章： 带电粒子和电磁场的相互作用	(6hr)	(13hr)
	(48hr)	(72hr)

outline

凝聚态物理系统

第一章：电磁现象的普遍规律

第二章：静电场 ~~—唯一性定理~~

第三章：静磁场 ~~—阿哈罗夫-玻姆效应~~ ~~—超导体~~

第四章：电磁波的传播

等离子体

~~光子晶体~~ ~~—高斯光束~~ ~~—孤子~~

第五章：电磁波的辐射

偶 / 四极辐射

天线辐射

天体物理过程

第六章：狭义相对论

相对论协变形式

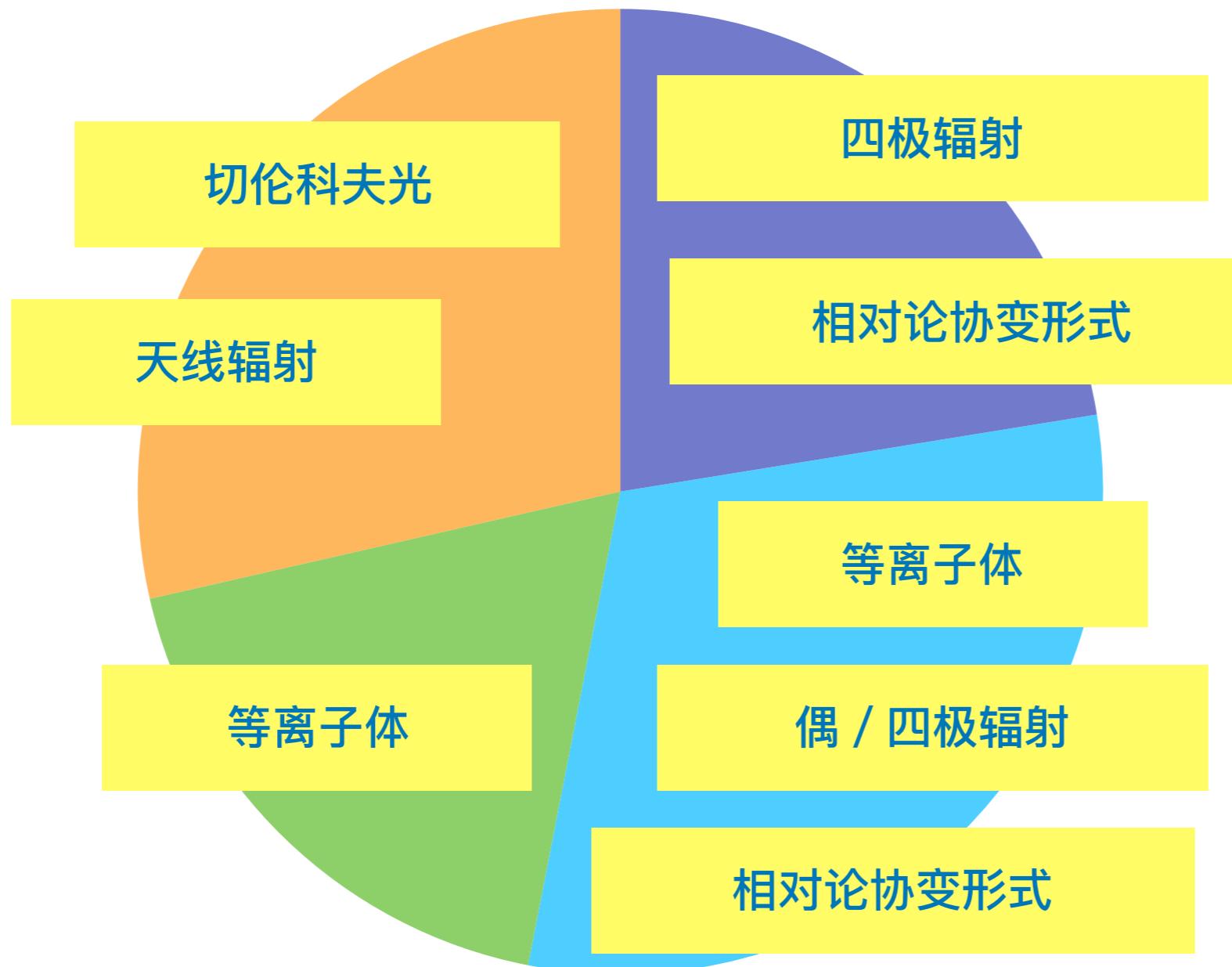
拉格朗日形式

哈密顿形式

第七章：带电粒子和电磁场的相互作用

切伦科夫光

- 引力波
- 宇宙学
- 恒星物理
- 宇宙射线



考核方式：

平时作业、论文、文献分析占40%

期末闭卷考试占60%

平时作业：

每堂课后都会有，每章第一节前，交上一章作业

作业纸（不要用本子）

答疑：

有问题及时问（课下、微信群、办公室）

每章结束后，安排一次晚间答疑、一次习题课

http://astrowww.bnu.edu.cn/sites/hubin/bh_bnu_homepage/#teach

课件：



助教：宋艳玲

2019天文系电动B
微信群2维码

sN_{Ia}

1. 电磁现象的普遍规律

GRB

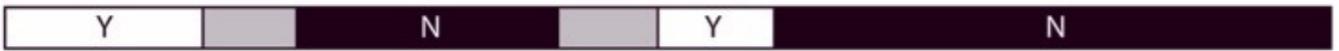
X-ray

CMB

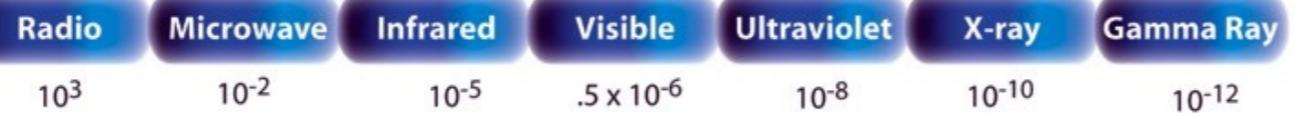
galaxy

THE ELECTROMAGNETIC SPECTRUM

Penetrates
Earth
Atmosphere?



Wavelength
(meters)



About the size of...



Buildings



Humans



Honey Bee



Pinpoint



Protozoans



Molecules

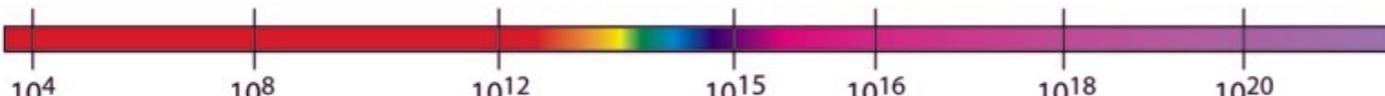


Atoms

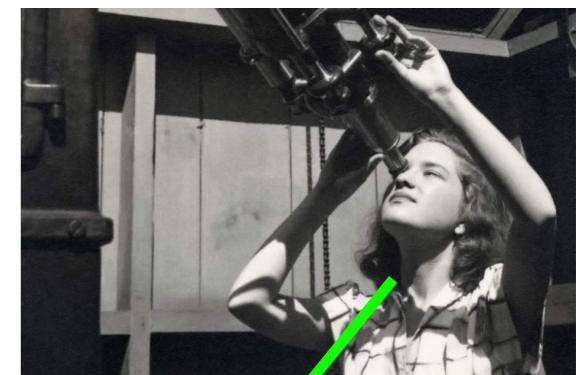
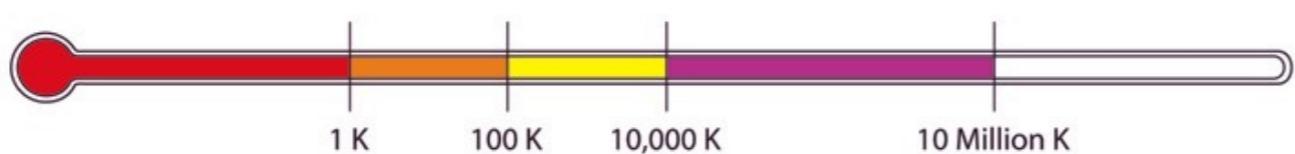


Atomic Nuclei

Frequency
(Hz)



Temperature
of bodies emitting
the wavelength
(K)



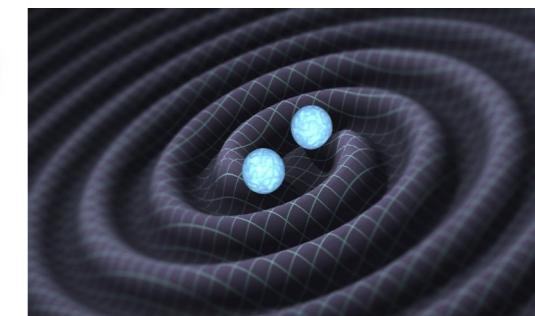
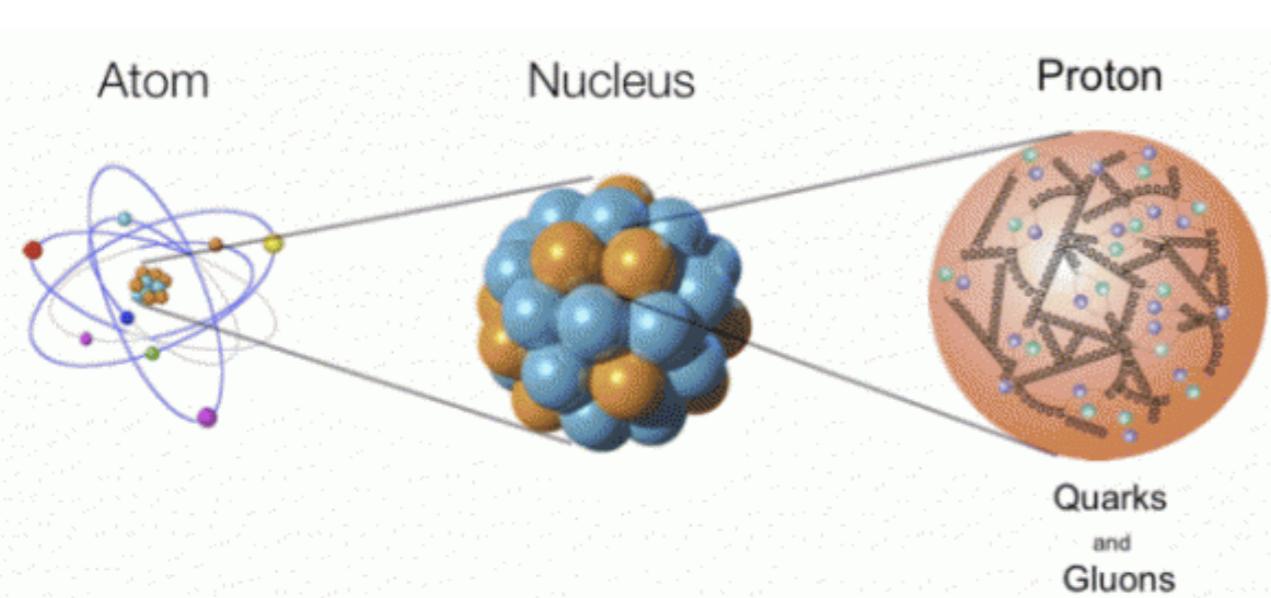
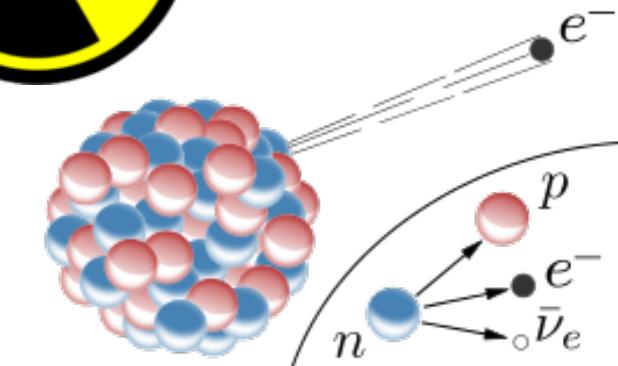
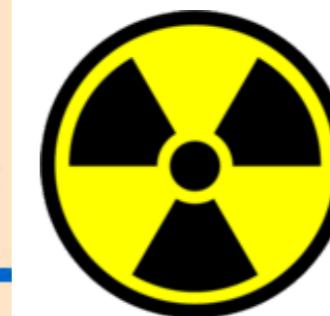
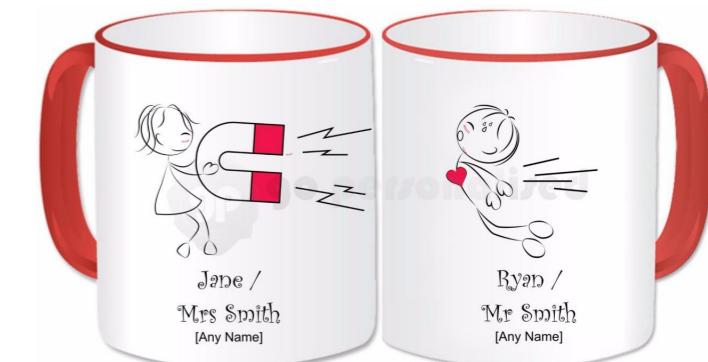
Astronomer

Vera Rubin

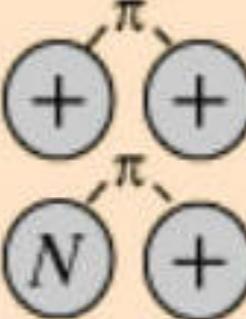
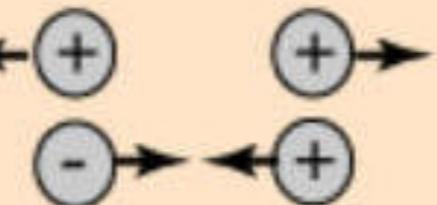
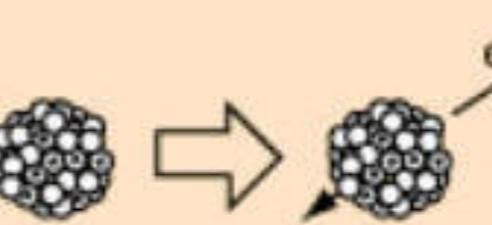
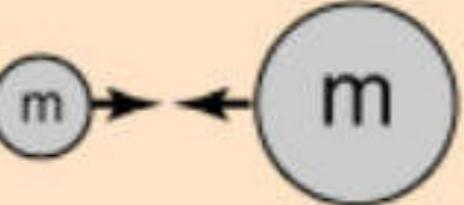


4 fundamental forces

Strong		Force which holds nucleus together	Strength 1	Range (m) 10^{-15} (diameter of a medium sized nucleus)	Particle gluons, π (nucleons)
Electro-magnetic			Strength $\frac{1}{137}$	Range (m) Infinite	Particle photon mass = 0 spin = 1
Weak		neutrino interaction induces beta decay	Strength 10^{-6}	Range (m) 10^{-18} (0.1% of the diameter of a proton)	Particle Intermediate vector bosons W^+ , W^- , Z_0 , mass > 80 GeV spin = 1
Gravity			Strength 6×10^{-39}	Range (m) Infinite	Particle graviton? mass = 0 spin = 2



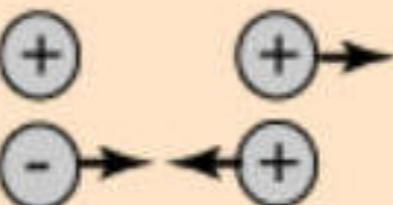
4 fundamental forces

<i>Strong</i>		Force which holds nucleus together	Strength 1	Range (m) 10^{-15} (diameter of a medium sized nucleus)	Particle gluons, π (nucleons)
<i>Electro-magnetic</i>			Strength $\frac{1}{137}$	Range (m) Infinite	Particle photon mass = 0 spin = 1
<i>Weak</i>		neutrino interaction induces beta decay	Strength 10^{-6}	Range (m) 10^{-18} (0.1% of the diameter of a proton)	Particle Intermediate vector bosons W^+, W^-, Z_0 , mass > 80 GeV spin = 1
<i>Gravity</i>			Strength 6×10^{-39}	Range (m) Infinite	Particle graviton ? mass = 0 spin = 2
5th force? Dark Matter, Dark Energy					

4 fundamental forces

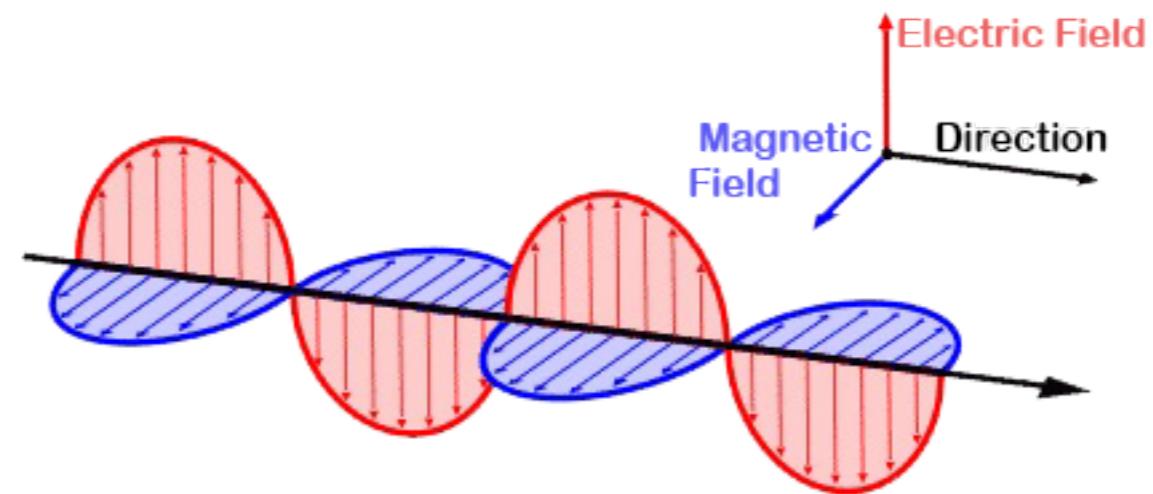
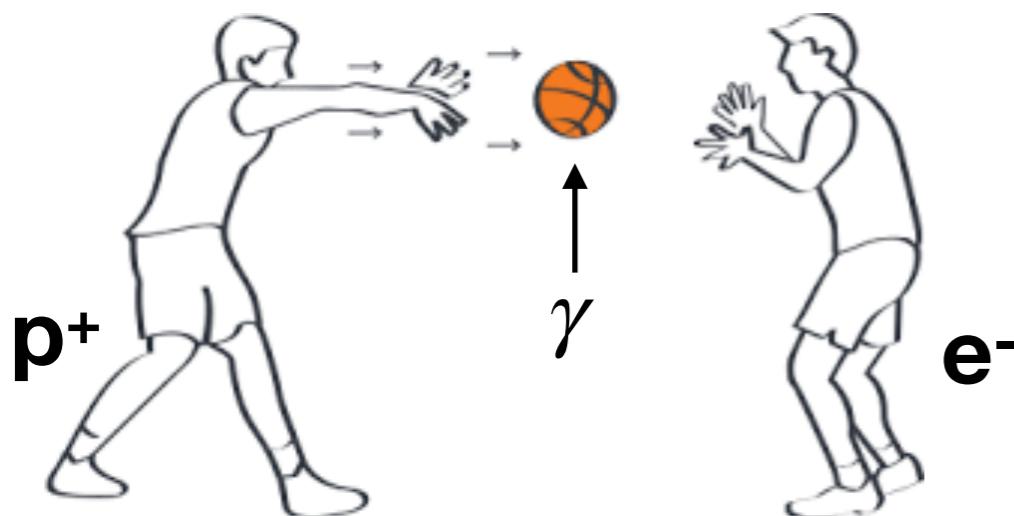
经典电动力学

→ 电场、磁场、电磁波 (\vec{E}, \vec{B})

Electro-magnetic	Strength	Range (m)	Particle
	$\frac{1}{137}$	Infinite	photon mass = 0 spin = 1

电磁波 $\xrightarrow{\text{量子化}}$ 光子 (规范波色子) A_μ

量子电动力学
(Quantum ElectroDynamics)





THE GOOD
THE BAD AND THE UGLY

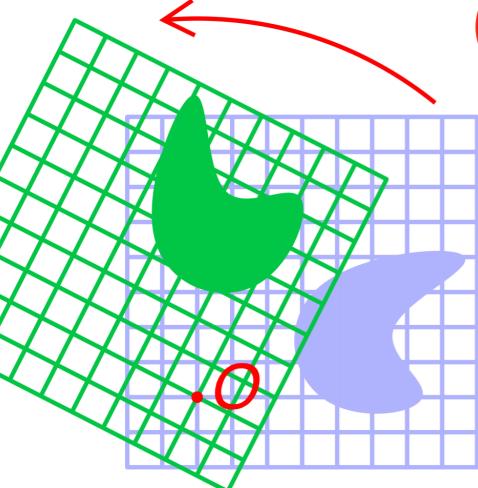
1.0 标量、矢量、张量

电场强度 $\vec{E}(\vec{x};t)$, 磁感应强度 $\vec{B}(\vec{x};t)$ 是**矢量场**

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \begin{pmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \\ E_z(t) \end{pmatrix}$$

考虑一个3D Euclidean空间中的**线性齐次坐标变换**

(转动)



$$x'_i = A_{ij}x_j$$

$$\left(x'_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij}x_j \right)$$

3D空间中的转动，都可以分解为
3个独立的Euler转动：

[video](#)

$$R = R_z(\gamma) \cdot R_y(\beta) \cdot R_x(\alpha)$$

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

考虑3D转动，我们有：

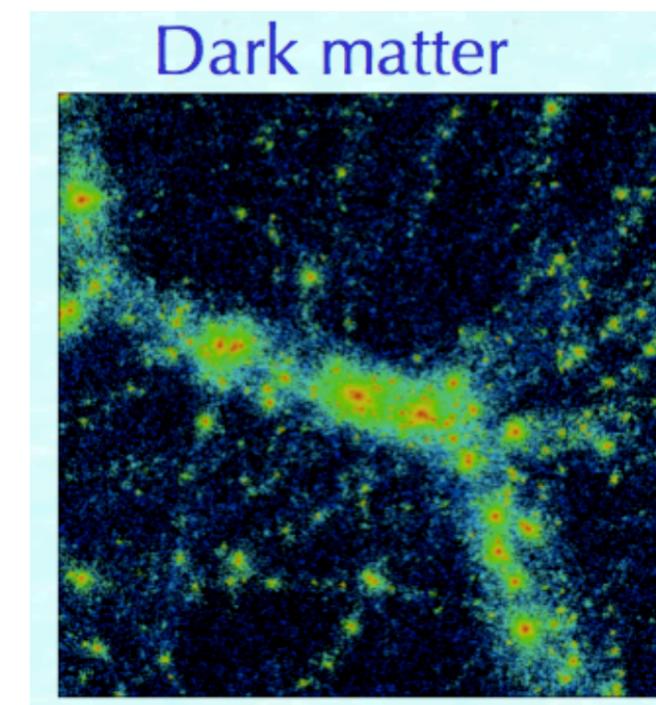
$$A_{ij} = R_{ij}$$

某种物理量在空间中的分布

如：宇宙中的物质密度场: $\rho(\vec{x};t)$

$$\rho(\vec{x};t)$$

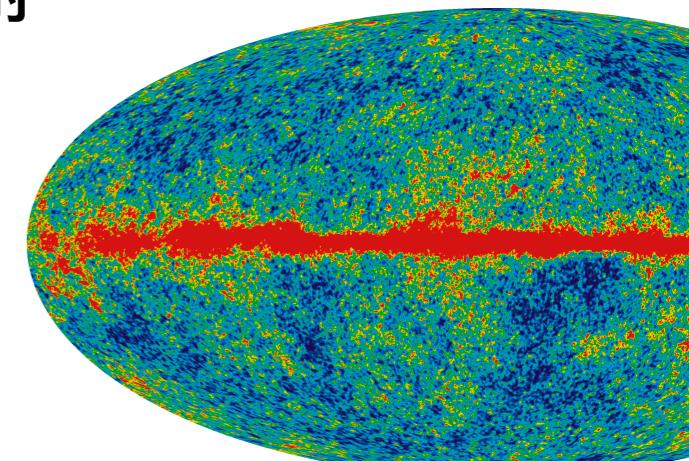
如果，场值(**field value**)
不依赖于时间，则称为
静态场；如果，依赖于
时间，称为**动力学场**。



再如：宇宙微波背景辐射
的温度场: $T(\theta, \varphi; t)$

$$2.7255K \pm 0.00001$$

$$\frac{\Delta T(\theta, \varphi; t = now)}{\bar{T}(t = now)}$$



2D球面上的场

3D Euclidean 空间有一个重要的对称性：**3D转动对称性**

我们将各种不同的物理量，在3D转动变换下的，不同的变换性质，将其分为：

$$\phi'(\vec{x}') = \phi(\vec{x}) \quad \text{标量(Scalar)} \quad \longleftarrow \quad \text{密度场}$$

$$u'_i(\vec{x}') = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} u_j(\vec{x}) = A_{ij} u_j(\vec{x}) \quad \text{矢量(Vector)} \quad \longleftarrow \quad \text{电场强度、磁感应强度}$$

$$T'_{ij}(\vec{x}') = \frac{\partial x'_i}{\partial x_m} \frac{\partial x'_j}{\partial x_n} T_{mn}(\vec{x}) = A_{im} A_{jn} T_{mn}(\vec{x}) \quad \text{张量(Tensor)} \quad \longleftarrow \quad \text{“引力波”}$$

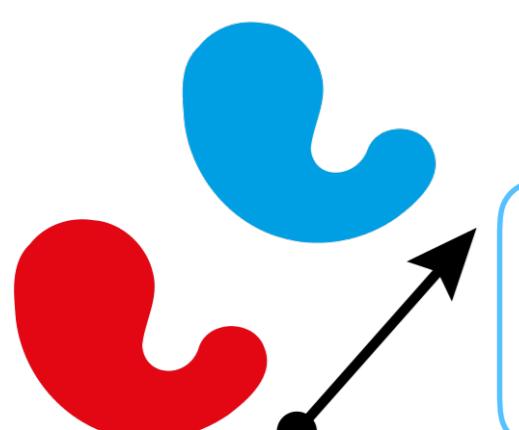
形而上地，我们可以用，群论的数学语言来描述 3D Euclidean 空间中的线性齐次坐标变换

$\{A_{ij}\}$ 这组3x3的矩阵，构成了SO(3)群。电场强度、磁感应强度，是这个群的一个矢量。

(Special Orthogonal group)

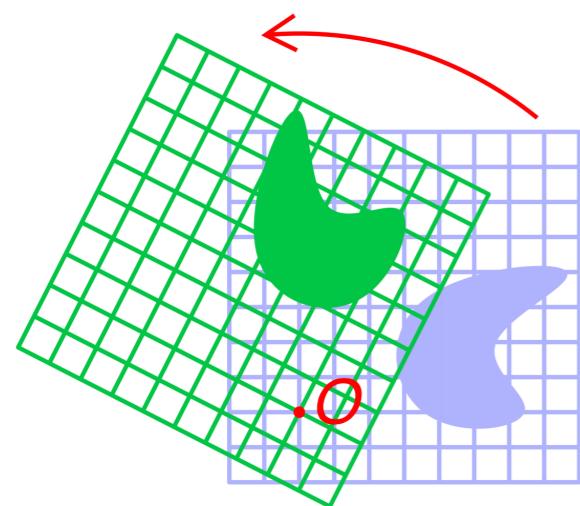
我们在谈标 / 矢 / 张量时，一定要清楚是哪个群的

这点，对于未来学习广义相对论是十分重要的！



Q: 上述线性齐次坐标变换是否包括3维平移变换？

Group Theory in a Nutshell



群：一个集合。包含：群元、群算符

(某种数学客体，如：矩阵)

(某种数学操作，如：矩阵乘法)

满足一下4个条件：

1. 封闭性：如果群元 a 、 b 在群内，那么 $c = a \cdot b$ 也在群内
2. 分配律： $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. 单位元在群内： $e \in G$ ， $a \cdot e = e \cdot a$ ， $e = e^{-1}$
4. 逆元在群内： $\{a, a^{-1}\} \in G$ ， $a \cdot a^{-1} = e$

数学上，所有 $n \times n$ 的可逆实矩阵，配上矩阵乘法，就构成了阶数为 n 的一般线性群
(General Linear group), namely **GL(n,R)**

广义相对论中定义标 / 矢 / 张量的群

3维欧几里得空间中，保持空间距离不变的，坐标变换的操纵。其所对应的矩阵，
配上矩阵乘法，构成了3维正交群(Orthogonal group), namely **O(3)**

$$x'_i = A_{ij} x_j$$

电动
力学

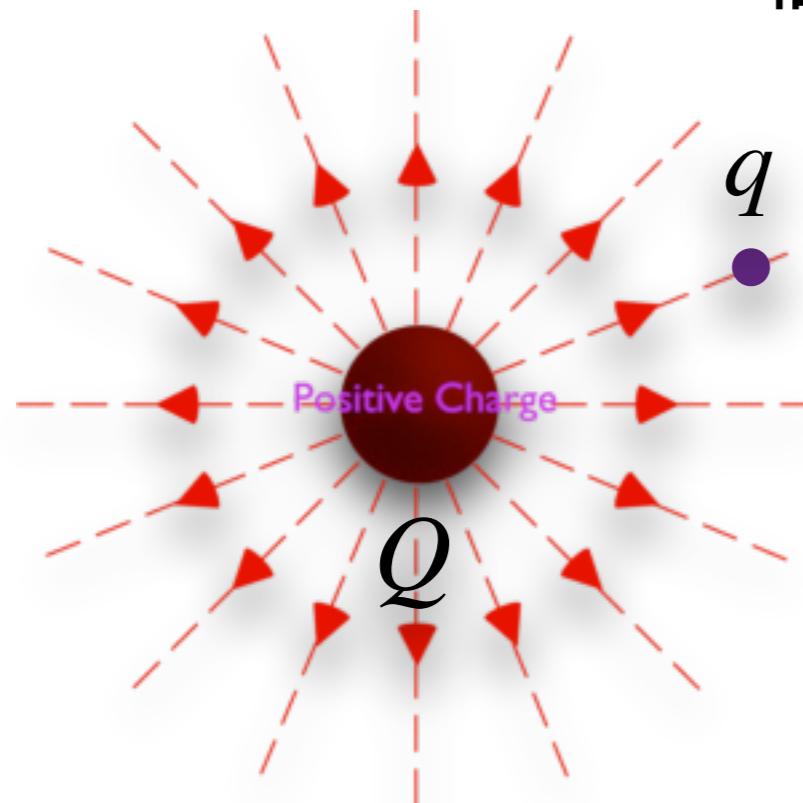
如，再有矩阵的行列式为1，就构成了特殊正交群(Special Orthogonal group), namely **SO(3)**

1.1 电荷&电场

考虑真空中一个静态、带电量很大的点电荷Q

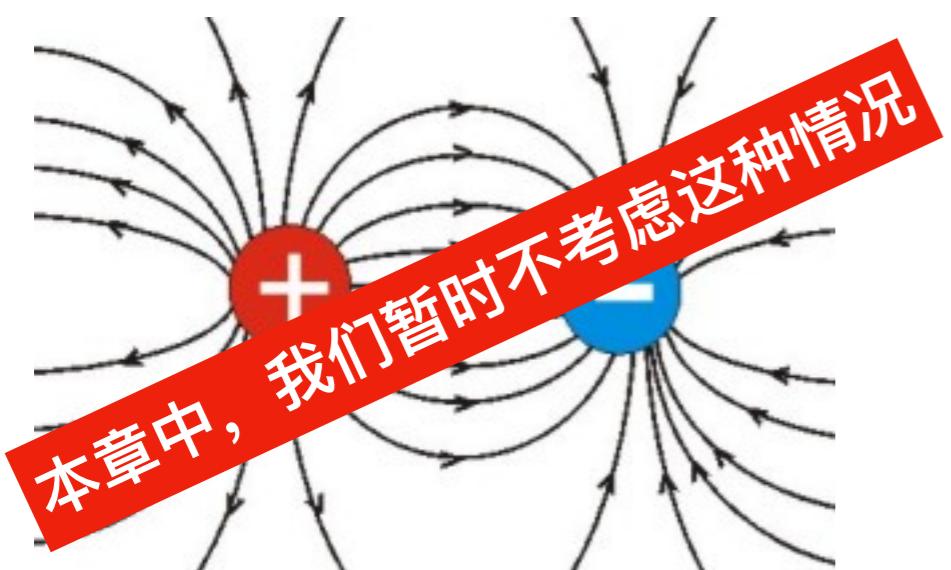
(probe particle, $q \ll Q$)

相距为 \bar{r} 距离处的一个带电量很小的一个试验电荷q

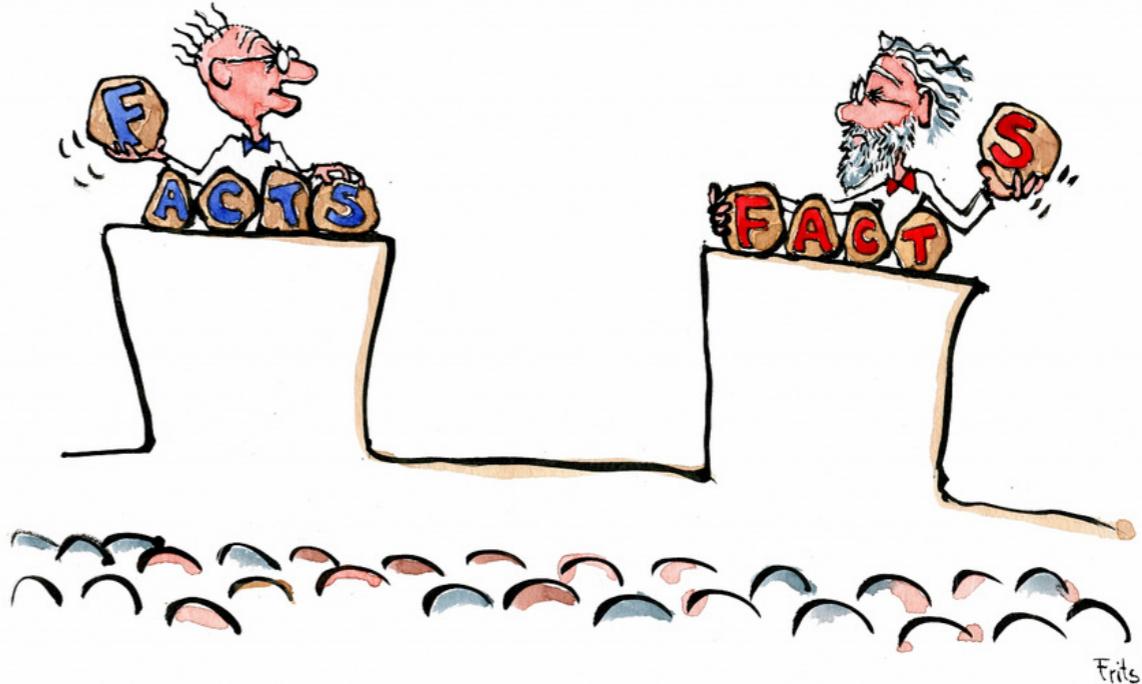


q感受到来自Q的库仑力（各向同性 / 球对称）为：

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{单位方向矢量} \\ \uparrow \text{真空介电常数} \end{matrix}$$



媒介传播 V.S. 超距作用？



如果 $Q \sim q$ 差不多，则q的存在破坏球对称性
(q对Q有很强的反馈效应 back reaction)

现代物理观点认为：

一个电荷周围存在着一种特殊的物质，成为电场。电场是传递“电”相互作用的媒介。

我们用一个单位试验电荷($q=1 \ll Q$)，所受到的库仑力来定义所在点的电场强度 $\vec{E}(\vec{x})$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

电场具有叠加性，

空间某点受多个电荷所激发的总的电场强度，为单个电场强度的线性求和

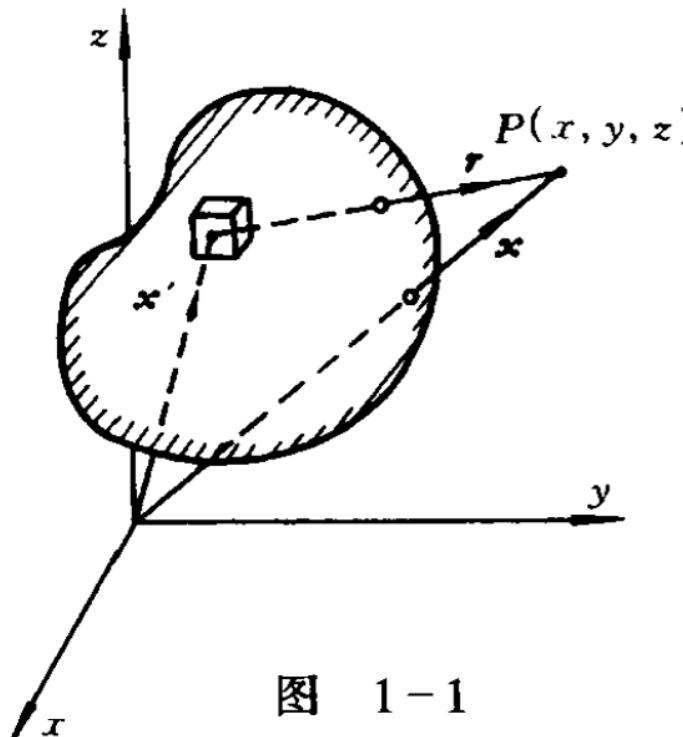
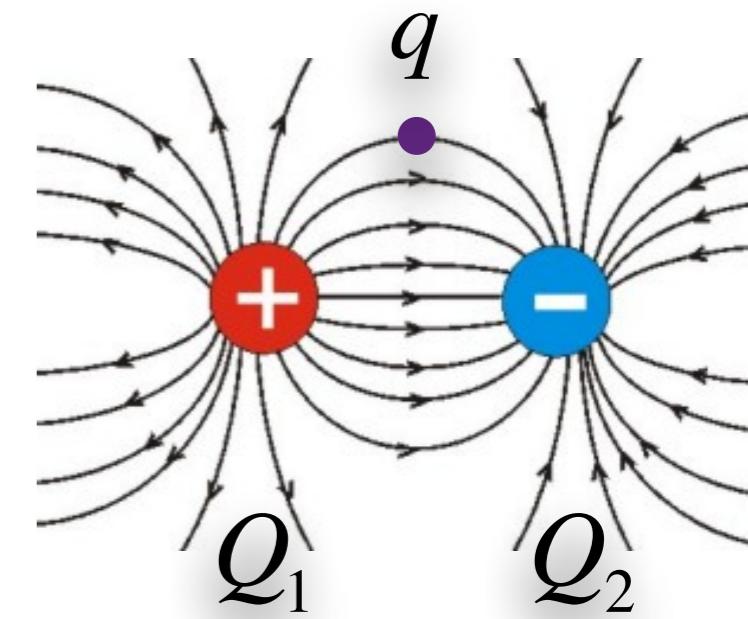
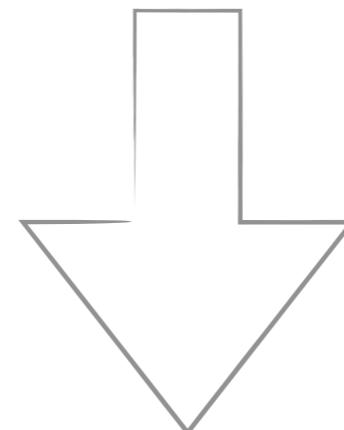


图 1-1

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{r}_i$$

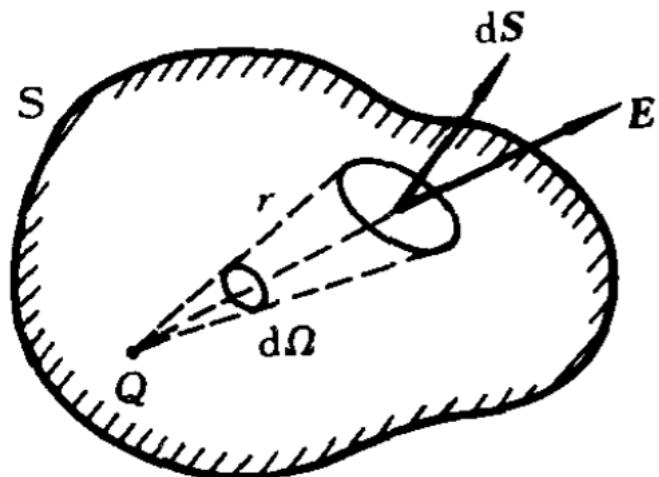
$$dQ = \rho(x') dV'$$

电荷连续分布



电场强度的积分表达式： $E(x) = \int \frac{\rho(x') r}{4\pi\epsilon_0 r^3} dV'$

一个电荷 Q 发出的电场强度的 通量 正比于 Q (单位截面上电场强度的积分)



通过 dS 的通量:

$$E \cdot d\mathbf{S} = E \cos\theta dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta dS$$

Gauss 定理:
(积分形式)

$$\oint E \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$d\Omega = \frac{\cos(\theta)}{r^2} dS \quad \text{立体角}$$

推导

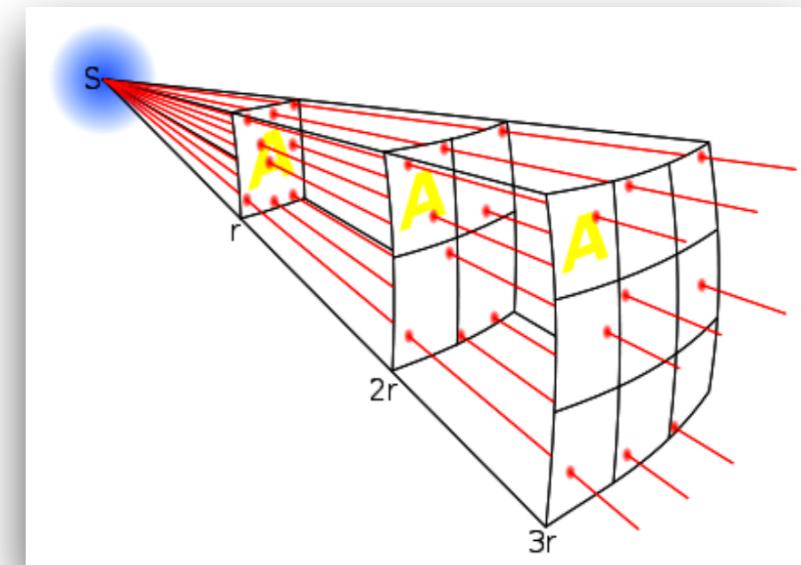
如果电荷在 闭合曲面外, 则它发出的电场线穿入该曲面后再穿出来, 因而对该闭合曲面的电通量 没有贡献. 在一般情况下, 设空间中有多个电荷 Q_i , 则 E 通过任一闭合曲面 S 的总通量等于 S 内的总电荷除以 ϵ_0 , 而与 S 外的电荷无关,

$$\oint E \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i. \quad (Q_i \text{ 在 } S \text{ 内}) \quad (1.6')$$

如果电荷连续分布于空间中, 则 E 对闭合曲面 S 的通量为

与外部电荷无关! $\oint_S E \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (1.7)$

式中 V 为 S 所包围的体积. 上式右边是 V 内的总电荷, 与 V 外的电荷分布无关.



在无穷小区域内：

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

Gauss定理：

(微分形式)

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

这就是高斯定理的微分形式，它是电场的一个基本微分方程。上式指出，电荷是电场的源，电场线从正电荷发出而终止于负电荷。在没有电荷分布的地点， $\rho(x) = 0$ ，因而在该点上 $\nabla \cdot E = 0$ ，表示在该处既没有电场线发出，也没有电场线终止，但是可以有电场线连续通过该处。**(进=出)**

微分

(1.8)式反映电荷对电场作用的局域性质：空间某点邻域上场的散度只和该点上的电荷密度有关，而和其他地点的电荷分布无关；电荷只直接激发其邻近的场，而远处的场则是通过场本身的内部作用传递出去的。只有在静电情况下，远处的场才能以库仑定律形式表示出来，而在一般运动电荷情况下，远处的场不能再用库仑定律(1.3)式表出，但实验证明更基本的局域关系(1.8)式仍然成立。



$$\vec{E}(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

方程比解更基本！

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

3. 静电场的旋度 散度是矢量场性质的一个方面,要确定一个矢量场,还需要给出其旋度. 旋度所反映的是场的环流性质.从直观图象来看, 静电场的电场线分布没有旋涡状结构,因而可以推想静电场是无旋的.下面我们用库仑定律来证明这一点.



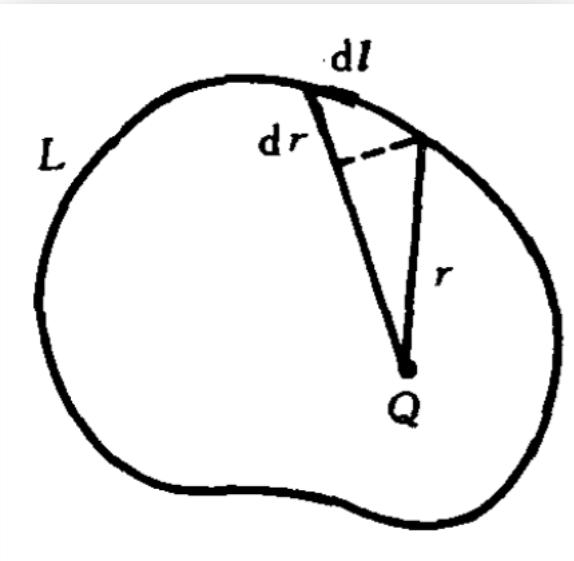
积分形式

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

微分形式

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

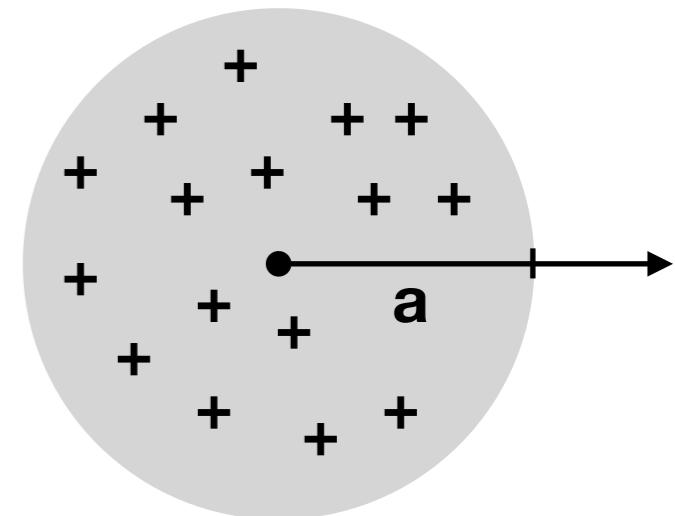
$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{f} \cdot d\bar{l}}{\Delta S}$$



例 电荷 Q 均匀分布于半径为 a 的球体内,求各点的电场强度,并由此直接计算电场的散度

$$\oint E \cdot dS = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0. \quad (r > a)$$



$$\oint E \cdot dS = 4\pi r^2 E = \frac{Qr^3}{\epsilon_0 a^3} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \quad \nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (r < a)$$

重点提示:

被积函数是个全导数!

由这例子我们看出散度概念的局域性质. 虽然对任一个包围着电荷的曲面都有电通量,但是散度只存在于有电荷分布的区域内,在没有电荷分布的空间中电场的散度为零.

1.2 电流&磁场

静止的电荷不会产生磁场，稳定运动的电荷（恒定电流）会产生静止磁场。

本节，我们主要研究静磁场的磁感应强度的**空间分布**

1. 电荷守恒定律 导线上的电流通常用通过导线截面的总电流强度 I 描述。很多情况下，我们不但要知道总电流，而且要知道电流在导体内是怎样分布的。例如直流电通过一根导线时，在导线截面上，电流是均匀分布的。但是高频交流电通过同一根导线时，电流在截面上不再是均匀分布，而是几乎集中到导线表面

如图 1-4，设 dS 为某曲面上的一个面元，它与该点上的电流方向有夹角 θ 。定义电流密度 J ，它的方向沿着该点上的电流方向，它的数值等于单位时间垂直通过单位面积的电量，从而通过面元 dS 的电流 dI 为

通量： $dI = J dS \cos\theta = J \cdot dS$ 。

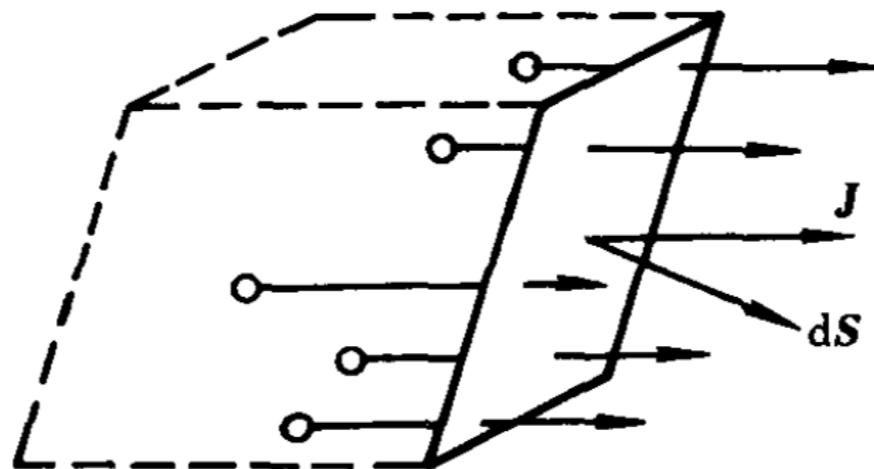


图 1-4

情况。

通过任一曲面 S 的总电流强度 I 为

$$I = \int_S J \cdot dS$$

如果电流由一种运动带电粒子构成,设带电粒子的电荷密度

为 ρ ,平均速度为 v ,则电流密度为

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}. \quad (2.3a)$$

如果有几种带电粒子,其电荷密度分别为 ρ_i ,平均速度为 v_i ,有

在电磁过程当中: 电荷守恒

$$\mathbf{J} = \sum_i \rho_i \mathbf{v}_i. \quad (2.3b)$$

学上用连续性方程表示. 考虑空间中一确定区域 V ,其边界为闭合曲面 S . 当物质运动时,可能有电荷进入或流出该区域. 但是由于电荷不可能产生或消灭,如果有电荷从该区域流出的话,区域 V 内的电荷必然减小. 通过界面流出的总电流应该等于 V 内的电荷减小率

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (2.4)$$

这是电荷守恒定律的积分形式. 应用高斯定理把面积分变为体积分

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV,$$

即得微分形式

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2.5)$$

上式称为电流连续性方程,它是电荷守恒定律的微分形式.

运动的电荷产生磁场；在磁场中运动的电荷，会受到来自磁场的作用力

利用这一特性来描述磁场。实验指出，一个电流元 Idl 在磁场中所受的力可以表为

$$d\mathbf{F} = Idl \times \mathbf{B}. \quad (2.7)$$

矢量 \mathbf{B} 描述电流元所在点上磁场的性质，称为磁感应强度。

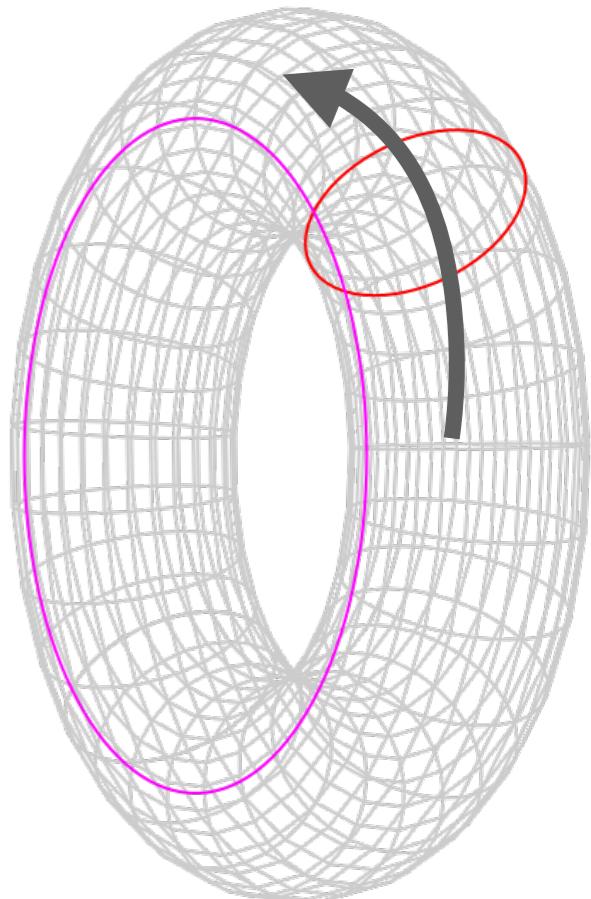
恒定电流激发磁场的规律由毕奥 – 萨伐尔定律给出。设 $\mathbf{J}(x')$ 为源点 x' 上的电流密度， \mathbf{r} 为由 x' 点到场点 x 的距离，则场点上的磁感应强度为

$$\mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(x') \times \mathbf{r}}{r^3} dV'. \quad (2.8a)$$

式中 μ_0 为真空磁导率，积分遍及电流分布区域。如果电流集中于细导线上，以 dl 表示闭合回路 L 上的线元， dS_n 为导线横截面元，则电流元 $\mathbf{J}dV' = \mathbf{J}dS_n dl = JdS_n dl$ ，对导线截面积分后得 Idl 。因此，细导线上恒定电流激发磁场的毕奥 – 萨伐尔定律写为

$$\mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{Idl \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.8b)$$

↑
导线回路



3. 磁场的环量和旋度 在电磁学中我们知道,载电流导线周围磁场的磁感线总是围绕着导线的一些闭合曲线.磁场沿闭合曲线的环量与通过闭合曲线所围曲面的电流 I 成正比,

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I, \quad (2.9)$$

式中 L 为任一闭合曲线, I 为通过 L 所围曲面的总电流.(2.9)式称为安培(Ampère)环路定律,它可以由毕奥-萨伐尔定律导出.

通过任一曲面 S 的总电流强度 I 为

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

对于连续电流分布 \mathbf{J} ,在计算磁场沿回路 L 的环量时,只需考虑通过以 L 为边界的曲面 S 的电流,在 S 以外流过的电流没有贡献.因此,环路定律表为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.10)$$

(2.9)或(2.10)式是电流与磁场关系的积分形式.为了求得微分形式,我们把回路 L 不断缩小,使它围绕着一个面元 $d\mathbf{S}$.这时(2.10)式左边趋于 $\nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$,右边趋于 $\mu_0 \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$.由 $d\mathbf{S}$ 的任意性得

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2.11)$$

上式是恒定磁场的一个基本微分方程.

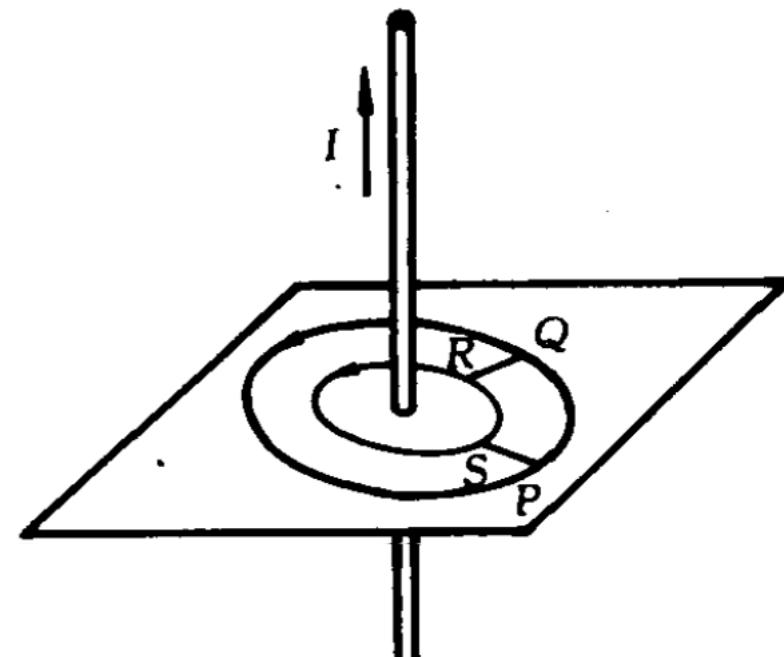


图 1-5

4. 磁场的散度 为了确定磁场,除了给出旋度外,还需要给出它的散度.由电磁学的知识,我们知道由电流激发的磁感应线总是闭合曲线.因此,磁感应强度 \mathbf{B} 是无源场.表示 \mathbf{B} 无源性的积分形式是 \mathbf{B} 对任何闭合曲面的总通量为零

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (2.12)$$

微分形式是

$$\underline{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0}. \quad (2.13)$$

由电流所激发的磁场都是无源的.但是,自然界中是否存在与电荷相对应的磁荷作为磁场的源呢?如果磁荷存在的话,和电荷作为电场的源一样,磁荷也作为磁场的源,这时一般来说 $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$.近年来对于磁单极子(孤立的磁荷)存在的可能性有不少讨论,实验上也一直在找寻带有磁荷的粒子.但是,到现在还没有任何关于磁单极子存在的确实证据.因此,在假定磁荷不存在的前

没有任何已知的物理机制,能够避免,宇宙在相变过程中,磁荷的产生.
我们只能说,磁单极的密度很低!

1.3 Maxwell equations

§ 3 麦克斯韦方程组

以上两节由实验定律总结了恒定电磁场的基本规律。随着交变电流的研究和广泛应用，人们对电磁场的认识有了一个飞跃。由实验发现不但电荷激发电场，电流激发磁场，而且变化着的电场和磁场可以互相激发，电场和磁场成为统一的整体——电磁场。

why?

天体物理系统
的常见现象

和恒定场相比，变化电磁场的新规律主要是：

- (1) 变化磁场激发电场(法拉第电磁感应定律)；
- (2) 变化电场激发磁场(麦克斯韦位移电流假设)。

1831 年法拉第发现当磁场发生变化时，附近闭合线圈中有电流通过。并由此总结出电磁感应定律：闭合线圈中的感应电动势与通过该线圈内部的磁通量变化率成正比，其方向关系在下面说明。如图 1-6，设 L 为闭合线圈， S 为 L 所围的一个曲面， dS 为 S 上的一个面元。按照惯例，我们规定 L 的围绕方向与 dS 的法线方向成右手螺旋关系。由实验测定，当通过 S 的磁通量增加时，在线圈 L 上的感应电动势 \mathcal{E} 与我们规定的 L 围绕方向相反，因此用负号表示。电磁感应定律表为

$$\mathcal{E} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

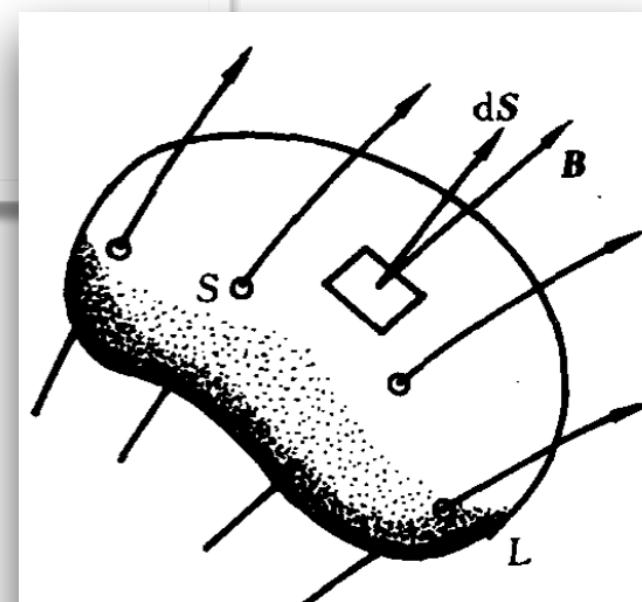


图 1-6

线圈上的电荷是直接受到该处电场作用而运动的，线圈上有感应电流就表明空间中存在着电场。因此，电磁感应现象的实质是变化磁场在其周围空间中激发了电场，这是电场和磁场内部相互作用的一个方面。

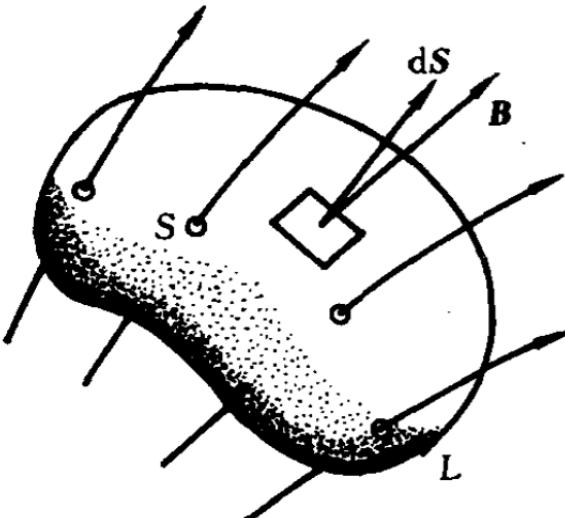


图 1-6

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

静电场

能量守恒：磁场 \rightarrow 电场

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\frac{d\bar{S}}{dt} = 0$$

感应电动势是电场强度沿闭合回路的线积分，因此电磁感应定律(3.1)式可写为

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.2)$$

若回路 L 是空间中的一条固定回路，则上式中对 t 的全微商可代为偏微商

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

化为微分形式后得

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (3.3)$$

这是磁场对电场作用的基本规律。由(3.3)式可见，感应电场是有旋场。因此在一般情况下，表示静电场无旋性的(1.10)式必须代以更普遍的(3.3)式。

2. 位移电流 上面我们研究了变化磁场激发电场问题, 进一步我们要问, 变化电场是否激发磁场? 在回答这问题之前, 我们先分析非恒定电流分布的特点.

在第二节中我们指出恒定电流是闭合的,

无源 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. (恒定电流)

在交变情况下, 电流分布由电荷守恒定律(2.5)式制约, 它一般不再是闭合的. 例如带有电容器的电路实质上是非闭合的回路. 在

负源 (sink)

电容器两板之间是绝缘介质, 自由电子不能通过. 电荷运动到板上时, 由于不能穿过介质, 就在板上积聚起来. 在交流电路中, 电容器交替地充电和放电, 但在两板之间的介质内始终没有传导电流通过. 所以, 电流 \mathbf{J} 在该处实际上中断的. 一般来说, 在非恒定情况下, 由电荷守恒定律有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{J}} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0.$$

现在我们考察电流激发磁场的规律(2.11)式

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (2.11)$$

取两边散度,由于 $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} \equiv 0$,因此上式只有当 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ 时才可能成立. 在恒定情况,电流 \mathbf{J} 是闭合的, $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, (2.11)式在理论上是没有矛盾的. 但是,在非恒定情形,一般有 $\nabla \cdot \mathbf{J} \neq 0$,因而 (2.11)式与电荷守恒定律发生矛盾. 由于电荷守恒定律是精确的普遍规律,而(2.11)式仅是根据恒定情况下的实验定律导出的特殊规律,在两者发生矛盾的情形下,我们应该修改(2.11)式使服从普遍的电荷守恒定律的要求.

人为添加

把(2.11)式推广的一个方案是假设存在一个称为位移电流的物理量 \mathbf{J}_D ,它和电流 \mathbf{J} 合起来构成闭合的量

$$\nabla \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{J}_D) = 0, \quad (3.4)$$

并假设位移电流 \mathbf{J}_D 与电流 \mathbf{J} 一样产生磁效应,即把(2.11)修改为

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_D). \quad (3.5)$$

此式两边的散度都等于零,因而理论上就不再有矛盾.



Maxwell

由条件(3.4)式可导出 \mathbf{J}_D 的可能表示式. 由电荷守恒定律(2.5)式,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (3.6)$$

电荷密度 ρ 与电场散度有关系式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3.7)$$

两式合起来得

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0. \quad (3.8)$$

与(3.4)式比较即得 \mathbf{J}_D 的一个可能表示式

$$\mathbf{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.9)$$

从数学上来说, 单由条件(3.4)式是不能唯一确定 \mathbf{J}_D 的. 从物理上考虑, (3.9)式是满足条件(3.4)式的最简单的物理量, 而且既然变化磁场能激发电场, 则变化电场激发磁场也是比较合理的假设. 由(3.9)式, 位移电流实质上是电场的变化率, 它是麦克斯韦首先引入的. 位移电流假设的正确性由以后关于电磁波的广泛实践所证明.

可以相差至一个无源场, 例如:

$$\bar{\mathbf{J}}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{B}}$$

Maxwell Eq.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

在 ρ 和 \vec{J} 为0的区域内，电场和磁场相互激发而运动传播—电磁波

Lorentz force

Leiden

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

静止电荷 Q 受到静电场作用力 $\mathbf{F} = QE$, 恒定电流元 $J dV$ 受到磁场作用力 $d\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV$. 若电荷为连续分布, 其密度为 ρ , 则电荷系统单位体积所受的力密度 f 为

$$f = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (3.11)$$



荷为 e , 速度为 v , 则 \mathbf{J} 等于单位体积内 $e\mathbf{v}$ 之和. 把电磁作用力公式应用到一个粒子上, 得到一个带电粒子受电磁场的作用力

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (3.12)$$

1.4 介质的电磁性质

之前我们考虑的是真空中的电磁场，本节我们来看介质中的情形

由于分子是电中性的，而且在热平衡时各分子内部的粒子运动一般没有确定的关联，因此，当没有外场时介质内部一般不出现宏观的电荷电流分布，其内部的宏观电磁场亦为零。有外场时，介质中的带电粒子受场的作用，正负电荷发生相对位移，有极分子（原来正负电中心不重合的分子）的取向以及分子电流的取向亦呈现一定的规则性，这就是介质的极化和磁化现象。由于极化和磁化的原因，介质内部及表面上便出现宏观的电荷电流分布，我们把这些电荷、电流分别称为束缚电荷和磁化电流。这些宏观电荷电流分布反过来又激发起附加的宏观电磁场，叠加在原来外场上而得到介质内的总电磁场。介质内的宏观电磁现象就是这些电荷电

2. 介质的极化 存在两类电介质。一类介质分子的正电中心和负电中心重合，没有电偶极矩。另一类介质分子的正负电中心不重合，有分子电偶极矩，但是由于分子热运动的无规性，在物理小体积内的平均电偶极矩为零，因而也没有宏观电偶极矩分布。在外场作用下，前一类分子的正负电中心被拉开，后一类介质的分子电偶极矩平均有一定取向性，因此都出现宏观电偶极矩分布。宏观电偶极矩分布用电极化强度矢量 \mathbf{P} 描述，它等于物理小体积 ΔV 内的总电偶极矩与 ΔV 之比，

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V}. \quad (4.1)$$

式中 \mathbf{p}_i 为第 i 个分子的电偶极矩，求和符号表示对 ΔV 内所有分子求和。

极化第一种
比第二种要难！

由于极化,分子正负电中心发生相对位移,因而物理小体积 ΔV 内可能出现净余的正电或负电,即出现宏观的束缚电荷分布.我们现在首先要求出束缚电荷密度 ρ_p 和电极化强度 P 之间的关系

我们用一个简化模型来描述介质中的分子.设每个分子由相距为 l 的一对正负电荷 $\pm q$ 构成,分子电偶极矩为 $p = ql$. 图 1-7 示介质内某曲面 S 上的一个面元 dS . 介质极化后,有一些分子电偶极子跨过 dS . 由图可见,当偶极子的负电荷处于体积 $l \cdot dS$ 内时,同一偶极子的正电荷就穿出界面 dS 外边. 设单位体积分子数为 n ,则穿出 dS 外面的正电荷为

$$nql \cdot dS = np \cdot dS = P \cdot dS. \quad (4.2)$$

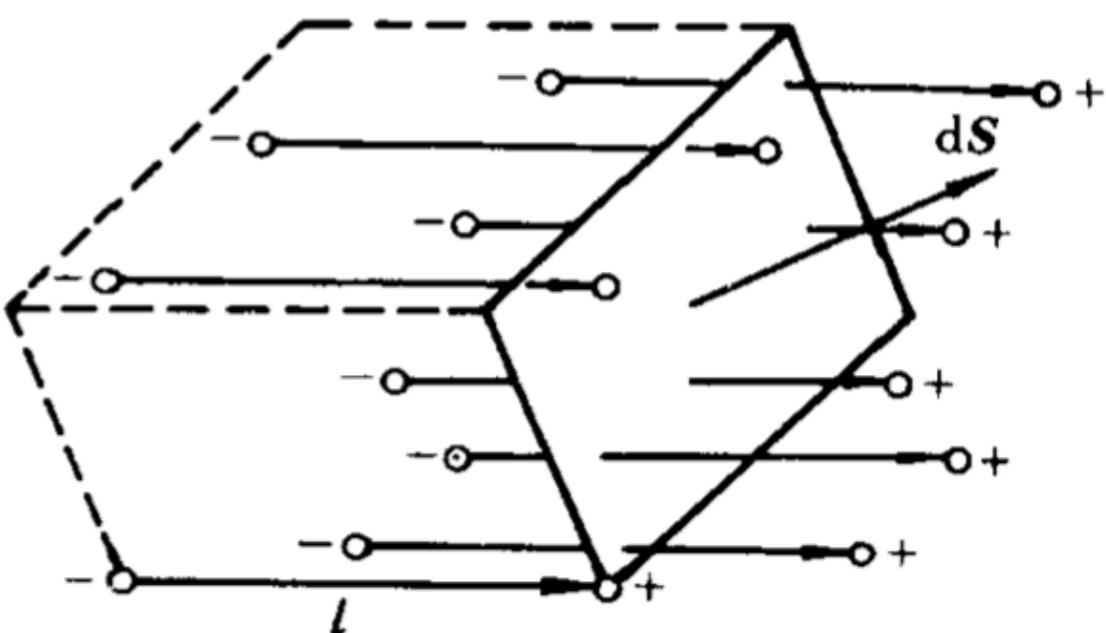


图 1-7

对包围区域 V 的闭合界面 S 积分,则由 V 内通过界面 S 穿出去

的正电荷为

$$\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}.$$

由于介质是电中性的，这量也等于 V 内净余的负电荷。这种由于极化而出现的电荷分布称为束缚电荷。以 ρ_p 表示束缚电荷密度，有

$$\int_V \rho_p dV = - \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}.$$

把面积分化为体积分，可得上式的微分形式

$$\underline{\rho_p = - \nabla \cdot \mathbf{P}.} \quad (4.3)$$

介质内的电现象包括两个方面：一方面电场使介质极化而产生束缚电荷分布，另一方面这些束缚电荷又反过来激发电场，两者是互相制约的。介质对宏观电场的作用就是通过束缚电荷激发电场。因此，若在麦氏方程中电荷密度 ρ 包括自由电荷密度 ρ_f 和束缚电荷密度 ρ_p 在内，则在介质内麦氏方程(3.10)式仍然成立，

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_f + \rho_p. \quad (4.5)$$

在实际问题中，自由电荷比较容易受实验条件的直接控制或观测，而束缚电荷则不然。因此，在基本方程中消去 ρ_p 比较方便。把(4.3)式代入(4.5)式得

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f. \quad (4.6)$$

引入电位移矢量 \mathbf{D} ，定义为

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (4.7)$$

(4.6)式可写为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f. \quad (4.8)$$

在此式中已消去了束缚电荷，但引进了一个辅助场量 \mathbf{D} 。由(4.5)和(4.8)式看出， \mathbf{E} 的源是总电荷分布，它是介质中的总宏观电场强度，是电场的基本物理量；而 \mathbf{D} 并不代表介质中的场强，它只是一个辅助物理量。

图1-8: 束缚电荷面密度自己看

ρ_f 可以看作是 \vec{D} 的源

$\rho_f + \rho_P$ 可以看作是 \vec{E} 的源

由于在基本方程(4.8)中引入了辅助场量 D , 我们必须给出 D 和 E 之间的实验关系才能最后解出电场强度. 实验指出, 各种介质材料有不同的电磁性能, D 和 E 的关系也有多种形式. 对于一般各向同性线性介质, 极化强度 P 和 E 之间有简单的线性关系

$$P = \chi_e \epsilon_0 E. \quad (4.9)$$

χ_e 称为介质的极化率. 由(4.7)式得

$$D = \epsilon E, \quad (4.10)$$

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0, \quad \epsilon_r = 1 + \chi_e.$$

ϵ 称为介质的电容率, ϵ_r 为相对电容率.

3. 介质的磁化 介质分子内的电子运动构成微观分子电流，由于分子电流取向的无规性，没有外场时一般不出现宏观电流分布。在外磁场作用下，分子电流出现有规则取向，形成宏观磁化电流密度 J_M 。

分子电流也可以用磁偶极矩描述。把分子电流看作载有电流 i 的小线圈，线圈面积为 a ，则与分子电流相应的磁矩为

$$\mathbf{m} = ia. \quad (4.12)$$

介质磁化后，出现宏观磁偶极矩分布，用磁化强度 \mathbf{M} 表示，它定义为物理小体积 ΔV 内的总磁偶极矩与 ΔV 之比，

$$\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{m}_i}{\Delta V}.$$

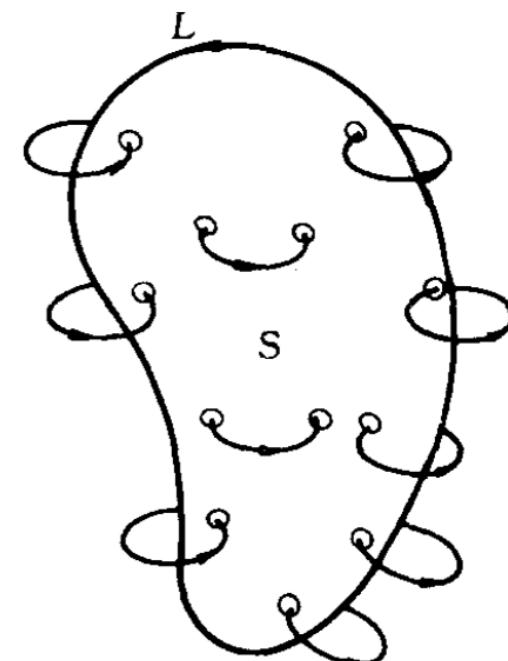


图 1-9

现在我们求磁化电流密度 J_M 与磁化强度 M 的关系。如图 1-9，设 S 为介质内部的一个曲面，其边界线为 L 。为了求出磁化电流密度，我们计算从 S 的背面流向前面的总磁化电流 I_M 。由图可见，若分子电流被边界线 L 链环着，这分子电流就对 I_M 有贡献。在其他情形下，或者分子电流根本不通过 S ，或者从 S 背面流出来后再从前面流进，所以对 I_M 都没有贡献。因此，通过 S 的总磁化电流 I_M 等于边界线 L 所链环着的分子数目乘上每个分子的电流 i 。

图 1-10 示边界线 L 上的一个线元 dl . 设分子电流圈的面积为 a . 由图可见, 若分子中心位于体积为 $a \cdot dl$ 的柱体内, 则该分子电流就被 dl 所穿过. 因此, 若单位体积分子数为 n , 则被边界线 L 链环着的分子电流数目为

$$\oint_L n a \cdot dl.$$

此数目乘上每个分子的电流 i 即得从 S 背面流向前面的总磁化电流

$$I_M = \oint_L n i a \cdot dl = \oint_L n m \cdot dl = \oint_L M \cdot dl.$$

以 J_M 表示磁化电流密度, 有

$$\int_S \mathbf{J}_M \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}.$$

把线积分变为 $\nabla \times \mathbf{M}$ 的面积分, 由 S 的任意性可得微分形式

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}. \quad (4.14)$$

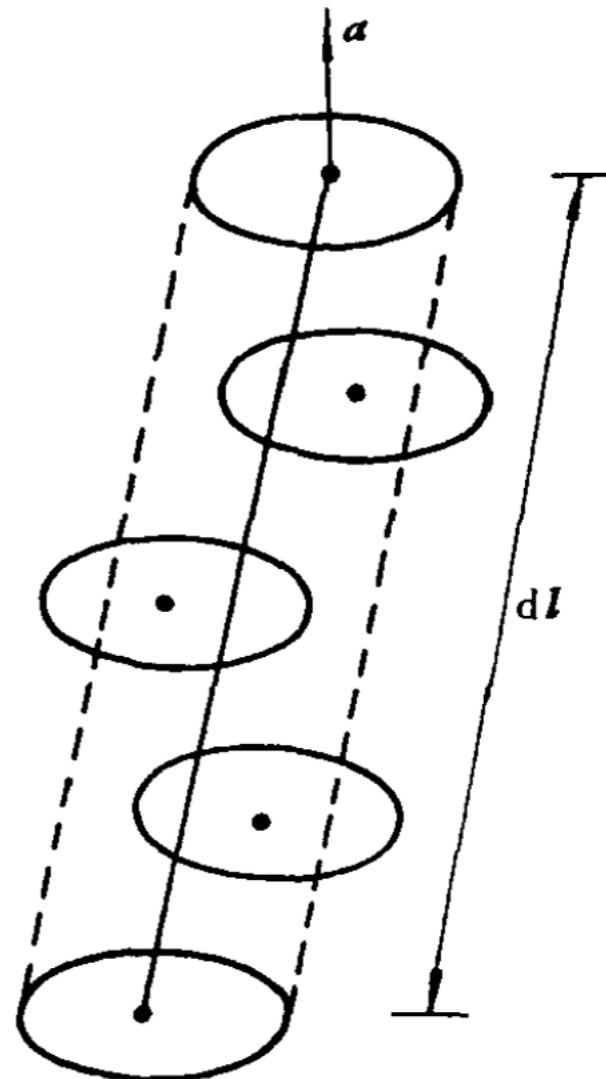


图 1-10

除了磁化电流之外,当电场变化时,介质的极化强度 \mathbf{P} 发生变化,这种变化产生另一种电流,称为极化电流. 设 ΔV 内每个带电粒子的位置为 \mathbf{x}_i , 电荷为 e_i , 则

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \frac{\sum e_i \mathbf{x}_i}{\Delta V}, \\ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} &= \frac{\sum e_i \mathbf{v}_i}{\Delta V} \stackrel{def}{=} \mathbf{J}_P.\end{aligned}\tag{4.15}$$

\mathbf{J}_P 称为极化电流密度. 磁化电流 \mathbf{J}_M 和极化电流 \mathbf{J}_P 之和是介质内的总诱导电流密度.

介质内的磁现象也包括两个方面,一方面电磁场作用于介质分子上产生磁化电流和极化电流分布,另一方面这些电流又反过来激发磁场,两者也是互相制约的。介质对宏观磁场的作用是通过诱导电流($J_M + J_P$)激发磁场。因此,若在麦氏方程(3.10)式中的 J 包括自由电流密度 J_f 和介质内的诱导电流密度 $J_M + J_P$ 在内,那么麦氏方程在介质中仍然成立,

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_M + \mathbf{J}_P + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (4.16)$$

在实际问题中,自由电流分布 J_f 可以直接接受实验条件控制和测定,而 J_M 和 J_P 则不然;因此,在基本方程中消去 J_M 和 J_P 比较方便。把(4.14–4.15)式代入(4.16)式,并利用(4.7)式得

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (4.17)$$

引入磁场强度 \mathbf{H} , 定义为

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad (4.18)$$

则(4.17)式写为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (4.19)$$

在此式中已消去了诱导电流 J_M 和 J_P , 但引进了辅助场量 \mathbf{H} . 由(4.16)和(4.19)式看出, \mathbf{B} 描述所有电流分布激发的场, 因此它代表介质内的总宏观磁场, 是基本物理量, 而 \mathbf{H} 并不代表介质内的场强, 它仅是一个辅助物理量. 为了解出磁场, 还需要定出 \mathbf{H} 和 \mathbf{B} 的关系. 实验指出, 对于各向同性非铁磁物质, 磁化强度 \mathbf{M} 和 \mathbf{H} 之间有简单的线性关系

$$\mathbf{M} = \chi_M \mathbf{H}, \quad (4.20)$$

χ_M 称为磁化率. 把(4.20)式代入(4.18)式得

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

$$\mu = \mu_r \mu_0, \quad \mu_r = 1 + \chi_M.$$

μ 称为磁导率, μ_r 为相对磁导率 .

4. 介质中的麦克斯韦方程组 从现在起, 我们略去 ρ_f 和 J_f 的下角标 f, 除特殊说明外, 以后公式中出现的 ρ 和 J 都代表自由电荷和自由电流分布. 介质中的麦克斯韦方程组为

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}\tag{4.23}$$

其中第二和第三式已在上面讨论过. 至于第一和第四式, 它们本来就是电磁场内部的规律, 两式中只出现总电场和总磁场, 与电荷电流没有直接关系, 因此在介质中仍然成立.

解实际问题时, 除了这组基本方程外, 还必须引入一些关于介质电磁性质的实验关系. 上面我们举出了这些关系中最简单的形式

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E},\tag{4.24}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},\tag{4.25}$$

在导电物质中还有欧姆定律

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}.\tag{4.26}$$

(σ 为电导率). 这些关系称为介质的电磁性质方程, 它们反映介质的宏观电磁性质.

参数化

必须指出,(4.24)一(4.26)式只适用于某些介质. 实验指出存在许多不同类型的介质. 例如许多晶体属于各向异性介质, 在这些介质内某些方向容易极化, 另一些方向较难极化, 使得 \mathbf{D} 和 \mathbf{E} 一般具有不同方向, 它们的关系就不再是(4.24)式而是较复杂的张量式. 这些介质中 \mathbf{D} 和 \mathbf{E} 的一般线性关系是

$$\begin{aligned} D_1 &= \epsilon_{11}E_1 + \epsilon_{12}E_2 + \epsilon_{13}E_3, \\ \text{各向异性} \quad D_2 &= \epsilon_{21}E_1 + \epsilon_{22}E_2 + \epsilon_{23}E_3, \\ D_3 &= \epsilon_{31}E_1 + \epsilon_{32}E_2 + \epsilon_{33}E_3. \end{aligned} \quad (4.27)$$

(指标 1,2,3 代表 x,y,z 分量). 上式可简写为

$$\text{非线性光学} \quad D_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij}E_j. \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.27a)$$

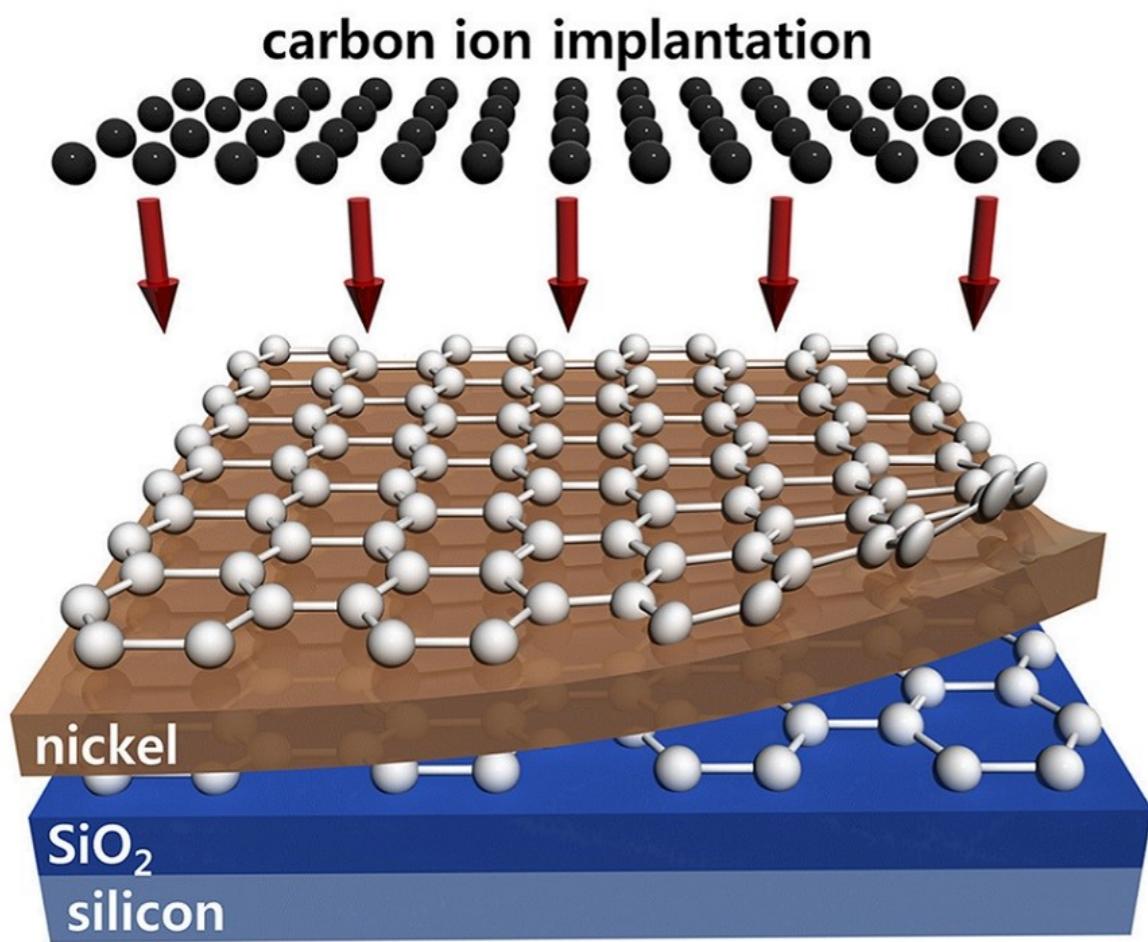
这情况下电容率不是一个标量 ϵ , 而是一个张量 ϵ_{ij} .

在强场作用下许多介质呈现非线性现象, 这情形下 \mathbf{D} 不仅与 \mathbf{E} 的一次式有关, 而且与 \mathbf{E} 的二次式、三次式等都有关系. 在非线性介质中 \mathbf{D} 和 \mathbf{E} 的一般关系式是

$$D_i = \sum_j \epsilon_{ij}E_j + \sum_{j,k} \epsilon_{ijk}E_jE_k + \sum_{j,k,l} \epsilon_{ijkl}E_jE_kE_l + \cdots. \quad (4.28)$$

除第一项外, 其他各项都是非线性项.(4.28)式在非线性光学中有重要的应用.

1.5 电磁场的边值关系

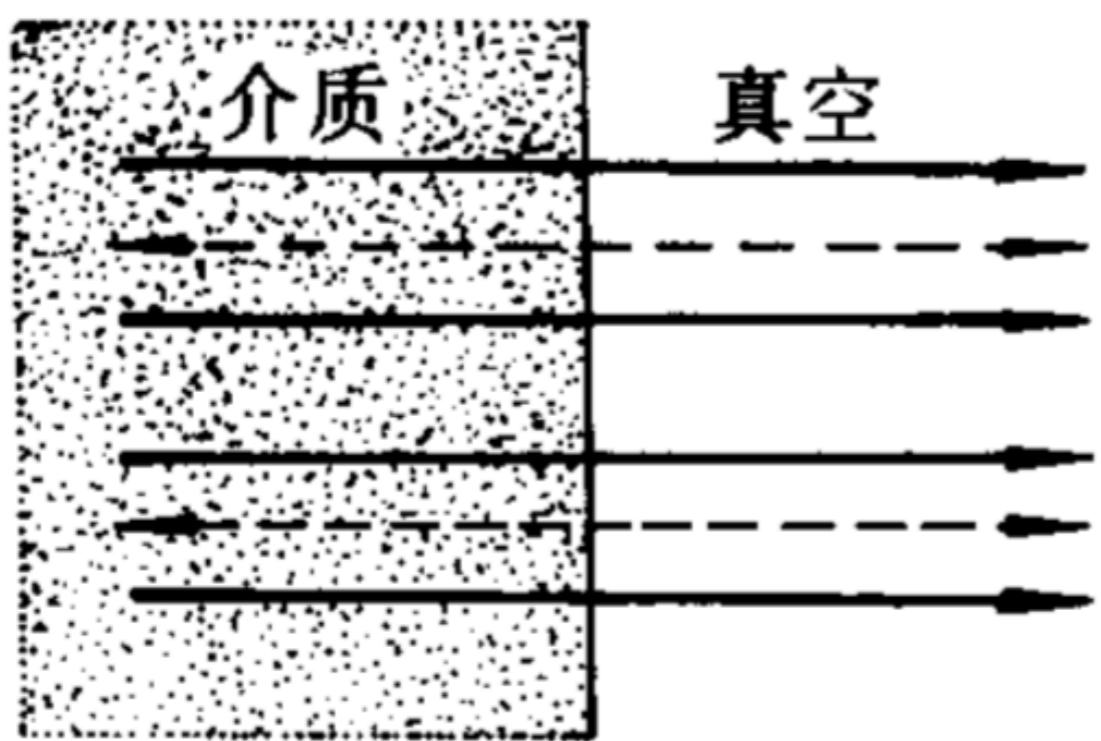


[半导体产业的基石]

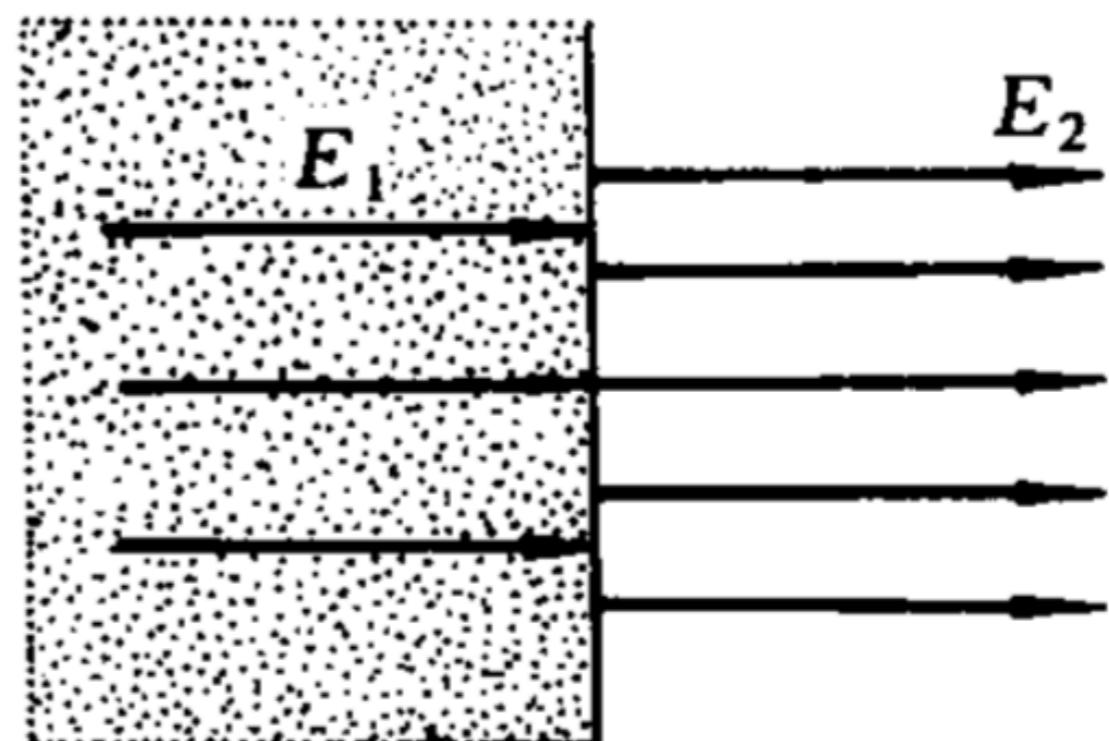
§ 5 电磁场边值关系

麦克斯韦方程组可以应用于任何连续介质内部。在两介质分界面上，由于一般出现面电荷电流分布，使物理量发生跃变，微分形式的麦氏方程组不再适用。因此，在介质分界面上，我们要用另一种形式描述界面两侧的场强以及界面上电荷电流的关系。

在场作用下，介质界面上一般出现面束缚电荷和电流分布。这些电荷电流的存在又使得界面两侧场量发生跃变。例如图 1-11(a)所示的介质与真空分界的情形，在外场 E_0 作用下，介质界面上产生面束缚电荷，这些束缚电荷本身激发的电场在介质内与 E_0 反向，在真空中与 E_0 同向。束缚电荷激发的场与外场 E_0 叠加后得到的总电场如图 1-11(b)所示，由图看出两边的电场 E_1 和 E_2 在界面上发生跃变：边值关系就是描述两侧场量与界面上电荷电流的关系。由于场量跃变的原因是面电荷电流激发附加的电磁场，而积分形式的麦氏方程可以应用于任意不连续分布的电荷电流所激发的场，因此研究边值关系的基础是积分形式的麦氏方程组。下面我们分别求出场量的法向分量和切向分量的跃变。



(a)



(b)

图 1-11

1. 法向分量的跃变 麦氏方程组(4.23)的积分形式为

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S},$$
$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}, \quad (5.1)$$
$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_f,$$
$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

式中 I_f 为通过曲面 S 的总自由电流, Q_f 为闭合曲面内的总自由电荷. 把这组方程应用到界面上可以得到两侧场量的关系.

为了弄清楚边界条件的物理意义,我们先把总电场的麦氏方程

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q_f + Q_p \quad (5.2)$$

应用到两介质边界上的一个扁平状柱体(图 1-12). 上式左边的面积分遍及柱体的上下底和侧面, Q_f 和 Q_p 分别为柱体内的总自由电荷和总束缚电荷, 它们等于相应的电荷面密度 σ_f 和 σ_p 乘以底面积 ΔS . 当柱体的厚度趋于零时, 对侧面的积分趋于零, 对上下底积分得 $(E_{2n} - E_{1n})\Delta S$. 由(5.2)式得

$$\epsilon_0(E_{2n} - E_{1n}) = \sigma_f + \sigma_p. \quad (5.3)$$

由(4.4)式有

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma_p. \quad (5.4)$$

两式相加, 利用 $D_{1n} = \epsilon_0 E_{1n} + P_{1n}$, $D_{2n} = \epsilon_0 E_{2n} + P_{2n}$, 得

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f. \quad (5.5)$$

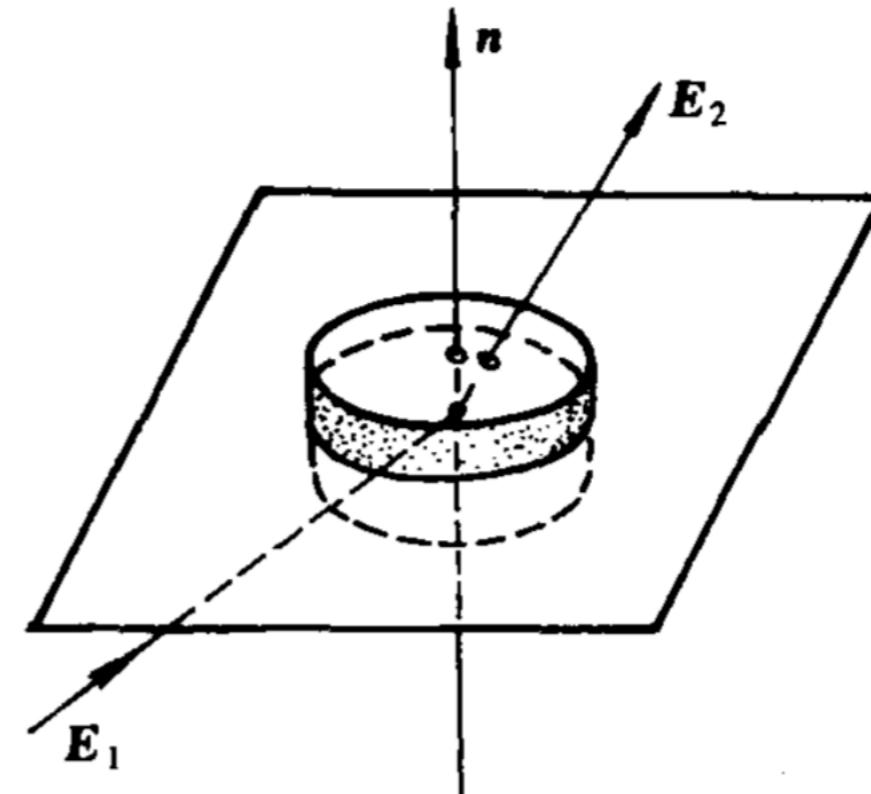


图 1-12

由(5.3)一(5.5)式看出,极化矢量的跃变与束缚电荷面密度相关, D_n 的跃变与自由电荷面密度相关, E_n 的跃变与总电荷面密度相关.

由上面的推导我们可以看清楚面自由电荷和面束缚电荷在边值关系中所起的作用.由于在通常情形下只给出自由电荷,因此实际上主要应用到边值关系(5.5)式,即 D_n 的跃变式. D_n 的跃变式可以较简单地由麦氏方程的积分形式直接得出.把(5.1)第三式直接用到图 1-12 的扁平状区域上,由于侧面的积分趋于零,得

$$(D_{2n} - D_{1n})\Delta S = \sigma_f \Delta S,$$

由此立刻可得(5.5)式.

对于磁场 \mathbf{B} ,把(5.1)第四式应用到边界上的扁平状区域上,重复以上推导可以得到

$$B_{2n} = B_{1n}. \quad (5.6)$$

2. 切向分量的跃变 面电荷分布使界面两侧电场法向分量发生跃变。下面我们证明面电流分布使界面两侧磁场切向分量发生跃变。为此先说明表面电流分布的概念。

我们知道，高频电流有所谓趋肤效应，即高频电流只分布在导体表面很薄一层上。根据所研究问题性质的不同，对这种电流分布可以有两种不同的描述方法。一种是对它作比较细致的描述，即把它作为体电流分布 J 而研究它如何在薄层内变化。另一种描述是对它作整体的描述，即不讨论它如何在薄层内分布，而把薄层看作几何面，把薄层内流过的体电流看作集中在几何面上的面电流。这两种描述方法在不同情况下都会应用到。

面电流分布的另一例子是磁性物质表面上的磁化电流。例如一根沿轴向均匀磁化的铁棒，其内部分子磁矩都有一定取向。如图 1-13，在铁棒内部，分子电流互相抵消，但在靠近棒侧面上的分子电流则构成宏观的磁化电流面分布。

由这些例子可见，面电流实际上是在靠近表面的相当多分子层内的平均宏观效应。设想薄层的厚度趋于零，则通过电流的横截面变为横截线。定义电流线密度 α ，其大小等于垂直通过单位横截线的电流。图 1-14 表示界面的一部分，其上有面电流，其线密度为 α ， Δl 为横截线。垂直流过 Δl 段的电流为

$$\Delta I = \alpha \Delta l. \quad (5.7)$$

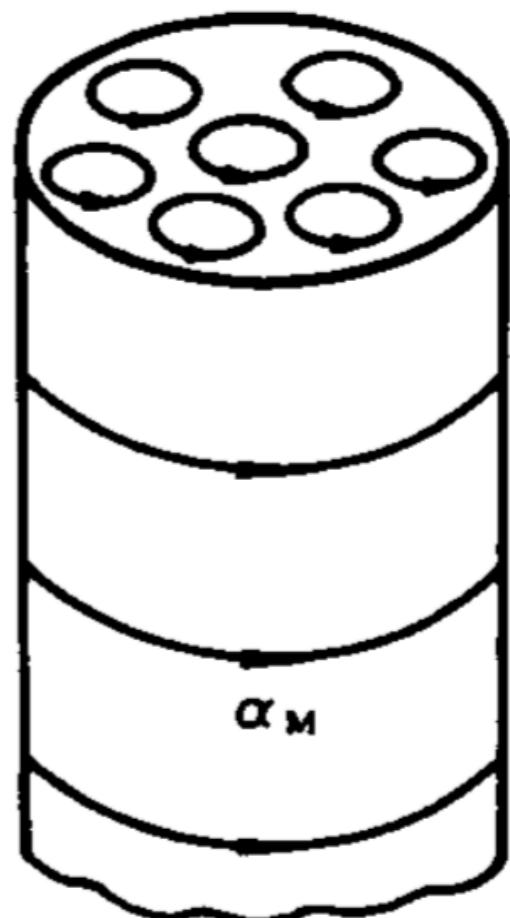


图 1-13

由于存在面电流，在界面两侧的磁场强度发生跃变。如图

1-15，在界面两旁取一狭长形回路，回路的一长边在介质1中，另一长边在介质2中。长边 Δl 与面电流 α_f 正交。把麦氏方程(5.1)第二式应用到狭长形回路上。取回路上下边深入到足够多分子层内部，使面电流完全通过回路内部。从宏观来说回路短边的长度仍可看作趋于零，因而有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (H_{2t} - H_{1t})\Delta l,$$

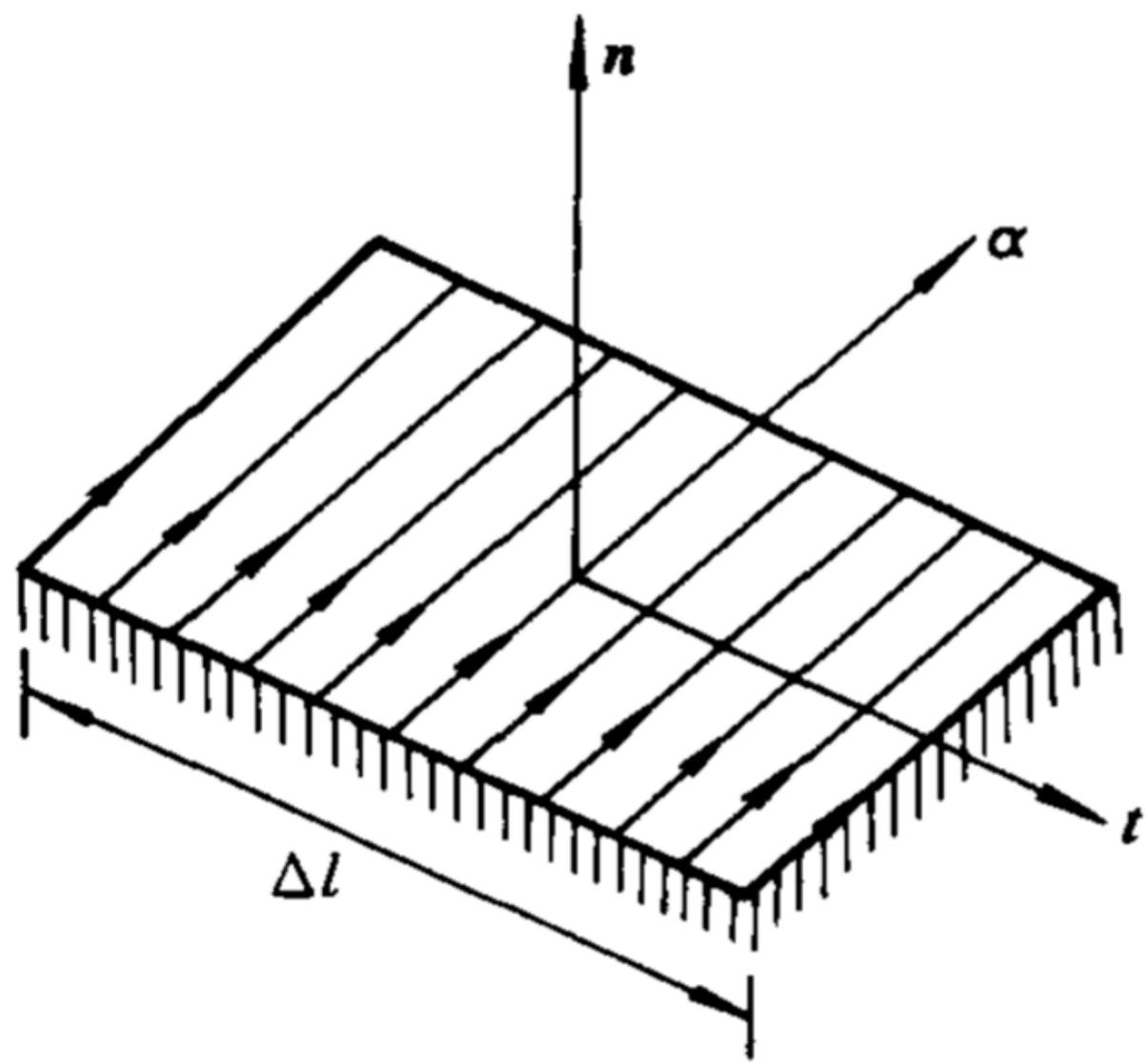


图 1-14

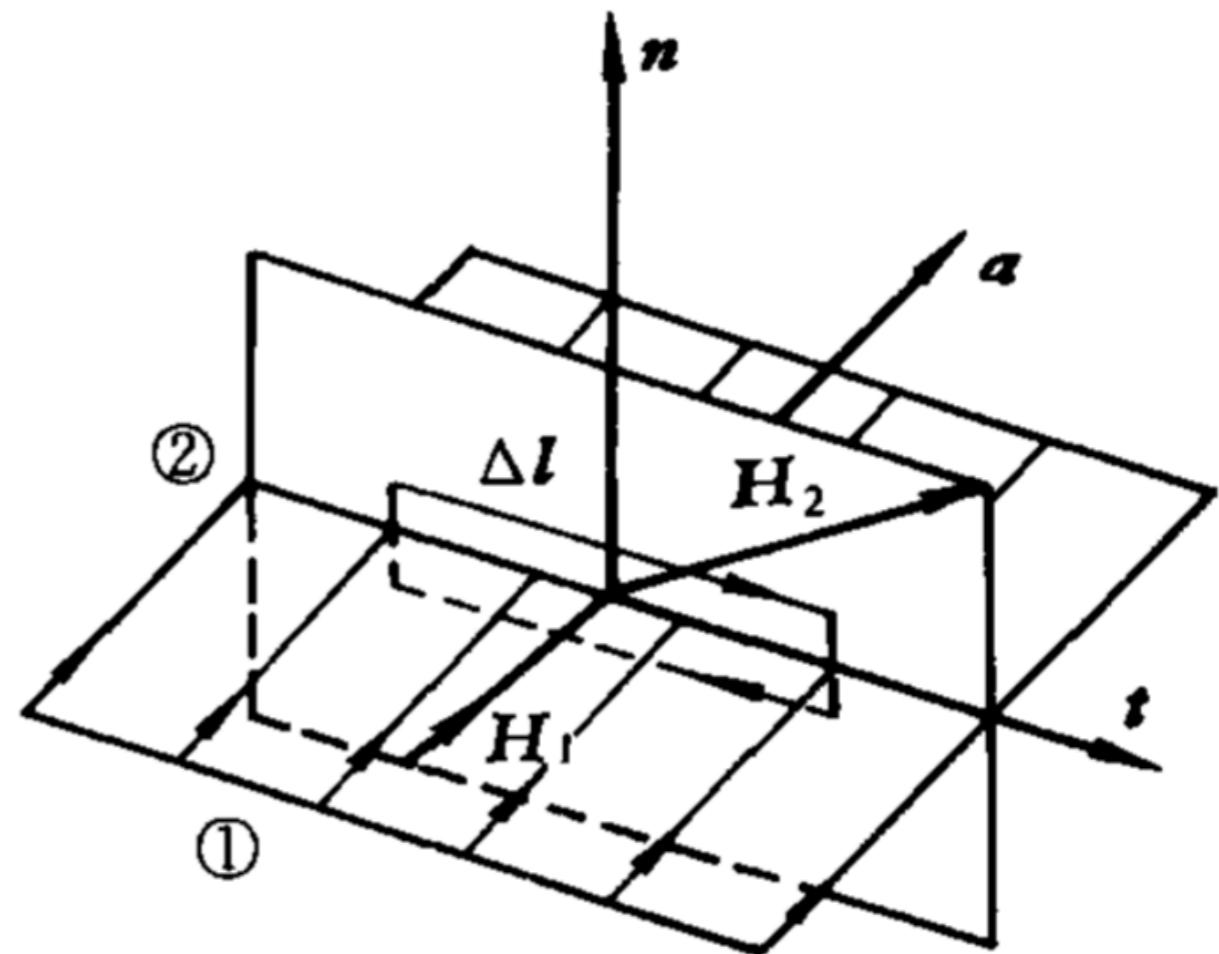


图 1-15

其中 t 表示沿 Δl 的切向分量。通过回路内的总自由电流为

$$I_f = \alpha_f \Delta l.$$

由于回路所围面积趋于零，而 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 为有限量，因而

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0.$$

把这些式子代入(5.1)第二式中得

$$H_{2t} - H_{1t} = \alpha_f. \quad (5.8)$$

上式可以用矢量形式表示。设 Δl 为界面上任一线元， t 为 Δl 方向上的单位矢量。流过 Δl 的自由电流为

$$I_f = \mathbf{n} \times \Delta l \cdot \alpha_f = \alpha_f \times \mathbf{n} \cdot \Delta l.$$

对狭长形回路用麦氏方程(5.1)第二式得

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \Delta \mathbf{l} = I_f = \alpha_f \times \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{l}.$$

由于 $\Delta \mathbf{l}$ 为界面上任一矢量,因此

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)_{//} = \alpha_f \times \mathbf{n},$$

式中 $//$ 表示投射到界面上的矢量. 上式再用 \mathbf{n} 矢乘, 注意到 $\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)_{//} = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)$, 而且 $\mathbf{n} \cdot \alpha_f = 0$, 得

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \alpha_f. \quad (5.9)$$

这就是磁场切向分量的边值关系.

同理,由(5.1)第一式可得电场切向分量的边值关系:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0. \quad (5.10)$$

此式表示界面两侧 \mathbf{E} 的切向分量连续.

以后在公式中出现的 σ 和 α , 除特别声明者外, 都代表自由电荷面密度和自由电流线密度, 不再写出角标 f. 总括我们得到的边值关系为

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \alpha, \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) &= \sigma, \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

这组方程和麦氏方程(5.1)式一一对应. 边值关系表示界面两侧的场以及界面上电荷电流的制约关系, 它们实质上是边界上的场方程. 由于实际问题往往含有几种介质以及导体在内, 因此, 边值关系的具体应用对于解决实际问题是十分重要的.

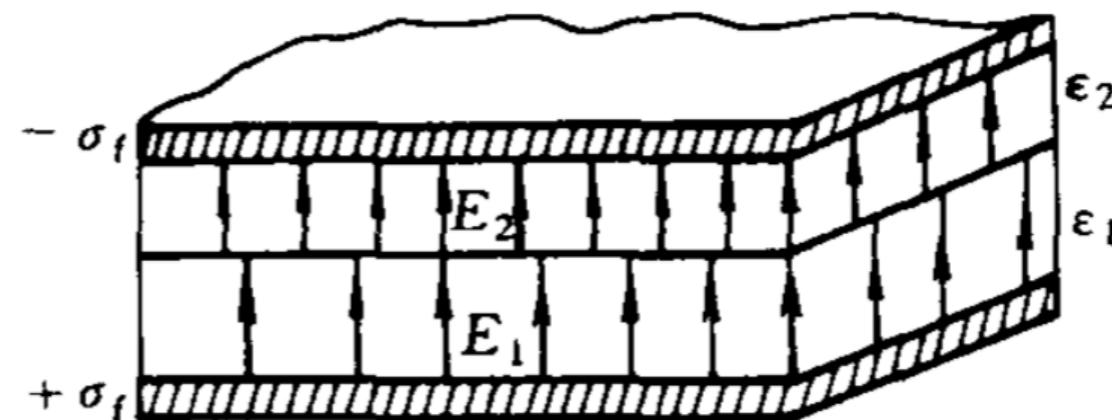


图 1-16

例 无穷大平行板电容器内有两层介质(图 1-16), 极板上面电荷密度为 $\pm \sigma_f$, 求电场和束缚电荷分布. [作业]

1.6 电磁场的能量和能流

1. 场和电荷系统的能量守恒定律的一般形式 现在我们先一般地考虑怎样描述场的运动能量问题. 以天线辐射电磁波的过程为例, 在这过程中, 电磁能量随着电磁波的运动不断地从天线传向远方. 在空间各点上, 都可以接收到电磁波的能量, 但是同一接收器在不同点上的接收功率是不同的, 它与离天线的距离有关, 而且也和方向有关. 由此可见, 能量是按一定方式分布于场内的, 而且由于场在运动着, 场能量不是固定地分布于空间中, 而是随着场的运动而在空间中传播. 因此, 我们需要引入两个物理量来描述电磁场的能量:

- (1) 场的能量密度 ω , 它是场内单位体积的能量, 是空间位置 x 和时间 t 的函数, $\omega = \omega(x, t)$;
- (2) 场的能流密度 S , 它描述能量在场内的传播. S 在数值上等于单位时间垂直流过单位横截面的能量, 其方向代表能量传输方向.

场和电荷相互作用时，能量就在场和电荷之间转移。例如在接收电磁波的过程中，电磁场作用于接收天线的自由电荷上，引起天线上的电流，电磁波的一部分能量即转化为接收系统上的电磁能量。由此，场和电荷之间，场的一区域与另一区域之间，都可能发生能量转移。在转移过程中总能量是守恒的。

考虑空间某区域 V , 其界面为 S . 设 V 内有电荷电流分布 ρ 和 J . 能量守恒定律要求单位时间通过界面 S 流入 V 内的能量等于场对 V 内电荷作功的功率与 V 内电磁场能量增加率之和 .

以 f 表示场对电荷作用力密度, v 表示电荷运动速度, 则场对电荷系统所作的功率为

$$\int_V f \cdot v \, dV,$$

dt 时间内, 位移为

$$d\vec{s}$$

单位时间内, 位移为

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

V 内场的能量增加率为

$$\frac{d}{dt} \int_V w dV,$$

通过界面 S 流入 V 内的能量为

$$-\oint S \cdot d\sigma$$

(为避免混淆,面元改写为 $d\sigma$,式中的负号是由于我们规定界面的法线向外所致). 能量守恒定律的积分形式是

$$\underline{-\oint S \cdot d\sigma = \int f \cdot v dV + \frac{d}{dt} \int w dV}, \quad (6.1)$$

相应的微分形式为

$$\nabla \cdot S + \frac{\partial w}{\partial t} = -f \cdot v. \quad (6.2)$$

若 V 包括整个空间,则通过无限远界面的能量应为零. 这时(6.1)式左边的面积分为零,因而

$$\int_{\infty} f \cdot v dV = -\frac{d}{dt} \int_{\infty} w dV. \quad (6.3)$$

此式表示场对电荷所作的总功率等于场的总能量减小率,因此场和电荷的总能量守恒.

2. 电磁场能量密度和能流密度表示式 现在我们根据场和

电荷相互作用的规律——麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式来求出
电磁场的能量密度和能流密度的具体表示式。由洛伦兹力公式得

$$\underline{f \cdot v = (\rho E + \rho v \times B) \cdot v = \rho v \cdot E = J \cdot E.} \quad (6.4)$$

把此式与(6.2)式比较,为了求得 S 和 w ,需要用麦氏方程把 $J \cdot E$
全部用场量表出。由麦氏方程(4.23)第二式,

$$J = \nabla \times H - \frac{\partial D}{\partial t},$$

得

$$\underline{J \cdot E = E \cdot (\nabla \times H) - E \cdot \frac{\partial D}{\partial t}.} \quad (6.5)$$

用矢量分析公式(附录 I.21 式)及麦氏方程得

磁力不做功

$$(\vec{v} \times \vec{B}) \perp \vec{v}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) &= -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \\
 &= -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{6.6}
 \end{aligned}$$

代入(6.5)式得

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{6.7}$$

和(6.2)式比较得到能流密度 \mathbf{S} 和能量密度变化率 $\partial w / \partial t$ 的表示式

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \tag{6.8}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{6.9}$$

能流密度 \mathbf{S} 也称为坡印亭(Poynting)矢量,是电磁波传播问题的一个重要物理量.

外界流入的(\mathbf{E}, \mathbf{H}), 导致 (\mathbf{D}, \mathbf{B}) 的变化!

(1) 真空中电荷分布情形. 这情况下相互作用的物质是电磁场和自由电荷, 能量在两者之间转移. 在真空中,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}, \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E},$$

因此,

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \\ w &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right). \end{aligned} \tag{6.10}$$

w 是真空中的电磁场能量密度.

(2) 介质内的电磁能量和能流. 介质(包括导电物质)内既有自由电荷也有束缚电荷. 这情况下相互作用的系统包括三个方面: 电磁场、自由电荷和介质. 场对自由电荷所作的功率密度为 $J \cdot E$, 它或者变为电荷的动能, 或者变为焦耳热. 场对介质中束缚电荷所作的功转化为极化能和磁化能而储存于介质中, 也可能有一部分转化为分子热运动(介质损耗). 当外场变化时, 极化能和

外界流入的(E, H), 导致 (D, B) 的变化!

磁化能亦发生变化,如果不计及介质损耗,则这种变化是可逆的。介质的极化和磁化状态由介质电磁性质方程确定,一定的宏观电磁场对应于一定的介质极化和磁化状态,因此我们把极化能和磁化能归入场能中一起考虑,成为介质中的总电磁能量。(6.8—6.9)式中的 S 和 w 就是代表这种电磁能量的能流密度和能量密度。由(6.9)式,介质中场能量的改变量为

$$\underline{\delta w = \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B}}. \quad (6.11)$$

在线性介质情形, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, 上式可以积分得场能量密度表示式

$$\underline{w = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})}. \quad \text{推导?} \quad (6.12)$$

但必须注意此式仅适用于线性介质。在一般情况下,必须应用普遍的公式(6.11)。

[电磁能在导体中的传输, 课下自己看]