

# Badanie okresu wahadła

Hubert Ładziński

21 marca 2017

## 1 Streszczenie

W pracy badano okres wahadła składającego się z metalowej kuli przymocowanej za pomocą nici do sufitu. Wahadło wprowadzono w ruch i mierzono jego okresy różnymi metodami. Na podstawie zgromadzonych danych przeprowadzono analizę niektórych wielkości używanych w statystyce.

## 2 Wstęp

Niech wahadło użyte podczas doświadczenia zachowuje się jak wahadło matematyczne o długości  $l$ , wahające się w polu grawitacyjnym o przyspieszeniu  $g$  równemu przyspieszeniu ziemskiemu.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1)$$

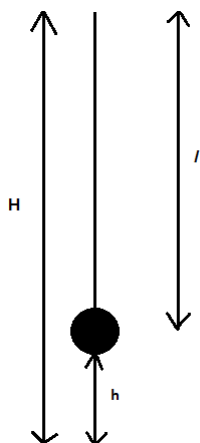
$T$  z równania 1 jest wzorcem okresu dla omawianego tu wahadła, natomiast główną częścią raportu jest analiza metod statystycznych na przykładzie danych zdobytych podczas doświadczenia. Pozwoli ona zrozumieć ich sens i wzajemne zależności.

### 3 Układ doświadczalny i pomiary

Układ widoczny na rysunku 1 składał się z metalowej kuli przyczepionej do sufitu za pomocą nici, pod kulą ustawiona była kartka z narysowaną na środku linią równoległą do dłuższego boku kartki, prostopadle do narysowanej linii ustawiono długopis w punkcie równowagi wahadła. Pomiar zaczynał się gdy wahadło przechodziło przez punkt równowagi a kończył gdy przeszło drugi raz w tym samym kierunku przez ten punkt. Wysokość  $h$  od podłogi do dolnej krawędzi kuli mierzono za pomocą tamy mierniczej z podziałką co 1 mm. Średnice kulki  $d = 50$  mm zmierzono za pomocą suwmiarki cyfrowej wyświetlającej wynik z dokładnością do 0,01 mm. W pierwszej części pomiarowej zmierzono dwieście szesnaście pojedynczych okresów wahadła, w kolejnej części mierzono pięćdziesiąt cztery poczwórne okresy wahań, natomiast w ostatnim etapie mierzono pięć dziesięciokrotnych okresów zmieniając co pomiar długość  $l$  wahadła. Wszystkie okresy mierzono za pomocą stopera o najmniejszej działce odczytu równej 0,01 s.

## 4 Wyniki pomiarów i ich niepewności

Wyniki pierwszej części pomiarów dwustu szesnastu okresów wahadła dały średni wynik  $T = (3,3177 \pm 0,0032)$  s.



Rysunek 1: Układ doświadczalny

Niepewność pojedynczej wielkości została określona za pomocą wzoru:

$$u = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (2)$$

Niepewność średniej wielkości obliczono ze wzoru:

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (3)$$

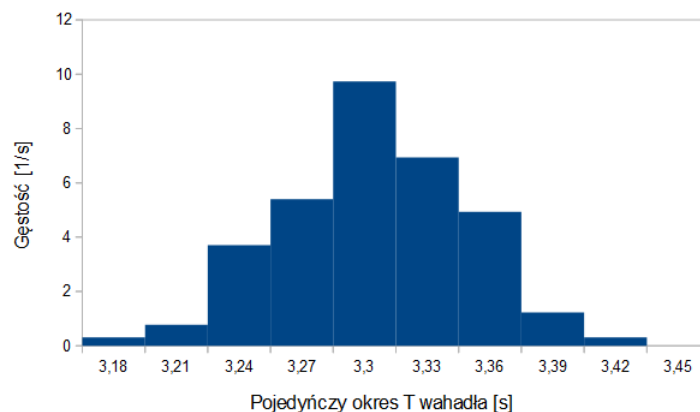
W ten sam sposób obliczono niepewność dla drugiej części pomiarów:

Tabela 1: Wyniki pomiarów

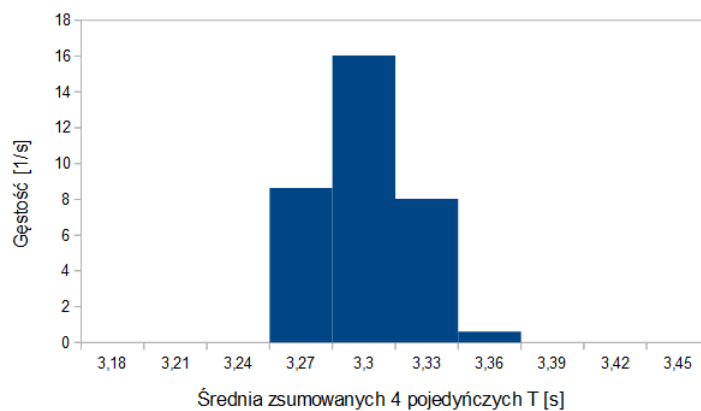
|                                    | Pojedynczy okres T | Suma czterech 4T | Poczwórny okres T |
|------------------------------------|--------------------|------------------|-------------------|
| Średni okres [s]                   | 3,3177             | 3,3177           | 3,2931            |
| Niepewność pojedynczego okresu [s] | 0,0470             | 0,0230           | 0,0100            |
| Niepewność średniego okresu [s]    | 0,0032             | 0,0031           | 0,0014            |

## 5 Analiza danych

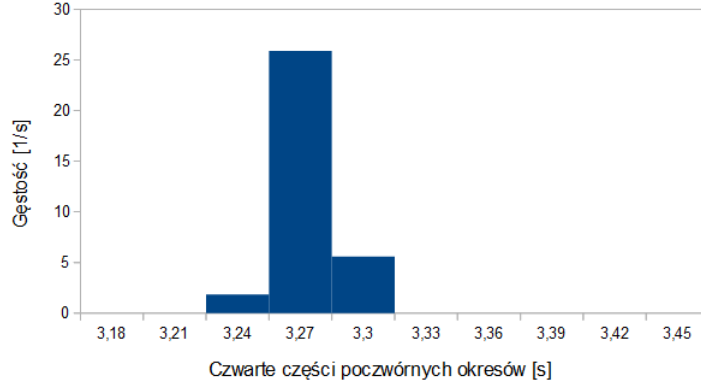
Na podstawie załączonych danych wykonano trzy histogramy gęstości okresów drgań:



Rysunek 2: Histogram 216 pojedynczych okresów drgań



Rysunek 3: Histogram 54 okresów wyznaczonych z sumy czterech okresów z 216 pomiarów



Rysunek 4: Histogram 54 średnich okresów wyznaczonych z 54 pomiarów poczwórnych okresów

Porównanie kształtu histogramów na rysunkach 2,3 i 4 wskazuje na znaczne zagęszczenie wartości w przedziale  $(3,27 - 3,3]$  wokół, którego oscyluje średnia wartość pojedynczego okresu wahadła z części I i II. Prowadzi to do wniosku, że zmniejszenie ilości pomiarów na okres daje lepsze rezultaty w kwestii jego niepewności. Podobny efekt dało zgrupowanie wyników po cztery.

**Definicja i analiza wielkości  $\xi_{(n)}$**  Wielkość  $\xi_{(n)}$  definiuje się następująco:

$$\xi_{(n)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \xi_{(n)i} \quad (4)$$

gdzie  $\xi_{(n)i}$  jest równe:

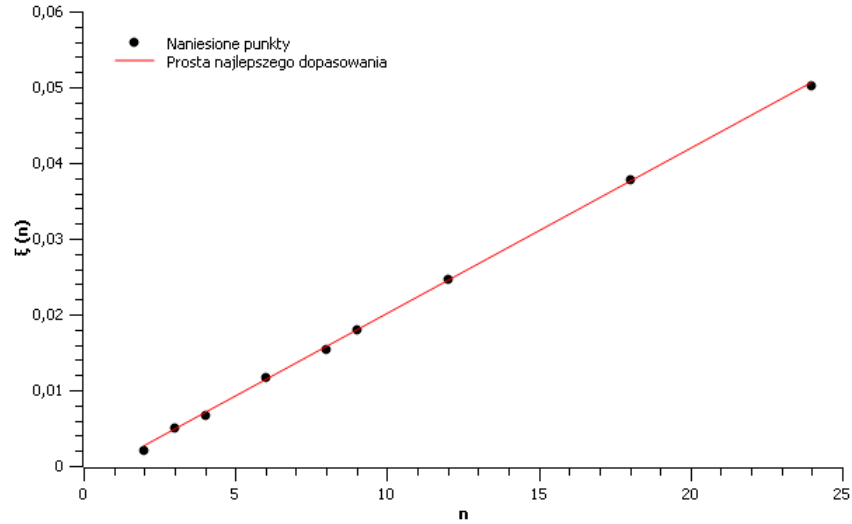
$$\xi_{(n)i} = \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{(n)i})^2, i = 1, 2, 3, \dots, k \quad (5)$$

$$\bar{x}_{(n)i} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij}, i = 1, 2, 3, \dots, k \quad (6)$$

Aby zbadać wpływ ilości elementów  $n$  na wielkość  $\xi_{(n)}$  należy narysować wykres tej zależności, na podstawie tabeli 2:

Tabela 2: Dane do wykresu

|             |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| n           | 2        | 3        | 4        | 6        | 8        | 9        | 12       | 18       | 24       |
| $\xi_{(n)}$ | 0,002047 | 0,004953 | 0,006659 | 0,011607 | 0,015375 | 0,018043 | 0,024670 | 0,037784 | 0,050189 |



Rysunek 5: Wykres zależności  $\xi_{(n)}$  od  $n$

Uzyskana prosta najlepszego dopasowania widoczna na rysunku 5 ma wzór  $\xi_{(n)} = 0,0022n - 0,0019$  obliczony z punktów  $n = 7, \xi_{(7)} = 0,0135$  oraz  $n = 8, \xi_{(8)} = 0,0157$ , dla  $\xi_{(n)} = 0$   $n$  ma wartość 0,86.

Z wykresu widać jasno, że charakter relacji  $\xi_{(n)}$  od  $n$  jest liniowy, zwiększanie ilości elementów wchodzących do jednej grupy zwiększa także miarę ich rozrzutu.

**Definicja i analiza wielkości  $s_{(n)}^2$**  Wielkość  $s_{(n)}^2$  definiuje się następująco:

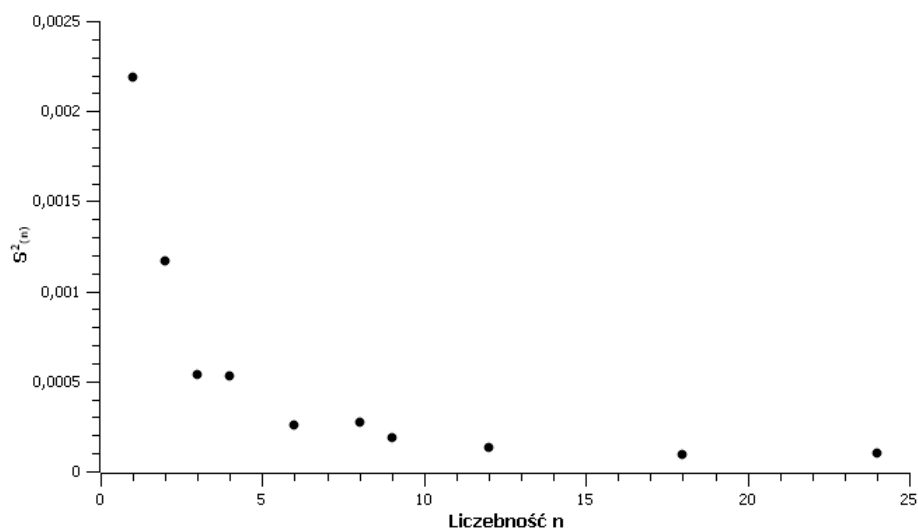
$$s_{(n)}^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (\bar{x}_{(n)i} - \bar{x})^2 \quad (7)$$

Gdzie  $k$  jest równe odpowiedniej ilości grup  $k = 108, 72, 54, 36, 27, 24, 18, 12, 9$ , na jakie zostały podzielone dane. Wielkość  $\bar{x}_{(n)i}$  została zdefiniowana we wzorze (6), natomiast  $\bar{x}$  jest średnią uzyskaną z 216 pojedynczych okresów. Powyższa wielkość pokaże jakiego średniego odchylenia od średniej można spodziewać się analizując każdą z grup.

Na początku wypada przyjrzeć się jak wielkość  $s_{(n)}^2$  zależy od liczby  $n$  elementów w każdej z grup, na podstawie tabeli 3 rysujemy wykres widoczny na rysunku 6:

Tabela 3: Tabela do wykresu  $s_{(n)}^2$  od  $n$

| n           | 1       | 2       | 3        | 4        | 6        | 8        | 9        | 12       | 18      | 24       |
|-------------|---------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|----------|
| $s_{(n)}^2$ | 0,00219 | 0,00117 | 0,000538 | 0,000526 | 0,000254 | 0,000269 | 0,000184 | 0,000133 | 0,00009 | 0,000101 |

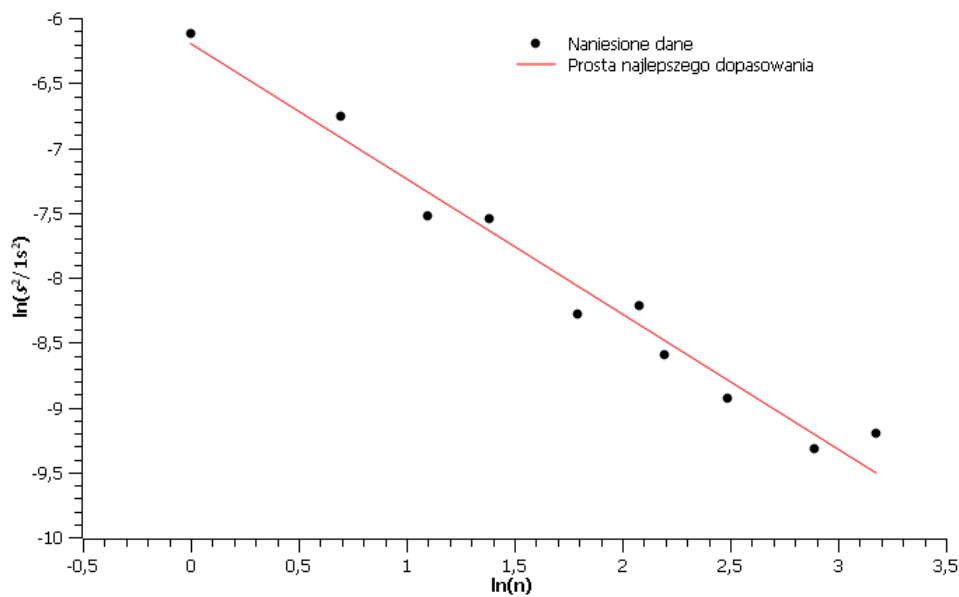


Rysunek 6: Wykres zależności  $s_{(n)}^2$  od  $n$

Ponieważ zależność  $s_{(n)}^2$  od  $n$  zachowuje się jak funkcja postaci  $s_{(n)}^2 = An^B$  po zlogarytmowaniu powinniśmy otrzymać zależność liniową  $\ln(s_{(n)}^2/1s^2) = \ln A + B \ln n$ . Dobrze obrazuje to wykres na rysunku 7 na podstawie tabeli 4.

Tabela 4: Dane do wykresu  $\ln(s_{(n)}^2/1s^2)$  od  $\ln(n)$

|            |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\ln(n)$   | 0,000  | 0,693  | 1,099  | 1,386  | 1,792  | 2,079  | 2,197  | 2,485  | 2,890  | 3,178  |
| $\ln(s^2)$ | -6,123 | -6,752 | -7,528 | -7,549 | -8,278 | -8,219 | -8,599 | -8,925 | -9,318 | -9,196 |



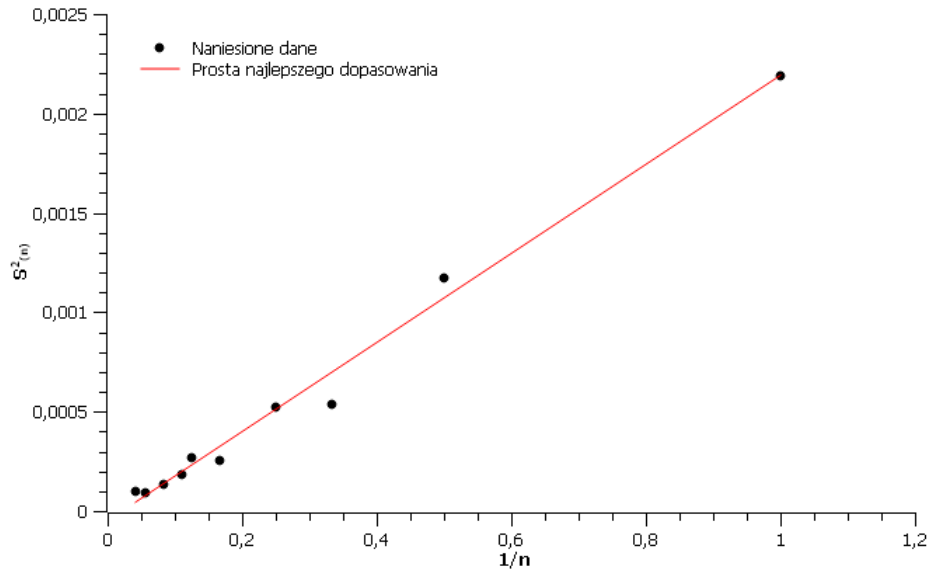
Rysunek 7: Wykres zależności  $\ln(s_{(n)}^2/1s^2)$  od  $\ln(n)$

Wzór prostej najlepszego dopasowania z rysunku 7 uzyskany na podstawie punktów  $\ln(n) = 1$ ,  $\ln(s_{(n)}^2/1s^2) = -7,24$  oraz  $\ln(n) = 2$ ,  $\ln(s_{(n)}^2/1s^2) = -8,29$  jest następujący:  $\ln(s_{(n)}^2/1s^2) = -1,05 \ln(n) - 6,19$  co wskazuje na liniowość relacji wielkości  $s_{(n)}^2$  od  $1/n$ .



Tabela 5: Dane do wykresu  $s_{(n)}^2$  od  $1/n$

|             |         |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
|-------------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $1/n$       | 1,0000  | 0,5000   | 0,3333   | 0,2500   | 0,1667   | 0,1250   | 0,1111   | 0,0833   | 0,0556   | 0,0417   |
| $s_{(n)}^2$ | 0,00219 | 0,001169 | 0,000538 | 0,000526 | 0,000254 | 0,000269 | 0,000184 | 0,000133 | 0,000090 | 0,000101 |



Rysunek 8: Wykres zależności  $s_{(n)}^2$  od  $1/n$

Parametry prostej z rysunku 8 na podstawie punktów ( $1/n = 0,2$ ,  $s_{(n)}^2 = 0,000396$ ) oraz ( $1/n = 0,4$ ,  $s_{(n)}^2 = 0,00085$ ):  $s_{(n)}^2 = 0,00227\frac{1}{n} - 0,00823$ . Uwzględniając wszystkie omawiane powyżej aspekty wielkości  $s_{(n)}^2$ , można uznać za dobrą miarę średniego odchylenia pojedynczej wielkości od średniej na podstawie  $N$  danych.

Z zebranych danych jasno wynika, że metodą dającą najmniejszą niepewność jest zmniejszenie ilości pomiarów na okres, jak to miało miejsce w drugiej części pomiarowej, która okazała się najdokładniejszą z wynikiem  $T = 3,2931$  s, niedokładnością średniego okresu  $\bar{u} = 0,0014$  s oraz niedokładnością pojedynczego okresu  $u = 0,0100$  s.

## 6 Dyskusja i wnioski końcowe

Zebrane pomiary pojedynczego oraz poczwórnego okresu wahadła i następna analiza, rzucają nieco światła na zagadnienie niepewności. Jak można się było spodziewać, największy rozrzut od średniej otrzymano dla metody pomiaru jednego okresu, jest to zrozumiałe z uwagi na częstszą możliwość popełnienia błędu, u podstaw którego był przede wszystkim czas reakcji osoby mierzącej, stoper oraz zmiany w okresie wahadła pod wpływem oporu powietrza i zmieniającej się płaszczyzny wahań wahadła. Te same błędy co do wartości pojawiały się przy mierzeniu poczwórnego okresu wahadła ale miały mniejszy wpływ na średnią pojedynczego okresu ponieważ występowały rzadziej w odniesieniu do jednego wachnięcia. Podobny efekt dla średniej niepewności pojedynczego okresu dało grupowanie wyników po cztery. Implikacją różnic w niepewności średniego okresu dla części pierwszej i drugiej jest także różnica ich średnich wartości, która jest około dwukrotnie mniejsza w przypadku metody poczwórnego okresu co wynika ze wzoru (3).