1 Aussagenlogik

1.1 Wahrheitstabelle

A	B	$\overline{A}$	A ∧ B	A ∨ B	A ⇒ B	A ⇔ B	A ⊕ B
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0

1.2 De Morgansche Gesetze

1. $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$
2. $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$

1.3 All- und Existenzaussagen

Sei M eine Menge

1. $\forall\ x : A(x)$ *Für alle* $x \in M$ gilt $A(x)$
2. $\exists\ x : A(x)$ *Es gibt* ein $x \in M$, so dass $A(x)$ wahr ist

1.4 Weitere allg.gültige Umformungen

1. A ⇒ B ≡ $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ (Kontraposition)
2. A ⇔ B ≡ (A ⇒ B) ∧ (B ⇒ A)
3. $\overline{\forall\ x : A(x)} \equiv \exists$ x : $\overline{A(x)}$
4. $\overline{\exists\ x : A(x)} \equiv \forall$ x : $\overline{A(x)}$

1.5 Tautologie

Ein aussagelogischer Ausdruck heißt allgemeingültig oder Tautologie, wenn er immer wahr ist. Dies ist erkennbar durch die letzte Spalte in der Wahrheitstabelle welche stets 1 ist.

1.6 Disjunktive und Konjunktive Normalform

1. **DNF:** ("wo der Wert 1 steht")
   - eine Veroderung von Und-Termen
   - Beispiel für $A \Leftrightarrow B$: $(\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee$ (A ∧ B)
2. **KNF:** ("wo der Wert 0 steht")
   - eine Verundung von Oder-Termen
   - Beispiel für $A \Leftrightarrow B$: ($\overline{A}$ ∨ B) ∧ (A ∨ $\overline{B}$)

2 Vollständige Induktion

$\sum_{k=1}^{n}(4k-1) = 2n^2 + n$ n ∈ N

(IA) Induktionsanfang Nachweis der Behauptung für n = 1

$\sum_{k=1}^{n}$ (4 · 1 -1) = 3

$2 \cdot 1^2 + 1 = 3$ $\sqrt{}$

(IV) Induktionsschritt

a) Induktionsvoraussetzung

$\sum_{k=1}^{n}(4k-1) = 2n^2 + n$

b) Induktionsbehauptung $(n \to n+1)$:

$\sum_{k=1}^{n+1}(4k-1) = 2(n+1)^2 + (n+1)$

(IS) Beweis des Induktionsschritts:

$\sum_{k=1}^{n+1}(4k-1) = \sum_{k=1}^{n}$ (4k -1) $+ (4(n+1)-1) =$

$= 2n^2 + n + (4(n+1)-1) = 2n^2 + 5n + 3 =$

$= 2(n^2 + 2n + 1) + (n+1) = 2(n+1)^2 + (n+1)$ q.e.d.

3 Mengen

3.1 Definitionen

3.1.1 Allgemein

Eine Menge ist durch ihre Elemente bestimmt.
$x \in M$, x ist Element von M
$x \notin M$, x ist kein Element von M
$|M|$:= Anzahl der Elemente von M

$N \subset M :\Leftrightarrow (x \in N \Rightarrow x \in M)$
$N \not\subset M :\Leftrightarrow (\exists\ x \in N\ mit\ x \notin M)$
$N = M :\Leftrightarrow (N \subset M\ und\ M \subset N)$
$\varnothing = \{\}$: leere Menge
$A \setminus B = A \cap \overline{B}$
$\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup B$
$A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = A \cap B$
$(\overline{A \cap B}) = (\overline{A} \cup \overline{B})$

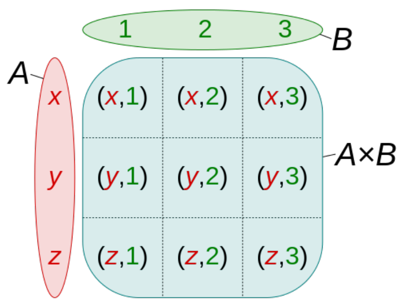
3.1.1.1 Zugehörigkeitstabelle

Ist wie eine Wahrheitstabelle wobei 0: nicht enthalten bedeutet und 1 enthalten bedeutet.

3.1.2 Beispiele für Mengen

$M := \{1,2,3\}$, $N := \{2,3,5\}$

1. M vereinigt N
   $M \cup N := \{x | x \in M \vee x \in N\}$
   $M \cup N = \{1,2,3,4,5\}$
2. M geschnitten N
   $M \cap N := \{x | x \in M \wedge x \in N\}$
   $M \cap N = \{2,3\}$
3. M ohne N
   $M \setminus N := \{x | x \in M \wedge x \notin N\}$
   $M \setminus N = \{1\}$
4. Potenzmenge von M (Menge aller Teilmengen)
   $\mathbb{P}(M) := \{A | A \subset M\}$, $|P(M)| = 2^{|M|} = 2^3 = 8$
   $\mathbb{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$
5. $M \times N : \{(x,y) \mid x \in M, y \in N\}$ (kartesisches Produkt)
   $M \times N$: Menge aller geordneten Paare, d.h. $(x,y) \neq (y,x)$ falls $x \neq y$



3.2 Rechengesetze

1. $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$ (Kommutativität)
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Assoziativität)
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Distributivgesetz)

4 Abbildungen

4.1 Definitionen

4.1.1 Funktion

Seien M, N Mengen. Eine Abbildung (Funktion) $f : M \to N$ ("f von M nach N") ordnet jedem Element von M genau ein Element in N zu.

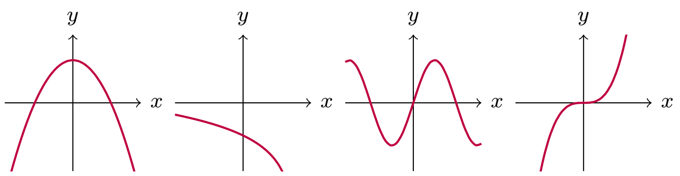
4.1.2 Graph

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. $G := G_f := \{(x, y) \in M \times N \mid y = f(x)\} \subset M \times N$ heißt Graph von f.

4.1.3 Umkehrfunktion

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung und ist bijektiv. Dann ist $f^{-1} : N \to M$ die Umkehrabbildung von f.

4.2 Surjektivität, Injektivität und Bijektivität



nicht injektiv, nicht surjektiv | injektiv, nicht surjektiv | nicht injektiv, surjektiv | injektiv, surjektiv

1. **injektiv:** Zu jedem $y \in$ N gibt es genau ein $x \in$ N
   $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
2. **surjektiv:** Zu jedem $y \in$ N gibt es mindestens ein $x \in$ N für das gilt $f(x) = y$
3. **bijektiv:** injektiv + surjektiv $\Rightarrow$ Für jedes $y \in$ N genau ein $x \in$ N

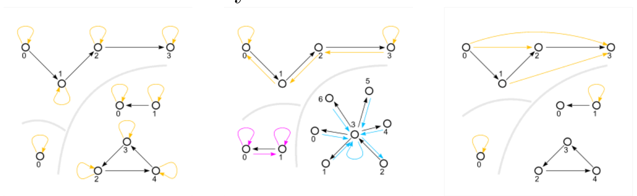
5 Relationen

5.1 Definitionen

Eine Relation R auf die Menge A ist:

5.1.1 Äquivalenzrelation

reflexiv | symmetrisch | transitiv



r.u. nicht transi.

1. **reflexiv**
   In dieser Abbildung: Drei reflexive Relationen, als gerichtete Graphen dargestellt.
2. **symmetrisch**
   In dieser Abbildung: Drei symmetrische Relationen, als gerichtete Graphen dargestellt
3. **transitiv**
   In dieser Abbildung: Zwei transitive und eine nicht transitive Relation (rechts unten), als gerichtete Graphen dargestellt.

5.1.2 Ordnungsrelation

1. **reflexiv**
2. **transitiv**
3. **antisymmetrisch**

5.2 Eigenschaften

Eine Relation $R \subset A \times A$ heißt:

1. **reflexiv**, wenn $(a, a) \in R$ für alle $a \in A$
   Beweisen durch $y := x$
2. **symmetrisch**, wenn für alle $(a, b) \in A \times A$ gilt:
   $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$
   Beweisen durch vertauschen von x und y
3. **antisymmetrisch**, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:
   $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R \Rightarrow a = b$
4. **asymmetrisch**, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:
   $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R$
5. **transitiv**, wenn für alle $a, b, c \in A$ gilt:
   $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$
   Beweisen indem über ein anderes Element wieder zum Start gelangt werden kann

5.2.1 Äquivalenzklassen und Beispiel für Äquivalenzrelation

Beispieläquivalenzrelation: Auf der Menge A = {1,2,3,4,5,6} ist R definiert: $R = \{(a, b) \in A \times A : a^2 \equiv b^2 \ mod\ 7\}$

1. Reflexivität: $(a, a) \in R$. Dies gilt da $a^2 \equiv a^2 \ mod\ 7$ gilt.
2. Symmetrie: $(a, b) \in R \to (b, a) \in R$. Dies gilt da $a^2 \equiv b^2 \ mod\ 7$ äquivalent ist zu $b^2 \equiv a^2 \ mod\ 7$ (Gleichheit mod 7 ist symmetrisch)
3. Transitivität: analog: Gleichheit mod 7 ist transitiv $a^2 \equiv b^2 \ mod\ 7$ und $b^2 \equiv c^2 \ mod\ 7$ folgt $a^2 \equiv c^2 \ mod\ 7$.

Äquivalenzklassen: die Werte von $a^2 \ mod\ 7$ für $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ sind (alles mod 7): $1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9 = 2, 4^2 = 16 = 2, 5^2 = 25 = 4, 6^2 = 36 = 1$. Somit sind die quivalenzklassen {1, 6}, {2, 5} und {3, 4}.

6 Elementare Zahlentheorie

6.1 Quersumme

Sei $x \in \mathrm{N}$ und $x = (q_n, q_{n-1}, ..., q_1, q_0) =$
$q_n \cdot 10^n + q_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + q_1 \cdot 10^1 + q_0 \cdot 10^0$
die Dezimaldarstellung von x. Dann gilt:

1. **Quersume:** $Q(x) := q_o + q_1 + ... + q_n$
2. **alternierende Quersumme:** $Q'(x) := q_o - q_1 + q_2 ... + (-1)^n \cdot q_n$
3. $x \equiv Q(x)\ mod\ 9$
4. $x \equiv Q'(x)\ mod\ 11$

6.2 Teilbarkeit

Sei $d, a \in \mathrm{Z}$
$d \mid a : d$ teilt $a \Rightarrow r \in \mathrm{Z} : a = d \cdot r$
$d \nmid a : d$ teilt nicht a

Rechenregeln:

1. $a \mid a$ (reflexiv)
2. $(a \mid b) \wedge (c \mid d) \Rightarrow (a \cdot c) \mid (b \cdot d)$
3. $a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$ (transitiv)
4. $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid (m \cdot b + n \cdot c)$ für alle $m, n \in \mathrm{Z}$

6.3 Primzahlen

Eine Zahl $p \in \mathrm{N}$ heißt Primzahl, wenn:

1. $p > 1$ und
2. $p = a \cdot b$ mit $a, b \in \mathrm{N} \Rightarrow a = 1 \vee b = 1$
   d.h. Primzahlen haben keine echten Teiler

6.3.1 Besondere Rechenregeln

$p \mid (a \cdot b) \Rightarrow p \mid a \vee p \mid b$

6.3.2 Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie

Sei $a \in \mathrm{Z}, a \neq 0$ und $\epsilon = \pm 1$

$$a = \epsilon \cdot \prod_p p^{m_p(a)}$$

Beispiel:
$372 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 31^1$
$m_2(372) = 2, m_3(372) = 1, m_31(372) = 1$

6.3.3 Anzahl positiver Teiler

$$\tau(a) = \prod_{i=1}^{r} (m_i(a) + 1)$$

Beispiel:
$120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$
$\tau(120) = (3+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 16$

6.4 Kongruenz

$a \equiv b\ mod\ m \Leftrightarrow m|(a-b) \Leftrightarrow (a-b) = m \cdot t \Leftrightarrow a = m \cdot t + b$

6.5 ggT, kgV

6.5.1 Größter gemeinsamer Teiler

Seien $a, b, d \in \mathrm{Z}$ gilt $d = ggT(a, b)$ wenn:

1. $d \geq 0,\ d \mid a\ \wedge\ d \mid b$
2. Für jeden gemeinsamen Teiler t von a und b gilt $t \mid a$

Beispiel:
$ggT(531, 93) = ggT(3^2 \cdot 59, 3 \cdot 31) = 3$
Taschenrechner: GCD(VAL1;VAL2)

6.5.2 kleinstes gemeinsames Vielfaches

$$kgV(a, b) = \frac{|a \cdot b|}{ggT(a, b)}$$

6.6 Diophantische Gleichungen

6.6.1 Lösbarkeit

$ax + by = c$ ist lösbar wenn gilt: $ggT(a, b) \mid c$

6.6.2 Erweiterter euklidischer Algorithmus

Berechnet: $n^{-1}\ mod\ m$
Tabelle Auffüllen: $r_1 = m,\ r_2 = n,\ x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = 1$
$\forall\ i > 2$ gilt:
r_{i-2} `:R` $r_{i-1} = q_{i-1}$ `;R=` r_i (Taschenrechnersyntax)
$x_i = x_{i-2} - (q_{i-1} \cdot x_{i-1})$
$y_i = y_{i-2} - (q_{i-1} \cdot y_{i-1})$

Beispiel: $m = 520\ n = 103$

i	r_i	q_i	x_i	y_i
1	520		1	0
2	103	5	0	1
3	5	20	1	-5
4	3	1	-20	101
5	2	1	21	-106
6	1		-41	207
			$= x_0$	$= y_0$

$ggT(520, 103) = 1$ $\qquad 103^{-1}\ mod\ 520 = 207\ (Inverse)$

Bemerkung: $ggT(m, n) = 1$: so sind m und n teilerfremd!
Zur Kontrolle: es muss immer gelten $r_i = r_{i+1} \cdot q_{i+1} + r_{i+2}$

6.6.3 Lösungsgesamtheit

Durch den erweitertern euklidischen Algorithmus erhält man eine mögliche Lösung der Gleichung $ax + by = c$. Alle ganzzahligen Lösungen erhält man wie folgt:

$$x = x_0 + k \cdot \frac{b}{ggT(a, b)} \qquad y = y_0 - k \cdot \frac{a}{ggT(a, b)}$$

6.6.4 Lösen von Kongruenzgleichungen

$$a \cdot x \equiv b\ mod\ m$$

Lösbarkeit: Die Gleichung ist lösbar, wenn $ggT(a, m) = 1$

Beispiel: Gesucht ist ein x mit $103x \equiv 3\ mod\ 520$

$520x + 103y = 3$

$520 \cdot 520^{-1} + 103 \cdot 103^{-1} = 1$
$520 \cdot -41 + 103 \cdot 207 = 1 \quad | \cdot 3$
$520 \cdot (-41 \cdot 3) + 103 \cdot (207 \cdot 3) = 3$

$\Rightarrow x = -123\ y = 621 \Rightarrow 103 \cdot 621 \equiv 3\ mod\ 520$

Hinweis: Sollte der $ggT(a, m) \neq 1$ sein, sollte geprüft werden ob a und b kürzbar sind.

6.7 Eulersche φ-Funktion

Sie gibt für jede natürliche Zahl m an, wie viele positive ganze Zahlen $a \leq m$ zu ihr teilerfremd sind:

$$\varphi(m) := |\{1 \leq a \leq m \mid ggT(a, m) = 1\}|$$

Sei $Z_m^* := \{a \in Z_m \mid a\ ist\ inventierbar\}$.
Dann gilt: $|Z_m^*| = \varphi(m)$

$$\varphi(m) = m \prod_{p \mid m} (1 - \frac{1}{p})$$

Ist p eine Primzahl, dann gilt:

$$\varphi(p) = p - 1$$

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k(1 - \frac{1}{p})$$

m, n teilerfremd:

$$\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$$

$$\sum_{d \mid m} \varphi(d) = m$$

6.8 Satz von Euler & der kleine Satz von Fermat

6.8.1 Satz von Euler

Für $ggT(a, m) = 1$ gilt:

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1\ mod\ m$$

6.8.2 kleiner Satz von Fermat

Für p eine Primzahl und $ggT(a, p) = 1$ gilt:

$$a^{p-1}\ mod\ p \equiv 1\ mod\ p$$

6.8.3 Satz von Wilson

$(p - 1)! \equiv -1(mod\ p)$ gilt genau dann, wenn p prim.

6.8.4 Anwendungsbeispiele

6.8.4.1 Berechnung von $\varphi(2625)$

Primfaktorzerlegung: FACT am taschenrechner!
$\varphi(2625) = \varphi(3 \cdot 5^3 \cdot 7) = (3^1 - 3^0)(5^3 - 5^2)(7^1 - 7^0) = 1200$

6.8.4.2 Berechnung von $13^{6005}\ mod\ 2625$ - Satz von Euler

$ggT(13, 2625) = 1$
$13^{1200} \equiv 1\ mod\ 2625$

$13^{6005}\ mod\ 2625 = 13^{1200 \cdot 5 + 5} = (13^{1200})^5 \cdot 13^5 \equiv 1^5 \cdot 13^5\ mod\ 2625 = 13^5\ mod\ 2625 = 371293 = 1168\ mod\ 2625$

6.8.4.3 Berechnung von $6005^{(\varphi(6005))}\ mod\ 13$ - Kleiner Satz von Fermat

$6005^{(\varphi(6005))}\ mod\ 13 \equiv 12^{(\varphi(6005))} \equiv 12^{1200} \equiv 12^{(12 \cdot 100)} \equiv (12^{12})^{100} \equiv 1^{100} \equiv 1\ mod\ 13$

6.9 Modulares Potenzieren

6.9.1 Regel I

Lässt sich der Exponent als Summe zweier kleinerer Zahlen darstellen, so gilt:

$x^{a+b} = x^a \cdot x^b$

Soll der Rest der Potenz gebildet werden, so kann die Restfunktion bereits auf Zwischenergebnisse angewendet werden, denn bezüglich der Restbildung zur Division durch d gilt:

$x^{a+b}\ mod\ d = ((x^a\ mod\ d) \cdot (x^b\ mod\ d))\ mod\ d$

6.9.2 Regel II

Lässt sich der Exponent als Produkt zweier kleinerer Zahlen darstellen, so gilt:

$x^{a \cdot b} = (x^a)^b$

Soll der Rest der Potenz gebildet werden, so kann die Restfunktion bereits auf Zwischenergebnisse angewendet werden, denn bezüglich der Restbildung zur Division durch d gilt:

$x^{a \cdot b}\ mod\ d = (x^a\ mod\ d)^b\ mod\ d$

6.9.3 Anwendung und Sonderfälle

$(a - 1)^{gerade\ zahl}\ mod\ a \equiv (-1)^{gerade}\ mod\ a \equiv 1$
$(a - 1)^{ungerade\ zahl}\ mod\ a \equiv (-1)^{ungerade}\ mod\ a \equiv -1$
$a^n\ mod\ a + 1 \equiv 1^n\ mod\ a \equiv 1$

6.10 Chinesischer Restsatz

$$x \equiv a_1\ mod\ m_1$$
$$x \equiv a_2\ mod\ m_2$$
$$x \equiv a_3\ mod\ m_3$$

6.10.1 Lösbarkeit

$ggT(m_1, m_2, m_3) = 1 \Rightarrow$ eindeutig lösbar; sonst hat das System 0 oder mehrere Lösungen

6.10.2 Konstruktive Lösung

$$\boxed{x \equiv r \; mod \; q_i \quad m_i = q_{i+1} \cdot q_{i+2} = m_i}$$

$x \equiv 4 \; mod \; 20 \quad m_1 = 21 \cdot 23 = 483$
$x \equiv 5 \; mod \; 21 \quad m_2 = 20 \cdot 23 = 460$
$x \equiv 6 \; mod \; 23 \quad m_2 = 20 \cdot 21 = 420$

$$\boxed{m = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = m}$$

$m = 20 \cdot 21 \cdot 23 = 9660$

M_i so wählen, dass $(r_i \cdot M_i) \; mod \; m_i \equiv 1$
Wenn M_i nicht sofort ersichtlich, dann Euklid anwenden mit den Startwerten: $(m_i \; mod \; q_i)^{-1} \; mod \; q_i$

$$\boxed{M_i : m_i \cdot M_i \; mod \; q_i \equiv ((m_i \% q_i) \cdot M_1)\% q_i \equiv 1\% q_i}$$

$M_1 : 483 \cdot M_1 \; mod \; 20 \equiv (3 \cdot M_1) \; mod \; 20 \equiv 1 \; mod \; 20$
$M_2 : 460 \cdot M_2 \; mod \; 21 \equiv (19 \cdot M_2) \; mod \; 21 \equiv 1 \; mod \; 21$
$M_3 : 420 \cdot M_3 \; mod \; 23 \equiv (6 \cdot M_3) \; mod \; 23 \equiv 1 \; mod \; 23$

$$\boxed{x \equiv (r_1 m_1 M_1 + r_2 m_2 M_2 + r_3 m_3 M_3) \; mod \; m}$$

$4 \cdot 483 \cdot 7 + 5 \cdot 460 \cdot 10 + 6 \cdot 420 \cdot 4 = 46604 \; mod \; 9660$

$x \equiv 7964 \; mod \; 9660$

7 Kombinatorik

7.1 Binomialkoeffizienten

Für $n, k \in \mathrm{R}$, $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Symmetrie im pascalschen Dreieck:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Rekursive Definition:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Binomischer Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

7.2 Stichproben

$M :=$ Menge von Objekten die entweder die Eigenschaft A oder B haben.
$M = A \cup B, \; A \cap B = \varnothing$
$|A|$ Elementen haben die Eigenschaft A.
Stichprobe enthält x Elementen
Anzahl der möglichen Stichproben jenach Anzahl der Elementen aus A die eine Stichprobe mit insgesamt x Elementen enthält:

7.2.1 Mindestens eins aus A

= Alle - keines aus A

7.2.2 Kein Element aus A

$$\binom{|B|}{x}$$

7.2.3 Genau y Elementen aus A

$$\binom{|A|}{y} \cdot \binom{|B|}{x-y}$$

7.2.4 Höchstens y Elementen aus A

$$\sum_{i=0}^{y} \binom{|A|}{i} \cdot \binom{|B|}{x-i}$$

7.2.5 Mindestens y Elementen aus A

$$\sum_{i=y}^{|A|} \binom{|A|}{i} \cdot \binom{|B|}{x-i}$$

7.3 Zusammenfassung

Auswahl...	**ohne** Beachtung der Reihenfolge (Kombination) $(b,a)=(a,b)$	**mit** Beachtung der Reihenfolge (Variation) $(a,b) \neq (b,a)$
ohne Zurücklegen (Element wiederholt sich nicht)	$\binom{n}{k}$ Taschenrechner: $nCr \to nCk$	$\frac{n!}{(n-k)!}$ Taschenrechner: $nPr \to nPk$
mit Zurücklegen (Element wiederholt sich)	$\binom{n+k-1}{k}$	n^k

7.3.0.1 Beispiele

		Reihenfolge
Permutation ohne Wiederholung	$n!$	beachten
Permutation mit Wiederholung	$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_s!}$	beachten
Variation ohne Wiederholung	$\frac{n!}{(n-k)!}$	beachten
Variation mit Wiederholung	n^k	beachten
Kombination ohne Wiederholung	$\binom{n}{k}$	nicht beachten
Kombination mit Wiederholung	$\binom{n+k-1}{k}$	nicht beachten

Sind die **Objekte untereinander unterscheidbar**, so spricht man von einer Permutation/Variation/Kombination öhne Wiederholung"(derselben Objekte). Falls die Objekte jedoch **nicht unterscheidbar** sind, spricht man von einer Permutation/Variation/Kombination "mit Wiederholung". Im Urnenmodell sagt man statt öhne Wiederholungëinfach öhne Zurücklegenünd zu "mit Wiederholungëntsprechend "mit Zurücklegen".

7.4 Das Schubfachprinzip

Falls man n Objekte auf m Mengen $(n, m > 0)$ verteilt und n größer als m ist, dann gibt es mindestens eine Menge, in der mehr als ein Objekt landet.

7.5 Das Inklusions-Exklusionsprinzip

Für die Mengen A, B, C und A_i gilt:

1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
2. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
3. Allgemein: $|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + ... + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - ... + (-1)^{n-1} \cdot |A_1 \cap ... \cap A_n|$

7.5.1 Beispiel

Wie viele Zahlen 1, ..., 1000 sind durch 2,3 oder 5 teilbar?
$N = \lfloor \frac{1000}{2} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{3} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{5} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{2\cdot3} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{2\cdot5} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{3\cdot5} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{2\cdot3\cdot5} \rfloor$

8 Komplexe Zahlen

8.1 Darstellung

8.1.1 Kartesische Darstellung

(x, y) kartesische Koordinaten

$$z = x + iy$$

$$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

8.1.2 Polare Darstellung

(r, φ) Polarkoordinaten
$r = |z|$ Betrag
φ Winkel zur x-Achse $(-\pi < \varphi \leq \pi)$

$$z = r \cdot (cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi))$$

$$\mathrm{e}^{i\varphi} = cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi) \quad (Euler)$$

$$z = r \cdot \mathrm{e}^{i\varphi} \quad (Polardarstellung)$$

Sonderfall: $-1 = e^{i\pi}$

8.1.3 Umrechnungen

8.1.3.1 Kartesische in Polare Darstellung

Umrechnung von $z = x + i \cdot y \in \mathrm{C}$ zu $z = r \cdot \mathrm{e}^{i\varphi} \in \mathrm{C}$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} arccos(\frac{x}{r}) & \text{if } y \geq 0 \\ -arccos(\frac{x}{r}) & \text{if } y < 0 \end{cases}$$

8.1.3.2 Polare in Kartesische Darstellung

Umrechnung von $z = r \cdot \mathrm{e}^{i\varphi} \in \mathrm{C}$ zu $z = x + i \cdot y \in \mathrm{C}$:

$$z = r \cdot (cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi))$$

8.1.4 Konjugiert komplexe Zahl

$$\begin{aligned} \overline{z} &= x - iy \\ &= cos(\varphi) - i \cdot sin(\varphi) \\ &= \mathrm{e}^{-i\varphi} \end{aligned}$$

8.2 Rechenregeln

8.2.1 Addition & Subtraktion

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

8.2.2 Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$
$$r_1\mathrm{e}^{i\varphi_1} \cdot r_2\mathrm{e}^{i\varphi_2} = r_1r_2\mathrm{e}^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Beträge multiplizieren und Winkel addieren

8.2.3 Potenzieren

$$z^n = (r \cdot \mathrm{e}^{i\varphi})^n = r^n \cdot \mathrm{e}^{i \cdot n\varphi}$$

Betrag mit n potenzieren, Winkel mit n multiplizieren

8.2.4 Division

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + i \cdot y_1}{x_2 + i \cdot y_2} &= \frac{(x_1 + i \cdot y_1)(x_2 - i \cdot y_2)}{(x_2 + i \cdot y_2)(x_2 - i \cdot y_2)} = \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{(x_2{}^2 + y_2{}^2)} + \frac{i(x_1y_2 + x_2y_1)}{(x_2{}^2 + y_2{}^2)} \\ \frac{r_1\mathrm{e}^{i\varphi_1}}{r_2\mathrm{e}^{i\varphi_2}} &= \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \end{aligned}$$

Beträge dividieren und Winkel subtrahieren

8.2.5 Wurzelziehen

$$\sqrt{z} = \sqrt{r \cdot \mathrm{e}^{i\varphi}} = \pm\sqrt{r} \cdot \mathrm{e}^{i\frac{\varphi}{2}}$$

Wurzel aus Betrag, halber Winkel.
Allgemein für $k \in 0, 1, 2, ..., n-1$:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{r \cdot \mathrm{e}^{i\varphi}} \\ &= \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi + k\cdot2\pi}{n}} \\ &= \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{k\cdot2\pi}{n})} \\ &= \sqrt[n]{r} \cdot (cos(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}) + i \cdot sin(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n})) \end{aligned}$$

8.2.6 Betrag

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

8.2.7 Weitere wichtige Zusammenhänge

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$$

$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i$

$$(x - (a + ib))(x - (a - ib)) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

8.3 Quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diskriminante: $D = b^2 - 4ac$

Lösungen:

1. $D > 0 \Rightarrow 2$ verschiedene reelle Lösungen:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$
2. $D = 0 \Rightarrow 1$ doppelte reelle Lösungen:
$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$$
3. $D < 0 \Rightarrow 2$ konjugiert komplexe Lösungen:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-D}}{2a}$$

8.4 Anwendungsbeispiele

8.4.1 1. Variante

Die Funktion $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ hat die Nullstellen $x_1 = i$ und $x_2 = -1 - i$ gesucht $a_4, ..., a_0 \in \mathrm{R}$

$x_3 = -i$, $x_4 = -1 + i$

$f(x) = (x - i)(x - (-1 - i))(x + i)(x - (-1 + i)) = ...$
$= (x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2) = ... = (x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2)$

$a_4 = 1$, $a_3 = 2$, $a_2 = 3$, $a_1 = 2$, $a_0 = 2$

8.4.2 2. Variante

Die Funktion $f(x) = x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 12x^2 - 5x + 25$ hat die Nullstellen $x_1 = 1 - 2i$ und $x_2 = -1$ gesucht sind alle Nullstellen.

$x_3 = 1 + 2i$, $x_4 =?$, $x_5 =?$

Polynomdivision:
$(x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 12x^2 - 5x + 25) : (x + 1)$
$= x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 30x + 25$

$(x - (1 - 2i))(x - (1 + 2i)) = (x - 1 + 2i)(x - 1 - 2i) = x^2 - 2x + 1 - 4i^2 = x^2 - 2x + 5$

Polynomdivision:
$(x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 30x + 25) : (x^2 - 2x + 5)$
$= x^2 - 4x + 5$

Nullstellen von $x^2 - 4x + 5$:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

reelle Faktorisierung:
$f(x) = (x + 1)(x^2 - 2x + 5)(x^2 - 2x + 5)(x^2 - 4x + 5)$

komplexe Faktorisierung:
$f(x) = (x + 1)(x - 1 + 2i)(x - 1 - 2i)(x - 2 - i)(x - 2 + i)$