



IEL – protokol k projektu

Vladimír Hucovič
xhucov00

16. prosince 2021

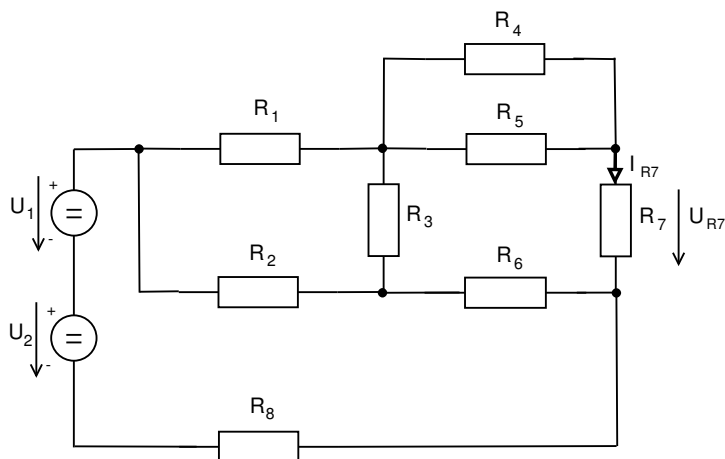
Obsah

1	Příklad 1	2
2	Příklad 2	8
3	Příklad 3	12
4	Příklad 4	15
5	Příklad 5	18
6	Shrnutí výsledků	20

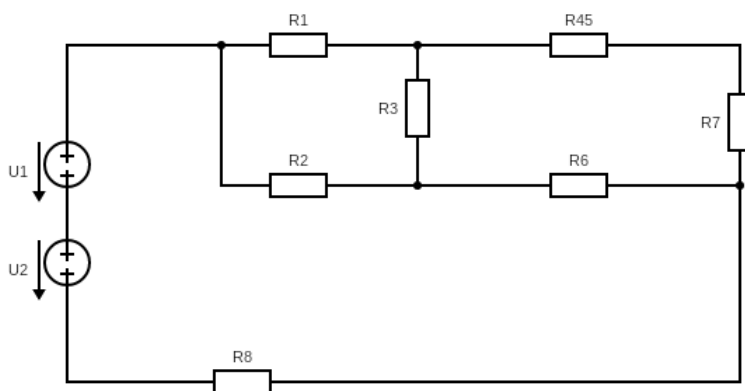
Příklad 1

Stanovte napětí U_{R7} a proud I_{R7} . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
H	135	80	680	600	260	310	575	870	355	265

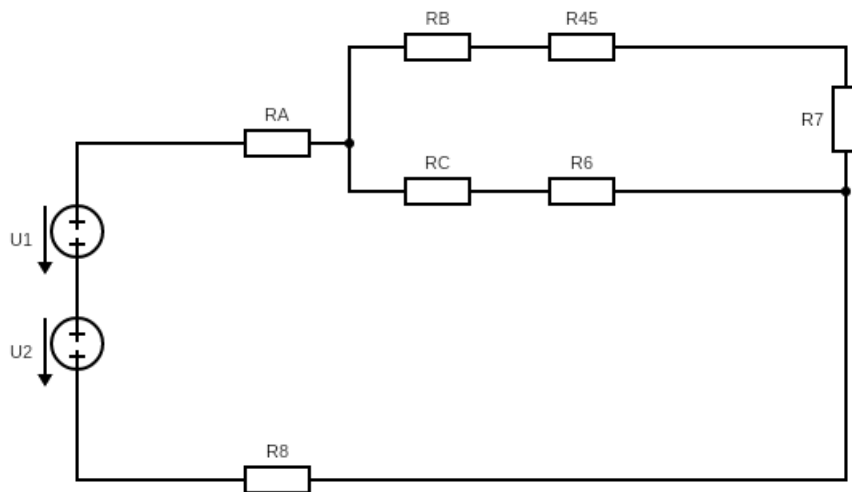


Sloučíme R_4 , R_5 (paralelně)



$$R_{45} = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5} = \frac{310 \cdot 575}{310 + 575} = 201.4124 \, \Omega$$

Provedeme transfiguraci trojúhelník \rightarrow hvězda pro odpory R_1, R_2, R_3



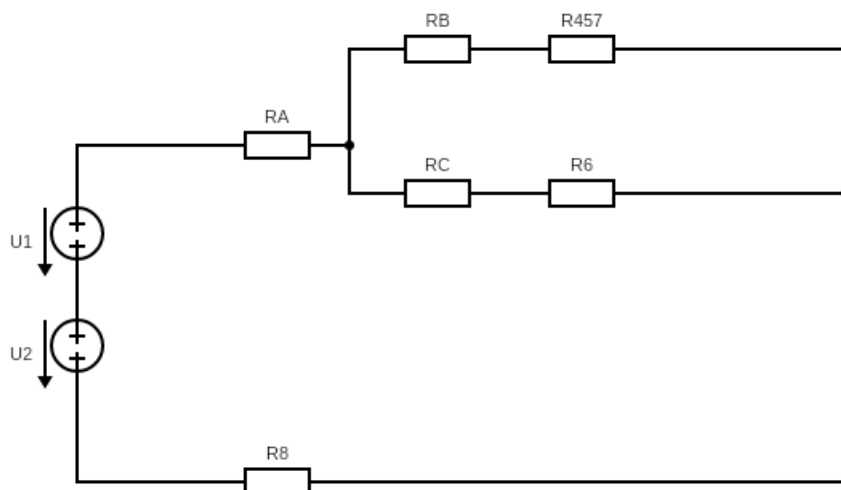
Spočítáme R_A, R_B, R_C :

$$R_A = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{680 \cdot 600}{680 + 600 + 260} = 264.9351 \, \Omega$$

$$R_B = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{680 \cdot 260}{680 + 600 + 260} = 114.8052 \, \Omega$$

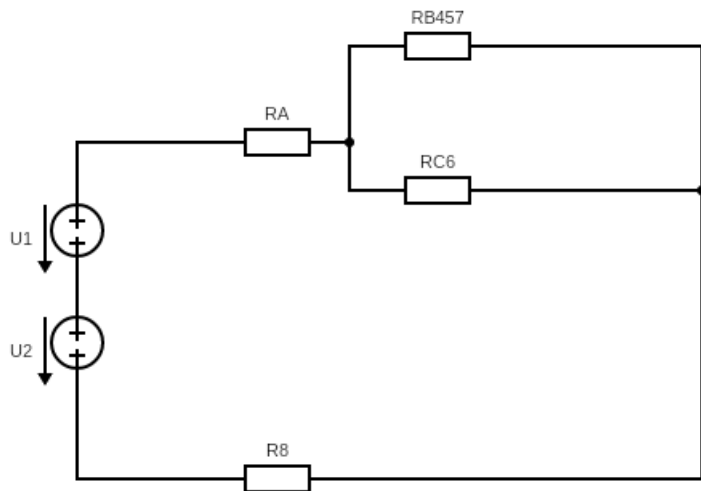
$$R_C = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{600 \cdot 260}{680 + 600 + 260} = 101.2987 \, \Omega$$

Sloučíme R_{45}, R_7 (sériově)



$$R_{457} = R_{45} + R_7 = 201.4124 + 355 = 556.4124 \, \Omega$$

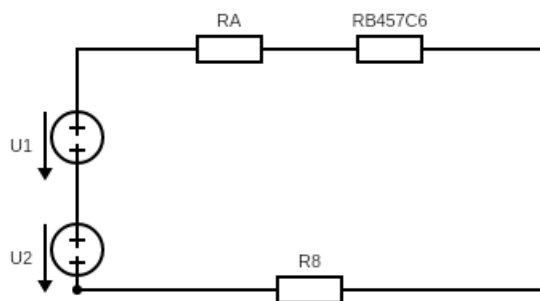
Sloučíme R_B , R_{457} (sériově) a R_6 , R_C (sériově)



$$R_{B457} = R_B + R_{457} = 114.8052 + 556.4124 = 671.2176 \, \Omega$$

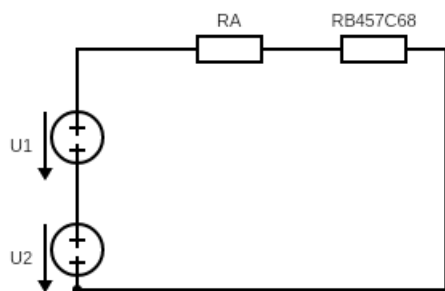
$$R_{C6} = R_C + R_6 = 101.2987 + 870 = 971.2987 \, \Omega$$

Sloučíme R_{B457} , R_{C6} (paralelně)

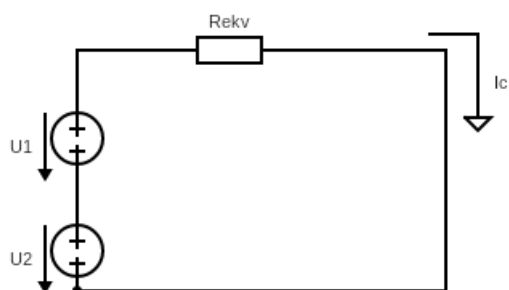


$$R_{B457C6} = \frac{R_{B457} \cdot R_{C6}}{R_{B457} + R_{C6}} = \frac{671.2176 \cdot 971.2987}{671.2176 + 971.2987} = 396.9232 \, \Omega$$

Zbytek je sériově:



$$R_{B457C68} = R_{B457C6} + R_8 = 396.9232 + 265 = 661.9232 \, \Omega$$



Spočítáme celkový proud v obvodu I_C

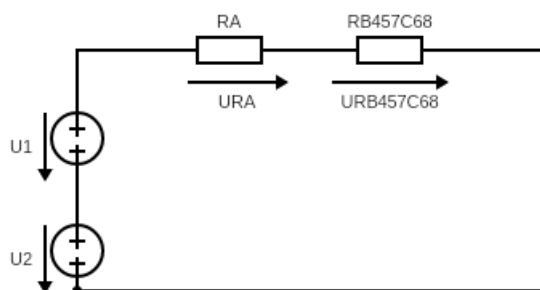
$$R_{ekv} = R_{B457C68} + R_A = 661.9232 + 264.9351 = 926.8583 \, \Omega$$

$$U = U_1 + U_2 = 135 + 80 = 215 \, \text{V}$$

$$U = U_1 + U_2 = 135 + 80 = 215 \, \text{V}$$

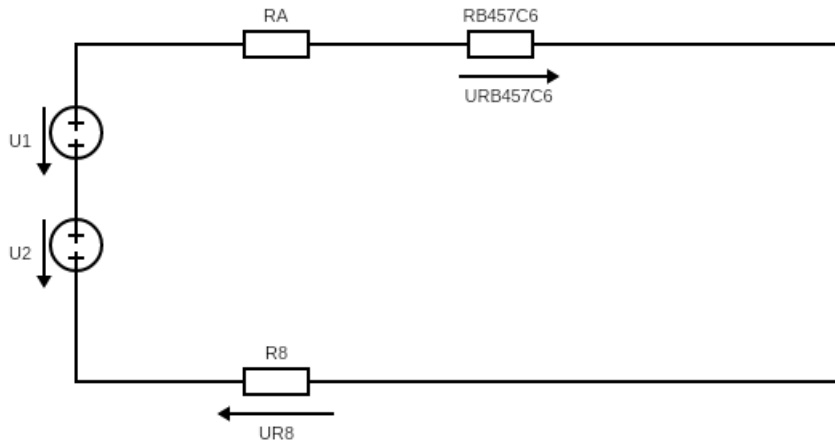
$$I_C = \frac{U}{R_{ekv}} = \frac{215}{926.8583} = 0.2320 \, \text{A}$$

Znovu sestavíme obvod a dopočítáme proudy a napětí:



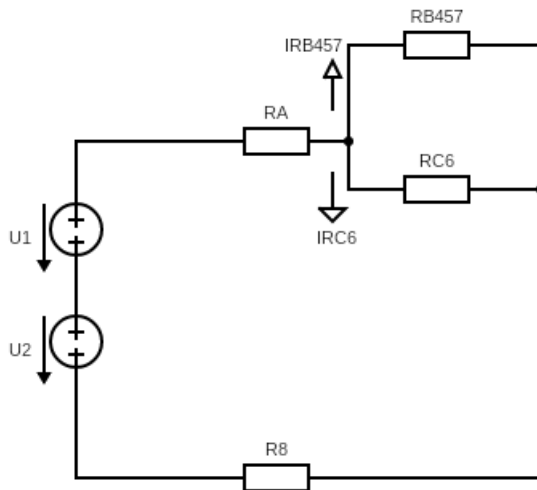
$$U_{RB457C68} = I_C \cdot R_{B457C68} = 0.232 \cdot 661.9232 = 153.5662 \, \text{V}$$

$$U_{RA} = I_C \cdot R_A = 0.232 \cdot 264.9351 = 61.4649 \, \text{V}$$



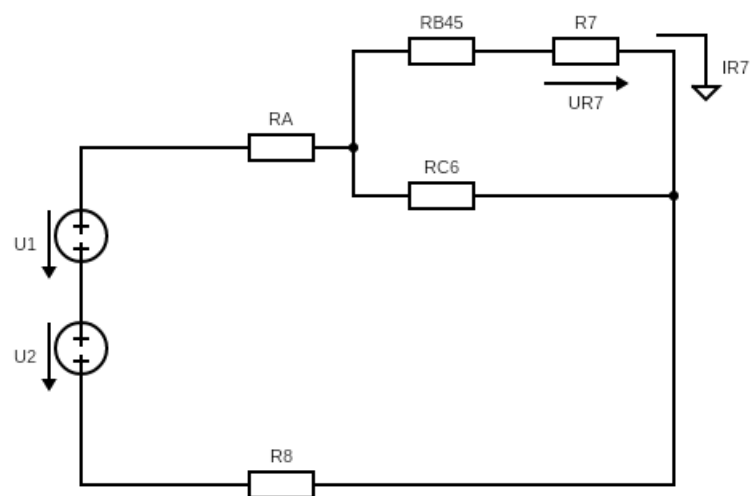
$$U_{R8} = I_C \cdot R_8 = 0.232 \cdot 265 = 61.48 \text{ V}$$

$$U_{RB457C6} = I_C \cdot R_{B457C6} = 0.232 \cdot 396.9232 = 92.0862 \text{ V}$$



$$I_{RB457} = \frac{U_{RB457C6}}{R_{B457}} = \frac{92.0862}{671.2176} = 0.1372 \text{ A}$$

$$I_{RC6} = \frac{U_{RB457C6}}{R_{C6}} = \frac{92.0862}{971.2987} = 0.0948 \text{ A}$$



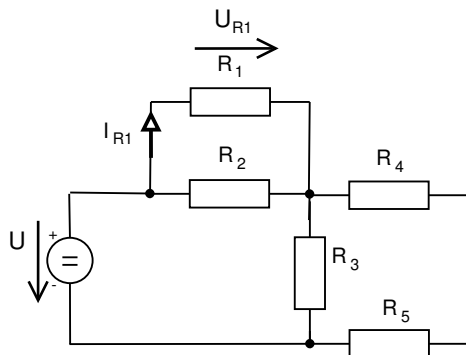
$$I_{R7} = I_{RB457} = 0.1372 \text{ A}$$

$$U_{R7} = I_{R7} \cdot R_7 = 0.1372 \cdot 355 = 48.706 \text{ V}$$

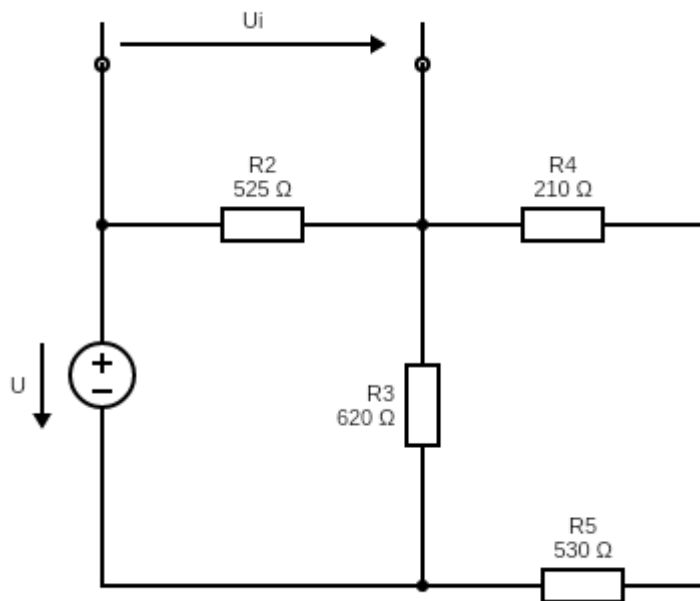
Příklad 2

Stanovte napětí U_{R1} a proud I_{R1} . Použijte metodu Théveninovy věty.

sk.	U [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
A	50	100	525	620	210	530

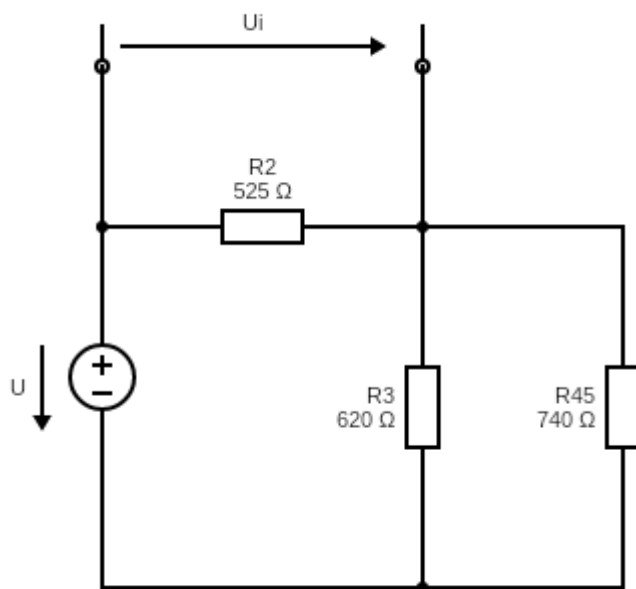


Zjistíme napětí "naprázdno" (U_i)



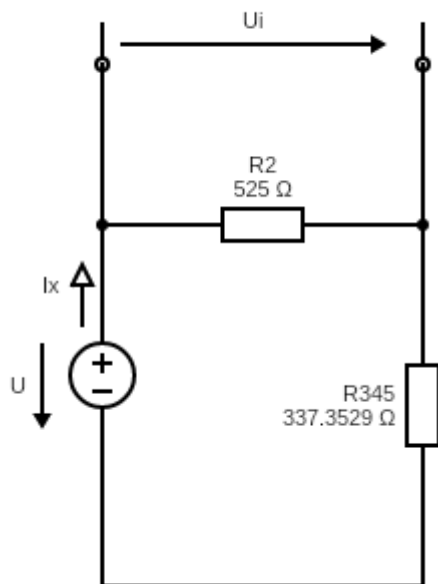
R_4 a R_5 sériově:

$$R_{45} = R_4 + R_5 = 210 + 530 = 740 \Omega$$



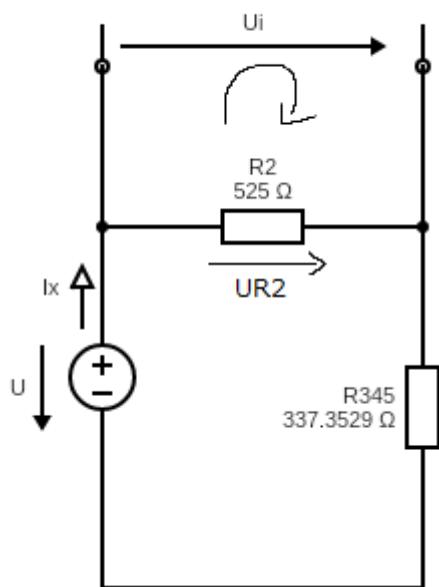
R_{45} a R_3 paralelně:

$$R_{345} = \frac{R_{45} \cdot R_3}{R_{45} + R_3} = \frac{740 \cdot 620}{740 + 620} = 337.3529 \, \Omega$$



Vypočítáme proud I_X

$$I_x = \frac{U}{R_2 + R_{345}} = \frac{50}{525 + 337.3529} = 0.05798 \, \text{A}$$



$$U_{R2} = I_x \cdot R_2 = 0.05798 \cdot 525 = 30.44 \text{ V}$$

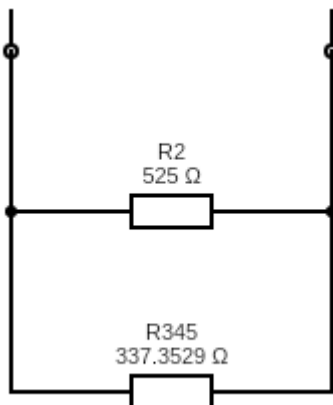
2. Kirchhoffův zákon:

$$U_i - U_{R2} = 0$$

$$U_i = U_{R2} = 30.44 \text{ V}$$

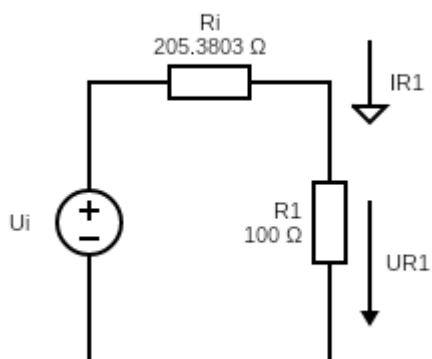
Výpočet odporu skutečného zdroje (R_i)

Zdroj zkratujeme, R_2 a R_{345} jsou paralelně:



$$R_i = \frac{R_2 \cdot R_{345}}{R_2 + R_{345}} = \frac{525 \cdot 337.3529}{525 + 337.3529} = 205.3803 \, \Omega$$

Náhradní obvod podle Théveninovy věty:



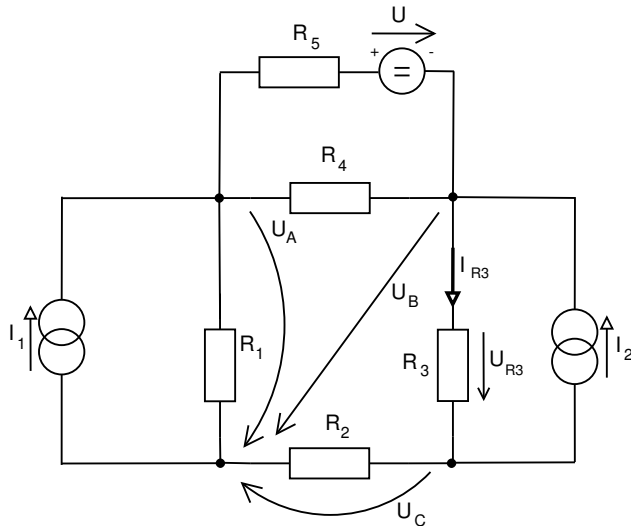
$$I_{R1} = \frac{U_i}{R_i + R_1} = \frac{30.44}{205.3803 + 100} = 0.09968 \, \text{A}$$

$$U_{R1} = I_{R1} \cdot R_1 = 0.09968 \cdot 100 = 9.968 \, \text{V}$$

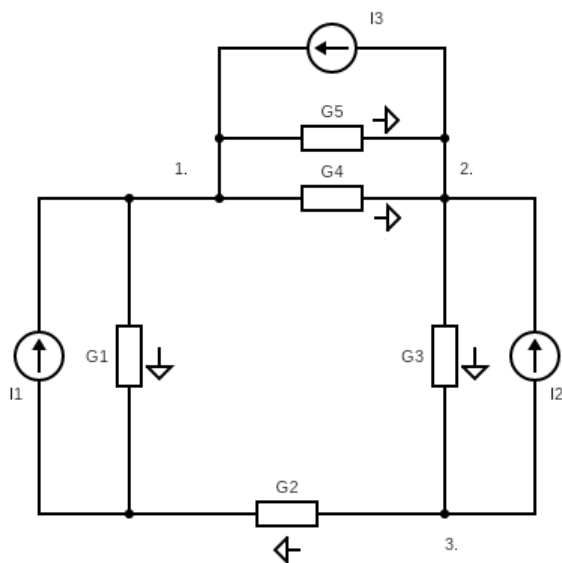
Příklad 3

Stanovte napětí U_{R3} a proud I_{R3} . Použijte metodu uzlových napětí (U_A, U_B, U_C).

sk.	U [V]	I_1 [A]	I_2 [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
D	115	0.6	0.9	50	38	48	37	28



Napěťový zdroj převedeme na proudový a odpory nahradíme vodivostí ($G = \frac{1}{R}$):



Sestavíme si rovnice pro uzly 1, 2, 3 podle II. Kirchhoffova zákona:

$$\begin{aligned}
 -G_1 U_A - G_4 (U_A - U_B) - G_5 (U_A - U_B) + I_3 + I_1 &= 0 \\
 -G_3 (U_B - U_C) + G_5 (U_A - U_B) + G_4 (U_A - U_B) - I_3 + I_2 &= 0 \\
 G_3 (U_B - U_C) - G_2 U_C - I_2 &= 0
 \end{aligned}$$

Po úpravě:

$$\begin{aligned}(-G_1 - G_4 - G_5)U_A + (G_4 + G_5)U_B &= -I_1 - I_3 \\(G_4 + G_5)U_A + (-G_3 - G_5 - G_4)U_B + G_3U_C &= I_3 - I_2 \\G_3U_B + (-G_3 - G_2)U_C &= I_2\end{aligned}$$

Přepíšeme soustavu do maticové reprezentace:

$$\begin{pmatrix} -G_4 - G_5 - G_1 & G_4 + G_5 & 0 \\ G_4 + G_5 & -G_3 - G_5 - G_4 & G_3 \\ 0 & G_3 & -G_3 - G_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_1 - I_3 \\ I_3 - I_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Dosadíme:

$$\begin{pmatrix} -\frac{2143}{25900} & \frac{65}{1036} & 0 \\ \frac{65}{1036} & -\frac{1039}{12432} & \frac{1}{48} \\ 0 & \frac{1}{48} & -\frac{43}{912} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{659}{140} \\ \frac{449}{140} \\ \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

Spočítáme U_A, U_B, U_C pomocí Cramerova pravidla:

$$\begin{vmatrix} -\frac{2143}{25900} & \frac{65}{1036} & 0 \\ \frac{65}{1036} & -\frac{1039}{12432} & \frac{1}{48} \\ 0 & \frac{1}{48} & -\frac{43}{912} \end{vmatrix} = \det = -0.00010452651$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{659}{140} & \frac{65}{1036} & 0 \\ \frac{449}{140} & -\frac{1039}{12432} & \frac{1}{48} \\ \frac{9}{10} & \frac{1}{48} & -\frac{43}{912} \end{vmatrix} = \det U_A = -0.0058415676$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{2143}{25900} & -\frac{659}{140} & 0 \\ \frac{65}{1036} & \frac{449}{140} & \frac{1}{48} \\ 0 & \frac{9}{10} & -\frac{43}{912} \end{vmatrix} = \det U_B = 0.00013838227$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{2143}{25900} & \frac{65}{1036} & -\frac{659}{140} \\ \frac{65}{1036} & -\frac{1039}{12432} & \frac{449}{140} \\ 0 & \frac{1}{48} & \frac{9}{10} \end{vmatrix} = \det U_C = 0.00205638674$$

$$U_A = \frac{\det U_A}{\det} = 55.886 \text{ V}$$

$$U_B = \frac{\det U_B}{\det} = -1.3239 \text{ V}$$

$$U_C = \frac{\det U_C}{\det} = -19.6733 \text{ V}$$

Dopočíáme U_{R3} , I_{R3} :

$$U_{R3} = U_B - U_C = -1.3239 + 19.6733 = 18.3494 \text{ V}$$

$$I_{R3} = \frac{U_{R3}}{R_3} = \frac{18.3494}{48} = 0.3823 \text{ A}$$

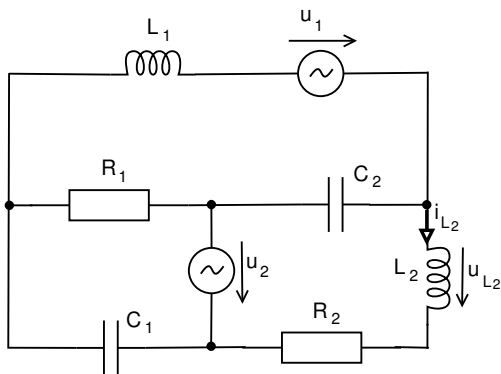
Příklad 4

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$.

Ve vztahu pro napětí $u_{L_2} = U_{L_2} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{L_2})$ určete $|U_{L_2}|$ a φ_{L_2} . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [μ F]	C_2 [μ F]	f [Hz]
H	5	6	10	10	160	75	155	70	95



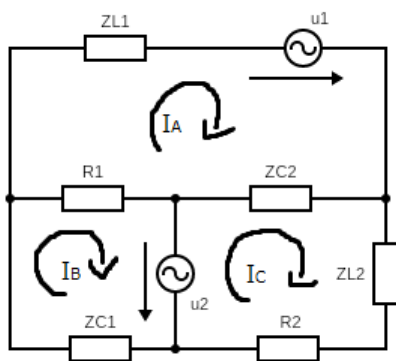
Vyjádříme impedance kondenzátorů a cívek:

$$Z_{L1} = j\omega L_1$$

$$Z_{L2} = j\omega L_2$$

$$Z_{C1} = j\frac{-1}{\omega C_1}$$

$$Z_{C2} = j\frac{-1}{\omega C_2}$$



Sestavíme rovnice pro smyčkové proudy I_A , I_B , I_C

Smyčka I_A :

$$Z_{L1}I_A + U_1 + Z_{C2}(I_A - I_C) + R_1(I_A - I_B) = 0$$

Smyčka I_B :

$$-R_1(I_A - I_B) + U_2 + Z_{C1}I_B = 0$$

Smyčka I_C :

$$-Z_{C2}(I_A - I_C) + Z_{L2}I_C + R_2I_C - U_2 = 0$$

Po úpravě:

$$(Z_{L1} + Z_{C2} + R_1)I_A - R_1I_B - Z_{C2}I_C = -U_1$$

$$-R_1I_A + (R_1 + Z_{C1})I_B = -U_2$$

$$-Z_{C2}I_A + (Z_{C2} + Z_{L2} + R_2)I_C = U_2$$

Převédeme do maticové reprezentace:

$$\begin{pmatrix} Z_{L1} + Z_{C2} + R_1 & -R_1 & -Z_{C2} \\ -R_1 & R_1 + Z_{C1} & 0 \\ -Z_{C2} & 0 & Z_{C2} + Z_{L2} + R_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_1 \\ -U_2 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

Dosadíme:

$$\begin{pmatrix} j\omega L_1 + j\frac{-1}{\omega C_2} + 10 & -10 & -j\frac{-1}{\omega C_2} \\ -10 & 10 + j\frac{-1}{\omega C_1} & 0 \\ -j\frac{-1}{\omega C_2} & 0 & j\frac{-1}{\omega C_2} + j\omega L_2 + 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Spočítáme I_A , I_B , I_C pomocí Cramerova pravidla:

$$\begin{vmatrix} j\omega L_1 + j\frac{-1}{\omega C_2} + 10 & -10 & -j\frac{-1}{\omega C_2} \\ -10 & 10 + j\frac{-1}{\omega C_1} & 0 \\ -j\frac{-1}{\omega C_2} & 0 & j\frac{-1}{\omega C_2} + j\omega L_2 + 10 \end{vmatrix} = \det =$$

$$= (j\omega L_1 + j\frac{-1}{\omega C_2}) \cdot (10 + j\frac{-1}{\omega C_1}) \cdot (j\frac{-1}{\omega C_2} + j\omega L_2 + 10) - (-j\frac{-1}{\omega C_2}) \cdot (10 + j\frac{-1}{\omega C_1}) \cdot (-j\frac{-1}{\omega C_2}) - (100 \cdot [j\frac{-1}{\omega C_2} + j\omega L_2 + 10])$$

$$\begin{vmatrix} -5 & -10 & -j\frac{-1}{\omega C_2} \\ -6 & 10 + j\frac{-1}{\omega C_1} & 0 \\ 6 & 0 & j\frac{-1}{\omega C_2} + j\omega L_2 + 10 \end{vmatrix} = \det I_A =$$

$$= -5 \cdot (10 + j\frac{-1}{\omega C_1}) \cdot (j\frac{-1}{\omega C_2} + j\omega L_2 + 10) - (-j\frac{-1}{\omega C_2}) \cdot [10 + j\frac{-1}{\omega C_1}] \cdot 6 - (j\frac{-1}{\omega C_2} + j\omega L_2 + 10) \cdot -10 \cdot -6$$

$$\begin{vmatrix} j\omega L_1 + j\frac{-1}{\omega C_2} + 10 & -5 & -j\frac{-1}{\omega C_2} \\ -10 & -6 & 0 \\ -j\frac{-1}{\omega C_2} & 6 & j\frac{-1}{\omega C_2} + j\omega L_2 + 10 \end{vmatrix} = \det I_B =$$

$$= (j\omega L_1 + j\frac{-1}{\omega C_2} + 10) \cdot -6 \cdot [j\frac{-1}{\omega C_2} + j\omega L_2 + 10] + (-10 \cdot 6 \cdot [-j\frac{-1}{\omega C_2}]) - ([-j\frac{-1}{\omega C_2}] \cdot -6 \cdot [-j\frac{-1}{\omega C_2}]) - (-5 \cdot -10 \cdot [j\frac{-1}{\omega C_2} + j\omega L_2 + 10])$$

$$\begin{vmatrix} j\omega L_1 + j\frac{-1}{\omega C_2} + 10 & -10 & -5 \\ -10 & 10 + j\frac{-1}{\omega C_1} & -6 \\ -j\frac{-1}{\omega C_2} & 0 & 6 \end{vmatrix} = \det I_C =$$

$$= (j\omega L_1 + j\frac{-1}{\omega C_2} + 10) \cdot (10 + j\frac{-1}{\omega C_1}) \cdot 6 + (-10 \cdot -6 \cdot [-j\frac{-1}{\omega C_2}]) - (-5 \cdot [10 + j\frac{-1}{\omega C_1}] \cdot [-j\frac{-1}{\omega C_2}]) - (-10 \cdot -10 \cdot 6)$$

Dosadíme ω , $L_{1,2}$, $C_{1,2}$ a spočítáme I_A , I_B , I_C

$$I_A = \frac{\det I_A}{\det} = -0.21050 + 0.22551j$$

$$I_B = \frac{\det I_B}{\det} = -0.48622 - 0.30002j$$

$$I_C = \frac{\det I_C}{\det} = 0.40993 - 0.35027j$$

Dopočítáme u_{L2} :

$$u_{L2} = I_C \cdot Z_{L2} = (0.40993 - 0.35027j) \cdot j\omega L_2$$

$$u_{L2} = 15.68078 + 18.35162j \text{ V}$$

Spočítáme amplitudu $|U_{L2}|$:

$$|U_{L2}| = \sqrt{15.68078^2 + 18.35162^2}$$

$$|U_{L2}| = 24.139 \text{ V}$$

Spočítáme fázový posuv φ :

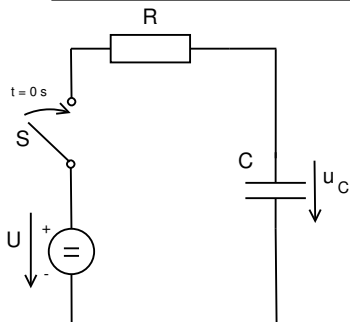
$$\varphi_{L2} = \arctan \frac{15.68078}{18.35162}$$

$$\varphi_{L2} = 0.707 \text{ rad} = 40.5126^\circ$$

Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0$ [s] sepne spínač S . Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $u_C = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

sk.	U [V]	R [Ω]	C [F]	$u_C(0)$ [V]
A	60	50	10	14



Popíšeme obvod rovnicemi:

$$u_R + u_C - U = 0 \quad (1)$$

$$u_R = i \cdot R \quad (2)$$

$$u'_C = \frac{i}{C} \quad (3)$$

Vyjádríme u_R z (1) a dosadíme do (2):

$$U - u_C = i \cdot R \quad (4)$$

Vyjádríme i z (4) a dosadíme do (3):

$$u'_C = \frac{U - u_C}{RC}$$

Převédeme u_C na levou stranu:

$$u'_C + \frac{1}{RC} \cdot u_C = \frac{U}{RC} \quad (5)$$

Vyjádríme λ z charakteristické rovnice:

$$\lambda + \frac{1}{RC} = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{RC}$$

Očekávané řešení:

$$u_C = K(t) \cdot e^{\lambda t} \implies u_C = K(t) \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Zderivujeme u_C :

$$u'_C = K'(t) \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} + K(t) \cdot \left(-\frac{1}{RC}\right) e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Dosadíme u'_C a u_C do (5):

$$K'(t) \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} + K(t) \cdot \left(-\frac{1}{RC}\right)e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{1}{RC} \cdot K(t) \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{U}{RC}$$

Upravíme na:

$$K'(t) \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{U}{RC}$$

Integrujeme, abychom získali $K(t)$:

$$\int K'(t) = \int \frac{1}{RC} \cdot U \cdot e^{\frac{1}{RC}t}$$

$$K(t) = U \cdot e^{\frac{1}{RC}t} + k$$

$K(t)$ dosadíme do očekávaného řešení:

$$u_C = (U \cdot e^{\frac{1}{RC}t} + k) \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Upravíme:

$$u_C = U + k \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (6)$$

Dosadíme počáteční podmínku ($t = 0$):

$$u_C(0) = U + k \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot 0}$$

$$u_C(0) = U + k$$

Vyjádříme k :

$$k = u_C(0) - U$$

k dosadíme do (6):

$$u_C = U + (u_C(0) - U) \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Dosadíme známe hodnoty a máme výsledek:

$$\underline{u_C = 60 - 46 \cdot e^{-\frac{1}{500}t}}$$

Zkouška:

Vrátíme se k rovnici (5):

$$u'_C + \frac{1}{RC} \cdot u_C = \frac{U}{RC} \quad (5)$$

Derivujeme u_C :

$$u'_C = -46 \cdot -\left(\frac{1}{500}\right) \cdot e^{-\frac{1}{500}t}$$

Dosadíme u_C a u'_C do (5):

$$-46 \cdot -\left(\frac{1}{500}\right) \cdot e^{-\frac{1}{500}t} + \frac{1}{500} \cdot (60 - 46 \cdot e^{-\frac{1}{500}t}) = \frac{60}{500}$$

$$\frac{46}{500} \cdot e^{-\frac{1}{500}t} - \frac{46}{500} \cdot e^{-\frac{1}{500}t} + \frac{60}{500} = \frac{60}{500}$$

$$\frac{60}{500} = \frac{60}{500}$$

Shrnutí výsledků

Příklad	Skupina	Výsledky
1	H	$U_{R7} = 48.706 \text{ V}$ $I_{R7} = 0.1372 \text{ A}$
2	A	$U_{R1} = 9.968 \text{ V}$ $I_{R1} = 0.09968 \text{ A}$
3	D	$U_{R3} = 18.3494 \text{ V}$ $I_{R3} = 0.3823 \text{ A}$
4	H	$ U_{L2} = 24.139 \text{ V}$ $\varphi_{L2} = 0.707 \text{ rad}$
5	A	$u_C = 60 - 46 \cdot e^{-\frac{1}{500}t}$