1 PENDAHULUAN

1.1 Sistem Bilangan Real

Untuk mempelajari kalkulus perlu memahami bahasan tentang system bilangan real, karena kalkulus didasarkan pada system bilangan real dan sifat-sifatnya.

Sistem bilangan yang paling sederhana adalah **bilangan asli**, yaitu 1, 2, 3, ... Dengan menggunakan bilangan asli kita dapat menghitung banyaknya buku yang kita miliki, kendaraan yang melalui suatu jalan, orang-orang yang berada dalam suatu ruang dan lain-lainnya. Himpunan semua bilangan asli biasa dinotasikan dengan N. Jadi

$$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

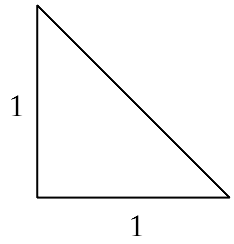
Jika di dalam himpunan semua bilangan asli kita tambahkan semua negatifnya dan nol, maka diperoleh **bilangan-bilangan bulat**, yaitu …, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, … Himpunan semua bilangan bulat biasa disimbolkan dengan Z. Jadi

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Selanjutnya untuk mengukur besaran-besaran seperti panjang, berat dan arus listrik maka bilangan bulat tidak memadai. Dalam hal ini bilangan bulat tidak dapat memberikan ketelitian yang cukup. Untuk keperluan ini maka dapat digunakan **bilangan-bilangan rasional**, seperti $\frac{3}{4}, \frac{-2}{5}, \frac{19}{2}$, dan $\frac{7}{8}$. Bilangan rasional didefinisikan sebagai *bilangan yang dapat ditulis dengan* $\frac{a}{b}$ *dengan a dan b keduanya bilangan bulat dan* $b \neq 0$. Dengan demikian bilangan-bilangan bulat termasuk bilangan rasional juga. Bilangan bulat 3 merupakan bilangan rasional sebab 3 dapat ditulis sebagai $\frac{6}{2}$. Himpunan semua bilangan rasional biasa dinotasikan dengan Q. Jadi

$$Q = \{ \frac{a}{b} \mid a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$$

Bilangan rasional yang dapat menjadi ukuran dengan ketelitian yang cukup ternyata masih tidak dapat menjadi ukuran semua besaran misalnya panjang sisi miring segitiga siku-siku berikut.



Gambar 1

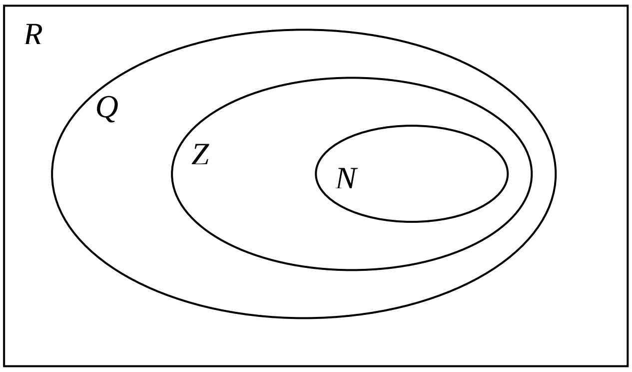
Dengan menggunakan **bilangan irrasional** maka hal tersebut di atas tidak menjadi masalah. Panjang sisi miring segitiga siku-siku tersebut adalah $\sqrt{2}$. Bilangan irrasional yang lain antara lain $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, e dan π.

Sekumpulan bilangan rasional dan irrasional beserta negatifnya dan nol **bilangan-bilangan real** (bilangan nyata). Himpunan semua bilangan real dinotasikan dengan R.

Hubungan keempat himpunan N, Z, Q, dan R dapat dinyatakan dengan

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

dan digambarkan dengan diagram venn berikut.



Gambar 2

Masih terdapat sistem bilangan yang lebih luas dari system bilangan real yaitu bilangan yang secara umum dapat dinyatakan dalam bentuk $a + b\sqrt{-1}$ dengan a dan b keduanya bilangan bulat, atau $a + bi$ dengan $i = \sqrt{-1}$. Bilangan demikian dinamakan **bilangan kompleks** dan himpunan semua bilangan kompleks dinotasikan dengan C.

Dalam buku ini bilangan kompleks tidak dibicarakan lebih lanjut. Jadi, apabila dalam buku ini disebutkan suatu bilangan tanpa keterangan apapun dimaksudkan adalah bilangan real.

1.2 Operasi Bilangan

Pada R telah dikenal operasi *penjumlahan* dan *perkalian*. Misalkan x dan y bilangan real maka penjumlahan x dan y ditulis $x + y$ dan perkalian x dan y ditulis $x \cdot y$ atau secara singkat ditulis xy. Sifat-sifat operasi penjumlahan dan perkalian pada R adalah sebagai berikut.

1) Hukum komutatif: $x + y = y + x$ dan $xy = yx$.
2) Hukum asosiatif: $x + (y + z) = (x + y) + z$ dan $x(yz) = (xy)z$.
3) Hukum distributif: $x(y + z) = xy + xz$.
4) Elemen-elemen identitas:
   Terhadap penjumlahan: 0 sebab $x + 0 = x$.
   Terhadap perkalian: 1 sebab $x.1 = x$.
5) Invers (balikan):
   Setiap bilangan real x mempunyai *invers aditif* (disebut juga *negatif*) $-x$ yang memenuhi $x + -x = 0$ dan setiap bilangan real x yang <u>tidak</u> nol mempunyai *invers multiplikatif* (disebut juga balikan) yaitu x^{-1} yang memenuhi $x.\, x^{-1} = 1$.

Pengurangan dan *pembagian* didefinisikan dengan

$$x - y = x + (-y)$$

dan

$$\frac{x}{y} = x.\, y^{-1}$$

1.3 Urutan

Bilangan-bilangan real bukan nol dibedakan menjadi dua himpunan terpisah yaitu bilangan-bilangan real positif dan bilangan-bilangan real negatif. Berdasarkan fakta ini diperkenalkan relasi *urutan* $<$ (dibaca "kurang dari") yang didefinisikan dengan:

$$x < y \text{ jika dan hanya jika } y - x \text{ positif.}$$

$x < y$ mempunyai arti yang sama dengan $y > x$.

Sifat-sifat urutan:

1) Trikotomi: Jika x dan y bilangan-bilangan real maka pasti berlaku salah satu di antara yang berikut:

$$x < y \text{ atau } x = y \text{ atau } x > y.$$

2) Transitif: jika $x < y$ dan $y < z$ maka $x < z$.
3) Penambahan: $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$
4) Perkalian:
   Jika z positif maka $x < y \Leftrightarrow xz < yz$
   Jika z negatif maka $x < y \Leftrightarrow xz > yz$

Relasi *urutan* $\leq$ (dibaca "kurang dari atau sama dengan") didefinisikan dengan:

$$x \leq y \text{ jika dan hanya jika } y - x \text{ positif atau nol.}$$

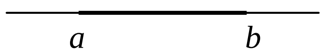
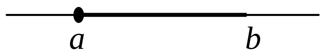
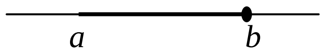
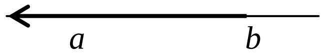
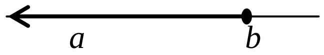
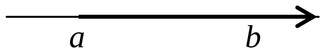
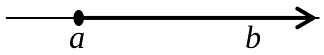
Sifat-sifat ini adalah:

1) Transitif: jika $x \leq y$ dan $y \leq z$ maka $x \leq z$.
2) Penambahan: $x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$
3) Perkalian:
   Jika z positif maka $x \leq y \Leftrightarrow xz \leq yz$
   Jika z negatif maka $x \leq y \Leftrightarrow xz \geq yz$

1.4. Pertidaksamaan

Pertidaksamaan merupakan kalimat terbuka yang menggunakan relasi $<$, $>$, $\leq$ atau $\geq$. Penyelesaian suatu pertidaksamaan adalah semua bilangan yang memenuhi pertidaksamaan tersebut yang biasanya merupakan interval atau gabungan interval-interval. Mengenai interval dapat dijelaskan sebagai berikut.

Interval terbuka (a,b) adalah himpunan semua bilangan real yang lebih besar dari a dan kurang dari b. Jadi $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$. Sedangkan interval tertutup $[a,b]$ adalah himpunan semua bilangan real yang lebih besar atau sama dengan a dan kurang atau sama dengan b. Jadi $[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$. Beberapa interval ditunjukkan dalam daftar berikut.

Penulisan Interval	Penulisan Himpunan	Dalam Garis Bilangan
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	
$(-\infty, \infty)$	R	

Contoh Pertidaksamaan

1) $2x - 7 < 4x - 2$
2) $-5 \leq 2x + 6 < 4$
3) $x^2 - x - 6 < 0$
4) $3x^2 - x - 2 > 0$
5) $\dfrac{2x-5}{x-2} \leq 1$

Contoh 1

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $2x - 7 < 4x - 2$.

Penyelesaian: $2x - 7 < 4x - 2$

$\Leftrightarrow \quad 2x < 4x + 5$

$\Leftrightarrow \quad -2x < 5$

$\Leftrightarrow \quad x > -\frac{5}{2}$

Hp: interval $(-\frac{5}{2}, \infty) = \{x \mid x > -\frac{5}{2}\}$

Contoh 2

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $-5 \le 2x + 6 < 4$.

Penyelesaian: $-5 \le 2x + 6 < 4$

$\Leftrightarrow -11 \le 2x < -2$

$\Leftrightarrow -\frac{11}{2} \le x < -1$

Hp: interval $[-\frac{11}{2}, -1) = \{x \mid -\frac{11}{2} \le x < -1\}$

Contoh 3

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $x^2 - x - 6 < 0$.

Penyelesaian: $x^2 - x - 6 < 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 2) < 0$

+ + | – – – | + +

–2 3

Hp: interval $(-2, 3) = \{x \mid -2 < x < 3\}$

Contoh 4

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $3x^2 - x - 2 > 0$

Penyelesaian: $3x^2 - x - 2 > 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(3x + 2) > 0$

+ + | – – – | + +

$-\frac{2}{3}$ 1

Hp: interval $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (1, \infty) = \{x \mid x < -\frac{2}{3} \text{ atau } x > 1\}$

Contoh 5

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\frac{2x-5}{x-2} \le 1$

Penyelesaian: $\frac{2x-5}{x-2} \le 1$

$\Leftrightarrow \frac{2x-5}{x-2} - 1 \le 0$

$\Leftrightarrow \frac{2x-5-(x-2)}{x-2} \le 0$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{x-3}{x-2} \le 0$$

$\Leftrightarrow$ $(x - 3)(x - 2) \le 0$ dengan syarat $x \ne 2$ (mengapa?)

$$\begin{array}{ccccc} + \; + & | & - \; - \; - & | & + \; + \\ & 2 & & 3 & \end{array}$$

Hp: interval (2, 3] = $\{x \mid 2 < x \le 3\}$

1.5 Nilai Mutlak

Konsep nilai mutlak sangat diperlukan untuk mempelajari kalkulus. Oleh karena pembaca yang ingin memahami betul konsep-konsep dalam kalkulus disarankan mempunyai ketrampilan dalam bekerja menggunakan nilai mutlak.

Definisi:

Nilai mutlak bilangan real x, ditulis $|x|$ didefinisikan dengan

$$|x| = \begin{cases} x & \textit{jika } x \ge 0 \\ -x & \textit{jika } x < 0 \end{cases}$$

Misal: $|5| = 5$, $|-5| = -(-5) = 5$, $|0| = 0$

Sifat-sifat nilai mutlak

1) $|ab| = |a||b|$
2) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
3) $|a+b| \le |a| + |b|$ (*ketidaksamaan segitiga*)
4) $|a-b| \ge \big||a| - |b|\big|$

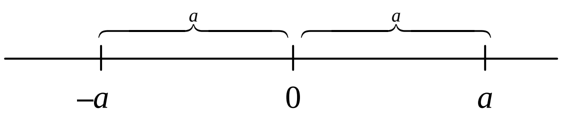
Pertidaksamaan yang memuat nilai mutlak

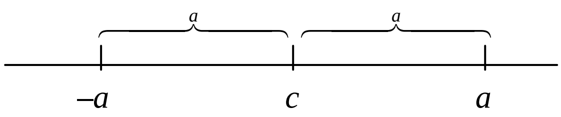
Untuk menyelesaikan pertidaksamaan yang memuat nilai mutlak dapat digunakan teorema berikut.

Teorema:

1. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
2. $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ atau $x > a$.

Secara fisis $|x|$ dapat menyatakan jarak x ke 0, sehingga x yang memenuhi $|x| < a$ menyatakan x yang jaraknya ke 0 kurang dari a.
Secara fisis $|x - c|$ dapat menyatakan jarak x ke c, sehingga x yang memenuhi $|x - c| < a$ menyatakan x yang jaraknya ke c kurang dari a.





Contoh 1

Tentukan penyelesaian $|x| < 3$.

Penyelesaian:

Nilai x yang memenuhi $-3 < x < 3$ merupakan penyelesaian pertidaksamaan $|x| < 3$.

Gambarkan penyelesaian pertidaksamaan tersebut pada garis bilangan.

Contoh 2

Tentukan penyelesaian pertidaksamaan $|x - 2| < 3$.

Penyelesaian:

$$|x - 2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3$$
$$\Leftrightarrow -3 + 2 < x < 3 + 2$$
$$\Leftrightarrow -1 < x < 5$$

Jadi, penyelesaiannya adalah x yang memenuhi $-1 < x < 5$. Gambarkan pada garis bilangan penyelesaian pertidaksamaan ini.

Contoh 3

Tentukan penyelesaian pertidaksamaan $|3x-5| \geq 1$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} |3x-5| \geq 1 &\Leftrightarrow 3x - 5 \leq -1 \text{ atau } 3x - 5 \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x \leq 4 \quad \text{atau} \quad 3x \geq 6 \\ &\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{4}{3} \quad \text{atau} \quad x \geq 2 \end{aligned}$$

Jadi, penyelesaiannya adalah x yang memenuhi $x \leq \frac{4}{3}$ atau $x \geq 2$. Gambarkan pada garis bilangan penyelesaian pertidaksamaan ini.

Contoh 4

Andaikan ε (epsilon) adalah bilangan positif.

Tunjukkan bahwa $|x-2| < \frac{\varepsilon}{5} \Leftrightarrow |5x-10| < \varepsilon$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} |x-2| < \frac{\varepsilon}{5} &\Leftrightarrow 5|x-2| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |5||x-2| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |5(x-2)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |5x-10| < \varepsilon \end{aligned}$$

Contoh 5

Andaikan ε (epsilon) adalah bilangan positif, carilah bilangan positif δ sedemikian sehingga $|x-3| < \delta \Rightarrow |6x-18| < \varepsilon$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} |6x-18| < \varepsilon &\Leftrightarrow |6(x-3)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |6||x-3| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow 6|x-3)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{6} \end{aligned}$$

Oleh karena itu dapat dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$.

Secara mundur dapat dilihat bahwa $|x-3| < \delta \Rightarrow |6x-18| < \varepsilon$.

Terkait dengan bilangan akar pangkat dua dapat dinyatakan bahwa

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

SOAL 1

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan berikut dan gambarkan himpunan penyelesaiannya pada garis bilangan.

1. $4x - 7 < 3x - 5$
2. $2x + 16 < x + 25$
3. $7x - 1 \leq 10x + 4$
4. $6x - 10 \geq 5x - 16$
5. $10x + 1 > 8x + 5$
6. $-6 < 2x + 3 < -1$
7. $-3 < 4x - 9 < 11$
8. $3x + 2 < 5x + 1 < 16$
9. $2x - 4 \leq 6 - 7x \leq 3x + 6$
10. $x^2 + x - 12 < 0$
11. $x^2 - 5x + 6 > 0$
12. $3x^2 - 11x - 4 \leq 0$
13. $2x^2 + 7x - 15 \geq 0$
14. $\dfrac{x+5}{2x-1} \leq 0$
15. $\dfrac{2x-3}{x+1} > 0$
16. $(x + 2)(2x - 1)(3x + 7) \geq 0$
17. $x^3 - 5x^2 - 6x < 0$
18. $(x + 5)(x + 2)^2(2x - 1) > 0$
19. $\dfrac{x-2}{x+4} < 2$
20. $\dfrac{2x-1}{x-3} \geq 1$
21. $|x+1| < 4$
22. $|3x+4| < 8$
23. $\left|\dfrac{x}{3} - 2\right| \leq 6$
24. $|4x+2| \geq 10$
25. $|2-4x| \geq 10$
26. $\left|\dfrac{3x}{5} + 1\right| \leq 4$
27. $\left|\dfrac{x}{2} + 7\right| > 2$
28. $\left|1 - \dfrac{3x}{5}\right| \leq 4$
29. $\left|2 + \dfrac{5}{x}\right| > 1$
30. $\left|\dfrac{1}{x} - 3\right| > 6$.

Buktikan bahwa implikasi yang ditunjukkan adalah benar

31. $|x-3|<0{,}5 \Rightarrow |5x-15|<2{,}5$.

32. $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{6} \Rightarrow |6x-12|<\varepsilon$.

33. $|x+4|<\dfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |2x+8|<\varepsilon$.

Dalam soal berikut, jika ε bilangan positif, carilah bilangan positif δ sedemikian sehingga implikasi yang diberikan benar.

34. $|x-5|<\delta \Rightarrow |3x-15|<\varepsilon$

35. $|x-2|<\delta \Rightarrow |(4x-5)-3|<\varepsilon$