

《方兆本随机过程第三版》答案整理

ypa

2022 年 12 月 19 日起
Last Modified: 2023 年 10 月 22 日

0 前言

尚未完成的题目:

(一) 本章已全部完成

(二) 本章已全部完成

(三) 3.25-3.31

(四) 4.9 4.18 4.19 4.30 4.32 4.33 4.35-4.42

第三章 Markov 过程中纯生过程、生灭过程、分支过程不讲；第四章平稳过程中白噪声序列、 $AR(p)$ 模型、Yule-Walker 方程等不讲

欢迎访问主页<http://home.ustc.edu.cn/~cc22155> 本答案的 PDF 文件和 LaTeX 文件可在主页下载,

- <http://home.ustc.edu.cn/~cc22155/resource/SPanswer.pdf>
- <http://home.ustc.edu.cn/~cc22155/resource/SPanswer.zip>

如有错漏, 欢迎联系lzw2003@mail.ustc.edu.cn

目录

0 前言	1
1 第一章 引论	2
2 第二章 Poisson 过程	12
3 第三章 Markov 过程	23
4 第四章 平稳过程	42
参考文献	59
A 符号说明	60

1 第一章 引论

1.1 令 $X(t)$ 为二阶矩存在的随机过程. 试证它是宽平稳的当且仅当 $\mathbb{E}[X(s)]$ 与 $\mathbb{E}[X(s)X(s+t)]$ 都不依赖 s .

Solution

充分性:

若 $\mathbb{E}[X(s)]$ 与 $\mathbb{E}[X(s)X(s+s')]$ 都不依赖 s

则 $\mathbb{E}[X(s)] = \text{常数 } m, \mathbb{E}[X(s)X(s+s')] = f(t)$

令 $s' = s + t$,

$$\therefore \mathbb{E}[X(s)X(s')] = f(s' - s)$$

$$\begin{aligned}\therefore R_X(s, s') &= \mathbb{E}[X(s)X(s')] - \mathbb{E}[X(s)]\mathbb{E}[X(s')] \\ &= f(t - s) - m^2\end{aligned}$$

$\therefore X(t)$ 是宽平稳的

必要性:

若 $X(t)$ 宽平稳则 $\mathbb{E}[X(s)]$ 为常数 m , 即 $\mathbb{E}[X(s)]$ 与 s 无关

则

$$\begin{aligned}R_X(s, s') &= \mathbb{E}[X(s)X(s')] - \mathbb{E}[X(s)]\mathbb{E}[X(s')] \\ &= g(s' - s)\end{aligned}$$

令 $s' = s + t$

则 $\mathbb{E}[X(s)X(s+t)] = m^2 + g(t)$ 与 s 无关

1.2 记 U_1, \dots, U_n 为在 $(0, 1)$ 中均匀分布的独立随机变量. 对 $0 < t, x < 1$ 定义

$$I(t, x) = \begin{cases} 1, & x \leq t, \\ 0, & x > t, \end{cases}$$

并记 $X(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(t, U_k), 0 \leq t \leq 1$, 这是 U_1, \dots, U_n 的经验分布函数. 试求过程 $X(t)$ 的均值和协方差函数.

Solution

$$\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(t, U_k)\right] = \mathbb{E}[I(t, U_1)] = \int_0^t 1 \, dx = t$$

$$\begin{aligned}
R_X(s, t) &= \mathbb{E}[X(s)X(t)] - \mathbb{E}[X(s)]\mathbb{E}[X(t)] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n I(s, U_i) \cdot \sum_{j=1}^n I(t, U_j)\right] - st \\
&= \frac{1}{n^2} \left\{ (n^2 - n) \mathbb{E}[I(s, U_1) \cdot I(t, U_2)] + n \mathbb{E}[I(s, U_1) \cdot I(t, U_1)] \right\} - st \\
&= \frac{1}{n^2} [(n^2 - n)st + n \cdot \min(s, t)] - st \\
&= \frac{1}{n} [\min(s, t) - st]
\end{aligned}$$

1.3 令 Z_1, Z_2 为独立的正态随机变量, 均值为 0, 方差为 σ^2 , λ 为实数. 定义过程 $X(t) = Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t$. 试求 $X(t)$ 的均值函数和协方差函数. 它是宽平稳的吗?

Solution

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(t)] &= \mathbb{E}(Z_1) \cos \lambda t + \mathbb{E}(Z_2) \sin \lambda t = 0 \\
R_X(s, t) &= \text{Cov}[(Z_1 \cos \lambda s + Z_2 \sin \lambda s), (Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t)] \\
&= \text{Cov}(Z_1, Z_1) \cos \lambda s \cos \lambda t + \text{Cov}(Z_2, Z_2) \sin \lambda s \sin \lambda t \\
&= \sigma^2 \cos \lambda(s - t)
\end{aligned}$$

$R_X(s, t)$ 只与 $s - t$ 有关, 故是宽平稳的

1.4 Poisson 过程 $X(t), t \geq 0$ 满足

- (i) $X(t) = 0$
- (ii) 对 $t > s$, $X(t) - X(s)$ 服从均值为 $\lambda(t - s)$ 的 Poisson 分布
- (iii) 过程是有独立增量的.

试求其均值函数和协方差函数. 它是宽平稳的吗?

Solution ^①

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(t)] &= \mathbb{E}[X(t) - X(0)] = \lambda t \\
R_X(s, t) &= \text{Cov}[X(t), X(s)] \\
&= \text{Cov}[(X(s) - X(t) + X(t) - X(0)), (X(t) - X(0))] \\
&= \text{Cov}(X(t) - X(0), X(t) - X(0)) \quad (\text{独立增量}) \\
&= \lambda t \quad (s \geq t)
\end{aligned}$$

均值不为常数, 协方差非仅与 $\tau = s - t$ 有关, 故非宽平稳

^①注意答案中的协方差函数假设 $s \geq t$

1.5 $X(t)$ 为第 4 题中的 Poisson 过程. 记 $Y(t) = X(t+1) - X(t)$, 试求过程 $Y(t)$ 的均值函数和协方差函数, 并研究其平稳性.

Solution

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y(t)] &= \mathbb{E}[X(t+1)] - \mathbb{E}[X(t)] = \lambda \\ R_X(s, t) &= \text{Cov}(X(s+1) - X(s), X(t+1) - X(t)) \\ &= \text{Cov}(X(s+1), X(t+1)) + \text{Cov}(X(s), X(t)) \\ &\quad - \text{Cov}(X(s), X(t+1)) - \text{Cov}(X(s+1), X(t)) \\ &= \lambda[\min(s+1, t+1) + \min(s, t) - \min(s, t+1) - \min(s+1, t)]\end{aligned}$$

令 $\beta = s - t$, 当 $\beta > 1$ 或 $\beta < -1$ 时, $R_Y(s, t) = 0$

当 $0 < \beta \leq 1$ 时, $R_Y(s, t) = \lambda(t+1+t-s-t) = \lambda(t-s+1)$

当 $-1 \leq \beta \leq 0$ 时, $R_Y(s, t) = \lambda(s+1+s-s-t) = \lambda(s-t+1)$

故为宽平稳

1.6 令 Z_1 和 Z_2 是独立同分布的随机变量. $\mathbb{P}(Z_1 = -1) = \mathbb{P}(Z_1 = 1) = \frac{1}{2}$. 记 $X(t) = Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t$, $t \in \mathbb{R}$. 试证 $X(t)$ 是宽平稳的, 它是严平稳的吗?

Solution

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_1) &= \mathbb{E}(Z_2) = 0 \\ \mathbb{E}[X(t)] &= \mathbb{E}(Z_1) \cos \lambda t + \mathbb{E}(Z_2) \sin \lambda t = 0 \\ R_X(s, t) &= \text{Cov}[(Z_1 \cos \lambda s + Z_2 \sin \lambda s), (Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t)] \\ &= \text{Cov}(Z_1, Z_1) \cos \lambda s \cos \lambda t + \text{Cov}(Z_2, Z_2) \sin \lambda s \sin \lambda t \\ &= 2\text{Var}(Z_1) \cos \lambda(s-t) \\ &= 2[\mathbb{E}(Z_1^2) - \mathbb{E}^2(Z_1)] \cos \lambda(s-t) \\ &= \cos \lambda(s-t)\end{aligned}$$

故是宽平稳

$$F_t(x) = \mathbb{P}(Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t \leq x)$$

考虑 $F_t(0) = \mathbb{P}(Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t \leq 0)$

当 $t = 0$ 时 $F_t(0) = \mathbb{P}(Z_1 \leq 0) = \frac{1}{2}$

当 $t = \frac{\pi}{4\lambda}$ 时 $F_t(0) = \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(Z_1 + Z_2) \leq 0\right) = \frac{3}{4}$

$\therefore F_t(x)$ 与 t 有关, 故 $X(t)$ 不是严平稳过程

1.7 试证: 若 Z_0, Z_1, \dots 为独立同分布随机变量, 定义 $X_n = Z_0 + Z_1 + \dots + Z_n$, 则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是独立增量过程.

Solution

对 $\forall n$ 及 $\forall t_1, \dots, t_n \in \{0, 1, 2, \dots\}, t_1 < t_2 < \dots < t_n$, 有

$$\begin{cases} X(t_2) - X(t_1) = Z_{t_1+1} + \dots + Z_{t_2}, \\ X(t_3) - X(t_2) = Z_{t_2+1} + \dots + Z_{t_3}, \\ \vdots \\ X(t_n) - X(t_{n-1}) = Z_{t_{n-1}+1} + \dots + Z_{t_n}. \end{cases}$$

由题知 $Z_{t_1+1}, \dots, Z_{t_n}$ 互相独立,

$\therefore (Z_{t_1+1}, \dots, Z_{t_2}), (Z_{t_2+1}, \dots, Z_{t_3}), \dots, (Z_{t_{n-1}+1}, \dots, Z_{t_n})$ 互相独立,

$\therefore \{X_n, n \geq 0\}$ 为独立增量过程.

1.8 若 X_1, X_2, \dots 为独立随机变量, 还要添加什么条件才能确保它是严平稳的随机过程?

Solution

若 $\{X_1, X_2, \dots\}$ 严平稳, 则对任意正整数 m 和 n , X_m 和 X_n 的分布都相同, 从而 X_1, X_2, \dots 是一列同分布的随机变量. 而当 X_1, X_2, \dots 是一列独立同分布的随机变量时, 对任意正整数 k 及 n_1, \dots, n_k, k 维随机向量 $(X_{n_1}, \dots, X_{n_k})$ 的分布函数为 (记 X_1, X_2, \dots 的共同分布函数为 $F(x)$)

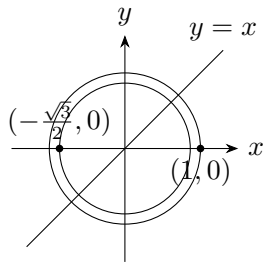
$$\begin{aligned} F_{X_{n_1}, \dots, X_{n_k}}(x_1, \dots, x_k) &= F_{X_{n_1}}(x_1) \cdots F_{X_{n_k}}(x_k) \\ &= F(x_1) \cdots F(x_k). \quad (-\infty < x_1, \dots, x_k < +\infty) \end{aligned}$$

这说明了 $(X_{n_1}, \dots, X_{n_k})$ 的分布函数与 n_1, \dots, n_k 无关, 故 $\{X_1, X_2, \dots\}$ 严平稳.

1.9 令 X 和 Y 是从单位圆内的均匀分布中随机选取一点所得的横坐标和纵坐标. 试计算条件概率

$$\mathbb{P}\left(X^2 + Y^2 \geq \frac{3}{4} \mid X > Y\right).$$

Solution



由对称性得,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(X^2 + Y^2 \geq \frac{3}{4} \mid X > Y\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}\left(X^2 + Y^2 \geq \frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

1.10 粒子依参数为 λ 的 Poisson 分布进入计数器, 两粒子到达的时间间隔 T_1, T_2, \dots 是独立的参数为 λ 的指数分布随机变量. 记 S 是 $[0, 1]$ 时段中的粒子总数. 时间区间 $I \subset [0, 1]$, 其长度记为 $|I|$. 试证明 $\mathbb{P}(T_1 \in I, S = 1) = \mathbb{P}(T_1 \in I, T_1 + T_2 > 1)$, 并由此计算 $\mathbb{P}(T_1 \in I \mid S = 1) = |I|$.

Solution

设 W_i 为第 i 个离子进入计数器时的时刻, 显然有 $W_n = \sum_{k=1}^n T_k$ 那么有 $\{S = 1\} = \{W_2 > 1\} \Rightarrow \{T_1 \in$

$I, S = 1\} = \{S = 1\} = \{T_1 \in I, T_1 + T_2 > 1\}$ 于是有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_1 \in I, S = 1) &= \mathbb{P}(T_1 \in I, T_1 + T_2 > 1) \\ \mathbb{P}(T_1 \in I|S = 1) &= \frac{\mathbb{P}(T_1 \in I, S = 1)}{\mathbb{P}(S = 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}[N(t) = 0, N(t + |I|) = 1, N(1) = 1]}{\mathbb{P}[N(1) = 1]} \\ &= \frac{e^{-\lambda t} \cdot \lambda |I| \cdot e^{-\lambda |x|} \cdot e^{-\lambda(1-t-|I|)}}{\lambda e^{-\lambda}} \\ &= |I|\end{aligned}$$

1.11 X, Y 为两独立随机变量且分布相同. 证明 $\mathbb{E}(X|X + Y = z) = \mathbb{E}(Y|X + Y = z)$. 并试求基于 $X + Y = z$ 的 X 的最佳预报, 并求出预报误差 $\mathbb{E}(X - \phi(X + Y))^2$

Solution

X, Y 是独立同分布的随机变量, 且分布相同, 故条件分布相同. 故有

$$\mathbb{E}[X|X + Y = Z] = \mathbb{E}[Y|X + Y = Z]$$

其于 $X + Y = z$ 的 X 的最佳预报为 $\mathbb{E}[X|X + Y = z] = \frac{z}{2}$

同理, 预报误差为

$$\mathbb{E}[X - \phi(X + Y)]^2 = \mathbb{E}\left[\frac{X - Y}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}[\mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Y^2)] = \frac{1}{2}\text{Var}(X)$$

1.12 气体分子的速度 V 有三个垂直分量 V_x, V_y, V_z , 它们的联合分布密度依 Maxwell-Boltzman 定律为

$$f_{V_x, V_y, V_z}(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{(2\pi kT)^{3/2}} \exp\left\{-\left(\frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{2kT}\right)\right\},$$

其中 k 是 Boltzman 常数, T 为绝对温度, 给定分子的总动能为 e . 试求 x 方向的动量的绝对值的期望值.

Solution

$$\begin{aligned}f_{V_x, V_y, V_z}(v_x, v_y, v_z) &= \frac{1}{(2\pi kT)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2kT}\right\} = \frac{e^{-\frac{v_x^2}{2kT}}}{\sqrt{2\pi\sqrt{kT}}} \cdot \frac{e^{-\frac{v_y^2}{2kT}}}{\sqrt{2\pi\sqrt{kT}}} \cdot \frac{e^{-\frac{v_z^2}{2kT}}}{\sqrt{2\pi\sqrt{kT}}} \\ V_x, V_y, V_z &\sim N(0, kT) \\ e &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}mV^2\right] = \frac{1}{2}m\mathbb{E}[V^2] = \frac{1}{2}m\mathbb{E}[V_x^2 + V_y^2 + V_z^2] = \frac{1}{2}m \cdot 3kT = \frac{3mkT}{2} \\ m &= \frac{2e}{3kT} \\ \mathbb{E}[|p_x|] &= m\mathbb{E}[|v_x|] = m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sqrt{kT}}} |v_x| e^{-\frac{v_x^2}{2kT}} dv_x \\ &= \frac{2m}{(2\pi kT)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{+\infty} v_x e^{-\frac{v_x^2}{2kT}} dv_x \\ &= m\sqrt{\frac{2kT}{\pi}} = \frac{2e}{3kT} \sqrt{\frac{2kT}{\pi}} = \frac{2e}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi kT}}\end{aligned}$$

1.13 若 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布. 它们服从参数为 λ 的指数分布. 试证 $\sum_{i=1}^n X_i$ 是参数为 (n, λ) 的 Γ 分布, 其密度为

$$f(t) = \lambda \exp\{-\lambda t\} (\lambda t)^{n-1} / (n-1)!, \quad t \geq 0.$$

Solution

X_i 的矩母函数为

$$g_{X_i}(t) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \cdot e^{tx} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

$$\because X_1, X_2, \dots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \therefore g_{X_1, X_2, \dots, X_n}(t) = (g_{X_i}(t))^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^n$$

参数为 (n, λ) 的 Γ 分布的矩母函数为:

$$\begin{aligned} g_{\Gamma}(t) &= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda x} (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{tx} dx \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-(\lambda-t)x} dx \\ &\stackrel{u=(\lambda-t)x}{=} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{u^{n-1} e^{-u}}{(\lambda-t)^n} du \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{(\lambda-t)^n} \cdot \Gamma(n) \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{(\lambda-t)^n} \cdot (n-1)! = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t} \right)^n \end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^n X_i$ 是参数为 (n, λ) 的 Γ 分布

1.14 设 X_1 和 X_2 为相互独立的均值为 λ_1 和 λ_2 的 Poisson 随机变量. 试求 $X_1 + X_2$ 的分布, 并计算给定 $X_1 + X_2 = n$ 时 X_1 的条件分布.

Solution

令 $Y = X_1 + X_2$

$$\begin{aligned} g_Y(t) &= g_{X_1}(t) g_{X_2}(t) \\ &= e^{\lambda_1(e^t-1)} e^{\lambda_2(e^t-1)} \\ &= e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)} \end{aligned}$$

$$\therefore Y \sim \text{Poi}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

∴ 给定 $X_1 + X_2 = n$ 时 X_1 服从参数为 $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, n = n$ 的二项分布

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[X_1 + X_2 = n] &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} (\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} \\
 \mathbb{P}[X_1 = m | X_1 + X_2 = n] &= \frac{\mathbb{P}[X_1 = m, X_1 + X_2 = n]}{\mathbb{P}[X_1 + X_2 = n]} = \frac{\mathbb{P}[X_1 = m, X_2 = n - m]}{\mathbb{P}[X_1 + X_2 = n]} \\
 &= \frac{\frac{e^{-\lambda_1} \lambda_1^m}{m!} \cdot \frac{e^{-\lambda_2} \lambda_2^{n-m}}{(n-m)!}}{\frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} (\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!}} \\
 &= \frac{\lambda_1^m \lambda_2^{n-m} n!}{m! (n-m)! \lambda_1^n \lambda_2^n} \\
 &= \binom{n}{m} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^m \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n-m}
 \end{aligned}$$

故服从二项分布

1.15 若 X_1, X_2, \dots 独立且有相同的以 λ 为参数的指数分布, N 服从几何分布, 即

$$\mathbb{P}(N = n) = \beta(1 - \beta)^{n-1}, n = 1, 2, \dots, 0 < \beta < 1.$$

试求随机和 $Y = \sum_{i=1}^N X_i$ 的分布.

Solution 1

$$\mathbb{E}(e^{tY} | N = n) = g_X^n(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^n \triangleq \alpha^n$$

$$\therefore g_Y(t) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(e^{tY} | N)] = \mathbb{E}(\alpha^N) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta(1 - \beta)^{n-1} \alpha^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha \beta (\alpha - \alpha \beta)^{n-1}$$

当 $|\alpha - \alpha \beta| < 1$ 时 $g_Y(t) = \frac{\alpha \beta}{1 - \alpha(1 - \beta)} = \frac{\lambda \beta}{\lambda \beta - t}$

∴ Y 服从参数为 $\lambda \beta$ 的指数分布

Solution 2

利用题 1.13 的结论

$$X_1, \dots, X_n \text{ i.i.d. } X_i \sim \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow f(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{Y|N}(y|n) \mathbb{P}[N = n] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda t} t^{n-1}}{(n-1)!} \beta (1 - \beta)^{n-1} \\
 &= \beta e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n [(1 - \beta)t]^{n-1}}{(n-1)!} \\
 &= \lambda \beta e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t (1 - \beta))^{n-1}}{(n-1)!} \\
 &= \lambda \beta e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t (1 - \beta)} = \lambda \beta e^{-\lambda \beta t}
 \end{aligned}$$

1.16 若 X_1, X_2, \dots 独立同分布, $P(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. N 与 $X_i, i \geq 1$ 独立且服从参数为 β 的几何分布, $0 < \beta < 1$. 试求随机和 $Y = \sum_{i=1}^N X_i$ 的均值, 方差和三、四阶矩.

Solution 1

使用矩母函数法。但据助教的习题提示, 没有使用 MATLAB 等软件, 矩母函数法求出来的应该是错误的 [4]

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(e^{tY} | N = n) &= g_X^n(t) = \mathbb{E}^n(e^{tY}) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^n \\
 \therefore g_Y(t) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(e^{tY} | N)] = \mathbb{E} \left[\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^N \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^n \beta(1-\beta)^{n-1} \\
 \therefore \mathbb{E}(Y) &= g_Y'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^{n-1} \beta(1-\beta)^{n-1} \frac{e^t - e^{-t}}{2} \Big|_{t=0} = 0 \\
 \mathbb{E}(Y^2) &= g_Y''(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[n(n-1) \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^{n-2} \beta(1-\beta)^{n-1} \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. n \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^n \beta(1-\beta)^{n-1} \right] \Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} n \beta(1-\beta)^{n-1} = \frac{1}{\beta} \\
 \text{Var}(Y) &= \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}^2(Y) = \frac{1}{\beta^2} \\
 \mathbb{E}(Y^3) &= g_Y^{(3)}(0) \\
 &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n \beta(1-\beta)^{n-1} \left[(n-1) \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^{n-2} \frac{e^t - e^{-t}}{2} + \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^n \right] \right\} \right)' \Big|_{t=0} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n \beta(1-\beta)^{n-1} \left[(n-1)(n-2) \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^{n-2} \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^3 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. (n-1) \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^{n-2} \cdot 2 \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2} + n \cdot \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right] \right\} \Big|_{t=0} \\
 &= 0 \\
 \mathbb{E}(Y^4) &= g_Y^{(4)}(0) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n \beta(1-\beta)^{n-1} \left[(n-1) \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^{n-1} (e^t + e^{-t}) + n \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^n \right] \right\} \Big|_{t=0} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (3n^2 - 2n) \beta(1-\beta)^{n-1} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \beta(1-\beta)^{n-1} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n \beta(1-\beta)^{n-1} \\
 &= 3 \left(\frac{1-\beta}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^2} \right) - 2 \frac{1}{\beta^2} = \frac{6-5\beta}{\beta^2}
 \end{aligned}$$

Solution 2

使用条件期望

$$\mathbb{E}(Y|N=n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N X_i \middle| N=n\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = n\mathbb{E}(X_i) = 0$$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y|N=n)\mathbb{P}(N=n) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y^2|N=n) &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)^2 \middle| N=n\right] = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j\right) \\ &= n\mathbb{E}(X_i^2) + 2 \sum \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = n \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y^2|N=n)\mathbb{P}(N=n) = \sum_{i=1}^{\infty} n\mathbb{P}(N=n) = \sum_{i=1}^{\infty} n\beta(1-\beta)^{n-1} = \frac{1}{\beta}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y^3|N=n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i^3 + 3 \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j^2 + 3 \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i^2 X_j\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i^3 + 3 \sum_{i \neq j} X_i^2 X_j\right) = n\mathbb{E}(X_i^3) + 3 \sum_{i \neq j} \mathbb{E}(X_i^2)\mathbb{E}(X_j) = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(Y^3) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y^3|N=n)\mathbb{P}(N=n) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y^4|N=n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i^4 + 4 \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j^3 + 6 \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i^2 X_j^2 + 4 \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i^3 X_j\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i^4 + 4 \sum_{i \neq j} X_i^3 X_j + 6 \sum_{i \neq j} X_i^2 X_j^2\right) \\ &= n\mathbb{E}(X_i^4) + 0 + 6 \cdot \binom{n}{2} \mathbb{E}(X_i^2 X_j^2) = n + 6 \cdot \binom{n}{2} = 3n^2 - 2n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y^4) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y^4|N=n)\mathbb{P}(N=n) = \sum_{i=1}^{\infty} 3n^2\beta(1-\beta)^{n-1} - 2 \sum_{i=1}^{\infty} n\beta(1-\beta)^{n-1} \\ &= \frac{6-5\beta}{\beta^2} \end{aligned}$$

计算 $\mathbb{E}(Y^4)$ 时会出现一项 $\sum_{i=1}^{\infty} n^2\beta(1-\beta)^{n-1}$, 计算方法如下:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} n^2\beta(1-\beta)^{n-1} &= \beta \sum_{i=1}^{\infty} [n(n-1) + n](1-\beta)^{n-1} \\ &= \beta \left[\sum_{i=1}^{\infty} n(n-1)(1-\beta)^{n-1} + \sum_{i=1}^{\infty} n(1-\beta)^{n-1} \right] \\ &= \beta \left[(1-\beta) \sum_{n=1}^{\infty} ((1-\beta)^n)'' + \sum_{n=1}^{\infty} ((1-\beta)^n)' \right] \\ &= \beta \left[(1-\beta) \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right)'' - \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right)' \right] \\ &= \beta \left[\frac{2\beta(1-\beta)}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^2} \right] = \frac{2-\beta}{\beta^2} \end{aligned}$$

或者可以采用稍微有点数学性的方法: $\mathbb{E}(Y^4) = \beta \sum_{n=1}^{\infty} n^2(1-\beta)^{n-1}$ 在 $(0, 1)$ 上内闭一致收敛, \therefore 求和和偏导次序可交换

$$\text{令 } a = 1 - \beta \Rightarrow n^2 a^{n-1} = \frac{\partial}{\partial a} \left(a \cdot \frac{\partial}{\partial a} a^n \right)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} \left(a \frac{\partial a^n}{\partial a} \right) = \frac{\partial}{\partial a} \left(a \frac{\partial \sum_{n=1}^{\infty} a^n}{\partial a} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial a} \left(a \frac{\partial \left(\frac{a}{1-a} \right)}{\partial a} \right) = \frac{1+a}{(1-a)^3} = \frac{2-\beta}{\beta^3} \end{aligned}$$

1.17 随机变量 N 服从参数为 λ 的 Poisson 分布. 给定 $N = n$, 随机变量 M 服从以 n 和 p 为参数的二项分布. 试求 M 的无条件概率分布.

Solution

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{tM} | N = n) &= (pe^t + (1-p))^n \triangleq a^n \\ g_M(t) = \mathbb{E}(a^N) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = e^{\lambda p(e^t - 1)} \\ \therefore M &\sim \text{Poi}(\lambda p) \end{aligned}$$

2 第二章 Poisson 过程

2.1 $N(t)$ 为一 Poisson 过程, 对 $s < t$ 试求条件概率 $\mathbb{P}\{N(s) = k | N(t) = n\}$.

Solution

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{N(s) = k | N(t) = n\} &= \frac{\mathbb{P}[N(s) = k, N(t) = n]}{\mathbb{P}[N(t) = n]} \\ &= \frac{\mathbb{P}[N(s) - N(0) = k, N(t) - N(s) = n - k]}{\mathbb{P}[N(t) = n]} \\ &= \left[\frac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!} \cdot \frac{(\lambda(t-s))^{n-k} e^{-\lambda(t-s)}}{(n-k)!} \right] \bigg/ \left[\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \right] \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

2.2 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一强度是 λ 的 Poisson 过程. 对 $s > 0$ 试计算 $E[N(t) \cdot N(t+s)]$.

Solution

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \mathbb{E}\left\{N(t)[N(t+s) - N(t) + N(t)]\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{N(t)[N(t+s) - N(t)]\right\} + \mathbb{E}[N^2(t)] \\ &= \lambda t \cdot \lambda s + \text{Var}[N(t)] + \mathbb{E}^2[N(t)] \\ &= \lambda^2 ts + \lambda t + (\lambda t)^2 \\ &= \lambda^2 t(s+t) + \lambda t \end{aligned}$$

2.3 电报依平均速率为每小时 3 个的 Poisson 过程到达电报局, 试问:

- (i) 从早上八时到中午没收到电报的概率;
- (ii) 下午第一份电报到达时间的分布是什么?

Solution

(i) 令 t 的计时单位为小时, 并以早上 8:00 为起始时刻, 所求事件的概率即

$$\mathbb{P}[N(4) = 0] = \frac{e^{-3 \times 4} \cdot (3 \times 4)^0}{0!} = \frac{1}{e^{12}} \approx 6.1 \times 10^{-6}$$

(ii) 取中午 12:00 为起始时刻, T 表示下午第一份电报到达时间

$$F(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = \mathbb{P}[N(t) \geq 1] = 1 - e^{-3t}$$

$$\therefore f(t) = \frac{dF_T(t)}{dt} = 3e^{-3t}, \text{ 即 } T \text{ 服从参数为 } 3 \text{ 的指数分布}$$

2.4 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一 $\lambda = 2$ 的 Poisson 过程, 试求:

- (i) $P\{N(1) \leq 2\}$;
- (ii) $P\{N(1) = 1 \text{ 且 } N(2) = 3\}$;
- (iii) $P\{N(1) \geq 2 | N(1) \geq 1\}$.

Solution

$$(i) \mathbb{P}[N(1) \leq 2] = \sum_{k=0}^2 \mathbb{P}[N(1) = k] = \sum_{k=0}^2 \frac{e^{-2} 2^k}{k!} = \frac{5}{e^2}$$

$$(ii) \text{ 原式} = \mathbb{P}[N(1) - N(0) = 1] \mathbb{P}[N(2) - N(1) = 2] = \frac{e^{-2} 2}{1!} \cdot \frac{e^{-2} 2^2}{2!} = \frac{4}{e^4}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{\mathbb{P}[N(1) \geq 2 | N(1) \geq 1]}{\mathbb{P}[N(1) \geq 1]} = \frac{\mathbb{P}[N(1) \geq 2]}{\mathbb{P}[N(1) \geq 1]} = \frac{1 - \mathbb{P}[N(1) - N(0) \leq 1]}{1 - \mathbb{P}[N(1) - N(0) = 0]} \\ &= \frac{1 - \frac{e^{-2} 2^0}{0!} - \frac{e^{-2} 2^1}{1!}}{1 - \frac{e^{-2} 2^0}{0!}} = \frac{1 - 3e^{-2}}{1 - e^{-2}} = \frac{e^2 - 3}{e^2 - 1} \end{aligned}$$

2.5 证明概率 $P_m(t) = \mathbb{P}[N(t) = m]$ 在命题 2.1 的假定 (1) ~ (4) 下满足微分方程

$$P'_m(t) = -\lambda P_m(t) + \lambda P_{m-1}(t), \quad m = 1, 2, \dots,$$

并证明在初始条件下 $P_m(0) = 0, m = 1, 2, \dots$ 下的解为 $\frac{\lambda^m t^m}{m!} e^{-\lambda t}$.

4 个假定分别为:

- (1) 在不相交区间中事件发生的数目相互独立, 也即对任何整数 $n = 1, 2, \dots$, 设时刻 $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, 增量 $N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ 相互独立;
- (2) 对任何时刻 t 和正数 h , 随机变量 (增量) $N(t+h) - N(t)$ 的分布只依赖于区间长度 h 而不依赖于时刻 t ;
- (3) 存在正常数 λ , 当 $h \downarrow 0$ 时, 使在长度为 h 的小区间中事件至少发生一次的概率

$$\mathbb{P}[N(t+h) - N(t) \geq 1] = \lambda h + o(h);$$

- (4) 在小区间 $(t, t+h]$ 发生两个或以上事件的概率为 $o(h)$ (可以忽略不计), 即当 $h \downarrow 0$,

$$\mathbb{P}[N(t+h) - N(t) \geq 2] = o(h)$$

Solution

$$\begin{aligned}
P_m(t+h) &= P_m(t)P_0(h) + P_{m-1}(t)P_1(h) + \sum_{i=2}^m P_{m-i}(t)P_i(h) \\
&= \frac{\sum_{i=2}^m P_{m-i}(t)P_i(h)}{h} \\
&\leq \frac{\sum_{i=2}^m P_i(h)}{h} \\
&= \frac{o(h)}{h} = 0 \quad (h \downarrow 0)
\end{aligned}$$

$$P_0(h) = 1 - p(h) = 1 - \lambda h + o(h)$$

$$P_1(h) = p(h) = \lambda h - o(h)$$

代入并令 $h \downarrow 0$

$$P_m(t+h) - P_m(t) = -\lambda h P_m(t) + \lambda h P_{m-1}(t) + o(h)$$

$$\xrightarrow{\text{同除以 } h} P'_m(t) = -\lambda P_m(t) + \lambda P_{m-1}(t)$$

$$P_0(t) = C e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} (P_0(0) = 0) = \frac{\lambda^m t^m}{m!} e^{-\lambda t} \Big|_{t=0} = 0$$

若 $P_{m-1}(t) = \frac{\lambda^{m-1} t^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda t}$, 令

$$\begin{aligned}
F(t) &\stackrel{\text{def}}{=} P_m(t) e^{\lambda t} \\
F'(t) e^{-\lambda t} &= \frac{\lambda^{m-1} t^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda t} \Rightarrow F'(t) = \frac{\lambda^{m-1} t^{m-1}}{(m-1)!} \Rightarrow F(t) = \frac{\lambda^m t^m}{m} + C \\
P_n(t) &= \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} + C e^{-\lambda t} \\
P_m(t) &\stackrel{P_m(0)=0 \Rightarrow C=0}{=} \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

2.6 一部 600 页的著作总共有 240 个印刷错误, 试利用 Poisson 过程近似求出某连续三页无错误的概率.

Solution

设 Poisson 参数为 λ , 有 $600\lambda = 240 \Rightarrow \lambda = 0.4$

$$\mathbb{P}[N(m+3) - N(m) = 0] = \frac{e^{-0.4 \times 3} (0.4 \times 3)^0}{0!} = \frac{1}{e^{1.2}}$$

2.7 $N(t)$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程. 给定 $N(t) = n$, 试求第 r 个事件 ($r \leq n$) 发生的时刻 W_r 的条件概率密度 $f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n)$.

Solution 1

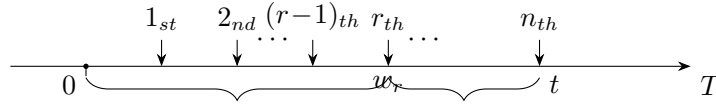
$$\begin{aligned}
& f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n) \cdot \Delta w_r \\
&= \mathbb{P}[N(w_r) - N(0) = r-1, N(w_r + \Delta w_r) - N(w_r) = 1 | N(t) = n] \\
&= \mathbb{P}[N(w_r) - N(0) = r-1] \cdot \mathbb{P}[N(w_r + \Delta w_r) - N(w_r) = 1] \\
&\quad \cdot \frac{\mathbb{P}[N(t) - N(w_r + \Delta w_r) = n-r]}{\mathbb{P}[N(t) = n]} \\
&= \frac{\frac{(\lambda w_r)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda w_r} \cdot [\lambda \Delta w_r + o(\Delta w_r)] \cdot \frac{[\lambda(t-w_r-\Delta w_r)]^{n-r}}{(n-r)!} e^{-\lambda(t-w_r-\Delta w_r)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}}
\end{aligned}$$

两边除以 Δw_r 并令 $\Delta w_r \rightarrow 0$ 得

$$f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \frac{(w_r)^{r-1} (t-w_r)^{n-r}}{t^n}$$

Solution 2

直观理解如下



将之分为三段，然后得到类似多项分布的结论（分三组乘起来）

$$f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n) = \frac{n!}{(r-1)! \cdot 1 \cdot (n-r)!} \left(\frac{w_r}{t}\right)^{r-1} \cdot \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{t-w_r}{t}\right)^{n-r}$$

Solution 3

比较暴力的方法. 因为泊松分布两次事件之间的时间间隔 $W_{i+1} - W_i = \delta_i$ 遵循指数分布 $\delta_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, 利用 1.13 的结论 $W_r = \sum_{i=1}^r \delta_i \sim \Gamma(r, \lambda)$ 有:

$$\begin{aligned}
f_{W_r}(w_r) &= \frac{\lambda e^{-\lambda w_r} (\lambda w_r)^{r-1}}{(r-1)!} \\
f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n) &= \frac{f_{W_r}(w_r) \cdot \mathbb{P}(t-w_r \text{ 间到达了 } n-r \text{ 次})}{\mathbb{P}[(N(t) = n)]} = \frac{f_{W_r}(w_r) \cdot \mathbb{P}[N(t) - N(w_r) = n-r]}{\mathbb{P}[N(t) = n]} \\
&= \frac{\frac{\lambda e^{-\lambda w_r} (\lambda w_r)^{r-1}}{(r-1)!} \cdot \frac{e^{-\lambda(t-w_r)} [\lambda(t-w_r)]^{n-r}}{(n-r)!}}{\frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}} \\
&= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \frac{(w_r)^{r-1} (t-w_r)^{n-r}}{t^n}
\end{aligned}$$

2.8 令 $\{N_i(t), t \geq 0\}, i = 1, 2, \dots, n$ 为 n 个独立的有相同强度参数 λ 的 Poisson 过程. 记 T 为在全部 n 个过程中至少发生了一件事的时刻, 试求 T 的分布.

Solution 1

本题与 1.14 几乎一样, 是 Poisson 和 Exp 的一体两面.

记 $N(t) = N_1(t) + \dots + N_n(t) \Rightarrow N(t) \sim \text{Poi}(n\lambda t)$, 其对应首达时 $X \sim \text{Exp}(n\lambda)$

$$\begin{aligned}
F_T(t) &= \mathbb{P}[T \leq t] = 1 - \mathbb{P}(T > t) \\
&= 1 - \mathbb{P}[N_i(t) = 0, i = 1, 2, \dots, n] \\
&= 1 - (e^{-\lambda t})^n
\end{aligned}$$

$$\therefore f_T(t) = F'_T(t) = n\lambda e^{-n\lambda t}$$

即 T 服从参数为 $n\lambda$ 的指数分布.

Solution 2

大差不差, $N(t) = \sum_{i=1}^n N_i(t) \sim \text{Poi}(n\lambda t)$, 那么

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[N(t) \geq 1] &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[N(t) = k] = 1 - \mathbb{P}[N(t) = 0] \\ &= 1 - e^{-n\lambda t} \\ f_T(t) &= \frac{d}{dt} \mathbb{P}[N(t) \geq 1] = n\lambda e^{-n\lambda t}\end{aligned}$$

2.9 考虑参数为 λ 的 Poisson 过程 $N(t)$, 若每一事件独立地以概率 p 被观察到, 并将观察到的过程记为 $N_1(t)$. 试问 $N_1(t)$ 是什么过程? $N(t) - N_1(t)$ 呢? $N_1(t)$ 与 $N(t) - N_1(t)$ 是否独立?

Solution

由题设得

(i) $N_1(0) = 0$

(ii) $\{N_1(t) : t \geq 0\}$ 是独立增量过程

从而, 对 $0 \leq s < t$, $N_1(t) - N_1(s)$ 服从参数为 $\lambda p(t-s)$ 的 Poisson 分布. 故 $\{N_1(t) : t \geq 0\}$ 是参数为 λp 的 Poisson 过程.

2.10 到达某加油站的公路上的卡车服从参数为 λ_1 的 Poisson 过程 $N_1(t)$, 而到达的小汽车服从参数为 λ_2 的 Poisson 过程 $N_2(t)$, 且过程 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 独立. 试问随机过程 $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ 是什么过程? 并计算在总车流数 $N(t)$ 中卡车首先到达的概率.

Solution

$$g_N(v) = g_{N_1}(v) \cdot g_{N_2}(v) = e^{\lambda_1 v(e^t - 1)} e^{\lambda_2 v(e^t - 1)} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)(e^t - 1)}$$

$\therefore N(t)$ 是强度为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的 Poisson 过程

记 W_1, W_2 分别为卡车、小汽车的第一次到达时间, 则 W_1 服从参数为 λ_1 的指数分布, W_2 服从参数为 λ_2 的指数分布.

$$\begin{aligned}\therefore \mathbb{P}(W_1 < W_2) &= \iint_{0 \leq W_1 < W_2 \leq +\infty} f_{W_1, W_2}(w_1, w_2) dw_1 dw_2 \\ &= \int_0^{+\infty} dw_1 \int_{w_1}^{+\infty} \lambda_1 \lambda_2 e^{-w_1 \lambda_1 - w_2 \lambda_2} dw_2 \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\end{aligned}$$

或者另一个思路: 卡车的首达时 $T \sim \text{Exp}(\lambda_1)$, 在 $(0, T]$ 之间没有汽车到达

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[T = t, N_2(t) = 0] &= (\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt) \cdot \frac{e^{-\lambda_2 t} (\lambda_2 t)^0}{0!} = \lambda_1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} dt \\ \mathbb{P}(W_1 < W_2) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}[T = t, N_2(t) = 0] = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\end{aligned}$$

2.11 冲击模型 (Shock Model) 记 $N(t)$ 为某系统到某时刻 t 受到的冲击次数, 它是参数为 λ 的 Poisson 过程. 设第 k 次冲击对系统的损害大小 Y_k 服从参数为 μ 的指数分布, $Y_k, k = 1, 2, \dots$, 独立同分布. 记 $X(t)$ 为系统所受到的总损害. 当损害超过一定的极限 α 时系统不能运行, 寿命终止, 记 T 为系统寿命. 试求该系统的平均寿命 $\mathbb{E}(T)$, 并对所得结果作出直观解释.

提示: 对非负随机变量 $\mathbb{E}(T) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(T > t) dt$

Solution 1

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > t) &= \mathbb{P}\{X(t) \leq \alpha\} = \mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \leq \alpha\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \leq \alpha \middle| N(t) = n\right\} \cdot \mathbb{P}\{N(t) = n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^n Y_k \leq \alpha \middle| N(t) = n\right\} \cdot \mathbb{P}\{N(t) = n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{W_n \leq \alpha\} \cdot \mathbb{P}\{N(t) = n\}\end{aligned}$$

求和式中当 $n = 0$ 时认为 $\mathbb{P}\{W_n \leq \alpha | N(t) = n\} = 1$

$\because Y_k \sim \text{Exp}(\mu), \therefore W_n = \sum_{k=1}^n Y_k \sim \Gamma(n, \mu)$

$$\mathbb{P}(W_n \leq \alpha) = \frac{\mu^n}{(n-1)!} \int_0^{\alpha} s^{n-1} e^{-\mu s} ds \quad (n \geq 1)$$

$$\mathbb{P}[N(t) = n] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

$$\therefore \mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda \mu t)^n}{n!(n-1)!} \int_0^{\alpha} s^{n-1} e^{-\mu s} ds$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathbb{E}(T) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T > t) dt \\ &= \frac{1}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda \mu)^n}{n!(n-1)!} \int_0^{\infty} t^n e^{-\lambda t} dt \int_0^{\alpha} s^{n-1} e^{-\mu s} ds \\ &= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n \Gamma(n+1)}{n!(n-1)!} \int_0^{\alpha} s^{n-1} e^{-\mu s} ds \\ &= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\alpha} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu s)^{n-1} e^{-\mu s}}{(n-1)!} \right] d(\mu s) \\ &= \frac{1 + \mu \alpha}{\lambda}\end{aligned}$$

从结果看, 若 λ 越大 (系统所受冲击越频繁), μ 越小 (每次冲击所造成的平均损害越大), α 越小 (系统所能承受的损害极限越小), 则系统平均寿命越短, 且当 α 等于 0 时系统的平均寿命即为第一次冲击到来的平均时间, 符合常识.

Solution 2

$$G_n(\alpha) = \mathbb{P}\{Y_1 + \cdots + Y_k \leq \alpha\} = \mathbb{P}\{W_n \leq \alpha\} = \mathbb{P}\{N_1(\alpha) \geq n\} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\mu\alpha)^n}{k!} e^{-\mu\alpha}$$

其中 $N_1(t)$ 是强度为 μ 的 Poisson 过程

$$\begin{aligned} \therefore \mathbb{P}(T > t) &= \mathbb{P}\{X(t) \leq \alpha\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} G_n(\alpha) \quad (\text{课本 } \mathbf{P}_{21} \text{ 例 } 2.4) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \frac{(\mu\alpha)^n}{k!} e^{-\mu\alpha} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu\alpha)^n}{k!} e^{-\mu\alpha} \sum_{n=0}^k \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \\ \therefore \mathbb{E}(T) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T > t) dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu\alpha)^k}{k!} e^{-\mu\alpha} \sum_{n=0}^k \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu\alpha)^k}{k!} e^{-\mu\alpha} \frac{(k+1)\Gamma(n+1)}{n!\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^k}{k!} e^{-\mu\alpha} + \frac{\mu\alpha}{\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu\alpha} \\ &= \frac{1 + \mu\alpha}{\lambda} \end{aligned}$$

Solution 3^②

$$\begin{aligned} 1 - F_T(t) &= \mathbb{P}(T < t) = \mathbb{P}[X(t) < \alpha] = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \leq \alpha\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \leq \alpha \middle| N(t) = n\right) \mathbb{P}[N(t) = n] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n Y_k \leq \alpha\right) \mathbb{P}[N(t) = n] \end{aligned}$$

Y_1, Y_2, \dots, Y_n i.i.d. 且 $Y_i \sim \text{Exp}(\mu)$. 设 $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ 由独立同分布的指数分布随机和为参数为 (n, μ) 的 Γ 分布

$$\begin{aligned} f_{S_n}(s) &= \mu \frac{e^{-\mu s} (\mu s)^{n-1}}{(n-1)!} \\ \mathbb{P}(S_n \leq \alpha) &= \int_0^{\alpha} \mu \frac{e^{-\mu s} (\mu s)^{n-1}}{(n-1)!} ds = \frac{\mu}{(n-1)!} \int_0^{\alpha} e^{-\mu s} (\mu s)^{n-1} ds \end{aligned}$$

^② Sol 3 和 Sol 4 都是我写的, 计算结果为 $\frac{\mu\alpha}{\lambda}$. 但实际结果应为 $\frac{1+\mu\alpha}{\lambda}$, 懒得去找漏项了

$$\begin{aligned}
1 - F_T(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \cdot \frac{\mu}{(n-1)!} \int_0^{\alpha} e^{-\mu s} (\mu s)^{n-1} ds \\
&= \mu e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\alpha} \frac{(\lambda t)^n}{n!(n-1)!} e^{-\mu s} (\mu s)^{n-1} ds \\
&\quad \underline{\text{交换求和和积分符号}} \mu e^{-\lambda t} \int_0^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(\mu s)^n e^{-\mu s}}{n!} ds
\end{aligned}$$

因为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} = e^{\lambda t} - 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu s)^n e^{-\mu s}}{n!} = 1$

所以由 **Mertens 定理** 得 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(\mu s)^n e^{-\mu s}}{n!} = (e^{\lambda t} - 1) \cdot 1 = e^{\lambda t} - 1$

$$\begin{aligned}
1 - F_T(t) &= \mu e^{-\lambda t} \int_0^{\alpha} (e^{\lambda t} - 1) \cdot 1 ds = \mu \alpha (1 - e^{-\lambda t}) \\
f_T(t) &= -\frac{d}{dt}(1 - F_T(t)) = \lambda \mu \alpha e^{-\lambda t} \\
\mathbb{E}(T) &= \int_0^{+\infty} t f_T(t) dt = \frac{\mu \alpha}{\lambda}
\end{aligned}$$

Solution 4^③

可以采用不那么暴力的方法，即使用题目里的提示 $\mathbb{E}(T) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T > t) dt$, 先把这个提示证一遍

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T > t) dt &= \int_0^{+\infty} \left(\int_t^{+\infty} f_T(x) dx \right) dt \quad \underline{\text{交换积分次序}} \\
&= \int_0^{+\infty} dx \int_0^x f_T(x) dt = \int_0^{+\infty} x f_T(x) dx = \int_0^{+\infty} t f_T(t) dt \\
&= \mathbb{E}(T)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T > t) &= 1 - F_T(t) = \mu e^{-\lambda t} \int_0^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(\mu s)^n e^{-\mu s}}{n!} ds \\
\mathbb{E}(T) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T > t) dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu \lambda)^n}{n!(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} dt \cdot \int_0^{\alpha} s^{n-1} e^{-\mu s} ds \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{(n-1)!} \int_0^{\alpha} s^{n-1} e^{-\mu s} ds \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\alpha} e^{-\mu s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{(n-1)!} s^{n-1} ds \\
&= \frac{\mu}{\lambda} \int_0^{\alpha} ds = \frac{\mu \alpha}{\lambda}
\end{aligned}$$

2.12 令 $N(t)$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次 Poisson 过程, X_1, X_2, \dots 为事件间的时间间隔.

(i) X_i 是否独立;

^③ 请查看上页的脚注

(ii) X_i 是否同分布;

(iii) 试求 X_1 与 X_2 的分布.

Solution 1

记 $m(t) = \int_0^t \lambda(u) du$ 等待时间 W_1, W_2 的联合分布函数为

$$\begin{aligned}
 F_{W_1, W_2}(t_1, t_2) &= \mathbb{P}(W_1 \leq t_1, W_2 \leq t_2), \quad (0 \leq t_1 < t_2) \\
 &= \mathbb{P}(N(t_1) \geq 1, N(t_2) \geq 2) \\
 &= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{\ell=1}^k \mathbb{P}[N(t_1) = \ell, N(t_2) = k] \\
 &= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{\ell=1}^k \mathbb{P}[N(t_1) = \ell, N(t_2) - N(t_1) = k - \ell] \\
 &= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{\ell=1}^k \mathbb{P}[N(t_1) = \ell] \mathbb{P}(N(t_2) - N(t_1) = k - \ell) \\
 &= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{\ell=1}^k \frac{(m(t_1))^\ell}{\ell!} e^{-m(t_1)} \cdot \frac{[m(t_2) - m(t_1)]^{k-\ell}}{(k-\ell)!} e^{-[m(t_2) - m(t_1)]} \\
 &= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{\ell=1}^k \frac{(m(t_1))^\ell [m(t_2) - m(t_1)]^{k-\ell}}{\ell! (k-\ell)!} e^{-m(t_2)} \\
 &= e^{-m(t_2)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\ell=1}^k \binom{k}{\ell} [m(t_1)]^\ell [m(t_2) - m(t_1)]^{k-\ell} \\
 &= e^{-m(t_2)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \left\{ \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} [m(t_1)]^\ell [m(t_2) - m(t_1)]^{k-\ell} - [m(t_2) - m(t_1)]^k \right\} \\
 &= e^{-m(t_2)} \left\{ e^{m(t_2)} - e^{m(t_2) - m(t_1)} - m(t_1) \right\} \\
 &= 1 - e^{-m(t_1)} - m(t_1) e^{-m(t_2)}
 \end{aligned}$$

$$\therefore f_{W_1, W_2}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_{W_1, W_2}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \lambda(t_1) \lambda(t_2) e^{-m(t_2)}$$

$$\therefore \begin{cases} W_1 = X_1 \\ W_2 = X_1 + X_2 \end{cases}$$

$\therefore f_{X_2, X_2}(t_1, t_2) = \lambda(t_1) \lambda(t_1 + t_2) e^{-m(t_1 + t_2)}$ 不能写为 $g_1(t_1) g_2(t_2)$ 形式

$\therefore X_1, X_2$ 不独立, 又有

$$f_{X_1}(t_1) = \lambda(t_1) \int_0^{+\infty} \lambda(t_1 + t_2) e^{-m(t_1 + t_2)} dt_2 = \lambda(t_1) [e^{-m(t_1)} - e^{-m(+\infty)}] \quad (t_1 > 0)$$

下面确定 $e^{-m(+\infty)}$:

$$1 = \int_0^{+\infty} f_{X_1}(t_1) dt_1 = \int_0^{+\infty} \lambda(t_1) [e^{-m(t_1)} - e^{-m(+\infty)}] dt_1 = 1 - [m(+\infty) + 1] e^{-m(+\infty)}$$

$$\therefore e^{-m(+\infty)} = 0$$

$$\therefore f_{X_1}(t_1) = \lambda(t_1)e^{-m(t_1)} \quad (t_1 > 0)$$

$$f_{X_2}(t_2) = \int_0^{+\infty} \lambda(t_1)\lambda(t_1+t_2)e^{-m(t_1+t_2)} dt_1 \quad (t_2 > 0)$$

$\therefore X_1, X_2$ 不同分布且其概率密度函数如上.

2.13 考虑对所有 t , 强度函数 $\lambda(t)$ 均大于 0 的非齐次 Poisson 过程 $\{N(t), t \geq 0\}$. 令 $m(t) = \int_0^t \lambda(u) du$, $m(t)$ 的反函数为 $\ell(t)$, 记 $N_1(t) = N(\ell(t))$. 试证 $N_1(t)$ 是通常的 Poisson 过程, 试求 $N_1(t)$ 的强度参数 λ .

Solution

(i) $N_1(0) = N(\ell(0)) = N(0) = 0$

(ii) $\because m(\ell)$ 单增, $\therefore \ell(t)$ 单增

\therefore 对任意 $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, 有 $0 \leq \ell(t_1) < \ell(t_2) < \dots < \ell(t_n)$, 且有

$$N_1(t_2) - N_1(t_1) = N(\ell(t_2)) - N(\ell(t_1))$$

$$N_1(t_3) - N_1(t_2) = N(\ell(t_3)) - N(\ell(t_2))$$

$$\vdots$$

$$N_1(t_n) - N_1(t_{n-1}) = N(\ell(t_n)) - N(\ell(t_{n-1}))$$

$\because N(t)$ 是独立增量过程 $\therefore N_1(t)$ 也是独立增量过程

(iii) $\forall 0 \leq s < t$, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_1(t) - N_1(s) = k) &= \mathbb{P}\{N(\ell(t)) - N(\ell(s)) = k\} \\ &= \frac{[m(\ell(t)) - m(\ell(s))]^k}{k!} e^{-[m(\ell(t)) - m(\ell(s))]} \\ &= \frac{(t-s)^k}{k!} e^{-(t-s)} \quad (k = 0, 1, \dots) \end{aligned}$$

$\therefore N_1(t)$ 是强度为 1 的 Poisson 过程

2.14 设 $N(t)$ 为更新过程, 试判断下述命题的真伪:

(i) $\{N(t) < k\} \iff \{W_k > t\};$

(ii) $\{N(t) \leq k\} \iff \{W_k \geq t\};$

(iii) $\{N(t) > k\} \iff \{W_k < t\};$

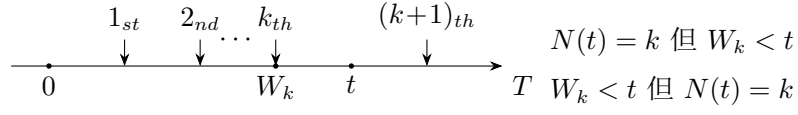
其中 W_k 为第 k 个事件的等待时间.

Solution

$$(i) \{N(t) < k\} = \overline{\{N(t) \geq k\}} = \overline{\{W_k \leq t\}} = \{W_k > t\}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \{N(t) \leq k\} &= \{N(t) < k+1\} = \overline{\{N(t) \geq k+1\}} = \overline{\{W_{k+1} \leq t\}} \\ &= \{W_{k+1} > t\} \neq \{W_k \geq t\} \end{aligned}$$



故 $\{N(t) \leq k\} \not\Rightarrow \{W_k \leq t\}$

$$(iii) \{N(t) > k\} = \{N(t) \geq k+1\} = \{W_{k+1} \leq t\} \neq \{W_k < t\}$$

同样参照上图, $\{W_k < t\} \not\Rightarrow \{N(t) > k\}$

3 第三章 Markov 过程

3.1 对 Markov 链 $X_n, n \geq 0$, 试证条件

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

等价于对所有时刻 n, m 及所有状态 $i_0, \dots, i_n, j_1, \dots, j_m$ 有

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+m} = j_m | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+m} = j_m | X_n = i_n) \end{aligned}$$

Solution

\Leftarrow 只需令 $m = 1$

\Rightarrow 由 **P**₂₇(3.4) 可知

$$\begin{aligned} & P\{X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+m} = j_m | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} \\ &= P\{X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+m} = j_m, X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} / P\{X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} \\ &= P\{X_0 = i_0\} \cdot P_{j_1 i_0} \cdots P_{j_m i_{n+m-1}} P_{i_0 i_0} \cdots P_{i_n i_n} / [P\{X_0 = i_0\} \cdot P_{i_0 i_0} \cdots P_{i_{n-1} i_n}] \\ &= P\{X_n = i\} \cdot P_{j_1 i_0} \cdots P_{j_m i_{n+m-1}} P_{i_n i_n} / P\{X_n = i_n\} \\ &= P\{X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+m} = j_m | X_n = i_n\} \end{aligned}$$

3.2 考虑状态 $0, 1, 2$ 上的一个 Markov 链 $X_n, n \geq 0$, 它有转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix}$$

初始分布为 $p_0 = 0.3, p_1 = 0.4, p_2 = 0.3$, 试求概率 $P\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2\}$.

Solution

$$\mathbb{P}\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2\} = p_0 P_{01} P_{12} = 0.3 \times 0.1 \times 0 = 0$$

3.3 信号传送问题. 信号只有 $0, 1$ 两种, 分为多个阶段传输. 在每一步上出错的概率为 α . $X_0 = 0$ 是送出的信号, 而 X_n 是在第 n 步接收到的信号. 假定 X_n 为一 Markov 链, 它有转移概率矩阵 $P_{00} = P_{11} = 1 - \alpha, P_{01} = P_{10} = \alpha, 0 < \alpha < 1$. 试求

- (a) 两步均不出错的概率 $\mathbb{P}\{X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0\}$;
- (b) 两步传送后收到正确信号的概率;
- (c) 五步之后传送无误的概率 $\mathbb{P}\{X_5 = 0 | X_0 = 0\}$.

Solution

$$(a) \mathbb{P}\{X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0\} = p_0 P_{00} P_{00} = 1 \cdot (1 - \alpha) \cdot (1 - \alpha) = (1 - \alpha)^2$$

$$(b) P = p_0 P_{00} P_{00} + p_0 P_{01} P_{10} = (1 - \alpha)^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 - 2\alpha + 1$$

(c) 转移概率矩阵

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\ \therefore P^{(5)} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1 - 2\alpha)^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1+(1-2\alpha)^5}{2} & \frac{1-(1-2\alpha)^5}{2} \\ \frac{1-(1-2\alpha)^5}{2} & \frac{1+(1-2\alpha)^5}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbb{P}\{X_5 = 0 | X_0 = 0\} = p_0 \cdot \frac{1+(1-2\alpha)^5}{2} = \frac{1+(1-2\alpha)^5}{2}$$

或者直接

$$\mathbb{P}\{X_5 = 0 | X_0 = 0\} = (1 - \alpha)^5 + \binom{5}{2} (1 - \alpha)^3 \alpha^2 + \binom{5}{4} (1 - \alpha) \alpha^4$$

3.4 A, B 两罐总共装着 N 个球. 作如下实验: 在时刻 n 先 N 个球中等概率地任取一球. 然后从 A, B 两罐中任选一个, 选中 A 的概率为 p , 选中 B 的概率为 q . 之后再选出的球放入选好的罐中. 设 X_n 为每次试验时 A 罐中的球数. 试求此 Markov 过程的转移概率矩阵.

Solution

$$P_{ij} = \begin{cases} p \cdot \frac{i}{N} + q \cdot \frac{N-i}{N} & , j = i \\ q \cdot \frac{i}{N} & , j = i - 1 (i = 1, 2, \dots, N) \\ p \cdot \frac{N-i}{N} & , j = i + 1 (i = 0, 1, \dots, N - 1) \\ 0 & , \text{其他} \end{cases}$$

其转移概率矩阵为

$$P = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} qN & pN & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & q(N-1) + p & p(N-1) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2q & q(N-2) + 2p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2q + p(N-2) & 2p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q(N-1) & q + p(N-1) & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & qN & pN \end{pmatrix}$$

3.5 重复掷币一直到连续出现两次正面为止. 假定钱币是均匀的, 试引入以连续出现次数为状态空间的 Markov 链, 并求出平均需要掷多少次试验才可以结束.

Solution 1

记 X_n 为第 n 次掷币后连续出现的正面次数, 则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为一 M.C.

$$\text{其转移概率矩阵为 } P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore \mathbb{E}(T|X_0 = 0) &= \sum_{k=0}^1 \mathbb{E}(T|X_0 = 0, X_1 = k) \cdot \mathbb{P}(X_1 = k|X_0 = 0) \\ &= \sum_{k=0}^1 \mathbb{E}(T|X_1 = k) \cdot \mathbb{P}(X_1 = k|X_0 = 0) \\ &= (1+v) \cdot \frac{1}{2} + \mathbb{E}(T|X_1 = 1) \cdot \frac{1}{2} \\ \mathbb{E}(T|X_1 = 1) &= \sum_{k=0}^2 \mathbb{E}(T|X_1 = 1, X_2 = k) \cdot \mathbb{P}(X_2 = k|X_1 = 1) \\ &= \sum_{k=0}^2 \mathbb{E}(T|X_2 = k) \cdot \mathbb{P}(X_2 = k|X_1 = 1) \\ &= (2+v) \cdot \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} \times 2 \end{aligned}$$

解得 $\mathbb{E}(T|X_0 = 0) = 6$, 平均需掷 6 次.

Solution 2

由转移概率矩阵, 有 $P_{00} = \frac{1}{2}, P_{01} = \frac{1}{2}, P_{10} = \frac{1}{2}, P_{12} = \frac{1}{2}$, 则

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_{00}^k (P_{01}P_{10})^{n-k} [k + 2(n-k) + 2] \cdot P_{01}P_{12} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} [k + 2(n-k) + 2] \\ &= \frac{1}{4} \times 24 = 6 \end{aligned}$$

没想到吧, 这还能暴力解. 不过结果是 Mathematica 算的 (doge)

3.6 迷宫问题. 将小鼠放入迷宫内作动物的学习试验, 如下图所示. 在迷宫的第 7 号小格内放有美味食物而第 8 号小格内则是电击捕鼠装置. 假定当小鼠位于某格时有 k 个出口可以离去, 则它总是随机地选择一个, 概率为 $1/k$. 并假定每一次小鼠只能跑到相邻的小格去. 令过程 X_n 为小鼠在时刻 n 时所在小格的号码, 试写出这一 Markov 过程的转移概率阵, 并求出小鼠在遭到电击前能找到食物的概率.

0	1	7 food
2	3	4
8 shock	5	6

Solution

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

设 u_k 为家鼠从 k 出发在遭到电击前能找到食物的概率, 显然 $u_7 = 1, u_8 = 0$

设 T 为进入吸收态时刻, 则当 $0 \leq k \leq 6$ 时,

$$\begin{aligned} u_k &= \mathbb{P}\{X_T = 7 | X_0 = k\} \\ &= \sum_{i=0}^8 \mathbb{P}\{X_T = 7, X_1 = i | X_0 = k\} \\ &= \sum_{i=0}^8 \mathbb{P}\{X_T = 7, X_1 = i\} \mathbb{P}\{X_1 = i | X_0 = k\} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \\ u_1 = \frac{1}{3}(u_0 + u_3 + u_7) \\ u_2 = \frac{1}{3}(u_0 + u_3 + u_8) \\ u_3 = \frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_4 + u_5) \\ u_4 = \frac{1}{3}(u_3 + u_6 + u_7) \\ u_5 = \frac{1}{3}(u_3 + u_6 + u_8) \\ u_6 = \frac{1}{2}(u_4 + u_5) \\ u_7 = 1 \\ u_8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_1 = \frac{2}{3} \\ u_2 = \frac{1}{3} \\ u_3 = \frac{1}{2} \\ u_4 = \frac{2}{3} \\ u_5 = \frac{1}{3} \\ u_6 = \frac{1}{2} \\ u_7 = 1 \\ u_8 = 0 \end{cases}$$

3.7 记 $Z_i, i = 1, 2, \dots$ 为一串独立同分布的离散随机变量. $\mathbb{P}\{Z_i = k\} = p_k \geq 0, k = 0, 1, 2, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. 记 $X_n = Z_n, n = 1, 2, \dots$. 试求过程 X_n 的转移概率矩阵.

Solution

$$\therefore \mathbb{P}\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\} = \mathbb{P}\{X_{n+1} = i_{n+1}\}$$

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\} = \mathbb{P}\{X_{n+1} = i_{n+1}\}$$

$$\therefore \mathbb{P}\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\} = \mathbb{P}\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\}$$

$\therefore \{X_n\}$ 是一 M.C., 其转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

3.8 对第 7 题中的 Z_i , 令 $X_n = \max\{Z_1, \cdots, Z_n\}, n = 1, 2, \cdots$, 并约定 $X_0 = 0$. X_n 是否为 Markov 链? 如果是, 其转移概率阵是什么?

Solution

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \max\{Z_1, \cdots, Z_n, Z_{n+1}\} \\ &= \max\{\max\{Z_1, \cdots, Z_n\}, Z_{n+1}\} \\ &= \max\{X_n, Z_{n+1}\} \end{aligned}$$

$\therefore \{X_n\}$ 是 M.C.

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & , j < i \\ p_j & , j > i \\ \sum_{k=0}^i p_k & , j = i \\ 0 & , \text{其他} \end{cases}$$

其转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & p_0 + p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 + p_1 + p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

3.9 设 $f_{ij}^{(n)}$ 表示从 i 出发在 n 步转移时首次到达 j 的概率, 试证明

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^n f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}.$$

Solution 1

设 $T_j = \min\{n : n \geq 0 \text{ 且 } X_n = j\}$

$$\begin{aligned}
 \therefore P_{ij}^{(n)} &= \mathbb{P}\{X_n = j | X_0 = i\} = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}\{X_n = j, T_j = k | X_0 = i\} \\
 &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}\{T_j = k | X_0 = i\} P_{jj}^{(n-k)} \\
 &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}\{X_k = j, X_s \neq j (s = 0, 1, \dots, k-1) | X_0 = i\} P_{jj}^{(n-k)} \\
 &= \sum_{k=0}^n f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}
 \end{aligned}$$

Solution 2(郑老师解法)

$$\begin{aligned}
 P_{ij}^{(n)} &= \mathbb{P}\{X_n = j | X_0 = i\} \\
 &= \mathbb{P}\{\underbrace{X_n = j}_C, \underbrace{X_1 = j}_B | \underbrace{X_0 = i}_A\} + \mathbb{P}\{X_n = j, X_1 \neq j | X_0 = i\} \quad \underline{\underline{\mathbb{P}(BC|A) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(C|AB)}} \\
 &= \mathbb{P}\{X_n = j | X_0 = i, X_1 = j\} P_{ij} + \mathbb{P}\{X_n = j, X_1 \neq j | X_0 = i\} \\
 &= f_{ij}^{(1)} P_{jj}^{(n-1)} + \mathbb{P}\{X_n = j, X_1 \neq j | X_0 = i\} \\
 &= f_{ij}^{(1)} P_{jj}^{(n-1)} + \mathbb{P}\{\underbrace{X_n = i}_C, \underbrace{X_2 = j, X_1 \neq j}_B | \underbrace{X_0 = i}_A\} + \mathbb{P}\{X_n = j, X_2 \neq j, X_1 \neq j | X_0 = i\} \\
 &= f_{ij}^{(1)} P_{jj}^{(n-1)} + \mathbb{P}\{X_2 = j, X_1 \neq j | X_0 = i\} \mathbb{P}\{X_n = j | X_0 = i, X_1 \neq j, X_2 = j\} \\
 &\quad + \mathbb{P}\{X_n = j, X_2 \neq j, X_1 \neq j | X_0 = i\} \\
 &= f_{ij}^{(1)} P_{jj}^{(n-1)} + f_{ij}^{(2)} P_{jj}^{(n-2)} + \mathbb{P}\{X_n = j, X_2 \neq j, X_1 \neq j | X_0 = i\} = \dots \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} + \mathbb{P}\{X_n = j, X_k \neq j, k = 1, 2, \dots, n-1 | X_0 = i\} \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} + f_{ij}^{(n)} P_{jj}^{(0)} \\
 &= \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}
 \end{aligned}$$

3.10 对第 7 题中的 Z_i , 若定义 $X_n = \sum_{i=1}^n Z_i, n = 1, 2, \dots, X_0 = 0$, 试证 X_n 为 Markov 链. 并求其转移概率矩阵.

Solution

对 $n \geq 0$ 有

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{P}\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} \quad (i_0 = 0) \\
 &= \mathbb{P}\{Z_{n+1} = i_{n+1} - i_n | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} \\
 &= \mathbb{P}\{Z_{n+1} = i_{n+1} - i_n\} \\
 &= \begin{cases} P_{i_{n+1}-i_n} & , i_{n+1} - i_n = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & , \text{ow} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\} \\
&= \mathbb{P}\{X_n + Z_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\} \\
&= \mathbb{P}\{Z_{n+1} = i_{n+1} - i_n\}
\end{aligned}$$

$\therefore X_n$ 是 M.C.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

3.11 一 Markov 链有状态 $0, 1, 2, 3$ 和转移概率矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

试求 $f_{00}^{(n)}, n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$, 其中 $f_{00}^{(n)}$ 由

$$\mathbb{P}\{X_n = i, X_k \neq i, k = 1, \dots, n-1 | X_0 = i\}$$

定义.

Solution

$$f_{00}^{(1)} = P_{00} = 0, \quad f_{00}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{4}$$

对 $n \geq 2$ 有

$$f_{00}^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

当 $n = 3$ 时, $f_{00}^{(3)} = \frac{1}{8}$

当 $n \geq 4$ 时,

$$f_{00}^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2^{n-2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+2}}$$

3.12 在成败型的重复试验中, 每次试验结果为成功 (S) 或失败 (F). 同一结果相继出现称为一个游程 (run), 比如一结果 $FSSFFFSF$ 中共有两个成功游程, 三个失败游程. 设成功概率为 p , 失败概率为 $q = 1 - p$. 记 X_n 为第 n 次试验后成功游程的长度 (若第 n 次试验, 则 $X_n = 0$). 试证 $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ 为一 Markov 链, 并确定其转移概率阵. 记 T 为返回状态 0 的时间, 试求 T 的分布及均值. 并由此对这一 Markov 链的状态进行分类.

Solution

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_{n+1} & , \text{第 } n+1 \text{ 次试验成功} \\ 0 & , \text{第 } n+1 \text{ 次试验失败} \end{cases} \Rightarrow \{X_n\} \text{ 是 M.C.} \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} p, j = i + 1 \\ q, j = 0 \end{cases}$$

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ q & 0 & 0 & p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$T = \min\{n : X_n = 0, X_s \neq 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n-1)\}$$

$$\mathbb{P}(T = k) = p^{k-1}q \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1}qk \quad \therefore p\mathbb{E}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} p^k qk$$

$$\therefore (1-p)\mathbb{E}(T) = q\mathbb{E}(T) = q + pq + p^2q + \cdots = \frac{q}{1-p} = 1$$

$$\therefore \mathbb{E}(T) = \frac{1}{q} = \frac{1}{1-p} = \mu_0, \text{ 故所有状态互通, 为一类}$$

又 $\sum_{k=1}^{\infty} f_{00}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1}q = 1 = f_{00}$, 故 0 为常返, 且为正常返 ($\mu_0 = \frac{1}{1-p}$). 故本 M.C. 为不可约遍历的.

(或者由 $\pi = \pi P$ 及 $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ 解出其平稳分布为: $\pi = \{\pi_n, n \geq 0\} = \{q, pq, pq^2, \dots, p^n q, \dots\}$) 由此判断 M.C. 为正常返

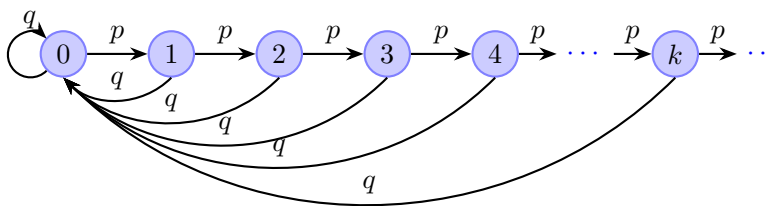


图 1: 3.12 图解

3.13 试证各方向游动的概率相等的对称随机游动在二维时是常返的, 而在三维时却是瞬过的.
(此处答案仅给出二维情况, 三维情况不是作业要求 (逃))

Solution 1(jkadbear 及郑老师解法)

设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为二维对称随机游动, 其状态空间为二维实平面上所有的整数点 (格点), 易知该 M.C. 为

不可约的, 故仅需考虑状态 0(原点 (0,0)) 的常返性, 且仅需考虑 $P_{00}^{(2n)}$.

$$\begin{aligned}
 P_{00}^{(2n)} &= \sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \sum_{k=0}^n \binom{2n}{n} \binom{n}{k}^2 \\
 &= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}}_{=\binom{2n}{n}} \\
 &= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n}^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \left[\frac{(2n)!}{(n!)^2} \right]^2 \xrightarrow{\text{Stirling}} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \left[\frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} \sqrt{2\pi}}{n^{2n+1} e^{-2n} 2\pi} \right]^2 \\
 &= \frac{1}{n\pi}
 \end{aligned}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{(n)}$ 发散, 从而该 M.C. 为常返的. 进一步可以证明 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为零常返的, 且周期为 2

Solution 2

前面大差不差.

$$\begin{aligned}
 P_{ii}^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \binom{2n}{k, k, n-k, n-k} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} \frac{1}{2^{4n}} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(n+1) \cdots (2n)}{k!(n-k)!} \frac{1}{2^{4n}} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(\frac{n+1}{2})(\frac{n+2}{2}) \cdots n}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{2^{3n}} \\
 &> \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{2^{3n}} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \cdot \frac{1}{2^{3n}} > \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^{3n}} > \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} = 1
 \end{aligned}$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} > \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty \Rightarrow i$ 为常返的, 又因为二维随机游动任意状态互达, 故该 Markov 链常返

3.14 某厂对该厂生产的同类产品的三种型号调查顾客的消费习惯. 并把它们归结为 Markov 链模型. 记顾客消费习惯在 A, B, C 三种型号间的转移概率矩阵分别为下列四种. 请依这些转移阵所提供的信息对厂家提出关于 A, B 两种型号的咨询意见.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$(3) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution

(1) (a) 不是概率转移矩阵, 第三行行和不为 1.

(b) 郑老师的作业题将此图改为 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相应的解答为: A, B, C 三个状态均为常返, 且均为吸收态, 但相互之间不可达. 说明三种产品都比较好, 顾客流都很稳定, 但 A 与 B 谁更好一些无法比较;

(2)

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\therefore A, B, C$ 三状态互通, 所有状态可遍历.

设 $\pi = (\pi_A, \pi_B, \pi_C)$ 为经过长时间后三个产品的市场占有率, 则

$$\begin{cases} (\pi_A, \pi_B, \pi_C) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = (\pi_A, \pi_B, \pi_C) \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi_A = \pi_B = \pi_C = \frac{1}{3}$$

\therefore 三个品牌竞争力差不多, 可以都生产. 但从转移概率矩阵来看, A, B 都有需要改进之处

(3) 由归纳法可知

$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n}) & \frac{1}{3^n} & \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n}) \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

可见

$$\begin{cases} \pi_B = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0, \\ (\pi_A, \pi_C) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\pi_A, \pi_C) \\ \pi_A + \pi_C = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi_A = \pi_C = \frac{1}{2}$$

$\therefore B$ 将逐渐淡出市场, 建议停止生产 B , 扩大对 A 的生产. A, C 常返, B 瞬过. A, B 比较, 顾客更倾向于消费 A , 且从长远观点看, 顾客消费 B 的可能性将趋于零, 市场将由 A, C 二分天下.

(4) $\therefore A, B, C$ 三状态互通, 所有状态可遍历.

$$\begin{cases} (\pi_A, \pi_B, \pi_C) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_A, \pi_B, \pi_C) \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi_A = \pi_B = \pi_C = \frac{1}{3}$$

$\therefore A, B, C$ 市场占有率相同, 可维持现状. 与 (2) 同

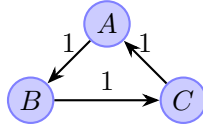


图 2: 3.14(4) 图解

3.15 考虑一有限状态的 Markov 链. 试证明

- (a) 至少有一个状态是常返的
- (b) 任何常返状态必定是正常返的.

Solution 1

(a) 反设所有状态均为瞬过或零常返 (加强结论), 则对 $\forall i \in S$, 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ii}^{(n)} = 0 \quad (1)$$

考虑 $P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}$, 则有

$$\sum_{k=1}^{\ell} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} \leq P_{ij}^{(n)} \leq \sum_{k=1}^{\ell} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=\ell}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} \quad (2)$$

固定 ℓ , 令 $n \rightarrow +\infty$, 则由 (1) 得

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}^{(n)} \leq 0 + \sum_{k=\ell}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} \quad (3)$$

在 (3) 中令 $\ell \rightarrow +\infty$, 由于 $\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} \leq 1$ 收敛

$$\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}^{(n)} = 0 \quad (4)$$

若此有限状态 M.C. 有 N 个状态, 则

$$\sum_{j=1}^N P_{ij}^{(n)} = 1 \quad (5)$$

(5) 中令 $n \rightarrow +\infty$, 由 (4) 得 $0 = 1$, 矛盾 \Rightarrow 至少有一个状态是 (正) 常返的

- (b) 若存在零常返状态 i , 可构造 $C(i) = \{j | i \leftrightarrow j\}$, 则 $C(i)$ 为原 M.C. 的一不可约子 M.C. (有限状态), 于是 $C(i)$ 中所有状态均为零常返, 与有限状态 M.C. 至少有一个正常返状态矛盾, \therefore 任何常返状态均为正常返

Solution 2(郑老师解法)

- (a) 设 M.C. 的状态空间为 $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$. (反证法) 若命题为真, 则 M.C. 的所有状态为瞬过的. 从而对 $\forall i, j \in S$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = 0$, 但另一方面又有:

$$\sum_{j=0}^N P_{ij}^{(n)} = 1 \quad (\forall i \in S, n \in \mathbb{N})$$

两边取极限得到

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N P_{ij}^{(n)} = \sum_{j=0}^N \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = \sum_{j=0}^N 0 = 0$$

矛盾. 从而 (a) 得证

- (b) (反证法) 若命题不真, 则 M.C. 至少存在一个零常返状态. 设 $S_1 \subseteq S$ 为全体零常返状态构成的子集, 易证 S_1 为闭集. 为叙述方便, 不妨设 $S_1 = \{0, 1, 2, \dots, M\}$ ($M \leq N$). 则原 M.C. 限制在 S_1 上仍为一 M.C., 从而有:

$$\sum_{j \in S_1} P_{ij}[w(n)] = \sum_{j=0}^M P_{ij}^{(n)} = 1 \quad (\forall i \in S_1, n \in \mathbb{N}) \quad (6)$$

另一方面, 由类似于 (a) 的理由可知, 对于 $\forall i, j \in S_1$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = 0$, 从而对 (6) 式两边取极限得到:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^M P_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

矛盾. 从而该 M.C. 不可能存在零常返状态. 即 (b) 得证.

3.16 考虑一生长与灾害模型. 这类 Markov 链有状态 $0, 1, 2, \dots$, 当过程处于状态 i 时它既可能以概率 p_i 转移到 $i+1$ (生长) 也能以概率 $q_i = 1 - p_i$ 落回到状态 0 (灾害). 而从状态 “0” 又必然 “无中” 生有. 即 $P_{01} \equiv 1$.

- (a) 试证所有状态为常返的条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p_1 p_2 p_3 \cdots p_n) = 0.$$

- (b) 若此链为常返, 试求其为零常返的条件.

Solution 1

- (a) 其概率转移阵为

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & \\ q_2 & 0 & 0 & p_2 & \\ q_3 & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

易知此 M.C. 不可约, \therefore 只需证状态 0 常返 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} p_1 p_2 \cdots p_n = 0$

显然 $f_{00}^{(0)} = f_{00}^{(1)} = 0, f_{00}^{(2)} = q_1$

$$\begin{aligned} f_{00}^{(n)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{A} \mathbf{B}^{n-2} \mathbf{C}^T, \quad (n \geq 3) \end{aligned}$$

易知

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{n-2} &= \begin{pmatrix} \underbrace{0 \cdots 0}_{n-2 \uparrow} & p_1 \cdots p_{n-2} & 0 & \cdots \\ \underbrace{0 \cdots 0}_{n-2 \uparrow} & 0 & p_2 \cdots p_{n-2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\ \therefore f_{00}^{(n)} &= (\underbrace{0 \cdots 0}_{n-2 \uparrow} p_1 \cdots p_{n-2} 0 0 \cdots) (q_1 \ q_2 \ \cdots)^T = p_1 \cdots p_{n-2} q_{n-1} \\ \therefore f_{00} &= q_1 + \sum_{n=3}^{+\infty} p_1 \cdots p_{n-2} q_{n-1} \\ &= 1 - p_1 + \sum_{n=3}^{+\infty} (p_1 \cdots p_{n-2} - p_1 \cdots p_{n-2} p_{n-1}) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} p_1 p_2 \cdots p_n \end{aligned}$$

而状态 0 常返 $\Leftrightarrow f_{00} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} p_1 p_2 \cdots p_n = 0$.

(b) 只需考虑状态 0,

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} n f_{00}^{(n)} \\ &= 2(1 - p_1) + \sum_{n=3}^{+\infty} n(p_1 \cdots p_{n-2} - p_1 \cdots p_{n-1}) \\ &= 2 + p_1 + p_1 p_2 + p_1 p_2 p_3 + \cdots \end{aligned}$$

若为零常返, 则 $\mu_0 = +\infty \Leftrightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} p_1 \cdots p_n$ 发散 (且通项趋于 0)

Solution 2(郑老师解法)

该 M.C. 的状态转移图可画出:

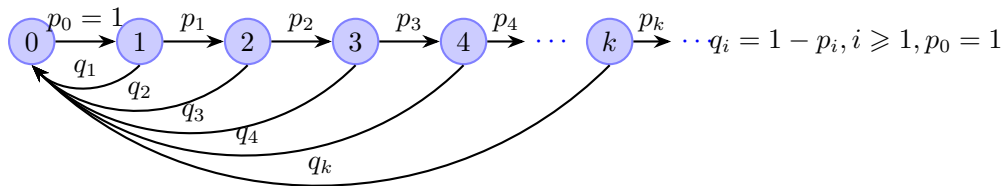


图 3: 3.16 图解

(a) 由上图易知 M.C. 为不可约, 非周期的. 又:

$$f_{00}^{(1)} = 0, f_{00}^{(2)} = q_1 = 1 - p_1, f_{00}^{(3)} = p_1(1 - p_2), \dots, f_{00}^{(n)} = p_1 p_2 \cdots p_{n-2}(1 - p_{n-1})$$

从而

$$f_{00}^{(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} p_1 p_2 \cdots p_{n-2}(1 - p_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - p_1 p_2 \cdots p_n)$$

故 0 及所有状态为常返 $\iff \lim_{n \rightarrow \infty} p_1 p_2 \cdots p_n = 0$

(b) 求解线性方程组 $\pi = \pi P$, $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ 解得:

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_0 \\ \pi_2 = p_1 \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_n = p_1 p_2 \cdots p_{n-1} \pi_0 \end{cases} \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{2 + \sum_{n=1}^{\infty} p_1 p_2 \cdots p_n} \quad \text{故:}$$

- 当 $\sum_{n=1}^{\infty} p_1 p_2 \cdots p_n < +\infty$ 时, 平稳分布 π 存在, 此时 M.C. 为正常返, 亦即为不可约遍历.
- 当 $\sum_{n=1}^{\infty} p_1 p_2 \cdots p_n = +\infty$ 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_1 p_2 \cdots p_n = 0$ 时, 正常返
- 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_1 p_2 \cdots p_n = p > 0$ 时, M.C. 为瞬过的.

亦可直接计算 $\mu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} n p_1 p_2 \cdots p_{n-2}(1 - p_{n-1}) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} p_1 p_2 \cdots p_n$, 从而得出同上的结论

3.17 试计算转移概率阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

的极限分布.

Solution

设 π 为该 M.C. 的平稳分布, $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$

$$\begin{cases} \pi \geq 0 \\ \sum_{i=0}^2 \pi_i = 1 \\ \pi P = \pi \end{cases} \Rightarrow \pi = \left(\frac{5}{14}, \frac{6}{14}, \frac{3}{14} \right)$$

易知该 M.C. 不可约且遍历 \therefore 极限分布为 $\begin{pmatrix} \frac{5}{14} & \frac{6}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{6}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{6}{14} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$

3.18 假定在逐日的天气变化模型中, 每天的阴晴与前两天的状况关系很大. 于是可考虑 4 状态的 Markov 链: 接连两晴天, 一晴一阴, 一阴一晴, 以及接连两阴天, 分别记为 $(S, S), (S, C), (C, S), (C, C)$. 该链的转移概率阵为

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} (S, S) & (S, C) & (C, S) & (C, C) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (S, S) \\ (S, C) \\ (C, S) \\ (C, C) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

试求这一 Markov 链的平稳分布. 并求出长期平均的晴朗天数.

Solution

设其平稳分布为 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$

$$\begin{cases} \pi \geq 0 \\ \sum_{i=0}^3 \pi_i = 1 \\ \pi P = \pi \end{cases} \Rightarrow \pi = \left(\frac{3}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{6}{11} \right)$$

π 反映了 M.C. 中各状态在长期中所占的平均比例

\therefore 一年中晴朗的天数 $= \frac{365}{2} \times \left(\frac{3}{11} \times 2 + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} \right) = 365 \times \frac{4}{11} = 132.7$ (天)

3.19 某人有 M 把伞并在办公室和家之间往返. 如某天他在家时 (办公室时) 下雨了而且家中 (办公室) 有伞他就带一把伞去上班 (回家), 不下雨时他从不带伞. 如果每天与以往独立地早上 (或晚上) 下雨的概率为 p , 试定义一 $M+1$ 状态的 Markov 链以研究他被雨淋湿的机会.

Solution

定义 X_n : 第 n 天早晨家中雨伞数, $\therefore \{X_n, n \geq 0\}$ 为一 M.C., 令 $q = 1 - p$, 可得转移概率矩阵为:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & M-2 & M-1 & M \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ M-1 \\ M \end{matrix} & \begin{pmatrix} q & p & 0 & & & & \\ pq & p^2+q^2 & pq & & & & \\ 0 & pq & p^2+q^2 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & pq & p^2+q^2 & pq \\ & & & & 0 & pq & p^2+q \end{pmatrix} \end{matrix}$$

由状态转移图易知 M.C. 为不可约遍历的, 求其平稳分布 (极限分布) 为: 设 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_M)$ 为其平稳分布

$$\begin{cases} \pi_i \geq 0 \\ \sum_{i=0}^M \pi_i = 1 \\ \pi P = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = \frac{1-p}{M+1-p} \\ \pi_i = \frac{1}{M+1-p} \quad (i=1, 2, \dots, M) \end{cases}$$

易知此 M.C. 遍历,

$\therefore \pi$ 又是其极限分布, 其被雨淋湿的概率为

$$P_{\text{淋}} = p\pi_0 + p(1-p)\pi_M = 2p \frac{1-p}{M+1-p}$$

下面几道题涉及分支过程, 这部分没讲, 故都没写. 直接搬运刘杰班助教的习题解答 [3].

3.20 血液培养在时刻 0 从一个红细胞开始, 一分钟之后红细胞死亡可能出现下面几种情况: 以 $1/4$ 再生 2 个红细胞, 以 $1/2$ 的概率再生 1 个红细胞和 1 个白细胞, 也有 $1/4$ 的概率产生 2 个白细胞. 再过一分钟每个红细胞以同样的规律再生下一代而白细胞则不再生. 并假定每个细胞的行为是独立的.

(a) 从培养开始 $n+1$ 分钟不出现白细胞的概率是多少?

(b) 整个培养过程停止的概率是多少?

Solution

$$(a) p = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdots \left(\frac{1}{4}\right)^{2^n} \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{n+1}-1}$$

- 时刻 0 1 ... n
- 个数 1 2 ... 2^n

(b) 法一:

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = \frac{1}{4}s^0 + \frac{1}{2}s^1 + \frac{1}{4}s^2 \\ \Phi(s) &= s - \frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow s = 1 \Rightarrow P_{\text{消亡}} = 1 \end{aligned}$$

法二:

$$\mathbb{E}(Z_1) = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 = \mu \Rightarrow P_{\text{消亡}} = 1$$

3.21 分支过程中一个体产生后代的分布为 $p_0 = q, p_1 = p$ ($p + q = 1$), 试求第 n 代总体的均值和方差及群体消亡的概率. 如产生后代的分布为 $p_0 = 1/8, p_1 = 1/2, p_2 = 1/4, p_3 = 1/8$, 试回答同样的问题.

Solution

(i) $p_0 = q, p_1 = p$

Z_1 为第 1 代第 1 个个体的后代, $\mathbb{P}(Z_1 = k) = p_k, \mathbb{E}(Z_1) = \mu, \text{Var}(Z_1) = \sigma^2$

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mu^{n+1}$$

$$\text{Var}(X_{n+1}) = \begin{cases} \sigma^2 \mu^n \frac{1-\mu^{n+1}}{1-\mu}, & \mu \neq 1 \\ (n+1)\sigma^2, & \mu = 1 \end{cases}$$

故 $\mu = \mathbb{E}(Z_1) = p \Rightarrow \mathbb{E}(X_n) = p^n$

$$\text{Var}(Z_1) = pq = \sigma^2 \Rightarrow \text{Var}(X_n) = \begin{cases} pq \cdot p^{n-1} \cdot \frac{1-p^n}{1-p} = p^n(1-p^n), & p \neq 1 \\ 0, & p = 1 \end{cases} \quad \Phi(s) = p_{01}p_1s \Rightarrow$$

$$\Phi(s) = s \Rightarrow 1 - p = (1 - p)s$$

$$p \neq 1 \Rightarrow \pi = 1 \quad p = 1, X_n = 1, \pi = 0$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad p_0 &= \frac{1}{8}, p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{4}, p_3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \mathbb{E}(Z_1) = \frac{11}{8}, \quad \text{Var}(Z_1) = \frac{47}{64} \\ &\Rightarrow \mathbb{E}(X_n) = \left(\frac{11}{8}\right)^n, \quad \text{Var}(X_n) = \frac{47}{64} \left(\frac{11}{8}\right)^{n-1} = \frac{47}{24} \left(\frac{11}{8}\right)^{n-1} [1 - \left(\frac{11}{8}\right)^n] \\ \Phi(s) &= s \Rightarrow s = 1 \text{ 或 } \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow \pi = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

3.22 若单一个体产生后代的分布为 $p_0 = q, p_1 = p$ ($p + q = 1$), 并假定过程开始时的祖先数为 1, 试求分支过程第 3 代总数的分布.

Solution

由题意得, $\mathbb{P}(X_n = 1) = p^n, \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p^n$

$$\therefore \mathbb{P}(X_3 = 1) = p^3, \mathbb{P}(X_3 = 0) = 1 - p^3$$

3.23 一连续时间 Markov 链有 0 和 1 两个状态, 在状态 0 和 1 的逗留时间服从参数为 $\lambda > 0$ 及 $\mu > 0$ 的指数分布. 试求在时刻 0 从状态 0 起始, t 时刻后过程处于状态 0 的概率 $P_{00}(t)$

Solution

$$\begin{aligned} P_{00}(t+h) &= \sum_{k \geq 0} P_{0k}(t)P_{k0}(h) \\ &= P_{00}(t)P_{00}(h) + P_{01}(t)P_{10}(h) \\ &= P_{00}(1 - \lambda h + o(h)) + (1 - P_{00}(t))(\mu h + o(h)) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{P_{00}(t+h) - P_{00}(t)}{h} = -(\lambda + \mu)P_{00}(t) + \mu + \frac{o(h)}{h}$$

令 $h \rightarrow 0$, 则 $P'_{00}(t) = -(\lambda + \mu)P_{00}(t) + \mu$

而 $P_{00}(0) = 1$, 解微分方程得

$$P_{00}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

3.24 在第 23 题中如果 $\lambda = \mu$. 定义 $N(t)$ 为过程在 $[0, t]$ 中改变的次数, 试求 $N(t)$ 的概率分布.

Solution

设 $f(t)$ 为状态 0(或 1) 逗留时间的概率密度函数, $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

记 $P_k(t) = \mathbb{P}[N(t) = k | N(0) = 0], \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

$$\begin{aligned} P_0(t) &= \mathbb{P}(\text{在状态 0(或 1) 逗留时间 } t_s > t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(t_s \leq t) \\ &= 1 - \int_0^t \lambda e^{\lambda t_s} dt_s \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

猜想 $P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

设到 $k-1$ 为止猜想成立, 则

$$\begin{aligned} P_k(t) &= \int_0^t f(t_s) P_{k-1}(t-t_s) dt_s \\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda t_s} \frac{[\lambda(t-t_s)]^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda(t-t_s)} dt_s \\ &= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \int_0^t (t-t_s)^{k-1} dt_s \\ &= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

综上, 当 $\lambda = \mu$ 时 $N(t)$ 服从参数为 λt 的 Poisson 分布

3.25 记 $X(t)$ 为纯生过程, 且有

$$\mathbb{P}[X(t+h) - X(t) = 1 | X(t) \text{ 为奇数}] = \alpha h + o(h)$$

$$\mathbb{P}[X(t+h) - X(t) = 1 | X(t) \text{ 为偶数}] = \beta h + o(h)$$

及 $X(0) = 0$, 试分别求事件“ $X(t)$ 为偶数”及“ $X(t)$ 为奇数”的概率.

Solution

本题暂缺

3.26 考虑状态 $0, 1, \dots, N$ 上的纯生过程 $X(t)$, 假定 $X(0) = 0$ 以及 $\lambda_k = (N-k)\lambda, k = 0, 1, \dots, N$. 其中 λ_k 满足

$$P\{X(t+h) - X(t) = 1 | X(t) = k\} = \lambda_k h + o(h),$$

试求 $P_n(t) = P(X(t) = n)$, 这是新生率受群体总数反馈作用的例子.

Solution

本题暂缺

3.27 在某化学反应中, 由分子 A 与 B 发生反应而产生分子 C . 假定在很小时间 h 之内一个分子 A 与 B 接近能发生化学反应的概率与 h 及 A, B 当前的分子数成正比. 假定在反应开始时 A, B 分子数相同, 并记过程 $X(t)$ 为 A 分子在时刻 t 的数目. 试建立其随机过程模型.

Solution

本题暂缺

3.28 有无穷多个服务员的排队系统. 假定顾客以参数为 λ 的 Poisson 过程到达, 而服务员的数量巨大, 可理想化为无穷多个. 顾客一到就与别的顾客相独立地接受服务, 并在时间 h 内完成服务的概率近似为 αh . 记 $X(t)$ 为在时刻 t 正接受服务的顾客总数, 试建立此过程的转移机制的模型.

Solution

本题暂缺

3.29 一个由 N 个部件组成的循环装置. 从 C_1, C_2, \dots 到 C_N 顺时针排列. 第 k 个部件会持续工作一段时间, 其分布是以 λ_k 为参数的指数分布. 一旦它停止工作, 顺时针方向的下一个元件就立即接替它开始运行. 假定各部件及同一部件的不同次运行都是相互独立的. 记 $X(t)$ 为时刻 t 正在运行的部件的序号. 试写出模型及转移概率所满足的微分方程. 当 $N = 2, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$. 初始状态为 1 时试求解 $P_{11}(t)$ 及 $P_{12}(t)$.

Solution

本题暂缺

3.30 试写出纯生过程的 Kolmogorov 向前微分方程. 在初始条件 $P_{ii}(0) = 1$ 下试写出 $P_{ii}(t)$ 及 $P_{ij}(t)$ 应满足的方程. 特别对 $\lambda_j = j\lambda$ 的 Yule 过程求出 $P_{ij}(t)$ 的明显表达式.

Solution

本题暂缺

3.31 两个通讯卫星放入轨道. 每一个卫星的工作寿命都是以 μ 为参数的指数分布. 一旦失效就再放射一颗新卫星替换它. 所需的准备及发射时间服从以 λ 为参数的指数分布. 记 $X(t)$ 为时刻 t 时在轨道中工作的卫星数. 假定这是一个状态空间为 $\{0, 1, 2\}$ 的连续时间 Markov 链模型. 试建立 Kolmogorov 向前及向后微分方程.

Solution

本题暂缺

4 第四章 平稳过程

以下如果没有指明变量 t 的取值范围, 一般视为 $t \in \mathbb{R}$, 平稳过程是指宽平稳过程.

4.1 设 $X(t) = \sin Ut$, 这里 U 为 $(0, 2\pi)$ 上的均匀分布.

(a) 若 $t = 1, 2, \dots$, 证明 $\{X(t), t = 1, 2, \dots\}$ 是宽平稳但不是严平稳过程,

(b) 设 $t \in [0, +\infty)$, 证明 $\{X(t), t \geq 0\}$ 既不是严平稳也不是宽平稳过程.

Solution

(a)

$$\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}(\sin Ut) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sin Ut \, dU = 0 \quad (t = 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X(t), X(s)) &= \mathbb{E}(\sin Ut \cdot \sin Us) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E}[\cos(t-s)U - \cos(t+s)U] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{t-s} \sin(t-s)U \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{t+s} \sin(t+s)U \Big|_0^{2\pi} \right\} \\ &= 0 \quad (t \neq s) \end{aligned}$$

当 $t = s$ 时 $\text{Cov}(X(t), X(s)) = \mathbb{E}(\sin^2 Ut) = \frac{1}{2} \therefore$ 是宽平稳

考虑 $F_t(x) = \mathbb{P}(\sin Ut \leq x)$, 显然 $F_{t+h} = \mathbb{P}[\sin U(t+h) \leq x]$ 与其不一定相同 \therefore 不是严平稳

(b)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(t)] &= \frac{1}{2\pi t} (1 - \cos 2\pi t) \\ \text{Var}[X(t)] &= \mathbb{E} \left(\sin Ut - \frac{1}{2\pi t} (1 - \cos 2\pi t) \right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sin 4\pi t}{8\pi t} - \left(\frac{1 - \cos 2\pi t}{2\pi t} \right)^2 \end{aligned}$$

都与 t 相关 \therefore 不是宽平稳

若其严平稳, 则因二阶矩存在, 应为宽平稳, 矛盾. \therefore 不是严平稳.

4.2 设 $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ 是平稳序列, 定义 $\{X_n^{(i)}, n = 1, 2, \dots\}, i = 1, 2, \dots$, 为

$$\begin{aligned} X_n^{(1)} &= X_n - X_{n-1}, \\ X_n^{(2)} &= X_n^{(1)} - X_{n-1}^{(1)}, \\ &\dots \end{aligned}$$

证明这些序列仍是平稳序列.

Solution

1° $\ell = 0$ 时, $\mathbb{E}(X_n)$ 依定义为常数 C_0

$\text{Cov}(X_n, X_m)$ 依定义为 $n - m$ 的函数 $f_0(n - m) \Rightarrow$ 成立

2° 设当 $\ell \leq k$ 时成立, 则当 $\ell = k + 1$ 时

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_n^{(\ell)} &= \mathbb{E}(X_n^{(k)} - X_{n-1}^{(k)}) = C_k - C_k = 0 \\ \text{Cov}(X^{(k+1)}, X_m^{(k+1)}) &= \mathbb{E}(X_n^{(k+1)} X_m^{(k+1)}) \\ &= \mathbb{E}[(X_n^{(k)} - X_{n-1}^{(k)})(X_m^{(k)} - X_{m-1}^{(k)})] \\ &= \mathbb{E}(X_n^{(k)} X_m^{(k)}) - \mathbb{E}(X_{n-1}^{(k)} X_m^{(k)}) - \mathbb{E}(X_n^{(k)} X_{m-1}^{(k)}) + \mathbb{E}(X_{n-1}^{(k)} X_{m-1}^{(k)}) \\ &= f_k(n - m) - f_k(n - 1 - m) - f_k(n - m + 1) + f_k(n - m) \\ &= f_{\ell}(n - m)\end{aligned}$$

只与 $n - m$ 有关 \therefore 是平稳的

4.3 设 $X_n = \sum_{k=1}^N \sigma_k \sqrt{2} \cos(a_k n - U_k)$, 这里 σ_k 和 a_k 为正常数, $k = 1, \dots, N$; U_1, \dots, U_n 是 $(0, 2\pi)$ 上独立均匀分布随机变量, 证明 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$ 是平稳过程.

Solution

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n) &= \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^N \sigma_k \sqrt{2} (\cos(a_k n) \cos U_k + \sin(a_k n) \sin U_k) \right] \\ &= \sum_{k=1}^N \sigma_k \sqrt{2} [\mathbb{E}(\cos U_k) \cos a_k n + \mathbb{E}(\sin U_k) \sin a_k n] \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X_n, X_m) &= \mathbb{E}(X_n X_m) - \mathbb{E}(X_n) \mathbb{E}(X_m) = \mathbb{E}(X_n X_m) \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^N \sigma_k \sqrt{2} \cos(a_k n - U_k) \sum_{j=1}^N \sigma_j \sqrt{2} \cos(a_j m - U_j) \right] \\ &= \sum_{k=1}^N 2\sigma_k^2 \mathbb{E}[\cos(a_k n - U_k) \cos(a_k m - U_k)] + \sum_{k \neq j} 2\sigma_k \sigma_j \mathbb{E}[\cos(a_k n - U_k)] \mathbb{E}[\cos(a_j m - U_j)] \\ &= \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 \mathbb{E}[\cos(a_k(n - m)) + \cos(a_k n + a_k m - 2U_k)] + 0 \\ &= \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 \cos[a_k(n - m)]\end{aligned}$$

只与 $n - m$ 有关 \therefore 宽平稳.

4.4 设 $A_k, k = 1, 2, \dots, n$ 是 n 个实随机变量; $\omega_k, k = 1, 2, \dots, n$, 是 n 个实数. 试问 A_k 以及 A_k 之间应满足怎样的条件才能使

$$Z(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{j\omega_k t}$$

是一个复的平稳过程.

Solution

要求

$$\mathbb{E}[Z(t)] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(A_k e^{j\omega_k t}) = \text{const}$$

$\therefore \mathbb{E}(A_k) = 0$, 要求

$$\text{Cov}(Z(t), Z(s)) = \mathbb{E}[Z(t)\overline{Z(s)}] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{E}(A_k A_{\ell}) \cdot e^{j\omega_k t - j\omega_{\ell} s}$$

只与 $t - s$ 有关

$\therefore \mathbb{E}(A_k A_{\ell}) = 0 \quad (k \neq \ell \text{ 且 } \omega_k \neq \omega_{\ell})$

4.5 设 $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ 是一列独立同分布的随机变量序列, $\mathbb{P}(X_n = 1) = p, \mathbb{P}(X_n = -1) = 1-p, \quad n = 1, 2, \dots$, 令 $S_0 = 0, S_n = (X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}, \quad n = 1, 2, \dots$, 求随机序列 $\{S_n = 1, 2, \dots\}$ 的协方差函数和自相关函数. p 取何值时此序列为平稳序列?

Solution

由题意 $\mathbb{E}(X_n) = 2p - 1, \mathbb{E}(X_n^2) = 1, \mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \sqrt{n}(2p - 1)$

(i)

$$\begin{aligned} \text{Cov}(S_n, S_m) &= \mathbb{E}(S_n S_m) = \mathbb{E}(S_n) \mathbb{E}(S_m) \\ &= \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathbb{E}(X_i X_j) - \sqrt{mn}(2p - 1)^2 \stackrel{\text{不妨设 } m \leq n}{=} \\ &= \frac{1}{\sqrt{mn}} \left(\sum_{i=1}^m \mathbb{E}(X_i^2) + \sum_{(i,j)=(1,1), i \neq j}^{(i,j)=(m,n)} \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(X_j) \right) - \sqrt{mn}(2p - 1)^2 \\ &= \frac{4m}{\sqrt{mn}} p(1 - p) \end{aligned}$$

(ii)

$$r_X(n, m) = \mathbb{E}(S_n S_m) = \frac{4 \min m, n}{\sqrt{mn}} p(1 - p) + \sqrt{mn}(2p - 1)^2$$

(iii) 若 $\{S_n\}$ 平稳, 则 $\mathbb{E}(S_n) \equiv \text{const}$, 由 $\sqrt{2}S_n = \sqrt{n}(2p - 1) \Rightarrow p = \frac{1}{2}$ 但此时 $\text{Cov}(S_n, S_m) = \frac{\min\{m, n\}}{\sqrt{mn}}$ 与 m, n 有关, 故不存在 p 使得序列平稳

4.6 设 $\{X(t)\}$ 是一个平稳过程, 对每个 $t \in \mathbb{R}$, $X'(t)$ 存在. 证明对每个给定的 t , $X(t)$ 与 $X'(t)$ 不相关, 其中 $X'(t) = \frac{dX(t)}{dt}$.

Solution

以下假定求导数和求期望可交换

设 $\mathbb{E}[X(t)] = m, \text{Var}[X(t)] = \sigma^2$

$\therefore \mathbb{E}[X(t + \Delta t)] = m$

$$\begin{aligned}\therefore X'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t} \\ \therefore \mathbb{E}[X'(t)] &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore \text{Cov}(X(t), X'(t)) = \mathbb{E}[X(t)X'(t)] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[(X^2(t))'] = \frac{1}{2}(\mathbb{E}[X^2(t)])' = \frac{1}{2}(\sigma^2 + m^2)' = 0$$

\therefore 不相关

4.7 设 $\{X(t)\}$ 是高斯过程, 均值为 0, 协方差函数 $R(\tau) = 4e^{-2|\tau|}$. 令

$$Z(t) = X(t+1), \quad W(t) = X(t-1),$$

- (i) 求 $\mathbb{E}(Z(t)W(t))$ 和 $\mathbb{E}(Z(t) + W(t))^2$;
- (ii) 求 $Z(t)$ 的密度函数 $f_Z(z)$ 及 $\mathbb{P}(Z(t) < 1)$;
- (iii) 求 $Z(t), W(t)$ 的联合密度 $f_{Z,W}(z, w)$.

Solution

(i)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z(t)W(t)] &= \mathbb{E}[X(t+1)X(t-1)] = R(2) = 4e^{-4} \\ \mathbb{E}[Z(t)W(t)]^2 &= \mathbb{E}[X^2(t+1) + 2X(t+1)X(t-1) + X^2(t-1)] \\ &= 2\mathbb{E}[X^2(t)] + 2R(2) \\ &= 2\{\text{Var}[X(t)] - \mathbb{E}^2[X(t)]\} + 4e^{-4} \\ &= 2R(0) + 4e^{-4} \\ &= 4(1 + e^{-4})\end{aligned}$$

(ii) $Z(t) = X(t+1) \sim N(0, 2^2)$

$$\begin{aligned}\therefore f_Z(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2^2} e^{-\frac{z^2}{2 \cdot 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{z^2}{8}} \\ \therefore \mathbb{P}[Z(t) < 1] &= \int_{-\infty}^1 f_Z(z) dz = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \int_{-\infty}^1 e^{-\frac{z^2}{8}} dz\end{aligned}$$

(iii) 显然 $f_{Z,W}(z, w)$ 为二维正态分布概率密度函数, 协方差矩阵为

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 4e^{-4} \\ 4e^{-4} & 4 \end{pmatrix}$$

其逆矩阵

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4(1-e^{-8})} & -\frac{e^{-4}}{4(1-e^{-8})} \\ -\frac{e^{-4}}{4(1-e^{-8})} & \frac{1}{4(1-e^{-8})} \end{pmatrix}$$

其行列式 $|\mathbf{C}| = 16(1 - e^{-8})$, 期望向量 $\bar{\boldsymbol{\mu}} = (0, 0)$

$$\begin{aligned}\therefore f_{Z,W}(z, w) &= \frac{1}{2\pi|\mathbf{C}|} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left((z, w) - \bar{\boldsymbol{\mu}} \right) \mathbf{C}^{-1} \left((z, w) - \bar{\boldsymbol{\mu}} \right)^T \right\} \\ &= \frac{1}{8\pi\sqrt{1-e^{-8}}} \exp \left\{ -\frac{z^2 + w^2 - 2e^{-4}zw}{8(1-e^{-8})} \right\}\end{aligned}$$

4.8 设 $\{X(t), t \in \mathbf{R}\}$ 是一个严平稳过程, ε 为只取有限个值的随机变量. 证明 $\{Y(t) = X(t - \varepsilon), t \in \mathbf{R}\}$ 仍是一个严平稳过程.

提示: 对 ε 用全概率公式.

Solution

设 ε 可取 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, 则

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{Y(t_1 + h) \leq y_1, \dots, Y(t_k + h) \leq y_k\} \\ &= \mathbb{P}\{X(t_1 - \varepsilon + h) \leq y_1, \dots, X(t_k - \varepsilon + h) \leq y_k\} \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\varepsilon = \varepsilon_i) \mathbb{P}\{X(t_1 - \varepsilon_i + h) \leq y_1, \dots, X(t_k - \varepsilon_i + h) \leq y_k | \varepsilon = \varepsilon_i\} \end{aligned}$$

$\because X(t)$ 严平稳

$$\begin{aligned} \therefore \text{上式} &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\varepsilon = \varepsilon_i) P\{X(t_1 - \varepsilon_i) \leq y_1, \dots, X(t_k - \varepsilon_i) \leq y_k | \varepsilon = \varepsilon_i\} \\ &= \mathbb{P}\{X(t_1 - \varepsilon) \leq y_1, \dots, X(t_k - \varepsilon) \leq y_k\} \\ &= \mathbb{P}\{Y(t_1) \leq y_1, \dots, Y(t_k) \leq y_k\} \end{aligned}$$

$\therefore Y(t)$ 为严平稳.

4.9 设 $\{X(t), t \in \mathbf{R}\}$ 是一个严平稳过程, 构造随机过程 Y 如下: $Y(t) = 1$, 若 $X(t) > 0$; -1 , 若 $X(t) \leq 0$. 证明 $\{Y(t), t \in \mathbf{R}\}$ 是一个平稳过程. 如果进一步假定 $\{X(t), t \in \mathbf{R}\}$ 是均值为零的 Gauss 平稳过程, 证明 $R_Y(\tau)$ 为 $\frac{2}{\pi} \arcsin(R_X(\tau)/R_X(0))$.

Solution

本题暂缺.

4.10 设 $\{X(t)\}$ 是一个复值平稳过程, 证明

$$E|X(t + \tau) - X(t)|^2 = 2\Re(R(0) - R(\tau)).$$

Solution

记 $m = \mathbb{E}[X(t)]$, 则

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X(t + \tau) - X(t)|^2 &= \mathbb{E}[(X(t + \tau) - m) - (X(t) - m)]^2 \\ &= \mathbb{E}|X(t + \tau) - m|^2 + \mathbb{E}|X(t) - m|^2 - \mathbb{E}[(X(t + \tau) - m)\overline{(X(t) - m)}] \\ &\quad - \mathbb{E}[(X(t) - m)\overline{(X(t + \tau) - m)}] \\ &= 2R(0) - R(-\tau) - R(\tau) \end{aligned}$$

又 $\because R(-\tau) = \overline{R(\tau)} \quad \therefore \text{上式} = 2\Re(R(0) - R(\tau))$

4.11 设 $\{X(t)\}$ 是零均值的平稳高斯过程, 协方差函数为 $R(\tau)$, 证明

$$\mathbb{P}(X'(t) \leq a) = \phi\left(\frac{a}{\sqrt{-R''(0)}}\right),$$

其中 $\phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数.

Solution

注意到 $X'(t)$ 服从正态分布

$$\text{而 } \mathbb{E}[X'(t)] = \{\mathbb{E}[X(t)]\}' = 0$$

$$\text{Var}(X'(t)) = \text{Cov}(X'(t), X'(t+0)) = -R''(0)$$

$$\therefore X'(t) \sim N(0, -R''(0))$$

$$\therefore \mathbb{P}(X'(t) \leq a) = \mathbb{P}\left(\frac{X'(t)}{\sqrt{-R''(0)}} \leq \frac{a}{\sqrt{-R''(0)}}\right) = \phi\left(\frac{a}{\sqrt{-R''(0)}}\right)$$

4.12 设 $\{X(t)\}$ 为连续宽平稳过程, 均值 m 未知, 协方差函数为 $R(\tau) = ae^{-b|\tau|}, \tau \in R, a > 0, b > 0$.

对固定的 $T > 0$, 令 $\bar{X} = T^{-1} \int_0^T X(s) ds$. 证明 $\mathbb{E}(\bar{X}) = m$ (即 \bar{X} 是 m 的无偏估计) 以及

$$\text{Var}(\bar{X}) = 2a[(bT)^{-1} - (bT)^{-2}(1 - e^{-bT})].$$

提示: 在上述条件下, 期望号与积分号可以交换.

Solution

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{T} \int_0^T X(s) ds\right] = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}[X(s)] ds = \frac{mT}{T} = m$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{X}) &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{T^2} \left(\int_0^T X(t) dt - m\right) \left(\int_0^T X(s) ds - m\right)\right] \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \mathbb{E}[(X(t) - m)(X(s) - m)] ds dt \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T R(t-s) ds dt \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T ae^{-b|t-s|} ds dt \\ &= \frac{2a}{T^2} \int_0^T dt \int_0^T e^{-b|t-s|} ds \\ &= \frac{2a}{T^2} \int_0^T \frac{1}{b}(1 - e^{-bt}) dt \\ &= 2a[(bT)^{-1} - (bT)^{-2}(1 - e^{-bT})]. \end{aligned}$$

4.13 设 $\{X(t)\}$ 为平稳过程, 设 $\{X(t)\}$ 的 n 阶导数 $X^{(n)}(t)$ 存在, 证明 $\{X^{(n)}(t)\}$ 是平稳过程.

提示: 利用协方差函数性质 4.

Solution

$\mathbb{E}[X^{(n)}(t)] = \{\mathbb{E}[X(t)]\}^{(n)} = 0$, $\text{Cov}(X^{(n)}(t), X^{(n)}(t + \tau)) = (-1)^n R^{(2n)}(\tau)$
 $\therefore \{X^{(n)}(t)\}$ 是平稳过程.

4.14 证明定理 4.1 中关于平稳序列均值的遍历性定理.

提示: 用 Schwarz 不等式

Solution

充分性:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left| \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N X(k) - m \right|^2 \quad (m = \mathbb{E}(X_n)) \\
&= \frac{1}{(2N+1)^2} \mathbb{E} \left(\sum_{k=-N}^N X(k) - m \right)^2 \\
&= \frac{1}{(2N+1)^2} \mathbb{E} \left(\sum_{k=-N}^N X(k) - m \right) \left(\sum_{\ell=-N}^N X(\ell) - m \right) \\
&= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{k=-N}^N \sum_{\ell=-N}^N R(k-\ell) \\
&= \frac{1}{(2N+1)^2} \left[\sum_{\tau=0}^N R(\tau) \cdot 2(2N+1-\tau) - (2N+1)R(0) \right] \\
&\leq \left| \frac{2}{2N+1} \sum_{\tau=0}^N R(\tau) \right| + \left| \frac{1}{2N+1} R(0) \right| \\
&\therefore \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{2N+1} \sum_{\tau=0}^N R(\tau) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{2N-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} R(\tau) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2N}{2N-1} \cdot \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} R(\tau) = 0, \\
&\quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} R(0) = 0, \\
&\therefore \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left| \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N X(k) - m \right|^2 = 0.
\end{aligned}$$

必要性:

记 $\bar{X}_N = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N X_k$, 则有

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{2N+1} \sum_{\tau=0}^{2N} R(\tau) \right]^2 = \left[\frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N \text{Cov}(X_{-N}, X_k) \right]^2 = \left[\text{Cov}(X_{-N}, \bar{X}_N) \right]^2 \\
&\leq \text{Var}(X_{-N}) \text{Var}(\bar{X}_N) \quad (\text{Schwarz 不等式}) \\
&= R(0) \mathbb{E}[(\bar{X}_N - m)^2] \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow +\infty)
\end{aligned}$$

从而有

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{\tau=0}^{2N} R(\tau) = 0,$$

由上易得

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} R(\tau) = 0.$$

4.15 如果 (X_1, X_2, X_3, X_4) 是均值为 0 的联合正态随机向量, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1 X_2 X_3 X_4) &= \text{Cov}(X_1, X_2) \text{Cov}(X_3, X_4) + \text{Cov}(X_1, X_3) \text{Cov}(X_2, X_4) \\ &\quad + \text{Cov}(X_1, X_4) \text{Cov}(X_2, X_3).\end{aligned}$$

利用这个事实证明定理 4.3

Solution

取固定的 $\tau \in \mathbb{Z}$, 记 $X_{n+\tau} X_n \triangleq Y_n$, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_n) &= R_X(\tau)(\text{const}) \\ \text{Cov}(Y_{n+\tau_1}, Y_n) &= \mathbb{E}(Y_{n+\tau_1} Y_n) - R_X^2(\tau) \\ &= \mathbb{E}(X_{n+\tau_1+\tau} X_{n+\tau_1} X_{n+\tau} X_n) - R_X^2(\tau) \\ &= R_X^2(\tau) + R_X^2(\tau_1) + R_X(\tau_1 + \tau) R_X(\tau_1 - \tau) - R_X^2(\tau) \\ &= R_X^2(\tau_1) + R_X(\tau_1 + \tau) R_X(\tau_1 - \tau) \\ &= R_Y(\tau_1)\end{aligned}$$

$\therefore \{Y_n\}$ 是平稳过程. 又易见 $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 的协方差函数遍历性成立的充要条件是 $Y = \{Y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 的均值遍历性成立. 而我们有

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{N} \sum_{\tau_1=0}^{N-1} R_Y(\tau_1) \right| &\leq \frac{1}{N} \sum_{\tau_1=0}^{N-1} |R_Y(\tau_1)| \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{\tau_1=0}^{N-1} \left[R_X^2(\tau_1) + (R_X^2(\tau_1 + \tau) + R_X^2(\tau_1 - \tau)) / 2 \right] \rightarrow 0, (N \rightarrow +\infty)\end{aligned}$$

由均值遍历性定理 (i) 可知, $Y = \{Y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 的均值遍历性成立, 即 $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 的协方差函数遍历性成立.

4.16 设 X_0 为随机变量, 其概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

设 X_{n+1} 在给定 X_0, X_1, \dots, X_n 下是 $(1 - X_n, 1]$ 上的均匀分布, $n = 0, 1, 2, \dots$, 证明 $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ 的均值有遍历性.

Solution

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_0) &= \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3} \\ \mathbb{E}(X_0^2) &= \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2} \\ \mathbb{E}(X_{n+1}) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_{n+1} | X_n)] = \mathbb{E}\left[\int_{1-X_n}^1 \frac{x_{n+1}}{x_n} dx_{n+1}\right] = \mathbb{E}\left(1 - \frac{1}{2}X_n\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_n)\end{aligned}$$

$\therefore \mathbb{E}(X_0) = \frac{2}{3} \quad \therefore \mathbb{E}(X_n) \equiv \frac{1}{2}$ 又有

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X_{n+1}^2|X_n)\right] = \mathbb{E}\left[\int_{1-x_n}^1 \frac{x_{n+1}^2}{x_n} dx_{n+1}\right] = 1 - \mathbb{E}(X_n) + \frac{1}{3}\mathbb{E}(X_n^2)$$

$\therefore \mathbb{E}(X_0^2) = \frac{1}{2} \quad \therefore \mathbb{E}(X_n^2) \equiv \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n X_{n+m}) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X_n X_{n+m}|X_n)\right] = \mathbb{E}\left[X_n \mathbb{E}(X_{n+m}|X_n)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X_n \left(1 - \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_{n+m-1}|X_n)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}(X_n) - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X_n X_{n+m-1}|X_n)\right] \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_n X_{n+m-1})\end{aligned}$$

$$\therefore \mathbb{E}(X_n X_{n+m}) - \frac{4}{9} = -\frac{1}{2}\left(\mathbb{E}(X_n X_{n+m}) - \frac{4}{9}\right) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^m \left(\mathbb{E}(X_n^2) - \frac{4}{9}\right) = \frac{1}{18}\left(-\frac{1}{2}\right)^m$$

$$\therefore R_X(n, n+m) = \mathbb{E}\left(X_n - \frac{2}{3}\right)\left(X_{n+m} - \frac{2}{3}\right) = \mathbb{E}(X_n X_{n+m}) - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}\left(-\frac{1}{2}\right)^m = R(m)$$

$\therefore \{X_n\}$ 是平稳序列, 又 $\lim_{m \rightarrow +\infty} R(m) = 0 \therefore$ 是均值遍历的

4.17 设 $\{\varepsilon_n, n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 为白噪声序列, 令

$$X_n = \alpha X_{n-1} + \varepsilon_n, |\alpha| < 1, n = \cdots, -1, 0, 1, \cdots,$$

则 $X_n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \varepsilon_{n-k}$, 从而证明 $\{X_n, n = \cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$ 为平稳序列. 求出该序列的协方差函数. 此序列是否具有遍历性?

Solution

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \mathbb{E}(\varepsilon_{n-k}) = 0$$

$$\begin{aligned}R_X(n, n+m) &= \text{Cov}(X_n, X_{n+m}) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \varepsilon_{n-k}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha^{\ell} \varepsilon_{m+n-\ell}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha^{k+\ell} \mathbb{E}(\varepsilon_{n-k} \varepsilon_{m+n-\ell}) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{2k+m} \mathbb{E}(\varepsilon_{n-k}^2) \\ &= \alpha^m \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2} \\ &= R(m)\end{aligned}$$

$\therefore \{X_n\}$ 为平稳序列, 又 $\lim_{m \rightarrow +\infty} R(m) = 0, \therefore$ 是均值遍历的

以下没有特殊声明, 所涉及的过程均假定均值函数为 0

4.18 我们称一个随机过程 X 为平稳 Gauss-Markov 过程, 如果 X 是平稳 Gauss 过程, 并且具有 Markov 性, 即对任意的 $s < t$, 任意实数 x_t, x_s, x_u , 有

$$\mathbb{P}(X_t \leq x_t | X_s = x_s, X_u = x_u, u < s) = \mathbb{P}(X_t \leq x_t | X_s = x_s)$$

试证明零均值的平稳 Gauss-Markov 过程的协方差函数 $R(\tau)$ 具有 $Ce^{-a|\tau|}$ 这种形式. 这里 C 为常数

Solution

本题暂缺

4.19 设 $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ 是平稳 Gauss-Markov 序列 (即第 18 题中的 t 取非负整数), 均值为 0. 证明其协方差函数 $R(h)$ 具有 $\sigma^2 a^{|h|}$ 这种形式, 其中 $|a| \leq 1$.

Solution

本题暂缺

4.20 设 $\{X(t)\}$ 为平稳过程, 令 $Y(t) = X(t+a) - X(t-a)$. 分别以 R_X, S_X 和 R_Y, S_Y 记随机过程 X 和 Y 的协方差函数和功率谱密度, 证明

$$R_Y(\tau) = 2R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a),$$

$$S_Y(\omega) = 4S_X(\omega) \sin^2 a\omega.$$

Solution

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \mathbb{E}[X(t+a) - X(t-a)][X(t-\tau+a) - X(t-\tau-a)] \\ &= \mathbb{E}[X(t+a)X(t-\tau-a)] - \mathbb{E}[X(t+a) - X(t-\tau-a)] \\ &\quad - \mathbb{E}[X(t-a)X(t-\tau-a)] + \mathbb{E}[X(t-a) - X(t-\tau-a)] \\ &= R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a) + R_X(\tau) \\ &= 2R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a) \\ S_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_Y(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau+2a) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau-2a) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= S_X(\omega)(2 - e^{2a\omega i} - e^{-2a\omega i}) \\ &= S_X(\omega)(2 - 2\cos 2a\omega) \\ &= 4S_X(\omega) \sin^2 a\omega \end{aligned}$$

4.21 设平稳过程 X 的协方差函数 $R(\tau) = \sigma^2 e^{-\tau^2}$, 试研究其功率谱密度函数的性质.

Solution

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 e^{-\tau^2} e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \sigma^2 e^{-\frac{\omega^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\tau^2 + i\omega\tau - \frac{\omega^2}{4})} d\tau \\ &= \sigma^2 e^{-\frac{\omega^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\tau + \frac{i\omega}{2})^2}{2 \times \frac{1}{2}}} d\tau \\ &= \sigma^2 \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}. \end{aligned}$$

$S(\omega)$ 为 \mathbb{R} 上的实的、偶的、非负且可积的函数.

4.22 设平稳过程 $\{X(t)\}$ 的协方差函数 $R(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau + b^2 e^{-a|\tau|}$, 求功率谱密度函数 $S(\omega)$

Solution

因为 $\cos \omega_0 \tau \longleftrightarrow \pi(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0))$, $e^{-a|\tau|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$

故所求谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{a^2 \pi}{2} (\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)) + \frac{2ab^2}{a^2 + \omega^2}$$

4.23 设 $\{X(t)\}$ 为 Gauss 平稳过程, 均值为零, $R_X(\tau) = Ae^{-a|\tau|} \cos \beta\tau$. 令 $Y(t) = X^2(t)$, 验证 $R_Y(\tau) = A^2 e^{-2a|\tau|} (1 + \cos 2\beta\tau)$

Solution

由课本 4.3.2 节中平方检波的结果可知:

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= 2R_X^2(\tau) = 2A^2 e^{-2a|\tau|} \cos^2 \beta\tau = A^2 e^{-2a|\tau|} (1 + \cos 2\beta\tau) \\ &= A^2 (e^{-2a|\tau|} + e^{-2a|\tau|} \cos 2\beta\tau) \end{aligned}$$

由 Fourier 变换关系:

$$e^{-a|\tau|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \quad e^{-a|\tau|} \cos \omega_0 \tau \longleftrightarrow \frac{a}{a^2 + (\omega + \omega_0)^2} + \frac{a}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2}$$

故可得到 $R_Y(\tau)$ 所对应的谱密度为:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= A^2 \left(\frac{4a}{4a^2 + \omega^2} + \frac{2a}{4a^2 + (\omega + 2\beta)^2} + \frac{2a}{4a^2 + (\omega - 2\beta)^2} \right) \\ &= 2aA^2 \left(\frac{2}{4a^2 + \omega^2} + \frac{1}{4a^2 + (\omega + 2\beta)^2} + \frac{1}{4a^2 + (\omega - 2\beta)^2} \right) \end{aligned}$$

4.24 设 $\{X(t)\}$ 为 Gauss 平稳过程, 均值为零, 功率谱密度 $S(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$. 求 $X(t)$ 落在区间 $[0.5, 1]$ 中的概率.

Solution

$$\begin{aligned}
 R(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega\tau}}{1+\omega^2} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi j \cdot \text{Res} \left[\frac{e^{jz|\tau|}}{1+z^2}, j \right] = \frac{e^{-|\tau|}}{2} \\
 R(0) &= \text{Var}(X(t)) = \mathbb{E}[X^2(t)] = \frac{1}{2} = \sigma^2 \\
 \therefore X(t) &\sim N(0, \frac{1}{2}) \quad \frac{X(t)}{\sigma} = \sqrt{2}X(t) \sim N(0, 1) \\
 \therefore \mathbb{P}[0.5 \leq X(t) \leq 1] &= \mathbb{P} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sqrt{2}X(t) \leq \sqrt{2} \right] = \Phi(\sqrt{2}) - \Phi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)
 \end{aligned}$$

4.25 已知平稳过程 $\{X(t)\}$ 的功率谱密度为 $S(\omega) = \frac{\omega^2+1}{\omega^4+4\omega^2+3}$, 求 $X(t)$ 的均方值.

Solution

$$S(\omega) = \frac{\omega^2}{(\omega^2+1)(\omega^2+3)} = -\frac{1}{2(\omega^2+1)} + \frac{3}{2(\omega^2+3)}$$

故由上题类似的方法可知 $S(\omega)$ 所对应的 $R(\tau) = -\frac{1}{4}e^{-|\tau|} + \frac{\sqrt{3}}{4}e^{-\sqrt{3}|\tau|}$, 从而求得 $X(t)$ 的均方值:

$$\mathbb{E}[X^2(t)] = \text{Var}(X(t)) = R(0) = \frac{\sqrt{3}-1}{4} \quad (\text{假定 } \mathbb{E}[X(t)] = 0)$$

4.26 设 $S(\omega)$ 是功率谱密度函数, 证明 $\frac{d^2 S(\omega)}{d\omega^2}$ 不可能是功率谱密度函数.

Solution 1(郑老师解法)

反证法: 若 $\frac{d^2 S(\omega)}{d\omega^2} \triangleq S''(\omega)$ 为谱密度函数, 则 $S''(\omega) \geq 0$, 从而 $S'(\omega)$ 为单调增.

又 $S'(\omega) \leq 0$ 不可能对任何 $\omega \in \mathbb{R}$ 成立 (否则 $S(\omega)$ 为单调减), 故必存在 $\omega_0 \in \mathbb{R}$, 使得 $S'(\omega_0) = a > 0$, 从而当 $\omega \geq \omega_0$ 时, $S'(\omega) \geq a$, 故而有

$$\int_{\omega_0}^{\omega} S'(t) dt \geq a(\omega - \omega_0), \quad \text{亦即 } S(\omega) \geq S(\omega_0) + a(\omega - \omega_0)$$

这样的 $S(\omega)$ 在 \mathbb{R} 上式不可积的, 矛盾

Solution 2

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 S(\omega)}{d\omega^2} &= \frac{d^2}{d\omega^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} -\tau^2 R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^2 R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau
 \end{aligned}$$

令 $g(\tau) = R(\tau)e^{-j\omega\tau}$, 则存在 $\xi \in \mathbb{R}, s, t$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^2 g(\tau) d\tau &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau^2 \cdot \int_{-\infty}^{\xi} g(\tau) d\tau + \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau^2 \cdot \int_{\xi}^{+\infty} g(\tau) d\tau \\
 &> 0 \cdot \int_{-\infty}^{\xi} g(\tau) d\tau + 0 \cdot \int_{\xi}^{+\infty} g(\tau) d\tau = 0
 \end{aligned}$$

$\therefore \frac{d^2 S(\omega)}{d\omega^2} < 0 \Rightarrow$ 不可能是功率谱密度函数

4.27 求下列协方差函数对应的功率谱密度函数:

$$(1) R(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|} \cos b\tau$$

$$(2) R(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|} (\cos b\tau - ab^{-1} \sin b|\tau|)$$

$$(3) R(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|} (\cos b\tau + ab^{-1} \sin b|\tau|)$$

$$(4) R(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|} (1 + a|\tau| - 2a^2\tau^2 + a^3|\tau|^3/\varepsilon)$$

Solution

$$(1) a\sigma^2 \left[\frac{1}{a^2 + (\omega + b)^2} + \frac{1}{a^2 + (\omega - b)^2} \right]$$

$$(2) \frac{a\sigma^2\omega}{b} \left[\frac{1}{a^2 + (\omega - b)^2} - \frac{1}{a^2 + (\omega + b)^2} \right]$$

$$(3) a\sigma^2 \left[\frac{2 + \frac{\omega}{b}}{a^2 + (\omega + b)^2} + \frac{2 - \frac{\omega}{b}}{a^2 + (\omega - b)^2} \right]$$

$$(4) \frac{2a\sigma^2}{a^2 + \omega^2} + \frac{2a\sigma^2(a^2 - \omega^2)(1 - 4a^2)}{(a^2 + \omega^2)^2} + \frac{4a^3\sigma^2(a^4 - 4a^2\omega^2 + \omega^4)}{(a^2 + \omega^2)^4}$$

4.28 求下列功率谱密度函数对应的协方差函数:

$$(1) S(\omega) = \frac{\omega^2 + 64}{\omega^4 + 29\omega^2 + 100}$$

$$(2) S(\omega) = \frac{1}{(1 + \omega^2)^2}$$

$$(3) S(\omega) = \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{\omega^2 + b_k^2}, N \text{ 为固定的正整数}$$

$$(4) S(\omega) = \begin{cases} a, & |\omega| \leq b, \\ 0, & |\omega| > b \end{cases}$$

$$(5) S(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| < a \text{ 或 } |\omega| \leq 2a, \\ b^2, & a \leq |\omega| \leq 2a. \end{cases}$$

Solution

$$(1) \frac{5}{7}e^{-2|\tau|} - \frac{13}{70}e^{-5|\tau|}$$

$$(2) \frac{1}{4}e^{-|\tau|}(1 + |\tau|)$$

$$(3) \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{2b_k} e^{-b_k|\tau|}$$

$$(4) \frac{a \sin b\tau}{\pi\tau}$$

(5) $\frac{b^2}{\pi\tau}(\sin 2a\tau - \sin a\tau)$

4.29 设 $\{\varepsilon_n, n = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ 为白噪声序列, 均值为 0, 方差为 σ^2 . 求下列序列的谱密度函数:

(1) $X_n = \varepsilon_n + \alpha_1 \varepsilon_{n-1}, n = \dots, -1, 0, 1, \dots$

(2) $X_n = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \varepsilon_{n-k}$, 其中 $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 < \infty$

Solution

本题暂缺

4.30 由书中例 4.15 确定的平稳序列的功率谱密度是周期函数, 试作出 $(\pi, \pi]$ 中谱密度函数的图形, 并讨论当 $|\rho| \rightarrow 1$ 时图形如何变化.

提示: 分 $\rho > 0$ 和 $\rho < 0$ 讨论.

Solution

本题暂缺

4.31 设 $\{X_n, n = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ 为平稳序列, 协方差函数为 $R(\tau)$,

(1) 求 X_{n+1} 的形如 $\hat{X}_{n+1}^{(1)} = aX_n$ 的最小误差方差预报, 这里 a 是待定常数,

(2) 求 X_{n+1} 的形如 $\hat{X}_{n+1}^{(2)} = aX_n + bX_{n-1}$ 的最小均方误差预报, 这里 a 和 b 是待定常数.

(3) 上述两个预报 $\hat{X}_{n+1}^{(1)}$ 和 $\hat{X}_{n+1}^{(2)}$ 中, 哪个预报的均方误差要小些? 试用 $R(\tau)$ 表示它们的差.

(4) 求 X_{n+k} 的形如 $\hat{X}_{n+k} = aX_n + bX_{n+N}$ ($1 \leq k \leq N$), 的最小均方误差内插, 这里 a, b 为待定常数.

(5) 设 $Z_n = \sum_{k=0}^N X_{n+k}$, 其中 N 为固定的正整数. 求 Z_n 的形如 $\hat{Z}_n = aX_n + bX_{n+N}$ 的最小均方误差预报, 其中 a, b 为待定常数

Solution

(1) 设 $\hat{X}^* = aX_n$ 为 X_{n+1} 的最佳预报, 则根据投影定理有:

$$\mathbb{E}(X_{n+1} - \hat{X}^*)bX_n = b\mathbb{E}(X_{n+1}X_n - aX_n^2) = 0 \quad (\forall b \in \mathbb{R})$$

不妨设 $b \neq 0$, 则有 $R(1) - aR(0) = 0 \Rightarrow a = \frac{R(1)}{R(0)}$

(2) 类似可求出:

$$a = \frac{[R(0) - R(2)]R(1)}{R^2(0) - R^2(1)}, \quad b = \frac{[R(0) - R(1)]R(2)}{R^2(0) - R^2(1)}$$

(3) $\hat{X}_{n+1}^{(2)}$ 的均方误差较小, 且有:

$$\mathbb{E}[X_{n+1} - \hat{X}_{n+1}^{(2)}]^2 - \mathbb{E}[X_{n+1} - \hat{X}_{n+1}^{(1)}]^2 = \frac{[R^2(1) - R(0)R(2)]^2}{R^2(0) - R^2(1)}$$

(4)

$$a = \frac{R(0)R(k) - R(N-k)R(N)}{R^2(0) - R^2(N)}, \quad b = \frac{R(0)R(N-k) - R(k)R(N)}{R^2(0) - R^2(N)}$$

(5)

$$a = b = \frac{\sum_{k=0}^N R(k)}{R(0) + R(N)}$$

4.32 设平稳序列 $\{X_n, n = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ 的均值为零, 协方差函数为 $R(h) = \rho^{|h|}, |\rho| < 1, h = 0, 1, \dots$. 求 X_{n+1} 根据 $\{X_k, k \leq n\}$ 的线性最佳预报 \hat{X}_{n+1} .

Solution

本题暂缺

以下设 $\{\varepsilon_n, n = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ 是均值为 0, 方差为 1 的白噪声序列

4.33 证明没有一个平稳序列 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$ 能满足 $X_n = X_{n-1} + \varepsilon_n, n = 0, \pm 1, \dots$.

Solution

本题暂缺

4.34 证明如下两个滑动平均序列

$$X_n = \varepsilon_n + \alpha \varepsilon_{n-1}$$

$$Y_n = \varepsilon_n + \frac{1}{\alpha} \varepsilon_{n-1}$$

有相同的自相关函数.

Solution

(i)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n X_{n+\tau}) &= \mathbb{E}[(\varepsilon_n + \alpha \varepsilon_{n-1})(\varepsilon_{n+\tau} + \alpha \varepsilon_{n+\tau-1})] \\ &= \mathbb{E}(\varepsilon_n \varepsilon_{n+\tau}) + \alpha \mathbb{E}(\varepsilon_n \varepsilon_{n+\tau-1}) + \alpha^2 \mathbb{E}(\varepsilon_{n-1}^2) \end{aligned}$$

$$\tau = 0 \text{ 时, 上式} = \mathbb{E}(\varepsilon_n^2) + 2\alpha \mathbb{E}(\varepsilon_n \varepsilon_{n-1}) + \alpha^2 \mathbb{E}(\varepsilon_{n-1}^2) = (1 + \alpha^2)\sigma^2$$

$$\tau = 1 \text{ 时, 上式} = 0 + \alpha \mathbb{E}(\varepsilon_n^2) = \alpha \sigma^2$$

$$\tau > 1 \text{ 时, 上式} = 0$$

$$r_X(\tau) = \begin{cases} (1 + \alpha^2)\sigma^2 & \tau = 0 \\ \alpha \sigma^2 & \tau = 1 \\ 0 & \tau > 1 \end{cases}$$

(ii)

$$\mathbb{E}(T_n T_{n+\tau}) = \mathbb{E}(\varepsilon_n \varepsilon_{n+\tau}) + \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(\varepsilon_n \varepsilon_{n+\tau-1}) + \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(\varepsilon_{n-1} \varepsilon_{n+\tau}) + \frac{1}{\alpha^2} \mathbb{E}(\varepsilon_{n-1} \varepsilon_{n+\tau-1})$$

$\tau = 0$ 时, 上式 $= (1 + \frac{1}{\alpha^2})\sigma^2$

$\tau = 1$ 时, 上式 $= \frac{1}{\alpha}\sigma^2$

$\tau > 1$ 时, 上式 $= 0$

$$r_Y(\tau) = \begin{cases} (1 + \frac{1}{\alpha^2})\sigma^2 & \tau = 0 \\ \frac{1}{\alpha}\sigma^2 & \tau = 1 \\ 0 & \tau > 1 \end{cases}$$

标准化:

$$r_X(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau = 0 \\ \frac{\alpha}{1+\alpha^2} & \tau = 1 \\ 0 & \tau > 1 \end{cases} \quad r_Y(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau = 0 \\ \frac{\alpha}{1+\alpha^2} & \tau = 1 \\ 0 & \tau > 1 \end{cases}$$

4.35 设 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$ 为 AR(p) 模型:

$$X_n = \alpha_1 X_{n-1} + \dots + \alpha_p X_{n-p} + \varepsilon_n, \quad (n = \dots, -1, 0, 1, \dots)$$

试导出 Yule-Walker 方程:

$$R(h) = \alpha_1 R(h-1) + \dots + \alpha_p R(h-p), \quad h > 0$$

提示: AR(p) 模型两边同乘以 X_{n-k} , 然后取期望.

Solution

本题暂缺

4.36 考虑 AR(p) 模型:

$$X_n = \alpha_1 X_{n-1} + \dots + \alpha_p X_{n-p} + \varepsilon_n, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

假定 $1 - \alpha_1 Z - \dots - \alpha_p Z^p$ 的根都在单位圆外, 求功率谱密度函数.

Solution

本题暂缺

4.37 考虑如下 AR(2) 模型:

$$(1) X_n = 0.5X_{n-1} + 0.3X_{n-2} + \varepsilon_n$$

$$(2) X_n = 0.5X_{n-1} - 0.3X_{n-2} + \varepsilon_n$$

试用 Yule-Walker 方程导出协方差函数, 证明它们的谱密度函数 $S(\omega)$ 是周期函数, 并作出 $S(\omega)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上的图形.

Solution

本题暂缺

4.38 求下列自回归模型的协方差函数和相关函数:

(1) $X_n = 0.8X_{n-1} + \varepsilon_n$

(2) $X_n = 0.4X_{n-1} + \varepsilon_n$

(3) $X_n = -0.5X_{n-1} + \varepsilon_n$

Solution

本题暂缺

4.39 求下列滑动平均模型的协方差函数和相关函数:

(1) $X_n = \varepsilon_n - 0.5\varepsilon_{n-1} - 0.5\varepsilon_{n-2}$

(2) $X_n = \varepsilon_n + 0.6\varepsilon_{n-1} - 0.2\varepsilon_{n-2} - 0.1\varepsilon_{n-3}$

Solution

本题暂缺

4.40 设 $X_n = \varepsilon_n + \beta[\varepsilon_{n-1} + \gamma\varepsilon_{n-2} + \gamma^2\varepsilon_{n-3} + \cdots]$, 这里 β 和 γ 为常数, $|\gamma| < 1$, 记 $\alpha = \gamma - \beta$, $|\alpha| < 1$. 求 X_{n+1} 根据 $\{X_k, k \leq n\}$ 的线性最佳预报.

Solution

本题暂缺

4.41 考虑 AR(2) 模型: $X_n = 1.8X_{n-1} + 0.8X_{n-2} + \varepsilon_n$, 求一步预报及 $\ell > 1$ 步预报 $\hat{X}_{n+1|n}, \hat{X}_{n+\ell|n}$.

Solution

本题暂缺

4.42 考虑 AR(2) 模型: $X_n = X_{n-1} - 0.25X_{n-2} + \varepsilon_n$, 求 $\hat{X}_{n+\ell|n}$ 及 $\mathbb{E}[(X_{n+\ell} - \hat{X}_{n+\ell|n})^2]$.

Solution

本题暂缺

参考文献

- [1] jkadbear 方兆本著随机过程第三版习题答案
Available at https://github.com/jkadbear/Stochastic_Process
- [2] 白鹏. 方兆本等著《随机过程》习题解答 [M].
- [3] 刘杰班助教 随机过程习题课
- [4] 郑班助教 随机过程作业习题解答
- [5] 郑老师 习题课讲义

A 符号说明

符号	中文	英文
$\mathbb{E} E$	期望	Expectation
$\mathbb{P} P$	概率	Probability
\mathbf{P}	状态转移矩阵	State Transition Matrix
$P_{ij}^{(n)}$	i 到 j 的 n 步转移概率	n -step transition probability from i to j
$X \sim \text{Exp}(\lambda)$	指数分布	Exponential Distribution
$X \sim \text{Poi}(\lambda)$	泊松分布	Poisson Distribution