

中国科学技术大学  
2020 ~ 2021 学年第一学期期末考试试卷  
 A 卷       B 卷

课程名称 复变函数 B 课程编号 001548  
 考试时间 2020 年 12 月 13 日 8:30-10:30 考试形式 闭卷

姓 名                  学 号                 

<b>总 分</b>		<b>阅 卷 人</b>	
------------	--	--------------	--

1. (10 分) 将  $f(z) = \frac{1}{z-2} + e^{-z}$  在  $z=0$  处展开为幂级数, 并指出其收敛半径.  
 解.

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2} + e^{-z} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{z^m}{m!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-2^{-n-1} + \frac{(-1)^n}{n!}\right) z^n, \end{aligned}$$

收敛半径为 2.

2. (10 分) 将  $f(z) = \frac{1}{z^3+2z^2}$  在  $1 < |z+1| < +\infty$  展开为洛朗级数.  
 解. 设  $w = 1/(z+1)$ , 则  $0 < |w| < 1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^3+2z^2} &= \frac{w^3}{(1-w)^2(1+w)} = \frac{w^3}{2} \left( \frac{1}{1-w^2} + \frac{1}{(1-w)^2} \right) \\ &= \frac{w^3}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1+(-1)^n}{2} + n+1 \right) w^n = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-3-(-1)^n}{4} (z+1)^{-n}. \end{aligned}$$

3. (5 分) 计算  $(2020+i)(2-i)$ .

解.  $(2020+i)(2-i) = 4040 + 1 + 2i - 2020i = 4041 - 2018i$ .

4. (5 分) 计算  $\operatorname{Arcos} 2$ .

解. 设  $\cos z = 2$ , 则  $\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$ ,

$$e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0.$$

于是  $e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$ ,  $iz = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2n\pi i$ , 即  $z = 2n\pi \pm \ln(2 + \sqrt{3})i, n \in \mathbb{Z}$ .

5. (10 分) 求  $\alpha$  使得  $v(x,y) = \alpha x^2y - y^3 + x + y$  是调和函数, 并求虚部为  $v(x,y)$  且满足  $f(0) = 1$  的解析函数  $f(z)$ .

解. 由  $v_{xx} + v_{yy} = 0$  可知  $2\alpha y - 6y = 0$ , 因此  $\alpha = 3$ . (3 分) 设  $f = u + iv$ , 则由柯西-黎曼方程,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 + 1,$$

因此  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x + g(y)$ . (3 分) 由于

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

即  $-6xy + g'(y) = -(6xy + 1)$ ,  $g(y) = -y + c$ , 从而

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x - y + c,$$

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + x - y + c + i(3x^2y - y^3 + x + y) = z^3 + (1+i)z + c$$

(3 分). 由于  $f(0) = 1$ , 因此  $c = 1$ ,  $f(z) = z^3 + (1+i)z + 1$ . (1 分)

6. (30 分) 求积分 (所有路径均为逆时针)

$$(1) \int_C (e^z + 3z^2 + 1) dz, C : |z| = 2, \operatorname{Re} z > 0.$$

$$(2) \int_C \frac{dz}{z(z-1)^2(z-5)}, C : |z| = 3. \quad (3) \int_C \frac{dz}{(\sin z)(z+6)(z-5)}, C : |z| = 4.$$

$$(4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 2x + 5} dx. \quad (5) \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 + 2\sin^2 \theta)^2}.$$

解. (1) 由于该函数解析, 因此

$$\int_C (e^z + 3z^2 + 1) dz = (e^z + z^3 + z)|_{-2i}^{2i} = e^{2i} - e^{-2i} - 12i = (2\sin 2 - 12)i.$$

(2) 该函数  $f$  在  $|z| < 3$  中有 1 阶极点 0 和 2 阶极点 1, 且

$$\operatorname{Res}[f, 0] = -\frac{1}{5}, \quad \operatorname{Res}[f, 1] = \left(\frac{1}{z(z-5)}\right)'|_{z=1} = \frac{5-2z}{z^2(z-5)^2}|_{z=1} = \frac{3}{16},$$

因此该积分为

$$2\pi i \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{16}\right) = -\frac{\pi i}{40}.$$

(3) 该函数  $f$  在  $|z| < 4$  中有 1 阶极点 0,  $\pi$  且

$$\operatorname{Res}[f, 0] = -\frac{1}{30}, \quad \operatorname{Res}[f, \pi] = \frac{1}{(\pi+6)(5-\pi)},$$

因此该积分为

$$2\pi i \left(-\frac{1}{30} + \frac{1}{(\pi+6)(5-\pi)}\right) = \frac{\pi^2(\pi+1)i}{15(\pi+6)(5-\pi)}.$$

(4) 函数  $R(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 3}$  在上半平面有 1 阶极点  $-1 + 2i$ , 因此

$$\text{Res}[R(z)e^{iz}, -1 + 2i] = \frac{e^{-2-i}}{4i} = \frac{-\sin 1 - i \cos 1}{4e^2},$$

原积分等于

$$\operatorname{Re} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 5} dx \right] = \operatorname{Re} \left[ 2\pi i \frac{-\sin 1 - i \cos 1}{4e^2} \right] = \frac{\pi \cos 1}{2e^2}.$$

(5)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 + 2\sin^2 \theta)^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(2 - \cos 2\theta)^2} = \int_0^\pi \frac{d\theta}{2(2 - \cos \theta)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4(2 - \cos \theta)^2}.$$

令  $z = e^{i\theta}$ , 则原积分等于

$$\int_{|z|=1} \frac{z dz}{i(z^2 - 4z + 1)^2}.$$

设被积函数为  $f(z)$ , 则  $f$  在  $|z| < 1$  上有 2 阶极点  $2 - \sqrt{3}$ , 且

$$\text{Res}[f, 2 - \sqrt{3}] = \left[ \frac{1}{i(z - 2 - \sqrt{3})^2} - \frac{2z}{i(z - 2 - \sqrt{3})^3} \right] \Big|_{z=2-\sqrt{3}} = \frac{1}{6\sqrt{3}i}.$$

从而原积分等于

$$2\pi i \cdot \frac{1}{6\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$$

7. (10 分) 求方程  $z^8 + e^z + 6z + 1 = 0$  在  $1 < |z| < 2$  中根的个数, 并说明理由.

解. 由于在  $|z| = 1$  上

$$|z^8 + e^z + 1| \leq 1 + e + 1 < 6 = |6z|,$$

由罗歇定理, 该方程在  $|z| < 1$  中有 1 个根. 由于在  $|z| = 2$  上

$$|6z + e^z + 1| \leq 12 + e^2 + 1 < 2^8 = |z^8|,$$

由罗歇定理, 该方程在  $|z| < 2$  中有 8 个根. 从而该方程在  $1 < |z| < 2$  中有 7 个根.

8. (10 分) 利用拉氏变换解微分方程

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = te^t \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

解. 设  $Y = Ly$ , 则

$$p^2Y + 2pY + Y = \frac{1}{(p-1)^2},$$

$$Y = \frac{1}{(1+p)^2(1-p)^2} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p-1} \right),$$

$$y = L^{-1}Y = \frac{1}{4}(te^t + te^{-t} + e^{-t} - e^t).$$

9. (10 分) 设  $f$  是域  $|z| > r > 0$  上的解析函数. 证明: 如果对于  $|a| > R > r$ ,  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = f(a)$ , 则积分

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0.$$

证明. 设  $R' > |a|$ , 则函数  $\frac{f(z)}{z-a}$  在  $|z| > R'$  上解析, 因此由多连通区域的柯西积分定理, 对任意  $R'' > R' + |a|$ ,

$$\int_{|z|=R'} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{|z-a|=R''} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

由长大不等式

$$\left| \int_{|z-a|=R''} \frac{f(z)}{z-a} dz - 2\pi i f(a) \right| = \left| \int_{|z-a|=R''} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz \right| \leq 2\pi \max_{|z-a|=R''} |f(z)-f(a)|.$$

令  $R' \rightarrow +\infty$ , 则

$$\int_{|z|=R'} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{|z-a|=R''} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a).$$

设  $D$  为区域  $R < |z| < R'$ ,  $C$  为其边界. 由多连通区域的柯西积分定理

$$\int_{|z|=R'} \frac{f(z)}{z-a} dz - \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a),$$

因此

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0.$$

