

中国科学技术大学

2015—2016 学年第一学期考试试卷

考试科目: 复变函数 (B 型) 得分 _____

学生所在系: _____ 姓名 _____ 学号 _____

一. (共 12 分) 求解以下复方程

$$(1) z^3 + 8 = 0, \quad (2) e^{iz} = 1 + i, \quad (3) |\cos z| = |\sin z|$$

二. (9 分) 已知解析函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, 其实部 $u(x, y) = x^2 - y^2 + 3yx + x + 1$, 且 $f(0) = 1$, 求虚部 $v(x, y)$, 并计算 $f'(1)$.

三 计算积分 (共 36 分)

$$(1) \int_C |z|\bar{z} dz, \quad \text{其中 } C \text{ 是从 } z = -2 \text{ 到 } z = 2 \text{ 沿圆周 } |z| = 2 \text{ 的上半圆}$$

$$(2) \int_{|z|=4} \frac{e^z}{(z-1)^2(z-3)} dz, \quad (3) \int_{|z|=1} z^5 \left(1 - \cos\left(\frac{2}{z}\right)\right) dz;$$

$$(4) \int_{|z|=2} \frac{\cos 2z}{z^2 \sin z} dz, \quad (5) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + e^{i\theta}},$$

$$(6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^4 + 1} dx$$

四. (14 分) 函数 $f(z) = \frac{z}{(z^2 - 4)^2}$

(1) 把 $f(z)$ 在 $z = 0$ 展开成幂级数, 并指出收敛区域。

(2) 把 $f(z)$ 在区域 $0 < |z - 2| < 4$ 展成罗朗级数。

五(6 分) 判断 $\sin z = 2z^4 - 8z^2 + z$ 在 $|z| < 1$ 的根的个数, 并说明理由。

六(10 分) 利用拉普拉斯变换解微分方程:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = te^{2t} \\ y(0) = 0, y'(0) = -3. \end{cases}$$

六(7 分) 设 $f(z)$ 在不包含无穷远点的复平面上除了 $z = 2$ 外都解析, $z = 2$ 是 $f(z)$ 的二级极点, 当 $|z| > 2015$ 时, 存在 $M > 0$, 使 $|f(z)| < M$. 且有 $f(0) = 1, f(1) = 2, f(3) = 0$, 求 $f(z)$ 的表达式。

七(6分) 设 $f(z)$ 在以 a 点为中心的圆盘 $\overline{E} = \{|z - a| \leq 1\}$ 上解析, M 是 $|f(z)|$ 在 \overline{E} 的最大值, 记 $c = f'(a) - 2hM$, 其中 $h > 1$ 为实数, 求证 $f(z) = c$ 在圆盘内部 $\overline{E} = \{|z - a| < 1\}$ 中无解

$$(2) \求 \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{\cos x}{x^4 - 2x^2 + 4} dx .$$

参考答案

一填空题，每题 3 分

$$1. z = (2k\pi + 2) - (\ln 2)i, k \text{ 为整数}, \quad 2. z = \frac{2\pi i}{n!}, \quad 3. z = -\frac{1}{8}$$

$$4. f(z) = z^2 + 2z + 1, \quad 5. n \quad 6. e^x$$

注: 第 4 小题答成 $f(z) = x^2 - y^2 + 2x + 1 + i(2xy + 2y)$ 也算对

二、级数展开题 (每题 7 分)

$$1. f(z) = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \sum_{n=-2}^{+\infty} z^n \quad (0 < |z| < 1)$$

$$2. f(z) = \frac{1}{z-4} \frac{1}{2+(z-4)} = \frac{1}{z-4} \frac{\frac{1}{z-4}}{1+\frac{2}{z-4}}$$

$$= \frac{1}{(z-4)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-2}{z-4} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{(z-4)^{n+2}} \quad (2 < |z-4| < +\infty)$$

三积分计算题 (每题 8 分).

(1) $f(z) = \frac{e^z \sin z}{\cos z}$ 在围道内的奇点为: $z_1 = \frac{\pi}{2}, z_2 = -\frac{\pi}{2}$, 则

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \frac{e^z \sin z}{\cos z} dz &= 2\pi i (Res(f(z), z_1) + Res(f(z), z_2)) \\ &= 2\pi i \left(\left. \frac{e^z \sin z}{(\cos z)'} \right|_{z=z_1} + \left. \frac{e^z \sin z}{(\cos z)'} \right|_{z=z_2} \right) = -2\pi i (e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}) \end{aligned}$$

(2) 记 $f(z) = z^3(1 - \cos \frac{1}{z})$, 则 $f(z) = z^3 \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} + \dots \right) \right)$, 这样 $f(z)$ 的 z^{-1} 系数 $a_{-1} = -\frac{1}{4!}$, 由于闭路中只有唯一奇点 0, 则原积分 $= 2\pi i a_{-1} = -\frac{\pi i}{12}$

(3) 记 $f(z) = \frac{1}{z^3(13-z^2)}$, 闭路中只有唯一奇点 0, $Res[f(z), 0] = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} (z^3 f(z))'' = \frac{1}{169}$, 这样:

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^3(13-z^2)} = 2\pi i Res[f(z), 0] = \frac{2}{169}\pi i$$

(4) 令 $z = e^{i\theta}$, 则 $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 3 \cos \theta} = \int_{|z|=1} f(z) dz$, 其中 $f(z) = \frac{2i}{3z^2 - 10z + 3}$, $f(z)$ 在 $|z| = 1$ 内有唯一奇点 $z_1 = \frac{1}{3}$, 而 $Res[f(z), \frac{1}{3}] = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{3}} ((z - \frac{1}{3})f(z)) = -\frac{i}{4}$, 所以由留数定理,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 3 \cos \theta} = \int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i Res[f(z), \frac{1}{3}] = 2\pi i \times (-\frac{i}{4}) = \frac{\pi}{2}$$

(5) 取 $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}$, 并取围道 $C = [-R, -r] + C_r + [r, R] + C_R$, 其中 $R > r > 0$, C_r 指以原点为中心 r 为半径的上半圆, 即 $C_r = \{z \mid |z| = r, Imz \geq 0\}$. C_R 类似定义. $f(z)$ 在围道 C 内奇点为: $z_1 = 1 + i$. 这样由留数定理:

$$\int_C f(z) dz = \int_{-R}^{-r} f(x) dx + \int_{C_r} f(z) dz + \int_r^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}[f(z), z_1] \quad (1),$$

由大圆弧原理(引理1)或由约当引理(引理3): $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$, 再由小圆弧引理(引理2): $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = -\pi i \text{Res}[f(z), 0] = -\frac{\pi i}{2}$, 而

$$2\pi i \text{Res}[f(z), z_1] = 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = \frac{\pi}{2} e^{-1} ((\cos 1 + \sin 1) + i(\sin 1 - \cos 1)), \text{这样}$$

结合(1)有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2 + 2x + 5)} - \frac{\pi i}{5} = \frac{\pi}{10} e^{-2} ((-\cos 1 - 2\sin 1) + i(-2\cos 1 + \sin 1)).$$

最后比较虚部, 原积分 $= \frac{\pi}{10} e^{-2} (-2\cos 1 + \sin 1) + \frac{\pi}{5}$.

五. (1) 记 $L(y(t)) = Y(p)$, 对方程作 Laplace 变换: 得到:

$$p^2 Y(p) + pY(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow Y(p) = \frac{1}{p^2(p+1)}, \text{最后利用 Laplace 反变换}$$

$$y(t) = \text{Res}[Y(p)e^{pt}, 0] + \text{Res}[Y(p)e^{pt}, -1]$$

$$\text{Res}[Y(p)e^{pt}, 0] = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^{pt}}{(p+1)}' = t - 1, \quad \text{Res}[Y(p)e^{pt}, -1] = \lim_{p \rightarrow -1} \left(\frac{e^{pt}}{p^2}\right) = e^{-t} \text{ 所以原方程解为}$$

$$y(t) = e^{-t} + t - 1$$

(2) 记 $L(y(t)) = Y(p)$, 对方程作 Laplace 变换: 得到:

$$p^2 Y(p) - p - 2 + 2 + 2(pY(p) - 1) + 2Y(p) = \frac{2}{p^2} \Rightarrow Y(p) = \frac{2}{(p^2 + 2p + 2)p^2} + \frac{p}{p^2 + 2p + 2},$$

利用化部分分式的方法, $Y(p) = -\frac{1}{2} \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \frac{1}{p^2} + \frac{\frac{3}{2}(p+1)-1}{(p+1)^2+1}$, 最后利用 Laplace 反变换并结合位移定理得到:

$$y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t$$

七. 1) 证明: 如果 $|f(z)| \equiv R$, 证明 $f(z)$ 一定恒为常数, 这里 R 是正的实常数. 证明: 设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, 依条件: $u^2 + v^2 = R^2$, 两边分别对 x 和 y 求导得到:

$$\begin{cases} uu_x + vv_x = 0 \\ uu_y + vv_y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

利用 C-R 方程 $u_x = v_y, u_y = -v_x$, 上式变为:

$$\begin{cases} uu_x + vv_x = 0 \\ vu_x - uv_x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

把(2)看成 u_x, v_x 的方程组, 再因为 $u^2 + v^2 \neq 0$, 即方程组系数行列式不为 0, 这样解得:

$u_x = v_x = 0$, 再次利用 C-R 方程, 得到: $u_y = v_y = 0$, 这样 u, v 都为常数, 即 $f(z)$ 一定恒为常数, 证闭.

1) 令 $H(z) = f(z) - g(z)$, 这样只要证明在 D 内 $H(z)$ 恒等于 0, 首先, 依条件, $H(a_n) = f(a_n) - g(a_n) = 0, n = 0, 1, 2, \dots$, 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, 且 $H(z)$ 在 a 点连续, 所以 $H(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} H(a_n) = 0$, 这样 a 是 $H(z)$ 的一个零点, 并且不是孤立的.

2) 我们以下证明存在 a 的一个领域 S 使得在 S 内 $H(z)$ 恒等于 0. 用反证法, 假定不然, 则 $H(z) = (z - a)^m \varphi(z)$, 其中 m 为某一正整数, 而 $\varphi(z)$ 解析, $\varphi(a) \neq 0$, 由连续性, 存在

a 的一个领域 v , 在 v 中 $\varphi(z) \neq 0$, 这样在 v 内除 a 点外都有 $H(z) \neq 0$, 这说明 a 是孤立零点。这与 a 不是孤立零点矛盾。这样我们就证明了存在 a 的一个领域 S 使得 $H(z)$ 恒等于 0.

3) 最后, 对与 D 内任意一点 z_0 , 我们总可找折线 L 连接 a 和 z_0 , 利用滚圆法 (即利用 a 为圆心可作圆 S_1 , 使 S_1 内 $H(z)$ 恒为 0, 然后再利用 S_1 与折线 L 的交点再作圆 S_2 , 使 S_2 内 $H(z)$ 恒为 0, 一直作下去直到最后一个圆包含了 z_0) 可证明 $H(z_0) = H(a) = 0$, 这样就证明了结论。

注: 以上前两步已正确论述, 而在第三步未详细论述滚圆法的不扣分。