

随机过程 历年考试真题

2023 版

说明

部分试题或答案有误 (且答案错误率不算低), 若发现排印错误或投稿欢迎联系:

lzw2003@mail.ustc.edu.cn

最后修改于 2023 年 3 月 4 日. 可在主页下载最新版

<http://home.ustc.edu.cn/~cc22155/resource/SPexam.pdf>

没有 title 的 21 级普通学生¹

2023 年 2 月于合肥

更新日志

- **2023.02.27** 2023 版初始版本
- **2023.02.28** 将 2022.6 随机 B 期末试卷重制为 PDF 版
- **2023.03.02** 修正 2020.1 随机 B 期末试卷的超链接跳转, 修改了一下排版, 添加页脚显示总页数. 尝试添加页脚跳转到目录页但水平有限失败 (悲)
- **2023.03.04** 新增 2016.6 随机 B 期末答案, 2017.6 随机 B 期末试卷, 2019.6 随机 B 期末及答案

¹欢迎访问主页: <http://home.ustc.edu.cn/~cc22155>

我终于也能装模作样地在序里写点奇怪的东西了吗 233

目录

1	2012-2013 学年第一学期随机过程期末	1
2	2015-2016 学年第二学期随机过程 B 期末	3
3	2016-2017 学年第二学期随机过程 A 期中	9
4	2016-2017 学年第二学期随机过程 A 期末	11
5	2016-2017 学年第一学期随机过程 B 期末	13
6	2016-2017 学年第二学期随机过程 B 期末	15
7	2017-2018 学年第一学期随机过程 B 期末	17
8	2017-2018 学年第二学期随机过程 B 期末	19
9	2018-2019 学年第一学期随机过程 B 期末	21
10	2018-2019 学年第二学期随机过程 B 期末	25
11	2019-2020 学年第一学期随机过程 B 期末	29
12	2020-2021 学年第二学期随机过程 B 期末	33
13	2021-2022 学年第二学期随机过程 B 期末	35
14	2022-2023 学年第一学期随机过程 B 期末	37

中国科学技术大学

2012—2013 学年第一学期考试试卷

考试科目：随机过程 得分：_____

学生所在系：_____姓 名_____学 号：_____

(2013 年 1 月 22 日，开卷)

一、(20 分) 设有随机过程

$$X(t) = \xi \cos t + \eta \sin t, \quad (0 < t < \pi)$$

其中 ξ 与 η 独立，且都服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ ，试求：

- (1) $\{X(t), 0 < t < \pi\}$ 的均值函数 $\mu_X(t)$ 与协方差函数 $r_X(s, t)$ ；
- (2) $\{X(t), 0 < t < \pi\}$ 的一维与二维分布密度。

二、(20 分) 公路某收费站红、黄、蓝三种颜色的汽车到达数分别为速率 3, 4, 5 的泊松过程，且相互独立，试求：

- (1) 第一辆车（红、黄或蓝色）的平均到达时间及第一辆红车的平均到达时间；
- (2) 红车首先到达的概率；
- (3) 在相继的两辆红车之间恰有 k 辆车到达的概率 ($k = 0, 1, 2, \dots$)。

三、(20 分) 有关某种商品的销售状况共有 24 个季度的连续数据 (1—畅销, 0—滞销)：

1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0,
1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1,

假设该商品销售状况满足齐次马氏链，

- (1) 试确定该马氏链的一步转移概率矩阵 P (用转移频率来近似转移概率)；
- (2) 若现在是畅销，试确定其后第四季度的销售状况；
- (3) 若影响销售的所有因素不变，试分析长期以后销售状况的分布。

四、(18 分) 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为区间 $[0, 3]$ 上的随机游动, 其一步转移概率矩阵为:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

试求质点由状态 k 出发而被状态 0 吸收的概率 p_k 及吸收的平均时间 v_k ($k = 1, 2, 3$)。

五、(22 分) 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为独立同分布的随机序列, 且 $E(X_0) = 0, \text{Var}(X_0) = \sigma^2$ 。

又设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为强度 λ 的泊松过程, 且与 $\{X_n, n \geq 0\}$ 独立。记 $Y(t) = X_{N(t)}, (t \geq 0)$,

- (1) 证明 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 为平稳过程;
- (2) 试求 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 的功率谱密度函数。
- (3) $\{Y(t), t \geq 0\}$ 的均值遍历性是否成立? 为什么?

(完)

中国科学技术大学

2015-2016学年第二学期期末考试试卷 (A卷)

考试科目 随机过程(B) 得分
学生所在系 学号 姓名

(考试时间: 2016年6月24日, 可用计算器)

一、(25分) 判断选择题.

- (1) 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个强度为 $\lambda > 0$ 的Poisson过程,
- a. $\{N(t), t \geq 0\}$ 一定是平稳过程; ()
 - b. 给定 $N(t) = n > 0$, 则第 n 个事件的到达时间服从区间 $[0, t]$ 上的均匀分布; ()
 - c. $\{M(t), t \geq 0\}$ 是另一个强度为 $\gamma > 0$ 的Poisson过程, 则 $\{N(t) + M(t), t \geq 0\}$ 是一个强度为 $\lambda + \gamma$ 的Poisson过程; ()
- (2) 假设一个马氏链的所有状态都是常返的, i 和 j 是两个状态且 $i \rightarrow j$, 则
- a. $j \rightarrow i$; ()
 - b. $P_{ij} > 0$ 或 $P_{ji} > 0$; ()
 - c. $\sum_{i=1}^{\infty} P_{jj}^{(i)} < \infty$; ()
- (3) 下列关于 τ 的函数 $R(\tau)$ 是否可能作为平稳过程或序列的协方差函数
- a. $R(\tau) = e^{-|\tau|}(\tau^2 + 2|\tau| - 1)$; ()
 - b. $R(\tau) = \begin{cases} 1/|\tau|, & \tau \neq 0 \\ 1, & \tau = 0 \end{cases}$; ()
 - c. $R(\tau) = |\tau|e^{-\tau^2/2}$; ()
- (4) 设 $\{X_n, n \in N\}$ 是一个马氏链, 状态空间为 \mathcal{S} . 下面说法是否正确.
- a. $P_{ij}^{(n)} \geq f_{ij}^n$, 其中 $i, j \in \mathcal{S}, n \in N$; ()
 - b. 如果状态 i, j 是互达的, 则存在 n 使得 $P_{ij}^{(n)} > 0, P_{ji}^{(n)} > 0$; ()
 - c. 如果转移矩阵的所有行相同, 则所有状态是属于相同的类; ()
 - d. 如果 $f_{ij} < 1, f_{ji} < 1$, 则 i, j 不是互达的; ()
- (5) 设有四个位置 1, 2, 3, 4 在圆周上逆时针排列, 一粒子在这四个位置上随机游动, 粒子从任何一个位置, 以概率 $2/3$ 逆时针游动到相邻位置, 以概率 $1/3$ 顺时针游动到相邻位置, 以 $X(n) = j$ 表示时刻 n 处在位置 j ($j = 1, 2, 3, 4$). 则 $P(X(n+3) = 3, X(n+1) = 1 | X(n) = 2) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (6) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 且 $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i), i = 1, \dots, n$, 则概率 $P(X_i = \min\{X_1, \dots, X_n\}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、(15分) 经过高速公路收费站的某物流公司的运货车辆数 $N(t)(t \geq 0)$ 为一强度为100的泊松过程。设该公司的运货车分为大、中、小三个类型，三类车的数量比例为2:3:5，又设经过收费站的每辆车属于哪一类是相互独立的。现分别以 $N_1(t)$ 、 $N_2(t)$ 和 $N_3(t)$ 代表到 t 时刻为止经过收费站的大、中、小三类车的数目，

- (1) 问 $N_1(t)$ 、 $N_2(t)$ 和 $N_3(t)$ 分别是什么过程？
- (2) 试证明对固定的 $t > 0$ ， $N_1(t)$ 、 $N_2(t)$ 和 $N_3(t)$ 相互独立；
- (3) 若经过收费站时，大、中、小三类车每辆需缴费80元，50元和30元，试求到时刻 t 为止该公司运货车所缴纳的总费用 $X(t)$ 的期望和方差。

三、(15分) 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一个马氏链,其一步转移概率如下图所示。

- (1) 写出该链的等价类,且讨论所有状态的周期,常返性和正常返性;
- (2) 对所有的 $n > 0$,计算状态1经 n 步首次到达状态3的概率 $f_{13}^{(n)}$;
- (3) 计算从状态6出发首次到达状态5需要的平均步数。

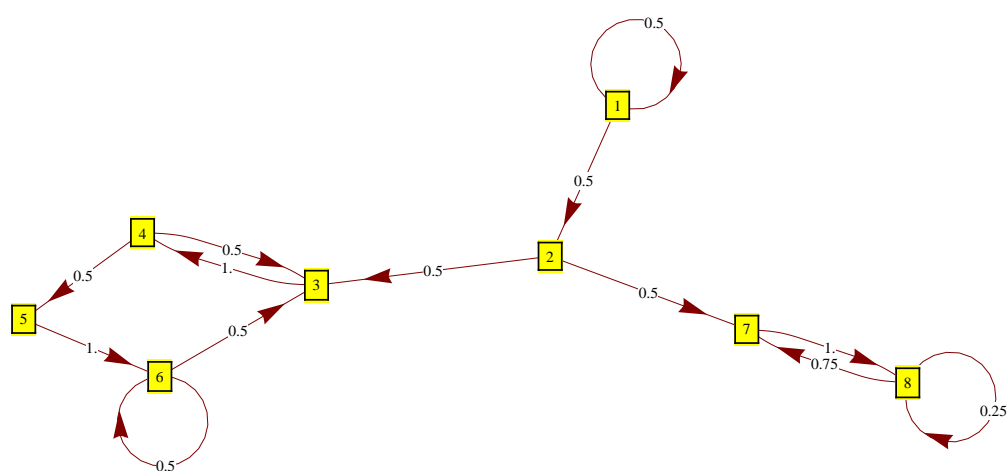


Figure 1: 第三题

四、(15分) 对于某河流每年汛期流量的观测值可用一个三状态的马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 来表示，其中状态-1表示“干旱”，“0”表示正常，“1”表示洪涝。试根据下列25年连续观察数据：

-1, 0, 0, 1, 0, -1, -1, -1, 0, 0, -1, 0, -1, -1, -1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, -1, 1, 1, 1

- (1) 确定该马氏链的一步转移概率矩阵 P (用转移频率估计转移概率);
- (2) 证明该马氏链是不可约遍历的;
- (3) 试分别求出洪涝与干旱发生的平均间隔 (年) .

五、(15分) 考虑一个随机过程

$$X(t) = U \cos(\omega t) + V \sin(\omega t), \quad -\infty < t < \infty,$$

其中 ω 是常数, U 和 V 是随机变量.

(1) 证明 如果 $X(t)$ 是宽平稳过程, 那么 $E[U] = E[V] = 0$;

(2) 证明 $X(t)$ 是宽平稳过程当且仅当

$$E[UV] = 0, \quad E[U^2] = E[V^2] < \infty.$$

六、(15分) 已知平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 的均值函数为 0, 谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 5}{\omega^4 + 9\omega^2 + 14}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

(1) 求 $X(t)$ 的协方差函数 $R(\tau)$;

(2) $X(t)$ 是否有均值遍历性? 为什么?

(完)

随机过程期末考试参考答案与评分标准

(2016 年 6 月 24 日考试)

一、(20 分) 判断是非与填空:

(1): 非, 是, 非; (3 分)

(2): 是, 是, 非; (3 分)

(3): 非, 是, 非; (3 分)

(4) 是, 非, 非, 非; (4 分)

(5): $p_{2,1}p_{1,3}^{(2)} = 5/27$; (4 分)

(6): $\lambda_i / (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$ 。(3 分)

二、(16 分):

(1) (5 分) $N_1(t), N_2(t), N_3(t)$ 分别是强度为 $\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda p_3$ 的泊松过程, 其中:

$$\lambda = 100, p_1 = 0.2, p_2 = 0.3, p_3 = 0.5,$$

即强度分别为: 20, 30, 50。

(2) (6 分) $P\{N_1(t) = n_1, N_2(t) = n_2, N_3(t) = n_3\} =$

$$= P\{N_1(t) = n_1, N_2(t) = n_2, N_3(t) = n_3 \mid N(t) = n\} P\{N(t) = n\} \quad (\text{其中 } n = n_1 + n_2 + n_3)$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda p_1 t)^{n_1}}{n_1!} e^{-\lambda p_1 t} \frac{(\lambda p_2 t)^{n_2}}{n_2!} e^{-\lambda p_2 t} \frac{(\lambda p_3 t)^{n_3}}{n_3!}$$

$$= P\{N_1(t) = n_1\} P\{N_2(t) = n_2\} P\{N_3(t) = n_3\}。$$

(3) (5 分) $X(t) = 80N_1(t) + 50N_2(t) + 30N_3(t),$

$$EX(t) = 4600t, \quad \text{Var}(X(t)) = 248000t。$$

三、(16分):

(1) (5分) {1}与{2}均为瞬过类, 前者为非周期, 后者周期为无穷; {3,4,5,6}与{7,8}均为遍历类;

(2) (6分) $f_{1,3}^{(1)} = 0$, $f_{1,3}^{(n)} = (0.5)^n$, ($n \geq 2$);

(3) (5分) 该马氏链的转移概率矩阵为:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$$

设 $T = \min\{n: n \geq 0, X_n = 5\}$, 记 $v_i = E(T | X_0 = i)$, ($i = 1, 2, \dots, 8$) 则有:

$$v_6 = E(T | X_0 = 6) = \sum_i E(T | X_1 = i) p_{6,i} = 0.5E(T | X_1 = 3) + 0.5E(T | X_1 = 6)$$

$= 0.5(v_3 + 1) + 0.5(v_6 + 1)$, 即有: $v_6 = 0.5(v_3 + 1) + 0.5(v_6 + 1)$; 同理可得:

$$v_3 = v_4 + 1, \quad v_4 = 0.5(v_3 + 1) + 0.5. \quad \text{解得: } v_6 = 6.$$

四、(16分):

$$(1) \quad (5 \text{ 分}) \quad P = \begin{pmatrix} -1 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix};$$

(2) (6分) 由状态转移图分析可证;

(3) (5分) 求解线性方程组:

$$\pi_{-1} = \frac{4}{9}\pi_{-1} + \frac{4}{9}\pi_0, \quad \pi_0 = \frac{4}{9}\pi_{-1} + \frac{3}{9}\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_1, \quad \pi_1 = \frac{1}{9}\pi_{-1} + \frac{2}{9}\pi_0 + \frac{2}{3}\pi_1, \quad \sum_i \pi_i = 1$$

得马氏链极限分布: $\pi = (\frac{12}{41}, \frac{15}{41}, \frac{14}{41})$, 所求者为:

$$\mu_1 = \frac{41}{14} \approx 2.93, \quad \mu_{-1} = \frac{41}{12} \approx 3.42.$$

五、(16分):

(1) (8分) 否则, 设 $E[U] \triangleq u$, $E[V] \triangleq v$ 不全为零, 则 $u^2 + v^2 > 0$, 从而有:

$$\frac{EX(t)}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \sin(\omega t + \alpha) \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ 不为常数, (其中 } \alpha \text{ 满足: } \sin \alpha = u/\sqrt{u^2 + v^2},$$

$$\cos \alpha = v/\sqrt{u^2 + v^2} \text{) 矛盾。}$$

(2) (8分) 充分性易证, 此时 $EX(t) = 0$, $(\forall t \in \mathbb{R})$ 又若记 $E[U^2] = E[V^2] \triangleq \sigma^2$, 则:

$$\gamma_X(t + \tau, t) = EX(t + \tau)X(t) = \sigma^2 \cos(\omega \tau) = R_X(\tau)。$$

必要性: 取 $t_0 \in \mathbb{R}$ 使得: $\sin(\omega t_0) = 0$, 则因为 $X(t)$ 的二阶矩有限, 故有:

$$EX^2(t_0) = \cos^2(\omega t_0)E[U^2] < \infty, \text{ 这说明 } E[U^2] < \infty, \text{ 同理可证: } E[V^2] < \infty。$$

又因 $X(t)$ 为宽平稳, 故其方差: $\text{Var}(X(t)) =$

$$= E[U^2]\cos^2(\omega t) + E[UV]\sin(2\omega t) + E[V^2]\sin^2(\omega t) \text{ 为常数, 对它求导, 应有:}$$

$$\omega[E(V^2) - E(U^2)]\sin(2\omega t) + 2\omega E(UV)\cos(2\omega t) = 0, \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

显然, 与 (1) 类似, 此时必有: $E(UV) = 0$, 且 $E(U^2) = E(V^2)$ 。

六、(16分):

$$(1) (8分) R(\tau) = \frac{3\sqrt{2}}{20} e^{-\sqrt{2}|\tau|} + \frac{\sqrt{7}}{35} e^{-\sqrt{7}|\tau|};$$

(2) (8分) 由于 $\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau < \infty$, 故 $X(t)$ 的均值具有遍历性。

《随机过程A》期中考试试题

姓 名_____ 学 号_____ 得 分_____

(2017年05月08日上午9:45-11:45)

一. (30分) 填空或选择题, 答案可以直接写在试卷上.

1. 设随机变量 X 和 Y 的矩母函数 $g_X(t)$ 和 $g_Y(t)$ 均存在, 则下列说法错误的是().
(A) $g_X(t)$ 能唯一决定 X 的分布
(B) 若 X 的方差存在且 $g_X(t)$ 二阶可导, 则 $\text{Var}(X) = g_X''(0) - [g_X'(0)]^2$
(C) $X + Y$ 的矩母函数也存在且为 $g_X(t)g_Y(t)$
(D) 对任意 $n > 0$, n 阶矩 $E[X_n]$ 一定存在
2. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个强度为 λ 的Poisson过程, 则 $E[N(1)N(2)] =$ _____;
若又已知 $N(3) = 1$, 则 $P(N(2) - N(1) = 1) =$ _____.
3. 关于一般的更新过程, 下列说法中通常正确的是().
(A) 具有平稳独立增量性
(B) 具有独立增量性, 但不具有平稳增量性
(C) 不具有独立增量性, 但具有平稳增量性
(D) 既不具有独立增量性又不具有平稳增量性
4. 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一个 Markov 链, 且一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

若 X_0 的分布律为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, 则 X_2 的分布律为_____;
且该 Markov 链的平稳分布为_____.

5. 在离散时间 Markov 链中, 关于常返性下列说法正确的是().
(A) 若状态 i 常返且 $j \rightarrow i$, 则状态 j 也是常返的
(B) 若状态 i 常返且 $i \rightarrow j$, 则状态 j 不一定是常返的
(C) 若状态 i 零常返, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)}$ 一定存在
(D) 若状态 i 正常返, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)}$ 一定存在
6. 关于离散时间 Markov 链的平稳分布和极限分布, 下列说法正确的是().
(A) 只要有正常返类, 则必有平稳分布
(B) 平稳分布和极限分布都存在, 则它们必相等
(C) 极限分布若存在则与 X_0 的取值无关
(D) 平稳分布若存在则必唯一

7. 关于直线上的简单对称随机游动 $\{X_n, n \geq 0\}$, 下列说法错误的是().
- (A) 所有状态的周期均为 2
- (B) $\{X_n, n \geq 0\}$ 为一个 Markov 链且无平稳分布
- (C) 若 $X_0 = 0$, 则对任意整数 n , 其最终能到达它的概率为 1
- (D) 若 $X_0 = 0$, 则其首次返回原点所需平均时间是有限的
8. 在初始状态为 1 的分支过程中, 若每个个体繁衍下一代个体的数目服从参数为 $\lambda > 1$ 的 Poisson 分布, 则群体最终会灭绝的概率为方程_____的最小正根.
9. 若一连续时间 Markov 链在某个时刻所处的状态为 i , 且已知

$$q_{i,i-1} = \frac{1}{2}, \quad q_{i,i+1} = \frac{1}{3}, \quad q_{i,i+2} = \frac{1}{6}, \quad q_{i,j} = 0, \quad j \notin \{i-1, i, i+1, i+2\},$$

则其状态继续停留在 i 上的时间服从参数为_____的指数分布, 然后转移到 $i-1$ 上的概率为_____.

- 二. (12分) 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是满足第一题8小题条件的分支过程. 对任意 $n \geq 0$, 试求 X_n 的期望 $E[X_n]$ 与方差 $\text{Var}[X_n]$.

- 三. (18分) 设某路口轿车和客车分别按速率为 λ_1 和 λ_2 的 Poisson 过程通过, 且相互独立. 从某个时刻 t 开始, 试求

1. 有第一辆车通过该路口所需的平均时间.
2. 轿车首先通过该路口的概率.
3. 在相继两辆轿车之间恰有 n 辆客车通过该路口的概率, $n = 0, 1, 2, \dots$.

- 四. (20分) 设罐子中装有 4 个球, 它们要么是红色的, 要么是黑色的. 每次从罐中随机取出一个球, 然后换入一个另一种颜色的球. 经过 n 次这样的取球置换后, 记 X_n 为罐中黑球的个数.

1. 写出过程 $\{X_n, n \geq 0\}$ 状态空间, 并说明该过程是否为 Markov 链.
2. 讨论各状态的周期性和常返性(可直接写出你的结论, 无须计算过程).
3. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 试讨论 X_n 的极限分布.
4. 若初始时罐中没有黑球, 则平均需要多少次取球置换后罐中再次无黑球?

- 五. (20分) 两颗通信卫星放入轨道, 每颗卫星的工作寿命均服从参数为 μ 的指数分布. 一旦有某颗卫星失效就再发射一颗新卫星替换它, 所需的准备及发射时间服从参数为 λ 的指数分布. 记 $X(t)$ 为时刻 t 时在轨道中工作的卫星个数, 则 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为一连续时间 Markov 链.

1. 问 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是否为一个生灭过程? 说明你的理由并指出状态空间.
2. 写出该 Markov 链的 Q 矩阵.
3. 建立其 Kolmogorov 向前微分方程(要求: 非矩阵形式).
4. 当时间 $t \rightarrow \infty$ 时, 在轨工作卫星数服从什么分布?

中国科学技术大学

2016—2017学年第二学期考试试卷

考试科目 随机过程(A) 得分 _____

所在系 _____ 学号 _____ 姓名 _____

(2017年6月12日上午14:30–16:30, 半开卷)

一. (30分) 填空或选择题, 答案可以直接写在试卷上.

1. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个强度为 1 的Poisson过程, 则

$$P(N(10) = 9 | N(5) = 4) = \underline{\hspace{2cm}}; \quad E[N(10) | N(5)] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个更新过程, 且 W_k 为其第 k 个更新点 ($k \geq 1$), 下列中一定正确的是().

(A) 事件 $\{N(t) < k\}$ 与 $\{W_k > t\}$ 等价 (B) 事件 $\{N(t) \leq k\}$ 与 $\{W_k \geq t\}$ 等价
(C) 事件 $\{N(t) > k\}$ 与 $\{W_k < t\}$ 等价 (D) 事件 $\{N(t) \geq k\}$ 与 $\{W_k < t\}$ 等价

3. 关于离散时间Markov链, 下列说法正确的是().

(A) 如果某个状态是常返的, 则过程至少会到达它一次
(B) 所有状态不可能都是非常返的
(C) 若有无穷个状态且不可约, 则所有状态不可能都是正常返的
(D) 若两个状态不互达, 则它们有可能都是常返的

4. 设在一连续时间Markov链中, 对某个给定的时刻 $t_0 > 0$, 有 $X(t_0) = i$, 且已知过程离开状态 i 的速率为 ν_i , 则下列说法中错误的是().

(A) 继续在 i 上停留的时间服从参数为 ν_i 的指数分布 $\text{Exp}(\nu_i)$
(B) 若已知下一步会转移到状态 j , 则继续在 i 上停留的时间服从 $\text{Exp}(\nu_i)$ 分布
(C) 在 t_0 前后两次状态转移的时间间隔服从 $\text{Exp}(\nu_i)$ 分布
(D) 若 ν_i 越大, 则继续在 i 上停留的平均时间越短

5. 设在一状态空间为 $\{0, 1, 2\}$ 的生灭过程中, 每个状态上停留的时间均服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布, 且转移概率

$$P_{01} = P_{21} = 1, \quad P_{10} = P_{12} = \frac{1}{2}.$$

那么该过程的转移率矩阵 $Q = \underline{\hspace{2cm}}$, 极限分布 $\pi = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 下列过程中一般不具有Markov性的是().

(A) Poisson过程 (B) 更新过程 (C) Yule过程 (D) Brown运动

7. 下列过程中不是Guass过程的是().

(A) 标准Brown运动 (B) 几何Brown运动
(C) Brown桥过程 (D) 带漂移的Brown运动

8. 设 $\{B(t), t \geq 0\}$ 为标准Brown运动, 且 $B(0) = 0$. 对任意 $0 < s < t < \infty$, 随机向量 $(B(s), B(t))$ 服从二元正态分布 $N(\underline{\hspace{2cm}})$; $P(B(t) > 1 | B(s) = 1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设 $\{B_{00}(t), 0 \leq t \leq 1\}$ 为Brown桥过程, 则对任意 $0 \leq s \leq 1$, $\text{Var}[B_{00}(s)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

二. (12分) 假定某天文台观测到的流星流是一个Poisson过程, 据以往资料统计为每小时平均观测到 3 颗流星. 试求:

1. 在晚上 8 点到 10 点期间, 该天文台没有观察到流星的概率.
2. 凌晨 0 点后该天文台观察到第一颗流星的时间的分布函数.

三. (18分) 独立重复地掷一枚均匀的骰子, 以 X_n 表示前 n 次结果中的最大点数, 则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为一个Markov链.

1. 写出该Markov链的状态空间和一步转移概率矩阵.
2. 求概率 $P(X_{n+2} = 4 | X_n = 3)$ 及 $P(X_2 = X_3 = X_4 = 3)$.
3. 问当 $n \rightarrow \infty$ 时, X_n 的极限分布是否存在? 请写出并证明你的结论.

四. (16分) 考虑直线上从原点出发的简单对称随机游动, 记 X_n 表示时刻 n 过程所处的位置, 且

$$Y_n = X_n^2 - n, \quad Z_n = (-1)^n \cos(\pi X_n).$$

证明 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 和 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 均为关于 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的鞅.

五. (8分) 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为一个鞅, 对任意 $n \geq 0$, 二阶矩 $E[X_n^2]$ 存在且记 $Y_n = X_n^2$, 问 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 是否为一个(上, 下)鞅? 证明你的结论.

六. (16分) 设 $\{B(t), t \geq 0\}$ 为标准Brown运动, 且 $B(0) = 0$.

1. 求 $B(1) + B(2) + B(3)$ 的分布.
2. 在 $B(2) = 1$ 的条件下, 分别求 $B(1)$ 和 $B(3)$ 的分布.

中国科学技术大学

2016-2017学年第一学期期末考试试卷 (A卷)

考试科目 随机过程(B) 得分 _____

学生所在系 _____ 学号 _____ 姓名 _____

(考试时间: 2017年1月11日上午8:30-10:30, 半开卷)

一、(32分) 判断是非与填空题.

- (1) 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个强度为 $\lambda > 0$ 的Poisson过程, 则 $\text{Cov}(N(t), N(s)) =$ _____.
- (2) (判断是非) 设有 $m \geq 1$ 使得对于马氏链的所有状态 i , 有 $P_{i,j}^{(m)} > 0$, 则:
- A $d(j)|m$, 其中 $d(j)$ 为 j 的周期; ()
- B $d(j) = m$; ()
- C j 是非周期的; ()
- D j 的周期为无穷; ()
- (3) 设某路口白、红、灰三种颜色的汽车的到达数量分别为强度为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的Poisson过程到达, 且相互独立。若不论颜色, 第一辆汽车平均到达时间为_____; 第一辆红色汽车的平均到达时间为_____。
- (4) 设 $[0, t]$ 内到达某商店门口的顾客数 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个强度为 $\lambda > 0$ 的Poisson过程, 每个达到的顾客依概率 p 进入店内, 以概率 $1 - p$ 不进店即离开, 且顾客是否进店是相互独立的; 进店的每个顾客又独立地以概率 q 进行消费, 以概率 $1 - q$ 不消费。则进店的顾客数的均值和方差为_____和_____; 消费的顾客数的均值和方差为_____和_____。
- (5) 设 $X(t) = A \sin(2\pi\Theta_1 t + \Theta_2)$, A 为常数, Θ_1, Θ_2 为相互独立的随机变量, Θ_1 的密度函数为一个偶函数, 而 Θ_2 服从区间 $[-\pi, \pi]$ 上的均匀分布, 则其均值函数为_____, 协方差函数为_____, 从而该过程为_____。
- (6) 设马氏链的状态 i 是周期为 d 的常返状态, μ_i 为状态 i 的平均常返时, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(nd)} =$ _____。

二、(16分) 设某人甲负责订阅杂志, 前来订阅的顾客数是日均到达率为6 的泊松过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 。

若每个顾客的订阅季数 $Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ 且各人的选择相互独立。设 $N_i(t)$ 为订阅 i 季杂志的顾客人数, $i = 1, 2, 3$. 并以 $\{X(t)\}$ 表示到时刻 t 为止甲所得全部手续费 (假设每订出一季杂志, 甲可得手续费 1 元),

- (1) 问 $N_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ 分别是什么过程? 它们是否相互独立?
- (2) 试求: $E[X(t)]$, $\text{Var}(X(t))$, 及 $X(t)$ 的矩母函数 $g_{X(t)}(u) = E[e^{uX(t)}]$.

三、(20分) 设有夏普、大金两个品牌的空气净化器在某地市场占有率开始时 ($n = 0$) 均为1/3(其他品牌总的市场占有率为1/3). 而每过一个月 (单位时间) 顾客消费倾向的改变可以用一个三状态的马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 来描述,其一步转移概率(状态1、2、3分别表示购买夏普、大金、其他品牌的空气净化器)如下图所示.

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.35 & 0.3 & 0.35 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

- (1) 证明该链为不可约、遍历的;
- (2) 问两个月后各品牌的市场占有率将变成多少?
- (3) 各品牌对市场的占有率最终会稳定于什么样的比例?

四、(16分) 逐个随机地把球放入到 a 个盒子中去 (可重复放), 以 X_n 表示放了 n 个球之后的空盒数, 则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为马氏链,

- (1) 写出该马氏链的转移概率矩阵 P , 并进行状态分类;
- (2) 试求放满 a 个盒子的平均时间 (次数)。

五、(16分) 已知平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 的均值函数为 0, 谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 5}{\omega^4 + 11\omega^2 + 24}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

- (1) 求 $X(t)$ 的协方差函数 $R(\tau)$;
- (2) $X(t)$ 是否有均值遍历性? 为什么?

(完)

中国科学技术大学

2016—2017学年第二学期考试试卷

考试科目 随机过程(B) 得分

所在系 学号 姓名

(2017年6月22日上午8:30-10:30, 半开卷)

一. (29分) 填空或选择题.

1. 设随机变量 X 和 Y 的矩母函数 $g_X(t)$ 和 $g_Y(t)$ 均存在, 则下列说法错误的是().
 (A) $g_X(t)$ 能唯一决定 X 的分布
 (B) 若 X 的方差存在且 $g_X(t)$ 二阶可导, 则 $\text{Var}(X) = g_X''(0) - [g_X'(0)]^2$
 (C) $X + Y$ 的矩母函数也存在且为 $g_X(t)g_Y(t)$
 (D) 对任意 $n > 0$, n 阶矩 $E[X^n]$ 一定存在
2. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个强度为 λ 的Poisson过程, 则 $E[N(1)N(2)] = \underline{\hspace{2cm}}$;
 $E[N(10)|N(5)] = \underline{\hspace{2cm}}$; 若又已知 $N(3) = 1$, 则 $P(N(2) - N(1) = 1) = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 假定某天文台观测到的流星流是一个Poisson过程, 据以往资料统计为每小时平均观测到 3 颗流星. 则在晚上 8 点到 10 点期间, 该天文台没有观察到流星的概率是 . 凌晨 0 点后该天文台观察到第一颗流星的时间的分布是 .
4. 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一个Markov 链, 且一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

若 X_0 的分布律为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, 则 X_2 的分布律为 ; 且该Markov 链的平稳分布为 .

5. 在离散时间Markov 链中, 关于常返性下列说法正确的是().
 (A) 若状态 i 常返且 $j \rightarrow i$, 则状态 j 也是常返的
 (B) 若状态 i 常返且 $i \rightarrow j$, 则状态 j 不一定是常返的
 (C) 若状态 i 零常返, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)}$ 一定存在
 (D) 若状态 i 正常返, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)}$ 一定存在
6. 关于离散时间Markov 链的平稳分布和极限分布, 下列说法正确的是().
 (A) 只要有正常返类, 则必有平稳分布
 (B) 平稳分布和极限分布都存在, 则它们必相等
 (C) 极限分布若存在则与 X_0 的取值无关
 (D) 平稳分布若存在则必唯一
7. 关于直线上的简单对称随机游动 $\{X_n, n \geq 0\}$, 下列说法错误的是().
 (A) 所有状态的周期均为2

- (B) $\{X_n, n \geq 0\}$ 为一个 Markov 链且无平稳分布
 (C) 若 $X_0 = 0$, 则对任意整数 n , 其最终能到达它的概率为 1
 (D) 若 $X_0 = 0$, 则其首次返回原点所需平均时间是有限的
8. 关于平稳过程, 下列说法正确的是().
 (A) 宽平稳过程具有平稳增量性
 (B) Poisson 过程是宽平稳过程
 (C) 初始状态服从平稳分布的 Markov 过程为严平稳过程
 (D) 严平稳过程一定是宽平稳过程

二. (12分) 假设一个电子管内到达阳极的电子数目 $N(t)$ 服从参数为 λ 的 Poisson 过程, 每个电子携带能量相互独立且与电子数目 $N(t)$ 相互独立, 并均服从区间 $[1, 2]$ 上的均匀分布, 设到 t 时刻的阳极接受的能量为 $S(t)$. 求 $S(t)$ 的均值 $E[S(t)]$ 和方差 $\text{Var}[S(t)]$.

三. (20分) 现有红色、黄色、蓝色三种汽车, 分别按强度为 λ_1, λ_2 和 λ_3 且相互独立的 Poisson 过程通过公路上的某观察站,

- (1) 若不论颜色, 求第一辆车通过该观察站所需的时间的概率密度函数与期望;
- (2) 在已知时刻 t_0 观察到一辆红车的条件下,
 - (a) 下一辆仍是红车的概率是多少? (b) 下一辆是黄车的概率是多少?
- (3) 已知时刻 t_0 观察到一辆红车的条件下, 接下来通过的 k 辆全是红车, 而后是非红车的概率是多少? ($k \geq 0$)
- (4) 在相继两辆红车之间通过该观察站的蓝车恰有 n 辆的概率, $n = 0, 1, 2, \dots$.

四. (15分) 设马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的状态空间为 $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ (全体非负整数), 转移概率为

$$P_{i,i+1} = P_{i,0} = \frac{1}{2}, \quad i \geq 0.$$

- (1) 证明该马氏链为不可约遍历的;
- (2) 试求该马氏链的极限分布 $\pi = \{\pi_i, i \geq 0\}$.

五. (8分) 设 $X(t) = Y \cos(\omega t + \Theta)$, 其中 ω 为常数, Y 服从均值为 μ , 方差为 σ^2 正态分布, Θ 服从区间 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布, 且 Y 与 Θ 相互独立. 试判断 $X(t)$ 是否为宽平稳过程. 如是, 请给出证明; 否则, 请说明原因.

六. (16分) 已知平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 的均值函数为 0, 谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 21}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

- (1) 求 $X(t)$ 的协方差函数 $R(\tau)$;
- (2) $X(t)$ 是否有均值遍历性? 为什么?

中国科学技术大学期末考试题

考试科目：随机过程（B）

得分：_____

学生所在系：_____ 姓名：_____ 学号：_____

（2018 年 1 月 9 日，半开卷）

一、（20 分）判断是非与填空：

（1）（每空 2 分）设 $X = \{X_n, n \geq 0\}$ 为一不可约、有限（ N 个）状态的马氏链，且其转移概率矩阵 P 为双随机的（行和与列和均为 1），则：

a. X 的平稳分布不一定存在（ ）； b. X 的平稳分布存在但不必唯一（ ）；

c. X 的平稳分布为 $(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N})$ （ ）； d. X 的极限分布为： $(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N})$ （ ）。

（2）（每空 3 分）设公路上某观察站红、黄、蓝三种颜色的汽车到达数分别是强度为 2、3 和 5（辆/分钟）的泊松过程。则：

a. 第一辆车到达的平均时间为（ ）； b. 红车首先到达的概率为（ ）；

c. 在第一辆红车到达之前恰好到达 k 辆非红车的概率为（ ）。

（3）（3 分）有关某种商品的销售状况共有 24 个季度的连续数据（1—畅销，0—滞销）：

1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0,
1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1,

若该商品销售状况满足齐次马氏链，则据以上数据可估计出该马氏链的转移概率矩阵 P 为（ ）。

二、（15 分）设到达某计数器的脉冲数 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一速率为 λ 的泊松过程，每个脉冲被记录的

概率均为 p ，且各脉冲是否被记录是相互独立的。现以 $N_1(t)$ 表示被记录的脉冲数，试求 $N_1(t)$ 的矩母

函数 $g_{N_1(t)}(v)$ 以及 $EN_1(t)$, $Var[N_1(t)]$ 和 $Cov(N_1(s), N_1(t))$ 。

三、（20 分）设马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的转移概率矩阵为：

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

（1）设 $X_0 = 3$ ，试求： $\pi_i(1) = P\{X_1 = i\}$ ， $\pi_i(2) = P\{X_2 = i\}$ ， $(i = 1, 2, 3)$ ，并求：

$E(X_1)$ 和 $E(X_2)$ ；

(2) 试求该马氏链的极限分布: $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}^{(n)}, (i, j = 1, 2, 3)$;

(3) 当初始分布 $\pi_i(0) (i = 1, 2, 3)$ 为什么分布时, 该马氏链为严格平稳过程? 并求此时的 $E(X_n)$ 。

四、(15 分) 把一些球逐个随机地放到 a 个格子中去, 若 n 个球放进了 k 个格子, 则称系统在时刻 n 的状态为 k 。试用一马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 描述此系统, 并且

(1) 写出该马氏链的转移概率矩阵 P , 并讨论其状态分类;

(2) 证明过程由状态 $k (0 \leq k \leq a-1)$ 出发, 必然进入状态 a ;

(3) 试求放满 a 个格子的平均时间 (假定 $X_0 = 0$)。

五、(15 分) 设有随机过程 $X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta)$, 其中 Θ 服从均匀分布 $U(0, 2\pi)$, A 服从瑞利分布:

$$A \sim f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}), (x > 0)$$

且 A 与 Θ 独立,

(1) 证明 $\{X(t), t \in R\}$ 为宽平稳过程;

(2) 试求 $\{X(t), t \in R\}$ 的功率谱密度函数 $S(\omega)$ 。

六、(15 分) 在下列四个关于 ω 的函数中:

$$S_1(\omega) = \frac{\omega^2 + 9}{(\omega^2 + 4)(\omega + 1)^2}, \quad S_2(\omega) = \frac{\omega^2 + 64}{\omega^4 + 29\omega^2 + 100},$$

$$S_3(\omega) = \frac{\omega^2 - 4}{\omega^4 + 4\omega^2 + 3}, \quad S_4(\omega) = \frac{\omega^2 \cos \omega}{\omega^4 + 1}$$

(1) 哪一个可以作为一个平稳过程 $\{X(t), t \in R\}$ (均值为 0) 的功率谱密度函数? 并求其所对应的协方差函数 $R(\tau)$;

(2) 该平稳过程的均值是否具有遍历性? 为什么?

(完)

中国科学技术大学

2017-2018 第二学期期末考试题 (2)

考试科目: 随机过程 (B) 得分: _____

学生所在系: _____ 姓名: _____ 学号: _____

(2018 年 6 月 29 日, 半开卷)

一、(24 分。填空题每空 3 分, 其余每空 2 分) 判断是非与填空:

(1) (判断是非) 设 S 为一不可约马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的状态空间, 则对任意 $i, j \in S$:

(a) i, j 均为正常返状态 () ; (b) $\mu_i = \mu_j$, 其中 $\mu_i = \sum_{n=0}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$ () ;

(c) i, j 未必为常返状态 () ; (d) $d(i) = d(j) \in (0, \infty)$ () 。

(2) (判断是非) 设马氏链共有 n 个状态, 且 $i \rightarrow j$, 则:

(a) 可用至多 n 步由 i 转移到 j () ; (b) 由 i 转移到 j 至少要用 n 步 () 。

(3) (填空) 设粒子在数轴上由 0 出发作对称随机游动, 则它回到 0 的平均时间为 () 。

(4) (填空) 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一强度为 λ 的 Poisson 过程, $s, t > 0$, 则:

$P\{N(s) = k | N(s+t) = n\} = (\quad) (0 \leq k \leq n)$; $E\{N(s+t) | N(s)\}$ 的期望为 () , 方差为 () 。

二、(15 分) 设某路段发生交通事故的次数 $N(t)$ 为一 Poisson 过程, 且平均每月发生交通事故 2 次。又设 $t=0$ 表示去年 12 月底, 试求:

(1) 到今年 3 月底为止未发生交通事故的概率是多少?

(2) 若已知到今年 3 月底已发生了 4 次交通事故, 问到 6 月底至少发生 7 次交通事故的概率是多少?

(3) 若每次事故造成的经济损失 Y (单位: 万元) 服从参数为 0.1 的指数分布, 且各次损失相互独立, 试求到 6 月底为止因交通事故而造成的总损失的期望值。

三、(15 分) 一只蚂蚁沿着一个等边三角形 (顶点记为 a, b, c) 的边爬行, 假定在时刻 n 它位于某一顶点 (例如 a), 则在下一时刻 ($n+1$) 它爬到另外两个顶点 (b 和 c) 的概率都等于 $1/2$ 。试用一个马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 描述这个过程 (状态: a, b, c), 并且

(1) 写出该马氏链的转移概率矩阵 P ;

(2) 试求 $P^{(n)} = P^n$;

(3) 试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = ?$

四、(18分) 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为区间 $[0, 3]$ 上的随机游动, 其转移概率矩阵为:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

试求质点由 k 出发而被 0 吸收的概率 p_k 及它被吸收的平均步数 v_k , ($k = 1, 2, 3$)。

五、(16分) 设 A 与 B 独立, 都服从 $[-1, 1]$ 上的均匀分布, 定义随机过程:

$$X(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t, \quad (t \in R, \omega_0 \text{ 为非零常数})$$

(1) 证明 $\{X(t), t \in R\}$ 为宽平稳过程;

(2) 试求其功率谱密度函数 $S(\omega)$ 。

六、(12分) 设平稳过程 $X = \{X(t), t \in R\}$ (均值为 0) 的功率谱密度函数为:

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 14}{\omega^4 + 13\omega^2 + 36}$$

(1) 试求 X 的协方差函数 $R(\tau)$;

(2) 问 X 的均值是否有遍历性? 为什么?

(完)

中国科学技术大学

2018-2019 第一学期期末考试题

考试科目: 随机过程 (B)

得分: _____

学生所在系: _____ 姓名: _____ 学号: _____

(2019 年 1 月 10 日, 半开卷)

一、(30 分。填空题每空 3 分, 其余每空 2 分) 判断是非与填空:

(1) (是非) 若马氏链 $X = \{X_n, n \geq 0\}$ 的初始分布 $\pi = \{\pi_j, j \geq 0\}$ 为其平稳分布, 则:

(a) $\sum_{i \geq 0} \pi_i p_{i,j}^{(n)} = \pi_j, (j \geq 0, n \in N)$ () ; (b) X 为严格平稳过程 ()

(c) $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}^{(n)}, (i, j \geq 0)$ () ; (d) X 必有正常返状态 () 。

(2) (是非) 下列关于 τ 的函数 $R(\tau)$ 是否为(实或复)平稳过程的协方差函数?

(a) $R(\tau) = e^{-|\tau|}(|\tau| + 1)^2$ () ; (b) $R(\tau) = |\tau| e^{-\tau^2/2}$ () ; (c) $R(\tau) = \frac{\sin \tau}{\pi \tau}$ ()

(d) $R(\tau) = \sigma^2 e^{i\lambda \tau}$ () ; (e) $R(\tau) = \sigma^2 e^{-i\lambda |\tau|}$ () 。(注: $\sigma, \lambda > 0, i = \sqrt{-1}$)

(3) (填空) 设 X_1, X_2, X_3 相互独立, 且 $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i), i = 1, 2, 3$ (指数分布), 则 $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, X_3\}$ 的分布为 (), 概率 $P\{X_1 = X_{(1)}\}$ 等于 () 。

(4) (填空) 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一强度为 λ 的 Poisson 过程, W_k 为其第 k 个事件发生的时间, 并设 $1 \leq k \leq n, t > 0$, 则 $E\{W_k | N(t) = n\} = ()$, $E(W_k) = ()$ 。

二、(8 分) 假设汽车按强度为 λ 的泊松过程进入一条单向行驶的无限长的公路, 进入的第 i 辆车以速度 V_i 行驶。假定诸 V_i ($i \geq 1$) 为相互独立的正随机变量, 有共同分布 F 。

试求在时刻 t 位于区间 (a, b) 内的平均汽车辆数。

三、(15 分) 设马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的转移概率为:

$$p_{0,j} = a_j > 0, (j \geq 0) \quad p_{i,i-1} = 1, (i \geq 1)$$

(1) 证明该马氏链为不可约常返的, 且为非周期;

(2) 试求过程由 0 出发后首次返回到 0 的平均时间 μ_0 , 并据以回答: 过程何时为正常

返? 何时为零常返?

(3) 在正常返时, 试求该马氏链的极限分布: $\pi = \{\pi_j, j \geq 0\}$ 。

四、(20 分) 设马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的一步转移概率矩阵为:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(1) 试讨论该马氏链的状态分类 (即: 分为几个等价类、各类的周期性如何、是否为常返、是否为正常返?)。

(2) 试求过程由状态 k 出发而被状态 j 吸收的概率 $f_{k,j}$, ($k=1,2; j=3,4$)。

五、(15 分) 设 A 与 Θ 独立且分别服从均匀分布 $U(0,1)$ 与 $U(0,2\pi)$, 定义过程:

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta) \quad (t \in R, \omega_0 \text{ 为非零常数})$$

(1) 证明 $\{X(t), t \in R\}$ 为宽平稳过程;

(2) 试求其功率谱密度函数 $S(\omega)$ 。

六、(12 分) 设平稳过程 $X = \{X(t), t \in R\}$ (均值为 0) 的功率谱密度函数为:

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 3}{\omega^4 + 11\omega^2 + 28}$$

(1) 试求 X 的协方差函数 $R(\tau)$;

(2) 问 X 的均值是否有遍历性? 为什么?

(完)

随机过程期末考试参考答案与评分标准

(2019 年 1 月 10 日)

一、(30 分)

- (1) (每空 2 分): a. (是); b. (是); c. (非); d. (是)。
(2) (每空 2 分): a. (非); b. (非); c. (是); d. (是); e. (非)。
(3) (每空 3 分) $(1/(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3))$, $(\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3))$ 。
(4) (每空 3 分) $(\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}/(k-1)!)$, $(\lambda t^2/2)$

二、(6 分)

若第 i 辆汽车于时刻 $s(s < t)$ 进入该公路, 则 $P\{a < (t-s)V_i < b\} = F(\frac{b}{t-s}) - F(\frac{a}{t-s})$, 故第 i 辆车于时刻 t 位于区间 (a, b) 的概率 $p = \frac{1}{t} \int_0^t [F(\frac{b}{t-s}) - F(\frac{a}{t-s})] ds$, 从而时刻 t 位于区间 (a, b) 内的平均汽车数为 $\lambda p t = \lambda \int_0^t [F(\frac{b}{t-s}) - F(\frac{a}{t-s})] ds$ 。

三、(16 分)

- (1) 易证马氏链为不可约 ($p_{i,j} \geq a_j > 0, \forall i \neq j$)、非周期 ($p_{0,0}^{(1)} = a_0 > 0$), 且 $f_{0,0} = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j = 1$, 故常返;
(2) 求得: $\mu_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} n f_{0,0}^{(n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_{n-1}$, 显然, 马氏链为正常返 $\Leftrightarrow \mu_0 < +\infty$;
(3) $\pi_j = \frac{1}{\mu_0} \sum_{k \geq j} a_k, (j \geq 0)$ 。

四、(20 分)

- (1) 四类: $\{1\}, \{2\}$ 均为瞬过类, $d(1) = \infty, d(2) = 1$; $\{3\}, \{4\}$ 为二遍历类 (吸收态)。
(2) 设 T 为过程进入吸收态的时间, 记 $f_{k,j} = P\{X_T = j | X_0 = k\}, (k = 1, 2; j = 3, 4)$ 则有:

$$\begin{aligned} f_{1,3} &= P\{X_T = 3 | X_0 = 1\} = \sum_i P\{X_T = 3 | X_1 = i\} p_{1,i} = 0.5 f_{2,3} + 0.3 \\ f_{1,4} &= \sum_i P\{X_T = 4 | X_1 = i\} p_{1,i} = 0.5 f_{2,4} + 0.2 \\ f_{2,3} &= \sum_i P\{X_T = 3 | X_1 = i\} p_{2,i} = 0.2 f_{2,3} + 0.4 \\ f_{2,4} &= \sum_i P\{X_T = 4 | X_1 = i\} p_{2,i} = 0.2 f_{2,4} + 0.4 \end{aligned}$$

解得: $f_{1,3} = 11/20, f_{1,4} = 9/20, f_{2,3} = f_{2,4} = 1/2$ 。

五、(16 分)

$$EX(t) = EAE \cos(\omega_0 t + \Theta) = 0$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \gamma_X(t+\tau, t) &= EA^2 E \cos[\omega_0(t+\tau) + \Theta] \cos(\omega_0 t + \Theta) = \\ &= \frac{1}{2} EA^2 E \{ \cos[\omega_0(2t+\tau) + 2\Theta] + \cos \omega_0 \tau \} = \frac{1}{2} EA^2 \cos \omega_0 \tau \\ &= 4 \cos \omega_0 \tau = R_X(\tau) \end{aligned}$$

故 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 为宽平稳。

$$(2) \quad R_X(\tau) \leftrightarrow S(\omega) = 4\pi(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0))。$$

六、(12 分)

$$(1) \quad S(\omega) \leftrightarrow R(\tau) = \frac{2\sqrt{7}}{21} e^{-\sqrt{7}|\tau|} - \frac{1}{12} e^{-2|\tau|}。$$

$$(2) \quad \text{该过程的均值有遍历性, 因为: } \int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau < \infty。$$

(完)

中国科学技术大学 2018—2019学年第二学期考试试卷

考试科目 随机过程B 得分

学生所在系 姓名 学号

(考试时间: 2019年6月24日下午2:30—4:30, 半开卷)

一、(30分) 是非判断与填空题

(1) 设 X 与 Y 相互独立, 分别服从指数分布 $Exp\{\lambda\}$ 与 $Exp\{\mu\}$, 则:

- (a) $X + Y \sim Exp\{\lambda + \mu\}$. () (b) $\min\{X, Y\} \sim Exp\{\lambda + \mu\}$. ()
 (c) $\max\{X, Y\} \sim Exp\{\lambda + \mu\}$. () (d) $P\{X > h\} = 1 - \lambda h + o(h), h \downarrow 0$. ()
 (e) $P\{X \leq s + t | X > s\} = P\{X \leq t\}, s, t > 0$. ()

(2) 关于平稳过程, 下列说法是否正确

- (a) 宽平稳过程具有平稳增量性. ()
 (b) Poisson过程是平稳过程. ()
 (c) 二阶矩存在的严平稳一定是宽平稳过程. ()
 (d) 初始状态分布为平稳分布的Markov过程一定是严平稳的. ()

(3) 设有复合泊松过程 $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$, 其中 $N(t)$ 是强度为 λ 的泊松过程, $Y_i \sim Exp\{\mu\}$. 则:
 $EX(t) = \underline{\hspace{2cm}}, E[X^2(t)] = \underline{\hspace{2cm}}, g_{X(t)}(s) = E \exp\{sX(t)\} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 现有对于一个三状态的马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的25个连续观察数据:

-1, 0, 0, 1, 0, -1, -1, -1, 0, 0, -1, 0, -1,
 -1, -1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, -1, 1, 1, 1,

则据此可估计出该马氏链的转移概率矩阵 P 为 .

二、(8分) 保险公司的理赔次数 $N(t)$ 是强度为 λ 的泊松过程, 诸次理赔额 $C_i (i \geq 1)$ 为独立同分布, 且与 $N(t)$ 独立, $EC_i = \mu$. 又设 W_i 为第 i 次理赔发生的时间($i \geq 1$), 则到时刻 t 为止的理赔总额的折现值为:

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} C_i e^{-\alpha W_i}$$

其中 $\alpha > 0$ 为折现率, 试求 $C(t)$ 的期望值.

三、(20分) 质点在一正 N 边形($N \geq 3$)的周边上作随机游动(顶点 $1, 2, \dots, N$ 按顺时针方向排列), 质点以概率 p 顺时针游动一格, 以概率 $q = 1 - p$ 逆时针游动一格, 试用一马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 描述该模型, 并

(1) 写出该马氏链的转移概率矩阵 P , 并作状态分类;

- (2) 求出该马氏链的平稳分布;
 (3) 该马氏链是否存在极限分布? 为什么?

四、(20分) 设马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的转移概率矩阵为:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 2 & 0 & 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 3 & 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) 试对该马氏链作状态分类(分为几类、各类的周期性、常返性、正常返性等);
 (2) 试求过程从状态 k 出发而被状态 4 吸收的概率 $f_{k,4}$ 及 $f_{k,5}$, ($k = 1, 2, 3$).

五、(15分) 考察下列函数 $S_i(\omega)$, ($\omega \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} S_1(\omega) &= \frac{\omega^2 + 9}{(\omega^2 + 4)(\omega + 1)^2}, & S_2(\omega) &= \frac{\omega^2 + 1}{\omega^4 + 5\omega^2 + 6}, & S_3(\omega) &= \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 - 4\omega^2 + 3}, \\ S_4(\omega) &= \frac{\omega^2 - 4}{\omega^4 + 4\omega^2 + 3}, & S_5(\omega) &= \frac{e^{-i\omega^2}}{\omega^2 + 2} (i = \sqrt{-1}), & S_6(\omega) &= \frac{4a \cos \omega}{\omega^2 + a^2} (a > 0). \end{aligned}$$

- (1) 问哪些可以作为平稳过程的谱密度函数? 并进而求出其对应的协方差函数 $R(\tau)$.
 (2) 问相应的平稳过程的均值是否有遍历性? 为什么?

六、(7分) 设

$$X_t = S_t + \varepsilon_t = b \cos(\omega t + U) + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

其中 $U \sim U(0, 2\pi)$, $\{\varepsilon_t\}$ 零均值平稳, 方差为 σ^2 的白噪声序列, U 与 $\{\varepsilon_t\}$ 独立. 作矩形窗滤波, $M > 0$:

$$Y_t = \frac{1}{2M+1} \sum_{j=-M}^M X_{t-j}$$

- 1) 试问 Y_t 是平稳过程吗? 为什么?
 2) 求出 Y_t 的方差.

随机过程期末考试参考答案与评分标准

(2019 年 6 月 24 日)

一、(30 分)

(1) (每空 2 分): a. (非); b. (是); c. (非); d. (是); e. (是)。

(2) (每空 2 分): a. (非); b. (非); c. (是); d. (是)。

(3) (每空 3 分) $(\frac{\lambda t}{\mu})$; $(\frac{\lambda t(2+\lambda t)}{\mu^2})$; $(\exp(\frac{\lambda ts}{\mu-s}))$ 。

$$(4) (3 分) \left(P = \begin{pmatrix} -1 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right)$$

二、(8 分)

$$EC(t) = E\left\{E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} C_i e^{-\alpha W_i} \mid N(t)\right]\right\} = \frac{\lambda \mu (1 - e^{-\alpha t})}{\alpha}。$$

三、(20 分)

$$(1) P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & q \\ 2 & q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & q & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ N-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p & 0 \\ N-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ N & p & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 0 \end{pmatrix}, \text{ (双随机)}$$

不可约、正常返、周期为 2 (N 偶) 或非周期 (N 奇)。

(2) 求解: $\pi = \pi P, \sum_j \pi_j = 1$, 由:

$$\begin{cases} \pi_1 = q\pi_2 + p\pi_N \\ \pi_2 = p\pi_1 + q\pi_3 \\ \cdots \\ \pi_{N-1} = p\pi_{N-2} + q\pi_N \\ \pi_N = q\pi_1 + p\pi_{N-1} \\ 1 = \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_N \end{cases} \quad \text{解得平稳分布: } \pi = (\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N})$$

(3) 当 N 为奇数时, 极限分布存在: $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{i,j}^{(n)} = \frac{1}{N}, (1 \leq i, j \leq N)$, 否则不存在。

四、(20 分)

(1) 每个状态自成一类。1,2,3 均为瞬过类，其中 1 的周期为无穷，其余为非周期；4,5 为遍历类（吸收态）。

(2) 设 T 为过程进入吸收态 4 或 5 的时间，则

$$f_{k,4} = P\{X_T = 4 | X_0 = k\}, f_{k,5} = P\{X_T = 5 | X_0 = k\}, (k=1,2,3) \text{ 其中:}$$

$$f_{1,4} = \sum_i P\{X_T = a | X_1 = i\} p_{1,i} = 0.6f_{2,4} + 0.2f_{3,4} + 0.1$$

$$f_{2,4} = 0.3f_{2,4} + 0.4f_{3,4} + 0.2$$

$$f_{3,4} = 0.2f_{3,4} + 0.4$$

解得: $f_{1,4} = \frac{19}{35}, f_{2,4} = \frac{4}{7}, f_{3,4} = \frac{1}{2}$ 。类似可求得: $f_{1,5} = \frac{16}{35}, f_{2,5} = \frac{3}{7}, f_{3,5} = \frac{1}{2}$ 。

五、(15 分)

(1) $S_2(\omega)$ 是谱密度函数。 $S_2(\omega) \leftrightarrow R(\tau) = -\frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\sqrt{2}|\tau|} + \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\sqrt{3}|\tau|}$ 。

(2) 该过程的均值有遍历性，因为: $\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau < \infty$ 。

六、(7 分)

(1) 先求 $EX_t = E(S_t + \varepsilon_t) = 0$,

$$\begin{aligned} \gamma_X(t, t) &= E(S_t + \varepsilon_t)^2 = E(S_t^2 + \varepsilon_t^2) = ES_t^2 + \sigma^2 = E[b^2 \cos^2(\omega t + U)] + \sigma^2 \\ &= \frac{b^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} [\cos(2\omega t + 2u) + 1] du + \sigma^2 = \frac{b^2}{2} + \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\gamma_X(t + \tau, t) = EX_{t+\tau} X_t = \frac{b^2}{2} \cos \omega \tau + \delta(\tau) \sigma^2, \quad (\delta(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau = 0 \\ 0 & \tau \neq 0 \end{cases})$$

$$\gamma_Y(t + \tau, t) = EY(t + \tau)Y(t) = \frac{1}{(2M+1)^2} \sum_{i,j=-M}^M EX_{t+\tau-i} X_{t-j}$$

从而: $EY_t = 0$ 且:

$$= \frac{1}{(2M+1)^2} \sum_{i,j=-M}^M (\frac{b^2}{2} \cos \omega(\tau - i + j) + \delta(\tau - i + j) \sigma^2)$$

故 Y_t 平稳。

$$\begin{aligned} \gamma_Y(t, t) &= \frac{1}{(2M+1)^2} \sum_{i,j=-M}^M (\frac{b^2}{2} \cos \omega(i - j) + \delta(i - j) \sigma^2) \\ (2) \quad &= \frac{1}{(2M+1)^2} (\sum_{i,j=0}^{2M} \frac{b^2}{2} \cos \omega(i - j) + (2M + 1) \sigma^2) \end{aligned}$$

(完)

中国科学技术大学

2019-2020 第一学期期末考试题

考试科目: 随机过程 (B) 得分: _____

学生所在系: _____ 姓名: _____ 学号: _____

(2020 年 1 月 6 日, 半开卷)

一、(30 分, 每空 2 分) 判断是非与填空:

(1) 设 $X_0 = 0, X_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, (n \geq 1)$, 其中 $\{\xi_i, i \geq 1\}$ 为 i.i.d., 且 $P\{\xi_i = -1\} = P\{\xi_i = 1\} = 0.5$, 则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为:

- a. 独立增量过程 (); b. 平稳独立增量过程 ();
c. 正常返马氏链 (); d. 瞬过马氏链 (); e. $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_n = 0\} = 0$ 。

(2) 下列函数是否为平稳过程的谱密度函数:

- a. $S_1(\omega) = \frac{\omega^2 - 16}{\omega^4 + 11\omega^2 + 18}$ (); b. $S_2(\omega) = \frac{\omega^2 + 1}{\omega^4 + 5\omega^2 + 6}$ ();
c. $S_3(\omega) = \frac{\omega^2 \cos \omega}{\omega^4 + 1}$ (); d. $S_4(\omega) = \frac{e^{-i|\omega|}}{\omega^2 + a^2}, (i = \sqrt{-1})$ ()

(3) 到达某邮箱的正常电子邮件和垃圾邮件数分别是强度为 9 和 3 的泊松过程, 且相互独立。则第一封邮件的平均到达时间为 (), 第一封垃圾邮件到达之前恰好到达了 k 封正常邮件的概率为 ()。

(4) 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程, 命 $X_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$, 则:

$E(X_T) = (\quad), \text{Var}(X_T) = (\quad)$ 。

(5) 到达某商店的顾客数 $N(t)$ 是一强度为 $\lambda(t) = 2 + t/2$ 的非齐次泊松过程, 若该商店早上 8:00 开门, 则午时段(11:00-13:00)没有顾客到达的概率为(), 午时段到达商店的平均人数为()。

二、(15 分) 设某种健康险投保者中的出险人数 $N(t)$ 为一强度为 5 的泊松过程, 若以

Y_i 表示第 i 个出险者应获赔偿, 并假定 $Y_i \sim U(1, 3)$ (均匀分布, 单位: 万元), 且 $\{Y_i, i \geq 1\}$

为 i.i.d., 试求到时刻 t 为止保险公司应付全部赔偿 $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ 的期望 $EX(t)$ 、方差

$\text{Var}[X(t)]$ 及矩母函数 $g_{X(t)}(s)$ 。(均匀分布矩母函数: $g(s) = \frac{e^{bs} - e^{as}}{(b-a)s}$)

三、(18 分) 圆周上有 1,2,3,4 四个位置按顺时针方向排列, 一个粒子在这四个位置上(沿圆周)作随机游动。它从任何一个位置各以概率 0.5 顺时针方向或逆时针方向游动至其相邻位置, 若以 $X_n = j$ 表示时刻 n 粒子处于位置 j ($j = 1, 2, 3, 4$), 则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为一马氏链,

- (1) 求该马氏链的转移概率矩阵 P 及 $P^{(2)}$, 并求 $P\{X_{n+3} = 3, X_{n+1} = 1 | X_n = 2\} = ?$
- (2) 讨论该马氏链状态分类并求其平稳分布 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$;
- (3) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}$ 是否存在? 为什么?

四、(12 分) 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为区间 $[0, 3]$ 上的随机游动, 其转移概率矩阵为:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

试求粒子由 k 出发而被 0 吸收的概率 p_k 及它被吸收的平均步数 ν_k , ($k = 1, 2, 3$)。

五、(15 分) 设 A 与 Θ 独立, $A \sim \text{Exp}(1/3)$ (指数分布), $\Theta \sim U(0, 2\pi)$ (均匀分布), 定义随机过程:

$$X(t) = A \cos(t + \Theta), \quad (t \in R)$$

- (1) 证明 $\{X(t), t \in R\}$ 为宽平稳过程;
- (2) 试求其功率谱密度函数 $S(\omega)$ 。

六、(10 分) 设平稳过程 $X = \{X(t), t \in R\}$ (均值为 0) 的功率谱密度函数为:

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 3}{\omega^4 + 11\omega^2 + 28}$$

- (1) 试求 X 的协方差函数 $R(\tau)$;
- (2) 问 X 的均值是否有遍历性? 为什么?

随机过程期末考试参考答案与评分标准

(2020 年 1 月 6 日)

一、(30 分, 每空 2 分)

(1) a. (是); b. (是); c. (是); d. (非); e. (是)。

(2) a. (非); b. (是); c. (非); d. (非)。

(3) $(\frac{1}{12})$, $(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^k$ 。

(4) $(\frac{\lambda T}{2})$, $(\frac{\lambda T}{3})$ 。

(5) $(e^{-8} \approx 0.0003)$, (8 人)。

二、(15 分)

$$EX(t) = EN(t)EY = \lambda t \times 2 = 10t(\text{万元}),$$

$$\begin{aligned} \text{Var}X(t) &= EN(t)\text{Var}Y + \text{Var}N(t)(EY)^2 \\ &= 5t \times 4/12 + 5t \times 4 = 65t/3, \end{aligned}$$

$$g_{X(t)}(s) = e^{\lambda t(g_Y(s)-1)} = e^{5t(\frac{e^{3s}-e^s-2s}{2s})}。$$

三、(18 分)

$$(1) \quad P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P^{(2)} = P^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P\{X_{n+3}=3, X_{n+1}=1 | X_n=2\} &= \\ &= P\{X_{n+1}=1 | X_n=2\}P\{X_{n+3}=3 | X_n=2, X_{n+1}=1\} \\ &= p_{21}p_{13}^{(2)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}。 \end{aligned}$$

$$\pi_1 = \frac{1}{2}(\pi_2 + \pi_4)$$

$$\pi_2 = \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_3)$$

(2) 求解: $\pi_3 = \frac{1}{2}(\pi_2 + \pi_4)$, 易得: $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = 1/4$;

$$\pi_4 = \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_3)$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$$

状态分类：不可约、正常返、周期为 2。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}$ 不存在。例如： $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(2n)} = \frac{2}{\mu_i} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0$ ，但 $p_{ii}^{(2n-1)} \equiv 0$ ，($\forall n \geq 1$)，故

极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)}$ 不存在。

四、(12 分)

设 $T = \min\{n : n \geq 0, X_n = 0\}$ ，则：

$p_k = P\{X_T = 0 | X_0 = k\}$, $v_k = E(T | X_0 = k)$, ($k = 0, 1, 2, 3$)，其中： $p_0 = 1, v_0 = 0$ ，

由 P 有：

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 \\ p_2 = \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{3}p_3, \text{ 及 } \\ p_3 = p_2 \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(v_1 + 1) + \frac{1}{3}(v_2 + 1) \\ v_2 = \frac{1}{3}(v_1 + 1) + \frac{1}{3}(v_2 + 1) + \frac{1}{3}(v_3 + 1) \\ v_3 = v_2 + 1 \end{cases}$$

解得：

$$p_k = 1, (k = 1, 2, 3), \text{ 及: } v_1 = 7, v_2 = 11, v_3 = 12。$$

五、(15 分)

$$EX(t) = EAE \cos(t + \Theta) = 3 \times 0 = 0,$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \gamma_X(t + \tau, t) &= EX(t + \tau)X(t) = EA^2E \cos(t + \tau + \Theta) \cos(t + \Theta), \\ &= 18 \times \frac{1}{2} \cos \tau = 9 \cos \tau \end{aligned}$$

故 $\{X(t), t \in R\}$ 为宽平稳。

$$(2) \quad R_X(\tau) \leftrightarrow S(\omega) = 9\pi(\delta(\omega + 1) + \delta(\omega - 1))。$$

六、(10 分)

$$(1) \quad S(\omega) = \frac{\omega^2 + 3}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 7)} \leftrightarrow R(\tau) = \frac{2\sqrt{7}}{21} e^{-\sqrt{7}|\tau|} - \frac{1}{12} e^{-2|\tau|};$$

$$(2) \quad \text{该过程的均值有遍历性, 因为: } \int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau < \infty。$$

(完)

中国科学技术大学

2020—2021学年第二学期期末试卷

考试科目 _____ 随机过程B _____ 得分 _____

所在系 _____ 姓名 _____ 学号 _____

考试时间: 2021年7月5日8:30—10:30

一. (30分) 是非填空选择题(答案请写在答题纸上):

1. (10分) 判断下列有关离散时间Markov链说法正确与否.

- 1). 具有平稳增量的随机序列是Markov链. ()
- 2). 若两个状态不互达, 则它们有可能都是常返的. ()
- 3). 若有无穷个状态且不可约, 则所有状态不可能都是常返的. ()
- 4). 若某个状态是常返的, 则过程至少会到达它一次. ()
- 5). Markov链中, 周期为无穷大的状态一定是非常返的. ()

2. (3分) 设 $\{N_t, t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的Poisson过程, 非负随机变量 T 与 $N(t)$ 独立且 $P(T > t) = \exp\{-\mu t\}, \mu, t > 0$, 则对 $k \geq 0, P(N(T) = k) =$ _____.

3. (3分) 下列说法不正确的是_____.

- A. Poisson过程是Markov过程 B. 从常返态出发只能到达常返态
C. Poisson过程是平稳过程 D. 有限状态的MC一定存在正常返态.

4. (4分) 设更新过程 $\{N(t)\}$ 的第 n 个更新间隔 $X_n \sim \exp(\mu) (n \geq 1, \mu > 0)$, 即 $N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$, 此处 $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, 则 S_n 的分布密度函数为 $f_{S_n}(x) =$ _____, 概率 $P(N(t) = n) =$ _____ ($n \geq 0$).

5. (3分) 下列说法正确的是_____.

- A. $\{N(t)\}$ 与 $\{M(t)\}$ 是Poisson过程, 则 $N(t) + M(t)$ 也是Poisson过程.
B. 若到达的车辆数服从Poisson过程, 每间隔一辆车记录一下, 则被记录下的车辆数也服从Poisson过程.
C. $R(\tau) = |\tau|e^{-\tau^2/2}$ 有可能成为某个平稳过程 (或序列) 的协方差函数.
D. 初始分布为平稳分布的Markov链为严平稳过程.

6. (3分) 设 $\{X(t)\}$ 为 Gauss 平稳过程, 均值为零, 功率谱密度 $S(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}$. 则 $X(t)$ 落在区间 $[0.5, 1]$ 中的概率为_____.

7. (4分) 某种粒子按强度为 λ 的泊松过程来到一个计数器, 每个到达的粒子都使计数器关闭一段时间 r . 当一个粒子到达时, 若计数器未处于关闭状态, 它就被记录下来. 则在时间区间 $(t, t + r]$ 中记录到一个粒子的概率为_____ ($t \geq r$).

二. (12分) 某网站负责某项职业考试的网上报名工作, 该项考试共有A、B、C三门课程, 考生中报考这三门课程的考生所占的比例分别为35%、40% 和25%, 而三门考试的报名费分别为30元、30元和50元. 设考生按速率为 λ 的泊松过程到该网站报名, 其中 $\lambda = 10$ 人/天, 若以 $X(t)$ 表示到第 t 天为止该网站收到的报名费总额, 试求 $X(t)$ 的期望 $EX(t)$ 、方差 $Var(X(t))$ 和矩母函数 $g_{X(t)}(\mu) = Ee^{\mu X(t)}$ 。

三. (15分) 市场上有 a 种牌号的牙膏, 记为 $\{1, 2, \dots, a\}$. 假定消费者相继使用的牙膏牌号构成马氏链, 选用第 i 种牌号牙膏的消费者继续使用第 i 种牌号牙膏的概率为 $p_{i,i}$, ($0 < p_{i,i} < 1, i = 1, 2, \dots, a$). 若他对原来使用的牙膏不满意, 就在其它 $a - 1$ 种牙膏中任选一种, 即有: $p_{i,j} = \frac{1-p_{i,i}}{a-1}, (j \neq i)$,

(1) 试写出该马氏链的转移概率矩阵 P 并对马氏链作状态分类;

(2) 试求长时间后第 i 种牌号牙膏的市场占有率 $\pi_i, (i = 1, 2, \dots, a)$.

四. (15分) 设一质点在正整数点上做随机游动, 质点处于正整数点 i 时, 以概率 p_i 往右走一格, 概率 $1 - p_i$ 退回到点1, $p_i = e^{-\frac{1}{i}}, i = 1, 2, \dots$. 记 X_n 表示时刻 n 质点所处的位置,

(1) 写出过程的状态空间, 说明该过程为Markov链.

(2) 讨论该各状态的周期性和常返性。

五. (16分) 设 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 是均值为0的平稳过程, 令 $Y(t) = X(t) \cos(\omega_0 t + \Theta)$, $-\infty < t < +\infty$, 其中 ω_0 是实常数, $\Theta \sim U[0, 2\pi]$, 且 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 与 Θ 相互独立, $R_X(\tau)$ 和 $S_X(\omega)$ 分别是 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的协方差函数和功率谱密度. 试证:

(1) $\{Y(t), -\infty < t < +\infty\}$ 是平稳过程, 且协方差函数

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2} R_X(\tau) \cos \omega_0 \tau.$$

(2) $\{Y(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的功率谱密度为

$$S_Y(\omega) = \frac{1}{4} [S_X(\omega - \omega_0) + S_X(\omega + \omega_0)].$$

六. (12分) 已知平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 的均值函数为0, 谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 7\omega^2 + 12}, -\infty < \omega < \infty$$

(1) 求 $X(t)$ 的协方差函数 $R(\tau)$;

(2) $X(t)$ 是否有均值遍历性? 为什么?

中国科学技术大学

2021-2022 学年第二学期期末试卷

考试科目 随机过程 B 得分
所在系 姓名 学号

考试时间:2022 年 6 月 14 日 8:30-10:30

一、(30 分) 是非填空选择题 (答案请写在答题纸上):

1. (10 分) 判断下列有关离散时间 Markov 链说法正确与否.

- 1). Poisson 过程是平稳过程也是连续 Markov 链.()
- 2). 在直线上简单对称的随机游动所有状态都是零常返的.()
- 3). 一个有限状态的 Markov 链一定存在平稳分布.()
- 4). 若 Markov 链某个状态是吸收态, 则过程最终会停留在这个吸收态.()
- 5). Gauss 平稳过程一定是严平稳过程.()

2. (4 分) 某加油站红、银、白三种汽车到达过程分别为强度 1、3、5 (辆/10 分钟) 的 Poisson 过程, 则第一辆车的到达的平均时间为 . 第一辆白车到达前恰好有 k 辆非白车到达的概率为 ($k \geq 0$).

3. (4 分) 下列可以成为某平稳过程的谱密度函数是 .

- A. $S(\omega) = \frac{\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+6}$ B. $S(\omega) = \frac{\omega^2+4}{\omega^4-4\omega^2+3}$
C. $S(\omega) = \frac{e^{-i\omega^2}}{\omega^2+2} (i = \sqrt{-1})$ D. $S(\omega) = \frac{\cos \omega}{\omega^2+2}$

4. (4 分) 已知实平稳过程 $\{X(t)\}$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = 25 + 4/(1 + 6\tau^2)$, 并且满足 $\tau \rightarrow \infty$ 时, $X(t)$ 与 $X(t + \tau)$ 独立, 则 $\{X(t)\}$ 的均值为 , 方差为 .

5. (4 分) 下列说法正确的是 .

- A. 平稳独立增量过程一定是平稳过程.
B. 只要存在正常返类, 离散时间的 Markov 链一定存在平稳分布.
C. 极限分布和平稳分布均存在则一定相同.
D. 有限状态的 Markov 链一定是遍历的 Markov 链.

6. (4 分) 若 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为一平稳独立增量过程, 则

- A. $\{X(t), t \geq 0\}$ 是 Poisson 过程 B. $\{X(t), t \geq 0\}$ 是 Markov 过程
C. $\{X(t), t \geq 0\}$ 是平稳过程 D. $\{X(t), t \geq 0\}$ 是严平稳过程

二、(15 分) 设某个服务系统只有一个服务器, 从早上 8:00 开始接受服务, 此时已有无数顾客在进行排队. 每次只能服务一个顾客, 服务的平均时间为 20 分钟, 且每次服务的时间

为独立同分布的指数分布, $N(t)$ 表示从 8:00 后 t 时间内服务的顾客数。求

- (1) 上午 8:00 到 12:00 的平均服务顾客数.
- (2) 这段时间内服务完的顾客停留的平均时间.

三、(15 分) 市场上三种品牌的牛奶 (1,2,3) 在某一地区的市场占有率开始时均为 $1/3$, 而每过一个季度后顾客的消费倾向发生改变, 我们用一个三状态的 Markov 链来描述, 其一步转移概率的均值为

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array}\end{array}$$

- (1) 半年之后三种牛奶的市场占有率为多少?
- (2) 从状态 2 到状态 3 的平均首达时间是多少?
- (3) 各品牌牛奶市场占有率最终会稳定于什么样的比例?

四、(15 分) 从数 $1, 2, \dots, N$ 任取一个数作为 X_1 , 对 $n > 1$, 从 $1, 2, \dots, X_{n-1}$ 中任取一个数作为 X_n , 则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为一 Markov 链.

- (1) 写出 $\{X_n, n \geq 1\}$ 的一步转移概率矩阵 \mathbf{P} .
- (2) 对该 Markov 链进行状态分类 (几个等价类, 周期性, 是否常返, 正常返等)
- (3) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^{(n)}$ 是否存在? 为什么.

五、(10 分) 已知平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的均值函数为 0, 谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 6}{\omega^4 + 8\omega^2 + 15}, -\infty < \omega < +\infty,$$

求 $X(t)$ 的协方差函数 $R(\tau)$;

六、(15 分) 设 $X(t) = A \sin(t + \Phi)$, $-\infty < t < +\infty$, 其中 A 与 Φ 是相互独立的随机变量, 且 $P(\Phi = \pi/4) = 1/2, P(\Phi = -\pi/4) = 1/2$, A 服从区间 $(-1, 1)$ 内的均匀分布, 讨论

- (1) $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的平稳性.
- (2) $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的均值遍历性.

中国科学技术大学

2022-2023 学年第一学期期末试卷 (回忆版, 表述无法完全复现原卷)

考试科目 _____ 随机过程 B _____ 得分 _____
所在系 _____ 姓名 _____ 学号 _____

考试时间: 2023 年 2 月 27 日 8:30-10:30

- 一、
- $\{N_1(t), N_2(t)\}$ 是遵循 λ_1, λ_2 的相互独立的 Poisson 过程, 判断以下是否正确.
(1) $N_1(t) - N_2(t)$ 是 Poisson 过程 () (2) $N_1(t) + N_2(t)$ 是 Poisson 过程 ()
 - 对于一个不可约遍历的马尔可夫链, 以下说法正确的是:
(1) 其平稳分布和极限分布都存在 () (2) 其平稳分布必定是极限分布 ()
 - 下列随机过程一定属于宽平稳的是:
A. 马尔可夫链 B. 严平稳过程 C. 泊松过程 D. 白噪声过程
 - X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布, 且 $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, 则 $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ 是 _____ 分布. $\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 是 _____ 分布.
 - $\{N_1(t)\}, \{N_2(t)\}$ 分别遵循参数为 2, 3 的 Poisson 过程, 且相互独立. 则在 $\{N_1(t)\}$ 任意两个相邻事件之间, $\{N_2(t)\}$ 恰好发生 k 次的概率为 _____.

- 二、 $\{N(t)\}$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程, $Y(t) = (-1)^{N(t)} X$, X 是一个随机变量, 且 $P(X = -a) = P(X = a) = \frac{1}{4}$, $P(X = 0) = \frac{1}{2}$ ($a > 0$). 问 $Y(t)$ 是否是宽平稳过程, 给出判断和依据.

- 三、科大东区地铁站以 5 人/分钟的强度到达, 设每两趟地铁间隔恒为 20 分钟.

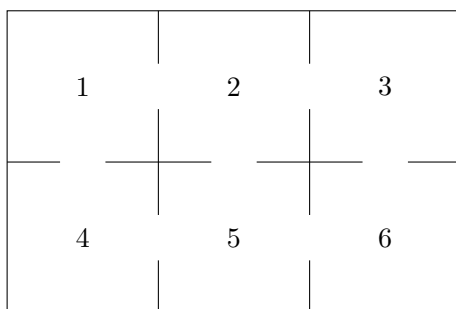
- 在两趟地铁相邻的 20 分钟内, 问到站人数的分布.
- 在地铁离开后的 10 分钟时间段内, 求到站乘客等待总时间的期望.
- 在地铁到达前的 10 分钟时间段内, 求到站乘客等待总时间的期望.

- 四、某 Markov 链有以下转移概率矩阵:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0 & 0.7 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- 若 Markov 链的初始分布为 $P(X_0 = 1) = 0.2, P(X_0 = 2) = 0.5, P(X_0 = 3) = 0.3$, 求转移两步之后为状态 2 的概率.
- 求该 Markov 链的平稳分布, 和平均常返时.

- 五、小鼠在以下迷宫内游走, 1 位置有食物, 6 位置有捕鼠夹. 每个单位时间小鼠移动一步, 并且往每个出口方向移动的概率相同.



1. 试写出小鼠位置的转移概率矩阵.
2. 求小鼠从 i 位置出发, 最终吃到食物的概率 p_i ($i = 2, 3, 4, 5$)
3. 求小鼠从 i 位置出发, 最终在吃到食物前被捕鼠夹捕捉的概率 q_i ($i = 2, 3, 4, 5$)

六、 $\{X_t, t > 0\}$ 为均值为 0 的高斯过程, 其功率谱密度函数为 $S(\omega) = \frac{4}{\omega^2 + 4}$

1. 试求该高斯过程的分布.
2. 若 $T = X_t - X_s$ ($s < t$), 求 Y 的方差.