第七次作业解答

P100-101. Date. No.

14. 解: (2) 由于 $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z^2+4}{e^z}$ 极限不存在, 故为本性奇点.

(4) $\frac{1-\cos z}{z^n}=\frac{1}{z^n}-\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m\cdot z^{2m}}{(2m)!}\cdot\frac{1}{z^n}$

$=\frac{1}{z^n}-\sum\limits_{m=-n}^{+\infty}\frac{(-1)^{m+n}\cdot z^{2m}}{(2m+2n)!}$

由于有无穷个 z 次幂(非零), 故为本性奇点.

(7) $\sin\frac{1}{z}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum\limits_{n=-\infty}^{0}\frac{(-1)^n\ z^{2n-1}}{(2n+1)!}$

由于有无穷个负次幂(非零), 故为可去奇点.

P131.

1. 解: (3) $\frac{1}{e^z-1}$: $e^z-1=0\Rightarrow z_k=2k\pi i\ (k=0,\pm1,\cdots)$

由于 $(e^z-1)'\Big|_{z=2k\pi i}=e^z\Big|_{z=2k\pi i}=1\neq 0$.

故 $z_k=2k\pi i$ 为 $\frac{1}{e^z-1}$ 的一级极点.

$\therefore \mathrm{Res}\left[\frac{1}{e^z-1},z_k\right]=\frac{1}{\frac{d}{dz}(e^z-1)\Big|_{z=2k\pi i}}=\frac{1}{e^{2k\pi i}}=1$

(4) $\frac{1-e^{2z}}{z^4}=\frac{-\left(2z+\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^3}{3!}+\frac{(2z)^4}{4!}+\cdots\right)}{z^4}$

$=-\left(\frac{2}{z^3}+\frac{2}{z^2}+\frac{\frac{8}{3!}}{z}+\frac{16}{4!}+\cdots\right)$

$\therefore \mathrm{Res}\left[\frac{1-e^{2z}}{z^4},0\right]=-\frac{8}{3!}=-\frac{8}{3\times2}=-\frac{4}{3}$

(8) 易知 ① $z=0$ 为一级极点. $\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim\limits_{z\to0}z\cdot f(z)=n$.

② 由于 $f(z)=-\frac{1}{1-(z+1)}\cdot\left[\frac{1}{z+1}+\cdots+\frac{1}{(z+1)^n}\right]$

$=-\left[\sum\limits_{m=0}^{+\infty}(z+1)^m\right]\left[\frac{1}{z+1}+\cdots+\frac{1}{(z+1)^n}\right]$

则: $a_{-1}=-\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{n个1}=-n$. $\therefore \mathrm{Res}[f(z),-1]=-n$.

3. 解：(2) $C: x^2+y^2=2x \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$

由于 $z^4+1=0$. 解得 $z=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i), \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

其中落在C内的有：$z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

$\therefore I = 2\pi i \cdot \{Res[f(z), z_1] + Res[f(z), z_2]\}$

$= 2\pi i \cdot [\lim\limits_{z\to z_1}(z-z_1)\cdot f(z) + \lim\limits_{z\to z_2}(z-z_2)\cdot f(z)]$

$= 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{2}(-1-i)} + \frac{1}{2\sqrt{2}(-1+i)}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$

(3) ~~易知~~：由于 $(z^2-1)(z^3+1)=0$. 可解得如下极点：

① $z^2-1=0 \Rightarrow z=\pm 1$.

② $z^3+1=0 \Rightarrow z=-1.\ z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.\ z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\therefore z_1=1$. 一级极点. $z_2=-1$. 二级极点. $z_{3,4}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 一级极点.

① 若 $r<1$：则此时没有极点位于C内部.

$\therefore I=0$

② 若 $r>1$：此时 $z_1.\ z_2.\ z_3.\ z_4$ 均在C内.

$\therefore I = 2\pi i \cdot \{Res[f(z), z_1] + Res[f(z), z_2] + Res[f(z), z_3] + Res[f(z), z_4]\}$

$= 2\pi i \cdot \left[\lim\limits_{z\to z_1}\frac{1}{(z+1)^2\cdot(z-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)(z-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)} + \lim\limits_{z\to z_2}[(z-z_2)^2 f(z)]'\right.$

$\left. + \lim\limits_{z\to z_3}\frac{1}{(z-1)(z+1)^2\cdot(z-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)} + \lim\limits_{z\to z_4}\frac{1}{(z-1)(z+1)^2(z-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)}\right]$

$= 2\pi i \cdot \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{z^3-2z^2+2z-1}\right)'\Big|_{z=-1} + \frac{1}{-3\sqrt{3}i} + \frac{1}{3\sqrt{3}i}\right]$

$= 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{-3\sqrt{3}i} + \frac{1}{3\sqrt{3}i}\right)$

$= 0$

综上：$I=0$

扫描全能王 创建

(8) 修设 L 为 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$ Date. No.

由分母为0可得极点：$z_1=1$. $z_2=-1$. $z_3=3$

易知：$z_1=1$. $z_2=-1$、$z_3=3$ 均为二级极点，且均在 L 内部.

$\therefore I=2\pi i\cdot\left[\lim_{z\to z_1}[(z-z_1)^2f(z)]'+\lim_{z\to z_2}[(z-z_2)^2f(z)]'+\lim_{z\to z_3}[(z-z_3)^2f(z)]'\right]$

$=2\pi i\cdot\left[-2\cdot\frac{2z-2}{(z+1)^3(z-3)^3}\Big|_{z=1}+(-2)\cdot\frac{2z-4}{(z-1)^3(z-3)^3}\Big|_{z=-1}+(-2)\cdot\frac{2z}{(z+1)^3(z-1)^3}\Big|_{z=3}\right]$

$=2\pi i\cdot\left(0+\frac{3}{128}-\frac{3}{128}\right)=0.$

附加题：(1) $\int_{|z|=3}\frac{z^{2021}}{z^{2022}-1}dz.$

解：由分母为0，解得 $z_k=\left(\sqrt[2022]{1}\right)_k=\exp\left(i\cdot\frac{\arg 1+2k\pi}{2022}\right)=\exp\left(\frac{k\pi}{1011}\right),k=0,1,\cdots 2021$

由于 $|z_k|=1$. 故 z_k 均在 $|z|=3$ 内部. 均为1级极点.

$\int_{|z|=3}f(z)dz=2\pi i\cdot\sum_{k=0}^{2021}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$

$=2\pi i\cdot\sum_{k=0}^{2021}\frac{z^{2021}\big|_{z_k}}{\frac{d}{dz}(z^{2022}-1)\big|_{z=z_k}}$

$=2\pi i\cdot\sum_{k=0}^{2021}\frac{z_k^{2021}}{2022\cdot z_k^{2021}}$

$=2\pi i\cdot\sum_{k=0}^{2021}\cdot\frac{1}{2022}=2\pi i.$

(2) $\int_{|z|=3}e^{\frac{2022}{z}}dz.$

解：易知 $z=0$ 为本性奇点. $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2022}{z}\right)^n/n!=1+\frac{2022}{z}+\cdots$

$\therefore \mathrm{Res}[f(z),0]=a_{-1}=2022$

$\therefore I=2022\cdot 2\pi i=4044\pi i$

4. 解 (2) $\int_0^{2\pi} \frac{r-\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} d\theta$ （$r \neq 1$ 补充条件）

令 $z=e^{i\theta}$. 易得：$\int_{|z|=1} \frac{r-z}{i(rz-1)(r-z)} dz$ 的实部为所求积分

即：$I = Re\left\{\int_{|z|=1} \frac{r-z}{i(rz-1)(r-z)} dz\right\} = Re\, I_1$

下面讨论 $z=\frac{1}{r}$, $z=r$ 极点落在 $|z|=1$ 内情况.

① 若 $|r|>1$. 则：$I_1 = \frac{-1}{ri}\int_{|z|=1} \frac{r-z}{(z-\frac{1}{r})(z-r)} dz$.

此时极点为 $z=\frac{1}{r}$, $z=r$. 只有 $z=\frac{1}{r}$ 在 $|z|=1$ 内.

$\therefore I_1 = 2\pi i \cdot Res[f(z), \frac{1}{r}]$

$= 2\pi i \cdot \frac{-1}{ri} \cdot (-1) = \frac{2\pi}{r}$ $I = Re\, I_1 = \frac{2\pi}{r}$

② 若 $|r|<1$. 则 此时极点 $z=r$ 在 $|z|=1$ 内.

$\therefore I_1 = 2\pi i \cdot Res[f(z), r] = 0$

$\therefore I = Re\, I_1 = 0$

综上：$|r|<1$ 时. $I=0$ ； $|r|>1$ 时. $I=\frac{2\pi}{r}$.

(3) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2+\sin^2\theta}$，由于 $\frac{1}{a^2+\sin^2\theta}$ 为偶函数. 故 $I = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2+\sin^2\theta}$

$\therefore I = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2+\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \overset{\tilde\theta = 2\theta}{=\!=} \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\frac{1}{2}d\tilde\theta}{a^2+\frac{1-\cos\tilde\theta}{2}} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\tilde\theta}{2a^2+1-\cos\tilde\theta}$

令 $z=e^{i\tilde\theta}$. 可得 $I = \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{dz}{i\cdot(2a^2+1-\frac{z+\frac{1}{z}}{2})\cdot z}$

$= \frac{1}{-i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2-(4a^2+2)z+1}$

则极点可由分母=0得出：$z_{1,2}=\frac{4a^2+2\pm\sqrt{(4a^2+2)^2-4}}{2}=2a^2+1\pm2a\sqrt{a^2+1}$，一级

由于 $a>0$，且 $2a^2+1+2a\sqrt{a^2+1}>1$；

$2a^2+1-2a\sqrt{a^2+1}=1-2a(\sqrt{a^2+1}-a)<1$

$\therefore$ 在 $|z|=1$ 内的极点为 $z_2=2a^2+1-2a\sqrt{a^2+1}$.

$\therefore I=2\pi i\cdot \text{Res}[f(z),z_2]$

$=2\pi i\cdot(-\frac{1}{i})\cdot\frac{1}{(z^2-(4a^2+2)z+1)'}\Big|_{z=z_2}$

$=-2\pi\cdot\frac{1}{2z-(4a^2+2)}\Big|_{z=z_2}=\frac{\pi}{2a\sqrt{a^2+1}}$

补充题：(1) $\int_{|z-1|=2}\frac{|dz|}{1+|z|^2}$

解：$|z-1|=2$，取 $z=2e^{i\theta}+1$，$dz=2ie^{i\theta}d\theta$

则 $|dz|=|2ie^{i\theta}d\theta|=2d\theta$

$|z|^2=|2\cos\theta+2i\sin\theta+1|^2=4\cos^2\theta+1+4\cos\theta+4\sin^2\theta=5+4\cos\theta$

$\therefore I=\int_0^{2\pi}\frac{2d\theta}{6+4\cos\theta}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3+2\cos\theta}$

则取 $z=e^{i\theta}$，$I=\int_{|z|=1}\frac{dz}{iz(3+z+\frac{1}{z})}$

$=\int_{|z|=1}\frac{dz}{i(z^2+3z+1)}$

极点为 $z_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$，其中 $z_1=\frac{\sqrt{5}-3}{2}$ 在 $|z|=1$ 内.

$\therefore$ 原积分 $I=2\pi i\cdot\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{(z^2+3z+1)'}\Big|_{z=z_1}=2\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\pi$.

(2) $I=\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{5-4\cos x}dx$

由于 $f(x)=\frac{1-\cos 2x}{5-4\cos x}$ 为偶函数，故 $I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{5-4\cos x}dx$

取 $z=e^{ix}$，则 $I=\mathrm{Re}\left\{\oint_{|z|=1}\frac{1-z^2}{i(5-2(z+\frac{1}{z}))z}dz\right\}$

其中：$\oint_{|z|=1}\frac{1-z^2}{i(5-2(z+\frac{1}{z}))z}dz=\frac{1}{-2i}\oint_{|z|=1}\frac{1-z^2}{z^2-\frac{5}{2}z+1}dz$

$$=-\frac{1}{2i}\oint_{|z|=1}\frac{1-z^2}{(z-\frac{1}{2})(z-2)}dz$$

其中，只有 $z=\frac{1}{2}$ 这一级极点在 $|z|=1$ 内。

故上式 $=2\pi i\cdot\frac{1}{-2i}\cdot\frac{1-z^2}{z-2}\Big|_{z=\frac{1}{2}}=-\pi\cdot\frac{1-\frac{1}{4}}{-\frac{3}{2}}=\frac{\pi}{2}$

$\therefore I=\mathrm{Re}\left\{\frac{\pi}{2}\right\}=\frac{\pi}{2}$.

(也可以直接用书本P109页结论，$I=\int_{0}^{\pi}\frac{\cos mx}{5-4\cos x}dx=\frac{\pi}{3\cdot 2^{m-1}}$，

则本题答案为 $\frac{\pi}{3\cdot 2^{0-1}}-\frac{\pi}{3\cdot 2^{2-1}}=\frac{\pi}{2}$)