随机过程例题选讲

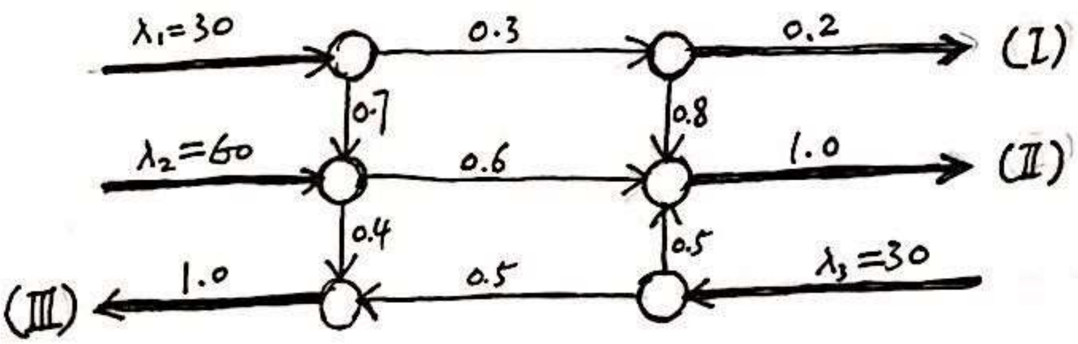
1. 设 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 为两个独立的Poisson过程，强度分别为 λ_1 与 λ_2，

(1) 证明 $N_1(t)+N_2(t)$ 为强度是 $\lambda_1+\lambda_2$ 的Poisson过程，并从直观上解释此结果；

(2) 试求在 $N_1(t)$ 的任二相邻事件发生的时间间隔内，$N_2(t)$ 恰好发生 k 个事件的概率 $P_k=?$ $(k\geq 0)$

2. 设 $N(t)$ 为到时刻 t 为止某类事件发生的个数(次数)，且 $\{N(t), t\geq 0\}$ 为强度 λ 的Poisson过程。若每一事件独立地以概率 p 被观察到，以概率 $1-p$ 会不被观察到。我们以 $N_1(t)$ 表示被观察到的事件数，$N_2(t)$ 表示未被观察到的事件数，则 $N_1(t)+N_2(t)=N(t)$。问 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 分别是什么过程？$N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 是否独立？为什么？试将此结论加以推广。

3. 考虑下图的交通网络：流入的是三个相互独立且具有图示强度的Poisson过程(泊松流)，而且交会处每辆车亦相互独立地按图示概率选择到各方向。试确定三个出口处的交通流的具体特征（什么流？强度多少？）



4. (习题2.12)。

5. 设移民到某地区定居的居民户数 $N(t)$ 是一个Poisson过程，平均每周有2户定居(即 $\lambda=2$)。如果每户的人口数为i.i.d的r.v. $\{Y_i, i\geq 1\}$，且 Y_i 的分布律为：
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$，记 $X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$.

(1) 试求5周内移民到该地区人口数的期望与方差

(2) 试求 $X(t)$ 的矩母函数。

6. $2N$ 个球(N 黑、N 白)分装在甲、乙两个袋子里，每袋各装 N 个球。每次从二袋中各随机取出一球，相互交换后再放回袋中。现以 X_n 表示第 n 次交换后甲袋中的黑球数，则 $\{X_n, n\geq 0\}$ 为一M.C.

(1)试求该M.C.的转移概率矩阵P;

(2)证明该M.C.为不可约遍历链;

(3)试求该M.C.的极限分布 $\pi_j=\lim\limits_{n\to+\infty}p_{ij}^{(n)}$. ($\forall i,j\in S=\{0,1,2,\cdots,N\}$)

7. 袋中有N个球,球为白色或黑色的,每次从袋中随机抽取一球,然后放回一个不同颜色的球。若袋中有k个白球,则称系统处于状态k。试用一M.C.描述这个模型,且

(1)求该M.C.的转移概率矩阵P,并讨论其状态分类;

(2)该M.C.是否存在平稳分布?有则求之;

(3)极限 $\lim p_{ij}^{(n)}$ 是否存在($\forall i,j\in S$)?为什么?

8. 可用一个5状态的M.C. $\{X_n, n\geq 0\}$ 来描述水库的供水情况,按其水位的高低分为:"1"—危险水平,"2"—缺水,"3"—刚好够,"4"—较好,"5"—充裕。假定由以往数据可求得状态转移规律为:

试求出现危险水平的平均时间间隔。

$$P=\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0, & 0, & 0\\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & 0, & 0\\ 0, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & 0\\ 0, & 0, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}\\ 0, & 0, & 0, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

9.(习题3.16)。

10.(赌徒输光问题)二人进行赌博,其中甲有a元,乙有b元,每局输赢1元,一直赌到其中一人输光为止。设每局甲赢的概率为p,乙赢的概率为 $q=1-p$。设以 X_n 表第n局结束时甲的全部赌资,则 $\{X_n, n\geq 0\}$ 为一M.C.,试求甲输光的概率(约定 $X_0=a$)。

11. 设 $X(t)=A\cos(\omega t+\Theta)$,其中A与Θ独立,$A\sim U(-1,1)$,$P\{\Theta=-\frac{\pi}{4}\}=P\{\Theta=\frac{\pi}{4}\}=\frac{1}{2}$,$\omega\in R$

(1)证明 $\{X(t), t\in\mathbb{R}\}$ 为(宽)平稳过程;

(2)该过程是否具有均值遍历性?为什么?

12. 设 $X(t)=\cos(t\xi+\eta)$,其中ξ与η独立,$\eta\sim U(0,2\pi)$,$\xi\sim f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$,$(x\in\mathbb{R})$

(1)证明 $\{X(t), t\in\mathbb{R}\}$ 为平稳;(2)试求其 $S(\omega)$;(3)其均值遍历性是否成立?为什么?

13:对于下列函数 $S_i(\omega)$,$(\omega\in\mathbb{R})$:$S_1(\omega)=(\omega^2+9)/(\omega^2+4)(\omega+1)^2$,$S_2(\omega)=(\omega^2+1)/(\omega^4+5\omega^2+6)$,$S_3(\omega)=(\omega^2+4)/(\omega^4-4\omega^2+3)$,$S_4(\omega)=e^{-i\omega^2}/(\omega^2+2)$ 与 $S_5(\omega)=b^2$,$(a\leq|\omega|\leq 2a)$ 问其中有哪些为平稳过程的谱密度函数?并进一步求其相应的协方差函数。