第八次作业解答

P132. 5. 解：(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx\ (a>0)$

取 $R(z)=\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$. 在上半平面只有一个二级极点. ai.

$\therefore \operatorname{Res}[R(z),ai]=\lim\limits_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+ai)^2}\right]=\left.\frac{2zai}{(z+ai)^3}\right|_{z=ai}=\frac{1}{4ai}$

$\therefore I=2\pi i\cdot\frac{1}{4ai}=\frac{\pi}{2a}$. (运用书本P114页公式)

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

极点：a_1 a_2

取 $R(z)=\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$. 在上半平面有两个一级极点. ai 和 bi.

$\therefore \operatorname{Res}[R(z),ai]+\operatorname{Res}[R(z),bi]=\lim\limits_{z\to ai}\frac{1}{(z+ai)(z^2+b^2)}+\lim\limits_{z\to bi}\frac{1}{(z^2+a^2)(z+bi)}$

$=\frac{1}{2ai\cdot(b^2-a^2)}+\frac{1}{2bi(a^2-b^2)}=\frac{1}{2abi\cdot(a+b)}$

$\therefore I=2\pi i\cdot\sum\limits_{k=1}^{2}\operatorname{Res}[R(z),a_k]=2\pi i\cdot\frac{1}{2abi(a+b)}=\frac{\pi}{ab(a+b)}$

(3) $\int_{0}^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

取 $R(z)=\frac{1+z^2}{1+z^4}$. 解 $z^4+1=0$ 可得 四个一级极点 $\begin{cases} z_1=e^{\frac{\pi}{4}i} \\ z_2=e^{\frac{3}{4}\pi i} \\ z_3=e^{\frac{5}{4}\pi i} \\ z_4=e^{\frac{7}{4}\pi i}\end{cases}$ z_1. z_2 在上半平面.

$\therefore \sum\limits_{k=1}^{2}\operatorname{Res}[R(z),z_k]=\lim\limits_{z\to z_1}\frac{1+z^2}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}+\lim\limits_{z\to z_2}\frac{1+z^2}{(z-z_1)(z-z_3)(z-z_4)}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}i}+\frac{1}{2\sqrt{2}i}=\frac{1}{\sqrt{2}i}$

由于 $\frac{1+x^2}{1+x^4}$ 为偶函数. $\therefore I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$.

$\therefore I=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\sum\limits_{k=1}^{2}\operatorname{Res}[R(z),z_k]=\pi i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}i}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

6. 解：(1) 由于 $\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}$ 为偶函数，故原积分 $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx$.

取 $R(z)=\frac{z}{z^2+b^2}$ 在上半平面只有一个一级极点 $z=bi$

$\therefore \operatorname{Res}[R(z)e^{iaz}, bi]=\lim\limits_{z\to bi}\frac{ze^{iaz}}{z+bi}=\frac{e^{-ab}}{2}$

由公式(4)可知：$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx$

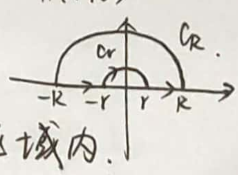
$$=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{iax}}{x^2+b^2}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left[2\pi i\cdot\frac{e^{-ab}}{2}\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot e^{-ab}$$

(2). 由于 $\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}$ 为偶函数，故原积分 $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx$.

注意到：$f(z)=\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}$. 取围道如右：



则：此时存在 $z=bi$ 一个一级极点在积分区域内.

$\therefore \int_C f(z)dz=2\pi i\cdot\lim\limits_{z\to bi}\frac{e^{iaz}}{z(z+bi)}=2\pi i\cdot\frac{e^{-ab}}{-2b^2}=\frac{\pi i e^{-ab}}{-b^2}$

再由柯西积分定理：$\int_C f(z)dz=\int_{-R}^{-r}f(x)dx+\int_r^R f(x)dx+\int_{C_r}f(z)dz+\int_{C_R}f(z)dz.$

由若尔当引理：$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{z(z^2+b^2)}=0.\Rightarrow\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}dz=0.\Rightarrow\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0$

由引理2：$\lim\limits_{r\to0}\int_{C_r}f(z)dz=-\pi i\cdot\operatorname{Res}[f(z),0]$

$$=-\pi i\cdot\lim_{z\to0}\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}$$

$$=\frac{-\pi i}{b^2}$$

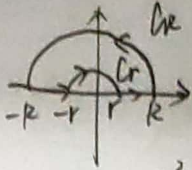
$\therefore R\to+\infty, r\to0$ 时：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx-\frac{\pi i}{b^2}=\frac{\pi i e^{-ab}}{-b^2}$

$$\therefore\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx=\frac{\pi i}{b^2}(1-e^{-ab})$$

$\therefore I=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{b^2}\cdot(1-e^{-ab})=\frac{\pi}{2b^2}(1-e^{-ab})$

(3) 由于 $\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\frac{\sin x}{x}$ 为偶函数，故 $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\frac{\sin x}{x}dx$

取 $f(z)=\frac{z^2-a^2}{z^2+a^2}\cdot\frac{e^{iz}}{z}$ 取闭道：



$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\cdot Res[f(z),ai] = 2\pi i\cdot\lim_{z\to ai}\frac{z^2-a^2}{z+ai}\frac{e^{iz}}{z} = 2\pi i\cdot e^{-a}$$

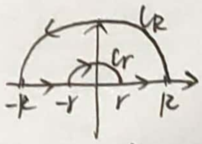
分析过程如(2)，不再多说。$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz=0 & \text{(若尔当)}\\ \lim\limits_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)dz=-\pi i\cdot\lim\limits_{z\to 0}\frac{z^2-a^2}{z^2+a^2}\cdot e^{iz}=\pi i & \text{(引理2)}\end{cases}$

$\therefore R\to+\infty,\ r\to 0$ 时：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\frac{e^{ix}}{x}dx+\pi i=2\pi i\cdot e^{-a}$

$$\therefore I=\frac{1}{2}Im\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\frac{e^{ix}}{x}dx\right]=\frac{1}{2}Im\left[2\pi i\cdot e^{-a}-\pi i\right]=\pi\left(e^{-a}-\frac{1}{2}\right)$$

(4). 由于 $\frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}$ 为偶函数. 故 $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}dx$.

取 $f(z)=\frac{e^{i2az}-e^{i2bz}}{z^2}$. 取闭道：



$z=0$ 为一级极点.

$$\int_C f(z)dz=0=\int_{C_r}f(z)dz+\int_{C_R}f(z)dz+\int_{-R}^{-r}f(x)dx+\int_r^R f(x)dx$$

由若尔当引理：$\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{e^{i2az}}{z^2}dz=0$. $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{e^{i2bz}}{z^2}dz=0\Rightarrow\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R}f(z)=0$.

由引理2：$\lim\limits_{r\to 0}\int_{C_r}f(z)dz=-\pi i\cdot\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^{i2az}-e^{i2bz}}{z}\overset{洛必达}{=}-\pi i\cdot\lim\limits_{z\to 0}\frac{2ai e^{i2az}-2bi e^{i2bz}}{1}$

$$=2\pi(a-b)$$

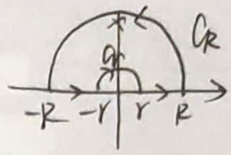
$\therefore R\to+\infty,\ r\to 0$ 时：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i2az}-e^{i2bz}}{z^2}dz+2\pi(a-b)=0$

$$\therefore I=\frac{1}{2}Re\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i2az}-e^{i2bz}}{z^2}dz\right]=\frac{1}{2}\cdot(-2\pi(a-b))=\pi(b-a)$$

(5) $I=\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3dx$. 由于 $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3$ 为偶函数. 故 $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3dx$.

取 $f(z)=\dfrac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}=\dfrac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3iz)^n}{n!}-3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}+2}{z^3}=\dfrac{(3iz)^2-3\cdot(iz)^2+\cdots}{z^3}=\dfrac{-6+\cdots}{z}$

故 $z=0$ 为 $f(z)$ 的一级极点. 故取闭道:



$$\int_{C}f(z)dz=0=\int_{C_R}f(z)dz+\int_{C_r}f(z)dz+\int_{-R}^{-r}f(x)dx+\int_{r}^{R}f(x)dx$$

若尔当引理1: $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{e^{3iz}}{z^3}dz=0$. $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{3e^{iz}}{z^3}dz=0$. $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{2}{z^3}dz=0$.

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0$$

引理2: $\lim\limits_{r\to0}\int_{C_r}f(z)dz=-\pi i\cdot\lim\limits_{z\to0}\dfrac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^2}\overset{洛}{=}-\pi i\cdot\lim\limits_{z\to0}\dfrac{3ie^{3iz}-3ie^{iz}}{2z}$

$$\overset{洛}{=}-\pi i\cdot\lim_{z\to0}\frac{-9e^{3iz}+3e^{iz}}{2}=-\pi i\cdot\frac{-6}{2}=3\pi i.$$

$R\to+\infty, r\to0$: $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}dz+3\pi i=0\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}dz=-3\pi i$

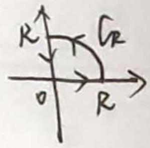
由于 $\sin^3x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{z^3}dz=0$. ($\frac{2}{z^3}$ 为奇函数)

$$\therefore I=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{3e^{ix}-e^{3ix}}{x^3}dx\right]$$

$$=\frac{1}{8}\operatorname{Im}\left[-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{3ix}-3e^{ix}+2}{x^3}dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{x^3}dx\right]$$

$$=\frac{1}{8}\cdot3\pi=\frac{3}{8}\pi.$$

7. 解:(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x-e^{-x}}{x}dx$. 取 $f(z)=\frac{e^{iz}-e^{-z}}{z}$. $z=0$为可去奇点，故全平面解析.

取闭道:  . 由柯西积分定理: $\int_C f(z)dz=\int_0^R f(x)dx+\int_{Ri}^0 f(z)dz+\int_{C_R} f(z)dz$

由积大不等式: 在C_R上: $z=Re^{i\theta}$. $\int_{C_R} f(z)dz\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-R\sin\theta}+e^{-R\cos\theta}}{R}\cdot Rd\theta$

由于 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$时, $\sin\theta\ge\frac{2}{\pi}\theta$.

(这里 $\tilde{\theta}=\frac{\pi}{2}-\theta$)

则: $\int_{C_R} f(z)dz\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin\theta}d\theta+\underline{\int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-R\sin\tilde{\theta}}(-d\tilde{\theta})}$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin\theta}d\theta\le2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\cdot\frac{2}{\pi}\theta}d\theta$

$=-\frac{\pi}{R}e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{R}(e^{-R}-1)\to0$. $R\to+\infty$时.

$\therefore\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz=0$.

又$\because\int_0^R f(z)dz+\int_{Ri}^0 f(z)dz=\int_0^R\frac{e^{ix}-e^{-x}}{x}+\underline{\int_R^0\frac{e^{i(iy)}-e^{-iy}}{iy}(idy)}$ (这里 $z=iy$)

$=\int_0^R\left(\frac{e^{ix}-e^{-x}}{x}-\frac{e^{-x}-e^{-ix}}{x}\right)dx$

$=\int_0^R\frac{e^{ix}+e^{-ix}-2e^{-x}}{x}dx.$

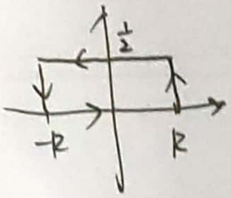
$=\int_0^R\frac{2\cos x-2e^{-x}}{x}dx$

令$R\to+\infty$: 则有 $0=0+2\int_0^{+\infty}\frac{\cos x-e^{-x}}{x}dx$

$\therefore$ 原积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x-e^{-x}}{x}dx=0$.

(2). $\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}dx$. 取 $f(z)=\frac{z}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}$. 此时 $z=0$ 为可去奇点. 全平面解析.

取围道:



则 $\int_C f(z)dz=\underbrace{\int_{-R}^{R}f(x)dx}_{①}+\underbrace{\int_{R}^{R+\frac12 i}f(z)dz}_{②}+\underbrace{\int_{-R+\frac12 i}^{-R}f(z)dz}_{③}+\underbrace{\int_{R+\frac12 i}^{-R+\frac12 i}f(z)dz}_{④}=0$

即: ①+②+③+④=0.

对②: $z=R+iy$. $dz=idy$. $|dz|=dy$.

$$\int_R^{R+\frac12 i}f(z)dz\le\int_0^{\frac12}|f(z)||dz|\le\int_0^{\frac12}\frac{R}{|e^{\pi(R+iy)}|+|e^{-\pi(R+iy)}|}\cdot dy=\int_0^{\frac12}\frac{R\,dy}{e^{\pi R}+e^{-\pi R}}=\frac12\cdot\frac{R}{e^{\pi R}+e^{-\pi R}}$$

由于 $\lim\limits_{R\to+\infty}\frac{R}{2(e^{\pi R}+e^{-\pi R})}\overset{洛必达}{=}\lim\limits_{R\to+\infty}\frac{1}{2(\pi e^{\pi R}-\pi e^{-\pi R})}=0$.

$\therefore\ \lim\limits_{R\to+\infty}\int_R^{R+\frac12 i}f(z)dz=0$

对③: $z=-R+iy$. $dz=idy$ $|dz|=dy$

$$\int_{-R+\frac12 i}^{-R}f(z)dz\le\int_{\frac12}^{0}|f(z)||dz|\le\int_{\frac12}^{0}\frac{R\,dy}{e^{\pi R}+e^{-\pi R}}=-\frac12\cdot\frac{R}{e^{\pi R}+e^{-\pi R}}.$$

同②可知: $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{-R+\frac12 i}^{-R}f(z)dz=0.$

对④: $\int_{R+\frac12 i}^{-R+\frac12 i}f(z)dz=\int_R^{-R}\frac{x+\frac12 i}{e^{\pi(x+\frac12 i)}-e^{-\pi(x+\frac12 i)}}dx$

$=\frac1i\int_R^{-R}\frac{x+\frac12 i}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}dx$. 由于 $\frac{x}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}$ 为奇函数. 故对称区间积分0

$=\frac1i\int_R^{-R}\frac{\frac12 i}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}dx=\frac12\int_R^{-R}\frac{e^{\pi x}}{e^{2\pi x}+1}dx$

令 $R\to+\infty$. $\underset{dt=\pi e^{\pi x}dx}{\overset{t=e^{\pi x}}{=}}\ \frac12\int_{+\infty}^{0}\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{2\pi}\arctan t\Big|_{+\infty}^{0}=\frac{1}{2\pi}\cdot\left[0-\frac{\pi}{2}\right]=-\frac14.$

综上: $I=\frac12\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}dx=\frac12[0-②-③-④]=\frac12\cdot\frac14=\frac18.$

9. 解：(1) 取 $f(z)=8$. $\varphi(z)=2z^5-z^3+z^2-2z$

则在 $|z|=1$ 上：$|f(z)|=8$. $|\varphi(z)|\le 2|z|^5+|z|^3+|z|^2+2|z|=6$.

$\therefore |f(z)|>|\varphi(z)|$

由儒歇定理：$P(z)=f(z)+\varphi(z)$ 与 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内零点个数相同.

由于 $f(z)=8$ 在 $|z|<1$ 内无零点、故 $P(z)$ 在 $|z|<1$ 内零点个数为 0.

(2) 取 $f(z)=-6z^5$. $\varphi(z)=z^7+z^2-3$.

则在 $|z|=1$ 上：$|f(z)|=6$. $|\varphi(z)|\le|z|^7+|z|^2+3=5$.

$\therefore |f(z)|>|\varphi(z)|$.

由儒歇定理：$P(z)=f(z)+\varphi(z)$ 与 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内零点个数相同.

由于 $f(z)=-6z^5$ 在 $|z|<1$ 内只有一个五级零点. 故 $P(z)$ 在 $|z|<1$ 内有 5 个零点

(3) 取 $\varphi(z)=e^z$. $f(z)=-3z^n$.

则在 $|z|=1$ 上：$|\varphi(z)|=\left|e^{\cos\theta+i\sin\theta}\right|=e^{\cos\theta}\le e$ $(\theta=0)$.

$|f(z)|=3|z|^n=3$.

$\therefore |f(z)|>|\varphi(z)|$.

故由儒歇定理：$P(z)=e^z-3z^n$ 有 n 个零点 ($|z|<1$ 内).

10. 解：证明：(1) 对于 $|z|=\frac{1}{2}$：$\begin{cases} f(z)=6z \Rightarrow |f(z)|=3 \\ \varphi(z)=z^4+1. \Rightarrow |\varphi(z)|\le|z|^4+1=\frac{17}{16}\end{cases} \Rightarrow |f(z)|>|\varphi(z)|$

$\therefore |z|<\frac{1}{2}$ 内：$P(z)=f(z)+\varphi(z)$ 的零点个数为 1.（$f(z)$ 的零点个数）

对于 $|z|=2$：$\begin{cases} f(z)=z^4 \Rightarrow |f(z)|=16 \\ \varphi(z)=6z+1 \Rightarrow |\varphi(z)|\le 6|z|+1=13\end{cases} \Rightarrow |f(z)|>|\varphi(z)|$

$\therefore |z|<2$ 内：$P(z)=f(z)+\varphi(z)$ 的零点个数为 4（$f(z)$ 的）

$\therefore \frac{1}{2}<|z|<2$ 内：$P(z)=z^4+6z+1$ 零点个数为 $4-1=3$ 个

(2). 取 C: $|z|=R\ (\operatorname{Re} z>0)$ 与 $z=iy.\ (y\in(-R,R))$.

则: $|z|=R\ (\operatorname{Re} z>0)$ 上: $f(z)=\lambda-z$. $\varphi(z)=-e^{-z}$

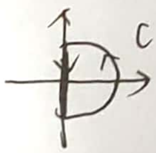
则 $|f(z)|=|\lambda-z|\geq R-\lambda$. $|\varphi(z)|=e^{-R\cos\theta}\leq e^{0}=1$

$\therefore$ R充分大时. $R-\lambda>>1$. 故 $|f(z)|>|\varphi(z)|$.

又在 $z=iy.\ (y\in(-R,R))$ 上: $f(z)=\lambda-z$. $\varphi(z)=-e^{-z}$

则: $|f(z)|=|\lambda-z|=|\lambda-iy|\geq\lambda$. $|\varphi(z)|=|-e^{-z}|=|-e^{-iy}|=1$.

$\therefore$ 由于 $\lambda>1$. $\Rightarrow$ $|f(z)|>|\varphi(z)|$.

综上: 在  闭路C上. $|f(z)|>|\varphi(z)|$ 成立.

$\therefore$ $P(z)=f(z)+\varphi(z)$ 的零点个数 $=f(z)$ 零点个数.

由于 $f(z)=\lambda-z$ 在此右半平面内零点个数为1.

$\therefore$ $P(z)=\lambda-z-e^{-z}$ 在右半平面零点个数为1.

且: 由于 $P(0)=\lambda-1>0$. $P(\lambda)=\lambda-\lambda-e^{-\lambda}=-e^{-\lambda}<0$

由介值定理可知: $\exists\xi\in(0,\lambda)$. s.t. $P(\xi)=0$. $\xi\in R$

得证.