题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

一 基础知识 (共 36 分)

1) 求下列各值

(1) $(1+i)(3+4i)$, (2) $\sin(2+i)$

2) 解下面方程

(1)$z^4-4=0$, (2) $\cos z=3$

3) 设 $f(z)=\dfrac{z^2}{1-2z}$, 把 $f(z)$ 在 $z=0$ 展开成幂级数，并指出收敛半径。

4) 设 $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)^2(z-2)}$, 把 $f(z)$ 在 $|1+i|<|z-i|<|2-i|$ 处展成罗朗级数。

5) 判断方程 $z^5+6z+2=0$ 在 $1<|z|<2$ 的根的个数，并说明理由。

6) 解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, 满足 $u+v=(x+y)(2x-2y+1)$, $f(1)=2+i$, 求函数 $f(z)$.

二 计算积分 (共 42 分)

(1) $\displaystyle\int_0^i (z^2+\cos 2z)\,dz$, (2) $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{e^{iz}}{z^2+4}\,dz$,

(3) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{|dz|}{9+|z-1|^2}$, (4) $\displaystyle\int_{|z-i|=3} \frac{dz}{z(e^{2z}-1)}$,

(5) $\displaystyle\int_{|z|=1} \left(\frac{1}{z^4}+2z^2\right) e^{\frac{z}{z-3}}\,dz$, (6) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{8+2\cos\theta}$,

(7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2(x^2+9)}\,dx$

三(10 分) 利用拉普拉斯变换解微分方程：

$$\begin{cases} y'' + 3y = 13t\,, \\ y(0) = 0,\, y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

四(6 分) 设 $f(z)$ 在 $z=0$ 解析， $f(0)=1,\, f'(0)=2,\, f''(0)=3$ 求

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{|z|=\rho}\frac{1}{(f(z)-1)^2}\,dz$$

五(6 分) 已知 $f(z)$ 在不包含无穷远点的复平面上处处解析，并且成立： $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{f(z)}{z^{2016}}=0$，求证： $f^{(2016)}(z)=0$.

考试科目:复变函数 (B 型)　　　　学号 ________

学生所在系:________　　　　姓名 ________

一.(共 12 分) 求解以下复方程

(1)$z^3+27=0$,　(2)$e^{iz}=1+i$,　(3)$|\cos z|=|\sin z|$

二. (8 分) 已知解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, 其实部 $u(x,y)=x^2-y^2+3yx+x+1$, 且 $f(0)=1$, 求虚部 $v(x,y)$, 并计算 $f'(1)$.

三 计算积分 (共 36 分)

(1) $\int_c |z|\overline{z}\,dz$,　其中$c$是从$z=-2$到$z=2$沿圆周$|z|=2$的上半圆

(2) $\oint_{|z|=4} \frac{e^z}{(z-1)^2(z-3)}dz$,　(3) $\oint_{|z|=1} z^3\left(1-\cos(\frac{2}{z})\right)\mathrm{d}z$;

(4) $\oint_{|z|=2} \frac{\cos 2z\,\mathrm{d}z}{z^2\sin z}$,　(5) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2+e^{i\theta}}$,

(6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^4+1}dx$

四. (共 12 分)

(1) 已知 $f_1(z)=\dfrac{z}{z^2-4}$, 把 $f_1(z)$ 在 $z=0$ 展开成幂级数, 并指出收敛区域.

(2) 已知 $f_2(z)=\dfrac{z}{(z^2-4)^2}$, 把 $f_2(z)$ 在区域 $0<|z-2|<4$ 展成罗朗级数.

五(6 分) 判断 $\sin z=3z^4-9z^2+2z$ 在 $|z|<1$ 的根的个数, 并说明理由.

六(10 分) 利用拉普拉斯变换解微分方程：

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = te^{2t} \\ y(0) = 0, y'(0) = -3. \end{cases}$$

七(6 分) 设 $f(z)$ 在复平面上除了 $z = 2$ 外都解析，$z = 2$ 是 $f(z)$ 的二级极点，当 $|z| > 2015$ 时，存在 $M > 0$，使 $|f(z)| < M$. 且有 $f(0) = 1, f(1) = 2, f(3) = 0$，求 $f(z)$ 的表达式.

八 证明题 (共 10 分，第 (2) 小题 6 分)
设 f(z) 在以 a 点为中心的闭圆 $\overline{E} = \{z : |z - a| \leq 1\}$ 解析，
(1) 证明：

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + e^{i\theta}) e^{-i\theta} \, d\theta$$

(2) 设 M 是 $|f(z)|$ 在闭圆 $\overline{E}$ 边界上的最大值，记 $c = f'(a) - 2hM$，其中$h > 1$ 为实数，证明：方程 $f(z) = c$ 在闭圆内部 $E = \{z : |z - a| < 1\}$ 中无解.