中国科学技术大学二〇二四年攻读硕士学位研究生入学考试试题参考解析

考试科目：自动控制理论 编号：845

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一、分析：本题考察机械系统建模求传递函数。

解：假设题中所有的位移均是绝对位移由受力分析有：

$$m_v\ddot{y}_1 = K_1\left(y_2 - y_1\right) + b_1\left(\dot{y}_2 - \dot{y}_1\right)$$

$$m_t\ddot{y}_2 = K_2\left(x - y_2\right) - K_1\left(y_2 - y_1\right) - b_1\left(\dot{y}_2 - \dot{y}_1\right)$$

两边进行拉式变换并整理有

$$\left(m_v s^2 + b_1 s + K_1\right)Y_1(s) = \left(K_1 + b_1 s\right)Y_2(s)$$

$$\left(m_t s^2 + b_1 s + K_1 + K_2\right)Y_2(s) = K_2 X(s) + \left(K_1 + b_1 s\right)Y_1(s)$$

（1）消去（中科大官方群：437258355）$Y_2(s)$有：

$$\begin{aligned}\frac{Y_1(s)}{X(s)} &= \frac{K_2\left(b_1 s + K_1\right)}{\left(m_t s^2 + b_1 s + K_1 + K_2\right)\left(m_v s^2 + b_1 s + K_1\right) - \left(b_1 s + K_1\right)^2} \\ &= \frac{K_2\left(b_1 s + K_1\right)}{m_t m_v s^4 + b_1(m_t + m_v)s^3 + (K_1 m_t + K_1 m_v + K_2 m_v)s^2 + K_2 b_1 s + K_1 K_2}\end{aligned}$$

（2）消去$Y_1(s)$有：

$$\begin{aligned}\frac{Y_2(s)}{X(s)} &= \frac{K_2\left(m_v s^2 + b_1 s + K_1\right)}{\left(m_v s^2 + b_1 s + K_1\right)\left(m_t s^2 + b_1 s + K_1 + K_2\right) - \left(b_1 s + K_1\right)^2} \\ &= \frac{K_2\left(m_v s^2 + b_1 s + K_1\right)}{m_t m_v s^4 + b_1(m_t + m_v)s^3 + (K_1 m_t + K_1 m_v + K_2 m_v)s^2 + K_2 b_1 s + K_1 K_2}\end{aligned}$$

评注：本题注意受力分析即可。

二、分析：本题考察闭环系统稳定性的判断。

解：（1）法一：劳斯稳定判据

系统的闭环特征方程为：

$$\begin{aligned}D(s) &= \left(T_1 s + 1\right)\left(T_2 s + 1\right)(T_3 s + 1) + K \\ &= T_1 T_2 T_3 s^3 + \left(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3\right)s^2 + \left(T_1 + T_2 + T_3\right)s + 1 + K = 0\end{aligned}$$

列劳斯表：

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & T_1T_2T_3 & T_1+T_2+T_3 \\
s^2 & T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3 & 1+K \\
s^1 & \dfrac{\left(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3\right)\left(T_1+T_2+T_3\right)-(1+K)T_1T_2T_3}{T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3} & \\
s^0 & 1+K &
\end{array}
$$

由劳斯判据易知，（中科大官方群：437258355）系统稳定时有

$$
\begin{cases}
T_1T_2T_3>0 \\
T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3>0 \\
1+K>0 \\
\left(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3\right)\left(T_1+T_2+T_3\right)>(1+K)\left(T_1T_2T_3\right)
\end{cases}
$$

解得 $0<K<\dfrac{\left(T_1+T_2+T_3\right)\left(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3\right)}{T_1T_2T_3}-1$

法二：根轨迹法，绘制 K 从 $0\to+\infty$ 的根轨迹

系统开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{\left(T_1s+1\right)\left(T_2s+1\right)\left(T_3s+1\right)}$$

绘制 180° 根轨迹

①系统有 3 个开环极点：$n=3$，$p_1=-\dfrac{1}{T_1}$，$p_2=-\dfrac{1}{T_2}$，$p_3=-\dfrac{1}{T_3}$；无开环零点。

②实轴上的根轨迹：$\left(-\infty,-\dfrac{1}{T_3}\right],\left[-\dfrac{1}{T_2},-\dfrac{1}{T_1}\right]$

③渐近线：

$$\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_j}{n-m}=\frac{-\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_3}}{3-0}=-\frac{T_2T_3+T_1T_3+T_1T_2}{3T_1T_2T_3}$$

$$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}=\pm\frac{\pi}{3},\pi$$

④与虚轴交点

令 $s=j\omega$ 代入 $D\left(s\right)$（中科大官方群：437258355）中有：

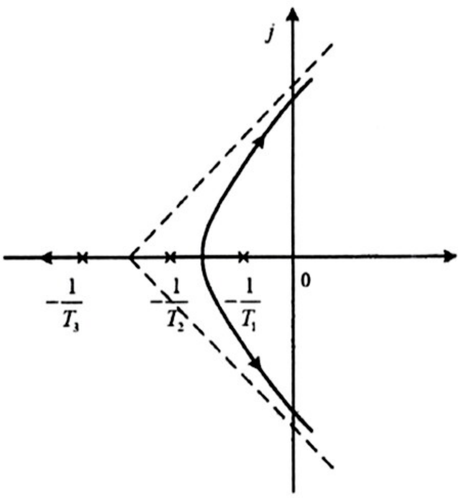
$$D\left(j\omega\right)=-T_1T_2T_3j\omega^3-\left(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3\right)\omega^2+\left(T_1+T_2+T_3\right)j\omega+1+K=0$$

$$\begin{cases} j\omega\left(T_1+T_2+T_3-T_1T_2T_2\omega^2\right)=0 \\ 1+K=\left(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3\right)\omega^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega=\sqrt{\dfrac{T_1+T_2+T_3}{T_1T_2T_3}} \\ K=\dfrac{\left(T_1+T_2+T_3\right)\left(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3\right)}{T_1T_2T_3}-1 \end{cases}$$

故系统稳定时有：

$$0<K<\frac{\left(T_1+T_2+T_3\right)\left(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3\right)}{T_1T_2T_3}-1$$

系统的根轨迹如下：



法三：奈奎斯特稳定判据

令 $s=j\omega$，则系统（中科大官方群：437258355）的频率特性为

$$G(j\omega)=\frac{K}{\left(1+T_1j\omega\right)\left(1+T_2j\omega\right)\left(1+T_3j\omega\right)}=\frac{K\left(1-T_1j\omega\right)\left(1-T_2j\omega\right)\left(1-T_3j\omega\right)}{\left(1+T_1^2\omega^2\right)\left(1+T_2^2\omega^2\right)\left(1+T_3^2\omega^2\right)}$$

$$=\frac{K\left[1-\left(T_1T_3+T_2T_3+T_1T_2\right)\omega^2+j\omega\left(T_1T_2T_3\omega^2-\left(T_1+T_2+T_3\right)\right)\right]}{\left(1+T_1^2\omega^2\right)\left(1+T_2^2\omega^2\right)\left(1+T_3^2\omega^2\right)}$$

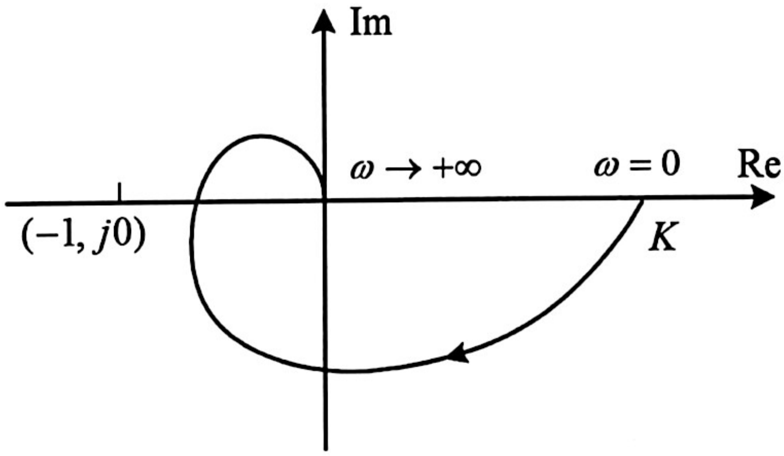
令 $\mathrm{Im}[G(j\omega)]=0$，解得 $\omega_x=\sqrt{\dfrac{T_1+T_2+T_3}{T_1T_2T_3}}$，代入 $\mathrm{Re}[G(j\omega)]$ 中有：

$$\mathrm{Re}[G(j\omega)]=\frac{K\left[1-\left(T_1T_3+T_2T_3+T_1T_2\right)\cdot\dfrac{T_1+T_2+T_3}{T_1T_2T_3}\right]}{\left[1+\dfrac{T_1^2\left(T_1+T_2+T_3\right)}{T_1T_2T_3}\right]\left[1+\dfrac{T_2^2\left(T_1+T_2+T_3\right)}{T_1T_2T_3}\right]\left[1+\dfrac{T_3^2\left(T_1+T_2+T_3\right)}{T_1T_2T_3}\right]}$$

起点：$\omega\to 0^+$ 时，$|G(j\omega)|\to K$，$\angle G(j\omega)\to 0^\circ$

终点：$\omega\to\infty$ 时，$|G(j\omega)|\to 0$，$\angle G(j\omega)\to -270^\circ$

绘制 *Nyquist* 曲线如下：



由 *Nyquist* 判据知，$\mathrm{Re}[G(j\omega)] > -1$ 时系统稳定

此时，有

$$\frac{K\left[1-(T_1T_3+T_2T_3+T_1T_2)\cdot\frac{T_1+T_2+T_3}{T_1T_2T_3}\right]}{\left[1+\frac{T_1^2(T_1+T_2+T_3)}{T_1T_2T_3}\right]\left[1+\frac{T_2^2(T_1+T_2+T_3)}{T_1T_2T_3}\right]\left[1+\frac{T_3^2(T_1+T_2+T_3)}{T_1T_2T_3}\right]} > -1$$

解得

$$0 < K < \frac{(T_1+T_2+T_3)(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)}{T_1T_2T_3} - 1$$

（2）当 $T_1=3$，$T_2=2$，$T_3=1$ 时，系统（中科大官方群：437258355）开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{(3s+1)(2s+1)(s+1)}$$

系统的闭环特征方程为

$$D(s) = 6s^3 + 11s^2 + 6s + K + 1$$

列劳斯表：

$$\begin{array}{lll} s^3 & 6 & 6 \\ s^2 & 11 & K+1 \\ s & \dfrac{66-6(K+1)}{11} & \\ s^0 & K+1 & \end{array}$$

由劳斯判据易知，系统临界稳定时，有

$$\frac{66-6(K+1)}{11}=0 \Rightarrow K=10$$

构造辅助方程

$$11s^2+11=0$$

解得 $s=\pm j$，则系统临界稳定时，振荡频率为 $\omega = 1rad/s$

①P 控制器：根据齐格勒-尼克尔斯整定法可得

$$K_p = 0.5K = 5$$

则 P 控制器的传递函数为

$$G_c(s)=5$$

② PI 控制器(注：第十四版**中文教材**这里参数有误，我们采取第十四版**英文版**的参数表格)

振荡周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=6.28$$

根据齐格勒（中科大官方群：437258355）-尼克尔斯整定法可得

$$K_p = 0.45K = 4.5,\ K_I=\frac{0.54K}{T}=0.86$$

则 PI 控制器的传递函数为

$$G_c(s)=4.5+\frac{0.86}{s}$$

③PID 控制器

根据齐格勒-尼克尔斯整定法可得

$$K_p = 0.6K = 6,\ K_I=\frac{1.2K}{T}=1.91,\ K_D=\frac{0.6KT}{8}=4.71$$

则 PID 控制器的传递函数为

$$G_c(s)=6+\frac{1.91}{s}+4.71s$$

评注：本题第（1）问计算量较大，考生需注意计算，第（2）问考察到闭环齐格勒-尼克尔斯零点法

三、分析：本题考察频域校正，设计 P 、I 、PI 控制器来达到系统要求的性能指标。

解：被控对象的开（中科大官方群：437258355）环传递函数为

$$G(s)=\frac{20}{(s+1)(s+20)}=\frac{1}{(s+1)\left(\frac{s}{20}+1\right)}$$

令

$$L(\omega_c)=0\Rightarrow\omega_c=1rad/s$$

相角裕度为

$$\gamma=180^\circ-\arctan\omega_c-\arctan\frac{\omega_c}{20}=132.14^\circ$$

（1）设计比例控制器

当$G_c(s)=K$时，校正后的传递函数为

$$G^*(s)=G(s)G_c(s)=\frac{K}{(s+1)\left(\frac{s}{20}+1\right)}$$

阶跃输入的稳态误差为

$$e_{ss}=\frac{1}{K}\le 5\%$$
$$e_{ss}=\frac{1}{K}\le 0.05$$

取$K=20$

系统的开环（中科大官方群：437258355）传递函数为

$$G^*(s)=G(s)G_c(s)=\frac{20}{(s+1)\left(\frac{s}{20}+1\right)}$$

令

$$L^*(\omega_c^*)=0\Rightarrow\omega_c^*=20rad/s$$

校正后的相角裕度

$$\gamma^*=180^\circ-\arctan\omega_c^*-\arctan\frac{\omega_c^*}{20}=47.86^\circ<60^\circ$$，不满足题目要求

取$K\ge 20$，$\omega_c^*>20rad/s$，$\gamma^*(\omega_c^*)<47.86^\circ\ll 60^\circ$，故不能同时满足上述指标。

（2）设计积分控制器

当$G_c(s)=\frac{K}{s}$时，校正后的（中科大官方群：437258355）传递函数为

$$G^*(s)=G(s)G_c(s)=\frac{K}{s(s+1)\left(\frac{s}{20}+1\right)}$$

系统为一型系统，系统稳定时阶跃输入下的稳态误差都为0。

校正后的相角裕度：

$$\gamma^*\left(\omega_c^*\right)=180^\circ-90^\circ-\arctan\omega_c^*-\arctan\frac{\omega_c^*}{20}\geq 60^\circ$$

解得 $\omega_c^*\leq 0.541 rad/s$，取 $\omega_c^*=0.541 rad/s$

令

$$L^*(\omega_c^*)=0\Rightarrow K=0.541$$

则校正装置传递函数为

$$G_c(s)=\frac{0.541}{s}$$

（3）设计比例积分控制器

（3.1）闭环零点为-0.1时，取$\tau=0.1$，故有

$$G_c\left(s\right)=K\left(1+\frac{\tau}{s}\right)=\frac{K\left(s+0.1\right)}{s}$$

校正后的开（中科大官方群：437258355）环传递函数

$$G^*(s)=G(s)G_c(s)=\frac{0.1K(\frac{s}{0.1}+1)}{s(s+1)\left(\frac{s}{20}+1\right)}$$

由于系统型别提高，存在一个积分环节，系统稳定时阶跃输入下的稳态误差都为0

校正后系统的相角裕度为

$$\gamma^*\left(\omega_c^*\right)=180^\circ+\arctan\frac{\omega_c^*}{0.1}-90^\circ-\arctan\omega_c^*-\arctan\frac{\omega_c^*}{20}\geq 60^\circ$$

解得 $\omega_c^*\leq 13.408 rad/s$，取 $\omega_c^*=13.408 rad/s$

令

$$L^*\left(\omega_c^*\right)=0\Rightarrow K=13.408$$

则校正装置传递函数为

$$G_c\left(s\right)=\frac{13.408\left(s+0.1\right)}{s}$$

（3.2）闭环零点为-4时，取$\tau=4$，故有

$$G_c\left(s\right)=K\left(1+\frac{\tau}{s}\right)=\frac{K\left(s+4\right)}{s}$$

校正后的开（中科大官方群：437258355）环传递函数

$$G^{*}(s)=G(s)G_c(s)=\frac{4K\left(\frac{\tau}{4}+1\right)}{s(s+1)\left(\frac{s}{20}+1\right)}$$

由于系统型别提高，存在一个积分环节，故无论 K 取何值，阶跃输入下的稳态误差都为0，校正后系统相角裕度为

$$\gamma^{*}\left(\omega_c^{*}\right)=180^{\circ}+\arctan\frac{\omega_c^{*}}{4}-90^{\circ}-\arctan\omega_c^{*}-\arctan\frac{\omega_c^{*}}{20}\geq 60^{\circ}$$

解得 $\omega_c^{*}\leq 0.815rad/s$，取 $\omega_c^{*}=0.815rad/s$

令

$$L^{*}\left(\omega_c^{*}\right)=0\Rightarrow K=0.204$$

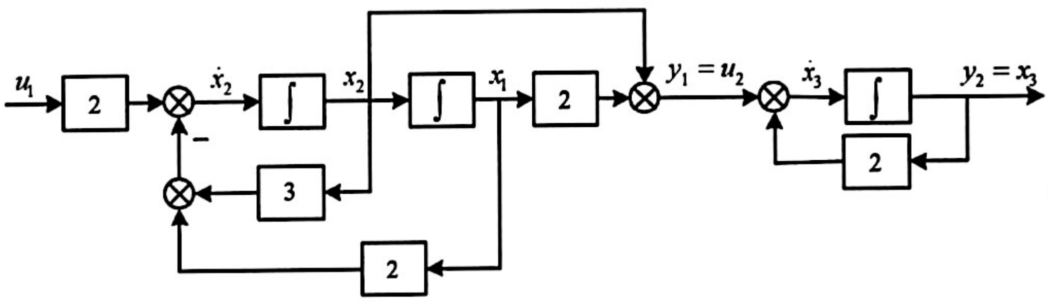
则校正装置传递函数为

$$G_c(s)=\frac{0.204(s+4)}{s}$$

与（3.1）相比，过零频率 ω_c^{*} 变小，这是由于闭环零点的增大，为保证稳定裕量，系统要保证闭环零点尽可能小，说明要（中科大官方群：437258355）在稳态精度上折衷。

四、分析：本题考察串联系统的状态空间表达式的求解以及状态响应的求解，系统能控性能观性的判断以及分解。

解：（1）由题意，绘制出系统的结构图如下：



由上结构图得系统的状态变量关系式为：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-2x_1-3x_2+2u\\ \dot{x}_3=-2x_3+y_1=-2x_3+2x_1+x_2\\ y=x_3\end{cases}$$

故 S_3 的状态空间方程为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -2 & -3 & 0\\ 2 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 2\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

（2）由题（1）可得

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -2 & -3 & 0\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

系统的状态（中科大官方群：437258355）转移矩阵 $\Phi(t)$ 为

$$\Phi(t)=L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2} & 0\\ -\frac{2}{s+1}+\frac{2}{s+2} & -\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2} & 0\\ \frac{2}{s+1}-\frac{2}{s+2} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} & 0\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} & 0\\ 2e^{-t}-2e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} & e^{-2t}\end{bmatrix}$$

在单位阶跃输入下，系统的状态响应为

$$x(t)=\Phi(t)x_0+\int_0^t\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} & 0\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} & 0\\ 2e^{-t}-2e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 2\end{bmatrix}+\int_0^t\Phi(\tau)B\cdot 1d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}1+e^{-2t}\\ -2e^{-2t}\\ 1+e^{-2t}\end{bmatrix}$$

输出响应为

$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}x(t)=1+e^{-2t}$$

（3）系统 S_1 的能控性、能观性判别矩阵分别为

$$rankM_1 = rank\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = 2 = n$$

$$rankN_1 = rank\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = 1 < n$$

故S_1完全能控但不完全能观

系统S_2的能控性、能观性判别矩阵分别为

$$rankM_2 = 1 = n$$

$$rankN_2 = 1 = n$$

故系统S_2既能（中科大官方群：437258355）控也能观

系统S_3的能控性、能观性判别矩阵分别为

$$rankM_3 = rank\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 2 & -6 & 14 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} = 2 < n$$

$$rankN_3 = rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -6 & -3 & 4 \end{bmatrix} = 2 < n$$

故S_3不能控也不能观

对S_1进行能观性分解，取$R_0^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

令$x = R_0\tilde{x}$，则有

$$\dot{\tilde{x}} = R_0^{-1}AR_0\tilde{x} + R_0^{-1}Bu$$

$$y = CR_0\tilde{x}$$

即

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\tilde{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\tilde{x}$$

能观子系统为：

$$\dot{\tilde{x}}_o = -\tilde{x}_o + 2u$$

$$y = \tilde{x}_o$$

不能观子系统为

$$\dot{\tilde{x}}_{\bar{o}} = -\tilde{x}_{\bar{o}} - 2\tilde{x}_{\bar{o}} + 2u$$

特征值为除去能观部分的特征值，故不能观的特征值为 $\lambda = -1$

对于 S_3 进行能控性分解，取 $R_c = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，则 $R_c^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

令 $\tilde{x} = R_c x$ 则有

$$\dot{\tilde{x}} = R_c^{-1} A R_c \tilde{x} + R_c^{-1} B u = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = C R_c \tilde{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x}$$

能控（）部分的

$$\dot{\tilde{x}}_c = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \tilde{x}_c + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \tilde{x}_c$$

不能控部分的

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}} = -2\tilde{x}_{\bar{c}} \\ y = \tilde{x}_{\bar{c}} \end{cases}$$

故不能控部分特征值为 -2。

评注：本题考察知识点较多，需考生对现控部分有全面的了解。

五、分析：本题考察状态反馈，状态观测器以及传递函数的求解。

解：（1）由系统的传递函数写出能观标准型

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u = Ax + Bu$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x=Cx$$

判断能控性：

$$rankM=rank\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}=2=n$$

故可以设计状态反馈配置极点

由

$$\begin{cases}y(t)=1-e^{-2t}\\ u(t)=1(t)\end{cases}\Rightarrow\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{2}{s+2}=\frac{2(s+3)}{(s+2)(s+3)}$$

故要配置极点为$(-2,-3)$

引入状态反馈率$u=v-Kx$，令状态反馈阵为$K=\begin{bmatrix}k_1,k_2\end{bmatrix}$

引入状态反馈后的系统特征多项式为

$$f(\lambda)=\left|\lambda I-(A-BK)\right|=\lambda^2+(3k_1+k_2+4)\lambda+3k_1(4+k_2)+3k_2(1-k_1)$$

期望系统特征多项式为：

$$f^*(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda+3)=\lambda^2+5\lambda+6$$

对比$f(\lambda)$和$f^*(\lambda)$系（）数有：

$$\begin{cases}3k_1+k_2+4=5\\ 3k_1(4+k_2)+3k_2(1-k_1)=6\end{cases}$$

解得：$\begin{cases}k_1=1\\ k_2=-2\end{cases}$

（2）由能观标准型知，系统能观。

设计观测器$G=\begin{bmatrix}g_1\\ g_2\end{bmatrix}$，引入状态观测器后的系统特征多项式为

$$f(\lambda)=\left|\lambda I-(A-GC)\right|=\lambda^2+(4+g_2)\lambda+g_1$$

期望系统的极点为

$$f^*(\lambda)=(\lambda+6-j6)(\lambda+6+j6)=\lambda^2+12\lambda+72$$

对比$f(\lambda)$和$f^*(\lambda)$系数有：

$$\begin{cases}4+g_2=12\\ g_1=72\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}g_1=72\\ g_2=8\end{cases}$$

（3）由分离定理，用观测器实现状态反馈与直接使用状态反馈的传递函数相同即为

$$\Phi(s)=\frac{2(s+3)}{(s+2)(s+3)}=\frac{2}{s+2}$$

评注：状态反馈不改变系统的零点。

六、分析：本题考察现控中有关证明题，需考生对现代控制理论中的概念有所了解。

答案：解：

（1）设单输入单输出线性定常系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}=Ax+Bu$$

$$y=Cx+Du$$

引入状态反馈 $u=v-Kx$ 代入上式中，得

$$\dot{x}=Ax+B(v-Kx)=(A-BK)x+Bv$$

$$y=Cx+Du$$

对能控（中科大官方群：437258355）系统 $\Sigma_0=(A,B,C、D)$，有传递函数

$$\begin{aligned}W_0(s)&=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}+d\\&=\frac{ds^n+\left(b_{n-1}+da_{n-1}\right)s^{n-1}+\cdots+\left(b_1+da_1\right)s+\left(b_0+da_0\right)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}\end{aligned}$$

引入状态反馈后的

$$\begin{aligned}W_k(s)&=C\left[sI-(A+BK)\right]^{-1}B+D\\&=\frac{ds^n+\left(b_{n-1}+da_{n-1}\right)s^{n-1}+\cdots+\left(b_1+da_1\right)s+\left(b_0+da_0\right)}{s^n+\left(a_{n-1}-K_{n-1}\right)s^{n-1}+\cdots+\left(a_1-K_1\right)s+\left(a_0-K_0\right)}\end{aligned}$$

故状态反馈不改变系统的零点。

若系统不完全能控，会发生零极点对消，但不影响系统的补充完整后的实际零点，上述结论依然成立。

（2）

$$W_0\left(t_f\right)=\int_0^{t_f}e^{A't_f}C'Ce^{At_f}dt$$

在 $\left[0,t_f\right)$ 上，系统的零输入响应可表示为 $y(t)=Ce^{At}x(0)$

性能指标 $J=\int_0^{t_f}y'(t)y(t)dt$ 将 $y(t)=Ce^{At}x(0)$ 代入

有

$$J=\int_0^{t_f}\left(Ce^{At}x(0)\right)'\left(Ce^{At}x(0)\right)dt=\int_0^{t_f}x'(0)e^{A't}C'Ce^{At}x(0)dt$$
$$=x'(0)\int_0^{t_f}e^{A't}C'Ce^{At}dtx(0)=x'(0)W_0\left(t_f\right)x(0)$$

若$W_0\left(t_f\right)$可逆，则其正定（由于$W_0\left(t_f\right)=\int_0^{t_f}e^{A't_f}C'Ce^{At_f}dt$）

令$W_0\left(t_f\right)=P$，则对于任给的x_1，x_2，总有$\theta\in(0,1)$时，

$$J\left[\theta x_1+(1-\theta)x_2\right]=\left[\theta x_1+(1-\theta)x_2\right]'P\left[\theta x_1+(1-\theta)x_2\right]$$
$$=\theta^2x_1'Px_1+(1-\theta)^2x_2'Px_2+\theta(1-\theta)x_1'Px_2+\theta(1-\theta)x_2'px_1$$
$$<\theta x_1'Px_1+(1-\theta)x_2'Px_2=\theta J\left(x_1\right)+(1-\theta)J\left(x_2\right)$$

故J是关于$x(0)$严格凸函数，存在唯一的极小值，可以通过优化J来找到$x(0)$故可以通过记录一段时间$\left[0,t_f\right)$上系统的零输入响应，求出系统初始时刻的状态。

评注：本题第一问，对于单输入-单输出系统，状态反馈可能会该改变系统的极点，但不改变系统的零点，第二问中注意$J(x)$是凸函数（中科大官方群：437258355）的有关证明及$\theta(1-\theta)x_1'Px_2+\theta(1-\theta)x_2'Px_1$的收缩。