

## 第一章

1. **自动化 Automation**: 机器、系统或过程在没有人或人较少的直接参与下, 按照人的要求, 经过自动检测、信息处理、分析判断、操纵控制, 实现人的预期目标
2. **自动控制 Automatic Control**: 在没有人直接参与的情况下, 利用外加的设备或装置(控制系统、控制装置、控制器), 使机器、设备或生产过程(被控对象)的某个工作状态或参数自动地按照预定的规律运行
3. **系统 system** 依一定秩序相互联系着的一组事物  
控制系统 control system 由相互连接的元部件组成的系统结构, 能够提供期望的系统响应  
线性系统 linear system 满足叠加性 Superposition 和齐次性 Homogeneity 的系统  
线性系统理论 linear system theory 分析控制系统的基础。线性系统理论假定系统的元部件满足因果关系、线性关系。
4. **过程 Process**: 被控制的器件、对象或系统。也称被控过程 controlled process  
对象 Plant: 也称被控对象 controlled plant
5. **开环控制系统 open-loop control system** 不使用反馈, 直接用执行器控制一个过程。过程的输出信号对系统中其他信号不起作用, 即被控过程的输出信号没有反馈回去影响控制系统中的其他信号  
执行器 actuator 接收控制器输出的控制信号, 对被控过程(被控对象)施加控制作用, 使被控过程产生期望输出响应的装置。
6. **闭环控制系统 closed-loop control system** 使用传感器测量系统的实际输出信号, 并将实际的输出信号反馈回去, 与期望的输出信号进行比较, 得到偏差信号, 采用偏差信号计算控制器输出的控制信号

反馈信号 feedback signal: 测量系统的输出, 用于反馈, 用来控制该系统

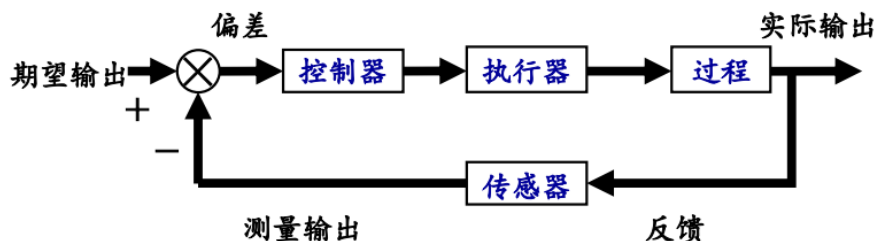
设定值 setpoint

期望输出 desired output

系统输入信号 system input signal

参考输入信号 reference input signal

指令信号 command signal



### 闭环反馈控制系统 (有反馈)

传感器 sensor 测量外部信号的装置, 并将其转换成电信号或其他形式的信号, 以满足信息传输、处理、存储、显示、记录和控制等要求

7. **负反馈 Negative feedback**: 系统的实际输出信号反馈回去, 与系统的输入信号相减(设定值 - 输出), 得到偏差信号, 采用偏差信号控制该系统

**正反馈 Positive feedback**: 系统的实际输出信号反馈回去, 与系统的输入信号相加(设定值 + 输出)。正反馈往往导致闭环系统不稳定

8. 闭环控制可以抑制干扰、衰减噪声, 减弱乃至消除它们对系统输出的影响。

9. **多变量控制系统 Multivariable Control System**: 具有一个以上输入变量或一个以上输出变量的系统

10. 设计 Design 为达到特定目的，构思或发明一个系统的造型、零配件和细节的过程

工程设计 Engineering design 设计工程系统的过程。它是工程师的核心任务，这是一个复杂的过程，其中创造力和分析起主要作用

设计指标 Specifications 一组规定的功能指标、性能指标，明确定义了装置或产品是什么、能做什么、做到什么程度

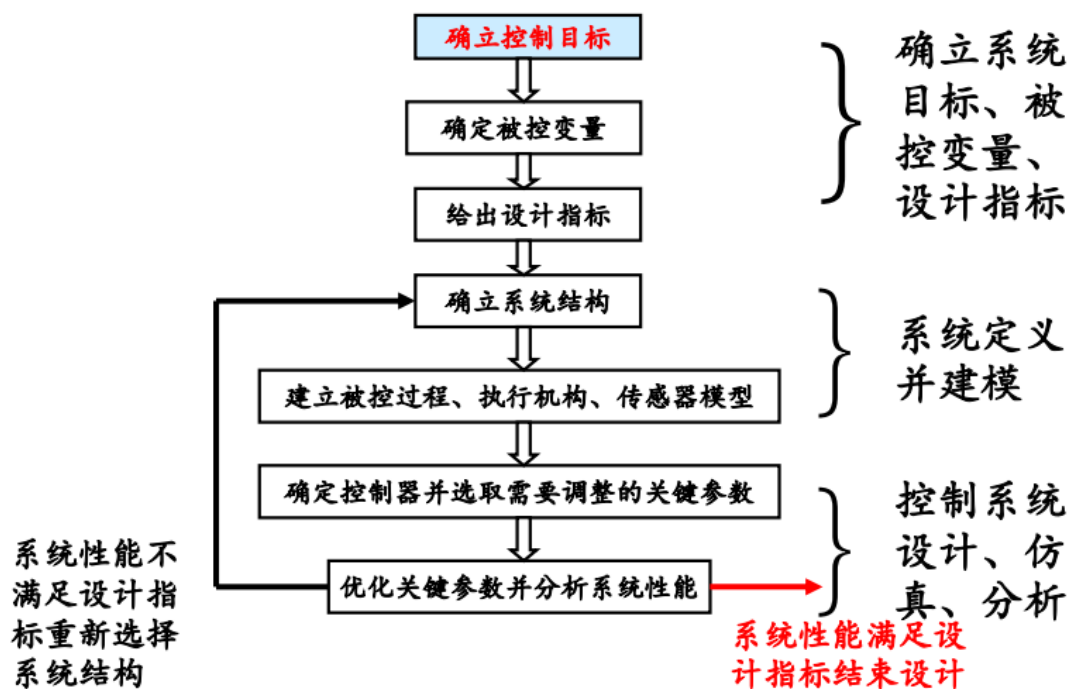
- 设计的复杂性 Complexity of design 设计中使用了众多的工具、论点和知识，既要考虑众多因素的相对重要性，又要从定性、定量的角度给出它们的定义
- 折衷 Trade-off 众多要满足的设计目标是相互冲突的，需要权衡解决，设计中需要有效的妥协
- 设计差距 Design gaps 最终产品与最初设想不一致。实际系统与模型有本质差异，这种差距是内在的、本质的
- 风险 Risk 设计过程中有不确定性，会出现未曾预料的结果

工程分析 Engineering analysis 建立工程系统、物理系统的模型，依靠模型分析系统的各种性能，增进对系统的理解，指出改进的方向

工程综合 Engineering synthesis 将零部件、设备组合成统一整体，创造新的物理系统的过程

工程优化 Engineering optimization 确定影响系统性能的关键参数；构造系统结构；调整系统参数，评估在这种系统结构下所能达到的最佳性能

## 11. 设计七大步骤



12. 机械电子学 mechatronics 也称机电一体化

13. 绿色工程 green engineering 所设计的产品能够：尽量减少污染、减少对人类健康的风险、改善环境

## 第二章

### 1. 数学模型 Mathematical model

白箱建模、机理建模：运用已知的物理、化学、生命科学等原理，分析系统运动规律，经

过数学推导，建立系统数学模型

**黑箱建模、试验建模、系统辨识：**通过试验，测量系统输入输出数据(要求这些数据中包含系统静态、动态特性的信息)，利用输入输出数据所提供的信息建立系统的数学模型

**灰箱建模、基于机理的试验建模：**机理已知部分采用机理建模，机理未知部分采用试验建模

## 2. 微分方程 Differential equation

非线性微分方程求解十分困难，因此将非线性微分方程线性化，并采用**拉普拉斯变换 Laplace transform**，将线性微分方程转换为代数方程，以**简化求解过程**

## 3. 动态系统建模 Dynamic system modeling 的一般方法：

1)定义系统及其组成部件

2)根据系统工作的基本原理，提出基本的、必要的假设条件，推导系统的数学模型

3)列写描述这个数学模型的微分方程

4)求解方程，获得所需要的输出变量

5)检验所求得解及假设条件

6)如有必要，重新分析或重新设计系统

4.  $q(s)=0$  称为**特征方程 Characteristic equation**，特征方程的根决定了**时间响应的特征**，特征方程的根称为**系统的极点 Pole**

$p(s)=0$  的根称为**系统的零点 Zero**

5.  $\zeta$ 是阻尼比 Damping ratio，无量纲

$\omega_n$  是系统的自然频率 Natural frequency

6.传递函数的表示形式

部分分式展开式，用于求时域响应表达式

有理分式

零极点式（标准形式）——首1式、尾1式

首1式——零极点

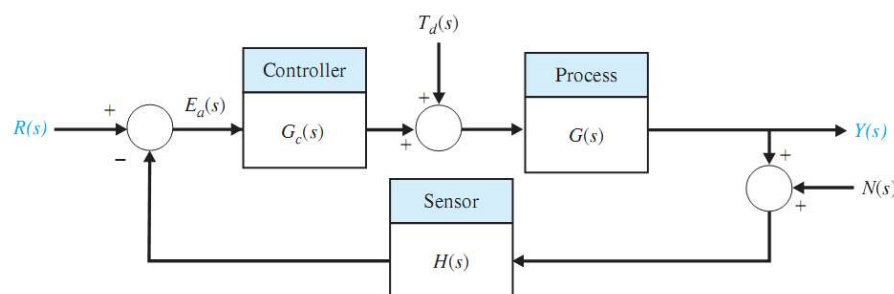
尾1式——增益、时间常数

## 第四章

1. **开环系统：**不需要反馈，**输入信号直接产生输出响应**。**扰动  $T_d(s)$** 直接影响输出。开环控制系统对扰动和被控过程的参数变化高度敏感

**闭环系统：**测量输出信号，**与期望输出比较，产生偏差信号**，控制器根据偏差信号调整执行器。输出  $Y(s)$  受**设定值输入  $R(s)$ 、扰动输入  $T_d(s)$ 、测量噪声  $N(s)$** 影响

2.单位负反馈系统： $H(s)=1$



**跟踪误差 tracking error:**  $E(s)=R(s)-Y(s)$

**回路增益 Loop gain:**  $L(s)=G_c(s)G(s)$

**灵敏度函数 Sensitivity function:**  $S(s)=1/(1+L(s))=1/(1+G_c(s)G(s))$

**互补灵敏度函数 Complementary sensitivity function:**  $C(s)=L(s)/(1+L(s))=L(s)/(1+G_c(s)G(s))$

有  $C(s)+S(s)=1$

注 1: 跟踪误差信号  $E(s)$  与偏差信号  $E_a(s)$  不相同

注 2:  $H(s)$  不为 1 时, 只改动  $L(s)=G_c(s)G(s)H(s)$ , 其它的类比更改

注 3: 要求减小跟踪误差?

$$E(s) = \frac{1}{1+L(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1+L(s)}T_d(s) - \frac{L(s)}{1+L(s)}N(s)$$

通常, 扰动是低频的、噪声是高频的, 故确保  $L(s)$  在高频时增益低、低频时增益高便可有效抑制跟踪误差 (控制器增益  $G_c(s)$  低频高、高频低)

注 4: 稳态值  $y_{ss}$  与稳态误差  $e_{ss}$  的关系  $e_{ss}=r_{ss}-y_{ss}$

因此有的题会加一个负号

3.

反馈的优点: 降低了系统对过程参数变化的灵敏度; 增强了扰动抑制能力; 衰减了测量噪声; 减小了系统稳态误差; 使系统瞬态响应易于控制和调整

反馈的代价: 增加了元件数, 提高了系统成本, 增加了系统复杂性, 降低了系统可靠性; 降低了系统增益; 可能导致系统不稳定

4. **系统灵敏度 System sensitivity:** 工作点附近系统特性的小增量变化时, 系统传递函数的相对变化与被控过程传递函数(或参数)的相对变化之比

$$S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G} \frac{G}{T} = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln G}$$

$$S_\alpha^T = \frac{\partial T}{\partial \alpha} \frac{\alpha}{T} = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \alpha}$$

$$S_\alpha^T = S_G^T S_\alpha^G$$

闭环系统灵敏度小于开环系统灵敏度

5. **瞬态响应 transient response:** 瞬态响应速度由时间常数  $\tau$  决定。

瞬态响应时间常数与系统调节时间的关系?

## 第五章

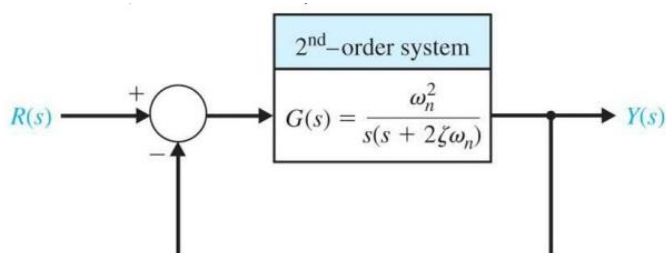
### 1. 控制系统性能指标: 稳、准、快

**稳: 稳定性**, 闭环系统必须是稳定的, 并且具有足够的相对稳定性 (**稳定裕量**)。一般希望, 稳定性越强越好

**准: 准确性**, 稳态响应的跟踪精度要高 (**稳态跟踪误差** 要小), 瞬态响应的跟踪精度要高 (动态跟踪误差要小)。一般希望, 跟踪精度越高越好、跟踪误差越小越好

**快: 快速性**, **瞬态响应速度**, 与开环响应速度相比, 有些系统要求加快闭环响应速度, 有些系统要求减慢闭环响应速度。一般希望, 在不影响稳定性、相对稳定性的前提下, 闭环响应速度要尽可能快一些

### 2. 二阶系统性能



(1) 闭环传递函数:

➤ 闭环系统传递函数:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

(2) 欠阻尼系统:  $0 < \zeta < 1$

➤ 闭环系统有一对稳定的共轭复极点:

$$[1] \quad s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$$

[2] 时域响应

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \cos^{-1}\zeta)$$

令:  $\beta = \sqrt{1-\zeta^2}$ ,  $\theta = \cos^{-1}\zeta$ 。则有:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n\beta t + \theta), \quad t \geq 0$$

[3] 跟踪误差:

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

$$= \frac{1}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n\beta t + \theta), \quad t \geq 0$$

[4] 上升时间: (0-100%) (10%-90%)

$0.3 \leq \zeta \leq 0.8$  时,

$$T_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_n\beta} = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \cos^{-1}\zeta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \quad T_{r1} \text{ 的线性近似:}$$

$$T_{r1} = \frac{2.16\zeta + 0.60}{\omega_n}$$

[5] 调节时间: (2%允许误差) (5%允许误差)

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = 4\tau$$

$$\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n} \quad T_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} = 3\tau$$

[6] 峰值时间

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\beta} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d} \quad T_j = \frac{j\pi}{\omega_d}$$

[7] 超调量

$$M_{pt} = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad P.O. = \frac{M_{pt} - f_v}{f_v} \times 100\%$$
$$= 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} (\%)$$

[8] 衰减比

$$\eta = (M_{pt} - f_v) : (M_3 - f_v)$$

$$= e^{\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} : 1$$

(3) 无阻尼系统  $\zeta=1$

[1]  $s_{1,2} = -\omega_n$

单位阶跃响应:

[2]  $y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t), t \geq 0$

(4) 过阻尼系统  $\zeta > 1$

$$\begin{aligned} s_1 &= -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ &= -\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n \\ s_2 &= -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ &= -\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n \end{aligned}$$

[1] 因此, 有:  $|s_1| > |s_2|$

极点  $s_1$  比  $s_2$  离原点更远。阻尼比  $\zeta$  越大, 两个极点相距越远,  $s_2$  越有可能成为主导极点

[2] 
$$\begin{aligned} y(t) &= 1 + \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{s_1 t} - \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{s_2 t} \\ &= 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( -\frac{e^{s_1 t}}{s_1} + \frac{e^{s_2 t}}{s_2} \right) \end{aligned}$$

(5) 比较三种阻尼系统

[1] 过阻尼系统缓慢响应输入信号, 没有振荡

[2] 在无振荡响应 (无阻尼、过阻尼) 中, 临界阻尼系统响应速度最快

[3]  $0.5 < \zeta < 0.8$  的欠阻尼系统, 比临界阻尼系统、过阻尼系统更快的达到稳态值

二阶最佳系统:  $\zeta = 0.707$

[4]  $\zeta$  过大, 瞬态响应速度缓慢;  $\zeta$  过小, 严重超调

(6) 冲激响应、负阻尼系统略

### 3. 一阶系统性能略

### 4. 附加零极点对系统的影响

(1) 附加极点

$$T(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\zeta s + 1)(\gamma s + 1)} \quad (\text{已归一化处理})$$

当  $|1/\gamma| \geq 10|\zeta\omega_n|$  时, 共轭复极点的实部小于负实极点实部的  $1/10$ , 共轭复极点是一对 **主导极点**

**dominant root**

影响: 响应更加平缓, 响应速度减慢, 超调量减小, 过渡过程时间延长

## (2) 附加零点

系统的零点离原点越近，即  $a$  越小，零点对系统瞬态响应的影响越大

$$T(s) = \frac{(\omega_n^2/a)(s+a)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{a} \frac{s+a}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$
$$= \frac{s}{a} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

(3)

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{a} \frac{s+a}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(\tau s + 1)}$$

$a \gg \zeta\omega_n, 1/\tau \gg \zeta\omega_n$  影响不大

5.

## (1) 纯积分的工程实现办法

工程上，一阶纯积分  $1/s$  很难实现，通过以下方式近似实现

$$(1) \frac{K}{Ts+1} \quad T \gg T_s \Rightarrow \frac{K}{Ts}$$

$$(2) \frac{K}{s(Ts+1)} \quad T \ll T_s \Rightarrow \frac{K}{s}$$

上述  $T_s$  为系统实现指标

## (2) 纯微分为什么难以实现？

斜率微分环节负责对变化趋势斜率做预测响应并反映在输出端，响应  $y(t)$  必须要用未来某些时刻的值  $x$  去刻画，这在物理上是不可实现的。

## (3) 工程上对微分环节的处理办法

【1】为什么要处理？

实际应用中，反馈的测量信号常常混杂高频噪声，而微分作用能够放大高频噪声。为此，需要滤除信号中混杂的高频噪声

【2】处理办法

在纯微分环节前增加一阶惯性环节（低通滤波器）便得到： $\frac{s}{\tau s + 1}$

## 6. 稳态误差

### (1) 系统的型数 $N$

$$G_c(s)G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^M (s+z_i)}{s^N \prod_{k=1}^Q (s+p_k)}, \quad z_i \neq 0, \quad p_k \neq 0$$

(2) 稳态位置误差参数： $K_p = G_c(0)G(0)$

0 型系统对阶跃响应的稳态误差： $e_{ss} = \frac{A}{1+K_p}$



高于 0 型的系统对阶跃稳态误差为 0

(3) 稳态速度误差参数:  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s)G(s)$

1 型系统对斜坡响应的稳态误差:  $e_{ss} = \frac{A}{K_v}$

0 型系统对斜坡稳态误差为  $\infty$ , 高于 1 型为 0

(4) 稳态加速度误差参数:  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_c(s)G(s)$

2 型系统对抛物线响应的稳态误差:  $e_{ss} = \frac{A}{K_a}$

0、1 型系统对斜坡稳态误差为  $\infty$ , 高于 2 型为 0

(5) 非单位负反馈系统的稳态误差 (略)

## 7.性能准则

(1) 误差平方积分 ISE, Integral of the Square of the Error

$$ISE = \int_0^T e^2(t) dt$$

积分上限 T 为有限时间, 一般选择 T 使积分达到稳态值, 如调整时间 Ts

误差平方和在数学上易于分析和计算

ISE 的区分度不好, 仅能区分过度的过阻尼系统和过度的欠阻尼系统。

(2) 误差绝对值积分 IAE, Integral of the Absolute magnitude of the Error

$$IAE = \int_0^T |e(t)| dt$$

IAE 非常适用于计算机仿真研究, 但微分困难

ISE 的选择性没有 IAE 好

(3) 时间加权误差绝对值积分 ITAE, Integral of Time multiplied by Absolute Error

$$ITAE = \int_0^T t |e(t)| dt$$

ITAE 强调响应后期误差的影响, 而减弱响应初期较大初始误差对性能准则的影响

阶跃输入 ITAE 最优

$$\frac{s + \omega_n}{s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2} \\ \frac{s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 2.15\omega_n^2 s + \omega_n^3}{s^4 + 2.1\omega_n s^3 + 3.4\omega_n^2 s^2 + 2.7\omega_n^3 s + \omega_n^4} \\ \frac{s^5 + 2.8\omega_n s^4 + 5.0\omega_n^2 s^3 + 5.5\omega_n^3 s^2 + 3.4\omega_n^4 s + \omega_n^5}{s^6 + 3.25\omega_n s^5 + 6.60\omega_n^2 s^4 + 8.60\omega_n^3 s^3 + 7.45\omega_n^4 s^2 + 3.95\omega_n^5 s + \omega_n^6}$$

斜坡输入 ITAE 最优

$$\frac{s^2 + 3.2\omega_n s + \omega_n^2}{s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 3.25\omega_n^2 s + \omega_n^3} \\ \frac{s^4 + 2.41\omega_n s^3 + 4.93\omega_n^2 s^2 + 5.14\omega_n^3 s + \omega_n^4}{s^5 + 2.19\omega_n s^4 + 6.50\omega_n^2 s^3 + 6.30\omega_n^3 s^2 + 5.24\omega_n^4 s + \omega_n^5}$$



(4) 时间加权误差平方积分 ITSE, Integral of Time multiplied by the Squared Error

$$ITSE = \int_0^T te^2(t) dt$$

## 第六章

### 1. 渐近稳定系统

(1) 定义: 线性定常系统输入信号  $r(t)=0$  时(零输入响应), 在任何初始条件下, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 系统输出及各阶导数都为 0

(2) 满足的充要条件:

系统全部极点都位于开左半 S 平面, 即系统特征方程的根都具有负实部

(3) 不稳定/临界稳定

### 2. BIBO 稳定系统

线性定常系统在零初始条件下, 有界输入产生的输出响应也是有界的, 则称为有界输入有界输出稳定系统()。

3. 线性定常系统 BIBO 稳定的充分必要条件是: 系统传递函数全部极点都位于开左半 S 平面

4. 复频域判定系统稳定性——Routh-Hurwitz 稳定性判据

根据劳斯表对特征方程因式分解, 找出极点

➤ 计算 Routh 表的下一行:

$$\begin{array}{l} s^n \left| \begin{array}{cccc} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots \end{array} \right. \end{array}$$

$$b_{n-1} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = -\frac{a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-3} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

特征方程正实部根的个数等于 Routh 阵列第一列符号的变化次数。

系统稳定的充分必要条件是, Routh 阵列第一列中所有系数具有相同符号, 且不能为 0。

几种情况 (略)

## 第七章

1. 根轨迹法 root locus method 1948 年 Evans 提出。

用图解法确定参数变化时 S 平面上根的变化轨迹

根轨迹 root locus 某个系统参数(根轨迹增益)变化时, 特征方程的根在 S 平面上绘出的轨迹

2. 根轨迹满足: 幅值条件/相角条件 (右图为正增益根轨迹)

$$|F(s)| = \frac{K |s+z_1| |s+z_2| \cdots}{|s+p_1| |s+p_2| \cdots} = 1$$

$$\angle F(s) = \angle(s+z_1) + \angle(s+z_2) + \dots$$

$$|KG(s)| = 1 \quad -\{\angle(s+p_1) + \angle(s+p_2) + \dots\}$$

$$\angle KG(s) = 180^\circ + k360^\circ, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad = 180^\circ + k360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

### 3. 绘制正增益根轨迹图的步骤

Step 0: 写出特征方程, 找出与参数有关的等效开环传递函数

$$1 + \frac{K}{s(s+a)} = 0 \quad 1 + a \frac{s}{s^2 + K} = 0$$

Step 1: 当 K 从 0 增加到  $\infty$  时, 特征方程的根轨迹始于 P(s) 的极点, 终于 P(s) 的零点

- 【1】将 P(s) 表达成零极点式 (首 1 式)
- 【2】根轨迹的分支数 SL 等于极点的个数,  $SL=n$ ; 有 M 条终止于开环零点
- 【3】根轨迹与实轴对称。因为复数根以成对的共轭复根出现
- 【4】证明方式: 令 K 趋于 0 和无穷, 直接看表达式

Step 2: 实轴上根轨迹线段的右侧有奇数个 P(s) 的极零点。

- 【1】证明方式: 相角条件

Step 3: 根轨迹增益  $K \rightarrow \infty$  时, 有  $N=n-M$  条根轨迹分支趋向于无穷远处零点, 根轨迹分支的渐近线与实轴交点为  $\sigma_A$ , 与实轴夹角为  $\phi_A$

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{\sum P(s) \text{的极点} - \sum P(s) \text{的零点}}{n-M} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n (-p_j) - \sum_{i=1}^M (-z_i)}{n-M} \\ \phi_A &= \frac{2k+1}{n-M} 180^\circ, \quad k=0, 1, 2, \dots, n-M-1 \end{aligned}$$

- 【1】证明方式: 相角条件、作近似

Step 4: 确定根轨迹与虚轴的交点

法一: 劳斯表 (临界稳定, 首列有 0)

法二: 令  $s=j\omega$ , 解  $1+KP(j\omega)=0$ , 按实部、虚部解

Step 5: 确定实轴上的分离点 breakaway point

➤ 由  $1+KP(s)=0$ , 得:  $K=-1/P(s)=X(s)$

➤ 因此在分离点上, 有:

$$\left. \frac{dK}{ds} \right|_{s=s_1} = \left. \frac{dX(s)}{ds} \right|_{s=s_1} = 0$$

- 【1】证明: 有理式写成零点式, 重根获得导数条件

Step 6: 应用相角条件, 确定根轨迹在 P(s) 极点处的出射角、零点处的入射角

$$|F(s)| = \frac{K |s+z_1| |s+z_2| \cdots}{|s+p_1| |s+p_2| \cdots} = 1$$

$$\begin{aligned} \angle F(s) &= \angle(s+z_1) + \angle(s+z_2) + \dots \\ &\quad - \{ \angle(s+p_1) + \angle(s+p_2) + \dots \} \\ &= 180^\circ + k360^\circ, \quad k \in Z \end{aligned}$$

Step 7: 完成根轨迹其余部分

【1】当  $n-M \geq 2$  时, 上式第二项系数与  $K$  无关, 无论  $K$  取什么值, 闭环特征方程  $n$  个根之和等于  $n$  个  $P(s)$  极点之和:

$$\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n p_i$$

#### 4. 绘制负增益根轨迹图

➤ 负增益根轨迹 negative gain root locus:

$$1 + KG(s) = 0, \quad -\infty < K \leq 0$$

$$G(s) = -\frac{1}{K}$$

$$|KG(s)| = 1$$

$$\angle G(s) = 0^\circ + k360^\circ, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Step 1: 特征方程的根轨迹, 当  $K=0$  时, 始于  $P(s)$  的极点,  $K \rightarrow -\infty$  时, 终于  $P(s)$  的零点

Step 2: 实轴上根轨迹线段的右侧有偶数个  $P(s)$  的极点和零点。由相角条件保证

Step 3: 根轨迹增益  $K \rightarrow -\infty$  时, 有  $N=n-M$  条根轨迹分支趋向于无穷远处零点, 这些根轨迹分支的渐近线与实轴交点为  $\sigma_A$ , 与实轴夹角为  $\phi_A$

$$\sigma_A = \frac{\sum P(s) \text{的极点} - \sum P(s) \text{的零点}}{n-M}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^n (-p_j) - \sum_{i=1}^M (-z_i)}{n-M}$$

$$\phi_A = \frac{k}{n-M} 360^\circ = \frac{2k\pi}{n-M}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n-M-1$$

Step 4: 确定根轨迹是否与虚轴相交, 交点的位置、根轨迹增益。

Step 5: 确定实轴上的分离点 breakaway point

Step 6: 应用相角条件, 确定根轨迹在  $P(s)$  极点处的出射角、零点处的入射角。

Step 7: 完成根轨迹其余部分

第 2、3、6 步与正增益根轨迹图不同

#### 5. 三作用控制器, 也称 PID 控制器

**PID controller (Proportional-Integral Derivative Controller)**

➤ 时域的输出方程:

$$u(t) = \underbrace{K_P e(t)}_{\text{比例项}} + \underbrace{K_I \int e(t) dt}_{\text{积分项}} + \underbrace{K_D \frac{de(t)}{dt}}_{\text{微分项}}$$

➤ 传递函数为:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

(1) PID 控制器在工业过程中得到了广泛应用

【1】功能简单, 使用方便

【2】在广阔的运行条件下有良好的性能

【3】人类目前在工程实践中遇到的控制问题, 90% 可以用 PID 控制器解决

【4】工程师积累了 PID 参数整定的丰富经验

(2) 三个可凋控制器参数:

比例增益  $K_P$  Proportional gain

积分增益  $K_I$  Integral gain

微分增益  $K_D$  Derivative gain

(3) 实际应用中, 反馈的测量信号常常混杂高频噪声, 而微分作用能够放大高频噪声。为此, 需要滤除信号中混杂的高频噪声

PID 控制器中的微分项在实际实现时采用:

$$G_d(s) = \frac{K_D s}{\tau_d s + 1}$$

微分项的滤波时间常数  $\tau_d$  常常远小于过程本身的时间常数, 控制系统分析时可以忽略

(4) PID 控制器的作用:

PID 控制器引入一个纯积分环节(位于原点的极点, 提高开环系统型数、改善稳态性能)、两个零点(理论上可以位于左半  $S$  平面任意位置)

(5) PID 参数改变

➤ 增大PID控制器增益  $K_P$ 、 $K_I$ 、 $K_D$ , 对系统阶跃响应的影响:

PID增益	百分比超调量	调整时间	稳态误差
增大 $K_P$	增大	影响很小	减小
增大 $K_I$	增大	增大	稳态误差为0
增大 $K_D$	减小	减小	没有影响

(6) PID 整定

【1】PID 参数手动整定法 manual PID tuning

闭环, 逐个调整参数使其达到最佳

【2】临界比例带法 Ziegler-Nichols tuning method

控制器类型	$K_P$	$K_I$	$K_D$
比例控制器P $G_c(s)=K_P$	$0.5K_U$	-	-
比例积分控制器PI $G_c(s)=K_P+\frac{K_I}{s}$	$0.45K_U$	$\frac{0.54K_U}{T_U}$	-
比例积分微分控制器PID $G_c(s)=K_P+\frac{K_I}{s}+K_D s$	$0.6K_U$	$\frac{1.2K_U}{T_U}$	$\frac{0.6K_U T_U}{8}$

系统闭环控制, 设置  $K_I=0$ 、 $K_D=0$ , 采用纯比例控制器;

增大  $K_P$ , 注意观测系统输入、输出, 直到系统达到临界稳定, 产生幅值和周期不变的持续振荡

记录此时的控制器比例增益, 称为临界增益  $K_U$  ultimate gain; 振荡周期, 称为临界振荡周期  $T_U$  ultimate period

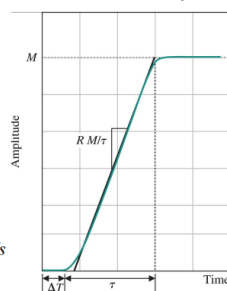
【3】开环临界比例带法

① 系统开环, 给被控对象施加阶跃的控制信号, 测量输出信号

② 如果输出信号如图所示, 则可以使用开环临界比例带法; 否则要采用其他整定方法。  $R=M/\tau$ ,  $T_d=\Delta T$

➤ 这类高阶系统通常用一阶惯性加纯滞后模型近似:

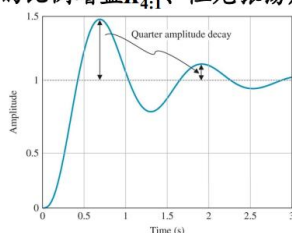
$$G(s) = M \left[ \frac{p}{s+p} \right] e^{-\Delta T s}$$



控制器类型	$K_P$	$K_I$	$K_D$
比例控制器P $G_c(s)=K_P$	$\frac{1}{RT_d}$	-	-
比例积分控制器PI $G_c(s)=K_P+\frac{K_I}{s}$	$\frac{0.9}{RT_d}$	$\frac{0.27}{RT_d^2}$	-
比例积分微分控制器PID $G_c(s)=K_P+\frac{K_I}{s}+K_D s$	$\frac{1.2}{RT_d}$	$\frac{0.6}{RT_d^2}$	$\frac{0.6}{R}$

#### 【4】衰减曲线法

- ① 系统闭环，设置 $K_I=0$ 、 $K_D=0$ ，采用P控制器，调整系统响应平稳后，逐渐增大 $K_P$ ，观察输出量、控制量波动情况，直到获得4:1衰减振荡
- ② 记录此时的比例增益 $K_{4:1}$ 、阻尼振荡周期 $T_{4:1}$



控制器类型	$K_P$	$K_I$	$K_D$
比例控制器P $G_c(s)=K_P$	$K_{4:1}$	-	-
比例积分控制器PI $G_c(s)=K_P + \frac{K_I}{s}$	$0.8K_{4:1}$	$\frac{1.7K_{4:1}}{T_{4:1}}$	-
比例积分微分控制器PID $G_c(s)=K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$	$1.2K_{4:1}$	$\frac{4K_{4:1}}{T_{4:1}}$	$\frac{K_{4:1}T_{4:1}}{8}$

#### 【5】经验法

### 第八章/第九章/第十章

#### 1 频率响应 frequency response: 系统对正弦输入信号的稳态响应

##### (1) 频率响应法的优点:

各种频率、振幅的**正弦测试信号容易获得**，用实验方法**容易测量系统的频率响应**  
用图形可以很方便地表达  $T(j\omega)$  的**幅值、相角**，并深刻洞察控制系统分析、设计  
在频域中设计系统，可以有效地控制所设计的系统的**带宽、抑制噪声和扰动**  
通过系统的**频率响应**可以获得系统的**传递函数**

令  $S=j\omega$ ，可以由系统的传递函数  $T(s)$  得到系统的频率响应  $T(j\omega)$

##### (2) 频率响应法的缺点:

**频率响应特性与时域的瞬态响应特性之间缺乏准确的定量关系**

当系统动力学特性存在较大范围的变化时，用频率响应法设计、分析控制系统，不如根轨迹法方便、透彻

##### (3) 四种常用的频率响应图

Nyquist 图 (极坐标图、幅相特性图、奈奎斯特图、奈氏图)

Bode 图 (对数坐标图、对数频率特性图、波特图)

对数幅相图

Nichols 图 (尼科尔斯图、尼氏图)

#### 2. 极坐标图 (Nyquist 图) 的绘制

逐点绘制，找特殊点

##### (1) 极坐标图的优点:

采用 Nyquist 稳定性判据，便于分析稳定性

工程实践中，通过频率响应实验测量得到极坐标图

##### (2) 极坐标图的缺点:

从试验获得系统的极坐标图后，难以获得系统的传递函数

已知系统的传递函数，计算系统的频率响应很繁琐，画极坐标图很难

单个极点、零点的影响难以明显区分

增加新的极点或零点，频率响应要重新计算

##### (3) Nyquist 稳定判据

Nyquist 稳定判据 Nyquist stability criterion:

【1】开环传递函数  $L(s)$  在右半  $S$  平面没有不稳定极点 ( $P=0$ )，反馈系统稳定的充分必要条件是， $L(s)$  平面上的围线  $\Gamma_L$  不包围  $(-1, j0)$  点 ( $N=0$ )

【2】开环传递函数  $L(s)$  在右半  $S$  平面有不稳定极点 ( $P>0$ )，反馈系统稳定的充分必要条件是， $L(s)$  平面上的围线  $\Gamma_L$  逆时针包围  $(-1, j0)$  点次数等于  $L(s)$  开环不稳定极点的个数 ( $N=-P$ )

【3】闭环系统稳定的充分必要条件： $L(s)$  平面上的围线  $\Gamma_L$  逆时针包围  $(-1, j0)$  点的次数  $N$ ，等于开环系统环路传递函数  $L(s)$  不稳定极点的个数  $P$

关键： $Z=N+P=0$ ，稳定

【4】证明：

<1>

**围线映射 contour map**: 依函数关系  $F(s)$  将围线(或轨迹)从一个平面映射(或转换)到另一平面

**保角映射 conformal mapping**:  $S$  平面上围线的角度映射到  $F(s)$  平面上角度不变

沿围线顺时针方向移动为正方向；沿围线正方向移动时，右侧的区域称为围线包围区域：顺时针、向右看 clockwise and eyes right

<2>柯西定理 Cauchy's theorem (幅角原理 principle of the argument)：

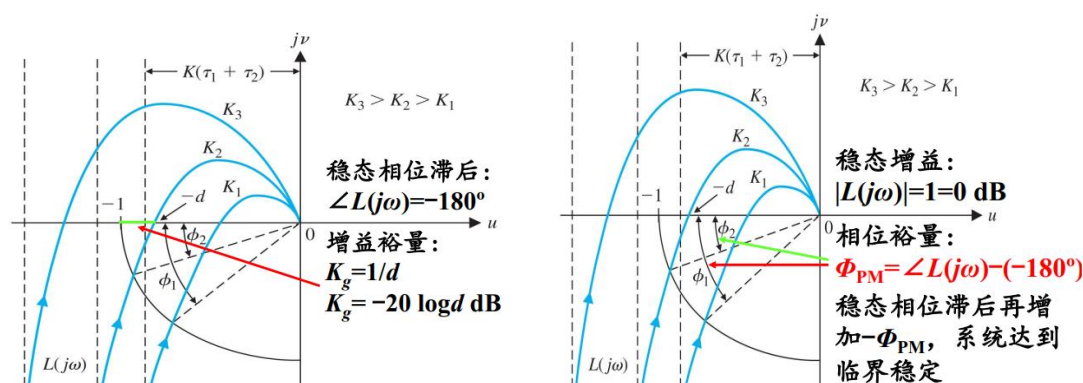
如果  $S$  平面上围线  $\Gamma_S$  顺时针包围  $F(s)$  的  $Z$  个零点、 $P$  个极点，但不通过任何一个零点、极点，则对应的  $F(s)$  平面上围线  $\Gamma_F$  顺时针包围原点  $N=Z-P$  周

<3>绘制 Nyquist 围线  $\Gamma_S$  的映射曲线  $\Gamma_F$ ，判断  $\Gamma_F$  包围原点的周数，依柯西定理，得到 Nyquist 围线  $\Gamma_S$  包围  $F(s)$  零点(即闭环系统的不稳定特征根)的个数  $Z=N+P$ ，从而判断闭环系统稳定性

对特征方程： $F(s)=1+L(s)$ ，有： $L(s)=F(s)-1$

$F(s)$  因式分解麻烦； $L(s)$  是开环传递函数，容易因式分解； $L(j\omega)$  是试验得到的开环频率特性  $F(s)$  平面上围线  $\Gamma_F$  对原点  $(0, j0)$  的包围，转变为  $L(s)$  平面上围线  $\Gamma_L$  对  $(-1, j0)$  点的包围

(4) 由 Nyquist 图获得增益裕度、相角裕度



**增益裕量**：稳态相移为  $-180^\circ$  (相位交界频率) 的频率点上，如果要使系统到达临界稳定 (Nyquist 图与实轴相交于  $-1+j0$  点)，系统增益需要增加的倍数

**相位裕量 phase margin**：幅频特性  $|L(j\omega)|=1$  的频率上 (增益交界频率)，在  $L(j\omega)$  平面中，使  $L(j\omega)$  通过  $(-1, j0)$  点所要旋转的相位角

### 3. Bode 图

(1) 对数幅频特性图：横坐标为对数角频率、纵坐标为对数增益值  $=20 \log_{10}|G(j\omega)|$ ，单位：分贝 dB

相频特性图：横坐标为对数角频率、纵坐标为相位  $\Phi(\omega)$

(2) 十倍频程 decade：两个频率相差 10 倍，两个频率间的间隔称为十倍频程。即： $\omega_2=10\omega_1$ ，从  $\omega_1$  到  $\omega_2$  的频率范围称十倍频程

(3) 对一阶惯性环节高频段，频率  $\omega=1/\tau$  称为 **转折频率 break frequency**，转角频率 corner frequency，**三分贝频率**



(4) **Bode图的主要优点**：利用对数增益值，将传递函数中各个因子增益值的相乘，转化为各个因子对数增益值的相加，简化了对数幅频特性图绘制

**频率响应法的缺点**：频率响应特性与时域瞬态响应特性之间缺乏准确的定量关系

尤其是：闭环系统时域瞬态响应特性与开环系统频率响应特性之间缺乏准确的定量关系

(5) 绘图

➤ **传递函数的一般形式**：

$$G(s) = \frac{K_b \prod_{i=1}^Q (1 + \tau_i s)}{s^N \prod_{m=1}^M (1 + \tau_m s) \prod_{k=1}^R \left[ 1 + \left( \frac{2\zeta_k}{\omega_{nk}} \right) s + \left( \frac{s}{\omega_{nk}} \right)^2 \right]}$$

➤ 系统拥有增益  $K_b$ 、 $Q$  个零点、原点有  $N$  个极点、 $M$  个实极点、 $R$  对共轭复极点

叠加原理

➤  $G(j\omega)$  的对数增益值：

$$\begin{aligned} 20 \log |G(j\omega)| = & 20 \log K_b + 20 \sum_{i=1}^Q \log |1 + j\omega\tau_i| \\ & - 20 \log |(j\omega)^N| \\ & - 20 \sum_{m=1}^M \log |1 + j\omega\tau_m| \\ & - 20 \sum_{k=1}^R \log \left| 1 + \frac{2\zeta_k}{\omega_{nk}} j\omega + \left( \frac{j\omega}{\omega_{nk}} \right)^2 \right| \end{aligned}$$

➤  $G(j\omega)$  的相角为：

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) = & \sum_{i=1}^Q \tan^{-1}(\omega\tau_i) \\ & - N(90^\circ) \\ & - \sum_{m=1}^M \tan^{-1}(\omega\tau_m) \\ & - \sum_{k=1}^R \tan^{-1} \frac{2\zeta_k \omega_{nk} \omega}{\omega_{nk}^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

(6) 各种因子的近似折线图

【1】常数  $K_b$

$K_b > 0$  时：

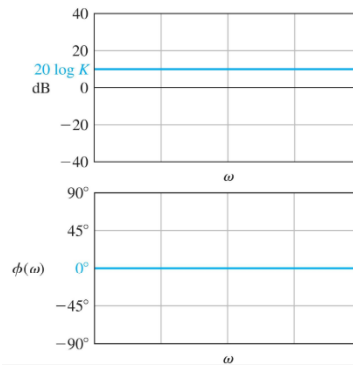
对数增益： $20 \lg K_b = \text{常数 dB}$

相角： $\Phi(\omega) = 0^\circ$

$K_b < 0$  时：

对数增益： $20 \lg |-K_b| = \text{常数 dB}$

相角： $\Phi(\omega) = -180^\circ$



【2】位于原点的极点  $s^{-N}$

对数增益： $-20N \lg \omega \text{ dB}$

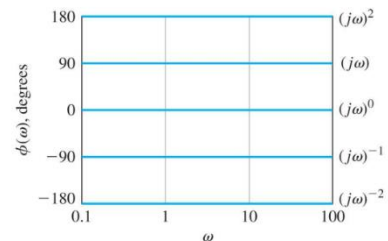
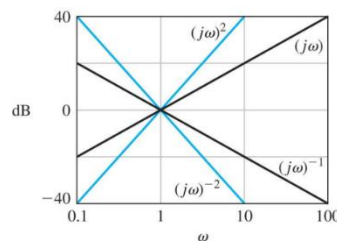
相角： $\Phi(\omega) = -90^\circ N$

【3】位于原点的零点  $s^N$

对数增益： $20N \lg \omega \text{ dB}$

相角： $\Phi(\omega) = 90^\circ N$

(物理上很难实现?)



【4】实极点  $(\tau s + 1)^{-1}$

对数增益： $-10 \log(1 + \omega^2 \tau^2) \text{ dB}$

相角： $\Phi(\omega) = -\tan^{-1} \omega \tau$



近似处理：

$\omega \ll 1/\tau$  时，渐近线为  $20 \log 1 = 0\text{dB}$ ，水平线

$\omega \gg 1/\tau$  时，渐近线为  $-20 \log(\omega\tau)$ ，斜线

渐近线斜率  $-20 \text{ dB/十倍频程}$  转折频率  $\omega = 1/\tau$  处两条渐近线交会： $20 \log 1 = 0 \text{ dB} = -20 \log(\omega\tau)$  有  $-3\text{dB}$  的误差

➤ 实极点的相频特性可以采用三段直线近似：

$\omega \leq \frac{1}{10\tau}$  时， $\Phi(\omega) \approx 0^\circ$

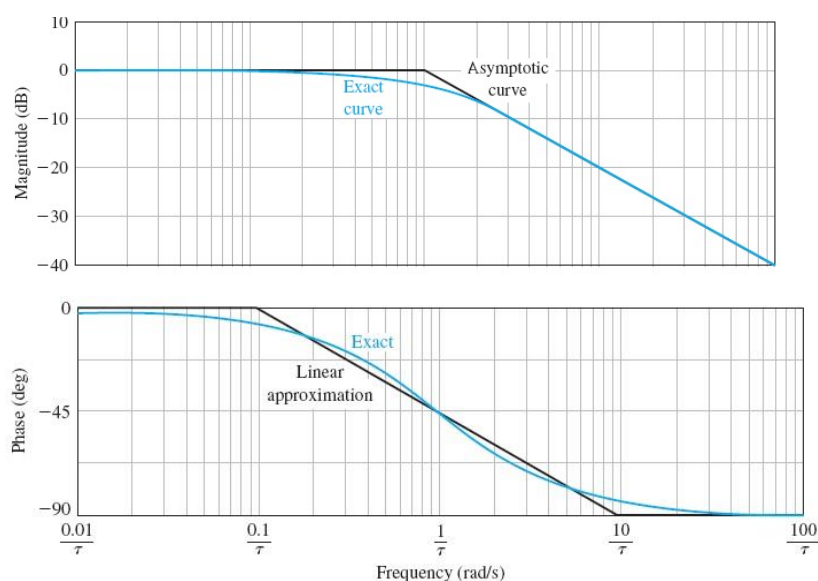
$\omega \geq 10 \frac{1}{\tau}$  时， $\Phi(\omega) \approx -90^\circ$

$\frac{1}{10\tau} < \omega < 10 \frac{1}{\tau}$  时，相角近似为一条斜线，斜线的

斜率为  $-45^\circ/\text{十倍频程}$

$\omega = \frac{1}{\tau}$  处， $\Phi(\frac{1}{\tau}) = -45^\circ$

有最大误差  $5.7^\circ$ （边缘）



### 【5】实零点 $(\tau s + 1)$

对数增益： $20 \log|(j\omega\tau + 1)| = 10 \log(1 + \omega^2\tau^2) \text{ dB}$

相角： $\Phi(\omega) = \tan^{-1}\omega\tau$

$\omega \ll 1/\tau$  时，渐近线为  $20 \log 1 = 0 \text{ dB}$ ，水平线

$\omega \gg 1/\tau$  时，渐近线为  $20 \log(\omega\tau)$ ，斜线

渐近线斜率  $+20 \text{ dB/十倍频程}$

转折频率  $\omega = 1/\tau$  处两条渐近线交会：

$20 \log 1 = 0 \text{ dB} = 20 \log(\omega\tau)$

在转折频率  $\omega = 1/\tau$  处，两条渐近线的对数增益值都为  $0\text{dB}$ ，

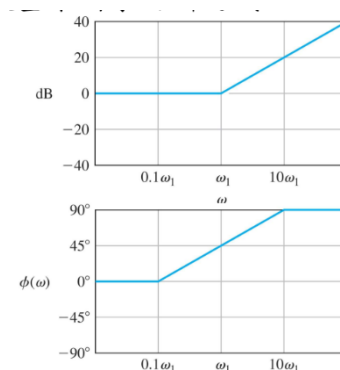
真正的对数增益值为  $+3\text{dB}$  相频特性也可以用三段直线近似：

$\omega \leq 0.1/\tau$  时， $\Phi(\omega) \approx 0^\circ$

$\omega \geq 10/\tau$  时， $\Phi(\omega) \approx +90^\circ$

$0.1/\tau < \omega < 10/\tau$  时，相角近似为一条斜线，斜线的斜率为  $+45^\circ/\text{十倍频程}$

$\omega = 1/\tau$  处， $\Phi(1/\tau) = +45^\circ$



### 【6】共轭复极点 $(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1)^{-1}$

➤ 对数增益:

$$20 \log|G(j\omega)| = -10 \log\{(1-u^2)^2 + 4\zeta^2 u^2\}$$

➤ 相角:

$$\Phi(\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta u}{1-u^2}$$

➤ 当  $u \ll 1$ , 即  $\omega \ll \omega_n$  时:

对数增益:  $20 \log|G(j\omega)| = -10 \log 1 = 0 \text{ dB}$

相角:  $\Phi(\omega) \approx 0^\circ$

➤ 当  $\omega \ll \omega_n$  时, 共轭复极点的对数幅频特性渐近线为 0dB 的水平线, 相频特性近似为  $0^\circ$  的水平线

➤ 当  $u \gg 1$ , 即  $\omega \gg \omega_n$  时:

对数增益:  $20 \log|G(j\omega)| = -10 \log u^4 = -40 \log u$

相角:  $\Phi(\omega) \approx -180^\circ$

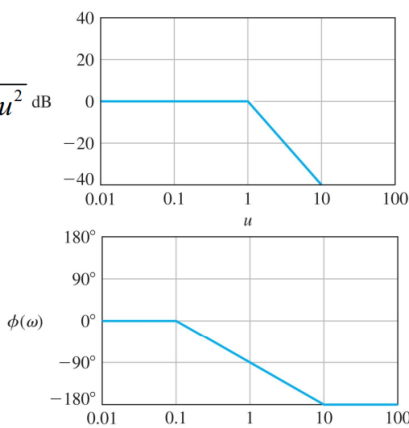
➤ 当  $\omega \gg \omega_n$  时, 共轭复极点的对数幅频特性渐近线为斜率 -40dB/十倍频程的斜线, 相频特性近似为  $-180^\circ$  的水平线

一对共轭复极点

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j2\zeta u - u^2} \text{ dB}$$

$$u = \frac{\omega}{\omega_n}$$

$0.1 < \zeta < 1$



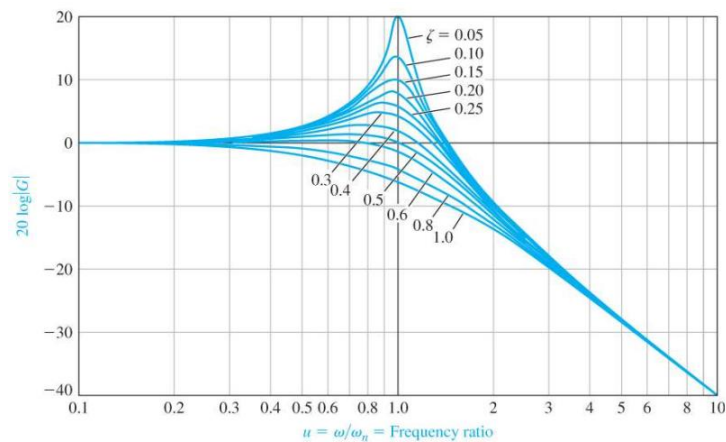
## (7) 共轭复极点的 Bode 图的修正——谐振频率、谐振峰值

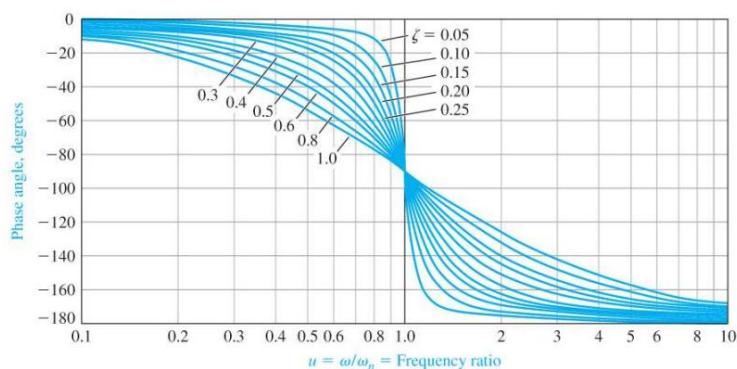
实际的对数幅频特性和渐近线之间的误差与阻尼比  $\zeta$  有关

当  $\zeta < 0.707$  时误差不容忽略, 此时, 在无阻尼自然振荡频率附近, 误差尤其明显

当阻尼比  $\zeta < 0.707$  时, 在无阻尼自然振荡频率  $\omega_n$  附近, 必须考虑对幅频特性的渐近线进行修正

当  $u=1$ , 即  $\omega=\omega_n$  时, 相角是准确的,  $\Phi(\omega_n) = -90^\circ$





【1】谐振峰值  $M_{p\omega}$ : 幅频特性的峰值(最大值)

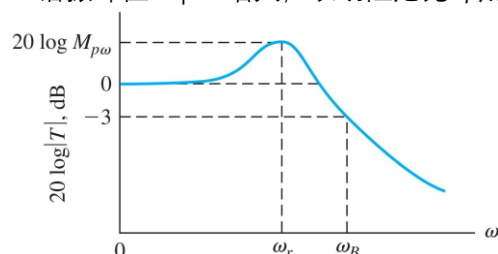
谐振频率  $\omega_r$ : 幅频特性达到谐振峰值的频率

截止频率: 幅频特性从低频增益下降 3dB 的频率(增益降低到 0.7 倍低频增益的频率)

带宽  $\omega_B$ :  $0 \leq \omega \leq \omega_B$  的频率范围, -3dB 带宽

【2】谐振峰值  $M_{p\omega}$  表征系统的相对稳定性

谐振峰值  $M_{p\omega}$  增大, 表明阻尼比  $\zeta$  减小, 阶跃响应超调量增大, 系统相对稳定性变差



带宽  $\omega_B$  衡量系统如实复现输入信号的能力

带宽  $\omega_B$  增大, 阶跃响应上升时间减少

带宽与无阻尼自然振荡频率  $\omega_n$ 、阻尼比  $\zeta$  有关

【3】(闭环!)

➤ 对于二阶系统:

$$M_{p\omega} = \begin{cases} \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} & 0 \leq \zeta \leq 0.707 \\ 1 & \zeta > 0.707 \end{cases}$$

注: 这是闭环峰值和闭环阻尼比的关系

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} \quad \zeta < 0.707$$

注: 这是闭环带宽与闭环自然振荡频率、阻尼比的关系

$$M_{pt} = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad \zeta < 1$$

二阶系统归一化带宽  $\frac{\omega_B}{\omega_n}$  随阻尼比  $\zeta$  的变化关系

$$P.O. = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad \zeta < 1$$

当  $0.3 \leq \zeta \leq 0.8$  时, 有线性近似  $\frac{\omega_B}{\omega_n} \approx -1.19\zeta + 1.85$

(8) 闭环系统时域的稳态误差由开环系统幅频特性在低频段的位置和形状决定

频率响应特性与时域稳态响应特性之间不仅有定性关系, 而且有准确的定量关系

开环频率响应的低频段对应闭环时域响应稳态和接近稳态段的特性

开环频率响应的高频段对应闭环时域响应起始段的特性

开环频率响应的中频段对应闭环时域响应中间段的特性

(9) 频率响应特性与时域稳态响应特性之间不仅有定性关系, 而且有准确的定量关系

➤ 单回路系统回路传递函数：

$$L(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}, \quad L(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2\zeta\omega_n)}$$

➤ 闭环特征方程：\$S^2 + 2\zeta\omega\_n S + \omega\_n^2 = 0\$

➤ 闭环特征根：

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

➤ 增益交界频率 \$\omega\_c\$ 处，有 \$L(j\omega\_c)\$ 的幅值为 1：

$$\frac{\omega_n^2}{\omega_c \sqrt{\omega_c^2 + 4\zeta^2 \omega_n^2}} = 1, \quad \omega_n^4 = \omega_c^2 (\omega_c^2 + 4\zeta^2 \omega_n^2)$$

$$\left( \frac{\omega_c^2}{\omega_n^2} \right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega_c^2}{\omega_n^2} - 1 = 0$$

$$\frac{\omega_c^2}{\omega_n^2} = \sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2$$

➤ 系统的相位裕量为：

$$\begin{aligned} \Phi_{pm} &= \angle L(j\omega_c) - (-180^\circ) \\ &= 180^\circ + \angle L(j\omega_c) \\ &= 180^\circ - 90^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega_c}{2\zeta\omega_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{pm} &= 90^\circ - \tan^{-1} \frac{1}{2\zeta} \sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2} \\ &= \tan^{-1} \frac{2}{\sqrt{\sqrt{4 + 1/\zeta^4} - 2}} \end{aligned}$$

闭环二阶欠阻尼系统阻尼比与开环频率特性相位裕量(角度)有近似线性关系

$$\zeta = 0.01 \Phi_{pm}, \quad \zeta \leq 0.7$$

开环系统幅频特性增益交界频率(过零频率、穿越频率 crossover frequency) \$\omega\_c\$、闭环系统幅频特性截止频率(带宽) \$\omega\_B\$ 的近似关系：

$$\omega_B = 1.6 \omega_c, \quad 0.2 \leq \zeta \leq 0.8$$

#### 4. 特殊的系统

(1) **最小相位系统 minimum phase system**：在具有相同的幅频特性的系统中，在全部频率范围内，相角都最小的系统。

【1】线性定常系统的所有极点、零点都位于闭左半 S 平面，并且没有纯滞后，则为最小相位系统

系统有极点或者零点位于右半 S 平面，或者有纯滞后，则为非最小相位系统

【2】幅频特性相同时，与非最小相位系统相比，在所有频率上，最小相位系统的相角都最小

【3】右半 S 平面的极点称为 **不稳定极点**

右半 S 平面的零点称为 **非最小相位零点**

【4】线性定常系统，如果系统本身及其逆系统都是因果、稳定的，则为最小相位系统

【5】没有纯滞后的稳定系统，将系统的零点换成关于虚轴的对称点，就得到一个新系统。与原系统的传递函数相比，新系统的传递函数幅频特性没有改变，相频特性改变了。比较这

两个系统传递函数的相移，零点全在左半 S 平面的系统的相角在所有频率点上都最小

(2) 全通网络 all-pass network: 对称的格点网络

【1】特点: 在所有频率上的稳态增益都为 1, 对输入信号既不放大、也不衰减, 但是提供相位滞后

【2】全通网络的零点与它的极点, 关于虚轴是镜像对称的

5. 扫频仪: 在电子测量中, 经常需要测量阻抗特性和传输特性, 其中传输特性包括幅频特性、相频特性。

用来测量的仪器称为频率特性测试仪, 简称扫频仪。它为被测网络的调整、校准及故障的排除提供了极大的方便。

超低频频率特性分析仪 L420526

6. 纯滞后 pure time delay

$G_d(s) = e^{-sT}$ ,  $T$  为纯时延时间、纯滞后时间

$$|G_d(j\omega)| = |e^{-j\omega T}| = 1$$

$$\angle G_d(j\omega) = \Phi(\omega) = -\omega T \text{ rad}$$

$$\text{一阶近似 } e^{-Ts} = \frac{\frac{T}{2}s + 1}{\frac{T}{2} + 1}$$

【1】纯滞后环节不引入新的零点、极点, 不改变系统幅频特性, 但增大系统相位滞后, 影响稳定性

使系统成为非最小相位系统

【2】在所有线性环节中, 纯滞后环节是最难控制的

【3】造成的原因: 在有物质、能量移动的系统中, 物料、能量从输入点(控制点)到输出点(测量点), 需要经过一定时间(传感器端纯滞后)

$$L(s) = G_c(s)G(s)e^{-sT}$$

$$L(j\omega) = G_c(j\omega)G(j\omega)e^{-j\omega T}$$

$$|L(j\omega)| = |G_c(j\omega)G(j\omega)| |e^{-j\omega T}|$$

$$= |G_c(j\omega)G(j\omega)| \quad \text{幅频特性不变}$$

$$\angle L(j\omega) = \angle G_c(j\omega)G(j\omega) - \omega T \quad \text{相位滞后增大}$$

【4】应付措施:

必须减小系统增益, 降低开环系统增益交界频率, 提供足够相位裕量。

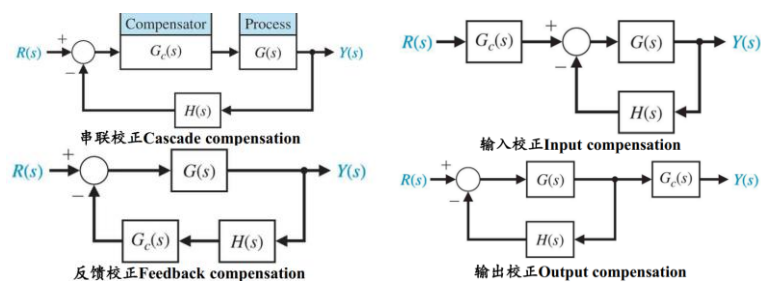
这将增大系统稳态误差

7. 控制系统设计 control system design: 布置或规划系统结构, 选择合适的元部件和参数

校正 compensation: 为补偿系统的不足, 获取满意的性能, 对控制系统的改造或调整

校正装置 compensator: 为了校正系统性能的缺陷而插入系统的附加控制元部件或控制电路

几种校正: 串联校正、反馈校正、输入校正、输出校正



8. 时域性能指标：闭环系统对典型测试信号的启动时间、上升时间、峰值时间、调整时间、最大超调量、衰减比、振荡次数、稳态误差；闭环系统受到典型扰动输入干扰时的最大误差、稳态误差、调整时间等

复频域性能指标：时域设计指标可以表示为 S 平面上闭环系统极点的期望位置

频域性能指标：开环频率响应低/中/高频段的位置和形状、增益交界频率(过零频率)/相位裕量、相位交界频率/增益裕量、各个转折频率、中频段宽度；闭环频率响应幅频特性谐振频率、谐振峰值、带宽等

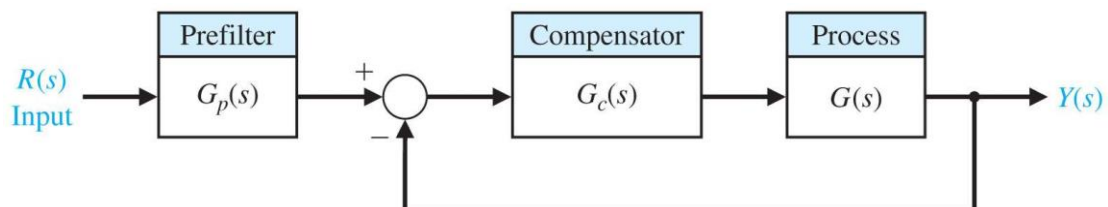
9. 用积分网络设计系统 PI 控制器 Proportional plus Integral Controller:

(1) 目的：减小稳态误差

(2) 根轨迹设计积分网络

根据期望的瞬态响应确定闭环主导极点，配置开环零点  $Z = -KI/KP$ ，绘制根轨迹增益为  $KPK$  的根轨迹

10. 带有预滤波器的系统（输入校正）



$$G_p(s) = \frac{p}{s + p}$$

预滤波器的用处很大，可以先采用校正网络的极点、零点调整闭环传递函数极点的位置，再用预滤波器消除校正网络的零点对闭环系统的影响

采用超前校正网络、PI 控制器的系统，一般要用预滤波器

