

复变函数 · 历年真题集

说明

1. 这里收录了若干套中国科学技术大学复变函数 (A/B)、复分析考试题.
2. 按照复变函数 (A)、复变函数 (B)、复分析进行排序，其次为时间先后.
3. 本附录的主要作用是供同学们考试之前模拟使用，越靠近现在的考卷越能接近现在的出题风格.
4. 没有参考答案，希望读者自行思考，同时熟悉题目类型. 建议助教在考前习题课讲解对应的考试题.
5. 正值科大 60 周年校庆，亦为少年班成立 40 周年之际，谨以此真题集锦，献礼科大，也便于以后的助教的习题课工作和同学们复习本门课程.
6. 感谢杨光灿烂同学提供往年题目！感谢王昌煜助教录入题目！再次祝愿科大数学教育越办越好！

2018-2019 秋季学期复变函数 (A) 助教

15 级少年班学院理科试验 1 班吴天

2018 年 12 月于合肥

欢迎拜访我的主页：<http://home.ustc.edu.cn/~wt1997>

再版说明

1. 本版增添了 2019、2020 年的复变函数试题，供同学们参考.
2. 感谢吴天助教曾经在复变函数课程中给予我的帮助！希望能有更多的同学未来也能担任助教，帮助更多学弟学妹（划掉）！
3. 感谢 17 级李明哲助教和 18 级刘炜昊助教提供和录入题目！
4. （话说有一点参考答案了来着）

2020-2021 秋季学期复变函数 (A) 助教

17 级少年班学院少年班杨光灿烂

2020 年 10 月于合肥

更新说明

1. 本版增添了 2021、2022、2023 年的复变函数 A 试题，供同学们参考.
2. 进行了重新的排版，修正部分数学格式，使得本版更加适合打印或在电子设备上书写.
3. 新增目录，方便检索和电子版跳转.
4. 更正了一些错误.

21 级少年班学院施耀炜
2023 年 12 月于合肥

试卷投稿、纠错、意见反馈欢迎联系我: ywshi.mail@qq.com

最后修改日期: 2024 年 7 月 4 日

目录

2005-2006 学年第一学期复变函数 (A) 期末试题	4
2006-2007 学年第一学期复变函数 (A) 期末试题	5
2007-2008 学年第一学期复变函数 (A) 期末试题	6
2008-2009 学年第一学期复变函数 (A) 期末试题	7
2019-2020 学年第一学期复变函数 (A) 期末试题	8
2020-2021 学年第一学期复变函数 (A) 期末试题	10
2021-2022 学年第一学期复变函数 (A) 期末试题	12
2022-2023 学年第一学期复变函数 (A) 期末试题	14
2003-2004 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题	15
2006-2007 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题	16
2007-2008 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题	17
2009-2010 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题	18
2017-2018 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题	19
2019-2020 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题	20
2019-2020 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题 (补考)	21
2020-2021 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题	22
2010-2011 学年第二学期复分析期中试题	23
2014-2015 学年第二学期复分析 (H) 期末试题	24
2015-2016 年第二学期复分析期中试题	25
2016-2017 年第二学期复分析期中试题	27

2005-2006 学年第一学期复变函数 (A) 期末试题

1. (20 分 =5 分 +5 分 +10 分) 计算.

(1) 设 $f(z) = \oint_{|t|=3} \frac{2t^2 + 5t + 1}{t - z} dt$, 计算 $f'(2 + i)$.

(2) $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^5 + 1}$.

(3) $\oint_{\gamma} \frac{e^{\pi+z}}{z(1-z)^2} dz$, 其中 γ 为不经过 0, 1 的简单闭曲线.

2. (8 分) 已知 $A > 1$, 试求 Laurent 级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} A^{-n}(z-1)^n$ 的收敛区域.

3. 求 $\frac{1}{1+z}$ 在 $z_0 = i$ 处的 Taylor 展开式及其收敛半径.

4. (8 分) 试将 $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-3)}$ 在 $4 < |z-3| < +\infty$ 展成 Laurent 级数.

5. (8 分) 试求方程 $4z^4 + 2z + 9 = 0$ 在圆环 $1 < |z| < \frac{3}{2}$ 内根的个数. (附: 如果把 $2z$ 改成 2^z 呢?)

6. (20 分 =10 分 ×2) 用留数定理计算实积分.

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} \sin ax dx (a > 0)$.

(2) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} (a > 1)$.

7. (10 分) 用拉氏变换解微分积分方程 $\begin{cases} y'(t) - e^t = \int_0^t y(\tau) e^{t-\tau} d\tau, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

8. (10 分) 求一保形变换 $w = f(z)$ 将圆盘区域 $|z| < 1$ 映为角形域 $\frac{\pi}{3} < \arg w < \frac{2}{3}\pi$

9. (6 分) 若函数 $f(z) = u + iv$ 在复平面 \mathbb{C} 上解析, 且 $u + v = 2x^2 - 4xy + x - y - 2y^2$. 试求 $f(z)$.

10. (7 分) 设 $f(z)$ 是一个整函数, 并且假定存在着一个正整数 n , 以及两个正数 R 及 M , 使得当 $|z| \geq R$ 时, $|f(z)| \leq M|z|^n$, 试证: $f(z)$ 是个至多 n 次多项式或一常数.

2006-2007 学年第一学期复变函数 (A) 期末试题

1. (10 分) 求 $\frac{1}{z}$ 和 $\frac{1}{z^2}$ 在 $z = -1$ 处的 Taylor 展式, 并指出收敛半径.

2. (10 分) 设在 $0 < r_1 < |z - i| < r_2 < 1$ 内有:

$$f(z) = \oint_{|\zeta-i|=r_2} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-i)(\zeta^2-\zeta z)} - \oint_{|\zeta-i|=r_1} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-i)(\zeta^2-\zeta z)}$$

求 $f(z)$ 在 $r_1 < |z - i| < r_2$ 内的解析表达式及其 Laurent 展开式.

3. (10 分) 计算 $I = \oint_{|z|=2} \frac{|dz|}{|z-1|^2}$

4. (10 分) 试求方程 $z^6 - 3z^4 + z^3 - az = 0$ 在圆环 $1 < |z| < 2$ 内按重数计算的根个数, 其中 $0 < |a| < 1$.

5. (20 分 = 10 分 × 2) 用留数定理计算实积分 (任选两题).

$$(1) \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 4)^2}$$

$$(2) \int_0^\pi \frac{d\theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} \quad (0 < b < a)$$

$$(3) \int_0^\pi \tan(\theta + ia) d\theta \quad (a \text{ 是实数且 } a \neq 0)$$

6. (10 分) 用拉氏变换解积分方程 $y(t) - e^t = \int_0^t y(\tau)(\tau - t) d\tau$.

7. (10 分)

(1) 问 $w = \frac{z+1}{z-1}$ 将有割痕 $(-\infty, -1]$ 的单位圆外域映成了什么?

(2) 求保形变换 $w = f(z)$ 将有割痕 $(0, 1]$ 的右半平面 $\operatorname{Re} z > 0$ 映为带形域 $-\pi < \operatorname{Im}(w) < \pi$, $\operatorname{Re}(z) > 0$.

8. (10 分) 设解析函数 $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$, 其中 $z = re^{i\theta}$. 试证明: $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}$.

9. (5 分) 假设 $f(z) = \sqrt[3]{(z-1)^2(z+1)}$ 在 $(-1, 1)$ 的上边沿为正, 试求 $f(i)$ 和 $f(-i)$.

10. (5 分) 设 $f(z)$ 在扩充平面上除去非本性奇点 $z = z_0$ 外是单叶解析的, 则 $f(z)$ 必是分式线性变换.

2007-2008 学年第一学期复变函数 (A) 期末试题

1. (25 分 =5 分 ×5) 简答题.

(1) 试在复平面上画出满足 $|z| < 1 - \operatorname{Re} z$ 的点集的图形.

(2) 设 $f(z) = xy^2 + ix^2y$, 问: 复变函数 $f(z)$ 在何处满足柯西-黎曼 (Cauchy-Riemann) 方程.

(3) 求下列值: (a) $\ln i$; (b) i^i .

(4) 求下列函数 $f(z)$ 的奇点 (不包含 ∞) 且指出其类型. 如果是极点, 给出它的阶数:

$$(a) f(z) = \frac{\sin z}{z - \pi}$$

$$(b) f(z) = \frac{1}{z^3(e^{z^3} - 1)}$$

(2) 求下列值: (a) $\ln i$; (b) i^i .

(5) 设 D 是一个以正三角形为边界的有界区域, 而 G 为一个以椭圆为边界的有界区域, 问: 是否存在单叶解析函数 $w = f(z)$ 将 D 映满 G . (回答“存在”或“不存在”, 并且简要地给出理由.)

2. (10 分) 求一个解析函数 $f(z)$, 使其实部为 $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$, 且满足 $f(i) = 1 + i$.

3. (10 分) 设 $0 < a < b$, 求函数 $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$ 在域 $D : a < |z| < b$ 内的罗朗 (Laurent) 展开.

4. (25 分 =5 分 ×5) 计算题.

$$(1) \int_{|z+3i|=1} \frac{\cos z}{z+i} dz$$

$$(2) \int_{|z+i|=1} \frac{e^z}{1+z^2} dz$$

$$(3) \int_{|z|=\frac{1}{3}} \sin \frac{1004}{z} dz$$

$$(4) \int_{|z|=4} \frac{z^{2007}}{z^{2008}-1} dz$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin mx}{(x^2+a^2)^2} dx, \quad (m > 0, a > 0)$$

5. (10 分) 利用拉氏变换解微分方程: $\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = e^{-t}, \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 1. \end{cases}$

6. (7 分) 求一保形变换 $w = f(z)$, 将半带域 $D : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0$ 映射为上半平面 $\operatorname{Im} w > 0$.

7. (7 分) 求方程 $kz^4 = \sin z$ ($k > 2$) 在圆 $|z| < 1$ 内根的个数.

8. (6 分) 设 $f(z)$ 是在有界域 D 上解析的非常值函数, 并且在有界闭域 $D+C$ 上连续, 其中 C 为 D 的边界. 如果存在实数 a 使得 $|f(z)| = a, \forall z \in C$, 证明: 在 D 内至少存在一个点 z_0 使得 $f(z_0) = 0$.

2008-2009 学年第一学期复变函数 (A) 期末试题

1. (24 分 =4 分 +8 分 +6 分 +6 分) 填空题.

(1) 若幂函数 \sqrt{z} 取 $\sqrt{1} = 1$ 的分支, 则 $\operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{1-\sqrt{z}}, 1\right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设 $\sqrt[3]{z(1-z)^2}$ 在去掉线段 $[0,1]$ 的区域内的某一单值分支为 $f(z)$. 若 f 在 $\frac{1}{2}$ 的上边沿的值是 $\frac{1}{2}$, 则 $f(2) = \underline{\hspace{2cm}}, f'(2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设 $f(z) = \oint_{|t|=3} \frac{t^2+t+1}{t-z} dt$, 则 $f'(2+i) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) $\oint_{|z|=1.5} \frac{dz}{(z^3-1)(z-2)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. (8 分) 设 u 和 v 是解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部, 且 $u+v = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 3xy$, 其中 $z = x+yi$, $f(0) = 0$. 试求 $f(z)$.

3. (8 分) 试将 $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$ 展开成 Laurent 级数, 其中 $|a| < |b|$, a, b 都是复数. 圆环域为

(1) $0 < |a| < |z| < |b|$;

(2) $|z| > |b|$.

4. (8 分) 设 $f(z) = \frac{\sin z}{(z-3)^2 z^2 (z+1)^3}$, 试指出它的不解析点的类型.

5. (8 分) 试求方程 $2z^6 - 3z^3 + 2 = 0$ 在各个象限内根的个数.

6. (20 分 =10 分 ×2) 计算积分.

(1) $\oint_{0 < |z|=r \neq 1} \frac{|dz|}{z-1}$.

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2} dx$ ($a > 0, b > 0$).

7. (8 分) 用拉普拉斯变换解方程.

$$\begin{cases} y'(t) - e^t = \int_0^t y(\tau) e^{t-\tau} d\tau, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

8. (8 分) 求一分式线性变换 $w = f(z)$ 将圆盘区域 $|z-2i| < 2$ 映为圆盘区域 $|w-2| < 1$, 且满足条件 $f(i) = 2$, $\arg f'(i) = 0$.

9. (8 分) 设 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ 是不可约有理真分式函数, $a_k (k = 1, \dots, m)$ 是 $Q(z)$ 的全部零点, 且其阶数为 n_k . 试证明 $f(z) = \sum_{k=1}^m \sum_{s=1}^{n_k} \frac{A_{ks}}{(z-a_k)^s}$, 其中 A_{ks} 为复常数.

2019-2020 学年第一学期复变函数 (A) 期末试题

1. (39 分) 填空题 (本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向)

(1) 设 $z = \frac{1+i}{1-i}$, 那么 $z^{2019} + z^{2020} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) $1^{\sqrt{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 若函数 $f(z) = x^2 + 2xy - y^2 + i(y^2 + axy - x^2)$ 是复平面上的解析函数, 那么实常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设 $f(z) = \frac{\sin(z-5)}{z^3(z-5)^2} + e^{\frac{1}{z-i}}$, 给出 $f(z)$ 的全体奇点 (不包括 ∞), 并且指出每个奇点的类型
(极点指出阶数) : $\underline{\hspace{2cm}}$.

(5) $\operatorname{Res}\left(\frac{1-\cos z}{z^5}, 0\right) = \underline{\hspace{2cm}}$; $\operatorname{Res}\left(z^2 e^{\frac{1}{z-i}}, i\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(6) 设函数 $f(z)$ 在 $|z| < 2$ 内解析, 并且 $f(0) = 1, f'(0) = 2$, 那么 $\int_{|z|=1} (z+1)^2 \frac{f(z)}{z^2} dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

(7) 设函数 $f(z) = \frac{e^z}{\cos z}$ 在 0 处的泰勒 (Taylor) 展开式为 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, 那么幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径 $R = \underline{\hspace{2cm}}$.

(8) 设函数 $f(z) = \frac{e^z}{1-z}$, 那么 $f(z)$ 在区域 $0 < |z-1| < +\infty$ 内的罗朗 (Laurent) 展开式为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(9) 设 $z_0 \in \mathbb{C}$, 函数 $|e^z|$ 在闭圆盘 $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq 1\}$ 上的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 设 $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$, 那么在右半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ 解析并以 $u(x, y)$ 为它的实部的函数为 $f(z) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 对函数 $f(t)$, 记 $F(p) = L[f(t)]$ 为它的 Laplace 变换, 并且记 $f(t) = L^{-1}[F(p)]$.

(a) 设 $f(t)$ 满足 $\begin{cases} f''(t) - 2f'(t) + f(t) = t - \sin t \\ f(0) = f'(0) = 0 \end{cases}$, 那么 $F(p) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(b) $L^{-1}\left[\frac{1}{(p^2-p)(p-2)}\right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. (30 分) 计算题 (本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向)

(1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ 的和函数, 并且计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

(2) 计算积分 $\int_{|z|=3} \frac{z+\bar{z}}{|z|} dz$.

(3) 计算积分 $\int_C \frac{z \cos^2 \frac{1}{z}}{1-z} dz$, 其中 $C : |z - \frac{1}{2}| + |z + \frac{1}{2}| = 3$.

(4) 计算积分 $\int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{(2-e^{i\theta})^4} \right| d\theta$.

(5) 计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x-1)}{(x^2+4)(x-1)} dx$.

3. (31 分) 综合题

- (1) (5 分) 设 $f(z)$ 为定义在上半平面内的解析函数, 则 $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ 为定义在下半平面上的复变函数, 请问: $g(z)$ 在下半平面上是否为解析函数? 给出你的答案, 如果“是”, 给出证明; “否”, 举个反例.
- (2) (5 分) 设 $f(z)$ 为在区域 D 内解析的非常数值复变函数, C 为 D 内的一条简单闭曲线, 它的内部包含在 D 内. 证明: 对于任何复数 A , $f(z) = A$ 在 C 的内部只有有限个解.
- (3) (6 分) 设 $f(z) = \frac{z(\sin z - z)}{(z^3 + 1)(z + 1)^3}$, 设 $C : |z| = R > 0$ 为圆周, 方向取正向, 其中 $R \neq 1$, 试计算 $\Delta_C \arg f(z)$.
- (4) (8 分) 求保形变换 $\omega = f(z)$, 将区域 $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1, |z - \sqrt{3}i| < 2\}$ 映为区域 $\Omega = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| < 1\}$, 并且满足条件 $f(\sqrt{3}i) = 0, f'(\sqrt{3}i) > 0$. (请画出必要的示意图)
- (5) (7 分) 设 $P_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$, A_n 表示 $P_n(z)$ 的 n 个零点模的最小值, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = +\infty.$$

2020-2021 学年第一学期复变函数 (A) 期末试题

1. (30 分) 填空题 (本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向)

- (1) 设方程为 $e^x = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, 那么方程的全部根为: _____.
- (2) 若函数 $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(ax^2y - y^3 - 1)$ 是复平面上的解析函数, 那么实常数 $a =$ _____.
- (3) 设函数 $f(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ 是平面上的奇偶函数, 其中 a, b, c, d 为是实数常数. 那么实常数 a, b, c, d 应满足下面条件: _____.
- (4) $\int_0^{\pi+2t} \left(e^{-z} - \cos \frac{z}{2} \right) dz =$ _____.
- (5) 设 $f(z) = \frac{z^2 e^{\frac{1}{z-1}}}{(e^{2z}-1) \sin z}$, 给出 $f(z)$ 的全体奇点 (不包括 ∞), 并且指出每个奇点的类型 (极点指出阶数): _____.
- (6) $\operatorname{Res} \left(\frac{1}{z} \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \dots + \frac{1}{(z-1)^{2021}} \right), 1 \right) =$ _____,
 $\operatorname{Res} \left(z^2 \sin \frac{1}{z-i}, i \right) =$ _____.
- (7) 对函数 $f(t)$, 记 $F(p) = L[f(t)]$ 为它的 Laplace 变换, 并且记 $f(t) = L^{-1}[F(p)]$:
 - 设 $f(t)$ 满足 $\begin{cases} f''(t) - f(t) = 4 \sin t + 5 \cos 2t \\ f(0) = -1, f'(0) = -2 \end{cases}$, 那么 $F(p) =$ _____;
 - $L^{-1} \left[\frac{3p+7}{p^2+2p+2} \right] =$ _____
- (8) 方程 $z^5 + 13z^2 + 15 = 0$ 在圆环 $1 < |z| < 2$ 和圆环 $2 < |z| < 3$ 内根的个数分别为 _____ 和 _____.

2. (40 分) 计算题 (本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向)

- (1) 求函数 $f(z) = \frac{z}{e^z + 1}$ 在 $z = 0$ 处泰勒 (Taylor) 展开前 5 项 (即展开到 z^4 为止), 并且给出所得幂级数的收敛半径.
- (2) 将函数 $f(z) = z^2 \sin \left(\pi \frac{z+1}{z} \right)$ 在区域 $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < +\infty\}$ 内展成罗朗 (Laurent) 级数.
- (3) 计算积分 $\int_{|z|=2} \frac{\sin(z-1)}{(z^2-z) \sin z} dz$.
- (4) 计算积分 $\int_{|z|=1} \frac{z(1-\cos 2z) \sin 3z}{(1-e^{3z})^5} dz$.
- (5) 计算积分 $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b \cos \theta)^2}, \quad (0 < b < a)$.
- (6) 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 - 1 \sin 2x}{x^2 + 1} dx$.

3. (30 分) 综合题 (本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向)

(1) (7 分) 设函数 $f(z)$ 在有界区域 D 内解析, 在有界用域 $C + D$ 上连续, 这里 C 为 D 的边界. 证明: 如果函数 $f(z)$ 没有零点, 并且对于 $z \in C$ 有 $|f(z)| = M$ ($M > 0$ 为常数), 那么存在实数 α 使得 $f(z) = M e^{i\alpha}$.

(2) (7 分) 计算积分 $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{z+a}{z-a} dz$, ($|a| < R$), 并且由此证明:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |a|^2}{|Re^{i\theta} - a|^2} d\theta = 1.$$

(3) (7 分) 函数 $w = f(z) = \frac{3z-i}{3iz-1}$ 把下半平面 $\operatorname{Im} z < 0$ 变成复平面中的什么区域? (给出你的答案和论证过程)

(4) (9 分) 设 $f(z) = u(z) + iv(z)$ 在 $|z| < 1$ 内解析, $0 < r < 1$. 证明:

i. $\int_{|z|=r} \frac{\overline{f(z)}}{z^{n+1}} dz = 0$, ($n \geq 1$).

ii. 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, 则 $a_n = \frac{1}{\pi i} \int_{|z|=r} \frac{u(z)}{z^{n+1}} dz$, ($n \geq 1$).

iii. $\overline{f(0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{\overline{f(z)}}{z-z_0} dz$, 其中 $|z_0| < r$.

2021-2022 学年第一学期复变函数 (A) 期末试题

1. (30 分) 填空题 (本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向)

(1) $\ln \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) 曲线 $|z-1|=1$ 在函数 $f(z)=\frac{1}{z}$ 下的像为 (写出表达式) $\underline{\hspace{2cm}}$

(3) 若函数 $f(z)=my^3+nx^2y+i(x^3+lxy^2)$ 是复平面上的解析函数, 那么实数常数 m, n, l 值分别为 $\underline{\hspace{2cm}}$

(4) 如果函数 $f: D \rightarrow G$ 是区域 D 到区域 $G=\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0\}$ 的解析函数, 那么函数 $\arg f(z) \underline{\hspace{2cm}}$ (填写“是”或“否”) 为调和函数.

(5) 设 $u(x, y)=y^2-x^2+2021y$, 那么它的共轭调和函数 $v(x, y)$ 为 $\underline{\hspace{2cm}}$

(6) 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 R , 那么级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) a_n z^n$ 的收敛半径为 $\underline{\hspace{2cm}}$

(7) 设 $f(z)=\frac{e^{\frac{3}{z-2}}}{z(1-e^{-z})}$, 给出 $f(z)$ 的全体奇点 (不包括 ∞), 并且指出每个奇点的类型 (极点指出阶数):

(8) $\operatorname{Res}\left(z^3 \cos \frac{1}{z-2}, 2\right) = \underline{\hspace{2cm}}$

设 n 为正整数, 那么 $\operatorname{Res}\left(z^n \sin \frac{1}{z}, 0\right) = \underline{\hspace{2cm}}$

(9) 方程 $2z^5-z^3+3z^2-z+8=0$ 在区域 $|z|<1$ 内根的个数为 $\underline{\hspace{2cm}}$

2. (40 分) 计算题 (本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向)

(1) 求函数 $f(z)=\frac{z^2}{(z+1)^2}$ 在 $z=0$ 处泰勒 (Taylor) 展开, 并且给出所得幂级数的收敛半径.

(2) 将函数 $f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ 在区域 $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ 内展成罗朗 (Laurent) 级数.

(3) 设 $D=\left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z>-\frac{1}{2}\right\}$, 设 γ 为区域 D 内从 0 到 1 的不经过 i 任意简单曲线, 计算积分 $\int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2}$.

(4) 计算积分 $\int_C \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$, 其中 C 为不过点 0 和 1 的简单闭曲线.

(5) 计算积分 $\int_0^{\pi} \cot(x+1-2i) dx$.

(6) 利用留数计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx$.

3. (30 分) 综合题 (本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向)

(1) 利用拉氏 (Laplace) 变换求解微分方程:

$$\begin{cases} y'(t) - 4y(t) + 4 \int_0^t y(t) dt = \frac{t^3}{3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(2) 设 $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 为区域 D 内的解析函数, γ 为 D 内简单闭曲线, 其内部包含于 D . 设 a 为 $f(z)$ 在 γ 内部的 n 阶零点, b 为 $f(z)$ 在 γ 内部的 m 阶极点, $f(z)$ 在 γ 内除了 b 外没有其它奇点, 在 γ 上没有零点和奇点. 证明:

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \sin z dz = 2\pi i(n \sin a - m \sin b).$$

(3) 求一保形变换 $w = f(z)$, 将区域 $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| > 1, |z| < 2\}$ 映为单位圆盘 $|w| < 1$, 并且满足 $f(-1) = 0$. (请画出必要的示意图)

(4) 设函数 $f(z)$ 在 $|z| < 2$ 内解析, 且满足 $|f(e^{i\theta})| \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi$; $|f(e^{i\theta})| \leq 3$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. 证明:

$$|f(0)| \leq \sqrt{6}$$

2022-2023 学年第一学期复变函数 (A) 期末试题

1. (30 分) 基础知识

(1) 求下列值:

(a) $\ln(2 + 2i)$

(b) $\cos(3 + i)$

(2) 已知 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 解析, 虚部 $v(x, y) = x^2 - y^2 + 2x, f(0) = 22$, 求实部 $u(x, y)$.

(3) 求积分:

$$\int_{-1}^1 (1 + 2iz + ie^z) dz$$

(4) $f(z) = \sin z + \frac{3z}{(1-z)^2}$, 把 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 展成 z 的幂级数.

(5) $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$, 把 $f(z)$ 在区域 $0 < |z-2| < 1$ 展开为罗朗级数.

(6) $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-2)} + z^2 \sin \frac{1}{z}$, 指出 $f(z)$ 的所有奇点 (不包含 ∞), 并指出每个奇点的类型 (极点指出阶数).

2. (36 分) 计算积分 (本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向)

(1) $\oint_{|z|=5} \frac{e^{5z}}{2z} dz.$

(4) $\oint_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{z(e^{7z}-1)}.$

(2) $\oint_{|z|=3} \left(\frac{5}{z-1} + z^2 + 2z^2 \sin \frac{1}{z} \right) dz.$

(5) $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{x \sin 3x}{(x^2 - 2x + 4)^2} dx.$

(3) $\oint_{|z|=1} \frac{\cos 2z}{z^3(1+e^z)} dz.$

(6) $\oint_{|z-2|=1} \frac{z+3}{|z|^4} dz.$

3. (34 分) 综合题 (本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向)

(1) (6 分) 确定方程 $z^{2021} + e^{2022z} = 2023$ 在左半平面的根的个数, 并说明理由.

(2) (10 分) 求一保形变换 $w = w(z)$, 将半圆区域 $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |z| < 2\}$ 变为单位圆内 $|w| < 1$, 使得 $w(1) = \frac{1}{3}i$. (请画出必要的示意图)

(3) (10 分) 利用 Laplace 变换求解方程组:

$$\begin{cases} 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = 1 \\ \frac{dx}{dt} - x + \frac{dy}{dt} = te^{2t} \\ x(0) = 2, y(0) = 0 \end{cases}$$

(4) (8 分) 当 $|z| \leq 1$ 时, 函数 $f(z)$ 解析, 且 $|f(z)| \leq 1$, 又已知 $z=0$ 是 $f(z)$ 的 3 级零点, 求证: 在 $|z| < 1$ 内 $f(z)$ 满足不等式

$$|f(z)| \leq |z|^3$$

2003-2004 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题

1. (20 分) 填空.

(1) 设方程 $z^3 = \bar{z}$, 则 $z = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 求复对数的单值解析分支 $\underline{\hspace{2cm}}$, 使得 $\ln(-i) = \frac{3\pi}{2}i$, 其辐角主值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设复函数 $f(z) = x^4 + iy^2$, 则 $f(z)$ 的可微点是 $\underline{\hspace{2cm}}$. $f(z)$ 的解析点是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 计算积分 $\int_{|z|=1, \operatorname{Im} z \geq 0} \bar{z} dz = \underline{\hspace{2cm}}$. $\int_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{(z+1)^3} dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) $\operatorname{Res}\left(z^{-2} \sin^3 \frac{1}{z}, 0\right) = \underline{\hspace{2cm}}$. $\operatorname{Res}\left(\frac{1-\cos 7z}{z^3}, 0\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. (20 分)

(1) 已知解析函数 $f(z)$ 的虚部为 $x+y$, 且 $f(1) = i$, 求 $f(z)$.

(2) 判别方程 $z^5 - 6z^3 + 2z^2 + 7 = 0$ 在圆环 $2 < |z| < 3$ 内有多少个根.

3. (20 分)

(1) 已知 $f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z}$, 求 $f(z)$ 在 $|z-1| < 1$ 及 $0 < |z| < 2$ 内的级数展开式.

(2) 设 $f(z)$ 在 $z=a$ 解析, $f(z)$ 在 a 点附近不恒为 0, 而 $f(a)=0$. 证明 $z=a$ 为 $f(z)$ 在 a 点的某个邻域内的唯一零点.

4. (20 分) 计算积分.

(1) $\int_0^\pi \frac{d\theta}{2+2\cos^2 \theta}$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z(z^2+4)} dz$

5. (20 分) 用拉氏变换解方程.

(1) $\begin{cases} y''(t) - y(t) = 4 \sin t \\ y(0) = -1, y'(0) = -2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x'(t) + x(t) - y(t) = \cos t \\ y'(t) - y(t) + x(t) = 0 \\ x(0) = 0, y(0) = 1 \end{cases}$

2006-2007 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题

1. (16 分 =2 分 ×8) 填空题. (写出复数的标准式 $a + bi$ 或指数表示 $re^{i\theta}$ 均可)

$$(1) (1+i)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(5) \ln(1+i) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(2) e^{(1+i)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(6) (1+i)^{\frac{3}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(3) \sin(1+i) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(7) (1+i)^i = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(4) \operatorname{ch}(1+i) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(8) \sinh^{-1} i = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. (25 分 =5 分 ×5) 设 $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)^4}$, 试求:

(1) $f(z)$ 在环域 $0 < |z| < 1$ 内的罗朗级数展开式.

(2) $f(z)$ 在环域 $0 < |z-1| < 1$ 内的罗朗级数展开式.

(3) $f(z)$ 在环域 $|z| > 1$ 内的罗朗级数展开式.

(4) $f(z)$ 在 $z=4$ 处的罗朗级数展开式.

(5) 求 $\operatorname{Res}[f(z), 0]$, $\operatorname{Res}[f(z), 1]$, $\operatorname{Res}[f(z), \infty]$.

3. (36 分 =6 分 ×6)(1-4 小题的闭路积分方向均沿逆时针).

$$(1) \oint_{|z|=2} \bar{z} dz$$

$$(4) \oint_{|z|=10} \frac{\cos z}{\sin z} dz$$

$$(2) \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^2(z-\bar{z})} dz$$

$$(5) \int_0^\infty \frac{1}{5 - \cos \theta} d\theta$$

$$(3) \oint_{|z|=2} z^2 e^{\frac{z}{2}} dz$$

$$(6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x(x^2+9)} dx$$

4. (8 分) 解析函数 $f(z)$ 的实部为 $\operatorname{Re} f(z) = x^2 + y^2 + 2x + y$, 且 $f(0) = 0$, 求 $\operatorname{Im} f(z)$, 并求 $f'(1+i)$.

5. (5 分) 若在 $|z| \leq 1$ 上 $f(z)$ 解析, 且在 $|z| = 1$ 上 $|f(z)| < 1$, 求证: 在 $|z| < 1$ 内存在唯一的点 z_0 , 使得 $f(z_0) = z_0$.

6. (10 分) 利用拉普拉斯变换求初值问题.

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 1 & (t > 0) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1 \end{cases}$$

2007-2008 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题

1. (12 分) 求解下列方程:

$$(1) z^3 = 1 + i$$

$$(2) e^z = 3 + 4i$$

$$(3) \cos(2 + z) = 3$$

2. (12 分) 已知复变函数 $f(z)$ 解析, 实部 $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - y + 1$, 且 $f(0) = 1$, 求虚部 $v(x, y)$ 和 $f'(0)$.

3. (15 分 = 5 分 $\times 3$) 已知 $f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 4}$.

(1) 在 $|z| < 1$ 内把 $f(z)$ 展为 z 的幂级数.

(2) 在 $0 < |z - 1| < 3$ 上把 $f(z)$ 展为罗朗级数.

(3) 在 $1 < |z| < 4$ 上把 $f(z)$ 展为罗朗级数.

4. (36 分 = 6 分 $\times 6$) 求下列积分 (其中凡闭路积分沿逆时针方向)

$$(1) \oint_C \frac{e^z}{(z-2)(z-1)^2} dz, \quad C : |z| = 3.$$

$$(4) \oint_C \frac{dz}{z^7 - 2z^4}, \quad C : |z| = 1.$$

$$(2) \int_0^\pi \frac{d\theta}{1 + 2 \sin^2 \theta}.$$

$$(5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 16}.$$

$$(3) \oint_C \frac{z - \sin z}{z^6} dz, \quad C : |z| = 1.$$

$$(6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + 2x + 5)} dx.$$

5. (12 分) 用 Laplace 变换的方法求解处值问题:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = t \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

6. (6 分) 求方程 $z^4 + 7z + 1 = 0$ 在圆环 $\frac{3}{2} < |z| < 2$ 的根的个数, 并说明理由.

7. (7 分) 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 区域 D 内解析, $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 是 D 内的一个点列, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \in D$, 如果对于任意的 k , 都有 $f(a_k) = g(a_k)$, 求证: 在 D 内恒有 $f(z) = g(z)$ 成立.

2009-2010 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题

1. (6 分 =3 分 ×2)

(1) 若 $e^{\frac{\pi}{2}i} + e^{1+i} = a + bi$, 其中 a, b 为实数, 请求出 a, b 的值.

(2) 若 $1 + \sin 2i = c + di$, 其中 c, d 为实数, 请求出 c, d 的值.

2. (9 分 =3 分 ×3) 求解以下复方程:

$$(1) z^4 + 2 = 0$$

$$(2) e^z = i$$

3. (9 分) 已知复变函数 $f(z)$ 解析, 其实部 $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2y$, 且 $f(0) = i$, 求其虚部 $u(x, y)$, 并求 $f'(0)$.

4. (16 分 =6 分 +5 分 +5 分)

(1) 设 $f_1(z) = \frac{1}{1-3z}, f_2(z) = \frac{z}{(1-3z)^2}$. 请把 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 在区域 $|z| < \frac{1}{3}$ 展成 z 的幂级数.

(2) 设函数 $f(z) = \frac{1}{(z-3)(z-6)}$. 在环域 $3 < |z| < 6$ 内把 $f(z)$ 展成 z 的罗朗级数.

(3) 设 $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-4)^2}$. 在区域 $0 < |z-2| < 2$ 内把 $f(z)$ 展为 $z-2$ 的罗朗级数.

5. (21 分 =5 分 ×3+6 分) 计算复积分.

$$(1) \int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z-i} dz$$

$$(3) \int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)^2(z-5)}$$

$$(2) \int_{|z|=2} z^2(1+e^{\frac{1}{z}}) dz$$

$$(4) \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^5(2-z)}$$

6. (18 分 =6 分 ×3) 计算定积分.

$$(1) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\cos\theta}$$

$$(3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2-2x+2} dx$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$$

7. (16 分 =8 分 ×2) 利用拉普拉斯变换解微分方程:

$$(1) \begin{cases} y''(t) + y'(t) = 2 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = te^{2t} \\ y(0) = 1, y'(0) = -2 \end{cases}$$

8. (5 分) 记 $C = \{z \mid |z| < R, R > 0\}$, $H = \{z \mid |z| < R, 0 < \alpha < \arg z < \beta < \frac{1}{2}\pi\}$, 这样 H 为圆域 C 内的一个扇形区域, 设有复变函数 $f(z)$ 在 C 内解析, 且在 H 内为常数. 求证: $f(z)$ 在 C 内必为常数.

2017-2018 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题

1. (30 分) 基础知识.

(1) 求解以下复方程:

$$(a) e^{iz} = 2017$$

$$(b) (z - 3)^4 = 1$$

(2) 已知调和函数 $v(x, y) = 4x^2 + ay^2 + x$, 求常数 a , 并求出以 $v(x, y)$ 为虚部且满足 $f(0) = 1$ 的解析函数 $f(z)$.

(3) 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nz^{n-1}}{2^n}$, 求收敛半径 R , 并在收敛域内求出此幂级数的和函数.

(4) 已知 $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$, 把 $f(z)$ 在区域 $0 < |z| < +\infty$ 展成 Laurent 级数

(5) 求 $z^5 + 5z^2 + 2z + 1 = 0$ 在 $1 < |z| < 2$ 的根的个数, 并说明理由.

2. (30 分) 计算以下复积分.

$$(1) \int_0^{3i} (2z + 3z^2) dz$$

$$(4) \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin(\frac{1}{z-1})}{z^4} dz$$

$$(2) \oint_{|z|=3} \frac{e^{iz}}{z - 2i} dz$$

$$(5) \oint_{|z-3|=2} \frac{e^z}{|z|^2} |dz|$$

$$(3) \oint_{|z|=4} \frac{\sin 5z}{z^2} dz$$

3. (14 分) 计算以下定积分.

$$(1) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5 - 4 \cos \theta)^2}$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{\sin 4x}{x(x^4 + 1)} dx$$

4. (10 分) 利用 Laplace 变换解微分方程初值问题: $\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = te^{3t} \\ y(0) = 0, y'(0) = 2017. \end{cases}$

5. (6 分) 设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在围道 C 及内部解析, $g(z)$ 在围道 C 上没有零点, 在 C 内 $g(z)$ 有唯一的零点 a . 已知 $f(a) = p_1 \neq 0$, $f'(a) = p_2$, $f''(a) = p_3$. 而 $g'(a) = 0$, $g''(a) = q_1 \neq 0$, $g'''(a) = q_2$, $g''''(a) = q_3$. 计算积分: $\oint_C \frac{f(z)}{g(z)} dz$.

6. (10 分) 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ ($a_0 \neq 0$) 的收敛半径 $R > 0$.

(1) 记 $M(r) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|$ ($0 < r < R$), 利用 Cauchy 积分公式证明: $|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n! M(r)}{r^n}$.

(1) 证明: 当 $|z| < \frac{|a_0|r}{|a_0| + M(r)}$ 时, 函数 $f(z)$ 无零点. (其中 $r < R$)

2019-2020 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题

1. (10 分) 求解以下复方程:

$$(1) z^3 = -3\bar{z} (z \neq 0)$$

$$(2) \sin z = 3$$

2. (7 分) 已知解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x, y) = e^{\alpha y} \cos 3x + 3x$, 其中 $\alpha > 0$ 且 $f(0) = 1$, 求常数 α , 并求出解析函数 $f(z)$. (请用 z 表示函数 $f(z)$)

3. (10 分)

(1) 把 $f(z) = z^5 e^z$ 在 $z = 0$ 展开成幂级数, 并指出收敛区域.

(2) 把 $g(z) = \frac{1}{(z-2)(z-4)^2}$ 在区域 $0 < |z-2| < 2$ 展开成洛朗级数.

4. (36 分 = 6 分 × 6) 计算复积分

$$(1) \int_0^{\pi i} (2019z^2 - \cos z) dz$$

$$(4) \int_{|z|=3} \frac{\cos\left(\frac{1}{z-2}\right)}{4-z} dz$$

$$(2) \int_{|z|=6} (2019z^2 - \cos z) dz$$

$$(5) \int_{|z|=3} \frac{z+5}{1-\cos(z-2)} dz$$

$$(3) \int_{|z|=\frac{5}{2}} \frac{z^2 - 8z + 5}{z^3(z+2)(z-3)^2} dz$$

$$(6) \int_{|z|=2} \frac{|dz|}{|z-i|^4}$$

5. (14 分 = 7 分 × 2) 求以下定积分:

$$(1) \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{3 - 2\cos \theta} d\theta$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin 4x}{(x^2 + 4)^2} dx$$

6. (5 分) 判断方程 $z^9 = 8z^3 + 2z^2 + z + 2$ 在 $1 < |z| < 5$ 的根的个数, 并说明理由.

7. (10 分) 利用拉普拉斯变换解微分方程:

$$\begin{cases} y'' + y = e^t \cos 2t, \\ y(0) = 4, y'(0) = 0. \end{cases}$$

8. (8 分) 已知函数 $f(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 内解析, 函数 $g(z)$ 在 $|z| \geq 1$ 解析, 且存在常数 M , 使得在 $|z| > 1$ 时, $|g(z)| < M$. 证明以下算式成立:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \left(\frac{f(\xi)}{\xi-a} - \frac{ag(\xi)}{\xi(\xi-a)} \right) d\xi = \begin{cases} f(a), & \text{当 } |a| < 1, \\ g(a), & \text{当 } |a| > 1. \end{cases}$$

2019-2020 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题 (补考)

1. (12 分) 求解以下复方程:

$$(1) \ z^2 - 2019z + 2018 = 0$$

$$(2) \ e^z = 5 + i$$

2. (12 分) 利用柯西-黎曼方程求以下函数的可微点:

$$(1) \ f(z) = xy + iy$$

$$(2) \ f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$$

3. (30 分 = 10 分 × 3) 计算复积分:

$$(1) \int_0^{2i} (2019e^z - 4 \cos 4z) dz.$$

$$(4) \int_{|z|=2} \frac{z}{(z^4 + 1) \sin^2 z} dz.$$

$$(2) \int_{|z|=4} \frac{\sin z}{(z-1)(z-8)^2} dz.$$

$$(5) \int_{|z|=2} \frac{e^z |dz|}{|z-1|^4}.$$

$$(3) \int_{|z|=9} \frac{e^z}{16+z^2} dz.$$

4. (14 分) 求以下定积分:

$$(1) \int_0^{2i} \frac{1}{(10 - 8 \cos \theta)^2} d\theta.$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{x^2} dx.$$

5. (8 分) 利用拉普拉斯变换解微分方程:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = te^t, \\ y(0) = 1, y'(0) = 2. \end{cases}$$

6. (24 分 = 10 分 + 7 分 + 7 分)

(1) 设 $f(z) = \frac{1}{\cos 2z} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots$, 请求出 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 , 并计算积分

$$\int_{|z-1|=2} \frac{2019}{z^5 \cos 2z} dz.$$

(2) 计算积分方程

$$f(t) = \sin 2t + \int_0^t \sin 2(t-u) f(u) du.$$

(3) 设级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ 收敛, $|\arg c_n| \leq \frac{\pi}{3}$, 求证: $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|$ 收敛.

2020-2021 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题

1. (10 分) 将 $f(z) = \frac{1}{z-2} + e^{-z}$ 在 $z=0$ 处展开为幂级数，并指出其收敛半径.
2. (10 分) 将 $f(z) = \frac{1}{z^3+2z}$ 在 $1 < |z+1| < +\infty$ 展开为洛朗级数.
3. (5 分) 计算 $(2020+i)(2-i)$.
4. (5 分) 计算 $\arccos 2$.
5. (10 分) 求 a 使得 $v(x,y) = ax^2y - y^3 + x + y$ 是调和函数，并求虚部为 $v(x,y)$ 且满足 $f(0) = 1$ 的解析函数 $f(z)$.
6. (30 分 = 6 分 \times 5) 求积分 (所有路径均为逆时针)
 - (1) $\int_C (e^z + 3z^2 + 1) dz, C : |z| = 2, \operatorname{Re} z < 0$
 - (1) $\oint_C \frac{dz}{z(z-1)^2(z-5)}, C : |z| = 3$
 - (1) $\oint_C \frac{dz}{\sin z(z+6)(z-5)}, C : |z| = 4$
 - (1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 2x + 5} dx$
 - (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 + 2\sin^2 \theta)^2}$
7. (10 分) 求方程 $z^8 + e^z + 6z + 1 = 0$ 在 $1 < |z| < 2$ 中根的个数，并说明理由.
8. (10 分) 利用拉氏变换解微分方程：

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = te^t, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

9. (10 分) 设 f 是域 $|z| > r > 0$ 上的解析函数. 证明：若对于 $|a| > R > r$, $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = f(a)$, 则积分

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0$$

2010-2011 学年第二学期复分析期中试题

1. (15 分) 计算题.

(1) 设 $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$, 求 \mathbb{C} 上的全纯函数 $f(z)$, 使得 $\operatorname{Re} f(z) = u$ 且 $f(i) = 1 + i$.

(2) 求积分 $I = \int_{|z|=r} \frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}$, $r \neq 1, 2$.

2. (15 分) 求函数 $f(z) = \sqrt[3]{\frac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}}$ 的所有支点, 一个单值域, 并求使得 $f(3) = 0$ 的单值解析分支在 $z = i$ 的值.

3. (15 分) 求将区域 $\left\{ z : |z| < 1, \left| z - \frac{i}{2} \right| > \frac{1}{2} \right\}$ 映到上半平面的单叶保角变换.

4. (15 分) 求证方程 $z + e^{-z} = a$ ($a > 1$) 在 $\operatorname{Re} z > 0$ 内只有一个根, 且为实根.

5. (15 分) 若 $f(z)$ 是 $|z| < 1$ 上的全纯函数, 且 $|f(z)| < 1$. 求证: $|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}$, $|z| < 1$.

6. (10 分) 设 $D = \{|z| < 1\}$, 若 $f(z)$ 是 D 上的函数, 且 $f^2(z)$ 和 $f^3(z)$ 都是 D 上的全纯函数. 求证 $f(z)$ 是 D 上的全纯函数.

7. (15 分 = 5 分 + 10 分) 求证:

(1) 若 $f(z)$ 是 $|z| < r$ 上的全纯函数, 则 $|f(0)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}r} \left(\int_{|z| < r} |f(x, y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$.

(2) 若 $f(z)$ 在 $0 < |z| < r$ 上全纯, 且 $\int_{0 < |z| < r} |f(x, y)|^2 dx dy < \infty$, 则 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

2014-2015 学年第二学期复分析 (H) 期末试题

1. (20 分 =10 分 ×2)

(1) $\int_{|z|=1} \frac{z^3}{2z^2 + 1} dz.$

(2) $a, b > 0,$ 求 $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx.$

2. (15 分) 求一个共形映射, 使 $B(0, 1) \cap \{\operatorname{Im} z > 0\} \mapsto B(0, 1).$

3. (15 分) 利用 Rouché 定理去证代数学基本定理.

4. (10 分) 设 $f(z)$ 在 \mathbb{C}_∞ 上仅有一极点 $z = 1$, 其主要部分是 $\frac{1}{(z - 1)^2}$, $f(0) = 1$, 求 $f(z)$ 表达式, 并对 $f(z)$ 在 $1 < |z| < +\infty$ 上作 Laurent 展开.

5. (10 分) 设 $f \in H(B(0, 1))$, $f(0) = 0$, 求证: $\sum_{n=0}^{\infty} f(z^n)$ 在 $B(0, 1)$ 绝对内闭一致收敛.

6. (10 分) 证明: 除掉线性函数之外, 不存在其它整函数使其反函数也是整函数.

7. (10 分) 设 $f \in H(B(0, 1)) \cap C(\overline{B(0, 1)})$, $|f(z)| = 1, \forall z \in \partial B(0, 1)$, 证明: f 是有理函数.

8. (10 分) 设区域 D 关于实轴对称, f 在 D 上全纯. 证明: 存在 $f_1(z), f_2(z) \in H(D)$, 使 $f(z) = f_1(z) + i f_2(z)$, 且 f_1, f_2 在实轴上取得实值.

2015-2016 年第二学期复分析期中试题

1. (20 分 =4 分 ×5) 判断下列命题的对错, 请直接将答案写在命题左侧的下划线上, 不要解答过程.
- (1) ____ \mathbb{C} 中区域上的调和函数一定有共轭调和函数.
- (2) ____ 若函数 $f(z)$ 在 \mathbb{C} 中的区域 Ω 上全纯, 在 Ω 的闭包上连续, 则对任何 $z \in \Omega$ 有 $|f(z)| \leq \sup_{w \in \partial\Omega} |f(w)|$.
- (3) ____ 设 f 为有理函数, 且 ∞ 是 f 的一阶零点, 那么 f 在 \mathbb{C} 上的所有留数之和等于 0.
- (4) ____ 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径等于 1, 在单位圆盘 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 内定义出解析函数 $f(z)$, 那么必有 z_0 , 使得 $|z_0| = 1$, 并且 $f(z)$ 不能解析延拓到 z_0 的任何邻域上.
- (5) ____ 存在从上半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ 到 \mathbb{C} 的共形一一对应.
2. (24 分) 计算题, 要求有详细解答过程, 直接给出答案者不得分
- (1) 求留数 $\operatorname{Res}(e^{\frac{1}{z}} \cdot z^5, 0)$.
- (2) 利用留数定理计算积分 $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$.
- (3) 求 $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ 在 $0 < |z| < 1$ 和 $1 < |z| < +\infty$ 的 Laurent 展开.
- (4) 设 γ 为闭曲线 $z(t) = 4e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, 计算积分 $\int_\gamma \frac{z^9}{z^{10}-1} dz$.
3. (16 分) 设 $f(z)$ 为 \mathbb{C} 中的区域 Ω 上的解析函数, 且恒不为零, 证明: 实值函数 $\log |f(z)|$ 为 Ω 上的调和函数.
4. (10 分) 方程 $z^7 - 2z^5 + 2016z^3 - z + 1 = 0$ 在单位开圆盘 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 内共有多少个根? 要求详细说明理由, 直接写出得数者不得分.
5. (10 分) 证明 Weierstrass 定理: 设解析函数列 $\{f_n\}$ 在区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上内闭一致收敛, 设 k 为任意正整数, 那么相应的 k 阶导函数列 $\{f_n^{(k)}(z)\}$ 也在 Ω 上内闭一致收敛.
6. (10 分) 求从区域 $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\}$ 到单位圆盘 $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ 的共形一一对应 $w = f(z)$, 使得 $f(e^{\frac{\pi i}{4}}) = 0$, 且 $f'(e^{\frac{\pi i}{4}}) > 0$. 要求有详细解答过程, 直接写出答案者不得分.
7. (10 分) 设 $f(z)$ 为单位开圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 上的解析函数, $|f(z)| \leq 1$, 且 f 在 \mathbb{D} 内有两个不动点, i.e. 存在 $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{D}$, 使得 $f(z_1) = z_1$, $f(z_2) = z_2$. 利用 Schwarz 引理证明: 在 \mathbb{D} 内 $f(z) = z$.
8. (10 分) 设 $f(z)$ 为上半平面 $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ 上恒不为零的解析函数, 并且当 $z \in \mathbb{H}$ 趋于实轴 \mathbb{R} 上的点时, $|f(z)| \rightarrow 1$.
- (1) 证明 $f(z)$ 可以延拓为整函数, 仍然记作 $f(z)$.

- (2) 在 (1) 的条件下, 假设 ∞ 不是 $f(z)$ 的本性奇点, 证明 $f(z)$ 为常值函数.
9. (10 分) 设 $\Omega = \{0 < |z| < 1\}$, 设 f 在 Ω 上全纯, 且 $\iint_{\Omega} |f(z)|^2 dx dy < +\infty$. 证明: $z = 0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

2016-2017 年第二学期复分析期中试题

1. (2 分) 设 $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$), 证明: $f(z) = \sqrt{xy}$ 在 $z = 0$ 处满足 Cauchy-Riemann 方程, 但 $f(z)$ 在 $z = 0$ 处不可导.

2. (2 分) 设 f 是凸区域 Ω 上的全纯函数, 如果对每点 $z \in \Omega$ 有 $\operatorname{Re} f'(z) > 0$, 则 f 是 Ω 上的单叶函数.

3. (4 分 = 2 分 × 2)

(1) 若幂级数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 $R = 1$, 且在点 $z = 1$ 收敛到 s , 则

(a) 设 $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ 且 A 为如下四条直线所围成的四边形区域 $y = \pm \cot \theta_0 \cdot x$, $y = \pm \tan \theta_0 \cdot (x - 1)$, 则上述级数在区域 A 上一致收敛.

(b) $\lim_{z \rightarrow 1, z \in A} f(z) = s$.

(2) 利用上述结论求和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, 并详细说明推导理由.

4. (2 分 = 1 分 × 2)

(1) 对任何 $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, 有 $\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_2)}f(z_1)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_2}z_1} \right|$.

(2) 对任何 $z_1 \in \mathbb{D}$, 有 $|f'(z_1)| \leq \frac{1 - |f(z_1)|^2}{1 - |z_1|^2}$.

5. (2 分) 设 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, 试分别给出这个函数 $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ 和 $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < \infty\}$ 上的 Laurent 展开式.

6. (2 分) 设 $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < r_1 < |z| < r_2 < \infty\}$, f 是 Ω 上的全纯函数且在 $\bar{\Omega}$ 上连续, $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, 求证: 对任何 $r \in (r_1, r_2)$, $\log M(r) \leq \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_1) + \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_2)$.

7. (2 分) 利用留数定理计算积分. (写清楚详细推导过程, 不得直接套用公式)

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} \sqrt{\frac{(1-x)^3}{x}} dx$$

8. (2 分) 设 $f(z)$ 是 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 上的全纯函数, 实数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, 且对任何 $n \in \mathbb{N}$ 有 $0 < x_{n+1} < x_n < 1$, 求证: 如果对任何 $n \in \mathbb{N}$ 有 $f(x_{2n+1}) = f(x_{2n})$, 则 $f(z)$ 是常值函数.