中国科学技术大学二〇二三年攻读硕士学位研究生入学考试试题参考解析

考试科目：自动控制理论 编号：

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一、分析：考察直流电动机的建模。

解：由电磁关系可知，当励磁磁场非饱和时，气隙磁通 ϕ 与励磁电流成比例关系，故有：

$$\phi = K_f i_f$$

再假设电机扭矩与 ϕ 和电枢电流之间有如下的线性关系

$$T_m = K_1 \phi i_a(t) = K_1 K_f i_f(t) i_a(t)$$

其中 $i_a(t)$ 为电枢绕组中的电流，通过磁场控制时，可视其为常量。则对上式经拉普拉斯变换后有：

$$T_m(s) = \left(K_1 K_f I_a\right) I_f(s) = K_m I_f(s)$$

K_m 定义为电机常数。励磁（中科大官方群：437258355）电流与磁场电压之间的关系为：

$$V_f(s) = \left(R_f + L_f s\right) I_f(s)$$

电机扭矩 $T_m(s)$ 等于传送给负载的扭拒，即有关系式

$$T_m(s) = T_L(s) + T_d(s)$$

其中，$T_L(s)$ 为负载扭拒，$T_d(s)$ 为扰动扭矩，题图所示的惯性负载所需要的扭矩为

$$T_L(s) = Js^2\theta(s) + bs\theta(s)$$

整理上式，可以得到

$$T_L(s) = T_m(s) - T_d(s)$$

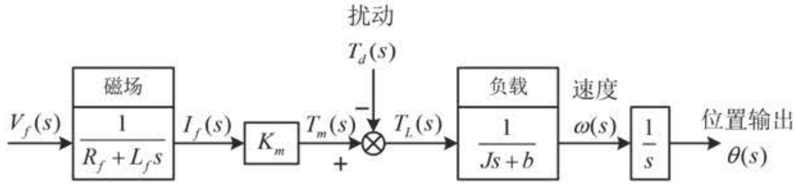
$$T_m(s) = K_m I_f(s)$$

$$I_f(s) = \frac{V_f(s)}{R_f + L_f s}$$

于是，当 $T_d(s) = 0$ 时，电机-负载组合体的传递函数为

$$G_1(s)=\frac{\theta(s)}{V_f(s)}=\frac{K_m}{s(Js+b)\left(L_f s+R_f\right)}=\frac{K_m/\left(JL_f\right)}{s\left(s+b/J\right)\left(s+R_f/L_f\right)}$$

绘制磁场控制的直流电机传动系统方框图如所示：



当忽略励磁绕组的电气时间常数时，传递函数$G_{n1}(s)$为：

$$G_{n1}(s)=\frac{K_m/R_f}{s(Js+b)}$$

（2）电枢控制式直流电机则以电枢电流$i_a(t)$作为控制变量，此时可认为励磁线圈中建立了恒定的励磁电流$i_f(t)$为一常数，电机扭矩为

$$T_m(s)=\left(K_1K_fI_f\right)I_a(s)=K_mI_a(s)$$

电枢电流与作用在电枢上的输入电压之间的关系为

$$V_a(s)=\left(R_a+L_as\right)I_a(s)+V_b(s)$$

其中，$V_b(s)$是与电机速度成正比的反相感应电压，且有

$$V_b(s)=K_b\omega(s)$$

其中，$\omega(s)=s\theta(s)$为角速度的拉普拉斯变换，而电枢电流为

$$I_a(s)=\frac{V_a(s)-K_b\omega(s)}{R_a+L_as}$$

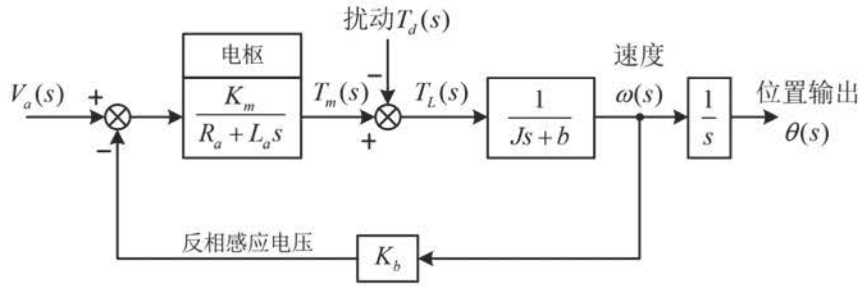
电机扭矩$T_m(s)$等于传送给负载的（中科大官方群：437258355）扭矩，即有关系式

$$T_m(s)=T_L(s)+T_d(s)$$

其中，$T_L(s)$为负载扭矩，$T_d(s)$为扰动扭矩，题图所示的惯性负载所需要的扭矩为

$$T_L(s)=Js^2\theta(s)+bs\theta(s)=T_m(s)-T_d(s)$$

电枢控制式直流电机的上述关系如所示：



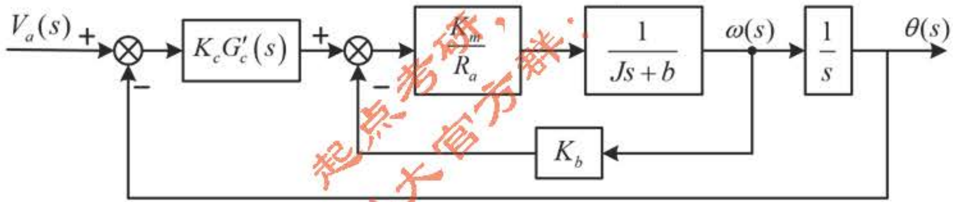
当$T_d(s)=0$时的传递函数为：

$$G_2(s)=\frac{\theta(s)}{V_a(s)}=\frac{K_m}{s\left[(R_a+L_a s)(Js+b)+K_b K_m\right]}$$

忽略电枢时间常数$\frac{L_a}{R_a}$的影响，故有

$$G(s)=\frac{\theta(s)}{V_a(s)}=\frac{K_m}{s\left[R_a(Js+b)+K_b K_m\right]}$$

3、设串联控制器的开环传递函数为$G_c'(s)$，则增加转角传感器、串联控制器及功率放大器后的闭环系统图为（由题意知忽略电气常数）：



此时系统开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{K_m K_c G_c'(s)}{s(R_a Js+R_a b+K_b K_m)}$$

闭环传递函数为：

$$\Phi(s)=\frac{K_m K_c G_c'(s)}{R_a Js^2+(R_a b+K_b K_m)s+K_m K_c G_c'(s)}$$

当扰动$T_d=0$时，系统误差（中科大官方群：437258355）传递函数为：

$$\Phi_e(s)=1-\Phi(s)=\frac{R_a Js^2+(R_a b+K_b K_m)s}{R_a Js^2+(R_a b+K_b K_m)s+K_m K_c G_c'(s)}$$

此时系统在单位阶跃输入下的稳态误差为：

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\cdot\Phi_e(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{R_a Js^2+(R_a b+K_b K_m)s}{R_a Js^2+(R_a b+K_b K_m)s+K_m K_c G_c'(s)}=0$$

此时系统在单位阶跃输入下的稳态误差为0

若要系统无稳态位置误差地跟踪等速度信号需使系统升阶为Ⅱ型系统，故选用比例-积分控制器对系统进行校正；故可设设计串联控制器为：

$$G_c'(s)=\frac{s+K_I}{s}$$

加入控制器后系统闭环传递函数为：

$$\Phi(s)=\frac{K_mK_cs+K_mK_cK_I}{R_aJs^3+(R_ab+K_bK_m)s^2+K_mK_cs+K_mK_cK_I}$$

此时系统可以无稳态误差的跟踪速度信号。

二、解：1、系统开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s(0.05s+1)(0.001s+1)}$$

将 $s=j\omega$ 代入 $G(s)$ 可得

$$G(j\omega)=\frac{K}{j\omega(0.05j\omega+1)(0.001j\omega+1)}=\frac{-0.051K\omega^2+jK(0.00005\omega^3-\omega)}{\omega^2\left(0.0025\omega^2+1\right)\left(0.000001\omega^2+1\right)}$$

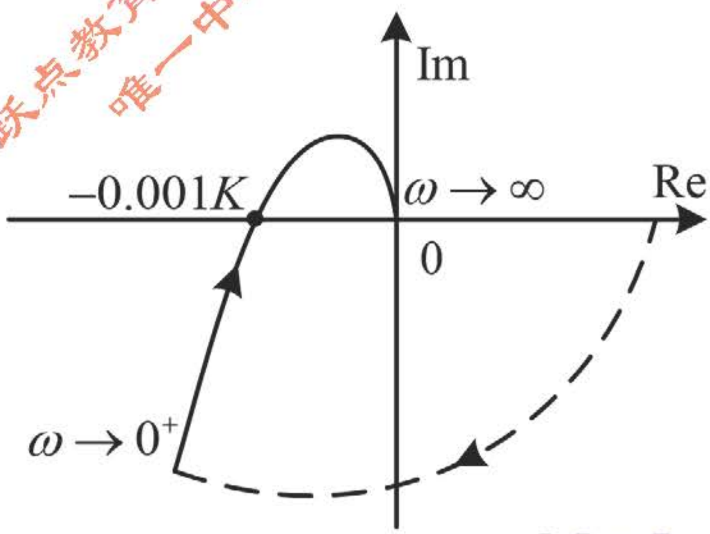
当 $\omega\to0^+$ 时，$G(j\omega)\to\infty\angle-90^\circ$；当 $\omega\to\infty$ 时，$G(j\omega)\to0\angle-270^\circ$

令 $\mathrm{Im}G(j\omega)=0$ 可解得

$$\omega=141.42rad/s$$

此时有 $G(j\omega)=-0.001K$

绘制 Nyquist 图像（中科大官方群：437258355）如下：



由奈氏判据知

$$Z=P-2\left(N^+-N^-\right)=0-2\left(N^+-N^-\right)=0$$

当 $N^+=N^-$ 时系统稳定，即 $-0.001K>-1$，解得 $K<1000$ 时系统稳定.

则当 $0<K<1000$ 时系统稳定，$K\geq 1000$ 时不稳定

2、校正后系统开环传递函数为

$$G'(s)=\frac{K(T_a s+1)}{s(0.05s+1)(0.001s+1)}$$

要求系统在跟踪速度信号时，$e_{ss}\leq 0.005$，有 $K_v=\lim\limits_{s\to 0}sG'(s)=K$，可得：

$$e_{ss}=\frac{1}{K_v}\leq 0.005\Rightarrow K\geq 200$$

取 $K=200$，则

$$\left|G'(j100)\right|=\left.\frac{200\sqrt{T_a^2\omega_c^2+1}}{\omega_c\sqrt{(0.05\omega_c)^2+1}\sqrt{(0.001\omega_c)^2+1}}\right|_{\omega_c=100}=1$$

解得 $T_a=0.024$

此时相角裕度为

$$\varphi_{PM}=180^\circ+\angle G(j100)=73^\circ\geq 60^\circ$$

满足系统要求。

若要消除微分补偿环节（中科大官方群：437258355）提高的噪音可以选用滤波型调节器对系统进行补偿，降低高频噪音的影响。

3、要求调节时间为

$$t_s=\frac{4}{\zeta\omega_n}=250ms=0.25s$$

解得 $\zeta\omega_n=16$，则经过设计后系统的闭环闭环主导极点应为：

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=-16\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

从根轨迹的角度解决此问题，题中所给原系统的开环传递函数 $G(s)=\dfrac{K}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$ 无论如何调整 K 的取值都无法使系统的闭环主导极点满足题意，故需附加开环零点对系统进行修正，为方便分析，取校正环节与（2）中相同，即：

$$G_c=T_a s+1=0.024s+1$$

则附加开环极点后 系统开环传递函数为：

$$G'(s)=\frac{K(0.024s+1)}{s(0.05s+1)(0.001s+1)}$$

当忽略惯性环节 $\dfrac{1}{0.001s+1}$ 时，系统开环传递函数为：

$$G'(s)=\frac{K(0.024s+1)}{s(0.05s+1)}$$

系统闭环特征方程为：

$$D(s)=0.05s^2+(1+0.024K)s+K=s^2+(0.48K+20)s+20K=0$$

对比二阶系统闭环特征方程可得：

$$0.48K+20=2\zeta\omega_n=32\Rightarrow K=25$$

将$K=25$代入未忽略惯性环节的开环传递函数中可得：

$$G'(s)=\frac{25(0.024s+1)}{s(0.05s+1)(0.001s+1)}$$

系统闭环特征方程为：

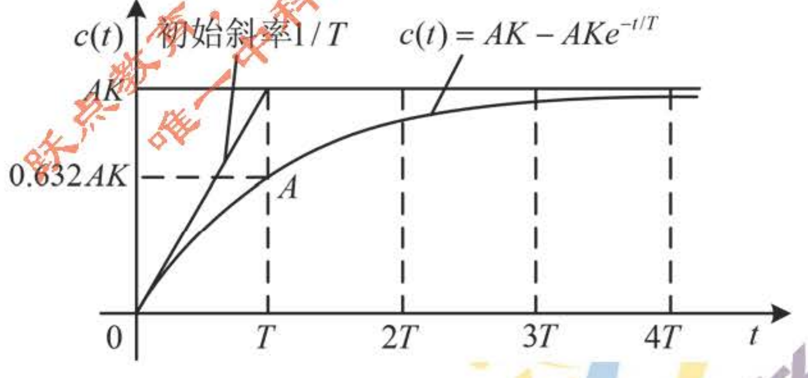
$$D(s)=s^3+1020s^2+32000s+500000=0$$

解得系统闭环极点为：$s_{1,2}=-15.94\pm j15.88$，$s_3=-988$，显然系统主导极点为：$s_{1,2}=-15.94\pm j15.88$，且$\zeta\omega_n=15.94\approx 16$，满足题目要求，故时间常数$\tau_2=0.001s$的惯性环节的动态特性可以被忽略。

三、解：1、当对开环系统施加幅值为A的阶跃输入时，系统输出为：

$$c(t)=AK-AKe^{-t/T}$$

绘制系统输出曲（中科大官方群：437258355）线如下：



过渡时间为：

$$T_{so}=4T$$

2、当$K=0.0275, T=153$时，

$$G(s)=\frac{0.0275}{153s+1}$$

校正后系统开环传递函数为

$$G'(s)=\frac{0.0275(K_p s+K_I)}{s(153s+1)}=\frac{0.0275K_p(s+\frac{K_I}{K_p})}{s(153s+1)}$$

要求系统超调量 $\sigma\%\le 5\%$ ，则有

$$\zeta\ge 0.69$$

由 1 可知原系统过渡时间为

$$T_s=4T=612$$

由题意可知，加入控制器后

$$T_{sc}=0.8T_{so}=489.6$$

又有：$T_s=\dfrac{4}{\zeta\omega_n}=489.6$ 可得

$$\zeta\omega_n=0.008$$

取 $\zeta=0.7$，则 $\omega_n=0.011$，系统的（）极点为 $s=-0.008\pm j0.008$

由相角条件

$$-\left(180^\circ-\arctan\frac{0.008}{0.008}\right)-\left(180^\circ-\arctan\frac{0.008}{0.008-\frac{1}{153}}\right)+\arctan\frac{0.008}{\frac{K_I}{K_p}-0.008}=(2k+1)\times180^\circ$$

$$\frac{K_I}{K_p}=0.0135>0.0065$$

此时有

$$K_p=\frac{s\left|153s+1\right|}{0.0275\left|s+0.0135\right|}=52.7,\quad K_I=0.71$$

则校正环节传递函数为：

$$G_c(s)=52.7+0.71\frac{1}{s}$$

(2) 由题意可知，加入控制器后，若要求控制器零点在开环极点右侧，由根轨迹法知，此时根轨迹恒在实轴上，为简化分析，不妨设系统极点满足主导极点条件，将系统等价为一阶系统进行分析。

则加入控制器后，系统的闭环传递函数为

$$\Phi'(s)=\frac{0.0275K_p(s+\frac{K_I}{K_p})}{153s^2+(0.0275K_p+1)s+0.0275K_I}=\frac{K^*(s+a)}{\left(s+\frac{1}{T'}\right)(s+b)}$$

若将系统等效为一阶系统，则若要令闭环系统过渡时间为$T_{s'}=1.2T_{so}$，则有：

$$T'=1.2T=183.6,\quad s_1=\frac{1}{183.6}\approx 0.0054$$

可取$a=0.0055$，解得

$$K^*=0.054, K_p=300.44, K_I=1.65$$

校正环节的传递函数为

$$G_c(s)=300.44+1.65\frac{1}{s}$$

则加入控制器后系统闭环传递函数为：

$$\Phi'(s)=\frac{0.054(s+0.0055)}{s^2+0.0605s+0.0003}$$

此时系统闭环极点为：$s_1=-0.0054$，$s_2=-0.055$；显然满足主导极点的近似条件，故设计控制器$G_c(s)=300.44+1.65\frac{1}{s}$，满足（中科大官方群：437258355）题目要求。

四、解：1、由题意可知系统传递函数为

$$\hat{g}(s)=\frac{2s+\beta}{s^3+3s^2+2s}$$

则系统能控标准型为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}\beta & 2 & 0\end{bmatrix}$$

①能控性：

由系统能控性标准型可知系统是完全能控的，由系统能观性秩判据可知

$$rankN=rank\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}\beta & 2 & 0\\ 0 & \beta & 2\\ 0 & -4 & \beta-6\end{bmatrix}$$

若系统完全能控（中科大官方群：437258355）则有：

$$\beta[\beta(\beta-6)+8]\neq 0\Rightarrow \beta_1\neq 4,\beta_2\neq 2,\beta_3\neq 0$$

此时，系统完全能观测

②BIBO 稳定性：

当$\beta\neq 0$，$\beta\neq 2,\beta\neq 4$时，

系统特征方程为

$$D(s)=s^3+3s^2+2s$$

系统极点为 $s_1=0,s_2=-1,s_3=-2$

系统不是 BIBO 稳定

当 $\beta=0$ 时，系统特征方程为：

$$D(s)=s^2+3s+2$$

则系统极点为：$s_1=-1,s_2=-2$

系统是 BIBO 稳定的

当 $\beta=2$ 或 $\beta=4$ 时，系统极点分别为

$$\begin{cases}s_1=0\\ s_2=-1\end{cases},\quad \begin{cases}s_1=0\\ s_2=-2\end{cases}$$

系统不是 BIBO 稳定的。

③渐近稳定性与李雅普诺（中科大官方群：437258355）夫意义下的稳定：

系统特征多项式为

$$D(s)=\det\left[sI-A\right]=s^3+3s^2+2s$$

$$s_1=0,\quad s_2=-1,s_3=-2$$

系统不是渐近稳定的，但在李雅普诺夫意义下是稳定的。

2、当系统 BIBO 稳定时，系统状态空间方程为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-2&-3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}0&2&0\end{bmatrix}$$

在零初始条件下，系统状态空间的解为：

$$x(t)=\int_0^t\Phi(\tau)Bu(t-\tau)d\tau$$

当输入为单位阶跃信号时，系统状态响应为：

$$x(t)=\begin{bmatrix}\frac{t}{2}-\frac{3}{4}+e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-2t}\\ \frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$y(t)=c\cdot x(t)=\left(\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)\times 2=1-2e^{-t}+e^{-2t}$$

五、解：1、由题意可知控制系统的状态方程

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -2 & 5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}5 & -1\end{bmatrix}x$$

由系统能控性秩判据可知

$$rankm=rank\begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}3 & 9\\ 5 & 19\end{bmatrix}=2$$

故可以使用状态反馈任意配置系统极点，设状态反馈矩阵 $K=\begin{bmatrix}K_1 & K_2\end{bmatrix}$，则有状态反馈后系统特征多项式为：

$$f(\lambda)=\det[\lambda I-(A-bk)]=\lambda^2+(3k_1+5k_2-3)\lambda+4k_2-4$$

期待系统特征（中科大官方群：437258355）多项式为

$$f^*(\lambda)=(\lambda+2)^2=\lambda^2+4\lambda+4$$

对比可得：

$$\begin{cases}3k_1+5k_2-3=4\\ 4k_2-4=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=-1\\ k_2=2\end{cases}$$

则 $K=[-1 \quad 2]$

2、由 $rankC=1$，$n-1=1$，故可设计最小维状态观测器为一维，取可逆矩阵 $T=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix}$，

设 $\overline{G}=\begin{bmatrix}g\end{bmatrix}$

则

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}5 & -1\\ -4 & 1\end{bmatrix}$$

$$\overline{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}32 & 42\\ -22 & -29\end{bmatrix}$$

$$\overline{B}=T^{-1}B=\begin{bmatrix}10\\ -7\end{bmatrix}$$

$$\overline{C}=CT=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

观测器特征多项式为

$$f(s)=\det\left(sI-\left(\overline{A}_{22}-\overline{G}\overline{A}_{12}\right)\right)=s+29+42g$$

期望特征多项式为

$$f^*(s)=s+8$$

解得 $\overline{G}=g=-0.5$

观测器方程为

$$\begin{aligned}\dot{w}&=\left(\overline{A}_{22}-\overline{G}\overline{A}_{12}\right)w+\left[\left(\overline{A}_{22}-\overline{G}\overline{A}_{12}\right)\overline{G}+\left(\overline{A}_{21}-\overline{G}\overline{A}_{11}\right)\right]y+\left(\overline{B}_2+\overline{G}\overline{B}_1\right)u\\&=-8w-2y-12u\end{aligned}$$

$$\hat{\overline{x}}_2=w+\overline{G}y=w-0.5y$$

六、分析：考察状态观测器

解：基于观测器的状态反馈系统由被控系统、状态反馈和状态观测器构成。考虑 n 维连续时间线性定常被控系统：

$$\Sigma_0:\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu, \quad x(0)=x_0, \quad t\ge 0\\ y=Cx\end{cases}$$

其中，u 为输入；y 为输出。此外，假定 $\{A, C\}$ 为状态完全能观测，$\{A,B\}$ 为状态完全能控。引入的全维（中科大官方群：437258355）闭环状态观测器为

$$\Sigma_G:\begin{cases}\dot{\hat{x}}=(A-GC)\hat{x}+Bu+Gy\\ y=C\hat{x}\end{cases}$$

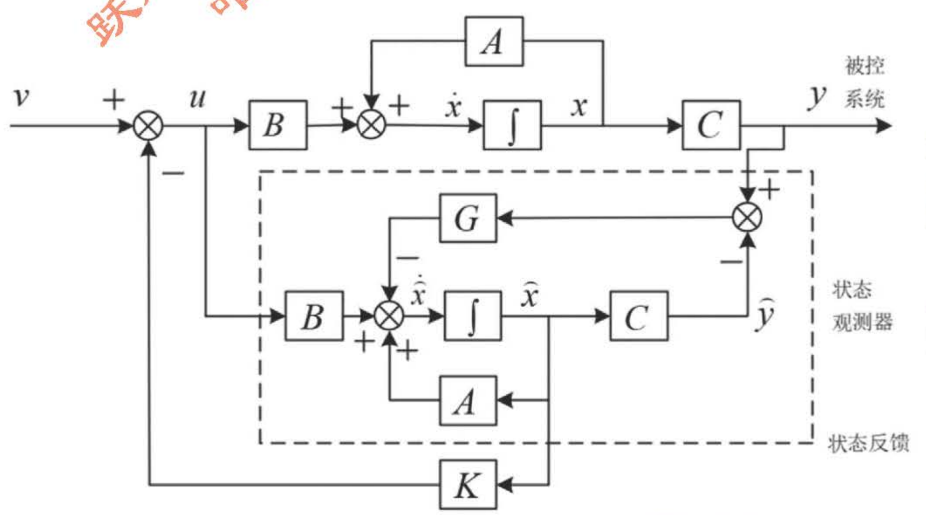
其中，$n\times 1$ 矩阵 G 使 $A-GC$ 的特征值配置在期望的位置上。

引入状态反馈

$$u=-Kx+v$$

其中，$1\times n$ 反馈增益矩阵 K 可按期望的性能指标确定；v 为参考输入。

以观测器重构状态 $\hat{x}$ 代替被控系统状态 x，得到基于状态观测器的状态反馈系统的组成结构，如图所示。



2、对于图 1 所示的基于观测器的状态反馈系统 Σ_{KG}，取 $\begin{bmatrix}x\\ \hat{x}\end{bmatrix}_{2n\times 1}$ 为状态，v 为参考输入，y

为输出，
由（1）中基于观测器的状态反馈系统可得如下两个方程式

$$\dot{x} = Ax + B(-K\hat{x} + v) = Ax - BK\hat{x} + Bv$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - GC)\hat{x} + B(-K\hat{x} + v) + Gy = GCx + (A - GC - BK)\hat{x} + Bv$$

对其进行化简可得该（增广）系统的状态空间方程状态空间描述为：

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ GC & A - GC - BK \end{bmatrix}\bar{x} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}v\text{；}\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}\bar{x}$$

3、该增广系统不完全能控，证明：
对增广系统的状态空间方程求取传递函数矩阵可得：

$$\begin{aligned} G_{KB}(s) &= \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} \\ &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} sI - A + BK & BK \\ 0 & sI - A + GC \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= C(sI - A + BK)^{-1}B = G_K(s) \end{aligned}$$

即状态观测器的引入不改变直接状态反馈系统的传递函数矩阵。
因为系统的传递函数矩阵只反（中科大官方群：437258355）映系统能控且能观测状态对应的子系统，而系统 Σ_{KG} 的能控能观测部分为 $\{A - BK, B, C\}$，相应状态的维数为 n，由

$\bar{A} = \begin{bmatrix} sI - A + BK & BK \\ 0 & sI - A + GC \end{bmatrix}$ 可知，系统仍有 n 个不能控且不能观测的状态，故系统是不完全能控的。

4、若将将状态观测器改为最小维状态观测器，由上述理论可知，系统的传递函数阵仍未发生改变，故其与采用最小维状态观测其而言，只是将系统不能观且不能控的状态由 n 变为了 $n-1$，此时系统的增广矩阵仍然是不完全能控的。