



# 随机过程习题解析（未完成版）

@Author: jkadbear

@Repo: [https://github.com/jkadbear/Stochastic\\_Process](https://github.com/jkadbear/Stochastic_Process)

2018-01-09

1.1 令  $X(t)$  为二阶矩存在的随机过程. 试证它是宽平稳的当且仅当  $EX(t)$  与  $EX(t)X(s+t)$  都不依赖  $s$ .

证 :

充分性 : 若  $EX(s)$  与  $EX(s)X(s+t)$  都不依赖  $s$

则  $EX(s) = \text{常数 } m$ ,  $EX(s)X(s+t) = f(t)$

令  $s' = s+t$ ,

$$\therefore EX(s)X(s') = f(s'-s)$$

$$\begin{aligned} \therefore R_X(s, s') &= EX(s)X(s') - EX(s)EX(s') \\ &= f(s'-s) - m^2 \end{aligned}$$

$\therefore X(t)$  是宽平稳的

必要性 : 若  $X(t)$  宽平稳则  $EX(s)$  为常数  $m$ , 即  $EX(s)$  与  $s$  无关  
则

$$\begin{aligned} R_X(s, s') &= EX(s)X(s') - EX(s)EX(s') \\ &= g(s'-s) \end{aligned}$$

令  $s' = s+t$

则  $EX(s)X(s+t) = m^2 + g(t)$  与  $s$  无关

1.2 记  $U_1, \dots, U_n$  为在  $(0, 1)$  中均匀分布的独立随机变量. 对  $0 < t, x < 1$  定义

$$I(t, x) = \begin{cases} 1, & x \leq t, \\ 0, & x > t, \end{cases}$$

并记  $X(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(t, U_k)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , 这是  $U_1, \dots, U_n$  的经验分布函数. 试求过程  $X(t)$  的均值和协方差函数.

解 :

$$\begin{aligned} EX(t) &= E\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(t, U_k)\right] \\ &= EI(t, U_1) \\ &= \int_0^t 1 dx = t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_x(s, t) &= \mathbb{E}[X(s)X(t)] - \mathbb{E}X(s)\mathbb{E}X(t) \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n I(s, U_i) \cdot \sum_{j=1}^n I(s, U_j)\right] - st \\
&= \frac{1}{n^2}[(n^2 - n)\mathbb{E}(I(s, U_1) \cdot I(t, U_2)) + n\mathbb{E}(I(s, U_1) \cdot I(t, U_1))] - st \\
&= \frac{1}{n^2}[(n^2 - n)st + n \cdot \min(s, t)] - st \\
&= \frac{1}{n}[\min(s, t) - st]
\end{aligned}$$

1.3 令  $Z_1, Z_2$  为独立的正态随机变量, 均值为 0, 方差为  $\sigma^2$ ,  $\lambda$  为实数. 定义过程  $X(t) = Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t$ . 试求  $X(t)$  的均值函数和协方差函数. 它是宽平稳的吗?

解 :

$$\mathbb{E}X(t) = \cos \lambda t \mathbb{E}Z_1 + \sin \lambda t \mathbb{E}Z_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
R_X(s, t) &= \text{Cov}(Z_1 \cos \lambda s + Z_2 \sin \lambda s, Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t) \\
&= \cos \lambda s \cos \lambda t \text{Cov}(Z_1, Z_1) + \sin \lambda s \sin \lambda t \text{Cov}(Z_2, Z_2) \\
&= \sigma^2 \cos \lambda(s - t)
\end{aligned}$$

只与  $s - t$  有关,  $\therefore$  是宽平稳的

1.4 Poisson 过程  $X(t), t \geq 0$  满足 (i)  $X(t) = 0$ ; (ii) 对  $t > s$ ,  $X(t) - X(s)$  服从均值为  $\lambda(t - s)$  的 Possion 分布; (iii) 过程是有独立增量的. 试求其均值函数和协方差函数. 它是宽平稳的吗?

解 :

$$\mathbb{E}X(t) = \mathbb{E}[X(t) - X(0)] = \lambda t$$

$$\begin{aligned}
R_X(s, t) &= \text{Cov}(X(t), X(s)) \\
&= \text{Cov}(X(s) - X(t) + X(t) - X(0), X(t) - X(0)) \\
&= \text{Cov}(X(t) - X(0), X(t) - X(0)) \quad (\text{独立增量}) \\
&= \lambda t \quad (s \geq t)
\end{aligned}$$

$\therefore$  非宽平稳

1.5  $X(t)$  为第 4 题中的 Possion 过程. 记  $Y(t) = X(t+1) - X(t)$ , 试求过程  $Y(t)$  的均值函数和协方差函数, 并研究其平稳性.

解：

$$\begin{aligned}
 EY(t) &= EX(t+1) - EX(t) = \lambda \\
 R_X(s,t) &= Cov(X(s+1) - X(s), X(t+1) - X(t)) \\
 &= Cov(X(s+1), X(t+1)) + Cov(X(s), X(t)) \\
 &\quad - Cov(X(s), X(t+1)) - Cov(X(s+1), X(t)) \\
 &= \lambda [\min(s+1, t+1) + \min(s, t) - \min(s, t+1) - \min(s+1, t)]
 \end{aligned}$$

令  $\beta = s-t$ , 当  $\beta > 1$  或  $\beta < -1$  时,  $R_Y(s,t) = 0$

当  $0 < \beta \leq 1$  时,  $R_Y(s,t) = \lambda(t+1+t-s-t) = \lambda(t-s+1)$

当  $-1 \leq \beta \leq 0$  时,  $R_Y(s,t) = \lambda(s+1+s-s-t) = \lambda(s-t+1)$

$\therefore$  宽平稳

1.6 令  $Z_1$  和  $Z_2$  是独立同分布的随机变量.  $P(Z_1 = -1) = P(Z_1 = 1) = \frac{1}{2}$ . 记  $X(t) = Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t$ ,  $t \in R$ . 试证  $X(t)$  是宽平稳的, 它是严平稳的吗?

解：

$$EZ_1 = EZ_2 = 0$$

$$EX(t) = \cos \lambda t EZ_1 + \sin \lambda t EZ_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
 R_X(s,t) &= Cov(Z_1 \cos \lambda s + Z_2 \sin \lambda s, Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t) \\
 &= \cos \lambda s \cos \lambda t Cov(Z_1, Z_1) + \sin \lambda s \sin \lambda t Cov(Z_2, Z_2) \\
 &= 2 \cos \lambda(s-t) Var Z_1 \\
 &= 2 \cos \lambda(s-t) (E(Z_1^2) - E^2(Z_1)) \\
 &= \cos \lambda(s-t)
 \end{aligned}$$

$\therefore$  是宽平稳

$$F_t(x) = P(Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t \leq x)$$

$$\text{考虑 } F_t(0) = P(Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t \leq 0)$$

$$\text{当 } t = 0 \text{ 时 } F_t(0) = P(Z_1 \leq 0) = \frac{1}{2}$$

$$\text{当 } t = \frac{\pi}{4\lambda} \text{ 时 } F_t(0) = P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(Z_1 + Z_2) \leq 0\right) = \frac{3}{4}$$

$\therefore F_t(x)$  与  $t$  有关, 故  $X(t)$  不是严平稳过程

1.7. 试证：若  $Z_0, Z_1, \dots$  为独立同分布随机变量, 定义  $X_n = Z_0 + Z_1 + \dots + Z_n$ , 则  $\{X_n, n \geq 0\}$  是独立增量过程.

证：对  $\forall n$  及  $\forall t_1, \dots, t_n \in \{0, 1, 2, \dots\}, t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , 有

$$\left\{ \begin{array}{l} X(t_2) - X(t_1) = Z_{t_1+1} + \dots + Z_{t_2}, \\ X(t_3) - X(t_2) = Z_{t_2+1} + \dots + Z_{t_3}, \\ \dots \dots \dots \\ X(t_n) - X(t_{n-1}) = Z_{t_{n-1}+1} + \dots + Z_{t_n}. \end{array} \right.$$

由题知  $Z_{t_1+1}, \dots, Z_{t_n}$  互相独立,

$\therefore (Z_{t_1+1}, \dots, Z_{t_2}), (Z_{t_2+1}, \dots, Z_{t_3}), \dots, (Z_{t_{n-1}+1}, \dots, Z_{t_n})$  互相独立,

$\therefore \{X_n, n \geq 0\}$  为独立增量过程.

1.8 若  $X_1, X_2, \dots$  为独立随机变量, 还要添加什么条件才能确保它是严平稳的随机过程?

解：

若  $\{X_1, X_2, \dots\}$  严平稳, 则对任意正整数  $m$  和  $n$ ,  $X_m$  和  $X_n$  的分布都相同, 从而  $X_1, X_2, \dots$  是一列同分布的随机变量. 而当  $X_1, X_2, \dots$  是一列独立同分布的随机变量时, 对任意正整数  $k$  及  $n_1, \dots, n_k, k$  维随机向量  $(X_{n_1}, \dots, X_{n_k})$  的分布函数为 (记  $X_1, X_2, \dots$  的共同分布函数为  $F(x)$ )

$$\begin{aligned} F_{(X_{n_1}, \dots, X_{n_k})}(x_1, \dots, x_k) &= F_{X_{n_1}}(x_1) \cdots F_{X_{n_k}}(x_k) \\ &= F(x_1) \cdots F(x_k). \quad -\infty < x_1, \dots, x_k < +\infty. \end{aligned}$$

这说明了  $(X_{n_1}, \dots, X_{n_k})$  的分布函数与  $n_1, \dots, n_k$  无关, 故  $\{X_1, X_2, \dots\}$  严平稳.

1.9 令  $X$  和  $Y$  是从单位圆内的均匀分布中随机选取一点所得的横坐标和纵坐标. 试计算条件概率

$$P\left(X^2 + Y^2 \geq \frac{3}{4} \mid X > Y\right).$$

解：易见答案为  $\frac{1}{4}$ .

1.12 气体分子的速度  $V$  有三个垂直分量  $V_x, V_y, V_z$ , 它们的联合分布密度依 Maxwell – Boltzman 定律为

$$f_{V_x, V_y, V_z}(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{(2\pi kT)^{3/2}} \exp\left\{-\left(\frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{2kT}\right)\right\},$$

其中  $k$  是 Boltzman 常数,  $T$  为绝对温度, 给定分子的总动能为  $e$ . 试求  $x$  方向的动量的绝对值的期望值.

解: 由题中所给分布律知分子质量为单位质量, 即有  $e = \frac{1}{2}(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)$ .

则所求为

$$E\left[|V_x|\left|\frac{1}{2}(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) = e\right.\right]$$

作  $(V_x, V_y, V_z)$  的球坐标变换

$$V_x = R \cos \Phi$$

$$V_y = R \cos \Theta \sin \Phi$$

$$V_z = R \sin \Theta \sin \Phi,$$

则  $(R, \Theta, \Phi)$  的联合概率密度为

$$\begin{aligned} f_{R,\Theta,\Phi}(r, \theta, \phi) &= f_{V_x, V_y, V_z}(r \cos \phi, r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi) \cdot r^2 \sin \phi \\ &= \frac{\sqrt{2r^2}}{\sqrt{\pi(kT)^3/2}} e^{-r^2/2kT} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \sin \phi \\ &= f_R(r)f_\Theta(\theta)f_\Phi(\phi) \end{aligned}$$

由此可知  $R, \Theta, \Phi$  相互独立.

$$\begin{aligned} \therefore E\left[|V_x|\left|\frac{1}{2}(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) = e\right.\right] \\ &= E\left[R|\cos \Phi|\left|\frac{1}{2}R^2 = e\right.\right] \\ &= E\left[R|\cos \Phi|\left|R = \sqrt{2e}\right.\right] \\ &= \sqrt{2e}E[R|\cos \Phi|] \\ &= \sqrt{2e} \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin \phi |\cos \phi| d\phi \\ &= \sqrt{\frac{e}{2}} \end{aligned}$$

1.13 若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布. 它们服从参数为  $\lambda$  的指数分布. 试证  $\sum_{i=1}^n X_i$  是参数为  $(n, \lambda)$  的  $\Gamma$  分布, 其密度为

$$f(t) = \lambda \exp\{-\lambda t\} (\lambda t)^{n-1} / (n-1)! , \quad t \geq 0.$$

证:

令  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$

$$g_Y(t) = g_X^n(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$$

$\therefore Y$  服从参数为  $(n, \lambda)$  的  $\Gamma$  分布, 其密度函数如题所述

1.14 设  $X_1$  和  $X_2$  为相互独立的均值为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的 Possion 随机变量. 试求  $X_1 + X_2$  的分布, 并计算给定  $X_1 + X_2 = n$  时  $X_1$  的条件分布.

解 : 令  $Y = X_1 + X_2$

$$\begin{aligned} g_Y(t) &= g_{X_1}(t)g_{X_2}(t) \\ &= e^{\lambda_1(e^t-1)}e^{\lambda_2(e^t-1)} \\ &= e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)} \end{aligned}$$

$\therefore Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

$\therefore$  给定  $X_1 + X_2 = n$  时  $X_1$  服从参数为  $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, n = n$  的二项分布

1.15 若  $X_1, X_2, \dots$  独立且有相同的以  $\lambda$  为参数的指数分布,  $N$  服从几何分布, 即

$$P(N = n) = \beta(1 - \beta)^{n-1}, n = 1, 2, \dots, 0 < \beta < 1.$$

试求随机和  $Y = \sum_{i=1}^N X_i$  的分布.

解 :

$$E(e^{tY}|N=n) = g_X^n(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n \stackrel{\Delta}{=} \alpha^n$$

$$\therefore g_Y(t) = E[E(e^{tY}|N)] = E(\alpha^N) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta(1-\beta)^{n-1} \alpha^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha \beta (\alpha - \alpha \beta)^{n-1}$$

$$\text{当 } |\alpha - \alpha \beta| < 1 \text{ 时 } g_Y(t) = \frac{\alpha \beta}{1 - \alpha(1-\beta)} = \frac{\lambda \beta}{\lambda \beta - t}$$

$\therefore Y$  服从参数为  $\lambda \beta$  的指数分布

1.16 若  $X_1, X_2, \dots$  独立同分布,  $P(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$ .  $N$  与  $X_i, i \geq 1$  独立且服从参数为  $\beta$  的几何分布,  $0 < \beta < 1$ . 试求随机和  $Y = \sum_{i=1}^N X_i$  的均值, 方差和三、四阶矩.

解 :

$$\begin{aligned} E(e^{tY}|N=n) &= g_X^n(t) = E^n(e^{tY}) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^n \\ \therefore g_Y(t) &= E[E(e^{tY}|N)] = E\left[\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^N\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^n \beta(1-\beta)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\therefore EY = g'_Y(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \left( \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^{n-1} \beta (1-\beta)^{n-1} \frac{e^t - e^{-t}}{2} \Big|_{t=0} = 0$$

$$EY^2 = g''_Y(0)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ n(n-1) \left( \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^{n-2} \beta (1-\beta)^{n-1} \left( \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. n \left( \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^n \beta (1-\beta)^{n-1} \right] \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n \beta (1-\beta)^{n-1} \\ &= \frac{1}{\beta} \end{aligned}$$

$$VarY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{1}{\beta^2}$$

$$EY^3 = g_Y^{(3)}(0)$$

$$\begin{aligned} &= \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ n \beta (1-\beta)^{n-1} \left[ (n-1) \left( \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^{n-2} \frac{e^t - e^{-t}}{2} + \left( \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^n \right] \right\} \right)' \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ n \beta (1-\beta)^{n-1} \left[ (n-1)(n-2) \left( \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^{n-2} \left( \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^3 + \right. \right. \\ &\quad \left. (n-1) \left( \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^{n-2} \cdot 2 \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2} + n \cdot \left( \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right] \right\} \Big|_{t=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$EY^4 = g_Y^{(4)}(0)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ n \beta (1-\beta)^{n-1} \left[ (n-1) \left( \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^{n-1} (e^t + e^{-t}) + n \left( \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^n \right] \right\} \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (3n^2 - 2n) \beta (1-\beta)^{n-1} \\ &= 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \beta (1-\beta)^{n-1} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n \beta (1-\beta)^{n-1} \\ &= 3 \left( \frac{1-\beta}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^2} \right) - 2 \frac{1}{\beta^2} \\ &= \frac{6-5\beta}{\beta^2} \end{aligned}$$

1.17 随机变量  $N$  服从参数为  $\lambda$  的 Possion 分布. 给定  $N=n$ , 随机变量  $M$  服从以  $n$  和  $p$  为参数的二项分布. 试求  $M$  的无条件概率分布.

解：

$$\mathbb{E}(e^{tM}|N=n) = (pe^t + (1-p))^n \stackrel{\Delta}{=} a^n$$

$$g_M(t) = \mathbb{E}(a^N) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{\lambda p(e^t - 1)}$$

$$\therefore M \sim P(\lambda p)$$

2.1  $N(t)$  为一 Possion 过程, 对  $s < t$  试求条件概率  $P\{N(s) = k | N(t) = n\}$ .

解 :

$$\begin{aligned}
 P\{N(s) = k | N(t) = n\} &= P(N(s) = k, N(t) = n) / P(N(t) = n) \\
 &= P(N(s) - N(0) = k, N(t) - N(s) = n - k) / P(N(t) = n) \\
 &= \left[ \frac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!} \cdot \frac{(\lambda(t-s))^{n-k} e^{-\lambda(t-s)}}{(n-k)!} \right] / \left[ \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \right] \\
 &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left( \frac{s}{t} \right)^k \left( 1 - \frac{s}{t} \right)^{n-k}
 \end{aligned}$$

2.2  $\{N(t), t \geq 0\}$  为一强度是  $\lambda$  的 Possion 过程. 对  $s > 0$  试计算  $E[N(t) \cdot N(t+s)]$ .

解 :

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= E[N(t)(N(t+s) - N(t) + N(t))] \\
 &= E(N(t))E(N(t+s) - N(t)) + E(N^2(t)) \\
 &= \lambda t \cdot \lambda s + VarN(t) + E^2 N(t) \\
 &= \lambda^2 ts + \lambda t + (\lambda t)^2 \\
 &= \lambda^2 t(s+t) + \lambda t
 \end{aligned}$$

2.3 电报依平均速率为每小时 3 个的 Possion 过程到达电报局, 试问:

- (i) 从早上八时到中午没收到电报的概率;
- (ii) 下午第一份电报到达时间的分布是什么?

解:

(i) 令  $t$  的计时单位为小时, 并以早上 8:00 为起始时刻

所求事件即  $\{N(4) = 0\}$

其概率为  $\frac{e^{-12} \cdot 12^0}{0!} \approx 6.1 \times 10^{-6}$

(ii) 取中午 12:00 为起始时刻,  $T$  表示下午第一份电报到达时间  $F(t) = P(T \leq t) = P(N(t) \geq 1) = 1 - e^{-3t}$

$\therefore f(t) = 3e^{-3t}$ , 即  $T$  服从参数为 3 的指数分布

2.4  $\{N(t), t \geq 0\}$  为一  $\lambda = 2$  的 Possion 过程, 试求 :

- (i)  $P\{N(1) \leq 2\}$ ;
- (ii)  $P\{N(1) = 1 \text{ 且 } N(2) = 3\}$ ;

(iii)  $P\{N(1) \geq 2 | N(1) \geq 1\}$ .

解：

(i)

$$\begin{aligned}\text{原式} &= P\{N(1) - N(0) = 0\} + P\{N(1) - N(0) = 1\} + P\{N(1) - N(0) = 2\} \\ &= e^{-2} + \frac{2e^{-2}}{1!} + \frac{2^2 e^{-2}}{2!} \\ &= 5e^{-2}\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\text{原式} &= P\{N(1) - N(0) = 1 \text{ 且 } N(2) - N(1) = 2\} \\ &= P\{N(1) - N(0) = 1\} \cdot P\{N(2) - N(1) = 2\} \\ &= 2e^{-2} \cdot 2e^{-2} \\ &= 4e^{-4}\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{P\{N(1) \geq 2\} \text{ 且 } N(1) \geq 1}{P\{N(1) \geq 1\}} \\ &= \frac{P\{N(1) \geq 2\}}{P\{N(1) \geq 1\}} \\ &= \frac{1 - P\{N(1) - N(0) \leq 1\}}{1 - P\{N(1) - N(0) = 0\}} \\ &= \frac{1 - 3e^{-2}}{1 - e^{-2}}\end{aligned}$$

2.6 一部 600 页的著作总共有 240 个印刷错误, 试利用 Possion 过程近似求出某连续三页无错误的概率.

解：设  $N(t)$ ——到第  $t$  页为止的印刷错误数, 则  $N(t)$  为一 Possion 过程

观点一：该 Possion 过程的参数  $\lambda$  未知

则所求概率为

$$\begin{aligned}
& P\{N(t+3) - N(t) = 0 | N(600) - N(0) = 240\} \\
&= P\{N(t+3) - N(t) = 0; N(600) - N(0) = 240\} / P\{N(600) - N(0) = 240\} \\
&= P\{N(3) - N(0) = 0\} \cdot P\{N(600) - N(3) = 240\} / P\{N(600) - N(0) = 240\} \\
&= e^{-3\lambda} \cdot \frac{(597\lambda)^{240}}{240!} e^{-597\lambda} \Bigg/ \left[ \frac{(600\lambda)^{240}}{240!} \cdot e^{-600\lambda} \right] \\
&= \left( \frac{597}{600} \right)^{240} \approx 0.3003 \approx 0.3
\end{aligned}$$

观点二：该 Possion 过程的参数  $\lambda$  已知,  $\lambda = 240/600 = 0.4$ ,

则所求概率为  $P\{N(3) = 0\} = e^{-0.4 \times 3} \approx 0.3012 \approx 0.3$

2.7  $N(t)$  是强度为  $\lambda$  的 Possion 过程. 给定  $N(t) = n$ , 试求第  $r$  个事件 ( $r \leq n$ ) 发生的时刻  $W_r$  的条件概率密度  $f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n)$ .

解：

$$\begin{aligned}
& f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n) \cdot \Delta w_r \\
&= P\{N(w_r) - N(0) = r-1, N(w_r + \Delta w_r) - N(w_r) = 1 | N(t) = n\} \\
&= P\{N(w_r) - N(0) = r-1\} \cdot P\{N(w_r + \Delta w_r) - N(w_r) = 1\} \\
&\quad \cdot P\{N(t) - N(w_r + \Delta w_r) = n-r\} / P\{N(t) = n\} \\
&= \frac{(\lambda w_r)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda w_r} \cdot (\lambda \Delta w_r + o(\Delta w_r)) \cdot \frac{(\lambda(t-w_r-\Delta w_r))^{n-r}}{(n-r)!} e^{-\lambda(t-w_r-\Delta w_r)} \Bigg/ \left[ \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{\lambda t} \right]
\end{aligned}$$

两边除以  $\Delta w_r$  并令  $\Delta w_r \rightarrow 0$  得

$$f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \frac{(w_r)^{r-1}(t-w_r)^{n-r}}{t^n}$$

2.8 令  $\{N_i(t), t \geq 0\}, i = 1, 2, \dots, n$  为  $n$  个独立的有相同强度参数  $\lambda$  的 Possion 过程. 记  $T$  为在全部  $n$  个过程中至少发生了一件事的时刻, 试求  $T$  的分布.

解：

$$\begin{aligned}
 F_T(t) &= P\{T \leq t\} = 1 - P(T < t) \\
 &= 1 - P(N_i(t) = 0, i = 1, 2, \dots, n) \\
 &= 1 - (e^{-\lambda t})^n
 \end{aligned}$$

$$\therefore f_T(t) = F'_T(t) = n\lambda e^{-n\lambda t}$$

即  $T$  服从参数为  $n\lambda$  的指数分布.

2.10 到达某加油站的公路上的卡车服从参数为  $\lambda_1$  的 Possion 过程  $N_1(t)$ , 而到达的小汽车服从参数为  $\lambda_2$  的 Possion 过程  $N_2(t)$ , 且过程  $N_1(t)$  与  $N_2(t)$  独立. 试问随机过程  $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$  是什么过程? 并计算在总车流数  $N(t)$  中卡车首先到达的概率.

解：

$$\begin{aligned}
 g_{N(t)}(v) &= g_{N_1t}(v) \cdot g_{N_2t}(v) \\
 &= e^{\lambda_1 v(e^t - 1)} e^{\lambda_2 v(e^t - 1)} \\
 &= e^{(\lambda_1 + \lambda_2)v(e^t - 1)}
 \end{aligned}$$

$\therefore N(t)$  是强度为  $\lambda_1 + \lambda_2$  的 Possion 过程

记  $W_1, W_2$  分别为卡车、小汽车的第一次到达时间, 则  $W_1$  服从参数为  $\lambda_1$  的指数分布,  $W_2$  服从参数为  $\lambda_2$  的指数分布.

$$\begin{aligned}
 \therefore P(W_1 < W_2) &= \iint_{0 \leq w_1 < w_2 < +\infty} f_{W_1, W_2}(w_1, w_2) dw_1 dw_2 \\
 &= \int_0^{+\infty} dw_1 \int_{w_1}^{+\infty} \lambda_1 \lambda_2 e^{-w_1 \lambda_1 - w_2 \lambda_2} dw_2 \\
 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}
 \end{aligned}$$

2.11 冲击模型 (Shock Model) 记  $N(t)$  为某系统到某时刻  $t$  受到的冲击次数, 它是参数为  $\lambda$  的 Possion 过程. 设第  $k$  次冲击对系统的损害大小  $Y_k$  服从参数为  $\mu$  的指数分布,  $Y_k, k = 1, 2, \dots$ , 独立同分布. 记  $X(t)$  为系统所受到的总损害. 当损害超过一定的极限  $\alpha$  时系统不能运行, 寿命终止, 记  $T$  为系统寿命. 试求该系统的平均寿命  $ET$ , 并对所得结果作出直观解释.

提示：对非负随机变量  $ET = \int_0^\infty P(T > t) dt$

解：令  $W_n = \sum_{k=1}^n Y_k$

法一：

$$\begin{aligned}
P(T > t) &= P\{X(t) \leq \alpha\} \\
&= P\left\{\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \leq \alpha\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P\left\{\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \leq \alpha | N(t) = n\right\} \cdot P\{N(t) = n\} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P\left\{\sum_{k=1}^n Y_k \leq \alpha | N(t) = n\right\} \cdot P\{N(t) = n\} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P\{W_n \leq \alpha\} \cdot P\{N(t) = n\}
\end{aligned}$$

求和式中当  $n = 0$  时认为  $P\{W_0 \leq \alpha | N(t) = n\} = 1$

$$\because Y_k \sim \exp(\mu), \therefore W_n = \sum_{k=1}^n Y_k \sim \Gamma(n, \mu)$$

$$\begin{aligned}
\therefore P(W_n \leq \alpha) &= \frac{\mu^n}{(n-1)!} \int_0^\alpha s^{n-1} e^{-\mu s} ds \quad (n \geq 1) \\
P\{N(t) = n\} &= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \\
\therefore P(T > t) &= e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda \mu t)^n}{n!(n-1)!} \int_0^\alpha s^{n-1} e^{-\mu s} ds \\
\therefore ET &= \int_0^{+\infty} P(T > t) dt \\
&= \frac{1}{\lambda} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda \mu)^n}{n!(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} dt \int_0^\alpha s^{n-1} e^{-\mu s} ds \\
&= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu^n \Gamma(n+1)}{n!(n-1)!} \int_0^\alpha s^{n-1} e^{-\mu s} ds \\
&= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_0^\alpha \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\mu s)^{n-1} e^{-\mu s}}{(n-1)!} \right] d(\mu s) \\
&= \frac{1 + \mu \alpha}{\lambda}
\end{aligned}$$

从结果看, 若  $\lambda$  越大 (系统所受冲击越频繁),  $\mu$  越小 (每次冲击所造成的平均损害越大),  $\alpha$  越小 (系统所能承受的的损害极限越小), 则系统平均寿命越短, 且当  $\alpha$  等于 0 时系统的平均寿命即为第一次冲击到来的平均时间, 符合常识.

法二：

$$\begin{aligned}
 \because G_n(\alpha) &= P\{Y_1 + \cdots + Y_k \leq \alpha\} \\
 &= P\{W_n \leq \alpha\} \\
 &= P\{N_1(\alpha) \geq n\} \\
 &= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^n}{k!} e^{-\mu\alpha}
 \end{aligned}$$

其中  $N_1(t)$  是强度为  $\mu$  的 Possion 过程

$$\begin{aligned}
 \therefore P(T > t) &= P\{X(t) \leq \alpha\} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} G_n(\alpha) \quad (\text{例2.4}) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \frac{(\mu\alpha)^n}{k!} e^{-\mu\alpha} \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^k}{k!} e^{-\mu\alpha} \sum_{n=0}^k \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \\
 \therefore ET &= \int_0^{+\infty} P(T > t) dt \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^k}{k!} e^{-\mu\alpha} \sum_{n=0}^k \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} dt \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^k}{k!} e^{-\mu\alpha} \frac{(k+1)\Gamma(n+1)}{n!\lambda} \\
 &= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^k}{k!} e^{-\mu\alpha} + \frac{\mu\alpha}{\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu\alpha} \\
 &= \frac{1 + \mu\alpha}{\lambda}
 \end{aligned}$$

2.12 令  $N(t)$  是强度函数为  $\lambda(t)$  的非齐次 Possion 过程,  $X_1, X_2, \dots$  为事件间的时间间隔.

(i)  $X_i$  是否独立;

(ii)  $X_i$  是否同分布;

(iii) 试求  $X_1$  与  $X_2$  的分布.

解：记  $m(t) = \int_0^t \lambda(u) du$

法一：等待时间  $W_1, W_2$  的联合分布函数为

$$\begin{aligned}
F_{W_1, W_2}(t_1, t_2) &= P(W_1 \leq t_1, W_2 \leq t_2), \quad 0 \leq t_1 < t_2 \\
&= P(N(t_1) \geq 1, N(t_2) \geq 2) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^k P(N(t_1) = \ell, N(t_2) = k) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^k P(N(t_1) = \ell, N(t_2) - N(t_1) = k - \ell) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^k P(N(t_1) = \ell) P(N(t_2) - N(t_1) = k - \ell) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^k \frac{(m(t_1))^\ell}{\ell!} e^{-m(t_1)} \cdot \frac{[m(t_2) - m(t_1)]^{k-\ell}}{(k-\ell)!} e^{-[m(t_2) - m(t_1)]} \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^k \frac{(m(t_1))^\ell [m(t_2) - m(t_1)]^{k-\ell}}{\ell! (k-\ell)!} e^{-m(t_2)} \\
&= e^{-m(t_2)} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\ell=1}^k C_k^\ell (m(t_1))^\ell [m(t_2) - m(t_1)]^{k-\ell} \\
&= e^{-m(t_2)} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left\{ \sum_{\ell=0}^k C_k^\ell (m(t_1))^\ell [m(t_2) - m(t_1)]^{k-\ell} - [m(t_2) - m(t_1)]^k \right\} \\
&= e^{-m(t_2)} \left\{ e^{m(t_2)} - e^{m(t_2) - m(t_1)} - m(t_1) \right\} \\
&= 1 - e^{-m(t_1)} - m(t_1) e^{-m(t_2)}
\end{aligned}$$

$$\therefore f_{W_1, W_2}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_{W_1, W_2}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \lambda(t_1) \lambda(t_2) e^{-m(t_2)}$$

$$\therefore \begin{cases} W_1 = X_1 \\ W_2 = X_1 + X_2 \end{cases}$$

$$\therefore f_{X_2, X_2}(t_1, t_2) = \lambda(t_1) \lambda(t_1 + t_2) e^{-m(t_1 + t_2)} \text{ 不能写为 } g_1(t_1) g_2(t_2) \text{ 形式}$$

$\therefore X_1, X_2$  不独立

$$\begin{aligned}
\text{又有 } f_{X_1}(t_1) &= \lambda(t_1) \int_0^{+\infty} \lambda(t_1 + t_2) e^{-m(t_1 + t_2)} dt_2 \\
&= \lambda(t_1) \left[ e^{-m(t_1)} - e^{-m(+\infty)} \right], \quad t_1 > 0
\end{aligned}$$

下面确定  $e^{-m(\infty)}$ :

$$1 = \int_0^{+\infty} f_{X_1}(t_1) dt_1 = \int_0^{+\infty} \lambda(t_1) \left[ e^{-m(t_1)} - e^{-m(+\infty)} \right] dt_1 = 1 - [m(+\infty) + 1] e^{-m(+\infty)}$$

$$\therefore e^{-m(+\infty)} = 0$$

$$\begin{aligned}\therefore f_{X_1}(t_1) &= \lambda(t_1)e^{-m(t_1)} \quad (t_1 > 0) \\ f_{X_2}(t_2) &= \int_0^{+\infty} \lambda(t_1)\lambda(t_1+t_2)e^{-m(t_1+t_2)} dt_1 \quad (t_2 > 0)\end{aligned}$$

$\therefore X_1, X_2$  不同分布且其概率密度函数如上.

法二：

$$\begin{aligned}P\{X_2 > t | X_1 = s\} &= \lim_{s' \rightarrow s} P\{N(s+t) - N(s) = 0 | N(s') = 0, N(s) - N(s') = 1\} \\ &= P\{N(s+t) - N(s) = 0\} \\ &= e^{m(s)-m(s+t)}\end{aligned}$$

与  $s$  有关, 故  $X_1, X_2$  不独立.

$$\begin{aligned}P\{X_1 > t\} &= P\{N(t) = 0\} = e^{-m(t)} \\ P\{X_2 > t\} &= \int_0^{+\infty} P\{X_2 > t | X_1 = s\} f_{X_1}(s) ds \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-m(s+t)} \lambda(s) ds \\ &= e^{-m(t)} \int_0^{+\infty} e^{m(t)-m(s+t)} \lambda(s) ds \\ &= P\{X_1 > t\} \int_0^{+\infty} e^{m(t)-m(s+t)} \lambda(s) ds \\ &\not\equiv P\{X_1 > t\}\end{aligned}$$

$\therefore X_1, X_2$  不同分布 ( $P\{X_1 > t\}$  和  $P\{X_2 > t\}$  给出  $X_1$  和  $X_2$  的分布).

2.13 考虑对所有  $t$ , 强度函数  $\lambda(t)$  均大于 0 的非齐次 Possion 过程  $\{N(t), t \geq 0\}$ . 令  $m(t) = \int_0^t \lambda(u) du$ ,  $m(t)$  的反函数为  $\ell(t)$ , 记  $N_1(t) \equiv N(\ell(t))$ . 试证  $N_1(t)$  是通常的 Possion 过程, 试求  $N_1(t)$  的强度参数  $\lambda$ .

解：

$$(i) N_1(0) = N(\ell(0)) = N(0) = 0$$

$$(ii) \because m(\ell) \text{ 单增}, \therefore \ell(t) \text{ 单增}$$

$$\therefore \text{对任意 } 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n, \text{ 有 } 0 \leq \ell(t_1) < \ell(t_2) < \dots < \ell(t_n)$$

$$\begin{aligned}
& \therefore \text{有 } N_1(t_2) - N_1(t_1) = N(\ell(t_2)) - N(\ell(t_1)) \\
& N_1(t_3) - N_1(t_2) = N(\ell(t_3)) - N(\ell(t_2)) \\
& \quad \vdots \\
& N_1(t_n) - N_1(t_{n-1}) = N(\ell(t_n)) - N(\ell(t_{n-1}))
\end{aligned}$$

$\because N(t)$  是独立增量过程

$\therefore N_1(t)$  也是独立增量过程

(iii)  $\forall 0 \leq s < t$ , 有

$$\begin{aligned}
P(N_1(t) - N_1(s) = k) &= P\{N(\ell(t)) - N(\ell(s)) = k\} \\
&= \frac{[m(\ell(t)) - m(\ell(s))]^k}{k!} e^{-[m(\ell(t)) - m(\ell(s))]} \\
&= \frac{(t-s)^k}{k!} e^{-(t-s)} \quad k = 0, 1, \dots
\end{aligned}$$

$\therefore N_1(t)$  是强度为 1 的 Possion 过程

2.14 设  $N(t)$  为更新过程, 试判断下述命题的真伪:

- (i)  $\{N(t) < k\} \iff \{W_k > t\};$
- (ii)  $\{N(t) \leq k\} \iff \{W_k \geq t\};$
- (iii)  $\{N(t) > k\} \iff \{W_k < t\};$

其中  $W_k$  为第  $k$  个事件的等待时间.

解:

(i)

$$\begin{aligned}
\{N(t) < k\} &= \overline{\{N(t) \geq k\}} \\
&= \overline{\{W_k \leq t\}} \\
&= \{W_k > t\}
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\{N(t) \leq k\} &= \{N(t) < k+1\} \\ &= \overline{\{N(t) \geq k+1\}} \\ &= \overline{\{W_{k+1} \leq t\}} \\ &= \{W_{k+1} > t\} \\ &\neq \{W_k \geq t\}\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\{N(t) > k\} &= \{N(t) \geq k+1\} \\ &= \{W_{k+1} \leq t\} \\ &\neq \{W_k < t\}\end{aligned}$$

2.(14.5) 设  $X_1(t)$  与  $X_2(t)$  为两个独立的 Possion 过程, 速率分别为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$

(a) 试证  $X_1(t) + X_2(t)$  为速率  $\lambda_1 + \lambda_2$  的 Possion 过程

(b)  $X_1(t) - X_2(t)$  是 Possion 过程吗? 为什么?

(c) 试求在过程  $X_1(t)$  的任意两个相邻事件时间间隔之内, 过程  $X_2(t)$  恰好发生  $k$  个事件的概率  $P_k(k \geq 0)$

解:

(a)

$$\begin{aligned}g_{X_1(t)+X_2(t)}(v) &= g_{X_1(t)}(v) \cdot g_{X_2(t)}(v) \\ &= \exp \left\{ \lambda_1 t(e^v - 1) \right\} \cdot \exp \left\{ \lambda_2 t(e^v - 1) \right\} \\ &= \exp \left\{ (\lambda_1 + \lambda_2)t(e^v - 1) \right\}\end{aligned}$$

$\therefore X_1(t) + X_2(t)$  是强度为  $\lambda_1 + \lambda_2$  的 Possion 过程.

(b)

$$\begin{aligned}g_{X_1(t)-X_2(t)}(v) &= g_{X_1(t)}(v) \cdot g_{X_2(t)}(v) \\ &= \exp \left\{ \lambda_1 t(e^v - 1) \right\} E \left( e^{-v X_2(t)} \right) \\ &= \exp \left\{ \lambda_1 t(e^v - 1) \right\} \cdot \exp \left\{ \lambda_2 t(e^{-v} - 1) \right\}\end{aligned}$$

不能化为 Possion 过程的矩母函数形式,

$\therefore X_1(t) - X_2(t)$  不是 Possion 过程.

(c)  $X_1(t)$  的相邻两个事件时间间隔  $\tau$  服从参数为  $\lambda_1$  的指数分布, 其概率密度函数为  
 $f(\tau) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau}$

$$\begin{aligned}\therefore P_k &= \int_0^{+\infty} f(\tau) P\left\{X_2(t+\tau) - X_2(t) = k\right\} d\tau \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \cdot \frac{(\lambda_2 \tau)^k}{k!} e^{-\lambda_2 \tau} d\tau \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2^k}{(\lambda_1 + \lambda_2)^{k+1} k!} \cdot \int_0^{+\infty} ((\lambda_1 + \lambda_2) \tau)^k e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \tau} d(\lambda_1 + \lambda_2) \tau \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k\end{aligned}$$

### 3.1 对 Markov 链 $X_n, n \geq 0$ , 试证条件

$$P\{X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$$

等价于对所有时刻  $n, m$  及所有状态  $i_0, \dots, i_n, j_1, \dots, j_m$  有

$$\begin{aligned} & P\{X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+m} = j_m | X_0 = i_0, \dots, X_n = i\} \\ &= P\{X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+m} = j_m | X_n = i_n\}. \end{aligned}$$

证 :  $\Leftarrow$  只需令  $m = 1$

$\Rightarrow$  由  $P_{27}(3.4)$  可知

$$\begin{aligned} & P\{X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+m} = j_m | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} \\ &= P\{X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+m} = j_m, X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} / P\{X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} \\ &= P\{X_0 = i_0\} \cdot P_{j_1 j_2} \cdots P_{j_{m-1} j_m} P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-1} i_n} / [P\{X_0 = i_0\} \cdot P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-1} i_n} \\ &= P\{X_n = i\} \cdot P_{j_1 j_2} \cdots P_{j_{m-1} j_m} P_{i_n i_1} / P\{X_n = i\} \\ &= P\{X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+m} = j_m | X_n = i\} \end{aligned}$$

### 3.2 考虑状态 $0, 1, 2$ 上的一个 Markov 链 $X_n, n \geq 0$ , 它有转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix},$$

初始分布为  $p_0 = 0.3, p_1 = 0.4, p_2 = 0.3$ , 试求概率  $P\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2\}$ .

解 :

$$P\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2\} = p_0 P_{01} P_{12} = 0.3 \times 0.1 \times 0 = 0$$

3.3 信号传送问题. 信号只有 0, 1 两种, 分为多个阶段传输. 在每一步上出错的概率为  $\alpha$ .  $X_0 = 0$  是送出的信号, 而  $X_n$  是在第  $n$  步接收到的信号. 假定  $X_n$  为一 Markov 链, 它有转移概率矩阵  $P_{00} = P_{11} = 1 - \alpha, P_{01} = P_{10} = \alpha, 0 < \alpha < 1$ . 试求

- (a) 两步均不出错的概率  $P\{X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0\}$ ;
- (b) 两步传送后收到正确信号的概率;
- (c) 五步之后传送无误的概率  $P\{X_5 = 0 | X_0 = 0\}$ .

解 : (a)  $P\{X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0\} = p_0 P_{00} P_{00} = 1 \cdot (1 - \alpha) \cdot (1 - \alpha) = (1 - \alpha)^2$ ;

(b)  $P = p_0 P_{00} P_{00} + p_0 P_{01} P_{10} = (1 - \alpha)^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 - 2\alpha + 1$

$$\begin{aligned}
 \text{(c) 转移概率矩阵 } P &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\
 \therefore P^{(5)} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-2\alpha)^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1+(1-2\alpha)^5}{2} & \frac{1-(1-2\alpha)^5}{2} \\ \frac{1-(1-2\alpha)^5}{2} & \frac{1+(1-2\alpha)^5}{2} \end{pmatrix} \\
 \therefore P\{X_5 = 0 | X_0 = 0\} &= p_0 \cdot \frac{1+(1-2\alpha)^5}{2} = \frac{1+(1-2\alpha)^5}{2}
 \end{aligned}$$

3.4  $A, B$  两罐总共装各  $N$  个球. 作如下实验: 在时刻  $n$  先  $n$  个球中等概率地任取一球. 然后从  $A, B$  两罐中任选一个, 选中  $A$  的概率为  $p$ , 选中  $B$  的概率为  $q$ . 之后再将选出的球放入选好的罐中. 设  $X_n$  为每次试验时  $A$  罐中的球数. 试求此 Markov 过程的转移概率矩阵.

解:

$$P_{ij} = \begin{cases} p \cdot \frac{i}{N} + q \cdot \frac{N-i}{N}, & j = i \\ q \cdot \frac{i}{N}, & j = i-1 (i = 1, 2, \dots, N) \\ p \cdot \frac{N-i}{N}, & j = i+1 (i = 0, 1, \dots, N-1) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其转移概率矩阵为

$$P = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} qN & pN & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & q(N-1)+p & p(N-1) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2q & q(N-2)+2p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2q+p(N-2) & 2p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q(N-1) & q+p(N-1) & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & qN & pN \end{pmatrix}$$

3.5 重复掷币一直到连续出现两次正面为止. 假定钱币是均匀的, 试引入以连续出现次数为状态空间的 Markov 链, 并求出平均需要掷多少次试验才可以结束.

解: 记  $X_n$  为第  $n$  次掷币后连续出现的正面次数, 则  $\{X_n, n \geq 0\}$  为一 M.C.

0    1    2

$$\text{其转移概率矩阵为 } P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore E(T|X_0=0)$$

$$= \sum_{k=0}^2 E(T|X_0=0, X_1=k) \cdot P(X_1=k|X_0=0)$$

$$= \sum_{k=0}^2 E(T|X_1=k) \cdot P(X_1=k|X_0=0)$$

$$= (1+v) \cdot \frac{1}{2} + E(T|X_1=1) \cdot \frac{1}{2}$$

及  $E(T|X_1=1)$

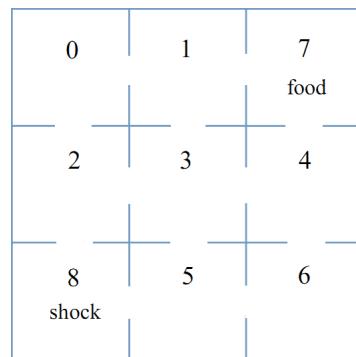
$$= \sum_{k=0}^2 E(T|X_1=1, X_2=k) \cdot P(X_2=k|X_1=1)$$

$$= \sum_{k=0}^2 E(T|X_2=k) \cdot P(X_2=k|X_1=1)$$

$$= (2+v) \cdot \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} \times 2$$

解得  $E(T|X_0=0) = 6$ , 平均需掷 6 次.

3.6 迷宫问题. 将小家鼠放入迷宫内作动物的学习试验, 如下图所示. 在迷宫的第 7 号小格内放有美味食物而第 8 号小格内则是电击捕鼠装置. 假定当家鼠位于某格时有  $k$  个出口可以离去, 则它总是随机地选择一个, 概率为  $1/k$ . 并假定每一次家鼠只能跑到相邻的小格去. 令过程  $X_n$  为家鼠在时刻  $n$  时所在小格的号码, 试写出这一 Markov 过程的转移概率阵, 并求出家鼠在遭到电击前能找到食物的概率.



解：

$$P = \begin{pmatrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 3 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

设  $u_k$  为家鼠从  $k$  出发在遭到电击前能找到食物的概率，显然  $u_7 = 1, u_8 = 0$ ，

设  $T$  为进入吸收态时刻，则当  $0 \leq k \leq 6$  时，

$$\begin{aligned} u_k &= P\{X_T = 7 | X_0 = k\} \\ &= \sum_{i=0}^8 P\{X_T = 7, X_1 = i | X_0 = k\} \\ &= \sum_{i=0}^8 P\{X_T = 7, X_1 = i\} P\{X_1 = i | X_0 = k\} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \\ u_1 = \frac{1}{3}(u_0 + u_3 + u_7) \\ u_2 = \frac{1}{3}(u_0 + u_3 + u_8) \\ u_3 = \frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_4 + u_5) \\ u_4 = \frac{1}{3}(u_3 + u_6 + u_7) \\ u_5 = \frac{1}{3}(u_3 + u_6 + u_8) \\ u_6 = \frac{1}{2}(u_4 + u_5) \\ u_7 = 1 \\ u_8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_1 = \frac{2}{3} \\ u_2 = \frac{1}{3} \\ u_3 = \frac{1}{2} \\ u_4 = \frac{2}{3} \\ u_5 = \frac{1}{3} \\ u_6 = \frac{1}{2} \\ u_7 = 1 \\ u_8 = 0 \end{cases}$$

3.7 记  $Z_i, i = 1, 2, \dots$  为一串独立同分布的离散随机变量。 $P\{Z_1 = k\} = p_k \geq 0, k =$

$0, 1, 2, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} = 1$ . 记  $X_n = Z_n, n = 1, 2, \dots$ . 试求过程  $X_n$  的转移概率矩阵.

$$\text{解: } P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\} = P\{X_{n+1} = i_{n+1}\}$$

$$P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\} = P\{X_{n+1} = i_{n+1}\}$$

$$\therefore P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\} = P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\}$$

$\therefore \{X_n\}$  是一 M.C. 其转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

3.8 对第 7 题中的  $Z_i$ , 令  $X_n = \max\{Z_1, \dots, Z_n\}, n = 1, 2, \dots$ , 并约定  $X_0 = 0$ .  $X_n$  是否为 Markov 链? 如果是, 其转移概率阵是什么?

解:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \max\{Z_1, \dots, Z_n, Z_{n+1}\} \\ &= \max\{\max\{Z_1, \dots, Z_n\}, Z_{n+1}\} \\ &= \max\{X_n, Z_{n+1}\} \end{aligned}$$

$\therefore \{X_n\}$  是 M.C.

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & , j < i \\ p_j & , j > i \\ \sum_{k=0}^i p_k & , j = i \\ 0 & , \text{其他} \end{cases}$$

其转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & p_0 + p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 + p_1 + p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

3.9 设  $f_{ij}^{(n)}$  表示从  $i$  出发在  $n$  步转移时首次到达  $j$  的概率, 试证明

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^n f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}.$$

证：设  $T_j = \min\{n : n \geq 0 \text{ 且 } X_n = j\}$

$$\begin{aligned}
\therefore P_{ij}^{(n)} &= P\{X_n = j | X_0 = i\} \\
&= \sum_{k=0}^n P\{X_n = j, T_j = k | X_0 = i\} \\
&= \sum_{k=0}^n P\{T_j = k | X_0 = i\} P_{jj}^{(n-k)} \\
&= \sum_{k=0}^n P\{X_k = j, X_s \neq j (s = 0, 1, \dots, k-1) | X_0 = i\} P_{jj}^{(n-k)} \\
&= \sum_{k=0}^n f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}
\end{aligned}$$

3.10 对第 7 题中的  $Z_i$ , 若定义  $X_n = \sum_{i=1}^n Z_i, n = 1, 2, \dots, X_0 = 0$ , 试证  $X_n$  为 Markov 链. 并求其转移概率矩阵.

证：对  $n \geq 0$  有

$$\begin{aligned}
&P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} \quad (i_0 = 0) \\
&= P\{Z_{n+1} = i_{n+1} - i_n | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} \\
&= P\{Z_{n+1} = i_{n+1} - i_n\} \\
&= \begin{cases} P_{i_{n+1}-i_n}, & i_{n+1} - i_n = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{ow} \end{cases} \\
&P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\} \\
&= P\{X_n + Z_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\} \\
&= P\{Z_{n+1} = i_{n+1} - i_n\}
\end{aligned}$$

$\therefore X_n$  是 M.C.

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

### 3.11 — Markov 链有状态 0,1,2,3 和转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

试求  $f_{00}^{(n)}, n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ , 其中  $f_{00}^{(n)}$  由

$$P\{X_n = i, X_k \neq i, k = 1, \dots, n-1 | X_0 = i\}$$

定义.

$$\text{解: } f_{00}^{(1)} = P_{00} = 0, f_{00}^{(2)} = \left(\frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2}\right) \left(0 \ 0 \ \frac{1}{2}\right)^T = \frac{1}{4}$$

对  $n \geq 2$  有

$$f_{00}^{(n)} = \left(\frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

当  $n = 3$  时,  $f_{00}^{(3)} = \frac{1}{8}$

当  $n \geq 4$  时,

$$f_{00}^{(n)} = \left(\frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2^{n-2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+2}}$$

3.12 在成敗型的重复试验中, 每次试验结果为成功 (S) 或失败 (F). 同一结果相继出现称为一个游程 (run), 比如一结果 FSSFFF SF 中共有两个成功游程, 三个失败游程. 设成功概率为  $p$ , 失败概率为  $q = 1 - p$ . 记  $X_n$  为第  $n$  次试验后成功游程的长度 (若第  $n$  次试验, 则  $X_n = 0$ ). 试证  $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$  为一 Markov 链, 并确定其转移概率阵. 记  $T$  为返回状态 0 的时间, 试求  $T$  的分布及均值. 并由此对这一 Markov 链的状态进行分类.

$$\text{证: } X_{n+1} = \begin{cases} X_{n+1} & , \text{第 } n+1 \text{ 次试验成功} \\ 0 & , \text{第 } n+1 \text{ 次试验失败} \end{cases}$$

$\therefore \{X_n\}$  是 M.C.

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} p & , j = i + 1 \\ q & , j = 0 \end{cases}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 0 & q & p & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 2 & q & 0 & 0 & p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$T = \min\{n : X_n = 0, X_s \neq 0 (s = 1, 2, \dots, n-1)\}$$

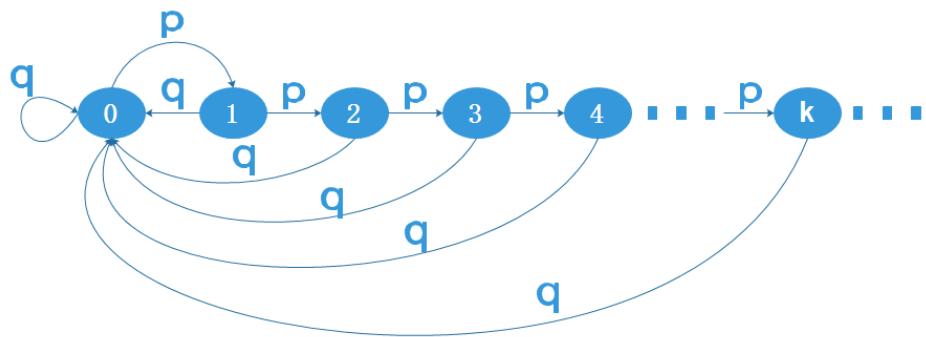
$$P(T = k) = p^{k-1}q \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\text{ET} = \sum_{k=1}^{+\infty} p^{k-1} q k$$

$$\therefore p\text{ET} = \sum_{k=1}^{+\infty} p^k q k$$

$$\therefore (1-p)\text{ET} = q\text{ET} = q + pq + p^2q + \cdots = \frac{q}{1-p} = 1$$

$$\therefore \text{ET} = \frac{1}{q}$$



所有状态互通, 为一类

### 3.13 试证各方向游动的概率相等的对称随机游动在二维时是常返的

证 : 为使  $n$  步游动后回到原位置, 向左移动的步数应等于向右移动的步数, 向上移动的步数应等于向下移动的步数,  $\therefore P_{00}^{(2k+1)} = 0, k = 0, 1, 2, \dots$

再考虑  $2k$  步的情况,

$$\begin{aligned}
P_{00}^{(2k)} &= \sum_{k_1=0}^k C_{2k-2k_1}^{k-k_1} C_{2k_1}^{k_1} C_{2k}^{2k_1} \left(\frac{1}{4}\right)^{2k} \\
&= \sum_{k_1=0}^k \frac{(2k)!}{(k!)^2} \left(C_k^{k_1}\right)^2 \left(\frac{1}{2^{2k}}\right)^2 \\
&= \frac{(2k)!}{(k!)^2} \left(\frac{1}{2^{2k}}\right)^2 \sum_{k_1=0}^k C_k^{k_1} C_k^{k-k_1} \\
&= \frac{(2k)!}{(k!)^2} \left(\frac{1}{2^{2k}}\right)^2 C_{2k}^k \\
&= \left(\frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2k}}\right)^2
\end{aligned}$$

当  $n$  充分大时, 由 Stirling 公式

$$P_{00}^{(2k)} \sim \left( \frac{(2k)^{2k+\frac{1}{2}} e^{-2k} \sqrt{2\pi}}{(k^{k+\frac{1}{2}} e^{-k} \sqrt{2\pi})^2} \cdot \frac{1}{2^{2k}} \right)^2 = \frac{1}{\pi k}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{+\infty} P_{ii}^{(n)} = +\infty \text{ (i 代表任一格点)}$$

$\therefore$  二维对称随机游动是常返的

3.14 某厂对该厂生产的同类产品的三种型号调查顾客的消费习惯. 并把它们归结为 Markov 链模型. 记顾客消费习惯在  $A, B, C$  三种型号间的转移概率矩阵分别为下列四种. 请依这些转移阵所提供的信息对厂家提出关于  $A, B$  两种型号的咨询意见.

$$\begin{array}{ll}
(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & (2) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \\
(3) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & (4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

解 :

(1) 不是概率转移矩阵, 第三行行和不为 1.

(2)

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\therefore A, B, C$  三状态互通, 所有状态可遍历.

设  $(\pi_A, \pi_B, \pi_C)$  为经过长时间后三个产品的市场占有额, 则

$$\left\{ \begin{array}{l} (\pi_A, \pi_B, \pi_C) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = (\pi_A, \pi_B, \pi_C) \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \pi_A = \pi_B = \pi_C = 1$$

$\therefore$  三个品牌竞争力差不多, 可以都生产.

(3) 由归纳法可知

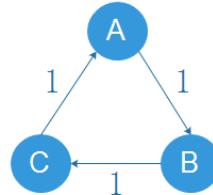
$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n}) & \frac{1}{3^n} & \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n}) \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

可见

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_B = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0, \\ (\pi_A, \pi_C) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\pi_A, \pi_C) \\ \pi_A + \pi_C = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \pi_A = \pi_C = \frac{1}{2}$$

$\therefore B$  将逐渐淡出市场, 建议停止生产  $B$ , 扩大对  $A$  的生产.

(4)



$\therefore A, B, C$  三状态互通, 所有状态可遍历.

$$\left\{ \begin{array}{l} (\pi_A, \pi_B, \pi_C) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_A, \pi_B, \pi_C) \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \pi_A = \pi_B = \pi_C = \frac{1}{3}$$

$\therefore A, B, C$  市场占有率相同, 可维持现状.

3.15 考虑一有限状态的 Markov 链. 试证明

- (a) 至少有一个状态是常返的,
- (b) 任何常返状态必定是正常返的.

证 : (a) 反设所有状态均为瞬过或零常返 (加强结论), 则对  $\forall i \in S$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ii}^{(n)} = 0 \quad (*)$$

考虑  $P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}$ , 则有

$$\sum_{k=1}^{\ell} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} \leq P_{ij}^{(n)} \leq \sum_{k=1}^{\ell} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=\ell}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} \quad (**)$$

固定  $\ell$ , 令  $n \rightarrow +\infty$ , 则由 (\*) 得

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}^{(n)} \leq 0 + \sum_{k=\ell}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} \quad (***)$$

在 (\*\*\* ) 中令  $\ell \rightarrow +\infty$ , 由于  $\sum_{k=1}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} \leq 1$  收敛

$$\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}^{(n)} = 0 \quad (*4)$$

若此有限状态 M.C. 有  $N$  个状态, 则

$$\sum_{j=1}^N P_{ij}^{(n)} = 1 \quad (*5)$$

(\*5) 中令  $n \rightarrow +\infty$ , 由 (\*4) 得  $0 = 1$ , 矛盾

$\therefore$  至少有一个状态是 (正) 常返的

(b) 若存在零常返状态  $i$ , 可构造  $C(i) = \{j | i \leftrightarrow j\}$ , 则  $C(i)$  为原 M.C. 的一不可约子 M.C.(有限状态), 于是  $C(i)$  中所有状态均为零常返, 与有限状态 M.C. 至少有一个正常返状态矛盾,  $\therefore$  任何常返状态均为正常返

3.16 考虑一生长与灾害模型. 这类 Markov 链有状态  $0, 1, 2, \dots$ , 当过程处于状态  $i$  时它既可能以概率  $p_i$  转移到  $i+1$ (生长) 也能以概率  $q_i = 1 - p_i$  落回到状态 0(灾害). 而从状态 “0” 又必然 “无中” 生有. 即  $P_{01} \equiv 1$ .

(a) 试证所有状态为常返的条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p_1 p_2 p_3 \cdots p_n) = 0.$$

(b) 若此链为常返, 试求其为零常返的条件.

证:

(a) 其概率转移阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & q_1 & 0 & p_1 & 0 \\ 2 & q_2 & 0 & 0 & p_2 \\ 3 & q_3 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

易知此 M.C. 是不可约的,  $\therefore$  只需证状态 0 常返  $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} p_1 p_2 \cdots p_n = 0$

显然  $f_{00}^{(0)} = f_{00}^{(1)} = 0, f_{00}^{(2)} = q_1$

$$f_{00}^{(n)} = (1 \ 0 \ 0 \ \cdots) \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= AB^{n-2}C^T, \quad (n \geq 3)$$

易知

$$B^{n-2} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_1 \cdots p_{n-2} & 0 & \cdots \\ \underbrace{\quad}_{n-2 \text{ 个}} & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & p_2 \cdots p_{n-2} & \cdots \\ \underbrace{\quad}_{n-2 \text{ 个}} & & & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\therefore f_{00}^{(n)} = (\underbrace{0 \cdots 0}_{n-2 \text{ 个}} \ p_1 \cdots p_{n-2} \ 0 \ 0 \ \cdots)(q_1 \ q_2 \ \cdots)^T = p_1 \cdots p_{n-2} q_{n-1}$$

$$\therefore f_{00} = q_1 + \sum_{n=3}^{+\infty} p_1 \cdots p_{n-2} q_{n-1}$$

$$= 1 - p_1 + \sum_{n=3}^{+\infty} (p_1 \cdots p_{n-2} - p_1 \cdots p_{n-2} p_{n-1})$$

$$= 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} p_1 p_2 \cdots p_n$$

而状态 0 常返  $\Leftrightarrow f_{00} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} p_1 p_2 \cdots p_n = 0$ .

(b) 只需考虑状态 0,

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} n f_{00}^{(n)} \\ &= 2(1-p_1) + \sum_{n=3}^{+\infty} n(p_1 \cdots p_{n-2} - p_1 \cdots p_{n-1}) \\ &= 2 + p_1 + p_1 p_2 + p_1 p_2 p_3 + \cdots\end{aligned}$$

若为零常返, 则  $\mu_0 = +\infty \Leftrightarrow$  级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} p_1 \cdots p_n$  发散 (且通项趋于 0)

3.17 试计算转移概率阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

的极限分布.

解: 设  $\pi$  为该 M.C. 的平稳分布,  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$

$$\begin{cases} \pi \geq 0 \\ \sum_{i=0}^2 \pi_i = 1 \Rightarrow \pi = \left(\frac{5}{14}, \frac{6}{14}, \frac{3}{14}\right) \\ \pi P = \pi \end{cases}$$

易知该 M.C. 不可约且遍历

$$\therefore \text{极限分布为 } \begin{pmatrix} \frac{5}{14} & \frac{6}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{6}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{6}{14} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$$

3.18 假定在逐日的天气变化模型中, 每天的阴晴与前两天的状况关系很大. 于是可考虑 4 状态的 Markov 链: 接连两晴天, 一晴一阴, 一阴一晴, 以及接连两阴天, 分别记为  $(S, S), (S, C), (C, S), (C, C)$ . 该链的转移概率阵为

$$P = \begin{pmatrix} (S, S) & (S, C) & (C, S) & (C, C) \\ (S, S) & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ (S, C) & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ (C, S) & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ (C, C) & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

试求这一 Markov 链的平稳分布. 并求出长期平均的晴朗天数.

解: 设其平稳分布为  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$

$$\begin{cases} \pi \geq 0 \\ \sum_{i=0}^3 \pi_i = 1 \Rightarrow \pi = \left( \frac{3}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{6}{11} \right) \\ \pi P = \pi \end{cases}$$

$\pi$  反映了 M.C. 中各状态在长期中所占的平均比例

$$\therefore \text{一年中晴朗的天数} = \frac{365}{2} \times \left( \frac{3}{11} \times 2 + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} \right) = 132.7(\text{天})$$

3.19 某人有  $M$  把伞并在办公室和家之间往返. 如某天他在家时 (办公室时) 下雨了而且家中 (办公室) 有伞他就带一把伞去上班 (回家), 不下雨时他从不带伞. 如果每天与以往独立地早上 (或晚上) 下雨的概率为  $p$ , 试定义一  $M+1$  状态的 Markov 链以研究他被雨淋湿的机会.

解 :

定义  $X_n$ : 第  $n$  天早晨家中雨伞数,  $\therefore \{X_n, n \geq 0\}$  为一 M.C.

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & & & \\ p(1-p) & (1-p)^2+p^2 & p(1-p) & & & \\ 0 & p(1-p) & (1-p)^2+p^2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & p(1-p) & (1-p)^2+p^2 \\ & & & & 0 & p(1-p) \end{pmatrix}$$

设  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_M)$  为其平稳分布

$$\begin{cases} \pi \geq 0 \\ \sum_{i=0}^M \pi_i = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{1-p}{M+1-p} \\ \pi P = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = \frac{1-p}{M+1-p} \\ \pi_i = \frac{1}{M+1-p} (i = 1, 2, \dots, M) \end{cases}$$

易知此 M.C. 遍历,

$\therefore \pi$  又是其极限分布, 其被雨淋湿的概率为

$$P_{\text{淋}} = p\pi_0 + p(1-p)\pi_M = 2p \frac{1-p}{M+1-p}$$

3.(19.5) 袋中有  $N$  个球, 为白色或黑色, 每次从袋中随机取一球然后放回一个不同颜色的球, 若袋中有  $k$  个白球, 则称系统为状态  $k$ . 试用 M.C. 描述此模型, 且

- (1) 求  $P$ , 作状态分类.
- (2) 问该 M.C. 是否存在平稳分布, 有则求出.
- (3) 问极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}^{(n)}$  是否存在? 为什么?

解：

(1) 转移概率

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{N-i}{N}, & j = i+1 \\ \frac{i}{N}, & j = i-1 \\ 0, & \text{ow} \end{cases}$$

转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & N \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ 1 & \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & 0 & & \\ 2 & 0 & \frac{2}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} & & \\ 3 & 0 & 0 & \frac{3}{N} & 0 & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \frac{1}{N} \\ N & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

显然任两状态可互达，所以不可约。

(2) 设有平稳分布  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N)$

$$\begin{cases} \pi \geq 0 \\ \sum_{i=0}^N \pi_i = 1 \Rightarrow \pi_i = \frac{C_i}{2^N} \quad (i = 0, 1, \dots, N) \\ \pi P = \pi \end{cases}$$

(3). M.C. 为有限状态的不可约链，故所有状态均为正常返。

$\therefore \mu_j < +\infty$  ( $\forall j \in S$ )，易知其周期为  $d = 2$ 。

引入

$$f_{ij}(r) = \sum_{m=0}^{+\infty} f_{ij}^{(md+r)} \quad (0 \leq r \leq d-1),$$

表示从状态  $i$  出发，在时刻  $n \equiv r \pmod{d}$  首次到达状态  $j$  的概率。

断言：若  $j$  为正常返状态且周期为  $d$ ，则对  $\forall i$  及  $0 \leq r \leq d-1$ ，有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}^{(nd+r)} = f_{ij}(r) \frac{d}{\mu_j}.$$

则当  $i - j$  为偶数时, 易知在此 M.C. 中

$$f_{ij}(1) = 0, \quad f_{ij}(0) > 0,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}^{(2n)} = f_{ij}(0) \frac{2}{\mu_j} > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}^{(2n+1)} = f_{ij}(1) \frac{2}{\mu_j} = 0$$

即当  $i - j$  为偶数时  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}^{(n)}$  不存在.

当  $i - j$  为奇数时,

$$f_{ij}(1) = 0, \quad f_{ij}(0) > 0,$$

同理知不存在,  $\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}^{(n)}$  不存在.

断言的证明:

$\because$  当  $n \neq kd$  时,  $P_{jj}^{(n)} = 0$

$$\therefore P_{ij}^{(nd+r)} = \sum_{k=0}^{nd+r} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(nd+r-k)} = \sum_{m=0}^n f_{ij}^{(nd+r)} P_{jj}^{(n-m)d}$$

$\therefore$  对  $1 \leq N < n$ , 有

$$\sum_{m=0}^N f_{ij}^{(md+r)} P_j^{(n-m)d} j \leq P_{ij}^{(nd+r)} \leq \sum_{m=0}^N f_{ij}^{(md+r)} P_j^{(n-m)d} j + \sum_{m=N+1}^{+\infty} f_{ij}^{(md+r)}$$

先令  $n \rightarrow +\infty$  再令  $N \rightarrow +\infty$ , 由 M.C. 基本极限定理得 (注意到  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_{ii}^{(N)}$  收敛)

$$f_{ij}(r) \frac{d}{\mu_j} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}^{(nd+r)} \leq f_{ij}(r) \frac{d}{\mu_j}$$

3.23 一连续时间 Markov 链有 0 和 1 两个状态, 在状态 0 和 1 的逗留时间服从参数为  $\lambda > 0$  及  $\mu > 0$  的指数分布. 试求在时刻 0 从状态 0 起始,  $t$  时刻后过程处于状态 0 的概率  $P_{00}(t)$

解:

$$\begin{aligned} P_{00}(t+h) &= \sum_{k \geq 0} P_{0k}(t) P_{k0}(h) \\ &= P_{00}(t) P_{00}(h) + P_{01}(t) P_{10}(h) \\ &= P_{00}(1 - \lambda h + o(h)) + (1 - P_{00}(t))(\mu h + o(h)) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{P_{00}(t+h) - P_{00}(t)}{h} = -(\lambda + \mu) P_{00}(t) + \mu + \frac{o(h)}{h}$$

令  $h \rightarrow 0$ , 则  $P'_{00}(t) = -(\lambda + \mu)P_{00}(t) + \mu$

而  $P_{00}(0) = 1$ , 解微分方程得

$$P_{00}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

3.24 在第 23 题中如果  $\lambda = \mu$ . 定义  $N(t)$  为过程在  $[0, t]$  中改变的次数, 试求  $N(t)$  的概率分布.

解: 设  $f(t)$  为状态 0(或 1) 逗留时间的概率密度函数,  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

记  $P_k(t) = P(N(t) = k | N(0) = 0), k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} P_0(t) &= P(\text{在状态 0(或 1) 逗留时间 } t_s > t) \\ &= 1 - P(t_s \leq t) \\ &= 1 - \int_0^t \lambda e^{\lambda t_s} dt_s \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

猜想  $P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

设到  $k-1$  为止猜想成立, 则

$$\begin{aligned} P_k(t) &= \int_0^t f(t_s) P_{k-1}(t - t_s) dt_s \\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda t_s} \frac{(\lambda(t - t_s))^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda(t-t_s)} dt_s \\ &= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \int_0^t (t - t_s)^{k-1} dt_s \\ &= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

综上, 当  $\lambda = \mu$  时  $N(t)$  服从参数为  $\lambda t$  的 Possion 分布

以下如果没有指明变量  $t$  的取值范围, 一般视为  $t \in R$ , 平稳过程是指宽平稳过程.

4.1 设  $X(t) = \sin Ut$ , 这里  $U$  为  $(0, 2\pi)$  上的均匀分布.

(a) 若  $t = 1, 2, \dots$ , 证明  $\{X(t), t = 1, 2, \dots\}$  是宽平稳但不是严平稳过程,

(b) 设  $t \in [0, +\infty)$ , 证明  $\{X(t), t \geq 0\}$  既不是严平稳也不是宽平稳过程.

证 : (a)

$$\begin{aligned} E(X(t)) &= E \sin Ut \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sin Ut dU \\ &= 0 \quad (t = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X(t), X(s)) &= E(\sin Ut \cdot \sin Us) \\ &= \frac{1}{2} E(\cos(t-s)U - \cos(t+s)U) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{t-s} \sin(t-s)U \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{t+s} \sin(t+s)U \Big|_0^{2\pi} \right\} \\ &= 0 \quad (t \neq s) \end{aligned}$$

当  $t = s$  时  $\text{Cov}(X(t), X(s)) = E \sin^2 Ut = \frac{1}{2}$

$\therefore$  是宽平稳

考虑  $F_t(x) = P(\sin Ut \leq x)$ , 显然  $F_{t+h} = P(\sin U(t+h) \leq x)$  与其不一定相同

$\therefore$  不是严平稳

(b)

$$\begin{aligned} EX(t) &= \frac{1}{2\pi t} (1 - \cos 2\pi t) \\ DX(t) &= E \left( \sin Ut - \frac{1}{2\pi t} (1 - \cos 2\pi t) \right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sin 4\pi t}{8\pi t} - \left( \frac{1 - \cos 2\pi t}{2\pi t} \right)^2 \end{aligned}$$

都与  $t$  相关

$\therefore$  不是宽平稳

若其严平稳, 则因二阶矩存在, 应为宽平稳, 矛盾.

$\therefore$  不是严平稳.

4.2 设  $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  是平稳序列, 定义  $\{X_n^{(i)}, n = 1, 2, \dots\}, i = 1, 2, \dots$ , 为

$$X_n^{(1)} = X_n - X_{n-1},$$

$$X_n^{(2)} = X_n^{(1)} - X_{n-1}^{(1)}, \dots \dots$$

证明这些序列仍是平稳序列.

证 :

1°  $\ell = 0$  时

$E X_n$  依定义为常数  $C_0$

$\text{Cov}(X_n, X_m)$  依定义为  $n - m$  的函数  $f_0(n - m)$

成立

2° 设当  $\ell \leq k$  时成立, 则当  $\ell = k + 1$  时

$$\begin{aligned} E X_n^{(\ell)} &= E(X_n^{(k)} - X_{n-1}^{(k)}) = C_k - C_k = 0 \\ \text{Cov}(X^{(k+1)}, X_m^{(k+1)}) &= E(X_n^{(k+1)} X_m^{(k+1)}) \\ &= E[(X_n^{(k)} - X_{n-1}^{(k)})(X_m^{(k)} - X_{m-1}^{(k)})] \\ &= E(X_n^{(k)} X_m^{(k)}) - E(X_{n-1}^{(k)} X_m^{(k)}) - E(X_n^{(k)} X_{m-1}^{(k)}) + E(X_{n-1}^{(k)} X_{m-1}^{(k)}) \\ &= f_k(n - m) - f_k(n - 1 - m) - f_k(n - m + 1) + f_k(n - m) \\ &= f_\ell(n - m) \end{aligned}$$

只与  $n - m$  有关

$\therefore$  是平稳的

4.3 设  $X_n = \sum_{k=1}^N \sigma_k \sqrt{2} \cos(a_k n - U_k)$ , 这里  $\sigma_k$  和  $a_k$  为正常数,  $k = 1, \dots, N; U_1, \dots, U_n$  是  $(0, 2\pi)$  上独立均匀分布随机变量, 证明  $\{X_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$  是平稳过程.

证 :  $E X_n = \sum_{k=1}^N \sigma_k \sqrt{2} (\cos a_k n E \cos U_k + \sin a_k n E \sin U_k) = 0$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_n, X_m) &= E(X_n, X_m) \\ &= E \left[ \sum_{k=1}^N \sigma_k \sqrt{2} \cos a_k n - U_k \sum_{j=1}^N \sigma_j \sqrt{2} \cos(a_j m - U_j) \right] \\ &= \sum_{k=1}^N 2\sigma_k^2 E[\cos(a_k n - U_k) \cos(a_k m - U_k)] \\ &= \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 E[\cos a_k(n - m) + \cos(a_k n + a_k m - 2U_k)] \\ &= \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 \cos a_k(n - m) \end{aligned}$$

只与  $n - m$  有关

$\therefore$  宽平稳.

4.4 设  $A_k, k = 1, 2, \dots, n$  是  $n$  个实随机变量;  $\omega_k, k = 1, 2, \dots, n$ , 是  $n$  个实数. 试问  $A_k$  以及  $A_k$  之间应满足怎样的条件才能使

$$Z(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{j\omega_k t}$$

是一个复的平稳过程.

解 : 要求

$$\text{E}Z(t) = \sum_{k=1}^n \text{E}A_k e^{j\omega_k t} = \text{const}$$

$$\therefore \text{E}A_k = 0$$

要求

$$\text{Cov}(Z(t), Z(s)) = \text{E}(Z(t)Z(s)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \text{E}(A_k A_\ell) \cdot e^{j\omega_k t - j\omega_\ell s}$$

只与  $t - s$  有关

$$\therefore \text{E}(A_k A_\ell) = 0 \quad (k \neq \ell \text{ 且 } \omega_k \neq \omega_\ell)$$

4.6 设  $\{X(t)\}$  是一个平稳过程, 对每个  $t \in \mathbf{R}$ ,  $X'(t)$  存在. 证明对每个给定的  $t$ ,  $X(t)$  与  $X'(t)$  不相关, 其中  $X'(t) = \frac{dX(t)}{dt}$ .

证明 : 以下假定求导数和求期望可交换

$$\text{设 } \text{E}(X(t)) = m, D(X(t)) = \sigma^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{E}(X(t + \Delta t)) &= m \\ \therefore X'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} \\ \therefore \text{E}(X'(t)) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{Cov}(X(t), X'(t)) &= \text{E}(X(t)X'(t)) \\ &= \frac{1}{2} \text{E}\left[(X^2(t))'\right] \\ &= \frac{1}{2} (EX^2(t))' \\ &= \frac{1}{2} (\sigma^2 + m^2)' \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore$  不相关

4.7 设  $\{X(t)\}$  是高斯过程, 均值为 0, 协方差函数  $R(\tau) = 4 \exp -2|\tau|$ . 令

$$Z(t) = X(t+1), W(t) = X(t-1),$$

- (i) 求  $E(Z(t)W(t))$  和  $E(Z(t)+W(t))^2$ ;
- (ii) 求  $Z(t)$  的密度函数  $f_Z(z)$  及  $P(Z(t) < 1)$ ;
- (iii) 求  $Z(t), W(t)$  的联合密度  $f_{Z,W}(z,w)$ .

解：

(i)

$$\begin{aligned} E(Z(t)W(t)) &= E(X(t+1)X(t-1)) \\ &= R(2) \\ &= 4e^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Z(t)W(t))^2 &= E(X^2(t+1) + 2X(t+1)X(t-1) + X^2(t-1)) \\ &= 2EX^2(t) + 2R(2) \\ &= 2[DX(t) - E^2X(t)] + 4e^{-4} \\ &= 2R(0) + 4e^{-4} \\ &= 4(1 + e^{-4}) \end{aligned}$$

(ii)  $Z(t) = X(t+1) \sim N(0, 2^2)$

$$\therefore f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2^2}} e^{-\frac{z^2}{2 \cdot 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{z^2}{8}}$$

$$\therefore P(Z(t) < 1) = \int_{-\infty}^1 f_Z(z) dz = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \int_{-\infty}^1 e^{-\frac{z^2}{8}} dz$$

(iii) 显然  $f_{Z,W}(z,w)$  为二维正态分布概率密度函数

协方差矩阵

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 4e^{-4} \\ 4e^{-4} & 4 \end{pmatrix}$$

其逆矩阵

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4(1-e^{-8})} & -\frac{e^{-4}}{4(1-e^{-8})} \\ -\frac{e^{-4}}{4(1-e^{-8})} & \frac{1}{4(1-e^{-8})} \end{pmatrix}$$

其行列式  $|C| = 16(1 - e^{-8})$

期望向量  $\bar{\mu} = (0, 0)$

$$\begin{aligned} \therefore f_{Z,W}(z,w) &= \frac{1}{2\pi|C|} \exp \left\{ -\frac{1}{2} ((z,w) - \bar{\mu}) C^{-1} ((z,w) - \bar{\mu})^T \right\} \\ &= \frac{1}{8\pi\sqrt{1-e^{-8}}} \exp \left\{ -\frac{z^2 + w^2 - 2e^{-4}wz}{8(1-e^{-8})} \right\} \end{aligned}$$

4.8 设  $\{X(t), t \in \mathbf{R}\}$  是一个严平稳过程,  $\varepsilon$  为只取有限个值的随机变量. 证明  $\{Y(t) = X(t - \varepsilon), t \in \mathbf{R}\}$  仍是一个严平稳过程.

提示: 对  $\varepsilon$  用全概率公式.

证: 设  $\varepsilon$  可取  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$

$$\begin{aligned} \text{则 } & P\{Y(t_1 + h) \leq y_1, \dots, Y(t_k + h) \leq y_k\} \\ &= P\{X(t_1 - \varepsilon + h) \leq y_1, \dots, X(t_k - \varepsilon + h) \leq y_k\} \\ &= \sum_{i=1}^n P(\varepsilon = \varepsilon_i) P\{X(t_1 - \varepsilon_i + h) \leq y_1, \dots, X(t_k - \varepsilon_i + h) \leq y_k | \varepsilon = \varepsilon_i\} \end{aligned}$$

$\therefore X(t)$  严平稳

$$\begin{aligned} \therefore \text{上式} &= \sum_{i=1}^n P(\varepsilon = \varepsilon_i) P\{X(t_1 - \varepsilon_i) \leq y_1, \dots, X(t_k - \varepsilon_i) \leq y_k | \varepsilon = \varepsilon_i\} \\ &= P\{X(t_1 - \varepsilon) \leq y_1, \dots, X(t_k - \varepsilon) \leq y_k\} \\ &= P\{Y(t_1) \leq y_1, \dots, Y(t_k) \leq y_k\} \end{aligned}$$

$\therefore Y(t)$  为严平稳.

4.10 设  $\{X(t)\}$  是一个复值平稳过程, 证明

$$E|X(t + \tau) - X(t)|^2 = 2\Re e(R(0) - R(\tau)).$$

证: 记  $m = EX(t)$

$$\begin{aligned} \text{则 } E|X(t + \tau) - X(t)|^2 &= E|(X(t + \tau) - m) - (X(t) - m)|^2 \\ &= E|X(t + \tau) - m|^2 + E|X(t) - m|^2 - E[(X(t + \tau) - m)\overline{(X(t) - m)}] \\ &\quad - E[(X(t) - m)\overline{(X(t + \tau) - m)}] \\ &= 2R(0) - R(-\tau) - R(\tau) \end{aligned}$$

又  $\because R(-\tau) = \overline{R(\tau)}$

$\therefore$  上式  $= 2\Re e(R(0) - R(\tau))$

4.11 设  $\{X(t)\}$  是零均值的平稳高斯过程, 协方差函数为  $R(\tau)$ , 证明

$$P(X'(t) \leq a) = \phi\left(\frac{a}{\sqrt{-R''(0)}}\right),$$

其中  $\phi(\cdot)$  为标准正态分布函数.

证 : 注意到  $X'(t)$  服从正态分布

而  $EX'(t) = [EX(t)]' = 0$

$$Var X'(t) = \text{Cov}(X'(t), X'(t+0)) = -R''(0)$$

$$\therefore X'(t) \sim N(0, -R''(0))$$

$$\therefore P(X'(t) \leq a) = P\left(\frac{X'(t)}{\sqrt{-R''(0)}} \leq \frac{a}{\sqrt{-R''(0)}}\right) = \phi\left(\frac{a}{\sqrt{-R''(0)}}\right)$$

4.12 设  $\{X(t)\}$  为连续宽平稳过程, 均值  $m$  未知, 协方差函数为  $R(\tau) = ae^{-b|\tau|}, \tau \in R, a > 0, b > 0$ . 对固定的  $T > 0$ , 令  $\bar{X} = T^{-1} \int_0^T X(s) ds$ . 证明  $E\bar{X} = m$ (即  $\bar{X}$  是  $m$  的无偏估计) 以及

$$Var(\bar{X}) = 2a[(bT)^{-1} - (bT)^{-2}(1 - e^{-bT})].$$

提示 : 在上述条件下, 期望号与积分号可以交换.

证 :

$$\begin{aligned} E\bar{X} &= E\left[\frac{1}{T} \int_0^T X(s) ds\right] \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T EX(s) ds \\ &= \frac{mT}{T} \\ &= m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(\bar{X}) &= E\left[\frac{1}{T^2} \left(\int_0^T X(t) dt - m\right) \left(\int_0^T X(s) ds - m\right)\right] \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T E[(X(t) - m)(X(s) - m)] ds dt \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T R(t-s) ds dt \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T ae^{-b|t-s|} ds dt \\ &= \frac{2a}{T^2} \int_0^T dt \int_0^T e^{-b(t-s)} ds \\ &= \frac{2a}{T^2} \int_0^T \frac{1}{b} (1 - e^{-bt}) dt \\ &= 2a[(bT)^{-1} - (bT)^{-2}(1 - e^{-bT})]. \end{aligned}$$

4.13 设  $\{X(t)\}$  为平稳过程, 设  $\{X(t)\}$  的  $n$  阶导数  $X^{(n)}(t)$  存在, 证明  $\{X^{(n)}(t)\}$  是平稳过程.

提示：利用协方差函数性质 4.

证： $EX^{(n)}(t) = [EX(t)]^{(n)} = 0$

$$\text{Cov}(X^{(n)}(t), X^{(n)}(t + \tau)) = (-1)^n R^{(2n)}(\tau)$$

$\therefore \{X^{(n)}(t)\}$  是平稳过程.

4.14 证明定理 4.1 中关于平稳序列均值的遍历性定理.

提示：用 Schwarz 不等式

证：

充分性：

$$\begin{aligned}
& E \left| \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N X(k) - m \right|^2 \quad (m = E(X_n)) \\
&= \frac{1}{(2N+1)^2} E \left( \sum_{k=-N}^N X(k) - m \right)^2 \\
&= \frac{1}{(2N+1)^2} E \left( \sum_{k=-N}^N X(k) - m \right) \left( \sum_{\ell=-N}^N X(\ell) - m \right) \\
&= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{k=-N}^N \sum_{\ell=-N}^N R(k-\ell) \\
&= \frac{1}{(2N+1)^2} \left[ \sum_{\tau=0}^N R(\tau) \cdot 2(2N+1-\tau) - (2N+1)R(0) \right] \\
&\leq \left| \frac{2}{2N+1} \sum_{\tau=0}^N R(\tau) \right| + \left| \frac{1}{2N+1} R(0) \right| \\
&\because \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{2N+1} \sum_{\tau=0}^N R(\tau) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{2N-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} R(\tau) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2N}{2N-1} \cdot \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} R(\tau) = 0, \\
&\quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} R(0) = 0, \\
&\therefore \lim_{N \rightarrow +\infty} E \left| \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N X(k) - m \right|^2 = 0.
\end{aligned}$$

必要性：记  $\bar{X}_N = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N X_k$ , 则有

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{1}{2N+1} \sum_{\tau=0}^{2N} R(\tau) \right]^2 \\
&= \left[ \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N \text{Cov}(X_{-N}, X_k) \right]^2 \\
&= \left[ \text{Cov}(X_{-N}, \bar{X}_N) \right]^2 \\
&\leqslant \text{Var}(X_{-N}) \text{Var}(\bar{X}_N) \quad (\text{Schwarz 不等式}) \\
&= R(0) E(\bar{X}_N - m)^2 \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow +\infty)
\end{aligned}$$

从而有

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{\tau=0}^{2N} R(\tau) = 0,$$

由上易得

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} R(\tau) = 0.$$

4.15 如果  $(X_1, X_2, X_3, X_4)$  是均值为 0 的联合正态随机向量, 则

$$\begin{aligned}
E X_1 X_2 X_3 X_4 &= \text{Cov}(X_1, X_2) \text{Cov}(X_3, X_4) + \text{Cov}(X_1, X_3) \text{Cov}(X_2, X_4) \\
&\quad + \text{Cov}(X_1, X_4) \text{Cov}(X_2, X_3).
\end{aligned}$$

利用这个事实证明定理 4.3

证 :

取固定的  $\tau \in \mathbb{Z}$ , 记  $X_{n+\tau} X_n \stackrel{\Delta}{=} Y_n$ , 则

$$\begin{aligned}
E Y_n &= R_X(\tau)(\text{const}) \\
\text{Cov}(Y_{n+\tau_1}, Y_n) &= E Y_{n+\tau_1} Y_n - R_X^2(\tau) \\
&= E X_{n+\tau_1+\tau} X_{n+\tau_1} X_{n+\tau} X_n - R_X^2(\tau) \\
&= R_X^2(\tau) + R_X^2(\tau_1) + R_X(\tau_1 + \tau) R_X(\tau_1 - \tau) - R_X^2(\tau) \\
&= R_X^2(\tau_1) + R_X(\tau_1 + \tau) R_X(\tau_1 - \tau) \\
&= R_Y(\tau_1)
\end{aligned}$$

$\therefore \{Y_n\}$  是平稳过程.

又易见  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$  的协方差函数遍历性成立的充要条件是  $Y = \{Y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  的均值遍历性成立.

而我们有

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{\tau_1=0}^{N-1} R_Y(\tau_1) \right| &\leq \frac{1}{N} \sum_{\tau_1=0}^{N-1} |R_Y(\tau_1)| \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{\tau_1=0}^{N-1} \left[ R_X^2(\tau_1) + (R_X^2(\tau_1 + \tau) + R_X^2(\tau_1 - \tau))/2 \right] \rightarrow 0, (N \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

由均值遍历性定理 (i) 可知,  $Y = \{Y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  的均值遍历性成立, 即  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$  的协方差函数遍历性成立.

4.16 设  $X_0$  为随机变量, 其概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

设  $X_{n+1}$  在给定  $X_0, X_1, \dots, X_n$  下是  $(1 - X_n, 1]$  上的均匀分布,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , 证明  $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$  的均值有遍历性.

证:

$$EX_0 = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$EX_0^2 = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} EX_{n+1} &= E[E(X_{n+1}|X_N)] \\ &= E\left[\int_{1-X_n}^1 \frac{x_{n+1}}{x_n} dx_{n+1}\right] \\ &= E\left(1 - \frac{1}{2}X_n\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}EX_n \\ \because EX_0 = \frac{2}{3} \quad \therefore EX_n &\equiv \frac{1}{2} \end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned} EX_{n+1}^2 &= E\left[E(X_{n+1}^2|X_n)\right] \\ &= E\left[\int_{1-X_n}^1 \frac{x_{n+1}^2}{x_n} dx_{n+1}\right] \\ &= 1 - EX_n + \frac{1}{3}EX_n^2 \\ \because EX_0^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore EX_n^2 &\equiv \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X_n X_{n+m}) &= E\left[E(X_n X_{n+m} | X_n)\right] \\
&= E\left[X_n E(X_{n+m} | X_n)\right] \\
&= E\left[X_n \left(1 - \frac{1}{2} E(X_{n+m-1} | X_n)\right)\right] \\
&= EX_n - \frac{1}{2} E\left[E(X_n X_{n+m-1} | X_n)\right] \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} E(X_n X_{n+m-1}) \\
\therefore E(X_n X_{n+m}) - \frac{4}{9} &= -\frac{1}{2} \left(E(X_n X_{n+m}) - \frac{4}{9}\right) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^m \left(EX_n^2 - \frac{4}{9}\right) = \frac{1}{18} \left(-\frac{1}{2}\right)^m \\
\therefore R_X(n, n+m) &= E\left(X_n - \frac{2}{3}\right) \left(X_{n+m} - \frac{2}{3}\right) = E(X_n X_{n+m}) - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} \left(-\frac{1}{2}\right)^m = R(m)
\end{aligned}$$

$\therefore \{X_n\}$  是平稳序列

又  $\because \lim_{m \rightarrow +\infty} R(m) = 0$

$\therefore$  是均值遍历的

4.17 设  $\{\varepsilon_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$  为白噪声序列, 令

$$X_n = \alpha X_{n-1} + \varepsilon, |\alpha| < 1, n = \dots, -1, 0, 1, \dots,$$

则  $X_n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \varepsilon_{n-k}$ , 从而证明  $\{X_n, n = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$  为平稳序列. 求出该序列的协方差函数. 此序列是否具有遍历性?

解:

$$EX_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k E\varepsilon_{n-k} = 0$$

$$\begin{aligned}
R_X(n, n+m) &= \text{Cov}(X_n, X_{n+m}) \\
&= E\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k \varepsilon_{n-k}\right) \left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha^\ell \varepsilon_{m+n-\ell}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha^{k+\ell} E\varepsilon_{n-k} \varepsilon_{m+n-\ell} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^{2k+m} E\varepsilon_{n-k}^2 \\
&= \alpha^m \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2} \\
&= R(m)
\end{aligned}$$

$\therefore \{X_n\}$  为平稳序列

又  $\lim_{m \rightarrow +\infty} R(m) = 0$ ,  $\therefore$  是均值遍历的

以下没有特殊声明, 所涉及的过程均假定均值函数为 0

4.20 设  $\{X(t)\}$  为平稳过程, 令  $Y(t) = X(t+a) - X(t-a)$ . 分别以  $R_X, S_X$  和  $R_Y, S_Y$  记随机过程  $X$  和  $Y$  的协方差函数和功率谱密度, 证明

$$R_Y(\tau) = 2R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a),$$

$$S_Y(\omega) = 4S_X(\omega) \sin^2 a\omega.$$

证:

$$\begin{aligned} R(\tau) &= E[X(t+a) - X(t-a)][X(t-\tau+a) - X(t-\tau-a)] \\ &= E[X(t+a)X(t-\tau-a)] - E[X(t+a) - X(t-\tau-a)] \\ &\quad - E[X(t-a)X(t-\tau-a)] + E[X(t-a) - X(t-\tau-a)] \\ &= R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a) + R_X(\tau) \\ &= 2R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a) \\ S_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_Y(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau+2a) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau-2a) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= S_X(\omega)(2 - e^{2a\omega i} - e^{-2a\omega i}) \\ &= S_X(\omega)(2 - 2\cos 2a\omega) \\ &= 4S_X(\omega) \sin^2 a\omega \end{aligned}$$

4.21 设平稳过程  $X$  的协方差函数  $R(\tau) = \sigma^2 e^{-\tau^2}$ , 试研究其功率谱密度函数的性质.

解:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 e^{-\tau^2} e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \sigma^2 e^{-\frac{\omega^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\tau^2 + i\omega\tau - \frac{\omega^2}{4})} d\tau \\ &= \sigma^2 e^{-\frac{\omega^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\tau + \frac{i\omega}{2})^2}{2 \times \frac{1}{2}}} d\tau \\ &= \sigma^2 \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}. \end{aligned}$$

$S(\omega)$  为  $\mathbb{R}$  上的实的、偶的、非负且可积的函数.