Funkcie

Educat - vzdelávacie centrum

22. marca 2024

1 Teória k funkciám

Definícia 1 (Funkcia reálnej premennej)**.** Funkciou reálnej premennej na množine $A \subseteq \mathbb{R}$ sa nazýva predpis, ktorým je každému prvku množiny A priradené $\boxed{\text{práve jedno}}$ reálne číslo, ktoré nazývame $\boxed{\text{funkčnou hodnotou}}$.

Definícia 2 (Definičný obor)**.** Množina $A \subseteq \mathbb{R}$, ktorej prvkom funkcia priradzuje ich funkčné hodnoty, sa nazýva $\boxed{\text{definičný obor}}$ funkcie f a značí sa $D(f)$.

Definícia 3 (Obor hodnôt)**.** Množina $Y \subseteq R$, ktorej prvky sú priradené funkciou f jej definičnému oboru, sa nazýva $\boxed{\text{obor hodnôt}}$ a značí sa $H(f)$.

1.1 Spôsoby určenia funkcie

Funkciu reálnej premennej vieme graficky zobraziť v pravouhlej sradnicovej sústave. Jednotlivé body $[x, y]$ v rovine pritom spĺňajú podmienku, že $y = f(x)$. Takéto zobrazenie sa potom nazýva $\boxed{\text{grafom funkcie } f}$. Samotnú funkciu potom vieme určiť nasledovnými spôsobmi.

1. $\boxed{\text{predpisom}}$, napr. $f : y = 3x - 5$ alebo iný zápis je $f(x) = -6x + 11$

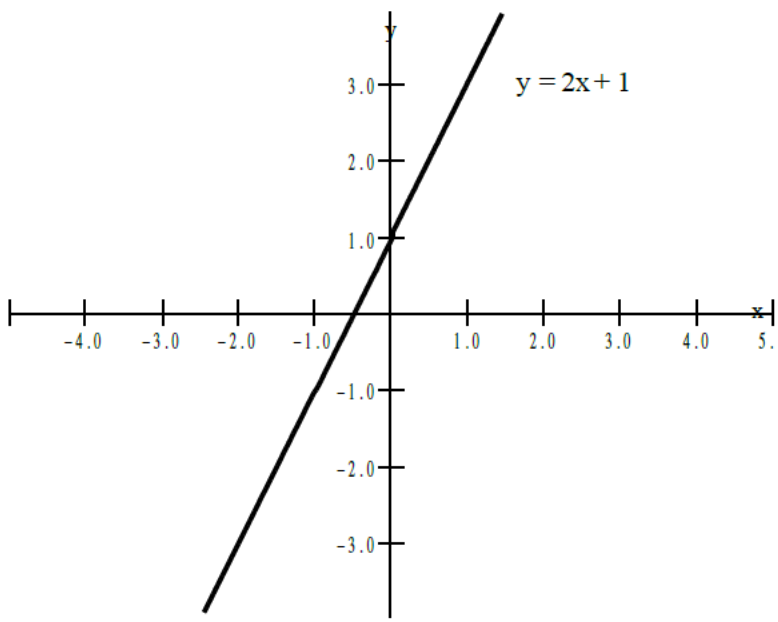
2. $\boxed{\text{vymenovaním svojich prvkov}}$. Napr. $f = \{[2,4],[3,7],[5,11]\}$. Je to teda množina bodov v rovine.

3. $\boxed{\text{tabuľkou}}$. Napr.:

x	1	2	3	4
y	2	4	8	16

4. $\boxed{\text{slovným opisom}}$. Napr.: Funkcia f priraďuje každému prirodzenému číslu jeho dvojnásobok.

5. $\boxed{\text{grafom}}$. Napr:



1.2 Vlastnosti funkcií

Definícia 4 (Párnosť funkcie)**.** Funkcia f sa nazýva $\boxed{\text{párnou}}$, ak $\forall x, -x \in D(f) : f(x) = f(-x)$.

Graf párnej funkcie je symetrický (dá sa zrkadlovo preklopiť) podľa y-ovej osi.

Definícia 5 (Nepárnosť funkcie)**.** Funkcia f sa nazýva $\boxed{\text{nepárnou}}$ ak $\forall x, -x \in D(f) : f(x) = -f(-x)$.

Graf nepárnej funkcie je symetrický podľa počiatku súradnicovej sústavy.

Definícia 6. Funkcia f je na množine $M \subseteq D(f)$

1. $\boxed{\text{rastúca}}$ ak $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
2. $\boxed{\text{klesajúca}}$ ak $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
3. $\boxed{\text{neklesajúca}}$ ak $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
4. $\boxed{\text{nerastúca}}$ ak $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Ak je funkcia rastúca/klesajúca/neklesajúca/nerastúca na celom jej definičnom obore, tak skrátene hovoríme, že je rastúca/klesajúca/neklesajúca/nerastúca.

Definícia 7 (Monotónnosť)**.** Ak je funkcia na celom definičnom obore iba rastúca, klesajúca, nelesajúca alebo nerastúca, tak ju nazývame $\boxed{\text{monotónnou}}$.

Definícia 8 (Rýdza monotónnosť)**.** Ak je funkcia na celom definičnom obore iba rastúca alebo iba klesajúca, tak ju nazývame $\boxed{\text{rýdzo monotónnou}}$.

Definícia 9 (Prostosť)**.** Funkcia, sa nazýva $\boxed{\text{prostá}}$ ak $\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ak je funkcia rýdzo monotónna, tak je prostá. **! Naopak ale veta neplatí!**

Definícia 10 (Ohraničenosť)**.** Funkcia f sa nazýva

1. $\boxed{\text{zhora ohraničená}}$ ak $\exists h \in \mathbb{R} : \forall y \in H(f)\ y \leq h$

2. $\boxed{\text{zhora ohraničená}}$ ak $\exists d \in \mathbb{R} : \forall y \in H(f)\ y \geq d$

3. $\boxed{\text{ohraničená}}$ ak je ohraničená zdola aj zhora.

Definícia 11 (Inverzná funkcia)**.** Ak je f prostá funkcia, tak k nej existuje práve jedna funkcia, označme ju f^{-1}, ktorá je určená takto:

1. jej definičný obor je $H(f)$, teda $D(f^{-1}) = H(f)$,

2. $H(f^{-1}) = D(f)$

Takáto funkcia sa nazýva $\boxed{\text{inverznou funkciou}}$ k funkcii f.

Z týchto dvoch vlastností vyplýva, že graf prostej funkcie je súmerný podľa osi $y = x$ s jej inverziou.

Definícia 12 (Periodická funkcia)**.** Funkcia f sa nazýva $\boxed{\text{periodická funkcia}}$ práve vtedy, keď existuje $\exists p > 0 : \forall k \in \mathbb{Z}$:

1. $ak\ x\ \in D(f) \Rightarrow x + kp \in D(f)$,

2. $f(x + kp) = f(x)$

Číslo p potom nazývame $\boxed{\text{periódou}}$ funkcie f.

1.3 Extrémy funkcií

Definícia 13 (Maximum)**.** Hovoríme, že funkcia f má v bode a $\in M \subseteq D(f)$ maximum na množine M práve vtedy, keď pre všetky $x \in M$ platí $f(x) \leq f(a)$.

Definícia 14 (Minimum)**.** Hovoríme, že funkcia f má v bode a $\in M \subseteq D(f)$ minimum na množine M práve vtedy, keď pre všetky $x \in M$ platí $f(x) \geq f(a)$.

Definícia 15 (Ostré maximum)**.** Hovoríme, že funkcia f má v bode a $\in M \subseteq D(f)$ ostré maximum na množine M práve vtedy, keď pre všetky $x \in M$ platí $f(x) \leq f(a)$.

Definícia 16 (Ostré minimum)**.** Hovoríme, že funkcia f má v bode a $\in M \subseteq D(f)$ ostré minimum na množine M práve vtedy, keď pre všetky $x \in M$ platí $f(x) > f(a)$.

2 Cvičenia k funkciám

`https://gymmoldava.sk/ICV/CELYWEB/indexICV.php?show=funkcie`

2.1 Rozhodovačka

Pre jednotlivé predpisy urči, či predstavujú funkciu, alebo nie.

1. $f = \{[-1, 2], [0, 0], [1, 2], [2, 3]\}$
2. $g = \{[-1, 0], [0, -1], [-1, 1], [1, -1]\}$
3. h :

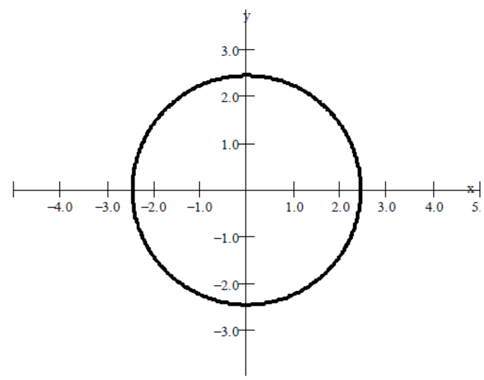
x	1	3	5	7
y	-1	2	5	-7

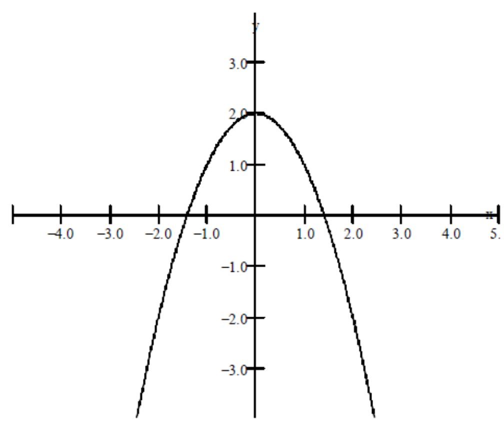
4. i :

x	-2	-1	0	1
y	1	1	1	2

5. j :

6. k :


y
3.0
2.0
1.0
x
−4.0
−3.0
−2.0
−1.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.
−1.0
−2.0
−3.0


y
3.0
2.0
1.0
x
−4.0
−3.0
−2.0
−1.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.
−1.0
−2.0
−3.0