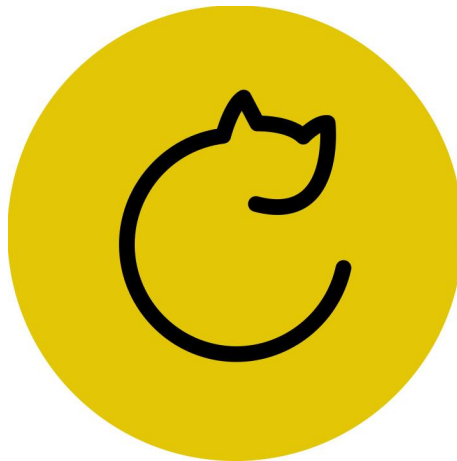


Teória čísel pre ZŠ

6. októbra 2023



Obsah

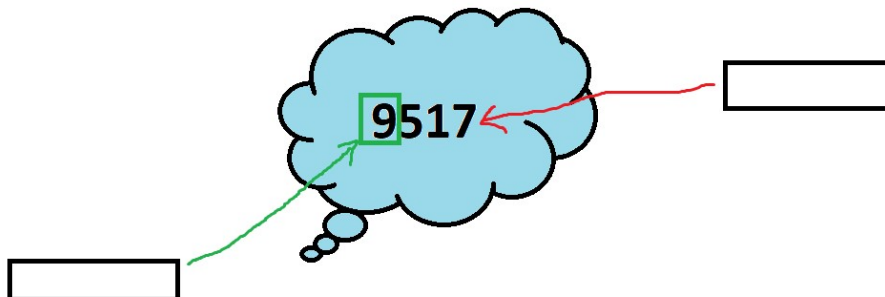
1	Čísla a ich základné typy	3
1.1	Číslo a cifra	3
1.2	Základné matematické operácie a ich vlastnosti	3
1.3	Základné typy čísel	4
1.4	Zápisy prirodzených čísel	4
1.5	Cvičenie.	4
2	Deliteľnosť celých a prirodzených čísel	5
2.1	Definícia deliteľnosti	5
2.2	Znaky deliteľnosti pre čísla 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10.	5
2.3	Zisťovanie všetkých deliteľov	6
2.4	Cvčenia	6
2.5	Prvočísla a prvočíselné rozklady	6
2.6	Eratostenovo sito	6
2.7	Prvočíselný rozklad prirodzeného čísla	7
2.8	Cvičenia	9

3	Najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok	11
3.1	Definície	11
3.2	Hľadanie NSD	11
3.3	Cvičenia na NSD	11
3.4	Hľadanie nsn	11
3.5	Cvičenia na nsn	12
4	Slovné úlohy na NSD a nsn	13
5	Racionálne čísla a zlomky	16
5.1	Definícia	16
5.2	Rozširovanie zlomkov	16
5.3	Cvičenia	16
5.4	Operácie so zlomkami	18

1 Čísla a ich základné typy

1.1 Číslo a cifra

Do obrázku a textu pod ním doplň slová **cifra** a **číslo** podľa významu.



Definície:

- _____ je matematický objekt, ktorý sa používa na počítanie, meranie a označovanie.
- _____ je grafický objekt, ktorý sa používa na znázorňovanie čísel a môže nadobúdať hodnoty _____.

1.2 Základné matematické operácie a ich vlastnosti

Z tabuľky doplň slová do textu pod ňou. Do zátvoriek napíš názov danej operácie.

asociatívnosť	násobenie	sčítovanie	komutatívnosť
distributívnosť	delenie	odčítovanie	neutrálny prvok
sčítanec	činitel'	delenec	deliteľ
súčet	podiel	súčin	rozdiel
menšenec	menšiteľ	opačné číslo	

$$\begin{aligned} \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} &= \underline{\hspace{2cm}} (\underline{\hspace{2cm}}) \\ \underline{\hspace{2cm}} - \underline{\hspace{2cm}} &= \underline{\hspace{2cm}} (\underline{\hspace{2cm}}) \\ \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} &= \underline{\hspace{2cm}} (\underline{\hspace{2cm}}) \\ \underline{\hspace{2cm}} \div \underline{\hspace{2cm}} &= \underline{\hspace{2cm}} (\underline{\hspace{2cm}}) \end{aligned}$$

Vlastnosti základných matematických operácií:

- $a + b = b + a$, $a.b = b.a$ (_____)
- $a.1 = 1.a = a$, $a + 0 = 0 + a = a$ (_____)
- $a - b = 0$, potom b sa nazýva _____.
- $a.(x + y) = a.x + a.y$ (_____)
- $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a.b).c = a.(b.c)$ (_____)

1.3 Základné typy čísel

Do textu nižšie doplň správne slová z nasledujúcej tabuľky:

prirodzené čísla	celé čísla	\mathbb{N}	\mathbb{Z}
opačné	\mathbb{N}_0	1, 2, 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

- _____ sú čísla, ktoré vyjadrujú nenulový počet prvkov a na ich značenie používame znak _____. Patria sem napríklad čísla _____. Ak by sme ale chceli dať najavo, že počítame aj s nulou, použijeme značenie _____.
- naopak _____ sú také čísla, ktoré už nulu obsahujú. Vyjadrujú totiž zmenu (rast alebo pokles) počtu prvkov. Obsahujú teda aj prirodzené čísla, nulu aj čísla k nim _____. Patria sem napríklad čísla _____ a používame pre ne značenie _____.

1.4 Zápisy prirodzených čísel

K nasledujúcim zápisom dopíš, aký majú názov.

- 543 - _____.
- $5.100 + 4.10 + 3.1$ - _____.
- $5.100 + 43$ - _____. V tomto prípade sa číslo 5.100 nazýva _____ a číslo 43 _____.

1.5 Cvičenie.

V nasledujúcej tabuľke máš v každom riadku daný práve 1 typ zápisu čísla, tvojou úlohou je dopísať zápisy vo zvyšných stĺpcoch (v treťom stĺpci číslo v zátvorke vyjadruje deliteľa, ktorého máš použiť).

Ciferný zápis	Rozvinutý zápis	Zápis pomocou zvyšku
	$3.1000 + 0.100 + 4.10 + 9.1$	(7)
221		(10)
		$7.8 + 4$
31		(5)
76		(12)
	$6.100 + 2.10 + 7.1$	(21)
		$7.24 + 21$
214		(15)
571		(20)
	$3.100 + 4.10 + 7.1$	(6)
	$7.1000 + 9.100 + 7.10 + 1.1$	(8)

2 Deliteľnosť celých a prirodzených čísel

2.1 Definícia deliteľnosti

Ak si zoberieme 2 celé čísla a , b , tak povieme, že číslo a je _____ číslom b , ak nám po _____ výjde zvyšok 0. Hovoríme tiež, že b je _____ čísla a . Matematické značenie je potom, $a|b$ (a delí b). Inými slovami sa dá povedať, že a delí b , ak je b násobkom a -čka.

Treba si dať ale pozor, číslo a nesmie byť rovné _____.

2.2 Znaký deliteľnosti pre čísla 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10.

Pomocou učebnice alebo internetu doplň kritériá deliteľnosti pre spomänuté prirodzené čísla.

1. prirodzené číslo je deliteľné 2, ak _____.
2. prirodzené číslo je deliteľné 3, ak _____.
3. prirodzené číslo je deliteľné 4, ak _____.
4. prirodzené číslo je deliteľné 5, ak _____.
5. prirodzené číslo je deliteľné 6, ak _____.
6. prirodzené číslo je deliteľné 8, ak _____.
7. prirodzené číslo je deliteľné 9, ak _____.
8. prirodzené číslo je deliteľné 10, ak _____.

2.3 Zisťovanie všetkých deliteľov

Predstav si, že nám niekto predostrie nejaké prirodzené číslo a chce od nás, aby sme mu povedali, koľko deliteľov dané číslo má, prípadne ešte aj, ktoré sú to čísla. Aký postup by sme na to mali zvoliť

Postup: _____

2.4 Cvičenia

<https://gymoldava.sk/ICV/CELYWEB/1/delitelnost/delitelnostkviz.htm>

<https://gymoldava.sk/ICV/CELYWEB/1/delitelnost/znakydelitelnosti.htm>

<https://gymoldava.sk/ICV/CELYWEB/1/delitelnost/znakydelitelnosti2.htm>

2.5 Prvočísla a prvočíselné rozklady

Z možností v texte vyber tie správne.

Prvočíslo/zložené číslo je také prirodzené číslo, ktoré má práve 2 delitele. Naopak, prirodzené číslo, ktoré má **aspoň/najviac** 3 delitele sa nazýva **prvočíslo/zložené číslo**. Z toho dôvodu číslo 1 nie je ani prvočíslo, ani zložené číslo, keďže má len 1 deliteľa.

2.6 Eratostenovo sito

Na hľadanie všetkých prvočísel existuje postup, ktorý vymyslel už ujo Eratostenes z Kyrény v antickom Grécku. Funguje tak, že si najprv vytvoríme štvorcovú tabuľku $n \times n$. Postup pozostáva z 5 krokov:

1. Jednotku vyškrtni, ona nie je prvočíslo.
2. Dvojku zafarbi, ona je prvočíslo.
3. Vyškrtni všetky jej násobky (4, 6, 8, ...)
4. Zafarbi najmenšie nezvyškrtnuté číslo a opakuj s ním kroky 2 a 3.
5. Toto opakuj, kým nemáš hotovú celú tabuľku.

Teraz si tento postup vyskúšaj na štvorci 10×10 , teda máš najst prvočísla od 1 po 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Po vyfarbení by mala tabuľka vyzerat' takto (zelené sú prvočísla):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2.7 Prvočíselný rozklad prirodzeného čísla

Do nasledujúceho textu doplň tieto slová: **prvočísel**, **prvočíselný**, **prvočinitele**.

Eratostenovo sito sa využíva dobre pri úlohách, kde chceme rozložiť prirodzené číslo n na súčin _____, takýto súčin sa potom nazýva _____ rozklad a jednotlivé činitele sa nazývajú _____.

Postup pri zisťovaní prvočíselného rozkladu je nasledovný, ukážeme si to na príklade s číslom 126.

Budeme postupne zostrojovať tabuľku s 2 stĺpcami, kde si naľavo budeme písať jednotlivé prvočísla a do pravého si budeme písať medzivýsledky po delení danými prvočíslami. Na začiatku teda máme prázdnu tabuľku:

126	

Budeme teraz postupovať, kým nebudeme mať napravo medzivýsledok 1. Prvočísla na test deliteľnosti si môžeme vyberať v ľubovoľnom poradí, ale najlepšie si zvolíme poradie od najväčšieho albo najmenšieho, my si to ukážeme od najmenšieho.

Prvé prvočíslo, ktoré máme v site, je 2. 126 je deliteľné 2, keďže sa končí na párnou cifru, preto si naľavo napíšeme číslo 2 a napravo napíšeme výsledok $126 \div 2$, čo je 63. Máme teraz takúto tabuľku:

126	
63	2

Keďže 63 nie je 1, tak pokračujeme, 63-ka už dvojkou nie je deliteľná, lebo je nepárna, takže skúsime ďalšie číslo, zo sita, čo je 3-ka. Ciferný súčet 63 je 9, čo je deliteľné 3-mi, takže si 3-ku zapíšeme do pravého stĺpca a naľavo napíšeme $63 \div 3$.

126	
63	2
21	3

21 je tiež deliteľná 3-mi, tak si zapíšeme ďalšú 3-ku do tabuľky a vydelíme 21-ku 3-mi.

7 už nie je deliteľná 3-mi, preto sa presúvame na ďalšie číslo zo sita, ktorým je 5-ka. 7 nekončí na 5 ani 0, takže nie je deliteľná 5-mi. Preúvame sa teda na číslo 7 a ním je deliteľná, keďže každé číslo je deliteľné samé sebou. Dopíšeme si teraz 7 napravo a naľavo 7×7 .

126	
63	2
21	3
7	3

126	
63	2
21	3
7	3
1	7

Keďže máme už v ľavom stĺpci 1-ku, sme hotoví. V pravom stĺpci máme teraz prvočíselný rozklad čísla 126. Teda $126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$.

2.8 Cvičenia

Rozlož každé číslo na prvočíselný rozklad.

https://cs.khanacademy.org/math/6-trida/xe43e34898edf07f6:delitele-a-nasobky/xe43e34898edf07f6:prvociselny-rozklad/e/prime_factorization

- 26
- 60
- 49
- 8
- 54
- 420
- 1024
- 125
- 300
- 198
- 42
- 36

- 422

- 48

3 Najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok

3.1 Definície

K názvom doplň definície pojmov.

- najväčší spoločný deliteľ 2 prirodzených čísel (NSD)

- najmenší spoločný násobok 2 prirodzených čísel (nsn)

3.2 Hľadanie NSD

Zisti postup na hľadanie NSD pre 2 prirodzené čísla a postup zapíš nižšie.

Pomôcka: <https://youtu.be/-zYLo1FbWC0>

Postup:

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

3.3 Cvičenia na NSD

<https://gymoldava.sk/ICV/CELYWEB/1/delitelnost/NSD.htm>

3.4 Hľadanie nsn

Zisti postup na výpočet nsn 2 prirodzených čísel (zrejme sa veľmi líšiť nebude od toho na NSD).

Postup:

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

3.5 Cvičenia na nsn

<https://gymoldava.sk/ICV/CELYWEB/1/delitelnost/nsn.htm>

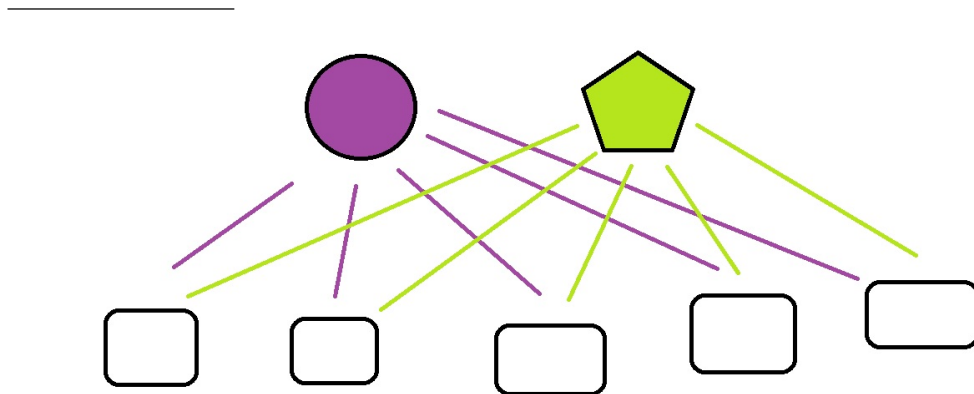
<https://gymoldava.sk/ICV/CELYWEB/1/delitelnost/delitelnostkviz.htm>

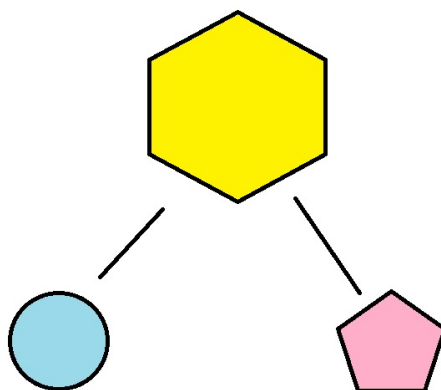
4 Slovné úlohy na NSD a nsn

Budeme riešiť slovné úlohy pre nsn a NSD. Na začiatok si treba uvedomiť ich základné vlastnosti.

1. NSD vždy delí obe čísla, takže musí platiť, že $NSD(a, b) \leq a$ a zároveň $NSD(a, b) \leq b$.
2. Podobne pri nsn, ten je vždy deliteľný oboma číslami, takže musí platiť $nsn(a, b) \geq a$ a $nsn(a, b) \geq b$.

K nasledujúcim obrázkom dopíš, kde sa využije NSD a nsn. Na prvom sa snažíme 2 skupinky rozdeliť do čo najväčších skupín rovnomerne (teda chceme do každej kôpky dať fialovej rovnaké kúsky a zo zelenej tiež rovnaké). V druhom prípade chceme 2 skupiny spojiť do čo najmenej skupiny (takže túto skupinu vieme rozdeliť do týchto 2 skupín).





Teraz si ukážeme nejaké vzorové príklady.

Príklad 1. Babička má 8 lízaniek a 28 cukríkov a chce vedieť, do najviac koľkých balíčkov ich vie rozdeliť. Poradme babičke! :)

Riešenie: Keďže chceme rozdeľovať veci do skupín, hľadáme $\text{NSD}(8, 28)$. To číslo už dopočítaj a dopíš sem: _____.

Príklad 2. Máme 2 lode, obe vyrážajú z prístavu o 11:00. Loď A vyráža každých 15 minút a loď B každých 25 minút. Zisti, kedy sa prvýkrát stretnú.

Riešenie: V časovom úseku, kedy sa stretnú, každá z nich už niekoľkokrát vyrazila. Z toho vyplýva, že dĺžku tohoto úseku vieme vydeliť 15-timi aj 25-timi. Takže nás zaujíma $\text{nsn}(15, 25)$, ten túto podmienku spĺňa. Výsledkom je potom číslo _____.

Príklad 3. Anička má 20 jabĺk a 30 marhúl a chce z nich urobiť koláče. Ale chce ich vyrobiť čo najviac. Koľko ich vie upiecť?

Riešenie: Anička chce vlastne deliť ovocia na skupiny, takže chce vedieť $\text{NSD}(20, 30)$, to bude počet koláčov, do koľkých ich vie najviac rozdeliť. Výsledok je _____

Príklad 4. Keď učiteľ telocviku nechá nastúpiť študentov do 6-radu a 8-radu, nikto nevystáva. Koľko študentov je v triede?

Riešenie: Keďže ich vie rozdeliť do 6-radu aj 8-radu, tak tento počet musí byť deliteľný 6-mi aj 8-mi, preto hľadané číslo je $\text{nsn}(6, 8)$. Výsledok je _____.

Príklad 5. Ferko má 24 modrých pier, 16 zelených a 44 červených. Chce vedieť, na koľko skupín ich vie najviac rozdeliť. Koľko ich bude? Koľko pier daných farieb bude v skupinách?

Riešenie: Opäť delíme veci do mesích skupiniek, takže hľadáme $\text{NSD}(24, 16, 44)$, čo je _____. Ak chceme vedieť, koľko bude v skupinách, vydelíme počty NSD-čkom. Modrých pier: _____, zelených: _____ a červených: _____.

Príklad 6. 3 lode vyrážajú každých 12, 15 a 20 minút. Prvýkrát vyrážajú o 12:30. Kedy sa prvýkrát stretnú?

Riešenie: Hľadáme časový úsek, kam sa zmestí 12, 15 aj 20 minút, takže hľadáme $\text{nsn}(12, 15, 20)$. Výsledok je: _____. Teda prvýkrát sa stretnú _____.

Príklad 7. Zoberme si lode z predchádzajúcej úlohy. Zaujíma nás, koľkokrát sa stretnú do 18:00.

Riešenie: Zaujíma celočíselný podiel úseku od 12:30 do 18:00. Keď zistíme túto dĺžku v minútach, urobíme len celočíselný podiel tohto čísla a nsn z predchádzajúcej úlohy (urobíme delenie so zvyškom a výsledkom je len celá časť). Takže sa stretnú _____-krát.

5 Racionálne čísla a zlomky

5.1 Definícia

Do definície dopíš nasledovné slová: **celých čísel**, **nule**, **čitateľ**, **menovateľ**, **pomer**, **zlomok**, a zisti, aké značenie sa používa pre racionálne čísla.

Definícia: Racionálne číslo je také číslo, ktoré vieme zapísať ako $\frac{x}{y}$ 2 x a y , zapisujeme to ako $\frac{x}{y}$, tento tvar sa potom nazýva $\frac{x}{y}$. Číslo x sa nazýva x (lebo ho prečítame prvé) a y sa nazýva y (lebo dáva zlomku meno) treba si dať ale potom pozor na to, že menovateľ nesmie byť rovný 0 . Značenie pre racionálne čísla je \mathbb{Q} .

Z tabuľky doplň slová do textu na správne miesta.

základnom	súdeliteľné	nesúdeliteľné
rozširovanie	krátenie	\mathbb{Q}

- zlomok $\frac{x}{y}$, kde $\text{NSD}(x, y) = 1$, sa nazýva zlomok v $\frac{x}{y}$ tvare.
- vynásobenie čitateľa aj menovateľa rovnakým **nenuľovým** číslom sa nazýva $\frac{x}{y}$. Uvedom si, že táto operácia nemení hodnotu zlomku.
- opačná operácie, teda vydelenie čitateľa aj menovateľa tým istým **nenuľovým** číslom, sa nazýva $\frac{x}{y}$.

5.2 Rozširovanie zlomkov

5.3 Cvičenia

Vyššie bolo spomenuté krátenie a rozširovanie zlomkov, Okrem toho sme si definovali aj zlomok v základnom tvare. Ale čo, ak zlomok v základnom tvare nie je? Existuje na to veľmi jednoduchý postup:

1. Nájdi ľubovoľného spoločného deliteľa čitateľa a menovateľa.
2. Vykráť zlomok týmto deliteľom.
3. Ak je zlomok v základnom tvare, sme hotoví. Inak znovu aplikuj rovnaký postup.

V nasledujúcej tabuľke máš dané zlomky a celé nenulové čísla, ktorými ich máš rozšíriť v zátvorkách. Do druhého stĺpca zapíš výsledky.

$\frac{5}{3} \quad (-3)$	
$\frac{-7}{2} \quad (23)$	
$\frac{9}{-31} \quad (11)$	
$\frac{-5}{-83} \quad (-6)$	
$\frac{22}{21} \quad (4)$	
$\frac{51}{13} \quad (36)$	
$\frac{16}{93} \quad (7)$	

Teraz budeš mať v tabuľke zlomky a tvojou úlohou je ich previesť do základného tvaru, okrem NSD využi krátenie, ak bude čitateľ aj menovateľ záporný. Kladné čísla sú pri zlomkoch preferované.

5.4 Operácie so zlomkami

1. **Sčítovanie/odčítovanie s rovnakými menovateľmi:** V tomto prípade ide o jednoduchý postup, keďže sa oba zlomky skladajú z rovnako veľkých častí. Máme teda 2 zlomky $\frac{x}{m}$ a $\frac{y}{m}$, ich súčet je potom súčet čitateľov $\frac{x+y}{m}$ (pri rozdieli tam je len rozdiel čitateľov).
2. **Násobenie zlomkov:** $\frac{a}{b} \times \frac{x}{y} =$
3. **Delenie zlomkov:** $\frac{a}{b} \div \frac{x}{y} =$
4. **Sčítovanie a odčítovanie zlomkov s rôznymi menovateľmi:** Máme 2 zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{x}{y}$ a chceme ich sčítať, keďže nemáme rovnaké menovatele, nemôžeme len tak sčítať čitatele. V tomto prípade sa postupuje tak, že to prevedieme na spoločný menovateľ, ktorým bude číslo $b \times y$. Dostaneme teda rovnosť $\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{nieo}{b \times y}$. Chceme vedieť, čo je nič, aby sme pri daných 2 zlomkoch dosiahli menovateľ $b \times y$, prvý zlomok rozšírime číslom y a druhý číslom b . Následne teda dostaneme:

$$\frac{a \times y}{b \times y} + \frac{x \times b}{y \times b} = \frac{a \times y + x \times b}{b \times y}.$$