

Lista 02

1. Prove que o comprimento de qualquer curva ligando p e q no \mathbb{R}^n é maior ou igual a $|p - q|$.
2. Prove que uma curva plana com curvatura constante está contida em uma reta ou em um círculo.
3. Sejam $\alpha, \beta: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas curvas diferenciáveis satisfazendo
 - (i) $\alpha' = a\alpha + b\beta$.
 - (ii) $\beta' = c\alpha + d\beta$.

Prove que se $a = -d$ então α e β pertencem a um mesmo plano.

4. Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, uma curva no espaço com $|\alpha''| > 0$ (não necessariamente p.p.c.a.). Prove que:
 - (i) a curvatura em $\alpha(t)$ é

$$k(t) = \frac{|\alpha' \wedge \alpha''|}{|\alpha'|^3};$$

- (ii) a torção em $\alpha(t)$ é

$$\tau(t) = -\frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{|\alpha' \wedge \alpha''|^2}.$$