随机过程练习题

问题 & 答案整理

问题 By Waiter

答案 By Waiter & 李熹 & CYB

整理 By CYB

2017.09.20

Contents

Part I

问题

1 马尔科夫过程

题型 1 计算平稳分布

1.1 【2007-2】进出问题之穿鞋

每天早上张三都要出门跑步，张三的家有前后两个门，门口都有一些鞋，两个门口鞋的数目之和为 N。张三出门时，如果门口有鞋则穿上，如果没有，就只好光脚跑了；跑步回来进门时，如果穿着鞋，则将鞋脱下放在门口。假定张三出门时选择前后门的概率相同，回家时也同样，请计算充分长时间以后，张三出门时不幸要光脚跑步的概率。

1.2 【2014-7】进出问题之打伞（请和上题比较）

小李有 3 把雨伞，上午上班时有雨就带一把到办公室，下午下班时有雨就带一把回家（中午不回家），其他情况不带雨伞。假设上下班时是否有雨是相互独立的，有雨的概率为 p。

（1）试定义一个马氏链来计算充分长时间后，小李会被雨淋的概率有多大？

（2）求出该马氏链的一步概率转移矩阵，判断各状态是否常返，并说明理由。

1.3 【习题集 4-26】进出问题之打伞（仅做上题参考）

设某人有 r 把伞，分别放在家里和办公室里，如果出门遇下雨（概率为 p，$0 < p < 1$），手边也有伞，他就带一把用；如果天晴他就不带伞。试证：经过相当长的一段时间后，这个人遇下雨但手边无伞可用的概率不超过 $\frac{1}{4r}$。

1.4 【2010-4】比赛问题之无吸收壁

三名网球选手 A, B, C 进行比赛，每一轮都是两人比赛，一人轮空，本轮比赛的胜者下一轮与本轮轮空的选手进行比赛。设三名选手的实力分别为 S_A, S_B, S_C，每次两人比赛时，选手 X 击败选手 Y 的概率为 $S_X/(S_X + S_Y)$，其中 $X, Y \in \{A, B, C\}$。试计算时间充分长后，各名选手实际参加比赛数目占总比赛数目的比例。

1.5 【习题集 4-20】比赛问题之有吸收壁（请和上题比较）

甲乙两人进行比赛，设每局比赛甲胜的概率为 p，乙胜的概率为 q，和局的概率为 r，$p+q+r=1$。设每局比赛后胜者获 1 分，负者获 -1 分，和局获 0 分。当两人中有一个人获得 2 分时，结束比赛。以 $X(n)$ 表示比赛至第 n 局时，甲获得的分数，$\{X(n), n = 0, 1, 2, \ldots\}$ 是一个齐次 Markov 链。

（1）写出此 Markov 链的状态空间；

（2）写出状态转移矩阵；

（3）计算二步转移概率矩阵；

（4）问在甲获得 1 分的情况下，再赛 2 局就结束比赛的概率为多少？

1.6 【2010-6】图上的随机游动

有限简单非定向图由一些顶点和连接顶点的边构成，每条边连接两个不同顶点，每两个顶点间至多有一条边相连，没有孤立顶点。考察有限简单非定向图上的随机游动，当第 n 时刻处在顶点 i 上时，第 $n+1$ 时刻将跳转到与顶点 i 有边直接连接的某个顶点 j 上，转移概率为 $P(i,j)=1/d(i)$，其中 $d(i)$ 为与 i 有边直接相连的顶点数目。试计算该随机游动的平稳分布。

1.7 【2009-5】自适应

教师不断进行考试以督促学生学习，设考试有三种难度，易、中、难，学生在三种难度考核下答出好成绩的概率分别为 $0.9,\alpha,0.1$。如果学生答出好成绩，教师在下次考试中就会提高难度，反之，会降低难度。如难度无法提高（降低）即保持不变。试计算，充分长时间后，如果教师希望学生们所经历的考试中，中等难度所占的比例不小于 70%，那么应该怎样设置难度，即怎样设置 α?

1.8 【2007-1】循环

设 Y_n 是掷均匀的骰子 n 次后得到的点数之和，请计算

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n=0 \mod 13)$$

其中 $Y_n=0 \mod 13$ 表示 Y_n 可以被 13 整除。

1.9 【2008-8】

设 $\{X_n,n=0,1,2,\dots\}$ 为 Markov 链，一步转移概率矩阵为 P，令 $Y_n=(X_n,X_{n+1})$，很明显这也是 Markov 链。如果设 $\{X_n\}$ 的不变分布为 $\pi=(\pi_0,\pi_1,\dots)$，试求 $\{Y_n\}$ 的不变分布。

题型 2 判断常返性

2.1 【2014-9】掷骰子

同时掷 5 个骰子，将结果中出现次数最多的数字所对应的骰子固定住（例如，出现 23345，则将对应的 33 的二号和三号骰子固定住。如果出现两个以上数字，出现次数并列最多，则任取其中一个，并固定住其对应骰子）；继续掷没有固定住的骰子，并将出现次数最多的数字所对应的骰子固定住（注意，允许数字有变化，例如上例中一、三、四号骰子继续掷，如果出现 43344，那么就固定住一、三、四号骰子）。考虑 Markov 链 $\{X_k\}$，状态空间为 $\{0,1,2,3,4,5\}$。事件 $\{X_k=n\}$ 表示第 k 次抛掷后，出现次数最多的数字所出现的次数为 n。考察该链各状态的常返性。

题型 3 计算分布 $\vec{V}_n$

3.1 【2008-7】抛硬币

设两枚不均匀硬币分别编号为 1 和 2，抛掷硬币 1，正面向上的概率为 p；抛掷硬币 2，正面向上的概率也为 p。现开始如下抛掷过程：反复抛掷一枚硬币，直至出现反面向上，然后换为反复抛掷另一枚硬币，出现反面再换回来，如此循环往复。

（1）请计算：时间充分长之后，抛掷硬币 1 的概率。

（2）如果初始时刻抛掷的是硬币 1，请计算第 $5, 6, 7$ 及第 $10, 11, 12$ 次抛掷均抛掷硬币 2 的概率。

3.2 【习题集 4-35】数字传输系统

在传送数字 0 和 1 的通信系统中，传送每个数字必须经过若干级，而每一级中数字正确传送的概率为 p。设 $X(0)$ 表示进入系统的数字，$X(n)$ 表示离开系统第 n 级的数字，$\{X(n), n = 0, 1, 2, \ldots\}$ 是齐次 Markov 链。

（1）写出状态转移概率矩阵；

（2）求出 n 步转移概率矩阵；

（3）求平稳分布。

题型 4 计算吸收概率

4.1 【习题集 4-34】赌徒输光问题

赌徒甲有 a 元，赌徒乙有 b 元，两人进行赌博。每赌一局负者给胜者 1 元，没有和局，直到两人中有一个输光为止。设在每一局中甲胜的概率为 $\frac{1}{2}$，$X(n)$ 表示第 n 局时甲的赌金，$\{X(n), n = 0, 1, 2, \ldots\}$ 为齐次 Markov 链。

（1）写出状态空间和状态转移概率矩阵；

（2）求出甲输光的概率。

2 相关理论与二阶矩过程

题型 1

1.1 【2014-2】

设随机过程 $X(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$，其中 ω 为正常数，a, b 是独立同分布的随机变量，服从 $N(0,1)$，记 $X(t) = \rho\cos(\omega t + \theta)$。

（1）求 $X(t)$ 的均值和自相关函数，问此过程是否为宽平稳过程？是否为严平稳过程？是否均值遍历？

（2）求随机变量 ρ, θ 的分布密度函数，问 ρ, θ 是否统计独立？

1.2 【2010-1】

设零均值宽平稳随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 有相同的功率谱密度 $S(\omega)$，且两者间联合平稳，互谱密度为 $\rho(\omega)$，θ 是 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布随机变量，且与 $X(t), Y(t)$ 独立，ω_c 为常数，试计算：

$$Z(t) = X(t)\cos(\omega_c t + \theta) + Y(t)\sin(\omega_c t + \theta)$$

的功率谱密度。

1.3 【2008-5】

设 $X(t)$ 为宽平稳随机过程，θ 为与 $X(t)$ 独立的随机变量，服从 $[1, 2]$ 区间上的均匀分布。定义

$$Y(t) = \int_t^{t+\theta} X(s)ds$$

试判断其是否宽平稳。如果答案是肯定的，计算其功率谱密度。

题型 2

2.1 【2014-8】

设离散时间宽平稳随机过程 $\{X_k\}$，均值为 μ，相关函数为 $R(n)$。考虑连续时间随机过程 $Y(t)$，

$$Y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \frac{\sin(\pi(t - kT)/T)}{\pi(t - kT)/T}$$

请计算 $Y(t)$ 的均值和相关函数，并判断其宽平稳性。

2.2 【2008-6】

考虑随机过程 $X(t)=\cos(2\pi t+\theta)$，其中 θ 为服从 $[0,2\pi]$ 区间上均匀分布的随机变量。试计算下述均方意义下的极限

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt$$

（注意：如果没有考虑“均方意义”，直接当作普通极限做，不得分。）

3 高斯过程

题型 1 计算相关函数和功率谱密度

1.1 【2010-2】

设 $X(t)$ 为零均值宽平稳高斯过程，相关函数为 $R(\tau)$。θ 是 $[0,2\pi]$ 上的均匀分布随机变量，且与 $X(t)$ 独立，ω_c 为常数，试计算

$$Y(t)=\cos(\omega_c t+\theta+X(t))$$

的相关函数。

1.2 【2009-7】

设 ω 服从 $N(\mu,\sigma^2)$，θ 服从 $[0,2\pi]$ 的均匀分布，两者互相独立。试计算随机过程 $X(t)=\cos(\omega t+\theta)$ 的相关函数和功率谱密度。

1.3 【2007-6】

设零均值宽平稳高斯过程 $X(t)$ 的功率谱密度为 $S_X(\omega)=\frac{1}{\omega^2+1}$，请计算 $Y(t)=e^{\alpha X(t)}$ 的相关函数。

1.4 【2014-5】

设 $X(s)$ 为零均值高斯白噪声，$E(X^2(t))=\sigma^2$，考虑

$$Y(t)=\int_0^t X(s)ds,\ Z(t)=\sin^3(Y(t))$$

试计算 $Z(t)$ 的相关函数。

1.5 【2014-3】

设 X,Y 是两个独立的实随机变量，X 服从标准正态分布，Y 服从参数为 1 的指数分布。设

$$Z(t)=Xe^{jYt},\ -\infty<t<\infty$$

试问 $\{Z(t)\}$ 是否宽平稳？若是，求其自相关函数 $R_Z(\tau)$，功率谱密度 $S_Z(\omega)$。

题型 2 计算条件分布

2.1 【2010-7】

设 X 和 Y 为服从联合高斯分布的一维随机变量，方差分别为 σ_X^2 和 σ_Y^2，相关系数为 ρ。设 $U=Y^3, V=Y^2$，试计算条件概率密度 $f_{X|U}(x|u)$ 和 $f_{X|V}(x|v)$。

2.2 【2008-4】

考虑零均值宽平稳高斯过程 $X(t)$，相关函数为 $e^{-\alpha|\tau|}$，设 T 为确定的时间常数，试求 $E(X^4(T)|X(0))$。

2.3 【2014-4】

设 $\{X(t),\ -\infty<t<\infty\}$ 是零均值高斯过程，自相关函数为 $R_X(\tau)=5\cos(\frac{\pi\tau}{2})3^{-|\tau|}$，试求

（1）$E\left[(X(3))^2|(X(2)+X(4))\right]=?$

（2）$E\left[(X(2)+X(3))|(X(2)+X(4))\right]=?$

题型 3 线性滤波器设计

3.1 【2007-7】

考虑零均值宽平稳 Gaussian 白噪声 $X(t)$，对于给定的 Δt，请设计一款线性时不变滤波器（给出其传递函数），使得 $X(t)$ 通过该滤波器后得到的随机过程 $Y(t)$ 满足：$Y(t)$ 的采样过程 $\{Y_n=Y(n\Delta t), n\in N\}$ 仍然是 Gaussian 白噪声。

3.2 【2009-8】

设 $X(t)$ 是零均值高斯白嗓声，功率密度为 $N_0/2$。试设计一款线性滤波器，使得 $X(t)$ 通过该滤波器后的输出 $Y(t)$ 满足

$$E(Y(1)Y(3)|Y(2))=CY^2(2)$$

其中 C 是确定性常数。

题型 4 坐标变换

4.1 【2009-2】

设 (X_1,X_2) 为服从联合高斯分布的随机变量，均值均为 0 ，方差均为 1 , 相关系数为 ρ。如果将 X_1 和 X_2 用极坐标进行表示

$$X_1=R\cos(\phi),\ X_2=R\sin(\phi)$$

试计算 ϕ 的密度函数，并利用该密度，计算 $P(X_1X_2>0)$。

4.2 【2008-3】

令 X, Y 为独立的 Gaussian 分布随机变量，均值分别为 m_1, m_2，方差均为 1 , 试求 $\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度。

题型 5 其他

5.1 【2010-8】去相关

设 X 和 Y 为服从联合高斯分布的 n 维随机变量，协方差阵分别为 Σ_X 和 Σ_Y，互协方差阵为 Σ_{XY} 和 Σ_{YX}，试构造矩阵 G 和 n 维随机变量 V ，使得 $X = GY + V$，且满足 V 与 Y 独立（请给出 V 的密度的解析表达式和 G 的具体形式）。

5.2 【2009-1】计算均值和相关

设 (X_1, X_2) 为服从联合高斯分布的随机变量，均值均为 0，方差均为 1，相关系数为 ρ。如果

$$\max_{c_1^2+c_2^2=1} E(c_1X_1 + c_2X_2)^2 = 1$$

其中 c_1 和 c_2 为实数，试计算 ρ 以及 $E(X_1^2X_2^2)$。

5.3 【2007-5】计算特征函数

设 U 是 $[0, 2\pi]$ 均匀分布的随机变量，随机变量 X 独立于 U，且密度为

$$f_X(x) = |x|^3 e^{-\frac{x^4}{2}},\ x \in \mathbb{R}$$

设随机过程 $Y(t) = X^2 \cos(\omega t + U)$，计算 $Y(t_1), Y(t_2), \ldots, Y(t_n))$ 的 n 维特征函数。

4 泊松过程

题型 1 计算相关函数和功率谱密度

1.1 【2014-10】

设 $N(t)$ 为泊松过程，参数为 λ。随机变量 $A \sim N(0,\sigma^2)$。考虑随机过程 $X(t)$，

$$X(t) = A\cos(2\pi f t + \pi N(t))$$

计算 $X(t)$ 的均值和相关系数。

1.2 【2007-3】

考虑随机过程 $X(t) = Z^{N(t)}$，其中 $N(t)$ 是标准泊松过程，参数为 λ，$P(Z=1)=p$，$P(Z=-1)=1-p$，且假定 $N(t)$ 和 Z 统计独立，请计算 $X(t)$ 的自相关系数。

1.3 【2007-4】

设随机过程 $Y(t) = X_{N(t)}$，其中 $N(t)$ 是标准泊松过程，参数为 λ，$\{X_n\}$ 为独立同分布随机变量，均值为 m，方差为 σ^2，请计算 $Y(t)$ 的功率谱密度。

提示：第 1、2 题令 $N(t)=k$，分奇偶性讨论；第 3 题 $R_Y = E[X_N(t_1)X_N(t_2)]$，分 $N(t_1)$ 和 $N(t_2)$ 是否相等讨论。

题型 2 泊松过程的和

2.1 【2010-3】男女生到校

假定学校早上 7 点开门，男生按照强度为 λ 的泊松流到达学校，女生按照强度为 μ 的泊松流到达学校，男女生的到达行为相互独立。试计算从 7 点开始算起，到达学校的头两个学生性别不同的概率.

2.2 【2010-5】两个服务台

假定某银行有两个服务台，张先生到达银行的时候，两个服务台都被顾客占用，且没有顾客在等待。设两个服务台的服务时间分别服从参数为 λ_1 和 λ_2 的指数分布，且不同顾客间的服务时间相互独立，试计算张先生成为三个人当中离开银行最晚的人的概率。

2.3 【2008-1】N 个服务台

假定银行有 N 个服务台，各个服务台为一个顾客服务所需要的时间是独立同指数分布的随机变量，参数为 λ。有 N+1 个顾客同时到达了银行，其中一个顾客为了攒“人品”，主动发扬风格，让其他 N 个人先接受服务，自己等待；当先接受服务的人中有人服务结束离开后．该好心人开始接受服务。试计算，该好心人成为 N+1 个人中最后一个完成服务离开的人的概率。

提示：第 1、2 题：本质为计算条件概率。第 3 题：直观上，由于指数分布具有无记忆性，答案为 1/N；本质上，考查顺序统计量，需计算 $P(T_{N+1} \leq \max(T_1, \ldots, T_N) - \min(T_1, \ldots, T_N))$。

题型 3 顺序统计量

3.1 【2009-6】

设三台机器组成串行系统，任何一台机器停止工作都会使得系统失效，但是要等到三台机器都停止工作后，系统才开始进行维护修理。假设各台机器的无故障持续工作时间服从参数为 λ 的指数分布，且相互独立。设 0 时刻为起始时刻，三台机器同时启动开始正常工作。试计算：在某一指定时刻，发现系统已经失效的条件下，系统开始进行维护修理的时刻 T 的分布函数。

3.2 【2008-2】

考虑泊松过程 $N(t)$，强度为 λ。设事件间隔为 $T_1, T_2, \ldots$，令

$$M = \min\{n | T_n = \max(T_1, \ldots, T_n)\}$$

试计算 $E(T_1 + \cdots + T_M)$。

3.3 【2014-1】

到达公交汽车站的公交车服从参数为 λ 的泊松过程。某乘客到达公交汽车站，记 A 为自上一趟公交车到站时间起，直至当前时刻所经历的时间，B 为自当前时刻起，直到下一趟公交车到站所需的时间。计算 $E(\min(A, B))$。

3.4 【2009-4】等待时间的和

设某起始车站有快、慢两种车，快车开车的间隔为参数为 3 的指数分布，慢车开车的间隔为参数为 10 的指数分布，到达该车站的乘客服从参数为 1 的泊松流，且一旦来车，乘客无论车的快慢，全部上车。设快车从起始站到终点站的运行时间为 T_1，慢车为 T_2，T_1 和 T_2 均为确定常数，且所有顾客均以终点站为目的地。试问：T_1 和 T_2 的差为多大时．才能够使得乘坐快车的乘客的平均花费时间之和小于乘坐慢车的乘客的平均花费时间之和。这里花费时间包括等车时间和运行时间。

题型 4 其他

4.1 【2009-3】分奇偶讨论

某台机器在运转，无故障持续时间服从参数为 λ 的指数分布：如果出现故障，即刻由修理工进行修理，修理时间也服从参数为 λ 的指数分布：修理好之后即刻重新开始运转，如此循环往复。设各段无故障工作时间与各段修理时间均独立，修理工每修好一台机器得到报酬 1 元，试计算 $[0, t]$ 内该修理工所得报酬的均值（这里假定机器从 0 时刻开始运转）。

4.2 【2007-8】

考虑泊松过程 $N(t)$，令 T_n 为第 n 次事件发生时刻，给定时刻 t，设

$$A(t) = t - T_{N(t)},\ B(t) = T_{N(t)+1} - t$$

请计算 $A(t)$ 和 $B(t)$ 的分布及联合分布，判断这两者是否独立。然后请计算 $A(t) + B(t)$ 的均值。

4.3 【2014-6】

设跑步者 A，B，C 在操场上跑，每圈所用时间分别服从相互独立的指数分布，参数分别为 $\lambda_A = 21,\ \lambda_B = 23,\ \lambda_C = 24$。在每次完成一圈时，跑步者会喝一杯或两杯水，喝一杯水和两杯水的概率分别为 1/3 和 2/3 ，且跑步者每次喝水之间是相互独立的。假设喝水时间可以忽略。

（1）试求在第一个小时内三位跑步者消耗的总水量的平均值（以杯为单位）。

（2）试求 A 在 B，C 之前完成第一圈的概率。

（3）已知 A 已经跑了 1/4 小时，且 A 正在第二圈。试求 A 第二圈所花时间的平均值。

Part II

参考解答

1 马尔科夫过程

题型 1 计算平稳分布

1.1 【2007-2】

P(前出后入)=P(前出前入)=P(后出后入)=P(后出前入)=1/4。定义状态空间 $\{(F(n), B(n)), n = 0, 1, 2, \ldots\}$，其中 $F(n)$ 和 $B(n)$ 分别为前后门的鞋的个数。则有一步转移概率矩阵：

$$P = \begin{array}{c} \\ (0,N) \\ (1,N-1) \\ \cdots \\ (N,0) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} (0,N) & (1,N-1) & (2,N-2) & \ldots & (N,0) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & & & \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & & \\ & & \cdots & & \\ & & & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \end{array}$$

由 P 可求得平稳分布：

$$\pi = \pi P \rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 \\ \vdots \\ \pi_{n+1} = \frac{1}{4}\pi_n + \frac{3}{4}\pi_{n+1} \\ \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_{n+1} = 1 \end{cases} \rightarrow \pi_1 = \pi_2 = \cdots = \pi_{n+1} = \frac{1}{N+1}$$

$\therefore$ P(光脚跑步) = P(状态为 $(0, N)$ 且走前门) + P(状态为 $(N, 0)$ 且走后门)=$\frac{1}{N+1} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{N+1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{N+1}$

1.2 【2014-7】

定义状态空间 $\{X(n), n = 0, 1, 2, \ldots\}$，$X(n)$ 为第 n 次出门（不区分上下班）之前手边的雨伞数量。则一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1-p & p \\ & 1-p & p & \\ 1-p & p & & \end{pmatrix} \end{array}$$

由 P 可求得平稳分布：

$$\pi = \pi P \rightarrow \begin{cases} \pi_0 = (1-p)\pi_3 \\ \pi_1 = (1-p)\pi_2 + p\pi_3 \\ \pi_2 = (1-p)\pi_1 + p\pi_2 \\ \pi_3 = \pi_0 + p\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \rightarrow \pi_0 = \frac{1-p}{4-p},\ \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{4-p}$$

由 $\pi_n \neq 0$ 可知常返。$\therefore$ P(淋雨) = P(出门前手边没有伞且下雨) $= \pi_0 \times p = \frac{(1-p)p}{4-p}$。

1.3 【习题集 4-26】

状态空间的定义同上题，则一步概率转移矩阵为：

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \cdots \\ r \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & r \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1-p & p \\ & 1-p & p & \\ & \cdots & & \\ 1-p & p & & \end{pmatrix} \end{array}$$

由 P 可求得平稳分布：

$$\pi = \pi P \rightarrow \begin{cases} \pi_0 = (1-p)\pi_r \\ \pi_1 = (1-p)\pi_{r-1} + p\pi_r \\ \cdots \\ \pi_r = \pi_0 + p\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 + \cdots + \pi_r = 1 \end{cases} \rightarrow \pi_0 = \frac{1-p}{1+r-p},\ \pi_1 = \cdots = \pi_r = \frac{1}{1+r-p}$$

$\therefore$ P(淋雨) $= \pi_0 \times p = \frac{(1-p)p}{1+r-p} < \frac{(1-p)p}{r} \leq \frac{1}{4r}$。

1.4 【2010-4】

定义状态空间 $\{X(n), Y(n), n = 0, 1, 2, \ldots\}$，$X(n), Y(n)$ 为第 n 次比赛的交手双方。则一步转移概率矩阵为：

$$P = \begin{array}{c} \\ AB \\ AC \\ BC \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} AB & AC & BC \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{S_A}{S_A+S_B} & \frac{S_B}{S_A+S_B} \\ \frac{S_A}{S_A+S_C} & 0 & \frac{S_C}{S_A+S_C} \\ \frac{S_B}{S_B+S_C} & \frac{S_C}{S_B+S_C} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

由 P 可求得平稳分布：

$$\pi = \pi P \rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \frac{S_A}{S_A+S_C}\pi_2 + \frac{S_B}{S_B+S_C}\pi_3 \\ \pi_2 = \frac{S_A}{S_A+S_B}\pi_1 + \frac{S_C}{S_B+S_C}\pi_3 \\ \pi_3 = \frac{S_B}{S_A+S_B}\pi_0 + \frac{S_C}{S_A+S_C}\pi_1 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{2}\frac{S_A+S_B}{S_A+S_B+S_C} \\ \pi_2 = \frac{1}{2}\frac{S_A+S_C}{S_A+S_B+S_C} \\ \pi_3 = \frac{1}{2}\frac{S_B+S_C}{S_A+S_B+S_C} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \eta_A = \frac{\pi_1+\pi_2}{\pi_1+\pi_2+\pi_3} = \frac{1}{2}\frac{2S_A+S_B+S_C}{S_A+S_B+S_C} \\ \eta_B = \frac{\pi_1+\pi_3}{\pi_1+\pi_2+\pi_3} = \frac{1}{2}\frac{S_A+2S_B+S_C}{S_A+S_B+S_C} \\ \eta_C = \frac{\pi_2+\pi_3}{\pi_1+\pi_2+\pi_3} = \frac{1}{2}\frac{S_A+S_B+2S_C}{S_A+S_B+S_C} \end{cases}$$

1.5 【习题集 4-20】

（1）$E=\{-2,-1,0,1,2\}$

（2）

$$P=\begin{array}{c} \\ -2\\ -1\\ 0\\ 1\\ 2\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}-2 & -1 & 0 & 1 & 2\end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ q & r & p & & \\ & q & r & p & \\ & & q & r & p\\ & & & & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

（3）

$$P^{(2)}=\begin{array}{c} \\ -2\\ -1\\ 0\\ 1\\ 2\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}-2 & -1 & 0 & 1 & 2\end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ q+pr & r^2+pq & (p+q)r & p^2 & \\ q^2 & 2qr & 2pq+r^2 & 2pr & p^2\\ & q^2 & 2qr & pq+r^2 & pr+p\\ & & & & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

（4）$P_{1\to 2}=pr+p$

1.6 【2010-6】

$$\pi=\pi P\to\begin{cases}\pi_i=\sum_j \pi_j\frac{1}{d(j)}\\ \sum_i \pi_i=1\end{cases}\to\pi_i=\frac{d(i)}{\sum_i d(i)}$$

1.7 【2009-5】

一步概率转移概率矩阵：

$$P=\begin{array}{c} \\ E\\ M\\ H\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}E & M & H\end{array}\\ \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 & 0\\ 1-\alpha & 0 & \alpha\\ 0 & 0.9 & 0.1\end{pmatrix}\end{array}$$

由 P 可求得平稳分布：

$$\pi=\pi P\to\begin{cases}\pi_1=0.1\pi_1+(1-\alpha)\pi_2\\ \pi_2=0.9\pi_1+0.9\pi_3\\ \pi_3=\alpha\pi_2+0.1\pi_3\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases}\to\pi_2=\frac{0.9}{1.9}$$

所以无法调节。

1.8 【2007-1】

一步概率转移概率矩阵：

$$P = \begin{array}{c|ccccccc} & 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & \dots & 12 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/6 & \dots & 1/6 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \dots & & & \\ 11 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & \dots & 0 & \dots & 1/6 \\ 12 & 1/6 & 1/6 & \dots & 1/6 & 0 & \dots & 0 \end{array}$$

由 P 可求得平稳分布：

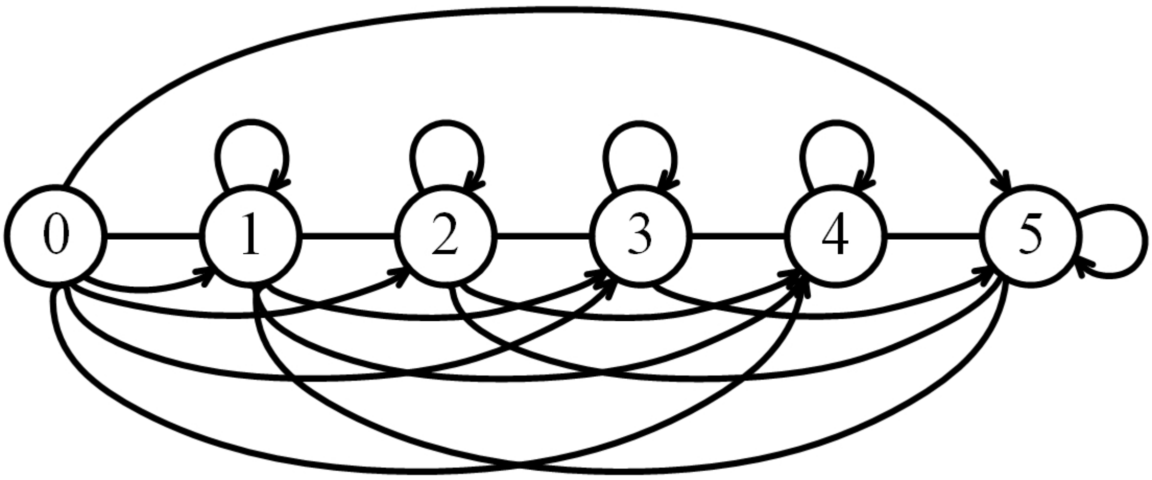
$$\pi = \pi P \rightarrow \begin{cases} \pi_0 = \frac{1}{6}(\pi_7 + \cdots + \pi_{12}) \\ \dots \\ \pi_{12} = \frac{1}{6}(\pi_6 + \cdots + \pi_{11}) \\ \pi_0 + \cdots + \pi_{12} = 1 \end{cases} \rightarrow \pi_0 = \pi_1 = \cdots = \pi_{12} = \frac{1}{13}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} P(Y_n = 0 \mod 13) = \frac{1}{13}$

题型 2 判断常返性

2.1 【2014-9】

状态转移图如下：从状态转移图中可以看出，0，1，2，3，4 非常返，5 常返。



题型 3 计算分布 $\vec{V}_n$

3.1 【2008-7】

定义状态为硬币的编号，则容易写出一步转移概率矩阵：

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

由 P 可求得平稳分布：

$$\pi = \pi P \to \begin{cases} \pi_1 = p\pi_1 + (1-p)\pi_2 \\ \pi_2 = (1-p)\pi_1 + p\pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \to \pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$$

$\therefore$（1）足够长时间后抛掷硬币 1 的概率为 $\frac{1}{2}$。

对 P 做对角化：

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

所以有

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2p-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n \end{pmatrix}$$

$\therefore$（2）所求概率为 $P_{12}^{(4)} P_{22} P_{22} P_{22}^{(3)} P_{22} P_{22}$

3.2 【习题集 4-35】

（1）

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

（2）

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n \end{pmatrix}$$

（3）

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$$

题型 4 计算吸收概率

4.1 【习题集 4-34】

（1）状态空间为 $E = \{0, 1, \ldots, a+b\}$ 状态转移矩阵为

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \cdots \\ a+b \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & \ldots & a+b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1/2 & & 1/2 & & \\ & 1/2 & & 1/2 & \\ & & \cdots & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

（2）记 f_i 为从状态 i 到状态 0 （输光）的概率。$f_0 = 1, f_{a+b} = 0$。由条件概率可知，$f_i = \frac{1}{2} f_{i+1} + \frac{1}{2} f_{i-1}$ $\therefore f_{i+1} - f_i = f_i - f_{i-1}, \ldots, f_2 - f_1 = f_1 - f_0 = f_1 - 1 \to f_{a+b} - f_1 = (a+b-1)(f_1 - 1)$ $\therefore f_1 = \frac{a+b-1}{a+b}$ $\therefore f_a - f_1 = (a-1)(f_1 - 1) \to f_a = (a-1)(f_1 - 1) + f_1 = \frac{b}{a+b}$

2 相关理论与二阶矩过程

题型 1

1.1 【2014-2】

（1）

$$E\{X(t)\} = E\{a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)\} = E\{a\}\cos(\omega t) + E\{b\}\sin(\omega t) = 0$$

$$\begin{aligned}
R_{xx}(t_1,t_2) = E\{X(t_1)\cdot X^*(t_2)\} &= E\{(a\cos\omega t_1 + b\sin\omega t_1)(a\cos\omega t_2 + b\sin\omega t_2)\} \\
&= E\{a^2\cos\omega t_1\cos\omega t_2 + ab(\cos\omega t_1\sin\omega t_2 + \sin\omega t_1\cos\omega t_2) + b^2\sin\omega t_1\sin\omega t_2\} \\
&= E\{a^2\}\cos\omega t_1\cos\omega t_2 + E\{a\}E\{b\}(\dots) + E\{b^2\}\sin\omega t_1\sin\omega t_2 \\
&= \cos\omega t_1\cos\omega t_2 + \sin\omega t_1\sin\omega t_2 \\
&= \cos\omega(t_1 - t_2)
\end{aligned}$$

所以该过程为宽平稳过程。因为 $X(t)$ 是高斯过程，$X(t)$ 是宽平稳过程，所以是严平稳过程。

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(a\cos\omega t + \sin\omega t)dt &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left(\frac{a}{\omega}\sin\omega t\Big|_{-T}^{T} - \frac{b}{\omega}\cos\omega t\Big|_{-T}^{T}\right) \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{a}{\omega T}\sin\omega T = 0 = m_X
\end{aligned}$$

所以该过程为均值遍历过程。

（2）

$$f_a(x) = f_b(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \to f_{a,b}(a,b) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{a^2+b^2}{2}\right)$$

$$X(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t = \rho\cos(\omega t + \theta) \to \begin{cases} a = \rho\cos\theta \\ b = -\rho\sin\theta \end{cases}$$

$$\to \left|\frac{\partial(a,b)}{\partial(\rho,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ -\sin\theta & -\rho\cos\theta \end{vmatrix} = -\rho$$

$$\therefore f_{\rho,\theta}(\rho,\theta) = f_{a,b}(a,b)\cdot\left|\frac{\partial(a,b)}{\partial(\rho,\theta)}\right| = \frac{\rho}{2\pi}\exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\right)$$

$$\therefore f_\rho(\rho) = \int_0^{2\pi} f_{\rho,\theta}(\rho,\theta)d\theta = \rho\exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\right)\quad(\rho\ge 0)$$

$$f_\theta(\theta) = \int_0^{\infty} f_{\rho,\theta}(\rho,\theta)d\rho = \frac{1}{2\pi}\quad(0\le\theta\le 2\pi)$$

$\because f_{\rho,\theta}(\rho,\theta) = f_\rho(\rho)f_\theta(\theta)$ $\therefore \rho,\theta$ 统计独立。

1.2 【2010-1】

$$
\begin{aligned}
S(\omega) &\xleftarrow{F} R_X(\tau)=R_Y(\tau),\quad \rho(\omega)=S_{XY}(\omega)\xleftarrow{F} R_{XY}(\tau)\\
R_Z(t_1,t_2) &= E\{Z(t_1)Z^*(t_2)\}\\
&= E\{[X(t_1)\cos(\omega_c t_1+\theta)+Y(t_1)\sin(\omega_c t_1+\theta)][X(t_2)\cos(\omega_c t_2+\theta)+Y(t_2)\sin(\omega_c t_2+\theta)]\}\\
&= E\{X(t_1)X(t_2)\cos(\omega_c t_1+\theta)\cos(\omega_c t_2+\theta)+X(t_1)Y(t_2)\cos(\omega_c t_1+\theta)\sin(\omega_c t_2+\theta)\\
&\quad +Y(t_1)X(t_2)\sin(\omega_c t_1+\theta)\cos(\omega_c t_2+\theta)+Y(t_1)Y(t_2)\sin(\omega_c t_1+\theta)\sin(\omega_c t_2+\theta)\}\\
&= E\{X(t_1)X(t_2)\}\cos(\omega_c t_1+\theta)\cos(\omega_c t_2+\theta)+E\{X(t_1)Y(t_2)\}\cos(\omega_c t_1+\theta)\sin(\omega_c t_2+\theta)\\
&+E\{Y(t_1)X(t_2)\}\sin(\omega_c t_1+\theta)\cos(\omega_c t_2+\theta)+E\{Y(t_1)Y(t_2)\}\sin(\omega_c t_1+\theta)\sin(\omega_c t_2+\theta)\\
&= R_X(t_2-t_1)\cos(\omega_c t_1+\theta)\cos(\omega_c t_2+\theta)+R_{XY}(t_2-t_1)\cos(\omega_c t_1+\theta)\sin(\omega_c t_2+\theta)\\
&+R_{YX}(t_2-t_1)\sin(\omega_c t_1+\theta)\cos(\omega_c t_2+\theta)+R_Y(t_2-t_1)\sin(\omega_c t_1+\theta)\sin(\omega_c t_2+\theta)\\
&= R_X(t_2-t_1)(\cos(\omega_c t_1+\theta)\cos(\omega_c t_2+\theta)+\sin(\omega_c t_1+\theta)\sin(\omega_c t_2+\theta))\\
&+R_{XY}(t_2-t_1)(\sin(\omega_c t_2+\theta)\cos(\omega_c t_1+\theta)-\cos(\omega_c t_2+\theta)\sin(\omega_c t_1+\theta))\\
&= R_X(t_2-t_1)\cos(\omega_c t_1+\theta-\omega_c t_2-\theta)+R_{XY}(t_2-t_1)\sin(\omega_c t_2+\theta-\omega_c t_1-\theta)\\
&= R_X(\tau)\cos(\omega_c\tau)+R_{XY}\sin(\omega_c\tau)
\end{aligned}
$$

以上结果经过傅里叶变换可以得到：

$$
\begin{aligned}
S_Z(\omega) &= S(\omega)*\pi[\delta(\omega-\omega_c)+\delta(\omega+\omega_c)]+S_{XY}*[\delta(\omega-\omega_c)-\delta(\omega+\omega_c)]\\
&= \pi[S(\omega-\omega_c)+S(\omega+\omega_c)]+\pi[S_{XY}(\omega-\omega_c)-S_{XY}(\omega+\omega_c)]
\end{aligned}
$$

1.3 【2008-5】

$X(t)$ 宽平稳，$\Rightarrow E\{X(t)\}=\mu_X, R_X(t_1,t_2)=R_X(\tau)$。

$$
\begin{aligned}
\therefore E\{Y(t)\} &= E\left\{\int_t^{t+\theta}X(s)ds\right\}=E_\theta\left\{E\left\{\int_t^{t+\theta}X(s)ds\Big|\theta\right\}\right\}=E_\theta\left\{\int_t^{t+\theta}E\left\{X(s)\right\}ds\Big|\theta\right\}\\
&= E_\theta\{\theta\cdot\mu_X\}=E\{\theta\}\cdot\mu_X=1.5\mu_X\\
E\{Y(t)Y(s)\} &= E\left\{\int_t^{t+\theta}X(u)du\int_s^{s+\theta}X(v)dv\right\}=E_\theta\left\{E\left\{\int_t^{t+\theta}X(u)du\int_s^{s+\theta}X(v)dv\Big|\theta\right\}\right\}\\
&= E_\theta\left\{\int_t^{t+\theta}\int_s^{s+\theta}E\left\{X(u)X(v)\right\}dudv\Big|\theta\right\}=E_\theta\left\{\int_t^{t+\theta}\int_s^{s+\theta}R(u-v)dudv\Big|\theta\right\}\\
&\overset{u'=u-t}{\underset{v'=v-s}{=}} E\left\{\int_0^\theta\int_0^\theta R(u'-v'+t-s)du'dv'\right\}=f(t-s)
\end{aligned}
$$

所以 $Y(t)$ 为宽平稳。下面计算其功率谱密度：设 $x=u'-v', y=u'+v'$，则有

$$
\int_0^\theta\int_0^\theta R(u'-v'+\tau)du'dv'=\int_{-\theta}^{\theta}\int_{|x|}^{2\theta-|x|}\frac{1}{2}R(x+\tau)dydx=\int_{-\theta}^{\theta}(\theta-|x|)R(x+\tau)dx
$$

$$\begin{aligned}
\therefore S_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} E\left\{\int_{-\theta}^{\theta}(\theta-|x|)R(x+\tau)dx\right\}e^{-j\omega\tau}d\tau \\
&= E\left\{\int_{-\theta}^{\theta}(\theta-|x|)dx\int_{-\infty}^{\infty}R(x+\tau)e^{-j\omega(x+\tau)}e^{j\omega x}d\tau\right\} = E\left\{\int_{-\theta}^{\theta}(\theta-|x|)S_X(\omega)e^{j\omega x}dx\right\} \\
&= S_X(\omega)E\left\{\int_{-\theta}^{\theta}(\theta-|x|)e^{j\omega x}dx\right\} = S_X(\omega)E\left\{\int_{-\theta}^{0}(\theta+x)e^{j\omega x}dx + \int_{0}^{\theta}(\theta-x)e^{j\omega x}dx\right\} \\
&= S_X(\omega)E\left\{\frac{1-j\theta\omega-e^{-j\theta\omega}}{\omega^2}+\frac{1+j\theta\omega-e^{j\theta\omega}}{\omega^2}\right\} = S_X(\omega)E\left\{\frac{2}{\omega^2}-\frac{2\cos\omega\theta}{\omega^2}\right\} \\
&= S_X(\omega)\left(\frac{2}{\omega^2}-\int_1^2\frac{2\cos\omega\theta}{\omega^2}d\theta\right) = S_X(\omega)\left(\frac{2}{\omega^2}-\frac{2}{\omega^2}(\sin 2\omega-\sin\omega)\right)
\end{aligned}$$

题型 2

2.1 【2014-8】

假设级数收敛，则期望的线性性质推广至无穷项相加：

$$\begin{aligned}
E\{Y(t)\} &= E\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_k\frac{\sin(\pi(t-kT)/T)}{\pi(t-kT)/T}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}E\{X(t)\}\frac{\sin(\pi(t-kT)/T)}{\pi(t-kT)/T} \\
&= \mu\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\pi(t-kT)/T)}{\pi(t-kT)/T}
\end{aligned}$$

由抽样定理 $f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)Sa\left[\frac{\pi}{T}(t-kT)\right]$ 可知，$\sum_{k=-\infty}^{\infty}Sa\left[\pi(t-kT)/T\right]=1$。级数收敛假设成立，所以 $E\{Y(t)\}=\mu$。

同样假设级数收敛，则有：

$$\begin{aligned}
R_Y(t_1,t_2) = E\{Y(t_1)Y(t_2)\} &= E\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_k\frac{\sin(\pi(t_1-kT)/T)}{\pi(t_1-kT)/T}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_k\frac{\sin(\pi(t_2-kT)/T)}{\pi(t_2-kT)/T}\right\} \\
&= E\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_mX_n\frac{\sin(\pi(t_1-mT)/T)}{\pi(t_1-mT)/T}\frac{\sin(\pi(t_2-nT)/T)}{\pi(t_2-nT)/T}\right\} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}E\{X_mX_n\}\frac{\sin(\pi(t_1-mT)/T)}{\pi(t_1-mT)/T}\frac{\sin(\pi(t_2-nT)/T)}{\pi(t_2-nT)/T} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}R(n-m)\frac{\sin(\pi(t_1-mT)/T)}{\pi(t_1-mT)/T}\frac{\sin(\pi(t_2-nT)/T)}{\pi(t_2-nT)/T} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}R\left(\frac{nT-mT}{T}\right)\frac{\sin(\pi(t_1-mT)/T)}{\pi(t_1-mT)/T}\frac{\sin(\pi(t_2-nT)/T)}{\pi(t_2-nT)/T} = R\left(\frac{t_2-t_1}{T}\right)
\end{aligned}$$

由于均值和时间无关，相关函数只和时间差有关，所以该过程为宽平稳。

3 高斯过程

题型 1 计算相关函数和功率谱密度

1.1 【2010-2】

相关函数为：

$$\begin{aligned}R_Y(t,s) &= E(Y(t)Y^*(s)) = E(\cos(\omega_c t+\theta+X(t))\cos(\omega_c s+\theta+X(s)))\\ &= E((\cos(\omega_c t+X(t))\cos\theta-\sin(\omega_c t+X(t))\sin\theta)(\cos(\omega_c s+X(s))\cos\theta-\sin(\omega_c s+X(s))\sin\theta))\\ &= \frac{1}{2}E(\cos(\omega_c\tau+X(t)-X(s))) = \frac{1}{2}\cos\omega_c\tau E(\cos(X(t)-X(s)))-\frac{1}{2}\sin\omega_c\tau E(\sin(X(t)-X(s)))\end{aligned}$$

令 $Z(t)=X(t+\tau)-X(t)$，易有 $Z(t)\sim(0,a^2)$，其中 $a^2=E(Z^2(t))-EZ^2=E(X^2(t+\tau)+X^2(t)-2X(t+\tau)X(t))=2(R(0)-R(\tau))$。

$$\therefore R_Y(t,s)=\frac{1}{2}\cos\omega_c\tau\frac{E(e^{jZ(t)})+E(e^{jZ(t)})}{2}-\frac{1}{2}\sin\omega_c\tau\frac{E(e^{jZ(t)})-E(e^{jZ(t)})}{2j}=\frac{1}{2}\cos\omega_c\tau e^{-\frac{1}{2}a^2}$$

$$\therefore R_Y(t,s)=\frac{1}{2}\cos\omega_c\tau e^{(R(\tau)-R(0))}$$

1.2 【2009-7】

求相关函数和功率谱密度：

$$\begin{aligned}R_X(t,s) &= E(X(t)X^*(s)) = E(\cos(\omega t+\theta)\cos(\omega s+\theta)) = \frac{1}{2}E(\cos\omega\tau)=\frac{1}{4}(E(e^{j\omega\tau})+E(e^{-j\omega\tau}))\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{j\mu\tau-\frac{a^2\tau^2}{2}}+e^{-j\mu\tau-\frac{a^2\tau^2}{2}}\right)=\frac{1}{2}e^{-\frac{a^2\tau^2}{2}}\cos\omega\tau\\ S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2\pi}{a^2}}\left(e^{-\frac{(\omega+\mu)^2}{2a^2}}+e^{-\frac{(\omega-\mu)^2}{2a^2}}\right)\end{aligned}$$

1.3 【2007-6】

由功率谱密度可以计算得到相关函数：

$$S_X(\omega)=\frac{1}{\omega^2+1}\Rightarrow R_X(\tau)=\frac{1}{2}e^{-|\tau|}\Rightarrow Var(X)=E(X^2)-EX^2=E(X^2)=R_X(0)=\frac{1}{2}$$

$\therefore X\sim N(0,\frac{1}{2})$。由相关函数的定义：$R_Y(t,s)=E(Y(t)Y^*(s))=E(e^{\alpha(X(t)+X(s))})$。令 $Z(t)=X(t+\tau)+X(t)$，则 $Z(t)\sim N(0,a_Z^2)$，$a_Z^2=E(Z^2(t))=E(X^2(t+\tau)+X^2(t)+2X(t+\tau)X(t))=2(R_X(0)+R_X(\tau))$。

$$\therefore R_Y(t,s)=E(e^{j\frac{\alpha}{j}Z(t)})=e^{-\frac{a_Z^2}{2}\left(\frac{\alpha}{j}\right)^2}=e^{\alpha^2(R_X(0)+R_X(\tau))}=e^{\frac{\alpha^2}{2}(1+e^{-|\tau|})}$$

1.4 【2014-5】

由相关函数定义：

$$R_Z(t,s)=E(\sin^3 Y(t)\sin^3 Y(s))=E\left\{\left(\frac{e^{j(Y(t)-Y(s))}+e^{-j(Y(t)-Y(s))}-e^{j(Y(t)+Y(s))}-e^{-j(Y(t)+Y(s))}}{4}\right)^3\right\}$$

令 $\begin{cases}U=e^{j(Y(t)-Y(s))}\\V=e^{j(Y(t)+Y(s))}\end{cases}$ ，则

$$\begin{aligned}R_Z(t,s)&=\frac{1}{64}E\left\{((U+U^{-1})-(V+V^{-1}))^3\right\}\\&=\frac{1}{64}(E(U^3)+E(3U)+E(3U^{-1})+E(U^{-3})-E(U^3)-E(3U)-E(3U^{-1})-E(U^{-3}\\&+3(-E(U^2V)-E(U^2V^{-1})-E(U^{-2}V)-E(U^{-2}V^{-1})-2E(V)-2E(V^{-1})\\&+E(UV^2)+E(UV^{-2}+E(U^{-1}V^2+E(U^{-1}V^{-2})+2E(V)+2E(V^{-1})))\end{aligned}$$

$E(Y(t))=E(\int_0^t X(s)ds=0$，$R_Y(t,s)=E\left(\int_0^t\int_0^s X(u)X(v)dudv\right)=a\sigma^2\min(s,t)$。因为 $X(t)$ 是高斯过程，所以 $Y(t)$ 是零均值高斯过程。而 $E(AY(t)+BY(s))=0$，$E((AY(t)+BY(s))^2)=\sigma^2(A^2t+B^2s+2AB\min(s,t))$。记 $e^{j(AY(t)+BY(s))}=m_{A,B}$，则 $E(m_{A,B})=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(A^2t+B^2s+2AB\min(s,t))}$，易有 $m_{A,B}=m_{-A,-B}$。

$$\begin{aligned}\therefore R_Z(t,s)=&\frac{1}{64}(E(m_{3,-3})+E(m_{-3,3})-E(m_{3,3})-E(m_{-3,-3})+9(-E(m_{1,1})-E(m_{-1,-1})+E(m_{-1,1})\\&+E(m_{1,-1}))+3(-E(m_{3,-1})+E(m_{1,3})+E(m_{3,-1})-E(m_{-1,3})+E(m_{-3,1})-E(m_{1,-3})\\&+E(m_{-1,-3})-E(m_{-3,-1})))\\=&\frac{1}{32}(E(m_{3,-3})-E(m_{3,3})+9(-E(m_{1,1})+E(m_{1,-1}))+3(-E(m_{3,1})\\&+E(m_{3,-1})+E(m_{1,3})-E(m_{1,-3})))\\=&\frac{1}{32}\left(e^{-\frac{9}{2}\sigma^2|t-s|}-e^{-\frac{9}{2}\sigma^2(t+s+2\min(s,t))}+9\left(e^{-\frac{\sigma^2}{2}|t-s|}-e^{-\frac{\sigma^2}{2}(t+s+2\min(s,t))}\right)\right.\\&\left.+3\left(-e^{-\frac{\sigma^2}{2}(9t+s+6\min(s,t))}+e^{-\frac{\sigma^2}{2}(9t+s-6\min(s,t))}+e^{-\frac{\sigma^2}{2}(t+9s+6\min(s,t))}-e^{-\frac{\sigma^2}{2}(t+9s-6\min(s,t))}\right)\right)\end{aligned}$$

1.5 【2014-3】

由题意可知，X 与 e^{jYt} 独立，所以 $E(Z(t))=E(Xe^{jYt})=E(X)E(e^{jYt})=0$。相关函数为 $R_Z(t,s)=E(Z(t)Z^*(s))=E(X^2e^{jY\tau})=E(e^{jY\tau})=\frac{1}{1-j\tau}$。由均值和相关函数的形式可知 $Z(t)$ 为宽平稳过程。有相关函数易得功率谱密度：

$$S_Z(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_Z(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\frac{1}{2\pi}e^{-\omega}u(\omega)$$

题型 2 计算条件分布

2.1 【2010-7】

$f_{X|U}(x|u)=\frac{f_{X,U}(x,u)}{f_U(u)}$，$f_{X|V}(x|v)=\frac{f_{X,V}(x,v)}{f_V(v)}$，因此想要求这两个条件分布，只需要求出两个分式中的四个分布。下面分别求解:

求 $f_U(U)$:

$$U=Y^3\Rightarrow Y=U^{\frac{1}{3}},(-\infty,\infty)\Rightarrow f_U(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}}e^{\frac{(u^{\frac{1}{3}}-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}}\cdot\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}$$

求 $f_{X,U}(x,u)$:

$$\begin{cases} X = X \\ Y = U^{\frac{1}{3}} \end{cases} \Rightarrow |J| = \left|\frac{\partial(X,Y)}{\partial(X,U)}\right| = \frac{1}{3}U^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow f_{X,U}(x,u) = \frac{\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}+\frac{(u^{\frac{1}{3}}-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}-2\rho\frac{(x-\mu_X)(u^{\frac{1}{3}}-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]}$$

求 $f_V(v)$:

$$V = Y^2 \Rightarrow F_V(v) = P(V \le v) = P(-v^{\frac{1}{2}} < Y < v^{\frac{1}{2}}) = F_Y(v^{\frac{1}{2}}) - F_Y(-v^{\frac{1}{2}})(v \ge 0)$$

$$\Rightarrow f_V(v) = \frac{1}{2\sqrt{v}}(f_Y(v^{\frac{1}{2}}) + f_Y(-v^{\frac{1}{2}})) = \frac{\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y}\left(e^{\frac{(v^{\frac{1}{2}}-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}} + e^{\frac{(-v^{\frac{1}{2}}-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}}\right) \quad (v \in [0,\infty))$$

求 $f_{X,V}(x,v)$:

$$F_{X,V}(x,v) = P(X \le x, V \le v) = P(X \le x, -v^{\frac{1}{2}} \le Y \le v^{\frac{1}{2}}) = F_{X,Y}(x, v^{\frac{1}{2}}) - F_{X,Y}(x, -v^{\frac{1}{2}})$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f_{X,V}(x,v) =& \frac{1}{2\sqrt{v}}(f_{X,Y}(x,v^{\frac{1}{2}}) + f_{X,Y}(x,-v^{\frac{1}{2}})) \\ =& \frac{v^{-\frac{1}{2}}}{4\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\left(e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}+\frac{(v^{\frac{1}{2}}-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}-2\rho\frac{(x-\mu_X)(v^{\frac{1}{2}}-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]}\right. \\ &\left. + e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}+\frac{(-v^{\frac{1}{2}}-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}-2\rho\frac{(x-\mu_X)(-v^{\frac{1}{2}}-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]}\right)\end{aligned}$$

最终结果略。

2.2 【2008-4】

设随机矢量 $(X(T), X(0))$，则可以求得其均值向量 $\mu_0 = (0,0)$ 和协方差矩阵 $\Sigma = \begin{pmatrix} R_X(0) & R_X(\tau) \\ R_X(\tau) & R_X(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\alpha|\tau|} \\ e^{-\alpha|\tau|} & 1 \end{pmatrix}$。

$$\begin{aligned}\therefore \mu &\triangleq E(X(T)|X(0)) = 0 + e^{-\alpha|\tau|}/1 \cdot (X(0) - 0) = e^{-\alpha|\tau|}X(0) \\ \sigma^2 &\triangleq Var(X(T)|X(0)) = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} = 1 - e^{-2\alpha|\tau|}\end{aligned}$$

$$\therefore E(X(T)^4|X(0)) = \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4 = e^{-4\alpha|\tau|}X(0)^4 + 6e^{-2\alpha|\tau|}X(0)^2(1-e^{-2\alpha|\tau|}) + 3(1-e^{-2\alpha|\tau|})^2$$

2.3 【2014-4】

设随机矢量 $(X(2), X(3), X(4))$，则可以求得其均值向量和协方差矩阵：

$$\mu_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} R_X(0) & R_X(1) & R_X(2) \\ R_X(1) & R_X(0) & R_X(1) \\ R_X(2) & R_X(1) & R_X(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -\frac{5}{9} \\ 0 & 5 & 0 \\ \frac{5}{9} & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

设 $Y = X(2) + X(4)$，则 $E(X(3)Y) = E(X(2)X(3)) + E(X(3)X(4)) = 0$。

$$\begin{aligned}\therefore E(X(3)|Y) &= E(X(3)) + E(X(3)Y)E(Y^2)^{-1}(Y - E(Y)) = 0 \\ \Sigma_{X(3)|Y} &= E(X(3)^2) - E(X(3)Y)E(Y^2)^{-1}E(YX(3)) = E(X(3)^2) = 5\end{aligned}$$

$$\Rightarrow X(3)|Y \sim N(0,5) \Rightarrow Var(X(3)|Y) = E(X(3)^2|Y) - E(X(3)|Y)^2 = 5$$
$$\Rightarrow E(X(3)^2|(X(2)+X(4))) = 5$$

设 $U = X(2)+X(3)$, $v = X(2)+X(4)$，则

$$E(U^2) = E(X(2)^2 + X(3)^2 + 2X(2)X(3)) = 10,\ E(V^2) = E(X(2)^2 + X(4)^2 + 2X(2)X(4)) = \frac{80}{9}$$

$$E(UV) = E(X(2)^2 + X(2)X(4) + X(2)X(3) + X(3)X(4)) = 5 - \frac{5}{9} = \frac{40}{9}$$

$\therefore E((X(2)+X(3))|(X(2)+X(4))) = E(U) + E(UV)E(V^2)^{-1}(V - EV) = \frac{40}{9} \times \frac{9}{80} V = \frac{1}{2}(X(2)+X(4))$

题型 3 线性滤波器设计

3.1

3.2 【2009-8】

设随机矢量 $(Y(0), Y(1), Y(2))$，则可以计算其均值和协方差矩阵：

$$\mu_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} p & q & r \\ q & p & q \\ r & q & p \end{pmatrix}$$

其中 $p = R_Y(0), q = R_Y(1), r = R_Y(2)$。

$$\mu_{Y(1),Y(3)|Y(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \\ q \end{pmatrix} p^{-1}(Y(2) - 0) = \frac{q}{p} Y(2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Sigma_{Y(1),Y(3)|Y(2)} = \begin{pmatrix} p & r \\ r & p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q \\ q \end{pmatrix} p^{-1} \begin{pmatrix} q & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - \frac{q^2}{p} & r - \frac{q^2}{p} \\ r - \frac{q^2}{p} & p - \frac{q^2}{p} \end{pmatrix}$$

由协方差定义：$\Sigma_{XY} = E((X-EX)(Y-EY)) \Rightarrow \Sigma_{XY} = E(XY) - EXEY \Rightarrow E(XY) = EXEY + \Sigma_{XY}$

$$\therefore E(Y(1)Y(3)|Y(2)) = \mu_{Y(1)|Y(2)} \cdot \mu_{Y(3)|Y(2)} + \Sigma_{Y(1),Y(3)|Y(2)} = \left(\frac{q}{p} Y(2)\right)^2 + \left(r - \frac{q^2}{p}\right)$$

由题中条件可知 $\frac{q}{p} = c, r - \frac{q^2}{p} = 0$。设计一个三阶低通滤波器 $Y(n) = u_1 X(n) + u_2 X(n-1) + u_3 X(n-2)$。注意到 $X(t)$ 为高斯白噪声，所以 $R_X(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta\tau$，所以有

$$p = R_Y(0) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2,\ q = R_Y(1) = u_1u_2 + u_2u_3,\ r = R_Y(2) = u_1u_3$$

联立以上所有方程可以得到：

$$\begin{cases} q = pc \\ r = c^2 p \\ p = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \\ q = u_1u_2 + u_2u_3 \\ r = u_1u_3 \end{cases} \xrightarrow{p=1} \begin{cases} q = c,\ r = c^2 \\ u_1 + u_2 + u_3 = \sqrt{p + 2q + 2r} \\ u_1 - u_2 + u_3 = \sqrt{p - 2q + 2r} \\ u_1u_3 = r \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a = \frac{\sqrt{p+2q+2r} + \sqrt{p-2q+2r}}{2}} \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4r}) \\ u_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + 2c + 2c^2} - \sqrt{1 - 2c + 2c^2}) \\ u_3 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4r}) \end{cases}$$

综上，

$$H(z)=\frac{1}{u_1+u_2z^{-1}+u_3z^{-2}},\ \begin{cases}u_1=\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-4r})\\ u_2=\frac{1}{2}(\sqrt{1+2c+2c^2}-\sqrt{1-2c+2c^2})\\ u_3=\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-4r})\end{cases},\ a=\frac{\sqrt{1+2c+2c^2}+\sqrt{1-2c+2c^2}}{2}$$

题型 4 坐标变换

4.1 【2009-2】

$X_1=R\cos\phi,\ X_2=R\cos\phi$

$$\Rightarrow f(R,\phi)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}R^2(1-2\rho\cos\phi\sin\phi)}\cdot R=\frac{1}{2\pi}Re^{-\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}R^2(1-\rho\sin 2\phi)},\ R>0,\ \phi\in[0,2\pi)$$

$$\Rightarrow f(\phi)=\int_0^\infty f(R,\phi)dR=\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi(1-\rho\sin 2\phi)},\ \phi\in[0,2\pi)$$

$$P(X_1X_2>0)=P(\tfrac{1}{2}R^2\sin 2\phi>0)=P(0<\phi<\tfrac{\pi}{2})+P(\pi<\phi<\tfrac{3\pi}{2})$$

$$=\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-\rho\sin 2\phi}d\phi+\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}}\frac{1}{1-\rho\sin 2\phi}d\phi\right)$$

$$=\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-\rho\sin 2\phi}d\phi\right)=\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\tan^2\phi}{1+\tan^2\phi-2\rho\tan\phi}d\phi$$

$$\overset{x=\tan\phi}{=}\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi}\int_0^\infty\frac{1+x^2}{1+x^2-2\rho x}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_0^\infty\frac{1}{(\frac{x-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}})^2+1}dx$$

$$\overset{y=\frac{x-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}}{=}\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}}^\infty\frac{1}{y^2+1}dy=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

4.2 【2008-3】

设 $R=\sqrt{X^2+Y^2},\ \Phi=\arctan\frac{Y}{X}\Rightarrow X=R\cos\phi,\ Y=R\sin\phi$，则

$$f_{R,\Phi}(r,\phi)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}[(r\cos\phi-m_1)^2+(r\sin\phi-m_2)^2]}\cdot R$$

$$\Rightarrow f_R(r)=\frac{R}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(r^2+m_1^2+m_2^2)}\int_0^{2\pi}e^{r(m_1\cos\phi-m_2\sin\phi)}d\phi$$

$$=Re^{-\frac{1}{2}(r^2+m_1^2+m_2^2)}I_0\left(r\sqrt{m_1^2+m_2^2}\right),\ I_0(Z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{Z\cos\theta}d\theta$$

R 服从 Rice 分布。

题型 5 其他

5.1 【2010-8】

由于 V 和 Y 独立，所以 $E(VY^T)=EVEY$。

$$E(VY^T)=E(XY^T-GYY^T)=E(XY^T)-GE(YY^T)=\Sigma_{XY}+EXEY-G\Sigma_{YY}-G(EY)^2$$

$$E(V)=E(X-GY)=EX-GEY\Rightarrow EVEY=EXEY-G(EY)^2\Rightarrow G=\Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}$$

$\therefore EV = EX - \Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}EY$

$$\begin{aligned}\Sigma_{VV} &= E((V-EV)(V-EV)^T) = E(((X-EX)-G(Y-EY))((X-EX)-G(Y-EY))^T)\\ &= \Sigma_{XX} - G\Sigma_{YX} - \Sigma_{XY}G^T + G\Sigma_{YY}G^T\\ &= \Sigma_{XX} - \Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}\Sigma_{YX} - \Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}\Sigma_{YX} + \Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}\Sigma_{YY}\Sigma_{YY}^{-1}\Sigma_{YX}\\ &= \Sigma_{XX} - \Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}\Sigma_{YX}\end{aligned}$$

$\therefore f_V(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{|\Sigma_{VV}|}} e^{-\frac{1}{2}(V-EV)^T\Sigma_{VV}^{-1}(V-EV)}$

5.2 【2009-1】

$E(c_1X_1 + c_2X_2)^2 = c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2E(X_1X_2)$。

$\max\limits_{c_1^2+c_2^2=1} E(c_1X_1 + c_2X_2)^2 = 1 \Rightarrow E(X_1X_2) = 0 \Rightarrow E((X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2)^*) = \rho\sigma_1\sigma_2 = \rho = 0$

$\Rightarrow X_1$，X_2 独立，$E(X_1^2X_2^2) = E(X_1^2)E(X_2^2) = 1$。

5.3 【2007-5】

令 $Y_1 = X^2$，则 $f_{Y_1}(y_1) = y_1e^{-\frac{y_1^2}{2}}$，$y_1 \geq 0 \Rightarrow X^2$ 服从 Rayleigh 分布，则 Y_1 为 Gauss 分布。$\therefore \phi_Y(\omega) = e^{j\omega^T\mu - \frac{1}{2}\omega^T\Sigma\omega}$。下面分别求 μ 和 Σ。

$$\begin{aligned}\mu_i &= E(Y(t_i)) = E(X^2\cos(\omega t_i + U)) = E(X^2)E(\cos(\omega t_i + U)) = 0\\ \Sigma_{ij} &= E((Y(t_i) - EY(t_i))(Y(t_j) - EY(t_j))^*) = E(Y(t_i)Y^*(t_j))\\ &= E(X^4\cos(\omega t_i + U)(\omega t_j + U)) = \frac{1}{2}E(X^4)\cos\omega(t_i - t_j) = \frac{1}{2}E(X^4)\cos\omega\tau\\ &= \frac{1}{2}\cos\omega\tau\left(\int_0^\infty x^7e^{-\frac{x^4}{2}}dx - \int_\infty^0 x^7e^{-\frac{x^4}{2}}dx\right) = \cos\omega\tau\int_0^\infty x^7e^{-\frac{x^4}{2}}dx\\ &\overset{y=x^4}{=} \frac{1}{4}\int_0^\infty ye^{-\frac{y}{2}}dy = \cos\omega\tau\end{aligned}$$

$\therefore \mu = (0, 0, \ldots, 0)^T, \Sigma = (\cos\omega(t_i - t_j))_{m\times n}$

$\therefore \phi_Y(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\omega^T\Sigma\omega}$，$\Sigma = (\cos\omega(t_i - t_j))_{m\times n}$

4 泊松过程

题型 1 计算相关函数和功率谱密度

1.1 【2014-10】

首先推导泊松过程中某段时间内发生事件次数为奇数或偶数的概率：

P(奇数次)= $\sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)=2k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{-\lambda t}$，P(偶数次)= $\sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)=2k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda t}$。易知 $e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$，同理 $e^{-\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t)^k}{k!}$。两式求和可得：$e^{\lambda t} + e^{-\lambda t} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!}$。所以 P(偶数次)= $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda t} = \frac{1+e^{-2\lambda t}}{2}$，而 P(奇数次) = 1 - P(偶数次) = $\frac{1-e^{-2\lambda t}}{2}$。以上结论在下文中不再证明，需要用到时直接给出。

下面求解 $X(t)$ 的均值和相关系数：

$$X(t) = A\cos(2\pi f t + \pi N(t)) = A\cos 2\pi f t \cos(\pi N(t)) - A\sin 2\pi f t \sin(\pi N(t)) = A\cos 2\pi f t \cos(\pi N(t))$$

$$\therefore E(X(t)) = E(A\cos 2\pi f t \cos(\pi N(t))) = \cos 2\pi f t E(E(A\cos(\pi n)|N(t)=n)) = \cos(2\pi f t)\cdot E(0) = 0$$

$$\begin{aligned}
E(X(t)X^*(s)) &= E(A^2 \cos 2\pi f t \cos 2\pi f s \cos(\pi N(t))\cos(\pi N(s))) \\
&= \cos 2\pi f t \cos 2\pi f s \cdot E\left(A^2 \frac{1}{2}(\cos(\pi(N(t)+N(s))) + \cos(\pi(N(t)-N(s))))\right) \\
&= \cos 2\pi f t \cos 2\pi f s \cdot E\left(A^2 \cos(\pi(N(t)-N(s)))\right) \\
&= \cos 2\pi f t \cos 2\pi f s \cdot E\left(A^2(-1)\sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)-N(s)=2k+1) + A^2\sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)-N(s)=2k)\right) \\
&= \cos 2\pi f t \cos 2\pi f s \cdot \frac{a^2}{2}\left((1+e^{-2\lambda|t-s|}) - (1-e^{-2\lambda|t-s|})\right) \\
&= a^2 \cos(2\pi f t)\cos(2\pi f s) e^{-2\lambda|t-s|}
\end{aligned}$$

1.2 【2007-3】

由自相关函数的定义：

$$\begin{aligned}
R_X(t,s) &= E(X(t)X^*(s)) = E(Z^{N(t)+N(s)}) = E(p\cdot 1^{N(t)+N(s)} + (1-p)\cdot(-1)^{N(t)+N(s)}) \\
&= p + (1-p)E\left(\sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)+N(s)=2k) + (-1)\sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)-N(s)=2k+1)\right) \\
&= p + (1-p)e^{-2\lambda|t-s|}
\end{aligned}$$

1.3 【2007-4】

由相关函数的定义：

$$\begin{aligned}R_Y(t,s) &= E(Y(t)Y^*(s)) = E(X_{N(t)}X_{N(s)})\\&= E(X_{N(t)}^2P(N(t)-N(s)=0)+X_{N(t)}X_{N(s)}P(N(t)-N(s)\neq 0))\\&= e^{-\lambda|t-s|}(m^2+a^2)+(1-e^{-\lambda|t-s|})m^2 = a^2e^{-\lambda|t-s|}+m^2\end{aligned}$$

$$\therefore R_Y(\tau)=a^2e^{-\lambda|\tau|}+m^2,\ S_Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_Y(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\frac{2a^2\lambda}{\lambda^2+\omega^2}+2\pi m^2\delta(\omega)$$

题型 2 泊松过程的和

2.1 【2010-3】

P(男)= $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$，P(女)= $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ $\therefore$P(性别不同)= C_2^1·P(男)·P(女)= $\frac{2\lambda\mu}{\lambda^2+\mu^2}$

2.2 【2010-5】

P(张最晚)= $P(t_1<t_2)\cdot P(t_2<t_1)+P(t_2<t_1)\cdot P(t_1<t_2)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{\lambda}{\lambda+\mu}=\frac{2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}$

2.3 【2008-1】

令 $t_1=\min(T_1,\ldots,T_N)$，$t_2=\max(T_1,\ldots,T_N)$，则题中所求概率为 $P(T_{N+1}+t_1\geq t_2)$。

$$\begin{aligned}P(T_{N+1}+t_1\geq t_2) &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{t_1}^{t_1+T_{N+1}} f_{t_1,t_2}(t_1,t_2)\cdot f_{T_{N+1}}(t)dt_2dt_1dt\\&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{t_1}^{t_1+T_{N+1}} N(N-1)\left(e^{-\lambda t_1}-e^{-\lambda t_2}\right)^{N-2}\lambda^2e^{-\lambda(t_1+t_2)}\lambda e^{-\lambda t}dt_2dt_1dt\\&= \frac{1}{N}\end{aligned}$$

题型 3 顺序统计量

3.1 【2009-6】

设 t_A,t_B,t_C 为正常工作时间。令 $t_1=\min\{t_A,t_B,t_C\}$，$t_2=\max\{t_A,t_B,t_C\}$。

$$\begin{aligned}F(T)=P(t_2<T|t_1<S) &= \frac{P(t_2<T,t_1<S|t_2>t_1)}{P(t_1<S)}\\&= \frac{\int_0^s\int_{t_1}^T f_{t_1,t_2}(t_1,t_2)dt_2dt_1}{\int_0^s f_{t_1}(t_1)dt_1} = \frac{\int_0^s\int_{t_1}^T 3\times 2(e^{-\lambda t}-e^{-\lambda s})\lambda^2e^{-\lambda(t_1+t_2)}dt_2dt_1}{1-e^{-\lambda\cdot 3s}}\\&= \frac{1-e^{-3\lambda s}+3e^{-2\lambda T}(1-e^{-\lambda s})-3e^{-\lambda T}(1-e^{-2\lambda s})}{1-e^{-3\lambda s}}\end{aligned}$$

3.2 【2008-2】

$T_n=\max(T_1,\ldots,T_n)\Rightarrow T_n>T_1>T_2,\ T_3,\cdots,T_{n-1}.\therefore P(M=n)=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)}$。
$\therefore E(T_1+\cdots+T_M)=E(E(T_1+\cdots+T_M|M=n))=E(\frac{n}{\lambda})=\frac{1}{\lambda}E_M(n)=\frac{1}{\lambda}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}n=\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\to\infty$

3.3 【2014-1】

$P(A>t_A)=P(N(t)-N(t-t_A)=0)=e^{-\lambda t_A}\ (t_A\le t)$
$P(B>t_B)=P(N(t)-N(t+t_B-t)=0)=e^{-\lambda t_B}$
$\Rightarrow f_A(t_A)=\begin{cases}\frac{\lambda e^{-\lambda t_A}}{1-e^{-\lambda t}} & 0<t_A<t\\ 0 & else\end{cases},\ f_B(t_B)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t_B} & t_B>0\\ 0 & else\end{cases}$
$\therefore E(\min(A,B))=E(A|A<B)P(A<B)+E(B|A>B)P(A>B)$。下面分别求两项的值：

$$
\begin{aligned}
F_{A|A<B}(\tau)=P(A<\tau|A<B)&=\frac{P(A<\tau,A<B)}{P(A<B)}\\
&=\begin{cases}1 & \tau>t\\ \int_0^{\tau}\int_{t_A}^{\infty}\frac{\lambda^2e^{-\lambda(t_A+t_B)}}{1-e^{-\lambda t}}dt_Bdt_A/P(A<B) & 0<\tau\le t\end{cases}\\
&=\begin{cases}1 & \tau>t\\ \frac{1-e^{-2\lambda\tau}}{2(1-e^{-\lambda t})P(A<B)} & 0<\tau\le t\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow f_{A|A<B}(\tau)=\begin{cases}\frac{\lambda e^{-2\lambda\tau}}{(1-e^{-\lambda t})P(A<B)} & 0<\tau\le t\\ 0 & else\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow E(A|A<B)P(A<B)=\int_0^t\frac{\lambda e^{-2\lambda\tau}}{1-e^{-\lambda t}}\tau d\tau=\frac{1}{1-e^{-\lambda t}}\left(-\frac{t}{2}e^{-2\lambda t}+\frac{1}{4\lambda}(1-e^{-2\lambda t})\right)
$$

后一项的求法类似：

$$
\begin{aligned}
F_{B|A>B}(\tau)=P(B<\tau|A>B)&=\frac{P(B<\tau,A>B)}{P(A>B)}\\
&=\begin{cases}1 & \tau>t\\ \int_0^{\tau}\int_{t_B}^{t}\frac{\lambda^2e^{-\lambda(t_A+t_B)}}{1-e^{-\lambda t}}dt_Adt_B/P(A>B) & 0<\tau\le t\end{cases}\\
&=\begin{cases}1 & \tau>t\\ \frac{1-e^{-2\lambda\tau}-2e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda\tau})}{2(1-e^{-\lambda t})P(A>B)} & 0<\tau\le t\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow f_{B|A>B}(\tau)=\begin{cases}\frac{\lambda e^{-2\lambda\tau}-\lambda e^{-\lambda t}e^{-\lambda\tau}}{(1-e^{-\lambda t})P(A>B)} & 0<\tau\le t\\ 0 & else\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow E(B|A>B)P(A>B)&=\int_0^t\frac{\lambda e^{-2\lambda\tau}-\lambda e^{-\lambda t}e^{-\lambda\tau}}{1-e^{-\lambda t}}\tau d\tau\\
&=\frac{1}{1-e^{-\lambda t}}\left(\frac{t}{2}e^{-2\lambda t}+\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})-\frac{3}{4\lambda}(1-e^{-2\lambda t})\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore E(\min(A,B))&=\frac{1}{1-e^{-\lambda t}}\left(-\frac{t}{2}e^{-2\lambda t}+\frac{1}{4\lambda}(1-e^{-2\lambda t})+\frac{t}{2}e^{-2\lambda t}+\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})-\frac{3}{4\lambda}(1-e^{-2\lambda t})\right)\\
&=\frac{1}{1-e^{-\lambda t}}\left(\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})-\frac{1}{2\lambda}(1-e^{-2\lambda t})\right)\\
&=\frac{1}{1-e^{-\lambda t}}\left(\frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{2\lambda}e^{-2\lambda t}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right)
\end{aligned}
$$

注：当 $t\to\infty$ 时，$E(\min(A,B))\to\frac{1}{2\lambda}$，对应物理情境为没有时间的左分界，结果为两个指数分布的最小值的期望。

题型 4 其他

4.1 【2009-3】

$P(N(t)-N(0)=2k)$，报酬为 k；$P(N(t)-N(0)=2k+1)$，报酬也为 k。

$$\begin{aligned}
E(k) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)-N(0)=2k)\cdot k + \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)-N(0)=2k+1)\cdot k \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)-N(0)=2k)\cdot 2k + \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)-N(0)=2k+1)\cdot (2k+1)\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)-N(0)=2k+1)\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} P(N(t)-N(0)=k)\cdot k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)-N(0)=2k+1) \\
&= \frac{1}{2}\lambda t - \frac{1}{4}(1-e^{-2\lambda t})
\end{aligned}$$

4.2 【2007-8】

$P(A>\tau)=P(N(t)-N(t-\tau)=0)=e^{-\lambda\tau}\ (\tau\le t)$

$P(B>\tau)=P(N(t)-N(t+\tau-t)=0)=e^{-\lambda\tau}$

$\Rightarrow F_{A(t)}(\tau)=\begin{cases}\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{1-e^{-\lambda t}} & 0<\tau\le t\\ 1 & \tau>t\\ 0 & else\end{cases}$, $F_{B(t)}(\tau)=\begin{cases}1-e^{-\lambda\tau} & \tau>0\\ 0 & else\end{cases}$

由泊松过程的马氏性可知 $A(t)$ 和 $B(t)$ 独立，所以：

$F_{A(t),B(t)}(\tau_A,\tau_B)=\begin{cases}\frac{1-e^{-\lambda\tau_A}}{1-e^{-\lambda t}}(1-e^{-\lambda\tau_B}) & 0<\tau_A\le t\\ 1-e^{-\lambda\tau_B} & \tau_A>t,\ \tau_B>0\\ 0 & else\end{cases}$

$E(A(t)+B(t))=\int_0^t \frac{\lambda e^{-\lambda\tau}}{1-e^{-\lambda t}}d\tau+\frac{1}{\lambda}=\frac{2}{\lambda}-\frac{te^{-\lambda t}}{1-e^{-\lambda t}}$。

4.3 【2014-6】

（1）$A\sim PP(\lambda_A t)$, $B\sim PP(\lambda_B t)$, $C\sim PP(\lambda_C t)$

$\Rightarrow A+B+C\sim PP((\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C)t)\Rightarrow E=(\frac{1}{3}\times 1+\frac{2}{3}\times 2)\times 68\times 1=\frac{340}{3}$

（2）

$$\begin{aligned}
P(A=\min(A,B,C)) &= P(A<B, A<C) \\
&= \int_0^{\infty}\int_A^{\infty}\int_A^{\infty} \lambda_A e^{-\lambda_A t_A}\lambda_B e^{-\lambda_B t_B}\lambda_C e^{-\lambda_C t_C} dt_B dt_C dt_A \\
&= \frac{\lambda_A}{\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C} = \frac{21}{68}
\end{aligned}$$

（3）设跑完第 n 圈时刻为 T_n。已知在前 1/4 小时跑完了一圈，设 $A=\frac{1}{4}-T_1$，$B=T_2-\frac{1}{4}$，则 $A\sim[0,\frac{1}{4}]$，所以 $E(A)=\frac{1}{8}$；$B\sim Exp(\lambda_A)$，所以 $E(B)=\frac{1}{\lambda_A}=\frac{1}{21}$。

$\therefore E(T_{round\ 2}=E(A+B)=\frac{1}{8}+\frac{1}{21}=\frac{29}{168}$。