Universidade Federal do Paraná
Curso de Verão UFPR 2019
Curso: Introdução à Análise na Reta
Professores: Bruno de Lessa e Ricardo Paleari

2º Lista de Exercícios - 14/01

1. Dados X, Y conjuntos finitos, prove as seguintes propriedades:
   - $|X \cup Y| = |X| + |Y \setminus X|$.
   - $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$.

2. Considere X, Y conjuntos finitos, ambos com n elementos. Mostre que uma função $f : X \to Y$ será injetora se, e somente se for sobrejetora.

3. Suponha X, Y conjuntos finitos, com p e q elementos, respectivamente. Encontre o número de aplicações injetoras de X a Y. Utilize o exercício anterior para encontrar a quantidade de aplicações bijetoras entre X e Y na situação em que $p = q$.

4. Tome X, Y conjuntos finitos, com r e s elementos, respectivamente.
   - Mostre que, para haver uma função $f : X \to Y$ sobrejetora, é necessário e suficiente que $r \geq s$.
   - Quando $s = 2$ e $r \geq 2$, encontre o número de funções sobrejetoras $f : X \to Y$.

5. Seja X conjunto finito, tal que $|X| = n$. Verifique que $|P(X)| = 2^n$, com $P(X)$ sendo o conjunto das partes de X.
   Dica: *Indução finita em n.*

6. Dados A, B conjuntos finitos, com k e ℓ elementos respectivamente, prove que $A \times B$ é finito e possui $k \cdot \ell$ elementos.
   Dica: *Se $\varphi : A \to J_k$ e $\Psi : B \to J_\ell$ são bijeções, verifique que*

$$\Xi : A \times B \to J_k \times J_\ell;\ \Xi(a, b) = (\varphi(a), \Psi(b))$$

   é uma bijeção. Mostre então que

$$h : J_k \times J_\ell \to J_{k\cdot\ell};\quad h(m, n) = m + (n-1) \cdot k$$

   também é bijetora e conclua o resultado.

7. Considere $X_1, X_2, \ldots X_k$ conjuntos finitos, com $m_1, m_2, \ldots m_k$ elementos, respectivamente. Prove que $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$ é finito e possui $\prod_{j=1}^{k} m_j$ elementos.
   Dica: *Indução finita, utilizando o exercício anterior.*

8. Suponha X um conjunto finito e Y um conjunto infinito. Mostre que existem funções $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ injetora e sobrejetora, respectivamente.

9. Tome X um conjunto não enumerável. Definimos

$$A = \{E \subset X;\ E \text{ é finito/enumerável ou } E^c \text{ é finito/enumerável }\}.$$

   Verifique as seguintes afirmações sobre A:
   - $\emptyset,\ X \in A$.
   - $Y \in A \Leftrightarrow Y^c \in A$.
   - Se $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma família de conjuntos, como cada um deles pertencendo a A, então

$$Z := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n \in A.$$

10. Definimos, para cada $k \in \mathbb{N}$, o seguinte subconjunto de $P(\mathbb{N})$:

$$F_k = \{A \subset \mathbb{N}; |A| = k\}.$$

   - Prove que F_k é enumerável, para todo k.
   - Conclua que o subconjunto de $P(\mathbb{N})$ formado pelos subconjuntos **finitos** de $\mathbb{N}$ é enumerável.
   - Deduza que o subconjunto de $P(\mathbb{N})$ formado pelos subconjuntos **infinitos** de $\mathbb{N}$ **não** é enumerável.

11. Sejam X conjunto finito e Y conjunto enumerável. Demonstre que o conjunto $\mathcal{F}(X, Y)$ das funções com domínio em X e contradomínio em Y é enumerável.

12. Mostre que é possível decompor $\mathbb{N}$ em uma união enumerável de conjuntos não vazios e enumeráveis $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tais que

$$X_i \cap X_j = \emptyset, \text{ se } i \neq j.$$

   Dica: *Utilize o Teorema Fundamental da Aritmética e o fato de o conjuntos dos naturais primos ser infinito.*

13. Encontre uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sobrejetora, de modo que:

$$f^{-1}(\{n\}) \text{ é infinito, para cada } n \text{ natural}.$$

Explique porque este exercício também resolve o problema anterior.

14. Neste exercício, provaremos que o conjunto dos números algébricos é enumerável.

Definição: *Dado $x \in \mathbb{R}$, diremos que x é* **algébrico** *se existirem $n \in \mathbb{N}$ e $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{Q}$ de modo que*

$$x^n + a_n \cdot x^{n-1} + a_{n-1} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x + a_1 = 0.$$

Isto é, x é raiz de um polinômio mônico com coeficientes racionais.

As raízes enésimas de números naturais, por exemplo, são números algébricos, visto que são raízes de polinômios da forma $p(x) = x^n - a$. Sigamos para a demonstração.

- Usando o Teorema Fundamental da Álgebra e o fato de $\mathbb{Q}$ ser enumerável, verifique que o conjunto das raízes dos polinômios com coeficientes em $\mathbb{Q}$ de grau m é enumerável, para cada $m \in \mathbb{N}$.

- Conclua que o conjunto dos números algébricos é enumerável, usando o fato de a união enumerável de conjuntos enumeráveis ser também um conjunto enumerável.

15. Neste exercício, provaremos que o produto cartesiano de uma família enumerável de conjuntos não necessariamente será enumerável.

Definição: *Seja Λ um conjunto qualquer e $\{X_\lambda\}$ uma família de conjuntos indexados por Λ. Definimos:*

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda := \left\{ f : \Lambda \to \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda; \quad f(\alpha) \in X_\alpha, \ \forall \alpha \in \Lambda \right\}.$$

Suponha então $\Lambda = \mathbb{N}$ e que X_n possui pelo menos dois elementos distintos, para cada n natural. Prove que neste caso $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ **não** é enumerável.

Dica: *Aplique um argumento do tipo Diagonal de Cantor.*