Universidade Federal do Paraná
Curso de Verão UFPR 2019
Curso: Introdução à Análise na Reta
Professores: Bruno de Lessa e Ricardo Paleari

3º Lista de Exercícios - 21/01

1. Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo. Para $x \in \mathbb{K}$, denotamos seu oposto aditivo por $-x$ e se $x \neq 0$, seu inverso multiplicativo será denotado por x^{-1}. Denotamos também por 0 o elemento neutro de $+$ e por 1 o elemento neutro de $\cdot$.

   a) Prove que se $x, y \in \mathbb{K}$ e $x + y = x$, então $y = 0$ (unicidade do elemento neutro da adição).
   b) Prove que se $x, y \in \mathbb{K}$ e $x + y = 0$, então $y = -x$ (unicidade do elemento oposto da adição).
   c) Prove que se $x \in \mathbb{K}$, então $x \cdot 0 = 0$.
   d) Prove que se $x, y \in \mathbb{K}$, $x \neq 0$ e $y \neq 0$, então $x \cdot y \neq 0$.
   e) Prove que se $x, y, z \in \mathbb{K}$, $z \neq 0$ e $x \cdot z = y \cdot z$, então $x = y$.
   f) Prove que se $x, y \in \mathbb{K}$, $x \neq 0$ e $x \cdot y = x$, então $y = 1$ (unicidade do inverso multiplicativo).
   g) Prove que se $x, y \in \mathbb{K}$ e $x \cdot y = 1$, então $y = x^{-1}$ (unicidade do inverso multiplicativo).
   h) Prove que se $\in \mathbb{K}$, então $(-1) \cdot x = -x$.
   i) Prove que se $\mathbb{K}$ possui pelo menos dois elementos, então $1 \neq 0$.

2. Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado com pelo menos 2 elementos. Definimos $\mathbb{K}^+ = \{x \in \mathbb{K}; 0 \leq x \text{ e } x \neq 0\}$. Além disso, $x < y$ e $y > x$ significam $y - x \in \mathbb{K}^+$ e $y \geq x$ significa $y - x \in \mathbb{K}^+ \cup \{0\}$.

   a) Prove que $\forall x \in \mathbb{K}$ vale $x^2 \geq 0$. Além disso, prove que $x^2 > 0$ se $x \neq 0$. Conclua por indução as afirmações análogas para x^n quando $x \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$.
   b) Prove que $1 > 0$.
   c) Prove que se $x \in \mathbb{K}$, então $x \leq 0$ se, e somente se, $-x \geq 0$. Além disso, $x < 0$ se, e somente se, $-x > 0$.
   d) Prove que se $x, y, z \in \mathbb{K}$, então $x + z \leq y + z$ se, e somente se, $x \leq y$.
   e) Prove que se $x, y \in \mathbb{K}$ e $z \in \mathbb{K}^+$, então $x \cdot z \leq y \cdot z$ se, e somente se, $x \leq y$.
   f) Prove que se $x, y, z, w \in \mathbb{K}$ e $x \leq y$, $z \leq w$, então $x + z \leq y + w$.
   g) Prove que se $x, y, z, w \in \mathbb{K}$ e $0 < x \leq y$, $0 < z \leq w$, então $x \cdot z \leq y \cdot w$.

3. Defina $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$. Em $\mathbb{C}$ definimos a operações

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$$

   É possível mostrar que com essas operações $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ é um corpo, em que "0" $= (0, 0)$ e "1" $= (1, 0)$. Vamos assumir isso! Defina também $i = (0, 1)$.

   a) Prove que para todos $a, b \in \mathbb{R}$ vale $(a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = (a, b)$. Por isso usamos o abuso de notação (a, b)" $=$ "$a + i \cdot b$, pensando que a" $=$ "$(a, 0)$ e b" $=$ "$(b, 0)$, que é uma maneira de incluir $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$.
   b) Prove que $i^2 = -1$.

c) Conclua que não importa qual seja a relação de ordem $\leq$ colocada em $\mathbb{C}$, $(\mathbb{C}, +, \cdot, \leq)$ nunca será um corpo ordenado.

d) Em $\mathbb{C}$ definimos a seguinte relação $\leq$:

$$(a, b) \leq (c, d) \text{ se } (a < c) \text{ ou } (a = c \text{ e } b \leq d).$$

Prove que $\leq$ é uma ordem em $\mathbb{C}$. Ela é chamada ordem lexicográfica, ou ordem do dicionário.

4. Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado.

a) Prove que $\forall x, y \in \mathbb{K}$ vale $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

b) Prove que $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in \mathbb{K}$ com $x > -1$ vale $(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$.

5. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ subconjuntos limitados. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ defina os conjuntos

$$\begin{array}{r} \lambda \cdot A = \{\lambda \cdot a; a \in A\} \\ A + B = \{a + b; a \in A \text{ e } b \in B\} \\ A \cdot B = \{a \cdot b; a \in A \text{ e } b \in B\} \end{array} .$$

a) Prove que se $A \subset B$, então $\inf A \geq \inf B$ e $\sup A \leq \sup B$.

b) Prove que se $\lambda \geq 0$, então $\inf (\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \inf A$ e $\sup (\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \sup A$.

c) Prove que $\inf (A + B) = \inf A + \inf B$ e $\sup (A + B) = \sup A + \sup B$.

d) Prove que se $A, B \subset [0, \infty]$, então $\inf (A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$ e $\sup (A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$.