CM068 – Variáveis Complexas
Prof. Hudson Lima

Lista 2

- A função $exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é a extensão da função exponencial, definida por
$$exp(z) = e^x \cdot cis(y).$$
- Resolva os exercícios abaixo.

1. Determine onde as seguintes funções são contínuas.
   (a) $z^4 - (2-i)z^2 + iz - 4$.
   (b) $\dfrac{z+1}{z^2+1}$.
   (c) $\dfrac{x+iy}{x-1}$.
   (d) $\dfrac{z^2+6z+6}{z^2+3z+2}$.
2. Se $|g(z)| \leq M$ e $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = 0$, então $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)g(z) = 0$.
3. Se $p(z) = (z-z_0)(z-z_1)$, verifique que
$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{1}{z-z_0} + \frac{1}{z-z_1}.$$
   Tente generalizar.
4. Justifique $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.
5. Em quais pontos cada uma das funções a seguir são holomorfas?
   (a) $f(z) = \dfrac{(\overline{z})^2}{z}$.
   (b) $f(z) = x^3 + 3xy^2 + i(y^3 + 3x^2y)$.
   (c) $f(z) = \sin(x) + i\cos(x)$.
   (d) $f(z) = Re(z) + 5Im(z)$.

6. Se $f\colon U \subset \mathbb{C} \to V \subset \mathbb{C}$ é uma bijeção holomorfa com inversa $g\colon V \subset \mathbb{C} \to U \subset \mathbb{C}$ também holomorfa, verifique que
$$g'(z) = \frac{1}{f'(g(z))}.$$

7. Considere as funções seno e cosseno complexas: $\mathrm{sen}, \cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:
$$\mathrm{sen}(z) = \frac{exp(iz) - exp(-iz)}{2i}, \text{ e}$$
$$\cos(z) = \frac{exp(iz) + exp(-iz)}{2}.$$
Prove que elas estendem as noções de seno e cosseno usuais, são holomorfas, e $\mathrm{sen}'(z) = \cos(z)$ e $\cos'(z) = -\mathrm{sen}(z)$. É verdade que $\mathrm{sen}^2(z) + \cos^2(z) = 1$?

8. Faça o mesmo da questão acima para as funções hiperbólicas definidas por
$$\mathrm{senh}(z) = \frac{exp(z) - exp(-z)}{2}, \text{ e}$$
$$\cosh(z) = \frac{exp(z) + exp(-z)}{2}.$$
Existe relação entre as funções trigonométricas e hipebólicas?