Universidade Federal do Paraná
Curso de Verão UFPR 2019
Curso: Introdução à Análise na Reta
Professores: Bruno de Lessa e Ricardo Paleari

4ª Lista de Exercícios - 28/01

1. Mostre que a sequência de Fibonacci não é limitada.

2. Considere a sequência dos números triangulares, definida por

$$t_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Verifique que $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não é limitada.

3. Prove que a soma e o produto de sequências limitadas ainda são limitadas. Encontre um contraexemplo mostrando que o mesmo não vale para o quociente.

4. Mostre que a sequência $b_n = (-1)^n$ não converge.

5. Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência tal que:

   - $x_{2n} \to L$.
   - $x_{2n-1} \to L$.

   Mostre que $x_n \to L$.

   Estenda o resultado acima, da seguinte maneira: mostre que se $X_1, X_2, \ldots, X_k$ são subconjuntos infinitos, disjuntos dois a dois, tais que

$$\bigcup_{i=1}^{k} X_i = \mathbb{N}, \quad \{x_j\}_{j\in X_j} \to L, \quad j = 1, 2, \ldots, k$$

   então $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para L.

6. Prove que os seguintes limites são verdadeiros:

   - Para todo $k > 0$, $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$.

- $\lim \dfrac{n!}{n^n} = 0$.
- Para qualquer $k \in \mathbb{N}$, $\lim \sqrt[k]{n} = 1$.
- $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

7. Para cada $x \in \mathbb{R}$, verifique que

$$\lim \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Dica: *Mostre primeiramente que isto vale para o caso em que $x = m$, com $m \in \mathbb{N}$.*

8. Prove que a sequência $a_n = \sqrt[n]{n!}$ é ilimitada.

Dica: *Utilize o exercício anterior.*

9. Definimos $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ da seguinte maneira:

   - $z_1 = 1$.
   - $z_{n+1} = 1 + \sqrt{z_n},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

   Mostre que $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e encontre seu limite.

   Dica: *Prove por indução que a sequência é crescente e limitada. Use então própria fórmula de recorrência para obter o valor do limite*

10. Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência qualquer. Diremos que a é **ponto de aderência** de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se existir subsequência $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de modo que

$$x_{n_k} \to a.$$

Prove as seguintes sentenças:

- Nem toda sequência possui ponto de aderência.
- Toda sequência limitada possui ponto de aderência.
- Uma sequência limitada converge se, e somente se, possui um único ponto de aderência.
- Dado $k \in \mathbb{N}$, existe uma sequência limitada com exatamente k pontos de aderência.
- Existe sequência limitada, com imagem em $[0, 1]$, com infinitos pontos de aderência.