Curso de Verão UFPR 2020 - Álgebra Linear - Lista 1

1. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

   a) Prove que para todo $v \in V$ vale $0 \cdot v = 0$.

   b) Prove que para todo $k \in \mathbb{K}$ vale $k \cdot 0 = 0$, em que 0 denota o vetor nulo de V.

   c) Prove que se $v \in V$ e $k \in \mathbb{K}$ são tais que $k \cdot v = 0$, então $k = 0$ ou $v = 0$.

   d) Prove que para todos $k \in \mathbb{K}$ e $v \in V$ vale $-(k \cdot v) = (-k) \cdot v = k \cdot (-v)$.

   e) Prove que para todo $v \in V$ vale $(-1) \cdot v = -v$.

2. Determine se os seguintes conjuntos são espaços vetoriais (sobre algum corpo). Caso o conjunto com as operações correspondentes não seja um espaço vetorial, diga algum axioma que falha e prove o porquê ele falha.

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, com as operações
   $$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$
   e
   $$k \cdot (x_1, y_1, z_1) := (k \cdot x_1, y_1, z_1).$$

   b) $V = \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, com as operações
   $$x \tilde{+} y := x \cdot y$$
   e
   $$k \,\tilde{\cdot}\, x := x^k.$$

   c) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 1\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, com as operações
   $$(x_1, y_1, 1) + (x_2, y_2, 1) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 1)$$
   e
   $$k \cdot (x_1, y_1, 1) := (k \cdot x_1, k \cdot y_1, 1).$$

   d) $V = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, com as operações
   $$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) := (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$
   e
   $$k \cdot (a + b\sqrt{2}) := ka + kb\sqrt{2}.$$

   e) $V = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ com as operações usuais.

3. Mostre que $\mathbb{N}$ tem uma estrutura natural de espaço vetorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Generalize provando que qualquer conjunto com a cardinalidade de $\mathbb{N}$ pode ser visto como um $\mathbb{Q}$-espaço vetorial.

4. Em cada item abaixo é dado um corpo $\mathbb{K}$, um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V e um sub-conjunto $S \subset V$. Verifique quais desses S são sub-espaços vetoriais de cada V correspondente.

   a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y = z.\}$.

b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^4$ com as operações usuais e $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; z + x^2 = 0\}$.

c) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = M_2(\mathbb{R})$ com as operações usuais e $S = \{A \in M_2(\mathbb{R}); A + 2A^t = 0\}$.

d) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}$ com as operações usuais e $S = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}$.

e) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ com as operações usuais e $S = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$.

f) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ com as operações usuais e $S = C^0(\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f$ é contínua$\}$.

g) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ com as operações usuais e $S = C^1(\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f$ é derivável e $f' \in C^0(\mathbb{R})\}$.

h) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ com as operações usuais e $S = \mathcal{B}(\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f$ é limitada$\}$.

5. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, $v \in V$ e $S \subset V$ um sub-conjunto não vazio. Definimos

$$v + S := \{v + s; s \in S\},$$

chamado **translação de S por v**. Quando $v + S$ é um sub-espaço vetorial de V? Se $v_1, v_2 \in V$, mostre que ou $v_1 + S = v_2 + S$ ou $(v_1 + S) \cap (v_2 + S) = \varnothing$.

6. Sejam $A \in M_n(\mathbb{K})$, $Y \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ e $X_0 \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ tais que $AX_0 = Y$. Mostre que

$$\{X \in M_{n\times 1}(\mathbb{K}); AX = Y\} = X_0 + S,$$

em que $S = \{X \in M_n(\mathbb{K}); AX = 0\}$.

7. Sejam $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y - z = 0 \mathrm{e} - x - y + 4z = 0\}$. Mostre que S é um sub-espaço vetorial e encontre uma base para S.

8. Sejam $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $V = P_4(\mathbb{C})$ e $S = \{p \in P_4(\mathbb{C}); p(0) = p(1) = 0\}$. Mostre que S é um sub-espaço e encontre uma base para S.

9. Seja $\mathbb{K}$ um corpo, $n \in \mathbb{N}$, $V = M_n(\mathbb{K})$, $S_s = \{A \in M_n(\mathbb{K}); A = A^t\}$ e $S_{as} = \{A \in M_n(\mathbb{K}); A^t = -A\}$. Mostre que $V = S_s \oplus S_{as}$. Encontre também as dimensões dos espaços envolvidos. *Dica*: dada $A \in M_n(\mathbb{K})$, defina as matrizes $B = \frac{1}{2}(A + A^t)$ e $C = \frac{1}{2}(A - A^t)$.

10. Sejam $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e os seguintes sub-conjuntos

$$S_p = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(-x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

e

$$S_i = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Mostre que S_p e S_i são sub-espaços vetoriais e que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = S_p \oplus S_i$.

11. Seja $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e considere o conjunto $S = \{f_0, f_1, f_{-1}\} \subset V$ dado pelas funções $f_0(t) = 1$, $f_1(t) = e^{it}$ e $f_{-1}(t) = e^{-it}$, $t \in \mathbb{R}$. Mostre que S é linearmente independente. Generalize para o conjunto $S = \{f_n; n \in \mathbb{Z}\}$, $f_n(t) = e^{int}$, $t \in \mathbb{R}$.

12. Sejam $V = \mathbb{R}^4$, $S_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; x + 2y - z + w = 0\}$ e $S_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; x + 2y + z = 0 \text{ e } -y + 2z + w = 0\}$. Encontre $S_1 \cap S_2$ e $S_1 + S_2$ e calcule suas dimensões.

13. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de sub-espaços vetoriais de V. Mostre que $S := \bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ ainda é um sub-espaço vetorial de V.

14. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $S \subset V$ um subconjunto qualquer não vazio. Mostre que **span** S é o menor sub-espaço vetorial (no sentido de continência) de V que contém S. Isto é,

$$\textbf{span}\ S = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda,$$

em que $(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é a família de todos os sub-espaços vetoriais de V que contém o conjunto S.

15. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $S = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$. Prove que S é linearmente independente se, e somente se, para todo $j \in \{1, ..., n\}$, v_j não é combinação linear dos demais vetores de S. Generalize para famílias de vetores indexadas em um conjunto qualquer Λ.

16. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $S \subset V$.

    a) Mostre que se $0 \in S$, então S é linearmente dependente.

    b) Mostre que se $\tilde{S} \subset S$ e S é linearmente independente, então $\tilde{S}$ é linearmente independente.

    c) Mostre que se $S \subset \tilde{S}$ e S é linearmente dependente, então $\tilde{S}$ é linearmente dependente.

17. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $S \subset V$. Mostre que existe um subconjunto $\tilde{S} \subset S$ linearmente independente tal que $\textbf{span}\ S = \textbf{span}\ \tilde{S}$.

18. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ um conjunto linearmente independente. Mostre que $\{v_1, v_1 + v_2, ..., v_1 + v_2 + ... + v_n\}$ também é linearmente independente.

19. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $S_1, S_2 \subset V$ sub-espaços vetoriais. Se $S_1 = \textbf{span}\ \{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ e $S_2 = \textbf{span}\ \{\tilde{v}_\mu\}_{\mu\in M}$, mostre que
$$S_1 + S_2 = \textbf{span}\ \left(\{v_\lambda;\}_{\lambda\in\Lambda} \cup \{\tilde{v}_\mu\}_{\mu\in M}\right).$$
    Mais ainda, se $S_1 \cap S_2 = \{0\}$ e $\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\{\tilde{v}_\mu\}_{\mu\in M}$ são linearmente independentes, então $(\{v_\lambda;\}_{\lambda\in\Lambda} \cup \{\tilde{v}_\mu\}_{\mu\in M})$ também é linearmente independente, e portanto uma base de $S_1 + S_2$.

20. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita, S_1 e S_2 dois sub-espaços vetoriais de V. Mostre que
$$\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$

21. Sejam $V = P_3(\mathbb{K})$, $\mathcal{B} = \{1, x+1, x^2+2\}$ e $\mathcal{C} = \{x-1, x+1, x^2+1\}$. Mostre que S_1 e S_2 são bases de $P_3(\mathbb{K})$ e encontre $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$. Encontre as coordenadas dos vetores $\{1, x, x^2\}$ nas bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ respectivamente.

22. Mostre que $\dim \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \infty$.

23. Sejam $V = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Mostre que $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$.

    item Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $S \subset V$ um sub-espaço vetorial. Mostre que se $\dim S = \dim V$, então $S = V$. (Isso ensina uma técnica para mostrar quando dois sub-espaços vetoriais coincidem quando é fácil mostrar apenas uma inclusão entre eles)

24. Para um $\mathbb{C}$-espaço vetorial V, denotaremos por $V_{\mathbb{R}}$ o conjunto V visto como $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Mostre que se $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ for um subconjunto linearmente independente em V, então $\{v_1, v_2, ..., v_n, iv_1, ..., iv_n\}$ é linearmente independente em $V_{\mathbb{R}}$. Conclua que se $\dim_{\mathbb{C}} V = n$, então $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} = 2n$.

25. Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Definimos $V_{\mathbb{C}} := V \times V$ com as seguintes operações:
$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) := (u_1 + v_1, u_2 + v_2),$$
    e
$$(a + ib) \cdot (u_1, u_2) := (au_1 - bu_2, bu_1 + au_2).$$

    a) Mostre que $V_{\mathbb{C}}$ é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial.

    b) Se $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ é linearmente independente, mostre que os conjuntos $\{(v_1, 0), ..., (v_n, 0)\}$ e $\{(0, v_1), ..., (0, v_n)\}$ são linearmente independentes em $V_{\mathbb{C}}$. Conclua que se $\dim V_{\mathbb{R}} = n$, então $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = n$. O espaço vetorial $V_{\mathbb{C}}$ é chamado de **complexificação** de V. Os elementos em $V_{\mathbb{C}}$ podem ser escritos, informalmente, na forma (u, v)“ = ”$u + iv$ com $u, v \in V$ e $i^2 = -1$ (o que justifica a maneira como foi definido o produto por escalares complexos). Note que $(V_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \neq V$ (compare com o exercício anterior).

26. Seja $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Definimos o **produto direto** da família, denotado por $\Pi_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$, como o produto cartesiano da família $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, isto é, o conjunto de todas as famílias $(v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ com $v_\lambda \in V_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$. O produto direto possui estrutura de $\mathbb{K}$-espaço vetorial fazendo as operações componente a componente, isto é, se $(v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (\tilde{v}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ e $k \in \mathbb{K}$, definimos

$$(v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} + (\tilde{v}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} := (v_\lambda + \tilde{v}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda},$$

e

$$k \cdot (v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} := (k \cdot v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda},$$

Verifica-se facilmente que $\Pi_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$ satisfaz os axiomas de espaço vetorial. Definimos também $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \subset \Pi_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$, chamada **soma direta** da família $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, como o conjunto das famílias $(v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tais que $v_\lambda \neq 0$ para no máximo um número finito de índices $\lambda \in \Lambda$. Mostre que $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ é um sub-espaço vetorial do produto direto. Se $\Lambda = \mathbb{N}$ e $V_n = V$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que $V^\infty := \Pi_{n\in\mathbb{N}}V$ é o espaço das sequências em V e que $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V$ é o espaço das **sequências quase-nulas** em V. No caso $V = \mathbb{K}$, encontre uma base para $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{K}$. Você é capaz de explicitar uma base para $\mathbb{K}^\infty$?

27. Seja $W = \{(z,z) \in \mathbb{C}^2; z \in \mathbb{C}\}$. Mostre que W é um sub-espaço vetorial de $\mathbb{C}^2$ e encontre sub-espaços W' e W'' de $\mathbb{C}^2$ tais que $\mathbb{C}^2 = W \oplus W' = W \oplus W''$ mas $W' \cap W'' = \{0\}$.

28. Uma **bandeira** (em inglês "**flag**") em um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V é uma sequência crescente de sub-espaços encaixantes $L_0 \subset L_1 \subset ... \subset L_n \subset ....$ Uma bandeira é dita maximal em V se $L_0 = \{0\}$, $\cup L_i = V$ e nenhum sub-espaço M pode ser inserido entre L_i e L_{i+1}, ou seja, se $L_i \subset M \subset L_{i+1}$, então $M = L_i$ ou $M = L_{i+1}$.

    a) Seja $0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq ...V_n = W_1$ uma bandeira maximal para W_1 e $0 = L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq ... \subsetneq L_m = W_2$ uma bandeira maximal para W_2. Mostre que

    $$0 \subsetneq V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq ... \subsetneq V_n \subsetneq V_n \oplus L_1 \subsetneq V_n \oplus L_2 \subsetneq ... \subsetneq V_n \oplus L_m = W_1 \oplus W_2 = V$$

    é bandeira maximal para V. Conclua que a dimensão da soma direta (finita) de espaços vetoriais de dimensão finita tem dimensão finita igual a soma das dimensões.

    b) Seja $0 \subsetneq F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq ... \subsetneq F_n \subsetneq ... \subsetneq V$ uma bandeira (não necessariamente finita) maximal para V. Prove (sem usar o lema de Zorn diretamente) que V possui base.

29. Um **espaço afim** é um conjunto A junto com um espaço vetorial $\vec{A}$ e uma aplicação $\varphi : A \times \vec{A} \to A$ que tem as seguintes propriedades:

    - Para todo $a \in A$, $\varphi(a, 0) = a$;
    - Para todos $v, w \in \vec{A}$ e $a \in A$, vale $\varphi(\varphi(a, v), w) = \varphi(a, v + w)$;
    - Para cada $a \in A$, a aplicação $\varphi_a : \vec{A} \to A$ dada por $\varphi_a(v) = \varphi(a, v)$ é uma bijeção.

    Por um abuso de notação escrevemos $a + v := \varphi(a, v)$ (reescreva os axiomas acima usando essa notação). Em outras palavras, um espaço afim é um conjunto A junto com uma ação livre e transitiva do grupo aditivo inerente a um espaço vetorial $\vec{A}$. O espaço A é chamado o espaço de **pontos** e $\vec{A}$ é chamado o espaço de **vetores**. Para cada $a \in A$ e $v \in \vec{A}$, pensamos $\varphi(a, v)$ como a adição do ponto a com o vetor v, ou translação de v pelo ponto a, e o resultado é um novo ponto, denotado por $a + v$, como indicado acima. Verifique com esses axiomas fica bem definida uma operação de diferença de pontos resultando em um vetor: dados $a, b \in A$, verifique que existe um único $v \in \vec{A}$ tal que $a + v = b$. Denotamos $v := b - a$.

    a) Prove que para todos $a \in A$ e $v \in \vec{A}$ existe um único ponto $b \in A$ tal que $b - a = v$;

    b) Prove que para todos $a, b, c \in A$, vale $(c - b) + (b - a) = c - a$.