Universidade Federal do Paraná
Curso de Verão UFPR 2019
Curso: Introdução à Análise na Reta
Professores: Bruno de Lessa e Ricardo Paleari

6ª Lista de Exercícios - 14/02

Observação: Nesta lista, sempre consideraremos X um subconjunto de $\mathbb{R}$, $a \in X$ um ponto de acumulação de X e f uma função da forma $f : X \to \mathbb{R}$.

1. Verifique que f será contínua em $x_0 \in X$ se, e somente se, para cada sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X tal que $x_n \to x_0$, tivermos que
$$f(x_n) \to f(x_0).$$

2. Prove que a função $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$; $g(x) = |x|$ é contínua. Conclua em seguida que, se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, então $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |L|$.

3. Demonstre que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ se, e somente se, $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$

4. Mostre que se X não é limitado superiormente e existe $k > 0$ tal que
$$\lim_{x\to+\infty} x^k \cdot f(x) = L, \quad L \in \mathbb{R},$$
então $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Por outro lado, encontre X e $g : X \to \mathbb{R}$ tal que
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \;\text{ e }\; \lim_{x\to+\infty} x^k \cdot g(x) = +\infty, \quad \forall k > 0.$$

5. Mostre que a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$\begin{cases} x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0. \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
é contínua.

6. Prove que uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua que só admite valores irracionais é constante.

7. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, tal que $h\big|_{\mathbb{Q}} \equiv 0$. Explique porque $h \equiv 0$.

8. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}. \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Verifique que h é descontínua em todos os pontos.

9. Dê um exemplo de função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja descontínua em todos os pontos e cujo módulo $|g|$ seja contínua.

10. Considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{cases} x & x \in \mathbb{Q}. \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Prove que g é contínua apenas em $x = 0$.

11. Tome $h : [0, 1] \to [0, 1]$ função contínua. Prove que existe $y \in [0, 1]$ de forma que $h(y) = y$. Encontre um contraexemplo que mostre que o resultado não é válido para funções contínuas da forma $g : (0, 1) \to (0, 1)$.

12. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua, tal que $f(0) = f(1)$. Mostre que existe $x \in [0, 1/2]$ tal que $f(x) = f(x + 1/2)$.

13. Considere $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial da seguinte forma:

$$p(x) = x^k + a_k \cdot x^{k-1} + \ldots a_2 \cdot x + a_1, \quad \text{com } a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Demonstre que se k for par, então p assume mínimo.

14. Seja p uma função polinomial como no exercício anterior, dada por (1), e considere r o número de raízes reais de p, levando em conta a multiplicidade. Prove que $k - p$ é um número par.

15. Prove que a função $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $q(x) = x^6 + 12x^4 - 2x^3 - 9$ possui ao menos duas raízes.

16. Considere $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a seguinte função:

$$\begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \in \mathbb{R}^*. \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Prove que ela não é contínua na origem, mas que $h(I)$ é um intervalo para cada intervalo I contido em $\mathbb{R}$.