Universidade Federal do Paraná
Curso de Verão UFPR 2019
Curso: Introdução à Análise na Reta
Professores: Bruno de Lessa e Ricardo Paleari

1º Lista de Exercícios - 07/01

1. Escreva as seguintes proposições, sem se preocupar com sua validade ou falsidade, completamente em símbolos:

   a) Todo número natural par maior que 2 pode ser escrito como soma de dois números primos.

   b) O cubo de qualquer natural ímpar ainda é ímpar.

   c) Todo número natural pode ser escrito como produto de números primos.

   d) Dado qualquer número natural, sempre existe um número primo maior que ele.

2. Discuta o significado, por extenso, das seguintes proposições, sem se preocupar com sua validade ou falsidade:

   a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$.

   b) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \leq x$.

   c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\nexists m \in \mathbb{N}$ tal que $n < m < n+1$.

   d) $\forall n \in \mathbb{N}, n > 2$, $\nexists a, b, c \in \mathbb{Z}$ tais que $a^n + b^n = c^n$.

   e) $\forall q \in \mathbb{Q}, \exists m, n \in \mathbb{Z}$ com $\text{mdc}(m, n) = 1$ tais que $q = \frac{m}{n}$.

3. Para cada uma das proposições abaixo escreva a negação da proposição, sua contrapositiva e sua recíproca, discuta a validade ou falsidade de cada uma delas:

   a) Se $x \in \mathbb{R}$, então $x^2 \geq 0$.

   b) Se $n \in \mathbb{N}$ é múltiplo de 3, então também é múltiplo de 6.

   c) Para qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe x tal que $f(x) = x$.

   d) Para qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a equação $f(x) = 0$ sempre tem pelo menos uma solução.

   e) Para qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ a equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução.

4. Sejam X um conjunto e $A, B, C \subset X$, prove que valem as igualdades de conjuntos abaixo:

   a) $(X - A)^c = A$;

   b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

   c) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

   d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

   e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

   f) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;

   g) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;

   h) $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$.

5. Sejam X e Y conjuntos quaisquer não vazios e $f : X \to Y$ uma função.
   - Dado $A \subset X$ definimos a *imagem* de A por f como $f(A) = \{f(x); x \in A\} \subset Y$;
   - Dado $B \subset Y$ definimos a *imagem inversa* de B por f como $f^{-1}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\} \subset X$.

   a) Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 \cdot x + 1$, $A = [1, 3]$ e $B = [-1, 4]$, encontre $f(A)$ e $f^{-1}(B)$.

   b) Dados $B_1, B_2 \subset Y$, prove que valem as igualdades de conjuntos $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ e $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

c) Dados $A_1, A_2 \subset X$, será que valem $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ ou $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$? Se sim, prove, senão, encontre contraexemplos.

d) Dados $A \subset X$ e $B \subset Y$, prove que $f(f^{-1}(B)) \subset B$ e que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Prove que as igualdades não valem em geral encontrando contraexemplos. Você consegue encontrar condições sobre a função para que aconteçam as igualdades?

6. Considere a função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(1, n) = 2n - 1$ e $f(m + 1, n) = 2^m(2n - 1)$. Prove que f é uma bijeção.

7. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = ax + b$. Encontre condições sobre a e b para que f seja uma bijeção, e quando for, encontre a sua função inversa.

8. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $A, B \subset \mathbb{R}$ e defina $f : A \to B$ por $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Encontre o maior domínio $A \subset \mathbb{R}$ para o qual f esteja definida. Encontre condições sobre os números a, b, c, d e sobre os conjuntos A e B para que f seja uma bijeção, e quando for, encontre a sua função inversa.

9. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funções e $g \circ f : X \to Z$ sua composição. Prove que se f e g são injetivas, então $g \circ f$ também é injetiva. Prove também que se f e g são sobrejetivas, então $g \circ f$ também é sobrejetiva. Em outra direção, prove que se $g \circ f$ é injetiva, então f é injetiva, e se $g \circ f$ for sobrejetiva, então g é sobrejetiva. Encontre exemplos de funções f e g tais que:
- f e $g \circ f$ sejam injetivas mas g não seja injetiva;
- g e $g \circ f$ sejam sobrejetivas mas f não seja sobrejetiva.

10. Prove usando indução que $n^3 \leq 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 10$.

11. Prove usando indução que $2^n < n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 4$.

12. Prove usando indução que $n! < n^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$.

13. Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$ valem as seguintes fórmulas:

- $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;
- $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
- $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

14. Prove usando indução que $n^3 - n$ é divisível por 3 para todo $n \in \mathbb{N}$.

15. Prove usando indução que $4^n + 15n - 1$ é divisível por 9 para todo $n \in \mathbb{N}$.

16. Seja $f : A \to B$ uma função sobrejetiva. Prove que existe uma função injetiva $g : B \to A$ tal que $(f \circ g)(x) = x$ para todo $x \in B$.