EMA749 – Topologia Geral
Prof. Hudson Lima

Lista 1

- Resolva todos os exercícios do Capítulo 2 do Livro do Lee.
- Resolva os exercícios abaixo.

1. Prove que o cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ é homeomorfo a esfera $\mathbb{S}^2$ menos dois pontos.

2. Qual é a decomposição $X = int(A) \cup \partial A \cup Ext(A)$ para $X = \mathbb{R}^2$ e $A = ([0, 1]^2 \cap \mathbb{Q}^2) \cup \{(2019, 2019)\}$?

3. Seja X um conjunto não-vazio e defina

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & , \text{se } x = y \\ 1 & , \text{se } x \neq y \end{cases} .$$

   Prove que (X, d) é um espaço métrico e conclua que a topologia discreta é *metrizável*.

4. Prove que $[0, 1]$ e $\mathbb{S}^1$ não são homeomorfos.

5. Dados $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}_{>0}$, seja $N_{a,b} = \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\}$ (conjunto das PA's infinitas dos dois lados começando em a e com razão b). É verdade que $\mathcal{B} = \{N_{a,b} : a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ é uma base em $\mathbb{Z}$?

6. Sejam X e Y espaços topológicos, seja $\{A_j : j \in J\}$ uma coleção de subespaços de X tal que $X = \bigcup_{j \in J} A_j$. Suponha que $f_j \colon A_j \to Y$ sejam aplicações contínuas (A_j com a topologia subsespaço) tais que $f_i|_{A_i \cap A_j} = f_j|_{A_j \cap A_i}$ para todo $i, j \in J$. Considere a aplicação $f \colon X \to Y$ definida impondo $f|_{A_j} = f_j$ (observe que está bem definida). Verifique que f é contínua em cada um dos seguintes casos:

   (a) Todos os A_j são abertos.

   (b) Todos os A_j são fechados e J é finito.

7. Sejam (X, τ) e (Y, μ) espaços topológicos. Prove que o seguinte é uma base em $X \times Y$:

$$\mathcal{B} = \{A \times B : A \in \tau,\ B \in \mu\}.$$

A topologia induzida por esta base é a chamada *topologia produto* em $X \times Y$. Imagine como podemos re-obter a topologia canônica em $\mathbb{R}^2$ identificando $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e como um disco aberto não é um elemento da base neste caso.

8. Prove que um espaço topológico X é *Hausdorff* se, e somente se, $\Delta_X = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ é fechado na topologia produto de $X \times X$.

9. Exiba uma base para a topologia da reta com duas origens (justificando que é base). Prove que a sequência $x_n = 1/n$ converge para as duas origens e portanto não há unicidade do limite.

10. Alguns exercícios da teoria:

    (a) Dê exemplos de funções abertas que não são contínuas.

    (b) Ser homeomorfo é uma relação de equivalência.

    (c) A única topologia Hausdorff em um conjunto finito é a topologia discreta.