CM068 – Variáveis Complexas
Prof. Hudson Lima

Lista 1

- Resolva os exercícios abaixo.

1. Mostre que $z = 1 \pm i$ satisfaz $z^2 = 2z + 2$.
2. Prove por indução que
$$(1+z)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}z + \cdots + \binom{n}{n}z^n,$$
onde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
3. Verifique que
   (a) $\overline{iz} = -i \cdot \overline{z}$;
   (b) $\overline{\frac{(2+1)^2}{3-4i}} = 1$;
   (c) $|(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)| = \sqrt{3} \cdot |2z+5|$;
4. Se $z_1 = r_1 \cdot cis(\theta_1)$ e $z_2 = r_2 \cdot cis(\theta_2)$, justifique que
$$\frac{z_1}{z_2} = (r_1/r_2) \cdot cis(\theta_1 - \theta_2).$$
5. É verdade que $\left|\frac{z_1}{z_2+z_3}\right| \leq \frac{|z_1|}{||z_2|-|z_3||}$ para $|z_2| \neq |z_3|$?
6. $|Re(z)| + |Im(z)| \leq \sqrt{2} \cdot |z|$?
7. $cis(\theta_1) = cis(\theta_2) \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2 + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.
8. Fixado $z_0 \in \mathbb{C}$, verifique que $z^n = z_0$ se, e somente se,
$$\frac{z}{\sqrt[n]{r_0} \cdot cis(\frac{\theta_0}{n})}$$
é uma n-raiz da unidade, onde $z_0 = r_0 \cdot cis(\theta_0)$. Conclua que as raízes de $z^n - z_0$ são da forma $z = \sqrt[n]{r_0} \cdot cis(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n})$, para $k = 0, 1, ..., n-1$.