CM077 – Introdução à geometria diferencial
Prof. Hudson Lima

Lista 04

1. Seja $S \subseteq \mathbb{R}^3$ uma superfícies e $f\colon S \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Definimos o gradiente de f no ponto $p \in S$ como sendo o único vetor $\nabla f(p) \in T_pS$ tal que

$$\langle \nabla f(p), v \rangle = Df_p(v),\ \forall v \in T_pS.$$

Prove que, se E, F, G são os coeficientes da primeira forma fundamental com relação a $\varphi\colon \widetilde{U} \to S$, então

$$\nabla f = \left(\frac{f_x G - f_y F}{EG - F^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{f_y E - f_x F}{EG - F^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Dica: verifique que $f_x = Df(\varphi_x)$.

2. Dê uma parametrização da faixa de Möbius e calcule sua curvatura de Gauss nessa parametrização. Aproveite e prove que ela não admite orientação.

3. Seja $C \subseteq S$ uma curva regular numa superfície S com curvatura de Gauss $K > 0$. Prove que a curvatura k de C em p satisfaz

$$k \geq \min(|k_1|, |k_2|),$$

onde k_1 e k_2 são as curvaturas principais de S em p.

4. Calcule as curvaturas principais do helicóide parametrizado por

$$\varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, b\theta),$$

para $b \in \mathbb{R}$ fixado.