CM095 – Análise I
Prof. Hudson Lima

Lista extra de Sequências

- Esta é uma lista extra para auxiliar na nota das listas e como tal não há prazo para entrega. No entanto, se ela for entregue até a data da primeira prova, sua nota adicionará até 50% da nota da Lista 3. Entrega posterior conta como exercícios extra.
- A maioria das questões desta lista foram tiradas do Livro *Understanding Analysis* de Stephen Abbott.
- Todas as questões tem o mesmo valor individual.

---

1. Verifique usando a definição de limite que:
   (a) $\lim \dfrac{1}{6n^2+1} = 0$;
   (b) $\lim \dfrac{3n+1}{2n+5} = \dfrac{3}{2}$;
   (c) $\lim \dfrac{2}{\sqrt{n+3}} = 0$.

2. Argumente que a sequência

   $$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots$$

   não converge para zero (A quantidade de zeros entre 1's cresce linearmente).

3. Denote por $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro maior ou igual a x. Calcule os limites:
   (a) $\lim \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor$
   (b) $\lim \left\lfloor \frac{10+n}{2n} \right\rfloor$

4. Seja $x_n \geq 0$ uma sequência. Prove
   (a) Se $x_n \to 0$, então $\sqrt{x_n} \to 0$.
   (b) Se $x_n \to x$, então $\sqrt{x_n} \to \sqrt{x}$.

5. Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências. Defina a sequência mista (z_n) da seguinte maneira
$$(x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n, ...).$$
Prove que z_n converge se, e somente se, (x_n) e (y_n) convergem para o mesmo valor.

6. Dê exemplos ou disprove:
   (a) (x_n) e (y_n) divergentes com $(x_n + y_n)$ convergente.
   (b) (x_n) convergente, (y_n) divergente com $(x_n + y_n)$ convergente.
   (c) (x_n) converge e $x_n \neq 0$, mas $(\frac{1}{x_n})$ diverge.
   (d) (a_n) ilimitada com (b_n) convergente e $(a_n - b_n)$ limitada.
   (e) (a_n) e $(a_n b_n)$ convergentes com (b_n) divergente.

7. Dê exemplos ou disprove:
   (a) Sequência ilimitada com subsequência convergente.
   (b) Sequência monótona ilimitada com subsequência convergente.
   (c) Uma sequência que contém subsequências convergindo para qualquer ponto no conjunto $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ...\}$.
   (d) Uma sequência que tem uma subsequência limitada, mas não possui nenhuma subsequência convergente.

8. Seja (a_n) uma sequência limitada.
   (a) $y_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$ é convergente.
   (b) Chamamos o limite acima de *limite superior* e o denotamos como $\limsup a_n$. Dê significado para o *limite inferior* $\liminf a_n$.
   (c) Prove que $\liminf a_n \leq \limsup a_n$ e dê exemplos onde a igualdade não ocorre.
   (d) Prove que $\lim a_n$ existe se, e somente se, $\liminf a_n = \limsup a_n$.

9. Fixado $a \in \mathbb{R}$ e (a_n) uma sequência real. Prove os dois items abaixo.
   (a) $\lim a_n = a$ se, e somente se, (a_n) é limitada e toda subsequência de (a_n) que converge tem limite a.
   (b) $\lim a_n = a$ se, e somente se, toda subsequência de (a_n) possui uma subsequência que converge para a.