Universidade Federal do Paraná
Curso de Verão UFPR 2019
Curso: Introdução à Análise na Reta
Professores: Bruno de Lessa e Ricardo Paleari

2ª Prova 19/02 - Soluções

1. (2,0) Determine para quais valores de x cada uma das séries abaixo é convergente:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n$, com $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$;

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$;

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$.

   Solução:

   a) Seja $a_n = n^k \cdot x^n$, então

   $$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^k |x|^{n+1}}{n^k |x|^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k |x|.$$

   Como $k \geq 1$ é constante, temos $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|$. Assim, pelo critério de D'Alembert, se $|x| < 1$ a série é (absolutamente) convergente e se $|x| > 1$ a série é divergente. Se $x = \pm 1$, então a_n claramente não converge para 0, logo a série diverge. Assim, essa série converge apenas para valores de x tais que $|x| < 1$.

   b) Seja $a_n = n^n x^n$, então $\sqrt[n]{|a_n|} = n|x|$. Logo se $x \neq 0$ então $|x| > 0$ e portanto $n|x| \to \infty$ e assim a série diverge pelo critério de Cauchy. Se $x = 0$, então $a_n = 0$ para todo n e portanto a série é claramente convergente. Logo o único valor de x para o qual esta série converge é $x = 0$.

   c) Seja $a_n = \dfrac{x^n}{n^n}$, então $\sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{|x|}{n}$. Logo seja qual for $x \in \mathbb{R}$ vale $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 < 1$, e portanto a série converge pelo critério de Cauchy. Assim a série converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

   d) Seja $a_n = n! x^n$, então $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n!} \cdot |x|$. Se $x \neq 0$, como $\sqrt[n]{n!} \to \infty$ e $|x| > 0$ então $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ e portanto a série diverge pelo critério de Cauchy. Se $x = 0$, então $a_n = 0$ para todo n, logo a série é claramente convergente. Assim, o único valor de x para o qual a série converge é $x = 0$.

2. (2,5) Assumindo que funções exponenciais e trigonométricas são contínuas (no maior subconjunto da reta possível onde podem ser definidas) responda as seguintes questões:

   a) Prove que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{sen}(x) = x$.

   b) Prove que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $e^x = x^2$.

   c) Prove que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^4 = 3^x$.

   d) Prove que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $e^{\cos(\pi \cdot x)} = \log(x)$.

Solução:

a) Para $x = 0$ temos $\text{sen}(0) = 0$, que satisfaz o pedido.

b) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = e^x - x^2$, então f é contínua pois é a diferença de funções contínuas. Note que $f(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ pois $e > 2$, de modo que $\frac{1}{e} < \frac{1}{2}$, o que implica $\frac{1}{e} - 1 < \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$. Por outro lado, $f(0) = 1 - 0 = 1 > 0$. Assim $f(-1) < 0$ e $f(0) > 0$ e pelo Teorema do Valor Intermediário existe $x \in (-1, 0)$ tal que $f(x) = 0$, isto é, $e^x = x^2$.

c) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = x^4 - 3^x$, então f é contínua pois é diferença de funções contínuas. Note que $f(0) = 0 - 1 = -1 < 0$ e que $f(-1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > 0$. Assim, pelo TVI existe $x \in (-1, 0)$ tal que $f(x) = 0$, ou seja, $x^4 = 3^x$.

d) Se $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = e^{\cos(\pi \cdot x)} - \log(x)$, então f é diferença de funções contínuas e portanto é contínua. Note que $f(1) = \frac{1}{e} > 0$. Por outro lado, $f(3) = \frac{1}{e} - \log(3)$. Como $e < 3$, $\log(3) > 1$ e portanto $-\log(3) < -1$, o que implica $\frac{1}{e} - \log(3) < \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e} < 0$. Assim $f(1) > 0$ e $f(3) < 0$ e portanto pelo TVI existe $x \in (1, 3)$ tal que $f(x) = 0$, ou seja, $e^{\cos(\pi \cdot x)} = \log(x)$.

3. (1,5) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e suponha que exista $C > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que f é contínua.

Solução: Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$. Defina $\delta = \dfrac{\varepsilon}{C}$ e note que $\delta > 0$ por construção. Assim, se $x \in \mathbb{R}$ satisfaz $|x - a| < \delta$ então

$$|f(x) - f(a)| \leq C|x - a| < C \cdot \delta = C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

Logo f é contínua em qualquer ponto arbitrário a do domínio.

4. (1,5) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que exista $P > 0$ tal que $f(x + P) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f assume um máximo e um mínimo.

Solução: Afirmamos que $\text{Im}(f) = \text{Im}(f|_{[0,P]})$, isto é, para determinar o conjunto imagem de f basta encontrar o conjunto imagem da restrição de f ao intervalo $[0, P]$ (qualquer intervalo de comprimento P serviria). De fato, dado $y \in \text{Im}(f)$ então existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$. É claro que $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [kP, (k + 1)P)$ e observe que essa união é disjunta por definição. Assim existe um único $k \in \mathbb{Z}$ para o qual $x \in [kP, (k + 1)P)$, ou ainda, $kP \leq x < (k + 1)P$, logo $0 \leq x - kP < P$ e portanto $x - kP \in [0, P)$. Como f é periódica de período P temos que $f(x - kP) = f(x) = y$ e assim $y \in \text{Im}(f|_{[0,P]})$. A outra inclusão para a igualdade é óbvia. Note que a restrição $f|_{[0,P]} : [0, P] \to \mathbb{R}$ ainda é continua e como está definida em um intervalo fechado, segue do Teorema de Weierstrass que esta função possui um máximo e um mínimo. Mas como o conjunto imagem desta função é o mesmo que da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, temos que a própria f possui máximo e mínimo.

5. (2,5) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz:

- $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$;
- $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
- f é contínua em $x = 0$.

Com isso, mostre que

a) (0,5) $f(0) = 1$.

b) (0,5) $f(-x) = f(x)^{-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

c) (1,5) f é contínua em todo seu domínio.

Solução:

a) Temos em particular que $f(0+0) = f(0) \cdot f(0)$, isto é, $f(0) = f(0)^2$ e portanto $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Como por hipótese f não se anula, devemos ter $f(0) = 1$.

b) Dado $x \in \mathbb{R}$, temos $1 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) \cdot f(-x)$, e como f não se anula, concluímos que $f(-x) = f(x)^{-1}$.

c) Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere (x_n) uma sequência em $\mathbb{R}$ tal que $x_n \to a$. Então $(x_n - a) \to 0$ e como f é contínua em 0, temos que $f(x_n - a) \to f(0) = 1$. Ou seja, $\dfrac{f(x_n)}{f(a)} \to 1$, e portanto $f(x_n) \to f(a)$. Assim f é contínua em a.

6. (2,0) **Desafio**: Lembramos que a sequência de Fibonacci $(a_n)_{n \geq 0}$ é definida recursivamente por $a_0 = 0$, $a_1 = a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Mais ainda, se $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, então

$$a_n = \frac{x^n - y^n}{\sqrt{5}}, \ \forall\, n \geq 0.$$

Prove que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^{n+1}} = \frac{1}{89}.$$

Solução:

Primeiramente note que $x - y = \sqrt{5}$, $x + y = 1$ e que $x \cdot y = -1$. Além disso, $|\frac{x}{10}| < 1$ e $|\frac{y}{10}| < 1$, de modo que as séries $\sum(\frac{x}{10})^n$ e $\sum(\frac{y}{10})^n$ são convergentes. Daí

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^{n+1}} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{10^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{10^{n+1}} \right) \\
&= \frac{1}{10\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{10}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{y}{10}\right)^n \right) \\
&= \frac{1}{10\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\frac{x}{10}} - \frac{1}{1-\frac{y}{10}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{10-x} - \frac{1}{10-y} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{x-y}{(10-x)(10-y)} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{100 - 10(x+y) + xy} \\
&= \frac{1}{100 - 10 - 1} \\
&= \frac{1}{89}.
\end{aligned}$$