Universidade Federal do Paraná
Curso de Verão UFPR 2019
Curso: Introdução à Análise na Reta
Professores: Bruno de Lessa e Ricardo Paleari

1ª Prova 01/02 - Soluções

1. (2,0) Dados $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função limitada, se Im f denota o conjunto imagem de f, definimos sup f = sup (Im f) e inf f = inf (Im f). Prove que se $f, g : A \to \mathbb{R}$ são funções limitadas, então

$$\sup\,(f+g) \leq \sup\, f + \sup\, g \quad \text{e} \quad \inf\,(f+g) \geq \inf\, f + \inf\, g,$$

em que $f+g : A \to \mathbb{R}$ é a função definida por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ para cada $x \in A$. Encontre exemplos mostrando que as igualdades não necessariamente ocorrem.

Solução: Basta mostrar que o número sup f + sup g é uma cota superior para o conjunto Im $(f+g) = \{f(x)+g(x); x \in A\}$ e que inf f + inf g é uma cota inferior para este mesmo conjunto. Para isso, dado $x \in A$, como sup f é cota superior de Im (f) e sup g é cota superior de Im (g) temos $f(x) \leq \sup\, f$ e $g(x) \leq \sup\, g$, e portanto

$$f(x) + g(x) \leq \sup\, f + \sup\, g,$$

o que prova a primeira afirmação. Analogamente, por definição de ínfimo, temos $f(x) \geq \inf\, f$ e $g(x) \geq \inf\, g$, logo

$$f(x) + g(x) \geq \inf\, f + \inf\, g$$

o que conclui a segunda afirmação.

Vamos ver um exemplo onde as igualdades não ocorrem. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = -1$ se $x \leq 0$ e $f(x) = 1$ se $x > 0$. Assim, por definição f é limitada com sup $f = 1$ e inf $f = -1$. Defina também $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = 1$ se $x \leq 0$ e $g(x) = -1$ se $x > 0$. Então g também é limitada com sup $g = 1$ e inf $g = -1$. Logo sup f + sup $g = 2$ e inf f + inf $g = -2$. Por outro lado, $f(x) + g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo sup $(f+g)$ = inf $(f+g) = 0$ e não ocorre igualdade no enunciado em nenhum dos casos.

2. (2,0) Seja $(a_n)_{n\geq 0}$ a sequência de Fibonacci, que é definida recursivamente por $a_0 = 0$, $a_1 = a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Se $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, prove que

$$a_n = \frac{x^n - y^n}{\sqrt{5}}, \ \forall\, n \geq 0.$$

Solução: Vamos provar a afirmação por indução. Para $n = 0$, temos $a_0 = 0$ por definição e

$$\frac{x^0 - y^0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0,$$

e assim o caso base da indução está verificado. Dado $n \in \mathbb{N}$. suponha que a fórmula do enunciado vale para todo $k = 1, 2, ..., n$. Vamos provar que

$$a_{n+1} = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{\sqrt{5}},$$

Pela definição da sequência de Fibonacci, temos que $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ e portanto pela hipótese de indução temos que

$$a_{n+1} = \frac{x^n - y^n}{\sqrt{5}} + \frac{x^{n-1} - y^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{(x^n + x^{n-1}) - (y^n + y^{n-1})}{\sqrt{5}}.$$

Assim, basta verificar que valem $x^{n+1} = x^n + x^{n-1}$ e que $y^{n+1} = y^n + y^{n-1}$. Colocando x^n e y^n em evidência em cada uma dessas equações respectivamente, obtemos que elas são equivalentes a $x = 1 + \frac{1}{x}$ e $y = 1 + \frac{1}{y}$, que por sua vez são equivalentes as equações $x^2 - x - 1 = 0$ e $y^2 - y - 1 = 0$. Mas as raízes da equação quadrática $z^2 - z - 1 = 0$ são exatamente x, y, e portanto a hipótese de indução está verificada.

3. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$.

   a) (1,0) Dado $x \in (0,1)$, prove que $a < (b-a) \cdot x + a < b$. Conclua que a função $g : (0,1) \to (a,b)$ dada por $g(x) = (b-a) \cdot x + a$ está bem definida e é uma bijeção.

   Solução: Como $a < b$, temos $b - a > 0$, daí

   $$0 < x < 1 \Leftrightarrow 0 < (b-a) \cdot x < b - a \Leftrightarrow a < (b-a) \cdot x + a < b.$$

   Na primeira implicação multiplicamos as desigualdades pelo número positivo $b - a$ e na segunda implicação somamos a nas desigualdades (note que ambas as passagens são equivalências, para voltar basta subtrair a e depois dividir por $(b-a)$). Logo g está bem definida. Agora note que

   $$y = (b-a)x + a \Leftrightarrow (b-a)x = y - a \Leftrightarrow x = \frac{y-a}{b-a}.$$

   Assim, a função $h : (a,b) \to (0,1)$ dada por $h(y) = \frac{y-a}{b-a}$ está bem definida e é a inversa de g, portanto g é bijetiva.

   b) (1,5) Considere a função $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ definida por

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{b-a}{x-a} - 2 & \text{se} \quad x \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right) \\ 2 - \frac{b-a}{b-x} & \text{se} \quad x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right) \end{cases}$$

   Prove que f é uma bijeção.

   Dica: encontre uma inversa para f, mas cuidado com os intervalos onde cada trecho está definido!

   Solução:

   $$a < x < \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 0 < x - a < \frac{b-a}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{x-a}{b-a} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{b-a}{x-a} > 2 \Leftrightarrow \frac{b-a}{x-a} - 2 > 0.$$

   Analogamente

   $$\frac{a+b}{2} \leq x < b \Leftrightarrow -\frac{a+b}{2} \geq -x > -b \Leftrightarrow \frac{b-a}{2} \geq b - x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{b-x}{b-a} > 0 \Leftrightarrow \frac{b-a}{b-x} \geq 2 \Leftrightarrow 2 - \frac{b-a}{b-x} \leq 0.$$

   Além disso

$$y = \frac{b-a}{x-a} - 2 \Leftrightarrow \frac{b-a}{x-a} = y+2 \Leftrightarrow x-a = \frac{b-a}{y+2} \Leftrightarrow x = a + \frac{b-a}{y+2}$$

e

$$y = 2 - \frac{b-a}{b-x} \Leftrightarrow \frac{b-a}{x-b} = y-2 \Leftrightarrow x-b = \frac{b-a}{y-2} \Leftrightarrow x = b + \frac{b-a}{y-2}.$$

Portanto a função $\varphi : \mathbb{R} \to (a,b)$ dada por

$$\varphi(y) = \begin{cases} a + \dfrac{b-a}{y+2} & \text{se} \quad y > 0 \\ b + \dfrac{b-a}{y-2} & \text{se} \quad y \leq 0 \end{cases}$$

está bem definida e é a inversa de f.

c) (1,0) Conclua que qualquer intervalo não degenerado na reta tem cardinalidade igual a de $\mathbb{R}$.

Cuidado: você não pode esquecer dos intervalos fechados e semi-abertos! (use Cantor-Bernstein se quiser).

Solução: Seja $\mathbf{c} = \#\mathbb{R}$. O item b) acima concluiu que todo intervalo aberto limitado e não degenerado da reta possui cardinalidade $\mathbf{c}$. Se $I \subset \mathbb{R}$ é qualquer outro intervalo não-degenerado (não importando se é semi-aberto ou até mesmo ilimitado), temos obviamente $\#I \leq \mathbf{c}$. Por outro lado, é claro que I contém algum intervalo aberto limitado e não degenerado, de modo que $\#I \geq \mathbf{c}$, daí por Cantor-Berstein temos $\#I = \mathbf{c}$.

4. (2,5) Lembramos que se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência, diremos que a é **ponto de aderência** de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se existir subsequência $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de modo que

$$x_{n_k} \to a.$$

a) (0,5) Encontre uma sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que possui um único ponto de aderência, mas não converge.

Solução: Tome $(a_n) = (0,1,0,2,0,3,0,4,...)$, isto é, $a_{2k-1} = 0$ e $a_{2k} = k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então 0 é o único ponto de aderência de (a_n), mas a sequência não converge pois não é limitada.

b) (0,5) Encontre uma sequência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitada, com dois pontos de aderência distintos, tal que $\{|y_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Solução: Tome $(y_n) = (-1,1,-1,1,...)$, isto é, $y_n = (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então 1 e -1 são pontos de aderência e $|y_n| = 1$ para todo n, em particular $(|y_n|)$ converge.

c) (0,5) Mostre que se $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência com três pontos de aderência distintos, então $\{|z_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ não converge.

Solução: Se $(|z_n|)$ fosse convergente, então o módulo destes 3 pontos de aderência deveriam ser iguais, mas no máximo 2 números distintos podem possuir o mesmo módulo, uma contradição.

d) (0,5) Fixado $x \in \mathbb{R}$, prove que $\lim \dfrac{\text{sen }(nx)}{n} = 0$.

Solução: Temos que $\forall n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$ vale $0 \leq |\text{sen}(nx)| \leq 1$ pois $\text{Im}(\text{sen}) = [-1, 1]$, logo

$$0 \leq \frac{|\text{sen}(nx)|}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Como $\lim \dfrac{1}{n} = 0$, temos pelo Teorema do Confronto que $\lim \dfrac{|\text{sen}(nx)|}{n} = 0$, e portanto $\lim \dfrac{\text{sen}(nx)}{n} = 0$.

e) (0,5) Mostre que $w_n = \dfrac{\log n}{n}$ é uma sequência limitada, decrescente a partir de $n = 4$. Intuitivamente, qual seria seu limite?

Dica: Mostre que e^{w_n} é limitada.

Solução: Note que pelas propriedades de log e exponencial

$$e^{w_n} = e^{\frac{1}{n} \cdot \log(n)} = e^{\log(n^{1/n})} = e^{\log(\sqrt[n]{n})} = \sqrt[n]{n}.$$

Como a função exponencial é estritamente crescente e tende ao infinito quando a variável cresce, temos que w_n é decrescente se, e somente se, e^{w_n} é decrescente e w_n é limitada se, e somente se, e^{w_n} é limitada. Mas sabemos que a sequência $\sqrt[n]{n}$ é decrescente a partir de $n = 3$ e que é limitada, portanto w_n é decrescente e limitada. O candidato a limite é 0 pois $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ e $x = 0$ é o único número real tal que $e^x = 1$.

5. (2,0) **Desafio:** Mostre que

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}} = 2.$$

Descreva a expressão da esquerda como o limite de uma sequência, mostre que a mesma é monótona, limitada e conclua que seu limite é igual a 2.

Dica: Use que $2 \cdot \log(x) = x \cdot \log(2)$ se $x = 2$ ou $x = 4$.

Solução: A sequência é definida por $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_n = \sqrt{2}^{x_{n-1}}$ para $n \geq 2$. Vamos provar por indução que $x_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, para $n = 1$ temos diretamente $x_1 = \sqrt{2} < 2$. Suponha agora que $x_{n-1} < 2$. Como $\sqrt{2} > 1$, temos que $x_n = \sqrt{2}^{x_{n-1}} < \sqrt{2}^2 = 2$. Logo $x_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos provar por indução que a sequência é crescente. Para o caso base note que $x_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} > \sqrt{2}^1 = \sqrt{2} = x_1$. Suponha agora que $x_n = \sqrt{2}^{x_{n-1}} > x_{n-1}$. Então

$$x_{n+1} = \sqrt{2}^{x_n} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2}^{x_{n-1}})} > \sqrt{2}^{x_{n-1}} = x_n.$$

Assim (x_n) é crescente e limitada e de termos positivos, e portanto converge para um número positivo. Seja $\lim x_n = x > 0$. Temos também que $\lim x_{n-1} = x$, logo tomando o limite na igualdade que define a sequência por recursão obtemos:

$$x = \sqrt{2}^x.$$

Tomando o logaritmo em ambos os lados da igualdade:

$$\log(x) = x \cdot \log(2^{1/2}) = \frac{x}{2}\log 2 \Leftrightarrow 2 \cdot \log(x) = \log(2).$$

Como dado na dica, apenas dois números são solução desta equação: $x = 2$ e $x = 4$. Como $x_n < 2$ para todo n, não pode ocorrer $x = 4$, logo devemos ter $x = 2$.