第55卷第1期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.55, No.1
2012年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Jan., 2012

文章编号: 0583-1431(2012)01-0027-14 **文献标识码: A**

第一类典型域上的 Bloch 常数

王建飞

浙江师范大学数学系 金华 321004
E-mail: wangjf@mail.ustc.edu.cn

刘太顺

湖州师范学院数学系 湖州 313000
E-mail: lts@ustc.edu.cn

摘　要　引入第一类典型域 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 上的全纯映照子族 $H_k(\mathscr{R}_I(m,n))$, 当 $k\to+\infty$ 时, 该映照族就是 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 上的局部双全纯映照族. 建立了 $H_k(\mathscr{R}_I(m,n))$ 上的 Bonk 偏差定理. 当 $k=1$ 和 $k\to+\infty$ 时, 其结果分别都回到了 FitzGerad 和龚升关于典型域 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 上的 Bonk 偏差定理. 当 $m=n=1$ 时, 其结果又回到了 Liu 和 Minda 在单位圆盘上的偏差定理. 应用偏差定理, 给出了映照族 $H_k(\mathscr{R}_I(m,n))$ 上的 Bloch 常数估计, 其结果补全了从 $k=1$ 和 $k\to+\infty$ 之间的 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 上 Bloch 常数估计的所有结果, 而且把单位球上的 Bloch 常数估计推广到 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 上.

关键词　典型域; 全纯映照; 偏差定理; Bloch 常数
MR(2010) 主题分类　32H02, 30C55
中图分类　O174.56

Bloch Constant on Classical Domain of the First Type

Jian Fei WANG

Department of Mathematics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004*, P. R. China*
E-mail: *wangjf@mail.ustc.edu.cn*

Tai Shun LIU

Department of Mathematics, Huzhou Teachers College, Huzhou 313000*, P. R. China*
E-mail: *lts@ustc.edu.cn*

Abstract　In this paper, various subfamilies $H_k(\mathscr{R}_I(m,n))$ of holomorphic mappings defined in the first classical domain $\mathscr{R}_I(m,n)$ are introduced. When k tends to $+\infty$, this family reduces to the class of locally biholomorphic mappings on $\mathscr{R}_I(m,n)$. We establish the Bonk distortion theorems for $H_k(\mathscr{R}_I(m,n))$. In particular, when $k=1$ and $k\to+\infty$, the theorems reduce to that of Fitzgerald and Gong, respectively. When

收稿日期: 2010-11-01; 接受日期: 2011-05-16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10826083, 10971063, 11001246); 浙江省自然科学基金 (D7080080, Y6090694, Y6110260, Y6110053) 和浙江省创新团队资助项目 (T200924, T200905)

$m = n = 1$, this distortion theorem coincides with Liu and Minda as the unit disk case. As applications of the Bonk distortion theorems, various estimates of Bloch constants for these subfamilies of holomorphic mappings on $\mathscr{R}_I(m,n)$ are obtained. We not only give all Bloch estimates of holomorphic mappings between $1 < k < +\infty$ defined in $\mathscr{R}_I(m,n)$, but also extend our early Bloch constant estimates of the unit ball to the classical domain of the first type $\mathscr{R}_I(m,n)$.

Keywords classical domain; holomorphic mapping; distortion theorem; Bloch constant
MR(2010) Subject Classification 32H02, 30C55
Chinese Library Classification O174.56

1 引言

在单复变中, Bloch [1] 给出了如下经典的 Bloch 定理.

定理 1.1 若 $f(z)$ 为单位圆盘 $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ 上的全纯函数, $f'(0)=1$, 则存在绝对正数 r (与 f 无关), 使得 f 把 D 中某个单连通域单叶地映为半径为 r 的圆盘.

上述 r 的上确界就定义为 Bloch 常数 B. 自从 de Branges 解决了 Bieberbach 猜想之后, Bloch 常数的精确值是单复变几何函数论中少数至今尚未解决的著名问题之一.

尽管到目前为止, Bloch 常数的精确值还未解决. 但 Ahlfors [2] 早在 1938 年就给出了其下界估计 $B\geq\frac{\sqrt{3}}{4}$. 随后, Heins [3] 在 1962 年又得到了 $B>\frac{\sqrt{3}}{4}$. 1988 年, Bonk [4] 讨论了单位圆盘 D 中正规化且 Bloch 半范数为 1 的函数族, 并建立了如下的 Bonk 偏差定理

$$\mathrm{Re} f'(z)\geq\frac{\sqrt{3}-|z|}{\left(1-\frac{|z|}{\sqrt{3}}\right)^3},\quad |z|\leq\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

利用以上偏差定理, Bonk 改进了 Bloch 常数下界估计到 $B\geq\frac{\sqrt{3}}{4}+10^{-14}$, 从而对 Ahlfors 的结果作了微小的改进, 而这一微小改进打破了 Ahlfors 保持了半个世纪的记录. 更重要的是, Bonk 的方法开创了用分析的方法来研究单变量和多变量的 Bloch 常数, 如以后的工作 [5–11]. 1996 年, 陈怀惠和 Gauthier 在文 [12] 中又把 Bonk 的结果进一步改进到 $B>\frac{\sqrt{3}}{4}+2\times10^{-4}$.

在多复变数的情形中, 如果只考虑全纯映照类, 那么 Wu [13] 和 Harris [14] 给出反例表明: 若 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 为域, $f:\Omega\to\mathbb{C}^n$ 为全纯映照, 且

$$f(0)=0,\quad |\det J_f(0)|=1 \quad 或 \quad J_f(0)=I,$$

则由这样的映照所组成的映照类, Bloch 定理不成立, 从而 Bloch 常数不存在. 因此要将单复变的 Bloch 定理推广到多复变而要指望得到正面的结果, 我们就必须对全纯映照加以适当的限制, 如文 [15–17].

1992 年, Liu [5] 分别建立了 $\mathbb{C}^n$ 中单位球上全纯映照族和局部双全纯映照族的 Bloch 常数估计. 1994 年, FitzGerald 和龚升 [6] 建立了第一类典型域 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 上全纯映照子族的 Bloch 常数的估计, 把 Liu 在单位球上的结果推广到典型域 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 中. 之后, FitzGerald 和龚升 [10] 又得到了第一类典型域 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 上的局部双全纯映照族的 Bloch 常数估计.

本文引入全纯映照族 $H_k(\mathscr{R}_I(m,n))$, 用分析的方法给出了 $H_k(\mathscr{R}_I(m,n))$ 上的行列式型偏差定理, 进而得到了映照族 $H_k(\mathscr{R}_I(m,n))$ 上的 Bloch 常数估计. 特别的, 当 $m=1$ 时, 其结果就是

2007 年我们在单位球上给出的 Bloch 常数估计 [8], 但本文的方法不同于以前. 当 $k=1$ 时, 我们的结果就是文 [6] 的结果. 当 $k\to+\infty$ 时, 我们的结果又回到了文 [10] 的结果. 因此我们补全了从 $k=1$ 和 $k\to+\infty$ 之间的第一类典型域 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 上不同全纯映照子族的 Bloch 常数估计.

下面给出本文中所用到的一些符号和定义.

在本文中, 约定 $\Delta(1,r)$ 为表圆 (horodisk):

$$\Delta(1,r)=\left\{z\in D:\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}<r\right\}=D\left(\frac{1}{1+r},\frac{r}{1+r}\right),$$

其中 $D(\frac{1}{1+r},\frac{r}{1+r})$ 是以 $\frac{1}{1+r}$ 为中心, $\frac{r}{1+r}$ 为半径的圆盘. $\partial\Delta(1,r)$ 表示 $\Delta(1,r)$ 的边界, $\bar{\Delta}(1,r)$ 为 $\Delta(1,r)$ 的闭包. $\mathrm{Aut}(D)$ 表示单位圆盘 D 的全纯自同构群.

设 $z,\ w\in\mathbb{C}^n$, 则 $\mathbb{C}^n$ 在普通内积

$$\langle z,w\rangle=\sum_{j=1}^n z_j\bar{w}_j,\quad |z|=(\langle z,z\rangle)^{\frac{1}{2}}$$

意义下成为 n 维复 Hilbert 空间. 记 $\mathbb{B}$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 中的开单位球. $\mathbb{B}(a,r)$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 中以 a 为圆心, r 为半径的球; 华罗庚 [18] 给出了第一类典型域, 以 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 表示, 它是由 m 行 n 列的复元素矩阵 Z 适合于条件

$$I_m-Z\bar{Z}'>0$$

所组成, 此处 I_m 表示 m 级单位方阵, $\bar{Z}'$ 表示矩阵 Z 的共轭转置. 记 $\mathrm{Aut}(\mathscr{R}_I(m,n))$ 表示 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 上的全纯自同构群.

设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 的有界域, 记 $H(\Omega)$ 为所有从 Ω 到 $\mathbb{C}^n$ 上的全纯映照组成的集合. $f:\Omega\to\mathbb{C}^n$ 为 Ω 上的全纯映照, 其 Jacobi 矩阵用 $f'(z)$ 表示, 它的含义是

$$f'(z)=\left(\frac{\partial f_j}{\partial z_k}\right)_{1\le j,\,k\le n},$$

这里 $\|f'(a)\|_M$ 表示复 Jacobian 矩阵 $f'(a)$ 的矩阵范数. 设 $z\in\Omega$ 满足 $\det f'(z)=0$, 则称 z 是 f 在 Ω 的临界点 (单变量称为分歧点).

如果对任意的 $z\in\mathscr{R}_I(m,n)$ 都有 $\det f'(z)\neq0$, 则称全纯映照 f 为 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 上的局部双全纯映照. 记 $H_{\mathrm{loc}}(\mathscr{R}_I(m,n))$ 表示从 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 到 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上的局部双全纯映照全体.

以下的定义 1.1 和定义 1.2 来自 FitzGerald 和龚升 [6].

定义 1.1 设 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 是包含原点的有界齐性域, $f(z)=(f_1(z),f_2(z),\dots,f_n(z))$ 为 Ω 上的全纯映照, 若

$$F_f=\{g:g(z)=f(\varphi(z))-f(\varphi(0)),\ \varphi\in\mathrm{Aut}(\Omega))\}$$

是正规族, 则称 f 为 Ω 上的 Bloch 映照, 相应地 Bloch 半范数就定义为

$$\|f\|_{\mathscr{B}}=\sup\{\|(f\circ\varphi)'(0)\|_M:\varphi\in\mathrm{Aut}(\Omega)\}.$$

由文 [6] 知, $f\in H(\Omega)$ 是 Bloch 映照当且仅当 $||f||_{\mathscr{B}}<+\infty$.

定义 1.2 设 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 是包含原点的有界齐性域, $f:\Omega\to\mathbb{C}^n$ 为全纯映照. 定义泛函

$$\mathrm{d}(f)=\sup_{z\in\Omega}\frac{|\det f'(z)|}{\sqrt{K_\Omega(z,\bar{z})/K_\Omega(0,0)}}=\sup\{|\det(f\circ\varphi)'(0)|:\varphi\in\mathrm{Aut}(\Omega)\},$$

其中 $K_\Omega(z,\bar{\xi})$ 为有界齐性域 Ω 的 Bergman 核函数. 则 $\mathrm{d}(f)$ 关于全纯自同构群 $\mathrm{Aut}(\Omega)$ 不变, 且 $(\mathrm{d}(f))^{\frac{1}{n}} \le ||f||_{\mathscr{B}}$.

定义 1.3 任意正整数 k, 定义全纯映照子族 $H_k(\mathscr{R}_I(m,n))$:

$$\begin{aligned}H_k(\mathscr{R}_I(m,n)) = \{f \in H(\mathscr{R}_I(m,n)) : \forall\, a \in \mathscr{R}_I(m,n),\ \det f'(a)\\ = 0 \Rightarrow \det f'(z) = O(|z-a|^k),\ |z-a| \to 0\},\end{aligned}$$

则

$$H_1(\mathscr{R}_I(m,n)) = H(\mathscr{R}_I(m,n)), \quad H_{k+1}(\mathscr{R}_I(m,n)) \subset H_k(\mathscr{R}_I(m,n)),$$

且 $H_{\mathrm{loc}}(\mathscr{R}_I(m,n)) \subset H_k(\mathscr{R}_I(m,n))$.

本文将讨论 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 上的下列全纯映照子族:

$$\beta_k(\mathscr{R}_I, M) = \{f \in H_k(\mathscr{R}_I(m,n)) : \|f\|_{\mathscr{B}} \le M,\ \det f'(0) = 1,\ \mathrm{d}(f) = 1\}, \quad 1 \le M < +\infty.$$

$$\beta_{\mathrm{loc}}(\mathscr{R}_I, M) = \{f \in H_{\mathrm{loc}}(\mathscr{R}_I(m,n)) : \|f\|_{\mathscr{B}} \le M,\ \det f'(0) = 1,\ \mathrm{d}(f) = 1\}, \quad 1 \le M < +\infty.$$

由定义知

$$\beta_{\mathrm{loc}}(\mathscr{R}_I, M) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \beta_k(\mathscr{R}_I, M), \quad \beta_{k+1}(\mathscr{R}_I, M) \subset \beta_k(\mathscr{R}_I, M).$$

设 $f \in H(\mathscr{R}_I(m,n))$, 记 $r(a,f)$ 表示以 $f(a)$ 为圆心的最大单叶球半径 (单叶球 $\mathbb{B}(f(a),r) \subset f(\mathscr{R}_I(m,n))$ 表示存在单连通域 $G \subset \mathscr{R}_I(m,n)$), 使得 $a \in G$, f 将 G 双全纯地映为球 $\mathbb{B}(f(a),r) \subset f(\mathscr{R}_I(m,n))$). 令 $r(f) = \sup\{r(a,f) :\ a \in \mathscr{R}_I(m,n)\}$.

记 $B_k(\mathscr{R}_I, M)$ 为全纯映照族 $\beta_k(\mathscr{R}_I, M)$ 的 Bloch 常数, 即

$$B_k(\mathscr{R}_I, M) = \inf\{r(f) : f \in \beta_k(\mathscr{R}_I, M)\}.$$

记 $B_{\mathrm{loc}}(\mathscr{R}_I, M)$ 为局部双全纯映照族 $\beta_{\mathrm{loc}}(\mathscr{R}_I, M)$ 的 Bloch 常数, 即

$$B_{\mathrm{loc}}(\mathscr{R}_I, M) = \inf\{r(f) : f \in \beta_{\mathrm{loc}}(\mathscr{R}_I, M)\}.$$

2 一些引理

为证明本节的定理, 需建立下面几条引理. 其中引理 2.1 和引理 2.2 见 Liu 和 Minda [7].

引理 2.1 设 g 是 $D \cup \{1\}$ 上的全纯函数, $g(D) \subset D$, $g(1) = 1$ 而且 g 的所有零点至少是 k 重的, 则 g 在 $\triangle(1, \frac{k}{g'(1)})$ 上无零点且 g 在 $\partial \triangle (1, \frac{k}{g'(1)})$ 上有零点当且仅当 $g = E_a^k$, 其中 $a \in \partial \triangle (1, \frac{k}{g'(1)})$, $E_a = \frac{1-\bar{a}}{1-a} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

引理 2.2 设 g 如引理 2.1 所述, $G = g^{\frac{1}{n}}$ 是满足 $G(1) = g(1)^{\frac{1}{n}} = 1$的一个单值解析分支, 则

$$G(\bar{\triangle}(1,r))) \subset \bar{\triangle}(1, rG'(1)) = \bar{\triangle}\left(1, \frac{g'(1)}{n}\right),$$

其中 $0 < r < \frac{n}{g'(1)}$. 而且如果 G 把 $\partial \triangle (1,r)$ 某点映到 $\partial \triangle (1, rG'(1))$ 的某点当且仅当 $G \in \mathrm{Aut}(D)$ 且 $G(1) = 1$.

引理 2.3 设 g 是 $D \cup \{1\}$ 上的全纯函数, $g(D) \subset D$, $g(1) = 1$ 而且 g 的所有零点至少是 k 重的, 则 $g'(1) = c > 0$ 且

(1) 当 $\frac{c-k}{c+k} \le x < 1$ 时,

$$|g(x)| \ge \left(\frac{(1+\frac{c}{k})x+1-\frac{c}{k}}{(1-\frac{c}{k})x+1+\frac{c}{k}}\right)^k.$$

(2) 当 $\frac{c-1}{c+1} \le x < 1$ 时,

$$\mathrm{Re}\, g(x) \ge \left(\frac{(1+\frac{c}{k})x+1-\frac{c}{k}}{(1-\frac{c}{k})x+1+\frac{c}{k}}\right)^k.$$

证明 (1) 令 $G(z)=g(z)^{\frac{1}{k}}$, 则 $G(1)=1$. 由引理 2.1 知, G 在 $\triangle(1,r)$ 上有定义, 其中 $0<r\le \frac{k}{g'(1)}$. 又由引理 2.2 知

$$G(\bar{\triangle}(1,r)) \subset \bar{\triangle}(1, rG'(1)) = \bar{\triangle}\left(1, \frac{cr}{k}\right).$$

根据 Julia 引理知, $g'(1)=c>0$. 于是

$$|G(z)| \ge \mathrm{Re}\, G(z) \ge \frac{1-\frac{cr}{k}}{1+\frac{cr}{k}}.$$

令 $x=\frac{1-r}{1+r}$, 即 $r=\frac{1-x}{1+x}$.

由 $0<r\le\frac{k}{c}$ 得 $\frac{c-k}{c+k}\le x<1$. 从而当 $\frac{c-k}{c+k}\le x<1$ 时,

$$|g(x)| \ge \left(\frac{(1+\frac{c}{k})x+1-\frac{c}{k}}{(1-\frac{c}{k})x+1+\frac{c}{k}}\right)^k.$$

(2) 令

$$h(z)=\frac{1}{1+\frac{cr}{k}}+\frac{\frac{cr}{k}}{1+\frac{cr}{k}}z,$$

则 $h(D)=\triangle(1,\frac{cr}{k})$.

构造函数

$$k(z)=h(z)^k=\left(\frac{1}{1+\frac{cr}{k}}+\frac{\frac{cr}{k}}{1+\frac{cr}{k}}z\right)^k,$$

则当 $|z|<1$ 时,

$$\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zk''(z)}{k'(z)}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{1+crz}{1+\frac{crz}{k}}\right\}>\frac{1-cr}{1-\frac{cr}{k}},$$

从而当 $0<r<\frac{1}{c}$ 时,

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1+crz}{1+\frac{cr}{k}z}\right\}>0.$$

这就说明了 $k(z)$ 在 $\triangle(1,\frac{1}{c})$ 上是凸函数.

注意到 $k(z)$ 的象域关于实轴对称. 因此当 $x=\frac{1-r}{1+r}\in[\frac{c-1}{c+1},1)$ 时,

$$\mathrm{Re}\, g(x)=G(x)^k\ge\min\left\{\mathrm{Re}\, w^k : w\in\bar{\triangle}\left(1,\frac{cr}{k}\right)\right\}=k(-1)=\left(\frac{1-\frac{cr}{k}}{1+\frac{cr}{k}}\right)^k.$$

引理 2.4 若 f 为 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 上的 Bloch 映照, 将 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 映入 $\mathbb{C}^{m\times n}$, 则

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial Z}(Z)\right\|_M\le\frac{\|f\|_B}{1-\|Z\|_M^2}.$$

引理 2.5 设 $A=(a_{ij})$ 是复 $n\times n$ 阶方阵, 如果 $\|A\|>0$, 那么对任意的单位向量 $\xi\in\partial\mathbb{B}$, 都有

$$|A\xi|\geq\frac{|\det A|}{||A||^{n-1}}.$$

3 主要结果

在给出下面定理之前, 先介绍典型域 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 上自同构的一些相关知识. 详细内容见龚升, 余其煌和郑学安的文 [19].

设 $\varphi_a(Z)$ 为 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 的自同构, 将 a 映为原点, 则 $\varphi_a(Z)$ 可以写成

$$W=\varphi_a(Z)=A(Z-a)(I-\bar{a}'Z)^{-1}D^{-1},$$

其中 $\bar{A}'A=(I-a\bar{a}')^{-1},\bar{D}'D=(I-\bar{a}'a)^{-1}$. 而 A 为 $m\times m$ 阶方阵, D 为 $n\times n$ 阶方阵. W 对 Z 求导, 得

$$dW=AdZ(I-\bar{a}'Z)^{-1}D^{-1}+A(Z-a)(I-\bar{a}'Z)^{-1}\bar{a}'dZ(I-\bar{a}'Z)^{-1}D^{-1}.$$

取 $Z=a$, 则上式可推出

$$dW=AdZ\bar{D}'.$$

因此在 $Z=a$ 点, 我们就能算出 W 的 Jacobian 在该点的值为

$$\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)_{Z=a}=A'\otimes D',$$

其中的 $\otimes$ 为矩阵的 Kronecker 乘积. 于是通过一些计算得

$$dW=A(I-a\bar{a}')(I-Z\bar{a}')^{-1}dZ(I-\bar{a}'Z)^{-1}D^{-1}.$$

再利用 $\bar{A}'A=(I-a\bar{a}')^{-1}$, 得

$$dW=\bar{A}'^{-1}(I-Z\bar{a}')^{-1}dZ(I-\bar{a}'Z)^{-1}D^{-1}.$$

取 $Z=ta$, 代入上式得

$$dW=\bar{A}'^{-1}(I-ta\bar{a}')^{-1}dZ(I-t\bar{a}'a)^{-1}D^{-1}.$$

于是

$$\frac{\partial W}{\partial Z}(ta)=[\bar{A}'^{-1}(I-ta\bar{a}')^{-1}]'\otimes[(I-t\bar{a}'a)^{-1}D^{-1}].$$

从而

$$\det\frac{\partial W}{\partial Z}(ta)=[\det(I-ta\bar{a}')]^{-(m+n)}[\det\bar{A}']^{-n}[\det D]^{-m}.$$

定理 3.1 如果 $F\in H_k(\mathscr{R}_I(m,n))$, $d(F)=1$, $\det F'(0)=1$, 那么

$$(1)\quad\left|\det\frac{\partial F}{\partial W}(W)\right|\geq\frac{\left(1-\sqrt{\frac{m^2+mn+k}{k}}\|W\|_M\right)^k}{\left(1-\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}\|W\|_M\right)^{m^2+mn+k}}$$

对于所有的 $\|W\|_M \le \sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}$ 成立.

$$(2)\ \ \mathrm{Re}\bigg(\det\frac{\partial F}{\partial W}(W)\bigg) \ge \frac{\big(1-\sqrt{\frac{m^2+mn+k}{k}}\|W\|_M\big)^k}{\big(1-\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}\|W\|_M\big)^{m^2+mn+k}}$$

对于所有的

$$\|W\|_M \le \frac{2\sqrt{k(m^2+mn+k)}}{k(m^2+mn)+(m^2+mn+2k)}$$

成立.

证明 (1) 记 $\varphi_a(Z)$ 为 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 的自同构, 将 a 映为原点. 作函数

$$g(Z)=\det\frac{\partial F(\varphi_a(Z))}{\partial Z},$$

则

$$g(ta)=\det\frac{\partial F}{\partial W}(\varphi_a(ta))\det\frac{\partial W}{\partial Z}(ta),\quad g(a)=\det\frac{\partial F}{\partial W}(0)\det\frac{\partial W}{\partial Z}(a)=\det\frac{\partial W}{\partial Z}(a),$$

其中 $\det\frac{\partial F}{\partial W}(0)$, $\det\frac{\partial W}{\partial Z}(ta)$ 为 Kronecker 乘积的行列式.

利用前面已推结论

$$\det\frac{\partial W}{\partial Z}(ta)=[\det(I-ta\bar{a}')]^{-(m+n)}[\det\bar{A}']^{-n}[\det D]^{-m}.$$

注意到 $W=\varphi_a(Z)$, 于是我们得到

$$\det\frac{\partial\varphi_a}{\partial Z}(ta)=\det(I-ta\bar{a}')^{-(m+n)}[\det\bar{A}']^{-n}[\det D]^{-m}.$$

因此

$$\frac{g(ta)}{g(a)}=\det\frac{\partial F}{\partial W}(\varphi_a(ta))\frac{\det(I-a\bar{a}')}{\det(I-ta\bar{a}')}^{m+n}. \tag{3.1}$$

注意到由定义 1.2 知

$$\mathrm{d}(F)=\sup_{Z\in\mathscr{R}_\mathscr{I}}\frac{|\det F'(Z)|}{\sqrt{K_{\mathscr{R}_\mathscr{I}}(Z,\bar{Z})/K_{\mathscr{R}_\mathscr{I}}(0,0)}}=1.$$

由于 $\mathrm{d}(F(\varphi_a))=\mathrm{d}(F)=1$. 由文 [6] 知

$$|g(tZ)|\le|g(Z)|,\quad \frac{d[\det\frac{\partial F}{\partial W}(\varphi_a(ta))]}{dt}\bigg|_{t=1}=0.$$

今构造函数

$$h(t)=\frac{g(tZ)}{g(Z)}.$$

则有 $h(D)\subset D$, $h(1)=1$ 且由定义 1.3 知 h 的所有零点至少是 k 重的.

由引理 2.3 知, 当 $\frac{c-k}{c+k}\le t<1$ 时, 有

$$\left|\frac{g(ta)}{g(a)}\right|\ge\left(\frac{(1+\frac{c}{k})t+1-\frac{c}{k}}{(1-\frac{c}{k})t+1+\frac{c}{k}}\right)^k. \tag{3.2}$$

从而由 (3.1) 和 (3.2), 我们得到

$$\left|\det\frac{\partial F(\varphi_a(ta))}{\partial W}\right|\ge\left|\frac{\det(I-ta\bar{a}')}{\det(I-a\bar{a}')}\right|^{m+n}\left(\frac{(1+\frac{c}{k})t+1-\frac{c}{k}}{(1-\frac{c}{k})t+1+\frac{c}{k}}\right)^k.$$

由于 $\mathscr{R}_I$ 中任一矩阵 Z 可表为 $U\Lambda V$, 这里 U 和 V 为酉方阵, Λ 为对角矩阵, 对角线的元素为 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$, 且满足 $1>\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_m\geq 0$. 于是我们首先考虑

$$a=-\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_m & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

由于

$$\varphi_a(ta)=\begin{pmatrix}\mu_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \mu_m & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

其中 $\mu_i=\frac{(1-t)\lambda_i}{1-t\lambda_i^2}$. 而此时

$$\left[\frac{\det(I-ta\bar{a}')}{\det(I-a\bar{a})}\right]^{m+n}=\left(\prod_{j=1}^m\frac{1-t\lambda_j^2}{1-\lambda_j^2}\right)^{m+n}.$$

从而 $1>\mu_1\geq\mu_2\geq\cdots\geq\mu_m\geq 0$ 且 $\frac{1-t\lambda_j^2}{1-\lambda_j^2}=\frac{1}{1-\lambda_j\mu_j}$.

于是

$$\left|\det\frac{\partial F(\mu)}{\partial W}\right|\geq\left(\prod_{j=1}^m\frac{1-t\lambda_j^2}{1-\lambda_j^2}\right)^{m+n}\left(\frac{k(t+1)-c(1-t)}{k(t+1)+c(1-t)}\right)^k.$$

从而对 (3.1) 式经过计算得

$$h'(1)=c=(m+n)\sum_{i=1}^m\frac{\lambda_i^2}{1-\lambda_i^2}.$$

把 c 代入上式得

$$\left|\det\frac{\partial F(\mu)}{\partial W}\right|\geq\left(\prod_{j=1}^m\frac{1}{1-\lambda_j\mu_j}\right)^{m+n}\left(\frac{k(t+1)-(m+n)\sum_{i=1}^m\frac{\lambda_i^2}{1-\lambda_i^2}(1-t)}{k(t+1)+(m+n)\sum_{i=1}^m\frac{\lambda_i^2}{1-\lambda_i^2}(1-t)}\right)^k, \tag{3.3}$$

从而利用 $\frac{1-t\lambda_j^2}{1-\lambda_j^2}=\frac{1}{1-\lambda_j\mu_j}$, 也即

$$t=\frac{\lambda_j-\mu_j}{\lambda_j(1-\lambda_j\mu_j)}. \tag{3.4}$$

代入上面不等式 $(1-t)$ 部分并化简可得

$$\left|\det\frac{\partial F(\mu)}{\partial W}\right|\geq\left(\prod_{j=1}^m\frac{1}{1-\lambda_j\mu_j}\right)^{m+n}\left(\frac{k(t+1)+m(m+n)-(m+n)\sum_{j=1}^m\frac{1}{1-\lambda_j\mu_j}}{k(t+1)-m(m+n)+(m+n)\sum_{j=1}^m\frac{1}{1-\lambda_j\mu_j}}\right)^k. \tag{3.5}$$

最后看看 (3.5) 的右端何时为正.

固定

$$\lambda_1=\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}},$$

由 $\mu_1=\frac{(1-t)\lambda_1}{1-t\lambda_1^2}$ 和 $\frac{c-k}{c+k}\leq t<1$, 易知

$$0<\mu_1\leq\frac{(1-\frac{c-k}{c+k})\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}}{1-\frac{c-k}{c+k}\frac{k}{m^2+mn+k}}=\frac{2k\sqrt{k(m^2+mn+k)}}{c(m^2+mn)+k(m^2+mn+2k)}.$$

注意到

$$c=(m+n)\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i^2}{1-\lambda_i^2}<m(m+n)\frac{\lambda_1^2}{1-\lambda_1^2}=k,$$

从而为证所需结论, 我们只需讨论 μ_1 的范围为

$$\begin{aligned}0<\mu_1&\le\frac{2k\sqrt{k(m^2+mn+k)}}{k(m^2+mn)+k(m^2+mn+k)}\\&=\frac{\sqrt{k(m^2+mn+k)}}{m^2+mn+k}=\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}.\end{aligned}$$

于是, 如果

$$\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}\ge\mu_1\ge\mu_2\ge\cdots\mu_m\ge 0,$$

则可以找到 $0<t<1$ 及 $1>\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\lambda_m\ge 0$. t 的值可有 (3.4) 所确定. 而且从 (3.4) 中我们可以得到: 如果固定 λ_1, 则 t 为 μ_1 的严格单调递减函数. 当 μ_1 从 0 变到 $\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}$ 时, 则 t 从 1 变到 0.

现固定了 μ_1 及 λ_1, 从而固定了 t. 由 (3.4) 式可得: 取定了 μ_j 就可得到相应的 λ_j. 若把式 (3.4) 中的指标去掉, 把 t 当作常数, 则得到方程

$$t=\frac{\lambda-\mu}{\lambda(1-\lambda\mu)}.$$

将 λ 看成是 μ 的函数, 对 μ 求导数, 化简得到

$$\lambda'=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1-\lambda^2}{1-\lambda\mu+\mu^2}.$$

所以当 $0<\mu\le\mu_1<1$ 和 $0<\lambda<1$ 时, $\lambda'>0$. 因此, 当 $\mu=\mu_1$ 时, $\lambda_1=\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}$. 而当 μ 从 μ_1 递减时, 则 λ 也递减, 且取正的. 特别的, $\lim_{\mu\to 0^+}\lambda(\mu)=0$.

因此, 对于满足

$$\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}>\mu_1\ge\mu_2\ge\cdots\ge\mu_m\ge 0,$$

存在相应的 t 和 λ_i, 使得 $0<t<1$ 及

$$\frac{1}{1-\lambda_1\mu_1}\ge\frac{1}{1-\lambda_2\mu_2}\ge\cdots\ge\frac{1}{1-\lambda_m\mu_m}\ge 1.$$

若记 (3.3) 式的右端为 R, 任取 i 为 $2,3,\dots,m$ 中的一个, 且令

$$\begin{aligned}&x=\frac{1}{1-\lambda_i\mu_i},\ \ p=m+n,\\&A=k(t+1)+m(m+n)-(m+n)\sum_{j\ne i}\frac{1}{1-\lambda_i\mu_i},\\&B=k(t+1)-m(m+n)+(m+n)\sum_{j\ne i}\frac{1}{1-\lambda_i\mu_i},\end{aligned}$$

从而得

$$R=\prod_{j\ne i}\frac{1}{(1-\lambda_i\mu_i)^{m+n}}\left[x^p\left(\frac{A-px}{B+px}\right)^k\right].$$

考虑函数

$$f(x)=x^p\left(\frac{A-px}{B+px}\right)^k,$$

则

$$\begin{aligned}f'(x)&=px^{p-1}\left(\frac{A-px}{B+px}\right)^k+x^pk\left(\frac{A-px}{B+px}\right)^{k-1}\frac{-p(A+B)}{(B+px)^2}\\&=\frac{px^{p-1}(A-px)^{k-1}}{(B+px)^{k+1}}[(A-px)(B+px)-k(A+B)x]\\&=\frac{px^{p-1}(A-px)^{k-1}}{(B+px)^{k+1}}\{-p^2x^2+[p(A-B)-k(A+B)]x+AB\}.\end{aligned}$$

把 A,B,p 代入 $\{\ \}$ 中, 并令 $Q=\sum_{j\neq i}\frac{1}{1-\lambda_j\mu_j}$, 得 $\{\ \}$ 中的项为

$$-(m+n)^2x^2+[2(m+n)^2(m-Q)-2k^2(t+1)]x+k^2(t+1)^2-(m+n)^2(m-Q)^2,$$

即

$$f'(x)=\frac{px^{p-1}(A-px)^{k-1}}{(B+px)^{k+1}}\{-(m+n)^2(x-m+Q)^2+k^2(t+1)(t+1-2x)\}.$$

在 (3.4) 式中取 $j=i$, 得

$$t=\frac{\lambda_i\mu_i}{\lambda_i-\lambda_i^2\mu_i}.$$

由于 $x=\frac{1}{1-\lambda_i\mu_i}$, 从而有

$$t+1-2x=\frac{\lambda_i\mu_i}{\lambda_i-\lambda_i^2\mu_i}+1-\frac{2}{1-\lambda_i\mu_i}=\frac{-\mu_i-\lambda_i^2\mu_i}{\lambda_i(1-\lambda_i\mu_i)}\le 0.$$

因此 $f'(x)\le 0$.

注意到

$$\frac{1}{1-\lambda_1\mu_1}\ge\frac{1}{1-\lambda_i\mu_i}\quad(i=2,3,\dots,m).$$

从而在 R 中, 以 $\frac{1}{1-\lambda_1\mu_1}$ 代替 $\frac{1}{1-\lambda_i\mu_i}$ $(i=2,3,\dots,m)$, 则 R 不增. 于是由 (3.5) 式, 就有

$$\left|\det\frac{\partial F(\mu)}{\partial W}\right|\ge\left(\frac{1}{1-\lambda_1\mu_1}\right)^{m(m+n)}\left(\frac{k(t+1)+m(m+n)-m(m+n)\frac{1}{1-\lambda_1\mu_1}}{k(t+1)-m(m+n)+m(m+n)\frac{1}{1-\lambda_1\mu_1}}\right)^k.$$

注意到 $\lambda_1=\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}$, 从而有

$$t=\frac{\lambda_1-\mu_1}{\lambda_1-\lambda_1^2\mu_1}=\frac{1-\sqrt{\frac{m^2+mn+k}{k}}\mu_1}{1-\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}\mu_1}.$$

因此

$$\left|\det\frac{\partial F(\mu)}{\partial W}\right|\ge\left(\frac{1}{1-\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}\mu_1}\right)^{m(m+n)}\left(\frac{1-\sqrt{\frac{m^2+mn+k}{k}}\mu_1}{1-\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}\mu_1}\right)^k,$$

即
$$\left|\det\frac{\partial F(\mu)}{\partial W}\right|\geq\frac{\left(1-\sqrt{\frac{m^2+mn+k}{k}}\mu_1\right)^k}{\left(1-\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}\mu_1\right)^{m^2+mn+k}}\tag{3.6}$$
对 $\mu_1\leq\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}$ 时成立.

对于 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 中的一般的元素, (3.6) 式也是成立的.

事实上, 若 $W_0\in\mathscr{R}_I(m,n)$, 则有酉方阵 U,V 和对角阵 Λ, 使得 $W_0=U\Lambda V$. 而 $Z\in\mathscr{R}_I(m,n)$, $G(Z)=U^{-n}F(UZV)V^{-m}$, 于是
$$\frac{\partial G}{\partial Z}=(\det U)^{-n}(\det V)^{-m}\det\frac{\partial F}{\partial W}\det\frac{\partial W}{\partial Z}.$$
由于 $dW=UdZV$, 故 $\frac{\partial W}{\partial Z}=U'\otimes V$ 及 $\det\frac{\partial W}{\partial Z}=(\det U')^n(\det V)^m$. 这就得到
$$\det\frac{\partial G}{\partial Z}(Z)=\det\frac{\partial F}{\partial W}(W).$$
特别是当 $Z=\mu$, $W=W_0$ 时, 由于 G 也满足条件
$$G\in H_k(\mathscr{R}_I),\ \ \mathrm{d}(G)=1,\ \ \det\frac{\partial G}{\partial Z}(0)=1,$$
因此在 (3.6) 式中以 G 代替 F, 以 Z 代替 W, 则我们也得到
$$\left|\det\frac{\partial F(\mu)}{\partial W}\right|\geq\frac{\left(1-\sqrt{\frac{m^2+mn+k}{k}}\mu_1\right)^k}{\left(1-\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}\mu_1\right)^{m^2+mn+k}}.$$
这就证明了
$$\left|\det\frac{\partial F}{\partial W}(W)\right|\geq\frac{\left(1-\sqrt{\frac{m^2+mn+k}{k}}\|W\|_M\right)^k}{\left(1-\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}\|W\|_M\right)^{m^2+mn+k}}$$
对于所有的
$$\|W\|_M\leq\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}$$
成立.

下面证明定理的第 (2) 部分, 从以上的证明过程中我们可知, 我们只需确定相应的 μ_1 的范围就可. 在此时, 由引理 2.3 中的 (2) 知 $\frac{c-1}{c+1}\leq t<1$, 从而相应的 μ_1, 就有
$$\mu_1\leq\frac{\left(1-\frac{c-1}{c+1}\right)\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}}{1-\frac{c-1}{c+1}\frac{k}{m^2+mn+k}}=\frac{2\sqrt{k(m^2+mn+k)}}{c(m^2+mn+k)+(m^2+mn+2k)}.$$
注意到 $c\leq k$, 从而当
$$\mu_1\leq\frac{2\sqrt{k(m^2+mn+k)}}{k(m^2+mn+k)+(m^2+mn+2k)}$$
时, (3.6) 对应的实部估计就有
$$\mathrm{Re}\left(\det\frac{\partial F}{\partial W}(W)\right)\geq\frac{\left(1-\sqrt{\frac{m^2+mn+k}{k}}\|W\|_M\right)^k}{\left(1-\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}\|W\|_M\right)^{m^2+mn+k}},$$

即

$$\mathrm{Re}\Big(\det\frac{\partial F}{\partial W}(W)\Big)\ge\frac{\big(1-\sqrt{\frac{m^2+mn+k}{k}}\|W\|_M\big)^k}{\big(1-\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}\|W\|_M\big)^{m^2+mn+k}}$$

对于所有的

$$\|W\|_M\le\frac{2\sqrt{k(m^2+mn+k)}}{k(m^2+mn)+(m^2+mn+2k)}$$

都成立.

注 3.1 当 $m=n=1$ 时, 定理 3.1 回到了由 Liu 和 Minda [7] 中关于单位圆盘上导函数至少具有 k 重零点的全纯函数子族的偏差定理.

当 $m=1$ 时, $\mathscr{R}_I(1,n)$ 就是普通的 $\mathbb{C}^n$ 中的单位球 $\mathbb{B}$, 此时定理 3.1 就是我们在文 [8] 中的定理 1.1.

作为定理 3.1 的一个应用, 我们得到全纯映照族 $\beta_k(\mathscr{R}_I,M)$ 的 Bloch 常数估计.

定理 3.2 映照族 $\beta_k(\mathscr{R}_I,M)$ 的 Bloch 常数 $B_k(\mathscr{R}_I,M)$ 满足如下估计

$$M^{1-mn}\ge B_k(\mathscr{R}_I,M)\ge M^{1-mn}\int_0^{\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}}\frac{(1-t^2)^{mn-1}\big(1-\sqrt{\frac{m^2+mn+k}{k}}t\big)^k}{\big(1-\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}t\big)^{m^2+mn+k}}dt.$$

证明 由于 $\det\frac{\partial F}{\partial Z}(0)=1$, 从而 F 的象域 $F(\mathscr{R}_I(m,n))$ 中包含有以原点为中心的小球. 这个小球可以扩充, 直到遇到 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 在 F 的象的边界上或遇到 $\det\frac{\partial F}{\partial Z}=0$. 而这个小球的半径就是 $r(0,F)$. 由定理 3.1 知, 当 $\|W\|_M\le\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}$ 时, $\det\frac{\partial F}{\partial Z}\ne0$. 今取象域 $F(\mathscr{R}_I(m,n))$ 中的一条直线 Γ, 由原点出发到这一点, 则这点的原象在 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 的边界上或满足 $\det\frac{\partial F}{\partial Z}=0$. 于是由定理 3.1, 引理 2.4 和引理 2.5, 得

$$\begin{aligned}r(0,F)&\ge\left|\int_\Gamma dW\right|=\int_\Gamma|dW|=\int_\gamma\left|\frac{\partial F}{\partial Z}\frac{dZ'}{|dZ|}\right|\cdot|dZ|\ge\int_\gamma\frac{\det|\frac{\partial F}{\partial Z}|}{\|\frac{\partial F}{\partial Z}\|_M^{mn-1}}\cdot|dZ|\\&\ge\int_0^{\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}}\frac{\big(1-\|Z\|_M^2\big)^{mn-1}\big(1-\sqrt{\frac{m^2+mn+k}{k}}\|Z\|_M\big)^k}{\big(1-\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}\|Z\|_M\big)^{m^2+mn+k}}d|Z|,\end{aligned}\tag{3.7}$$

其中 $\gamma=F^{-1}(\Gamma)$. 记 $c=\sqrt{\frac{m^2+mn+k}{k}}$, $||Z||_M=x$,

令

$$g(x)=\frac{(1-cx)^k(1-x^2)^{mn-1}}{(1-\frac{x}{c})^{kc^2}},$$

则利用两边取对数后关于 x 求导, 化简得

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=-\frac{kx(c^2-1)}{(1-cx)(1-\frac{x}{c})}-\frac{2(mn-1)x}{1-x^2}.$$

注意到显然 $c>1$, 则当 $0\le x\le\frac{1}{c}$ 时, 由于 $|Z|>||Z||_M$, 从而可得 $g'(x)<0$. 故 (3.7) 式的右端大于或等于

$$\int_0^{\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}}\frac{\big(1-t^2\big)^{mn-1}\big(1-\sqrt{\frac{m^2+mn+k}{k}}t\big)^k}{\big(1-\sqrt{\frac{k}{m^2+mn+k}}t\big)^{m^2+mn+k}}dt.$$

从而就得到了定理 3.2 中 Bloch 常数的下界估计.

利用文 [6] 的方法, 我们类似地估计 Bloch 常数的上界, 令

$$W=(W_{ij})_{1\le i,j\le m}=F(Z)=\begin{pmatrix} Mz_{11} & Mz_{12} & \cdots & Mz_{1n} \\ Mz_{21} & Mz_{22} & \cdots & Mz_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Mz_{m1} & Mz_{m2} & \cdots & M^{1-mn}z_{mn} \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

其中 $M\ge 1$. 将 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 映入

$$I-\begin{pmatrix} \frac{W_{11}}{M} & \frac{W_{12}}{M} & \cdots & \frac{W_{1n}}{M} \\ \frac{W_{21}}{M} & \frac{W_{22}}{M} & \cdots & \frac{W_{2n}}{M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{W_{m1}}{M} & \frac{W_{m1}}{M} & \cdots & \frac{M^{mn}W_{mn}}{M} \end{pmatrix}\overline{\begin{pmatrix} \frac{W_{11}}{M} & \frac{W_{12}}{M} & \cdots & \frac{W_{1n}}{M} \\ \frac{W_{21}}{M} & \frac{W_{22}}{M} & \cdots & \frac{W_{2n}}{M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{W_{m1}}{M} & \frac{W_{m1}}{M} & \cdots & \frac{M^{mn}W_{mn}}{M} \end{pmatrix}}' > 0.$$

因此映照 (3.8) 的 Jacobian 矩阵为

$$\frac{\partial W}{\partial Z}=\begin{pmatrix} M & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & M & \\ 0 & & & M^{1-mn} \end{pmatrix}.$$

若 $\varphi(Z)$ 为 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 的全纯自同构, 将 Z_0 映为原点, 则

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial Z}(0)\right\|_M=1-\mu_n^2,$$

其中 μ_n^2 为矩阵 $\bar{Z}_0'Z_0$ 的最小正的特征根. 于是得

$$||F||_\beta=\sup\left\{\left\|\frac{\partial F\circ\varphi}{\partial Z}(0)\right\|_M:\varphi\in\mathrm{Aut}(\mathscr{R}_I(m,n))\right\}\le M.$$

所以 (3.8) 所定义的 Bloch 映照属于 $\beta_k(\mathscr{R}_I,M)$, 且显然可知: 由 (3.8) 所定义的 Bloch 映照 F 的象域 $F(\mathscr{R}_I(m,n))$ 中, 包含以原点为中心的最大单叶球半径为 M^{1-mn}.

注 3.2 (1) 当 $m=1$, $\mathscr{R}_I(m,n)$ 就是 $\mathbb{C}^n$ 中的普通单位球 $\mathscr{B}^n$, 此时, 定理 3.2 就是我们在文 [8] 中的结果, 而且本文的方法不同于以前.

(2) 令 $M\to+\infty$, 我们用新的方法再次得到了如下局部双全纯映照族 $\beta_{\mathrm{loc}}(\mathscr{R}_I,M)$ 上的 Bloch 常数估计, 此结果首先由 FitzGerald 和龚升在文 [10] 给出.

推论 3.3 映照族 $\beta_{\mathrm{loc}}(\mathscr{R}_I,M)$ 的 Bloch 常数 $B_{\mathrm{loc}}(\mathscr{R}_I,M)$ 满足如下估计

$$M^{1-mn}\ge B_{\mathrm{loc}}(\mathscr{R}_I,M)\ge M^{1-mn}\int_0^1\frac{(1+t)^{mn-1}}{(1-t)^{m^2+1}}\exp\left\{\frac{-m(m+n)t}{1-t}\right\}dt.$$

致谢 本文作者感谢审稿人的忠实建议.

参 考 文 献

[1] Bloch A., Les théorèmes de M. Valiron sur les functions entières et la théorie de l'uniformisation, *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse*, 1925, **17**: 1–22.

[2] Ahlfors L. V., An extension of Schwarz's lemma, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1938, **43**: 359-364.

[3] Heins M., On a class of conform metrics, *Nagoya Math. J.*, 1962, **21**: 1–60.

[4] Bonk M., On Bloch's constant, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1990, **110**: 889–894.

[5] Liu X. Y., Bloch functions of several complex variables, *Pacific J. Math.*, 1992, **152**: 347–363.

[6] FitzGerald C. H., Gong S., The Bloch theorem in several complex variables, *J. Geom. Anal.*, 1994, **4**: 35–58.

[7] Liu X. Y., Minda D., Distortion theorems for Bloch functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1992, **333**: 325–338.

[8] Wang J. F., Liu T. S., Bloch constant of holomorphic mappings on the unit ball of $\mathbb{C}^n$, *Chin. Ann. Math.*, 2007, **28B**: 667–684.

[9] Yan Z. M., Gong S., Bloch constant of holomorphic mappings on bounded symmetric domains, *Sci. China. Ser. A-Math.*, 1993, **36**: 285–299.

[10] FitzGerald C. H., Gong S., The locally biholomorphic Bloch constant and Marden constant of several complex variables, *Computational Methods and Function Theory*, 1994, **5**: 147–158.

[11] Wang J. F., Liu T. S., Bloch constant of holomorphic mappings on the unit polydisk of $\mathbb{C}^n$, *Sci. China. Ser. A-Math.*, 2008, **151**: 777–784.

[12] Chen H., Gauthier P. M., On Bloch's constant, *J. Anal. Math.,* 1996, **69**: 275–291.

[13] Wu H., Normal families of holomorphic mappings, *Acta Math.*, 1967, **119**: 193–233.

[14] Harris L. A., On the size of balls covered by analytic transformations, *Monatschefte für Mathematik*, 1977, **83**: 9–23.

[15] Bochner S., Bloch theorem for real variables, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1946, **52**: 715–719.

[16] Hahn K. T., High dimensional generalizations of the Bloch constant and their lower bounds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1973, **179**: 263–274.

[17] Takahashi S., Univalent mappings in several complex variables, *Ann. of Math.*, 1951, **53**: 464–471.

[18] Hua L. K., Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domain, Beijing: Science Press, 1958; Tran. of Math. Monographs, Vol. 6, Providence, RI: AMS, 1963.

[19] Gong S., Yu Q. H., Zheng X. A., Bloch Constant and Schwarzian Derivative, Shanghai: Shanghai Science and Technical Publishers, 1998 (in Chinese).