基于石头数的整数分解法

左洪盛

E-mail:zuohsh@sohu.com

摘要 九 表示由任意多个字符 9 组成的形如 999 的整数,$\overline{九}$ 表示 九 的长度，称与 10 互质的正整数为普通奇数，对于普通奇数 N 有 $10^{\overline{九}} \equiv 1 \pmod N$ 成立. 余环是通过特定算法，由普通奇数的余数形成的具有固定相邻关系的余数序列. 首先，证明了质数的所有余环的长度相等并且 $p-1=\overline{九}\cdot X$ 成立；研究了质数乘方和多质因子合数的余环长度规律，发现了本征余环和同余余环. 根据普通奇数的余环长度规律，得到了一种整数的筛法:$\overline{九_{[N]}} \mid (N-1)$，可以得到质数和具有如下性质的合数: $\overline{九_{[N]}} \mid (N-1-\varphi(N))$. 和特定长度的九对应的质数叫做特定长度九的本征质数，石头数能被特定长度 九 的所有本征质数整除，它有如下计算公式:

$$S=\frac{九}{\prod\limits_{m\mid\overline{九},m<\overline{九}} S_m}$$

最后，基于 $\overline{九}$ 和石头数的理论与计算方法，形成了一种基于石头数的整数分解法，可以表述为: N 是普通奇数，则以 $\overline{九_{[N]}}$ 的所有因子为九长度，这些 九 对应的所有本征质数的集合包含了 N 的所有质因子.

关键词 九，余环，石头数，筛法，整数分解法.

MR(2010) 主题分类 11A41,11A51

中图分类 O156.1

A Factorization Method Based On Stone Number

Abstract 九 denotes numbers whose digits are all 9 like 999 and $\overline{九}$ denotes its length. Numbers sharing no common positive factors with 10 are called common-odd. For a common-odd N $10^{\overline{九}} \equiv 1 \pmod N$. Remainder-loop represents common-odd' s remainders having fixed neighborhood. First it is proved that all remainder-loops of a prime have the same length and $p-1=\overline{\text{九}}\cdot X$. $\overline{\text{九}}$ of primes composite numbers is also studied, and find intrinsic remainder-loop and congruence remainder-loop. From rules of $\overline{\text{九}}$ of common-odd, a sieve method is find,i.e. $\overline{\text{九}_{[N]}} \mid (N-1)$, by which all primes and composite numbers satisfying $\overline{\text{九}_{[N]}} \mid (N-1-\varphi(N))$ remain. Every common-odd prime has a corresponding 九, call the prime is a intrinsic-prime of the 九. There is a special kind of number called stone-number which can be exactly divided by all the intrinsic-primes of a 九. A stone-number can be figured out by:

$$S=\frac{\text{九}}{\prod\limits_{m|\overline{\text{九}},m<\overline{\text{九}}} S_m}$$

In the end,theories of the $\overline{\text{九}}$ and stone-number bring forth a new factorization method, i.e. N is a common-odd, take the factors of $\overline{\text{九}_{[N]}}$ as 九' s length and form some new 九, then the intrinsic-primes of those 九 contain all prime-factors of N.

Keywords 九,remainder-loop, stone-number,sieve method,factorization.

MR(2010) Subject Classification 11A41,11A51

Chinese Library Classification O156.1

1 九和余环

1.1 余数相邻关系的唯一性

设函数 $f(y)=(y\times n)\%N,n,N$ 是正整数,$(n,N)=1$,y 是 N 的余数，通过该函数可以得到余数序列，其中任意余数 y 的右邻数等于 $f(y)$，左邻数等于 $f^{-1}(y)$. 根据 [1]，任意整数和唯一小于 N 的一个数同余，以及 $(n,N)=1$ 时线性同余方程有唯一解，可知 y 对应的 $f(y)$ 和 $f^{-1}(y)$ 一定存在并且是唯一的，所以 y 的右邻数和左邻数都是唯一的，因此可得余数的相邻关系唯一性.

1.2 余环

设整数 N，并且 N 和 10 互质，即 N 为个位是 1,3,7,9 的整数；设整数 $t \geq 1$，

$$y_1 = t \times 10^0 \% N, y_2 = t \times 10^1 \% N, \ldots, y_n = t \times 10^{n-1} \% N, \ldots$$

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ 都小于 N，组成一个数目不超过 $N-1$ 的有限集合．由上述等式得：

$$y_2 = y_1 \times 10 \% N，y_3 = y_2 \times 10 \% N, \ldots$$

所以 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 组成余数序列，部分相邻关系为：$y_1 - y_2 - \ldots - y_n$，其中只有 y_1 的左邻数和 y_n 的右邻数没有确定．根据相邻关系的唯一性，y_1 的左邻数只能是 y_n，y_n 的右邻数只能是 y_1，即这个余数序列是一个封闭的构造，我们称这种构造为余环．

为了表述方便，做如下定义：

定义 1.1 我们称和 10 互质的正整数为普通奇数．

1.3 普通奇数的九

通过上面的分析可知，$y_1 \cdot 10^n \equiv y_1 \pmod N$，所以有 $10^n \equiv 1 \pmod N$，即 $N \mid 10^n - 1$． 定义符号” 九” ，表示能被普通奇数 N 整除的长度最短的一串 9，即 $九 = 10^n - 1$，九 的长度用符号 $\overline{九}$ 表示．则下面的定理成立：

定理 1.1 对于任意普通奇数 N，存在对应的能被 N 整除的 九，即 $10^{\overline{九}} \equiv 1 \pmod N$ 成立．同时下面的等式成立：

$$九 = N \cdot ⓢ$$

其中ⓢ叫做普通奇数 N 的商数．

关于九的表示方法，作如下约定： $九_{[N]}$ 表示 N 对应的九，$九_n$ 表示长度等于 n 的九（即 $\overline{九_n} = n$），如 $九_{[13]} = 999999$，$九_3 = 999$． 根据九的定义，对于任意 $九_a, 九_b$，$九_a \mid 九_b$ 等价于 $\overline{九_a} \mid \overline{九_b}$．

1.4 余环长度

定义 1.2 主余环——称包含余数 1 的余环为主余环，用（1）表示．

定义 1.3 偏余环——称不包含余数 1 的余环为偏余环，表示方法是在括号中放一个余环中的余数．

比如 13 有两个余环：

$$(1): 1-10-9-12-3-4$$

$$(2): 2-7-5-11-6-8$$

定理 1.2 若余数 $y \in (1)$，则 $y \cdot (1) = (1)$.

证： $y \in (1)$，则有 $y \equiv 10^t \pmod{p}$，设 y' 是（1）中的任意余数，$y' \equiv 10^{t'} \pmod{p}$，则 $y \cdot y' \equiv 10^{t+t'} \pmod{p}$，得证.

定理 1.3 若余数 $y \notin (1)$,$y \cdot (1) \neq (1)$

证：设 y' 是（1）中的任意余数,$y' \equiv 10^{t'} \pmod{p}$，则 $y \cdot y' \equiv y \cdot 10^{t'} \pmod{p}$，假如,$(y \cdot y')\%p \in (1)$ 成立，则 $y \cdot y' \equiv y \cdot 10^{t'} \equiv 10^t \pmod{p}$，从而有 $y \equiv 10^{t-t'} \pmod{p}$，与 $y \notin (1)$ 矛盾，得证.

上面的形如 $y \cdot (y')$ 的余数和余环的乘法，表示余数 y 和余环中的任意余数相乘后对余环对应的质数求余后的结果.

1.4.1 质数的余环长度

定理 1.4 质数 p 的所有余环的长度相等，等于 $\overline{九}$.

证：根据定理 1.1可知,(1) 的长度等于 $\overline{九}$. 设 $y \notin (1)$，由定理 1.3可知 $y \cdot (1)$ 可得到一个不同于（1）的余环 (y)，表示如下：

$$y \cdot (1) = (y)$$

设 $y_1, y_2 \in (1)$,$y_1 \not\equiv y_2 \pmod{p}$，所以,$y \cdot y_1 \not\equiv y \cdot y_2 \pmod{p}$. 由定理 1.3，$(y \cdot y_1)\%p, (y \cdot y_2)\%p \in (y)$，因此 (y) 的 $\overline{九}$ 个余数相互不同余，所以（y）的长度和（1）的长度相等，等于 $\overline{九}$.

综上，质数 p 共有 $p-1$ 个余数，分布于多个长度相等的余环中，因此,$\overline{九} \mid (p-1)$. 设 X 表示 p 的余环个数，则，

$$p - 1 = \overline{九} \cdot X \tag{1.1}$$

1.4.2 质数乘方的余环长度

定理 1.5 设 p^t 对应 $九_{[p^t]}$，即 $九_{[p^t]}$ 是能被 p^t 整除的长度最短的一串 9，$Ⓢ = \frac{九_{[p^t]}}{p^t}$,$y = Ⓢ\%p$，如果 $y = 0$，则 $\overline{九_{[p^{t+1}]}} = \overline{九_{[p^t]}}$，如果 $y \neq 0$，则 $\overline{九_{[p^{t+1}]}} = \overline{九_{[p^t]}} \cdot p$.

证：当 $y=0$ 时,$p \mid ⓢ$，所以 $\overline{九_{[p^{t+1}]}}=\overline{九_{[p^t]}}$ 成立，

当 $y \neq 0$ 时有：

$\{y \cdot 10^{\overline{九_{[p^t]}}} + ⓢ\} \equiv 2y \pmod p$，

$\{2y \cdot 10^{\overline{九_{[p^t]}}} + ⓢ\} \equiv 3y \pmod p$，

. . . ，

$\{(y \cdot (p-1)) \cdot 10^{\overline{九_{[p^t]}}} + ⓢ\} \equiv p \cdot y \pmod p$，

得证.

1.4.3 多质因子合数的余环长度

设普通奇数 $N = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{t_n}$，$p_1^{t_1}, p_2^{t_2}, \ldots, p_n^{t_n}$ 对应的九的长度分别是 $\overline{九_{[p_1^{t_1}]}}, \overline{九_{[p_2^{t_2}]}}, \ldots, \overline{九_{[p_n^{t_n}]}}$，显然：

$$\overline{九_{[N]}} = [\overline{九_{[p_1^{t_1}]}}, \overline{九_{[p_2^{t_2}]}}, \ldots, \overline{九_{[p_n^{t_n}]}}] \tag{1.2}$$

即 N 的主余环长度等于它们的最小公倍数.

定理 1.6 对于任意 $y < N$，余环 (y) 中所有余数的最大公约数等于 (N, y)，余环的长度等于 $\overline{九_{[N/(N,y)]}}$

证：设 $m = (N, y)$，以及 $y \cdot 10^t \equiv y \pmod N$，t 是满足表达式的最小值，则有：$N \mid y \cdot (10^t - 1) \Rightarrow \frac{N}{m} \mid \frac{y}{m} \cdot (10^t - 1) \Rightarrow \frac{N}{m} \mid (10^t - 1)$，可以看出 $\frac{N}{m}$ 对应的九的长度等于 t，所以 y 所在余环的长度和 N/m 的主余环的长度相等，即 $\overline{(y)} = \overline{(1)_{[N/m]}}$. 另外 $(1)_{[N/m]}$ 的任意余数都有对应的 m 倍的余数存在于 (y) 中，因此定理成立.

由定理 1.6，根据余环对应最大公约数的不同，将余环分为：

定义 1.4 余环中余数的公约数大于 1，称之为同余余环.

定义 1.5 余环中余数的公约数等于 1，称之为本征余环.

由定理 1.6可知，所有的本征余环包含的余数个数等于 $\varphi(N)$,φ 表欧拉函数[2].

定理 1.7 所有本征余环的长度相等

证明：略（和定理 1.4的证明相同）.

1.5 一种基于九的整数筛法

定理 1.8 N 是任意普通奇数,$\overline{九_{[N]}}$ 是 N 对应的九的长度，如果 $\overline{九_{[N]}} \mid (N-1)$，则 N 是：

1．质数

2．具有如下性质的合数：

$$\overline{九_{[N]}} \mid (N-1-\varphi(N))$$

证：根据公式 1.1，显然质数满足条件．对于合数,$\varphi(N)$ 为 N 的本征余环中的所有余数的数量，根据定理 1.7得 $\overline{九_{[N]}} \mid \varphi(N)$，所有同余余环共有 $(N-1-\varphi(N))$ 个余数，所以 $\overline{九_{[N]}} \mid (N-1-\varphi(N))$ 和 $\overline{九_{[N]}} \mid (N-1)$ 等价，得证．

计算时，有两种算法可用，第一种，求出 $\overline{九_{[N]}}$，再判断整除性；第二种，分解 $N-1$，以长度等于较小因子的 九 试除 N，如果整除则 $\overline{九_{[N]}}$ 等于该因子，并且同时满足了整除 $N-1$ 的条件．两种算法是等价的．

下面是利用第二种算法得到的 10000 以内的结果，其中有 20 个合数、1226 个质数，标有 * 的是合数．

7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,
91* ,97,101,103,107,109,113,127,131,137,139,149,151,157,163,167,
173,179,181,191,193,197,199,211,223,227,229,233,239,241,251,257,
259* ,263,269,271,277,281,283,293,307,311,313,317,331,337,347,
349,353,359,367,373,379,383,389,397,401,409,419,421,431,433,439,
443,449,451* ,457,461,463,467,479,481* ,487,491,499,503,509,
521,523,541,547,557,563,569,571,577,587,593,599,601,607,613,617,
619,631,641,643,647,653,659,661,673,677,683,691,701,703* ,709,
719,727,733,739,743,751,757,761,769,773,787,797,809,811,821,823,
827,829,839,853,857,859,863,877,881,883,887,907,911,919,929,937,
941,947,953,967,971,977,983,991,997,1009,1013,1019,1021,1031,
1033,1039,1049,1051,1061,1063,1069,1087,1091,1093,1097,1103,1109,
1117,1123,1129,1151,1153,1163,1171,1181,1187,1193,1201,1213,1217,
1223,1229,1231,1237,1249,1259,1277,1279,1283,1289,1291,1297,1301,
1303,1307,1319,1321,1327,1361,1367,1373,1381,1399,1409,1423,1427,
1429,1433,1439,1447,1451,1453,1459,1471,1481,1483,1487,1489,1493,
1499,1511,1523,1531,1543,1549,1553,1559,1567,1571,1579,1583,1597,
1601,1607,1609,1613,1619,1621,1627,1637,1657,1663,1667,1669,1693,
1697,1699,1709,1721,1723,1729* ,1733,1741,1747,1753,1759,1777,
1783,1787,1789,1801,1811,1823,1831,1847,1861,1867,1871,1873,1877,
1879,1889,1901,1907,1913,1931,1933,1949,1951,1973,1979,1987,1993,
1997,1999,2003,2011,2017,2027,2029,2039,2053,2063,2069,2081,2083,
2087,2089,2099,2111,2113,2129,2131,2137,2141,2143,2153,2161,2179,
2203,2207,2213,2221,2237,2239,2243,2251,2267,2269,2273,2281,2287,
2293,2297,2309,2311,2333,2339,2341,2347,2351,2357,2371,2377,2381,

2383,2389,2393,2399,2411,2417,2423,2437,2441,2447,2459,2467,2473,
2477,2503,2521,2531,2539,2543,2549,2551,2557,2579,2591,2593,2609,
2617,2621,2633,2647,2657,2659,2663,2671,2677,2683,2687,2689,2693,
2699,2707,2711,2713,2719,2729,2731,2741,2749,2753,2767,2777,2789,
2791,2797,2801,2803,2819,2821* ,2833,2837,2843,2851,2857,2861,
2879,2887,2897,2903,2909,2917,2927,2939,2953,2957,2963,2969,
2971,2981* ,2999,3001,3011,3019,3023,3037,3041,3049,3061,3067,
3079,3083,3089,3109,3119,3121,3137,3163,3167,3169,3181,3187,3191,
3203,3209,3217,3221,3229,3251,3253,3257,3259,3271,3299,3301,3307,
3313,3319,3323,3329,3331,3343,3347,3359,3361,3367* ,3371,3373,
3389,3391,3407,3413,3433,3449,3457,3461,3463,3467,3469,3491,3499,
3511,3517,3527,3529,3533,3539,3541,3547,3557,3559,3571,3581,3583,
3593,3607,3613,3617,3623,3631,3637,3643,3659,3671,3673,3677,3691,
3697,3701,3709,3719,3727,3733,3739,3761,3767,3769,3779,3793,3797,
3803,3821,3823,3833,3847,3851,3853,3863,3877,3881,3889,3907,3911,
3917,3919,3923,3929,3931,3943,3947,3967,3989,4001,4003,4007,4013,
4019,4021,4027,4049,4051,4057,4073,4079,4091,4093,4099,4111,4127,
4129,4133,4139,4141* ,4153,4157,4159,4177,4187* ,4201,4211,4217,
4219,4229,4231,4241,4243,4253,4259,4261,4271,4273,4283,4289,4297,
4327,4337,4339,4349,4357,4363,4373,4391,4397,4409,4421,4423,4441,
4447,4451,4457,4463,4481,4483,4493,4507,4513,4517,4519,4523,4547,
4549,4561,4567,4583,4591,4597,4603,4621,4637,4639,4643,4649,4651,
4657,4663,4673,4679,4691,4703,4721,4723,4729,4733,4751,4759,4783,
4787,4789,4793,4799,4801,4813,4817,4831,4861,4871,4877,4889,4903,
4909,4919,4931,4933,4937,4943,4951,4957,4967,4969,4973,4987,4993,
4999,5003,5009,5011,5021,5023,5039,5051,5059,5077,5081,5087,5099,
5101,5107,5113,5119,5147,5153,5167,5171,5179,5189,5197,5209,5227,
5231,5233,5237,5261,5273,5279,5281,5297,5303,5309,5323,5333,5347,
5351,5381,5387,5393,5399,5407,5413,5417,5419,5431,5437,5441,5443,
5449,5461* ,5471,5477,5479,5483,5501,5503,5507,5519,5521,5527,
5531,5557,5563,5569,5573,5581,5591,5623,5639,5641,5647,5651,5653,
5657,5659,5669,5683,5689,5693,5701,5711,5717,5737,5741,5743,5749,
5779,5783,5791,5801,5807,5813,5821,5827,5839,5843,5849,5851,5857,
5861,5867,5869,5879,5881,5897,5903,5923,5927,5939,5953,5981,5987,
6007,6011,6029,6037,6043,6047,6053,6067,6073,6079,6089,6091,6101,
6113,6121,6131,6133,6143,6151,6163,6173,6197,6199,6203,6211,6217,
6221,6229,6247,6257,6263,6269,6271,6277,6287,6299,6301,6311,6317,
6323,6329,6337,6343,6353,6359,6361,6367,6373,6379,6389,6397,6421,

6427,6449,6451,6469,6473,6481,6491,6521,6529,6533* ,6541* ,6547,
6551,6553,6563,6569,6571,6577,6581,6599,6601* ,6607,6619,6637,
6653,6659,6661,6673,6679,6689,6691,6701,6703,6709,6719,6733,6737,
6761,6763,6779,6781,6791,6793,6803,6823,6827,6829,6833,6841,6857,
6863,6869,6871,6883,6899,6907,6911,6917,6947,6949,6959,6961,6967,
6971,6977,6983,6991,6997,7001,7013,7019,7027,7039,7043,7057,7069,
7079,7103,7109,7121,7127,7129,7151,7159,7177,7187,7193,7207,7211,
7213,7219,7229,7237,7243,7247,7253,7283,7297,7307,7309,7321,7331,
7333,7349,7351,7369,7393,7411,7417,7433,7451,7457,7459,7471* ,
7477,7481,7487,7489,7499,7507,7517,7523,7529,7537,7541,7547,7549,
7559,7561,7573,7577,7583,7589,7591,7603,7607,7621,7639,7643,7649,
7669,7673,7681,7687,7691,7699,7703,7717,7723,7727,7741,7753,7757,
7759,7777* ,7789,7793,7817,7823,7829,7841,7853,7867,7873,7877,
7879,7883,7901,7907,7919,7927,7933,7937,7949,7951,7963,7993,8009,
8011,8017,8039,8053,8059,8069,8081,8087,8089,8093,8101,8111,8117,
8123,8147,8149* ,8161,8167,8171,8179,8191,8209,8219,8221,8231,
8233,8237,8243,8263,8269,8273,8287,8291,8293,8297,8311,8317,8329,
8353,8363,8369,8377,8387,8389,8401* ,8419,8423,8429,8431,8443,
8447,8461,8467,8501,8513,8521,8527,8537,8539,8543,8563,8573,8581,
8597,8599,8609,8623,8627,8629,8641,8647,8663,8669,8677,8681,8689,
8693,8699,8707,8713,8719,8731,8737,8741,8747,8753,8761,8779,8783,
8803,8807,8819,8821,8831,8837,8839,8849,8861,8863,8867,8887,8893,
8911* ,8923,8929,8933,8941,8951,8963,8969,8971,8999,9001,9007,
9011,9013,9029,9041,9043,9049,9059,9067,9091,9103,9109,9127,9133,
9137,9151,9157,9161,9173,9181,9187,9199,9203,9209,9221,9227,9239,
9241,9257,9277,9281,9283,9293,9311,9319,9323,9337,9341,9343,9349,
9371,9377,9391,9397,9403,9413,9419,9421,9431,9433,9437,9439,9461,
9463,9467,9473,9479,9491,9497,9511,9521,9533,9539,9547,9551,9587,
9601,9613,9619,9623,9629,9631,9643,9649,9661,9677,9679,9689,9697,
9719,9721,9733,9739,9743,9749,9767,9769,9781,9787,9791,9803,9811,
9817,9829,9833,9839,9851,9857,9859,9871,9883,9887,9901,9907,9923,
9929,9931,9941,9949,9967,9973

2　基于石头数的整数分解法

2.1　石头数及其计算

定义 2.1 本征质数——根据定理 1.1，任意和 10 互质的质数 p 都有对应的九，称 p 是 九 的本征质数.

例如 7 是 九$_6$ 的本征质数.

定义 2.2 本征积—— 九 的所有本征质数的乘积，用符号 R 表示.

例如 $R_6 = 91 = 7 \times 13$

定义 2.3 本征幂数——质数的乘方 p^t 对应 九$_{[p^t]}$，称 p^t 是 九$_{[p^t]}$ 的本征幂数.

例如 49 是 九$_{42}$ 的本征幂数.

定义 2.4 本征幂余—— p^t 是 九 的本征幂数,p^{t-1} 不是 九 的本征幂数,$p^{t'}$ 不是 九 的本征幂数，但 $p^{t'-1}$ 是 九 的本征幂数，则 $p^{t'-t}$ 为 九 的本征幂余，用符号 V 表示.

定义 2.5 本征幂余积——九的所有本征幂余的乘积，用 W 表示.

对于 九$_1 = 9$，本征质数等于 3,9 是它的本征幂数，所以 $W_1 = 3$.

定理 2.1 幂数集合 $A = \{p^2, p^3, \ldots, p^t\}$，对应的九集合 $B = \{$九$_{[p^2]}$, 九$_{[p^3]}, \ldots,$ 九$_{[p^t]}\}$，对应的本征幂余集合 $C = \{V_{[p^2]}, V_{[p^3]}, \ldots, V_{[p^t]}\}$，则

$$\prod_{i=2}^{t} V_{[p^i]} = p^{t-1}$$

证： $\prod\limits_{i=2}^{t} V_{[p^i]} = p^{t-t_1'} \cdot p^{t_1'-t_2'} \ldots p^{t_m'-1} = p^{t-1}$，证毕.

定义 2.6 石头数——九的本征积和本征幂余积的乘积，称作九的石头数，用符号 S 表示,$S = R \cdot W$.

关于表示方法的说明： R_i, V_i, W_i, S_i 是和 九$_i$ 对应的,$R_{[N]}, V_{[N]}, W_{[N]}, S_{[N]}$ 是和 九$_{[N]}$ 对应的.

定理 2.2 M、N 是大于 1 的普通奇数，如果数 M 整除 N，则 M 对应的 九 能整除 N 对应的 九，表示为：

$$M \mid N \Rightarrow \text{九}_{[M]} \mid \text{九}_{[N]} \text{或} \overline{\text{九}_{[M]}} \mid \overline{\text{九}_{[N]}}$$

证：由题知 $M \mid 九_{[M]}$，另外由 $M \mid N$ 得 $M \mid 九_{[N]}$，所以必有 $\overline{九_{[M]}} \mid \overline{九_{[N]}}$，证毕.

下面证明石头数的计算公式：

$$S = \frac{九}{\prod\limits_{m \mid \overline{九}, m < \overline{九}} S_m} \tag{2.1}$$

证：

$$九 = \prod_i p_i^{t_i} = \prod_i p_i \cdot \prod_i p_i^{t_i - 1}$$

前半部分代表九的所有质因子的乘积，后半部分表示其余乘积；根据定理 2.2，如果 $p_i \mid 九$ 则 $九_{[p_i]} \mid 九$，进而有 $R_{[p_i]} \mid 九$，所以：

$$\prod_i p_i = \prod_{m \mid \overline{九}} R_m$$

根据定理 2.1以及定理 2.2可知，

$$\prod_i p_i^{t_i - 1} = \prod_{m \mid \overline{九}} W_m$$

所以，

$$九 = \prod_{m \mid \overline{九}} (R_m \cdot W_m) = \prod_{m \mid \overline{九}} S_m$$

由上式变形即得公式 2.1.

石头数计算举例： $S_{18} = \dfrac{九_{18}}{S_2 \cdot S_9 \cdot S_3 \cdot S_6 \cdot S_1} = \dfrac{九_{18}}{11 \cdot 1001001 \cdot 111 \cdot 91 \cdot 9} = 999001$

2.2 石头数的分解

2.2.1 求解本征幂余

设 p^t 是 九 的本征幂数，如果 p 不是 九 的本征质数，由定理 1.5可知 $p \mid \overline{九}$，所以用 $\overline{九}$ 的质因子去试除 S，因为本征质数大于 $\overline{九}$，所以能整除的一定是本征幂余 V 的质因子. 然后求质因子的幂数，进而求得 V.

如果 p 是 九 的本征质数，需要根据下面的方法，先求取本征质数，再求这类本征幂余.

2.2.2 求取本征质数

根据公式 1.1，对于任意本征质数 p，必存在 $k \geq 1$，使得 $p = k \cdot \overline{九} + 1$ 成立，所以设 $n = k \cdot \overline{九} + 1, k = 1, 2, 3, \ldots$，用 n 试除 S，如果 $n \mid S$，并且 n 是质数，则 n 是九的本征质数.

从石头数中除去用章节 2.2.1中的方法取得的本征幂余，得到的可能是本征积 R，也可能包含了本征积和本征幂数的整数．设得到的整数为 R'，如果所有本征质数的乘积小于 R'，则 $R' \neq R$，此时 R' 中有本征幂数．

以下是 $九_1$ 至 $九_{50}$ 对应的石头数及其因子情况:

1:9=[3]；

2:11=[11]；

3:111=[3，37]；

4:101=[101]；

5:11111=[41，271]；

6:91=[7，13]；

7:1111111=[239，4649]；

8:10001=[73，137]；

9:1001001=[3，333667]；

10:9091=[9091]；

11:11111111111=[21649，513239]；

12:9901=[9901]；

13:1111111111111=[53，79，265371653]；

14:909091=[909091]；

15:90090991=[31，2906161]；

16:100000001=[17，5882353]；

17:11111111111111111=[2071723，5363222357]；

18:999001=[19，52579]；

19:1111111111111111111=[1111111111111111111]；

20:99009901=[3541，27961]；

21:900900990991=[43，1933，10838689]；

22:9090909091=[11，23，4093，8779]；

23:11111111111111111111111=[11111111111111111111111]；

24:99990001=[99990001]；

25:1000010000100001000001=[21401，25601，182521213001]；

26:909090909091=[859，1058313049]；

27:1000000001000000001=[3，757，440334654777631]；

28:990099009901=[29，281，121499449]；

29:11111111111111111111111111111

=[3191，16763，43037，62003，77843839397]；

30:109889011=[211，241，2161]；

31:1111111111111111111111111111111

=[2791，6943319，57336415063790604359]；

32:10000000000000001=[353，449，641，1409，69857]；

33:900900900909990990991=[67，13446282103132983737]；
34:9090909090909091=[103，4013，21993833369]；
35:900009090090909909099991=[71，123551，102598800232111471]；
36:999999000001=[999999000001]；
37:1111111111111111111111111111111111111
  =[2028119，247629013，2212394296770203368013]；
38:909090909090909091=[909090909090909091]；
39:900900900900990990990991=[900900900900990990990991]；
40:9999000099990001=[1676321，5964848081]；
41:11111111111111111111111111111111111111111
  =[83，1231，538987,201763709900322803748657942361*]；
42:156985855573=[127，2689，459691]；
42:1098900989011=[7，127，2689，459691]；
43:1111111111111111111111111111111111111111111
  =[173，1527791,4203852214522105994074156592890477*]；
44:9900990099009901=[89，1052788969，1056689261]；
45:999000000999000999999001=[238681，4185502830133110721]；
46:9090909090909090909091=[47，139，2531，549797184491917]；
47:11111111111111111111111111111111111111111111111
  =[35121409,316362908763458525001406154038726382279*]；
48:9999999900000001=[9999999900000001]；
49:1000000100000010000001000000100000010000001
  =[505885997,1976730144598190963568023014679333*]；
50:99999000009999900001=[251，5051，78875943472201]；
以上标有 * 的，是因为限于所用计算机的计算能力，还不知道这个数是质数还是合数. 如果石头数的分解因子小于对应的 $\overline{九}$，比如 $7 < 42$，则这个分解因子是一个本征幂余.

2.3 基于石头数的整数分解法

定理 2.3 N 是普通奇数，则以 $九_{[N]}$ 的所有因子为九长度，这些九对应的所有本征质数的集合包含了 N 的所有质因子.

证: 根据定理 2.2可知，如果质数 $p \mid N$，则 $九_{[p]} \mid 九_{[N]}$，所以，设 A 表示 $\overline{九_{[N]}}$ 的因子集合，以 A 中的数值为九的长度，则它们对应的本征质数的集合必然包括了 N 的所有质因子，证毕.

因此，可得普通奇数的分解方法:

1. 基于定理 1.1，求普通奇数 N 的 $\overline{九_{[N]}}$，
2. 分解 $\overline{九_{[N]}}$，得其因子集合 A.

3．以 A 中数据作为九的长度，利用公式 2.1求对应的石头数；得到石头数集合 B.
4．对 B 中所有石头数，根据章节 2.2中的方法，求对应的本征质数；得到本征质数集合 C.

为了分解整数 N，不需要求大于 $\sqrt{N}$ 的本征质数，在设计算法时，可以加入这个过滤条件.

5．用 C 中的所有本征质数试除 N，得到 N 的质因子.
6．用尝试的办法，计算质因子的幂数，最终得 N 的标准分解式.

下面是 N=567 的分解举例.

1．求 $\overline{九_{[N]}}$，等于 18
2．分解 18 得:1，2，3，9，6，
3．求解石头数得: $S_1=9, S_2=11, S_3=111, S_9=1001001, S_6=91$，
4．分解石头数得到本征质数集合:3,11,37,333667,7,13，
5．用 3,11,37,333667,7,13 试除 567 得：3,7 能整除 567，
6．求其质因子的幂数得标准分解式:$567=3^4\times 7$.

对于不是普通奇数的整数（即个位数字是 0,2,5 的整数），除去整数中的 2 和 5 后得到一个普通奇数，再按照上面的方法继续分解即可.

参考文献

[1] Dudley U.,A Guide To Elementary Number Theory,Washington DC:The Mathematical Association of America,2009,13-17.

[2] Hua L-K(华罗庚), An Introduction to Number Theory(数论导引),Beijing:Science Press,1995,24-30.