埃拉托斯特尼筛法

维基百科,自由的百科全书

埃拉托斯特尼筛法,简称埃氏 筛或爱氏筛,是一种公元前 250年由古希腊数学家埃拉托斯 特尼所提出的一种简单检定素数 的算法。

目录

- 1 算式
 - 1.1 步骤
- 2 黎曼猜想的素数公式 与埃拉托斯特尼筛法关 系
- 3 参考
- 4 参见
- 5 外部链接

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Prime numbers
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	2
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	

算式

给出要筛数值的范围n,找出 \sqrt{n} 以内的素数 p_1,p_2,\ldots,p_k 。先用2去筛,即把2留下,把2的倍数剔除掉;再用下一个质数,也就是3筛,把3留下,把3的倍数剔除掉;接下去用下一个质数5筛,把5留下,把5的倍数剔除掉;不断重复下去……。

步骤

详细列出算法如下:

- 1. 列出2以后的所有序列:
 - 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25
- 2. 标出序列中的第一个素数,也就是2,序列变成:
 - **2** 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25
- 3. 将剩下序列中,划摽2的倍数(用红色标出),序列变成:
 - 2345678910111213141516171819202122232425
- 4. 如果现在这个序列中最大数小于最后一个标出的素数的平方,那么剩下的序列中所有的数都是素数,否则回到第二步。
- 1. 本例中,因为25大于2的平方,我们返回第二步:
- 2. 剩下的序列中第一个素数是3,将主序列中3的倍数划出(红色),主序列变成:
 - **2** 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

第1页 共4页

- 1. 我们得到的素数有:2,3
- 2. 25仍然大于3的平方,所以我们还要返回第二步:
- 3. 现在序列中第一个素数是5,同样将序列中5的倍数划出,主序列成了:

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

- 4. 我们得到的素数有:235。
- 5. 因为25等于5的平方, 跳出循环.

结论:去掉红色的数字,2到25之间的素数是:23571113171923。

下列是虚拟码算法:

```
// arbitrary search limit
limit ← 1.000.000

// assume all numbers are prime at first

is_prime(i) ← true, i ∈ [2, limit]

for n in [2, √limit]:
    if is_prime(n):
        // eliminate multiples of each prime,
        // starting with its square
        is_prime(i) ← false, i ∈ {n², n²+n, n²+2n, ..., limit}

for n in [2, limit]:
    if is_prime(n): print n
```

可再简化为:

```
limit = 1000000
sieve$ = string of the character "P" with length limit

prime = 2
repeat while prime<sup>2</sup> < limit
    set the character at the index of each multiple of prime (excluding index prime * 1) in sieve$ to "N"
    prime = index of the next instance of "P" in sieve$ after index prime
end repeat

print the index of each instance of "P" in sieve$</pre>
```

黎曼猜想的素数公式与埃拉托斯特尼筛法关系

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$
 (5)

在等号两边乘以 $\dfrac{1}{2^s}$,由幂运算规则得到。

第2页 共4页

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \cdots$$
 (6)

我们从第(6)式子减去第二个式子,在左边我有一个 $\zeta(s)$. 又有它的 $\dfrac{1}{2^s}$,做减法得:

$$(1 - \frac{1}{2^s}) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{15^s} + \cdots$$
 (7)

这个减法从那个无穷和中去掉了所有偶数项。现在在等号两边乘以 $\frac{1}{3^s}$,而3是右边第一个还没有去掉的数:

$$\frac{1}{3^s} \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + \frac{1}{27^s} + \frac{1}{33^s} + \frac{1}{39^s} + \cdots$$
 (8)

们再做减法得:
$$(1-\frac{1}{3^s})$$
 $(1-\frac{1}{2^s})$
$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{17^s} + \frac{1}{19^s} + \frac{1}{23^s} + \cdots$$
 (9)

3的所有倍数都从那个无穷和中消失了,右边还有第一个没有被去掉的数是5,如果我们两边都乘以 $\frac{1}{5^s}$,结果是:

$$\frac{1}{5^{s}} (1 - \frac{1}{3^{s}}) (1 - \frac{1}{2^{s}}) \zeta(s) = \frac{1}{5^{s}} + \frac{1}{25^{s}} + \frac{1}{35^{s}} + \frac{1}{55^{s}} + \frac{1}{65^{s}} + \frac{1}{85^{s}} + \frac{1}{95^{s}} + \cdots$$

从前面那个式子减去这个式子得:

$$\begin{array}{ll} (1-\frac{1}{5^s}) & (1-\frac{1}{3^s}) & (1-\frac{1}{2^s}) \\ \zeta(s)=1+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\frac{1}{17^s}+\frac{1}{19^s}+\frac{1}{23^s}+\frac{1}{29^s}+\cdots. \end{array} \tag{11}$$

继续下去,对于大于1的任意s,左边对每一个带括号的表达式,并向右边一直继续下去,对这个式子的两边都依次逐个除以这些括号,我们得到:

$$\zeta(s) = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \frac{1}{1 - 2^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - 3^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - 5^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - 7^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - 11^{-s}} \cdots \frac{1}{1 - p^{-s}} \cdots (12)$$

即: (5)式=(12)式

这就是重复埃拉托塞尼筛法的过程。也就是说,黎曼猜想不是凭空出现的,而是有埃拉托斯特尼筛法作为基础的。

参考

1. Κοσκινον Ερατοσθενους or, The Sieve of Eratosthenes. Being an Account of His Method of Finding All the Prime Numbers, by the Rev. Samuel Horsley, F. R. S., Philosophical Transactions (1683-1775), Vol. 62. (1772), pp. 327-347.

参见

- 卢卡斯-莱默检验法
- 米勒-拉宾检验
- 试除法
- 费马素性检验
- 孪生素数
- 三胞胎素数
- 四胞胎素数
- 素数判定法则
- 表兄弟素数
- 六素数
- X2+1素数

外部链接

■ Interactive animation (需要JavaScript) (http://www.faust.fr.bw.schule.de/mhb/eratosiv.htm)

来自"http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=埃拉托斯特尼筛法&oldid=19800555"

- 本页面最后修订于2012年4月3日 (星期二) 11:39。
- 本站的全部文字在知识共享 署名·相同方式共享 3.0协议之条款下提供,附加条款亦可能应用。(请参阅使用条款)

Wikipedia®和维基百科标志是维基媒体基金会的注册商标;维基™是维基媒体基金会的商标。

维基媒体基金会是在美国佛罗里达州登记的501(c)(3)免税、非营利、慈善机构。

第4页 共4页 2012年05月22日 16:08