弗里曼•戴森 （Freeman Dyson）1923年12月15日出生，美籍英裔数学物理学家，普林斯顿高等研究院自然科学学院荣誉退休教授。
======
有些数学家是鸟，其他的则是青蛙。鸟翱翔在高高的天空，俯瞰延伸至遥远地平线的广袤的数学远景。他们喜欢那些统一我们思想、并将不同领域的诸多问题整合起来的概念。青蛙生活在天空下的泥地里，只看到周围生长的花儿。他们乐于探索特定问题的细节，一次只解决一个问题。我碰巧是一只青蛙，但我的许多最好朋友都是鸟。

这就是我今晚演讲的主题。数学既需要鸟也需要青蛙。数学丰富又美丽，因为鸟赋予它辽阔壮观的远景，青蛙则澄清了它错综复杂的细节。数学既是伟大的艺术，也是重要的科学，因为它将普遍的概念与深邃的结构融合在一起。如果声称鸟比青蛙更好，因为它们看得更遥远，或者青蛙比鸟更好，因为它们更加深刻，那么这些都是愚蠢的见解。数学的世界既辽阔又深刻，我们需要鸟们和青蛙们协同努力来探索。

这个演讲被称为爱因斯坦讲座，应美国数学会之邀来这里演讲以纪念阿尔伯特•爱因斯坦，我深感荣幸。爱因斯坦不是一位数学家，而是一位融合了数学感觉的物理学家。一方面，他对数学描述自然界运作的力量极为尊重，他对数学之美有一种直觉，引导他进入发现自然规律的正确轨道；另一方面，他对纯数学没有兴趣，他缺乏数学家的技能。晚年时，他聘请一位年轻同事以助手身份帮助他做数学计算。他的思考方式是物理而非数学。他是物理学界的至高者，是一只比其他鸟瞭望得更远的鸟。但今晚我不准备谈爱因斯坦，因为乏善可陈。

弗兰西斯•培根和勒奈•笛卡尔

17世纪初，两位伟大的哲学家，英国的弗兰西斯•培根（Francis Bacon）和法国的勒奈•笛卡尔（Rene Descartes），正式宣告了现代科学的诞生。笛卡尔是一只鸟，培根是一只青蛙。两人分别描述了对未来的远景，但观点大相径庭。培根说：“一切均基于眼睛所见自然之确凿事实。”笛卡尔说：“我思，故我在。”

按照培根的观点，科学家需要周游地球收集事实，直到所积累的事实能揭示出自然的运动方式。科学家们从这些事实中推导出自然运作所遵循的法则。根据笛卡尔的观点，科学家只需要呆在家里，通过纯粹的思考推导出自然规律。为了推导出正确的自然规律，科学家们只需要逻辑规则和上帝存在的知识。

在开路先锋培根和迪卡尔的领导之下，400多年来，科学同时沿着这两条途径全速前进。然而，解开自然奥秘的力量既不是培根的经验主义，也不是笛卡尔的教条主义，而是二者成功合作的神奇之作。400多年来，英国科学家倾向于培根哲学，法国科学家倾向于笛卡尔哲学。法拉弟、达尔文和卢瑟福是培根学派；帕斯卡、拉普拉斯和庞加莱是迪卡尔学派。因为这两种对比鲜明的文化的交叉渗透，科学被极大地丰富了。这两种文化一直在这两个国家发挥作用。牛顿在本质上是笛卡尔学派，他用了笛卡尔主义的纯粹思考，并用这种思考推翻了涡流的笛卡尔教条。玛丽•居里在本质上是一位培根学派，她熬沸了几吨的沥青铀矿渣，推翻了原子不可毁性之教条。

在20世纪的数学历史中，有两起决定性事件，一个属于培根学派传统，另一个属于笛卡尔学派传统。第一起事件发生于1900年在巴黎召开的国际数学家大会上，希尔伯特（Hilbert）作大会主题演讲，提出了23个未解决的著名问题，绘制了即将来临的一个世纪的数学航道。希尔伯特本身是一只鸟，高高飞翔在整个数学领地的上空，但他声称，他的问题是给在同一时间只解决一个问题的青蛙们。第二起决定性事件发生在20世纪30年代，数学之鸟——布尔巴基学派（Bourbaki）在法国成立，他们致力于出版一系列能将全部数学框架统一起来的教科书。

在引导数学研究步入硕果累累的方向上，希尔伯特问题取得了巨大成功。部分问题被解决了，部分问题仍悬而未决，但所有这些问题都刺激了数学新思想和新领域的成长。布尔巴基纲领有同等影响，通过带入以前并不存在的逻辑连贯性、推动从具体实例到抽象共性的发展，这个项目改变了下一个50年的数学风格。在布尔巴基学派的格局中，数学是包含在布尔巴基教科书中的抽象结构。教科书之外均不是数学。自从在教科书中消失后，具体实例就不再是数学。布尔巴基纲领是笛卡尔风格的极端表现。通过排除培根学派旅行者们在路旁可能采集到的鲜花，他们缩小了数学的规模。

自然的玩笑

我是一个培根学派的信徒。对我而言，布尔巴基纲领的一个主要不足是错失了一种惊喜元素。布尔巴基纲领努力让数学更有逻辑。当我回顾数学的历史时，我看见不断有非逻辑的跳跃、难以置信的巧合和自然的玩笑。大自然所开的最深刻玩笑之一是负1的平方根，1926年，物理学家埃尔文•薛定谔（Erwin Schrodinger）在发明波动力学时，将这个数放入他的波动方程。

当薛定谔开始思考如何将光学和力学统一时，他就是一只鸟。早在100多年前，借助于描述光学射线和经典粒子轨迹的相同数学，汉密尔顿统一了射线光学和经典力学。薛定谔也希望用同样的方式来统一波动光学和波动力学。当时，波动光学已经存在，但波动力学尚未出现。薛定谔不得不发明波动力学来完成这一统一。开始时，他将波动光学作为一个模型，写下机械粒子的微分方程，但这个方程没有任何意义。这个方程看起来像连续介质中的热传导方程。热传导与粒子力学之间没有可见的相关性。薛定谔的想法看起来没有任何意义。然而，奇迹出现了。薛定谔将负1的平方根放入机械粒子的微分方程，突然间，它就有意义了。突然间，它成为波动方程而不是热传导方程。薛定谔高兴地发现，这个方程的解与玻尔原子模型中的量化轨道相吻合。

结果，薛定谔方程准确描述了我们今天所知原子的每一种行为。这是整个化学和绝大部分物理学的基础。负1的平方根意味着大自然是以复数而不是实数的方式运行。这一发现让薛定谔和其他所有人耳目一新。薛定谔记得，当时，他14岁大的“女朋友”伊萨•荣格尔（Itha Junger）曾对他说：“嗨，开始时，你从来没想过会出现这么多有意义的结果吧？”

在整个19世纪，从阿贝尔（Abel）、黎曼（Riemann）到维尔斯特拉斯（Weierstrass），数学家们一直在创建一个宏大的复变函数理论。他们发现，一旦从实数推进到复数，函数论就变得更深刻更强大。但是，他们一直将复数看作是人造结构，是数学家们从真实生活中发明的一种有用、优雅的抽象概念。他们未曾料到，他们发明的这个人工数字事实上是原子运行的基础。他们从未想象过，这个数字最初是出现在自然界。

大自然所开的第二个玩笑是量子力学的精确线性。事实上，物理对象的各种可能状态构成了一个线性空间。在量子力学被发明之前，经典物理总是非线性的，线性模式只是近似有效。在量子力学之后，大自然本身突然变成了线性。这对数学产生了深刻的影响。19世纪，索菲斯•李（Sophus Lie）发展了他关于连续群的精致理论（elaborate theory），以期弄清楚经典力学系统的行为。当时的数学家和物理学家对李群几乎没有任何兴趣。李群的非线性理论对数学家来说过于复杂，对物理学家来说又过于晦涩。索菲斯•李在失望中离开了人世。50年后，人们发现大自然本身就是线性的，李代数的线性表示竟然是粒子物理的自然语言。作为20世纪数学的中心主题之一，李群和李代数获得了新生。

大自然的第三个玩笑是拟晶体（Quasi-crystals）的存在。19世纪，对晶体的研究导致了对欧几里德空间中可能存在的离散对称群种类的完整列举。人们已经证明:在三维欧几里德空间中，所有离散对称群仅包含3级、4级或6级的旋转。之后，1984年，拟晶体被发现了。从液体金属阵列中长出的真正固体物显示

含3级、4级或6级的旋转。之后，1984年，拟晶体被发现了，从液体金属阵列中长出的真正固体物显示了包含5重旋转的二十面体的对称性。与此同时，数学家罗杰•彭罗斯（Roger Penrose）发现了平面“彭罗斯拼砖法”。拟晶阵列是二维彭罗斯拼砖法的三维模拟。在这些发现之后，数学家不得不扩大晶体群理论，将合金拟晶体包含其中。这是还在发展中的一个重要研究项目。

大自然开的第四个玩笑是拟晶和黎曼ζ函數零点（zeros of the Riemann Zeta function）在行为的相似性。黎曼ζ函數零点令数学家们着迷，因为所有的零点都落在一条直线上，没有人知道这是为什么。著名的黎曼猜想是指：除了平凡的例外，黎曼ζ函数零点都在一条直线上。100多年来，证明黎曼猜想一直是年轻数学家们的梦想。我现在大胆提议：也许可以用拟晶体来证明黎曼猜想。你们中的部分数学家也许认为这个建议无关紧要。那些不是数学家的人可能对这个建议不感兴趣。然而，我将这个问题放到你们面前，希望你们严肃思考。年轻时的物理学家里奥•齐拉特（Leo Szilard）不满意摩西的十条诫命，写了新十诫来替换它们。齐拉特的第二条诫律说：“行动起来，向有价值的目标前进，不问这些目标是否能达到：行动是模范和例子，而不是终结。” 齐拉特践行了他的理论。他是第一个想象出核武器的物理学家，也是第一个积极以行动反对核武器使用的物理学家。他的第二条诫律也适用于这里。黎明猜想的证明是一个值得为之的目标，我们不应该问这个目标是否能实现。我将给你们一些这个目标可以实现的暗示。我将给数学家们一些建议，这是我在50年前成为一名物理学家之前获得的忠告。我先谈黎明猜想，再谈拟晶体。

直到最近，纯数学领域还有两个未解决的超级问题：费马大定理的证明和黎曼猜想的证明。12年前，我在普林斯顿的同事安德鲁•怀尔斯（Andrew Wiles）证明了费马大定理，如今，只剩下黎曼猜想有待证明。怀尔斯对费马大定理的证明不只是一个技术绝技，它的证明还需要发现和探索数学思想的新领域，这比费马大定理本身更辽阔更重要。正因如此，对黎曼猜想的证明也将导致对数学甚至物理学诸多不同领域的深刻认识。黎曼ζ函數和其他ζ函數也类似，它们在数论、动力系统、几何学、函数论和物理学中普遍存在。ζ函數仿佛是通向各方路径的交叉结合点。对黎曼猜想的证明将阐明所有这些关联。就像每一位纯数学领域里严肃的学生一样，我年轻时的梦想是证明黎曼猜想。我有一些模糊不清的想法，认为可以引导自己证明这个猜想。最近几年，在拟晶体被发现后，我的想法不再模糊。我在这里把它们呈现给有雄心壮志赢得菲尔茨奖的年轻数学家们。

拟晶体存在于一维、二维和三维空间。从物理学的角度看，三维拟晶体最为有趣，因为它们栖息于我们的三维世界，可以通过实验加以研究。从数学家的角度来看，一维拟晶体比二维和三维拟晶体更为有趣，因为它们种类繁多。数学家这样定义拟晶体：一个拟晶体是离散点群的分布，它们的傅立叶变换是离散点频率。或简而言之，一个拟晶体是一个有纯点谱的纯点分布。这个定义包括了作为特例的普通晶体，它们是拥有周期谱的周期分布。

将普通晶体排除在外，三维中的拟晶体只有极为有限的变形，它们均与二十面体有关。二维拟晶体数目众多，粗略地讲，一个独特的类型与平面上每个正多边形都相关联。含五边 形对称的二维拟晶体是著名的平面彭罗斯拼砖。最后，一维拟晶体有更为丰富的结构，因为它们不受制于任何旋转对称。就我所知，目前还没有对一维拟晶体存在情况的全数调查。现已知，一种独特拟晶体的存在与每个皮索特-维贡伊拉卡文数（pisot Vijayaraghavan number）或PV数对应。一个PV数是一个真正的代数整数，是有整数系数（integer coefficients）多项式方程的根，其他所有根的绝对值都有小于1的绝对值。全部PV数的集合是无限的，并有非凡的拓扑结构。所有一维拟晶体的集合都有一种结构，其丰富程度可与所有的PV数集合相比，甚至更丰富。我们并不确切地知道，一个由与PV数没有关联的一维拟晶体构成的大世界正等待探索。

现在谈一维准晶体与黎曼猜想的联系。如果黎曼猜想是正确的，那么根据定义，ζ函數零点就会形成一个一维拟晶体。它们在一条直线上构成了点质量（point masses）的一个分布，它们的傅利叶变化同样也

是一个点质量分布，前者的点质量位于每个素数的对数处，其傅里叶变换点质量位于每个素数的幂的对数处。我的朋友安德鲁•奥德泽科（Andrew Odlyzko）发表了一个漂亮的ζ函數零点的傅利叶变换的计算机运算。这个运算精确地显示了傅利叶变换的预期结构，在每一个素数或素数的幂的对数上有明显的间断性。

我的推测如下。假设我们并不知道黎曼猜想是否正确。我们从另一个角度来解决问题。我们努力获得一维拟晶体的一个全数调查和分类。这就是说，我们列举和分类拥有离散点谱的所有点分布。对新对象的收集和分类是典型的培根归纳活动。这也是适合于青蛙型数学家的活动。然后，我们发现众所周知的与PV数相关的拟晶体，以及其它已知或未知的拟晶体世界。在其它众多的拟晶体中，我们寻找一个与黎曼ζ函數相对应的拟晶体，寻找一个与其它类似黎曼ζ函數的每个ζ函數相对应的拟晶体。假设我们在拟晶体细目表中找到了一个拟晶体，其性质等同于黎曼ζ函數零点。然后，我们证明了黎曼猜想，等待宣布菲尔茨奖的电话。

这是一种妄想。对一维准晶体进行分类极其困难，其困难程度不压于安德鲁•怀尔斯花7年时间所解决的问题。但是，如果我们以培根主义者的观点来看，数学的历史就是骇人听闻的困难问题被初生牛犊不怕虎的年轻人干掉的历史。对拟晶体分类是一个值得为之的目标，甚至是可以实现的目标。这个问题的困难程度不是像我这样的老人能解决的，我将这个问题作一个练习留给听众中的年轻青蛙们。

艾布拉姆•贝塞克维奇和赫尔曼•外尔

现在，我介绍我所知道的几位著名的鸟和青蛙。

1941年，我作为一名学生来到英国剑桥大学，极其幸运地受教于俄罗斯数学家艾伯拉姆•萨莫罗维奇•伯西柯维奇（Abram Samoilovich Besicovitch）。时值第二次世界大战，剑桥只有很少的学生，几乎没有研究生。尽管当时我只有17岁，而伯西柯维奇已是一位著名教授，但是，他给了我相当多的时间和关注，我们成为终身朋友。在我开始从事和思考数学时，他塑造了我的性格。他在测量理论和积分方面上了许多精彩的课程，在我们因他大胆地滥用英语而哈哈大笑时，他只是亲切地笑笑。我记得仅有一次，他被我们之间的玩笑惹怒。在沉默了一会后，他说:“先生们，有5000万英国人讲你们所讲的英文。有1.5亿俄罗斯人讲我所讲的英文。”

伯西柯维奇是一只青蛙，年轻时，因解决一个名为挂谷问题（Kakeya Problem）的初等本平面几何问题而出名。挂谷问题是这样描述的：让一条长度为1的线段按360度的角度在一个平面上自由转动，这条线扫过的最小面积是多少？日本数学家挂谷宗一(Soichi Kakeya)在1917年提出这个问题，并成为之后十年内未解决的著名问题。当时，美国数学界领袖乔治•伯克霍夫（George Birkhoff）公开声称，挂谷问题和四色问题是最著名的未解决问题。数学家们普遍相信，最小的面积应该是π/8,即棒在三尖点内摆线的面积（three-cusped hypocycloid）。三尖点内摆线是一条优美的三尖点曲线，它是一个半径为四分之一的小圆圈在一个半径为四分之三的定圆内滑动时，动圆圆周上的一个点所绘制的轨迹。长度为1的线段在旋转时始终与内摆线相切，它的两端也在内摆线上。一条线段在旋转时与内摆线的三个点相切，这是一幅多么优美的画，绝大多数人相信它一定给出了最小面积。然后，伯西柯维奇给了大家一个惊喜：他证明，对任何正∈（positive ∈）来说，这一线段在旋转时所扫过的面积小于∈。

实际上，在挂谷问题成为著名问题之前，伯西柯维奇已经在1920年解决了这个问题，但在当时，伯西柯维奇本人甚至不知道挂谷提出了这个问题。1920年，他将解决方案用俄文发表在《彼尔姆物理和数学学会期刊》（Journal of the Perm Physics and Mathematics Society）上，这是一份不被广泛阅读的期刊。彼尔姆大学位于距离莫斯科东面1100公里的彼尔姆城，在俄罗斯革命之后，这个城市成为许多著名数学家的短暂避难所。他们出版了两期《彼尔姆物理和数学学会期刊》，之后,期刊便在革命和内战的混乱中

停刊了。在俄罗斯之外，这份期刊不仅不为人知，而且不可获取。1925年，伯西柯维奇离开俄罗斯，来到哥本哈根，并在这里获知到他已经在5年前解决的著名挂谷问题。他将解决方案重新出版，这一次，论文用英文发表在德国著名的《数学期刊》（Mathematische Zeitschrift）上。正如伯西柯维奇所说，挂谷问题是一个典型的青蛙问题，一个与数学的其它方面没有太多联系的具体问题。伯西柯维奇给出了一个优雅、深刻的解决方案，揭示出它与平面中点集结构的一般定理之间的联系。

伯西柯维奇的风格体现在他的三篇最好的经典文章中，这些文章的标题是:“平面点集之线性可测量的基本几何性质”（On the fundamental geometric properties），它们分别发表在1928年、1938年和1939年的《数学年鉴》（Mathematische Annalen）上。在这些论文中，他证明：平面上的每个线性可测量集可被分解为有规则和无规则的分支，规则分支在每个地方几乎都有一个切线，而无规律分支都有一个零测量投射向几乎所有方向。简而言之，规则分支看起来像连续曲线，而无规则分支看起来不像连续曲线。无规则分支的存在和性质与挂谷问题的伯西柯维奇解有联系。他给我的工作之一是，在高维空间中将可测量集分为规则分支组件和无规则分支。虽然我在这个问题上一事无成，却永远被烙上了伯西柯维奇风格。伯西柯维奇风格是建筑学风格。他用简单元素建造出精美、复杂的建筑结构，通常情况下有层次计划；当大厦建成时，通过简单的论证就可从完整结构中推导出意外的结论。伯西柯维奇的每项工作都是一件艺术品，像巴赫的赋格曲一样精心构成。

在跟随伯西柯维奇做了几年的学生后，我来到美国普林斯顿，认识了赫尔曼•外尔（Hermann Weyl）。外尔是一只典型的鸟，正如伯西柯维奇是一只典型的青蛙。幸运的是，在外尔退休回到位于苏黎世的老家之前，我在普林斯顿高等研究所与他有一年的相处时间。他喜欢我，因为在这一年间，我在《数学年鉴》（Annals of Mathematics）上发表了有关数论的论文，在《物理评论》(Physics Review)上发表了量子辐射理论的论文。他是当时活在世上的少数几位同时精通这两领域的专家之一。他欢迎我到普林斯顿研究所，希望我像他一样成为一只鸟。他失望了，我始终是一只固执的青蛙。尽管我总是在各种各样的泥洞附近闲逛，我一次只能关注一个问题，没有寻找问题之间的联系。对我而言，数论和量子理论是拥有各自美丽的两个世界。我不像外尔一样去发现构建大设计的线索。

外尔对量子辐射理论的伟大贡献是他发明了规范场。规范场的想法有一段奇特历史。1918年，在他统一广义相对论和电磁学的理论中，他作为古典场论发明了它们，并称之为“规范场”，因为它们关系到长度测量的不可积分性。他的统一理论立即遭到爱因斯坦的公开拒绝，经历了这个来自高层的霹雳之后，外尔并没有放弃他的理论，只是进入别的领域。这个的理论没有可验证的实验结果。1929年，在量子理论被其他人发明后，外尔意识到与经典世界相比，他的规范场论更适合于量子世界，而他将经典场论转化为量子场论所做的事，就是将实数转化为复数。在量子力学中，每个电荷的量子伴随一个有相位的复杂波函数，并且规范场涉及相位测量的不可积分性有关。规范场可以精确地与电磁势等同，电荷守恒定律成为局部规范不变性理论的推论。

从普林斯顿回到苏黎世4年后，外尔去世了，我应《自然》之邀为他撰写讣告。“在20世纪开始从事其数学生涯的所有活着的数学家中，”我写道，“赫尔曼•怀尔是在最多的不同领域做出了重大贡献的人物之一。他堪与19世纪最伟大的全能数学家希尔伯特和庞加莱相提并论。活着的时候，他生动地体现了纯数学与理论物理前沿的联系。现在，他去世了，这种联系中断了，我们期望直接借助于创造性的数学想象来理解物质世界的时代结束了。”我哀伤于他的逝世，但我并不希望追随他的梦想。我高兴地看到纯数学和物理学在向截然相反的方向前进。

讣告以外尔为人的概述结束：“外尔的性格是一种审美感，这主导了他对所有问题的思考。有一次，他曾半开玩笑地对我说，‘我的工作总是努力将真与美统一起来；但是，如果只能选择其中之一，那么我选择美。’这段话是对他个性的完美概括，表明他对自然终极和谐的深刻信念，自然的规律必将以数学美的形式呈现出来。这表明他对人类弱点的认识，他的幽默总会让他不至于显得傲慢自大。他在普林斯顿的朋

友还记得我最后一次见他的模样：那是去年四月在普林斯顿高等研究院举行的春之舞会上：一个高大、和蔼、快乐的人，尽情地自我享受，他明朗的身架和轻快的步伐让人一点看不出他已经69岁。”

外尔逝世后的五十年是实验物理和观察天文学的黄金时代，也培根学派旅行者收集事实、青蛙们在我们生存的小片沼泽地上探索的黄金时代。在这50年中，青蛙们积累了大量的有关宇宙结构、众多粒子和其间相互作用的详尽知识。在持续探索新领域的同时，宇宙变得越来越复杂。不再是展现外尔数学简洁和美丽的大设计 ，探索者发现了夸克和伽玛射线爆等奇异事件，以及超对称和多重宇宙等新奇概念。与此同时，在持续探索混沌和许多被电子计算机打开的新领域时，数学在变得越来越复杂。数学家发现了可计算性的中心谜团，这个猜想表示为P不等于NP。这个猜想声称：存在这样的数学问题，它的个案可以被很快解决，但没有适用于所有情形的快速算法可解决所有问题。这个问题中最著名的例子是旅行销售员问题，即在知道每两个城市之间距离的前提下，寻找这位销售员在这一系列城市间旅行的最短路径。所有的专家都相信这是猜想是正确的，旅行销售员的问题是P不等于NP的实际问题。但没有人知道证明这一问题的一点线索。在赫尔曼•外尔19世纪的数学世界中，这个谜团甚至还没有形成。

杨振宁和尤里•曼宁

对鸟们来说，最近五十年是艰难时光。然而，即使在艰难时代，也有事情等着鸟们去做，他们勇敢地去解决这些事情。在赫尔曼•外尔离开普林斯顿后不久，杨振宁（Frank Yang）从芝加哥来到普林斯顿，搬进了外尔的旧居，在我这一代的物理学家中，他接替外尔的位置成为一只领头鸟。在外尔还活着时，杨振宁和他的学生罗伯特•米尔斯(Robert Mills)发现了非阿贝尔规范场（non-Abelian gauge fields）的杨—米尔斯理论，这是外尔规范场思想的一个漂亮外推。外尔的规范场是一个经典数量，满足了乘法交换定律。杨-米尔斯理论有一个不交换的三重规范场（triplet of gauge fields）。它们满足量子力学自旋三分量的交换法则，这是最简单的非阿贝尔躺代数A2（non-abelian lie algebra A2）的生成子。这个理论后来如此普遍，以至规范场论成为任何有限元李代数的生成子。有了这种普遍性，杨—米尔斯规范场理论为所有已知粒子和其相互作用提供了一个模型框架，这个模型就是今天粒子物理学的标准模型。通过证明爱因斯坦的重力场论适合于同样的框架，以克里斯托夫三指标符号规取代范场的作用，杨振宁为这个理论上写下点睛之笔。

在他1918年一篇论文的附录里，加上1955年为庆祝他70岁生日而出版的论文选集中，外尔阐述了他对规范场理论的最后想法（这是我的翻译）：“对我的理论最强有力的辩护应该是：规范场不变性与电荷守恒相关，正如坐标不变性与能量动量守恒的相关性。”30年后，杨振宁来到瑞士苏黎世，参加外尔百岁诞辰庆典。杨振宁在演讲中引用这段话，作为外尔提出将规范场不变性作为物理学统一原理的思想证据。杨振宁继续说：“通过理论和实验的发展，今天我们已经认识到：对称性、李群和规范场不变性在确定物质世界的基本作用力中发挥了至关重要的作用。我将之称为对称支配相互作用基本原理。”对称支配相互作用的观点，是杨振宁对外尔言论的概括。外尔发现规范场不变性与物质守恒定律有密切关系。但他只能走这一步，不能走得太远，因为他只知道可交换为阿贝尔域的规范场不变性。借助于非阿贝尔规范场产生的非平凡李代数，场之间形成的相互作用变得独特，因此，对称性支配相互作用。这是杨振宁对物理学的伟大贡献。这是一只鸟的贡献，它高高地飞翔在诸多小问题构成的热带雨林之上，我们中的绝大多数在这些小问题耗尽了一生的时光。

我深深敬重的另一只鸟是俄罗斯数学家尤里•曼宁（Yuri Manin），他最近出版了一本名为《数学如隐喻》（Mathematics as Metaphor）的随笔。这本书以俄文在莫斯科出版，美国数学协会将之译为英文出版。我为英文版书作序。在这里，我简单引用我的序言:“对鸟们来说，《数学如隐喻》是一个好口号。它意味着数学中最深刻的概念是将一个世界的思想与另一个世界的思想联系起来。在17世纪，笛卡尔用他的坐标概念将彼此不相干的代数学和几何学联系起来；牛顿用他的流数（fluxions）概念将几何学和力学的世界联系起。今天，我们将这种方法称为微积分学。19世纪，布尔（Boole）用他的符号逻辑

和力学的世界联系起，今天，我们将这种方法称为微积分学。19世纪，布尔（Boole）用他的符号逻辑（symbolic logic）概念将逻辑与代数联系起来；黎曼用他的黎曼曲面概念将几何和分析的世界联系起来。坐标、流数、符号逻辑和黎曼曲面，都是隐喻，将词的意义从熟悉的语境拓展到陌生的语境。曼宁将数学的未来看成是对可见但仍不可知的隐喻的一个探索。最深刻的一个隐喻是数论和物理学之间在结构上的相似性。在这两个领域中，他看到并行概念诱人的一瞥，对称性将连续与离散联结起来。他期待一种名为数学量化（quantization of mathematics）的统一。”

“曼宁不认可培根主义者的故事。1900年，希尔伯特在巴黎的国际数学家大会上提出著名的23个问题，规划了20世纪的数学议程。根据曼宁的观点，希尔伯特的问题是对数学中心议题的一种干扰。曼宁认为数学的重要进展来自纲领，而非问题。通常情况下，问题是通过采用老想法的新方法而得以解决。研究纲领是诞生新想法的苗圃。他认为，以一种更抽象语言重写了整个数学的布尔巴基纲领是20世纪许多新思想的源泉。他将统一了数论和几何学的朗兰兹纲领视为21世纪新思想的希望之泉。解决了著名未解决问题的人会赢得大奖，但只有提出新纲领的人才是真正的先锋。”

俄文版的《数学如隐喻》中有十个篇章在英文版中被删除了。美国数学学会认为，英文读者不会对这些篇章产生兴趣。这种删除是双重不幸。第一，作为一位非凡的数学家，曼宁广博的兴趣远远超越了数学，但英文版读者只能看见观点被拦截的曼宁；第二，我们看见的是观点被截断的俄罗斯文化，相比较于英语言文化，俄罗斯文化没有那么多的分门别类，它让数学家与历史学家、艺术家和诗人有更密切的接触。

约翰•冯•诺伊曼

约翰•冯•诺伊曼（John von Neumann）是20世纪数学中另一位重要人物。冯•诺伊曼是一只青蛙，他用自己惊人的技术技能解决了数学和物理学众多分支领域中的问题。从创立数学的基础开始，他发现了集合论的第一个令人满意的公理集，避免了康托（Cantor）在试图解决无穷集和无穷数时遇到的逻辑悖论。几年后，冯•诺伊曼的鸟类朋友库特•哥德尔（Kurt Godel）用他的公理集证明了数学中的不可判定性命题。

哥德尔的定理让鸟们对数学有了新看法。哥德尔之后，数学不再是与独特真理概念捆绑在一起的单一结构，而是带有不同公理集和不同真理概念的结构群岛。哥德尔证明数学不可穷尽。无论选择怎样的公理集作为基础，鸟们总能找到这些公理不能回答的问题。

冯•诺伊曼从数学基础的奠定迈向了量子力学基础的奠定。为了给量子力学一个坚实的数学基础，他创立了一个宏大的算子环理论（theory of rings of operator）。每个可观察量都可以由一个线性算子来代表，量子行为的特殊性可由算术代数忠实地代表。正如牛顿发明了描述经典力学的微积分，冯•诺伊曼发明了描述量子力学的算子环理论。

冯•诺伊曼在几个领域做出了奠基性贡献，特别是从博弈论到数字计算机的设计。在他生命的最后十年里，他深深了陷到计算机里。他对计算机的兴趣如此强烈，以至决定不仅要研究它们的设计，而且还要用真正的硬件和软件构建一台可做科学研究的计算机。我对冯•诺伊曼在普林斯顿高等研究所的早期计算机有生动清晰的记忆。那时，他有两个主要的科学兴趣：氢弹和气象学。夜晚，他用计算机做氢弹问题，白天，则做气象学问题。白天，游荡在计算机大楼里的许多人都是气象学家，他们的领导是朱尔•查耐（Jule Charney）。查耐是一位真正的气象学家，妥善谦卑地讨论天气变幻莫测的神秘，怀疑计算机解决这个神秘的能力。我听过冯•诺伊曼以这个问题为主题的一次演讲。如往常一样，他充满自信地说：“计算机将使我们能够在任何时刻将大气划分为稳定域和不稳定域。我们可以预测稳定域，我们能够控制不稳定域。”

冯•诺伊曼相信，任何不稳定域都可以通过明智而审慎的小扰动来推动，推动它向任何所期望的方向移动。小扰动可以通过携带烟雾发生器的飞机舰队来实施，在扰动效果最佳的地方吸收太阳光，提高或降低局部温度。特别是，通过尽早鉴不稳定域，我们能在飓风之初将之停止，然后在该区域气温上升并形成漩涡之前，降低其气温。冯•诺伊曼在1950年指出，只需用十年的时间就能建造足以精确诊断大气中稳定和不稳定区域的强大计算机。一旦能够精确诊断，我们就能在短时间内实施天气控制。他期望能在20世纪60年代的十年中，对天气的实际控制成为常规操作。

冯•诺伊曼当然错了。他错在不知道混沌（chaos）。我们现在明白，当大气运动局部不稳定时，实际上常常是发生了混沌。“混沌”意味着刚开始聚拢在一起运动会随着时间推进而呈指数般离散。当运动成为混沌时，它就不可预测，小扰动不可能将之推向可预测的稳定运动。小扰动通常是将之推向另一种同样不可预测的混沌运动。所以，冯•诺伊曼控制天气的战略思想破产了。最终，他是一位伟大的数学家，但也是一位中庸的气象学家。

1963年，在冯•诺伊曼逝世6年后，爱德华•劳伦兹发现气象方程的解总是混沌。劳伦兹是一位气象学家，通常也被认为是混沌的发现者。他在气象学的背境中发现了混沌现象，并赋予它们一个现代化的名字。事实上，早在1943年在剑桥的一次演讲中，我已听数学家玛丽•卡特赖特描述了同样的现象，比劳伦兹早20年。卡特赖特1998年以97岁高龄逝世，她以不同的名称称呼这种现象，但他们讲述的是同一现象。她是在描述一种非线性放大器振动的范德波尔方程的解中发现了这些现象。范德波尔方程在第二次世界大战中变得重要，因为在早期的雷达系统，非线性放大器要为发报机提供动力。发报机工作不规则时，空军就会责备制造商生产了有缺陷的放大器。玛丽•卡特赖特被请来寻找问题。她发现问题出在在范德波尔方程。她指出，范德波尔方程的解有精确的混沌行为，这正在空军所抱怨的。在我听冯•诺伊曼谈论天气控制之前7年，我已经从玛丽•卡特赖特处得知所有的混沌问题，但我没有远见卓识足以将二者联系起来。我从来不曾想到：范德波尔方程所描述的不规则行为可用于天气预报的研究。如果我是一只鸟而不是一只青蛙，我也许能看出其中的联系，也许就能帮助冯•诺伊曼解决许多麻烦。如果他在1950年就知道混沌，那么他会深入地思考这个问题，并会在1954年就混沌问题谈一些重要的见解。

在走向生命尽头之时，冯•诺伊曼陷入了麻烦。因为他是一只真正的青蛙，但每个人都期望他是一只飞翔的鸟。1954年，国际数学家大会在荷兰阿姆斯特丹举行。国际数学家大会每四年举办一次，应邀在大会开幕式上作演讲是一个崇高的荣誉。阿姆斯特丹大会的组织者邀请冯•诺伊曼作大会主题演讲，希望能再现希尔伯特1990年在巴黎大会上的盛况。正如希尔伯特提出的未解决问题指引了20世纪前半叶的数学发展，冯•诺伊曼应邀为20世纪后半叶的数学指点江山。冯•诺伊曼演讲的题目已经在大会纲要中公布了。它是：《数学中未解决的问题——大会组委会邀请演讲》。然而，会议结束后，包含所有演讲内容的完整会议记录出版了，除了冯•诺伊曼的这篇演讲之外。会议记录中有一空白页，上面只写着冯•诺伊曼的名字和演讲题目，下面写着：“演讲文稿尚未获取。”

究竟发生了什么事？我知道所发生的事情，因为1954年9月2日，星期四，下午3：00，我正坐在阿姆斯特丹音乐厅的听众席上。大厅里挤满了数学家，所有人都期望在这样一个历史时刻聆听一个精彩绝伦的演讲。演讲结果却是令人非常失望。冯•诺伊曼可能在几年前就接受邀请做这样一个演讲，然后将之忘到九宵云外。诸事缠身，他忽略了准备演讲之事。然后，在最一刻，他想起来他将旅行到阿姆斯特丹，谈一些有关数学的事；他拉开一个抽屉，从中抽出一份20世纪30年代的老演讲稿，弹掉上面灰尘。 这是一个有关算子环的演讲，在30年代是一个全新、时髦的话题。没有谈任何未解决的问题，没有谈任何未来的问题。没有谈任何计算机，我们知道这是冯•诺伊曼心中最亲爱的话题，他至少应该谈一些有关计算机的新的、激动人心的事。音乐厅里的听众开始变得焦躁不安。有人用全音乐厅里的

人都能听见的声音大声说："Aufgewarmte suppe"，这是一句德国，意思是"先将汤加热（warmed-up soup）"。1954年，绝大多数数学家都懂德语，他们明白这句玩笑的意思。冯•诺伊曼陷入深深的尴尬，匆匆结束演讲，没有等待任何提问就离开了音乐厅。

弱混沌

如果冯•诺伊曼在阿姆斯特丹演讲时对混沌略有了解，那么他可能提出的未解决问题之一应该是弱混沌。50多年后的今天，弱混沌依然是尚未解决的问题。这个问题是要明白为什么混沌运动常常受到边界约束，不会引发任何猛烈的动荡。弱混沌的一个好例子是太阳系中行星和卫星的轨道运动。科学家们最近发现，这些运动是弱混沌。这是一个令人震惊的发现，颠覆了太阳系作为有序稳定运动最好例证的传统概念。200年前，法国天文学家、数学家拉普拉斯（Laplace）认为，他已经证明了太阳系是稳定的。现在看来拉普拉斯错了。轨道的精确数值积分清楚地显示，相邻轨道呈现指数级偏离。在经典力学的世界里，弱混沌似乎无处不在。

在长期积分（long-term integration）做出来之前，人们从未想象过太阳系中的混沌行为，因为这种混沌是弱的。弱混沌意味着相邻轨道呈指数级离散，却不会离散得太远。这种离散开始时以指数级速度增长，但随后就维持在边界处。因为行星运动的离散是弱的，所以太阳系能在40亿多年的时光里得以生存。尽管这种运动是混沌的，但行星从来不会在远离它们所熟悉的地区漫游，因此，太阳系作为一个整体从来不曾分崩离析。尽管混沌无处不在，但拉普拉斯将太阳系当作像时钟运动一样完美的观点离事实并不遥远。

在气象学领域，我们看到了相同的弱混沌现象。尽管新泽西的天气糟糕地混沌，但这种混沌严格有限。夏天和冬天有着不可预测的温和或严厉，我们却能可靠地预测：气温绝对不会升至45摄氏度或低到零下30摄氏度，这是经常出现在印度和明尼苏达的极端情况。物理学中没有守恒定律禁止新泽西的气温不可以升至印度一样的温度，或禁止新泽西的气温不能降低到明尼苏达的气温。混沌的弱点成为这个星球上生命长期生存的关键。弱混沌在赋予我们各种挑战性天气的能力的同时，也保护我们不致遭受危及我们生存的剧烈温差波动。我们还不能理解混沌保持这种仁慈之弱的原因。这是今天在座的年轻青蛙们可以带回家的另一个未解决问题。我挑战你们弄明白这个问题：为什么在各种动力系统中观察到的混沌均是普遍微弱。

混沌的特征已被众多的数据和无止境的美丽图片所勾勒，但却缺少严格理论。严谨理论赋予一个课题以智力的深度和精确。在你能证明一个严格理论之前，你不可能全面理解你所关注的概念的意义。在混沌领域，我知道只有一个严格理论在1975年被李天岩(Tien-Yien Li)和吉姆• 约克（Jim Yorke）所证明，这篇短论文的题目是：《周期三蕴含混沌》（Period Three Implies Chaos）。李-约克论文是数学文献中不朽的珍宝。他们的理论将非线性地图的区间扩展至它本身。当被当作是一个经典粒子的轨道时，点位置的连续性就能重复。如果一个点在N次映像之后又回到它原始的位置，那么这个轨道就有N个周期。由此而论，如果一个轨道从所有的周期轨道中离散，那么这个轨道就被定义为混沌。这个理论表明，如果单个轨道拥有三个存在周期，那么混沌轨道就是存在的。这个证明简洁、短小。在我的印象里，这个理论和它的证明投向混沌基本特征的光芒胜过几千张美丽图片。它解释了混沌为什么在这个世界里普遍存在，但没有解释混沌为什么总是这样弱，这是留给未来的一个任务。我相信，在证明有关弱混沌的严谨定理之前，我们是不会从根本上理解弱混沌。

弦理论家

我想在弦理论上讲几句。只讲几句，是因为我对弦理论知之甚少。我从来没有劳心费神地学习这个理

论，或自己花功夫去研究它。但是，当我在普林斯顿研究所有一个家时，我周围环绕着弦理论专家，我有时能听到他们之间的谈话。偶尔，我也能明白一点点他们谈话的内容。有三件事情是显而易见：第一，他们正在做第一流的数学，从而让迈克尔•阿蒂亚（Michael Atiyah）、伊萨多•辛格（Isadore Singer）这样的领袖级纯数学家也爱上弦理论，它开启了一个有新想法和新问题的全新数学分枝，最不寻常的是，它赋予数学一种解决老问题的新方法，这些老问题以前是不能解决的；第二，这些弦理论学家认为自己是物理学家而非数学家。他们相信自己的理论描述了物质世界的一些真实东西；第三，还没有任何证明显示这个理论与物理学相关。这个理论至今尚未被实验所证明。这个理论还在它自己的世界里，远离物理学。弦理论学家们付出艰苦努力，试图演绎这个可能在真实世界里被检验的理论的结果，但至今尚未成功。

我的同事爱德华•威腾(Ed Witten)、胡安•马尔达西那（Juan Maldacena）和其他创建弦理论的人，都是鸟，他们飞翔在高高的天空，俯览远隔千里的众山全貌。在世界各地的大学里，几千名在弦理论上埋头苦干的谦卑实践者是青蛙，他们探索那些鸟们在地平线上第一次看到的数学结构的细节。我对弦理论的忧虑是从社会学角度而不是科学角度。成为发现新联系和探求新方法的第一批几千名弦理论学家之一，这是一个光荣的事；但成为第二批或万名弦理论学家之一，则不是一件光荣的事。今天，世界各地分布着上万名弦理论学家。对第1万名或第2000名科学家来说，情形是危险的。不可预测事情可能会发生，比如形势变化，弦理论不再时髦。这样的事情也可能发生：9000名弦理论学家可能会失业。他们在一个狭窄的领域接受训练，在其它科学领域可能无法被聘用。

为什么如此之多的年轻人被弦理论所吸引？这种吸引部分可能是智力因素。弦理论如此大胆、在数学上如此高贵。但这种吸引也可能是社会因素。弦理论吸引人的原因是它能提供职位。那么，为什么弦理论领域能提供这么多的职位呢？因为弦理论是廉价的。如果你是某个偏远地方的大学物理学主任，没有多少钱，你无法承担建造一个做物理实验的现代化实验室，但你有能力聘请几位弦理论学家，因此，你提供了几个弦理论的职位，这样，你就拥有了一个现代化的物理系。对提供职位的系主任而言、对接受这些职位的年轻人而言，这是多么大的吸引力！然而，对年轻人和科学的未来而言，这是危险有害的情形。我并不是说我们应该在年轻人发现弦理论激动人心时劝阻他们不要从事这项研究。我的意思是我们应该给他们可替代的选择，让他们不致于因经济需求而被迫进入弦理论。

最后，我想谈谈我对弦理论未来的推测。我的推测可能是错的。我从来没有幻想过我能预测未来。我告诉你们我的推测，只是想给你们一些思考的问题。我认为，弦理论不可能完全成功或完全无用。所谓完全成功，我的意思是它是一种完全（完整？）的物理理论，解释了粒子和其间相互作用的所有细节。所谓完全的无用，我的意思是它保留了一种纯数学的美丽。我的推测是，弦理论将在完全成功与完全失败之间的某一处终结。我认为它应该类似于李群，这是索菲斯•李（Sophus Lie）在19世纪为经典物理创建的一个数学框架。所以，只要物理学保持其经典性，李群就是一个失败。它们是一个寻找问题的解决方案。但另一方面，五十年后，量子革命改变了物理学，李代数找到用武之地：成为认识量子世界对称性中心作用的关键。我期望今后五十年或一百年中，物理学的另一场革命会引入我们今天一无所知的新概念，这些新概念将赋予弦理论一种全新的意义。在此之后，弦理论会突然发现自己在宇宙中应有的位置，提出对真实世界可经测试的陈述。我警告你们：这个有关未来的猜测可能是错的，它本身具有证伪性的美德，（科学哲学大师）卡尔 波普尔（karl Popper）说，这正是科学命题的特点。 明天，它可能会被来自大型强子对撞机的新发现所推翻。

再谈曼宁

在结束这个演讲之际，我再回到曼宁和他的书《数学如隐喻》。这本书主要谈数学，但它也许会让西方读者感到吃惊，因为作者用同样的文才描述了其它主题，比如集体无意识、人类语言的起源、孤独症心理学、魔术师在诸多神话文化里的作用。对他的俄罗斯的同胞来说，如此丰富的兴趣专长并不令人惊

理学、魔术师在诸多神话文化里的作用。对他的俄罗斯同胞来说，如此丰富的兴趣爱好并不令人惊讶。俄罗斯知识分子保持了老俄罗斯知识阶层的骄傲传统，科学家、诗人、艺术家和音乐家属于一个独立阶层。今天依然如此，我们在契诃夫的戏剧中看见他们：一群理想主义者因疏远迷信的社会和反复无常的政府而联结在一起。在俄罗斯，数学家、作曲家和电影制片人倾心交谈，一同走在冬夜的雪地里，围坐在一瓶酒的周围，分享着彼此的思想。

曼宁是一只鸟，他的视野超越了数学疆界进入了更广阔的人类文化地貌。他的兴趣爱好之一是瑞士心理学家卡尔•荣格（C.G荣格1875年7月26日——1961年6月6日，瑞士著名的心理学家和分析心理学的创始人。）发明的原型理论。荣格认为，原型是一种根植于一种我们共同分享的集体无意识之中的精神意象。原型所拥有的这种强烈感情是已经丢失的集体悲欢喜乐记忆的遗迹。曼宁说，为了寻找这种理论的启发性，我们不必将荣格的理论作为一种真理来接受。

三十多年前，歌手莫尼克 莫瑞利（Monique Morelli）录制了一盘皮埃尔 迈克奥兰（Pierre Macorlan）作词的唱片。其中一首歌是《死城》（La ville Morte），萦绕于心的旋律切合着莫瑞利深沉的低音，随着歌声的对位，一个具有强烈冲击力的死城形象生动地出现了。歌声并没有特殊之处：

“当我们走进这座死城，我的手牵着玛戈特……我们带着受伤的脚从墓地中走出，沉默无言，走过这些没有上锁的门，这些模模糊糊可以瞥见的洞，我们走过这些门，沉默无言，垃圾埇里充满惊声尖叫。”

每次聆听这首歌，我的情感都极为强烈。我常常问自己：为什么这首歌的简单歌词似乎与一些深厚的无意识记忆产生了共鸣？那些死亡的灵魂似乎通过莫瑞利的歌声在述说。现在，意料之外，我在曼宁的书中找到了答案。在“空城原型”一章中，曼宁描述了从古至今，从人类聚集在城市开始，从人类聚集成军队去蹂弗里曼•戴森 （Freeman Dyson）1923年12月15日出生，美籍英裔数学物理学家，普林斯顿高等研究院自然科学学院荣誉退休教授。

戴森早年在剑桥大学追随著名的数学家G.H.哈代研究数学，二战结束后来到美国康奈尔大学，跟随汉斯•贝特教授。他证明了施温格和朝永振一郎发展的变分法方法和费曼的路径积分法的等价性，为量子电动力学的建立做出了决定性的贡献。1951年他任康奈尔大学教授，1953年后一直任普林斯顿高等研究院教授。

《鸟和青蛙》(Birds and Frogs)是戴森应邀为美国数学会爱因斯坦讲座所起草的一篇演讲稿，该演讲计划于2008年10月举行，但因故被取消。这篇文章全文发表于2009年2月出版的《美国数学会志》（NOTICES OF THE AMS, VOLUME56, Number 2）。