所谓不定方程，是指未知数的个数多于方程个数，且未知数受到某些（如要求是有理数、整数或正整数等等）的方程或方程组。不定方程也称为丢番图方程，是数论的重要分支学科，也是历史上最活跃的数学领域之一。不定方程的内容十分丰富，与代数数论、几何数论、集合数论等等都有较为密切的联系。不定方程的重要性在数学竞赛中也得到了充分的体现，每年世界各地的数学竞赛吉，不定方程都占有一席之地；另外它也是培养学生思维能力的好材料，数学竞赛中的不定方程问题，不仅要求学生对初等数论的一般理论、方法有一定的了解，而且更需要讲究思想、方法与技巧，创造性的解决问题。在本节我们来看一看不定方程的基础性的题目。

基础知识

1．不定方程问题的常见类型：

（1）求不定方程的解；

（2）判定不定方程是否有解；

（3）判定不定方程的解的个数（有限个还是无限个）。

2．解不定方程问题常用的解法：

（1）代数恒等变形：如因式分解、配方、换元等；

（2）不等式估算法：利用不等式等方法，确定出方程中某些变量的范围，进而求解；

（3）同余法：对等式两边取特殊的模（如奇偶分析），缩小变量的范围或性质，得出不定方程的整数解或判定其无解；

（4）构造法：构造出符合要求的特解，或构造一个求解的递推式，证明方程有无穷多解；

（5）无穷递推法。

以下给出几个关于特殊方程的求解定理：

（一）二元一次不定方程（组）

定义1.形如$ax+by=c$（$a,b,c,\in Z$，a,b不同时为零)的方程称为二元一次不定方程。

定理1.方程$ax+by=c$有解的充要是$(a,b)\mid c$；

定理2.若$(a,b)=1$，且x_0,y_0为$ax+by=c$的一个解，则方程的一切解都可以表示成

$$\begin{cases} x=x_0+\dfrac{b}{(a,b)}t \\ y=y_0-\dfrac{a}{(a,b)}t \end{cases}$$

（t为任意整数)。

定理3.n元一次不定方程$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=c$，（$a_1,a_2,\cdots,a_n,c\in N$)有解的充要条件是$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid c$.

方法与技巧：

1．解二元一次不定方程通常先判定方程有无解。若有解，可先求$ax+by=c$一个特解，从而写出通解。当不定方程系数不大时，有时可以通过观察法求得其解，即引入变量，逐渐减小系数，直到容易得其特解为止；

2．解n元一次不定方程$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=c$时，可先顺次求出$(a_1,a_2)=d_2,(d_2,a_3)=d_3$，……，$(d_{n-1},a_n)=d_n$.若$d_n\nmid c$，则方程无解；若$d_n\mid c$，则方程有解，作方程组：

$$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2=d_2t_2 \\ d_2t_2+a_3x_3=d_3t_3 \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_{n-2}t_{n-2}+a_{n-1}x_{n-1}=d_{n-1}t_{n-1} \\ d_{n-1}t_{n-1}+a_nx_n=c \end{cases}$$

求出最后一个方程的一切解，然后把t_{n-1}的每一个值代入倒数第二个方程，求出它的一切解，这样下去即可得方程的一切解。

3．m个n元一次不定方程组成的方程组，其中$m<n$，可以消去$m-1$个未知数，从而消去了$m-1$个不定方程，将方程组转化为一个$n-m+1$元的一次不定方程。

（二）高次不定方程（组）及其解法

1．因式分解法：对方程的一边进行因式分解，另一边作质因式分解，然后对比两边，转而求解若干个方程组；

2．同余法：如果不定方程$F(x_1,\cdots,x_n)=0$有整数解，则对于任意$m\in N$，其整数解$(x_1,\cdots,x_n)$满足$F(x_1,\cdots,x_n)\equiv 0(\bmod m)$，利用这一条件，同余可以作为探究不定方程整数解的一块试金石；

3．不等式估计法：利用不等式工具确定不定方程中某些字母的范围，再分别求解；

4．无限递降法：若关于正整数n的命题$P(n)$对某些正整数成立，设n_0是使$P(n)$成立的最小正整数，可以推出：存在$n_1\in N^*$，使得$n_1<n_0$成立，适合证明不定方程无正整数解。

方法与技巧：

1．因式分解法是不定方程中最基本的方法，其理论基础是整数的唯一分解定理，分解法作为解题的一种手段，没有因定的程序可循，应具体的例子中才能有深刻地体会；

2．同余法主要用于证明方程无解或导出有解的必要条件，为进一步求解或求证作准备。同余的关键是选择适当的模，它需要经过多次尝试；

3．不等式估计法主要针对方程有整数解，则必然有实数解，当方程的实数解为一个有界集，则着眼于一个有限范围内的整数解至多有有限个，逐一检验，求出全部解；若方程的实数解是无界的，则着眼于整数，利用整数的各种性质产生适用的不等式；

4．无限递降法论证的核心是设法构造出方程的新解，使得它比已选择的解“严格地小”，由此产生矛盾。

（三）特殊的不定方程

1．利用分解法求不定方程$ax+by=cxy(abc\neq 0)$整数解的基本思路：

将$ax+by=cxy(abc\neq 0)$转化为$(x-a)(cy-b)=ab$后，若ab可分解为$ab=a_1b_1=\cdots=a_ib_i\in Z$，则解的一般形式为$\begin{cases}x=\dfrac{a_i+a}{c}\\ y=\dfrac{b_i+b}{c}\end{cases}$，再取舍得其整数解；

2．定义2：形如$x^2+y^2=z^2$的方程叫做勾股数方程，这里x,y,z为正整数。

对于方程$x^2+y^2=z^2$，如果$(x,y)=d$，则$d^2\mid z^2$，从而只需讨论$(x,y)=1$的情形，此时易知x,y,z两两互素，这种两两互素的正整数组叫方程的本原解。

定理3.勾股数方程$x^2+y^2=z^2$满足条件$2\mid y$的一切解可表示为：

$x=a^2-b^2, y=2ab, z=a^2+b^2$，其中$a>b>0,(a,b)=1$且$a,b$为一奇一偶。

推论：勾股数方程$x^2+y^2=z^2$的全部正整数解（x,y的顺序不加区别）可表示为：

$x=(a^2-b^2)d, y=2abd, z=(a^2+b^2)d$其中$a>b>0$是互质的奇偶性不同的一对正整数，$d$是一个整数。

勾股数不定方程$x^2+y^2=z^2$的整数解的问题主要依据定理来解决。

3．定义3.方程$x^2-dy^2=\pm1,\pm4(x,y\in Z,d\in N^*$且不是平方数)是$x^2-dy^2=c$的一种特殊情况，称为沛尔(Pell)方程。

这种二元二次方程比较复杂，它们本质上归结为双曲线方程$x^2-dy^2=c$的研究，其中c,d都是整数，$d>0$且非平方数，而$c\neq 0$。它主要用于证明问题有无数多个整数解。对于具体的d可用尝试法求出一组成正整数解。如果上述pell方程有正整数解(x,y)，则称使$x+\sqrt{d}y$的最小的正整数解(x_1,y_1)为它的最小解。

定理4.Pell方程$x^2-dy^2=1(x,y\in Z,d\in N^*$且不是平方数)必有正整数解$(x,y)$，且若设它的最小解为$(x_1,y_1)$，则它的全部解可以表示成：

$$\begin{cases}x_n=\dfrac{1}{2}\left[(x_1+\sqrt{d}y_1)^n+(x_1-\sqrt{d}y_1)^n\right]\\ y_n=\dfrac{1}{2\sqrt{d}}\left[(x_1+\sqrt{d}y_1)^n-(x_1-\sqrt{d}y_1)^n\right]\end{cases}(n\in N^*).$$

上面的公式也可以写成以下几种形式：

（1）$x_n+y_n\sqrt{d}=(x_1+y_1\sqrt{d})^n$；（2）$\begin{cases}x_{n+1}=x_1x_n+dy_1y_n\\ y_{n+1}=x_1y_n+y_1x_n\end{cases}$；（3）$\begin{cases}x_{n+1}=2x_1x_n-y_{n-1}\\ y_{n+1}=2x_1y_n-y_{n-1}\end{cases}$.

定理5.Pell方程$x^2-dy^2=-1(x,y\in Z,d\in N^*$且不是平方数)要么无正整数解，要么有无穷多组正整数解(x,y)，且在后一种情况下，设它的最小解为(x_1,y_1)，则它的全部解可以表示为$\begin{cases}x_n=\dfrac{1}{2}\left[(x_1+\sqrt{d}y_1)^{2n-1}+(x_1-\sqrt{d}y_1)^{2n-1}\right]\\ y_n=\dfrac{1}{2\sqrt{d}}\left[(x_1+\sqrt{d}y_1)^{2n-1}-(x_1-\sqrt{d}y_1)^{2n-1}\right]\end{cases}(n\in N^*)$

定理6.（费尔马（Fermat）大定理）方程$x^n+y^n=z^n(n\geq 3$为整数)无正整数解。

费尔马（Fermat）大定理的证明一直以来是数学界的难题，但是在1994年6月，美国普林斯顿大学的数学教授A.Wiles完全解决了这一难题。至此，这一困扰了人们四百多年的数学难题终于露出了庐山真面目，脱去了其神秘面纱。

典例分析

例1．求不定方程$37x+107y=25$的整数解。

解：先求$37x+107y=1$的一组特解，为此对37，107运用辗转相除法：

$107=2\times 37+33$，$37=1\times 33+4$，$33=4\times 8+1$

将上述过程回填，得：

$1=33-8\times4=37-4-8\times4=37-9\times4=37-9\times(37-33)=9\times33-8\times37=9\times(107-2\times37)-8\times37$
$=9\times107-26\times37=37\times(-26)+107\times9$

由此可知，$x_1=-26, y_1=9$ 是方程 $37x+107y=1$ 的一组特解，于是 $x_0=25\times(-26)=-650$，$y_0=25\times9=225$ 是方程 $37x+107y=25$ 的一组特解，因此原方程的一 切整数解为：$\begin{cases}x=-650+107t\\ y=225-37t\end{cases}$。

例2．求不定方程 $7x+19y=213$ 的所有正整数解。

解：用原方程中的最小系数7去除方程的各项，并移项得：$x=\dfrac{213-19y}{7}=30-2y+\dfrac{3-5y}{7}$

因为 x,y 是整数，故 $\dfrac{3-5y}{7}=u$ 也一定是整数，于是有 $5y+7u=3$，再用5去除比式的两边，得 $y=\dfrac{3-7u}{5}=-u+\dfrac{3-2u}{5}$，令 $v=\dfrac{3-2u}{5}$ 为整数，由此得 $2u+5v=3$。

经观察得 $u=-1, v=1$ 是最后一个方程的一组解，依次回代，可求得原方程的一组特解：$x_0=25, y_0=2$，所以原方程的一切整数解为：$\begin{cases}x=25-19t\\ y=2+7t\end{cases}$。

例3．求不定方程 $3x+2y+8z=40$ 的正整数解。

解：显然此方程有整数解。先确定系数最大的未知数 z 的取值范围，因为 x,y,z 的最小值为1，所以 $1\le z\le\left[\dfrac{40-3-2}{8}\right]=4$。

当 $z=1$ 时，原方程变形为 $3x+2y=32$，即 $y=\dfrac{32-3x}{2}$，由上式知 x 是偶数且 $2\le x\le10$ 故方程组有5组正整数解，分别为 $\begin{cases}x=2\\ y=13\end{cases}$，$\begin{cases}x=4\\ y=10\end{cases}$，$\begin{cases}x=6\\ y=7\end{cases}$，$\begin{cases}x=8\\ y=4\end{cases}$，$\begin{cases}x=10\\ y=1\end{cases}$；

当 $z=2$ 时，原方程变形为 $3x+2y=24$，即 $y=\dfrac{24-3x}{2}$，故方程有3组正整数解，分别为：$\begin{cases}x=2\\ y=9\end{cases}$，$\begin{cases}x=4\\ y=6\end{cases}$，$\begin{cases}x=6\\ y=3\end{cases}$；

当 $z=3$ 时，原方程变形为 $3x+2y=16$，即 $y=\dfrac{16-3x}{2}$，故方程有2组正整数解，分别为：$\begin{cases}x=2\\ y=5\end{cases}$，$\begin{cases}x=4\\ y=2\end{cases}$；

当 $z=4$ 时，原方程变形为 $3x+2y=8$，即 $y=\dfrac{8-3x}{2}$，故方程只有一组正整数解，为 $\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$。

故原方程有11组正整数解（如下表）：

x	2	4	6	8	10	2	4	6	2	4	2
y	13	10	7	4	1	9	6	3	5	2	1
z	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4

例4．求出方程 $x^2-7y^2=1$ 的所有正整数解。

解：先求最小解 (x_1,y_1)。令 $y=1,2,3,\cdots$

当 $y=1$ 时，$1+7y^2=8$；当 $y=2$ 时，$1+7y^2=29$；当 $y=3$ 时，$1+7y^2=64=8^2$。所以 $x^2-7y^2=1$ 的最小解为 $(8,3)$，于是：

$$\begin{cases}x_n=\dfrac{1}{2}\left[(x_1+\sqrt{d}y_1)^n+(x_1-\sqrt{d}y_1)^n\right]=\dfrac{1}{2}[(8+3\sqrt{7})^n+(8-3\sqrt{7})^n]\\ y_n=\dfrac{1}{2\sqrt{d}}\left[(x_1+\sqrt{d}y_1)^n-(x_1-\sqrt{d}y_1)^n\right]=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}[(8+3\sqrt{7})^n-(8-3\sqrt{7})^n]\end{cases}(n\in N^*)$$

例5．在直角坐标平面上，以（199，0）为圆心，以199为半径的圆周上的整点的个数为多少个？

解：设 $A(x,y)$ 为圆 O 上任一整点，则其方程为：$y^2+(x-199)^2=199^2$；

显然 $(0,0),(199,199),(199,-199),(389,0)$ 为方程的4组解。

但当 $y\ne0,\pm199$ 时，$(y,199)=1$（因为199是质数），此时，$199,y,|199-x|$ 是一组勾股数，故199可表示为两个正整数的平方和，即 $199=m^2+n^2$。

因为 $199=4\times49+3$，可设 $m=2k, n=2l+1$，

则 $199=4k^2+4l^2+4l+1=4(k^2+l^2+l)+1$

这与199为 $4d+3$ 型的质数矛盾！

因而圆O上只有四个整点 $(0,0),(199,199),(199,-199),(389,0)$。

例6．求所有满足 $8^x+15^y=17^z$ 的正整数三元组 (x,y,z)。

解：两边取 $\bmod 8$，得 $(-1)^y\equiv1(\bmod 8)$，所以 y 是偶数，再 $\bmod 7$ 得 $2\equiv3^z(\bmod 7)$，所以 z 也是偶数。此时令 $y=2m, z=2t(m,t\in N)$

于是，由$8^x+15^y=17^z$可知：$2^{3x}=(17^t-15^m)(17^t+15^m)$；

由唯一分解定理：$(17^t-15^m)=2^s$，$(17^t+15^m)=2^{3x-s}$，

从而$17^t=\frac{1}{2}(2^s+2^{3x-s})=2^{s-1}+2^{3x-s-1}$

注意到17是奇数，所以要使$17^t=\frac{1}{2}(2^s+2^{3x-s})=2^{s-1}+2^{3x-s-1}$成立，一定有$s=1$。

于是$17^t-15^m=2$。

当$m\ge 2$时，在$17^t-15^m=2$的两边取$\bmod 9$，得$(-1)^t\equiv 2(\bmod 9)$，这显然是不成立的，所以$m=1$，从而$t=1,x=2$。

故方程$8^x+15^y=17^z$只有唯一的一组解（2，2，2）。

例7．a是一个给定的整数，当a为何值时，x,y的方程$y^3+1=a(xy-1)$有正整数解？在有正整数解时，求解该不定方程。

解；若有质数$p\mid x^3$，$p\mid xy-1$，则$p\mid x$，从而$p\mid 1$，矛盾！所以$(x^3,xy-1)=1$。

因此$xy-1\mid y^3+1$当且仅当$xy-1\mid x^3(y^3+1)$。

因为$x^3(y^3+1)=(x^3y^3-1)+(x^3+1)$，显然$xy-1\mid x^3(y^3+1)$，所以$xy-1\mid y^3+1$当且仅当$xy-1\mid x^3+1$。（*）

（1）若$y=1$时，$a=\frac{2}{x-1}\in Z$，所以$x=2$或$x=3$，$a=2$或$a=1$；

（2）类似地，若$x=1$，则$\frac{2}{y-1}\in Z$，所以$y=2$或$y=3$，$a=9$或$a=14$；

（3）由于条件（*），不妨设$x\ge y>1$；

若$x=y$，则$a=\frac{y^3+1}{y^2-1}=y+\frac{1}{y-1}\in Z$，所以$x=y=2,a=3$；

若$x>y$，则因为$y^3+1\equiv 1(\bmod y), xy-1\equiv -1(\bmod y)$，所以存在$b\in N$，使得：$y^3+1=(xy-1)(by-1)$，

所以$by-1=\frac{y^3+1}{xy-1}<\frac{y^3+1}{y^2-1}=y+\frac{1}{y-1}$，$by-1<\frac{1}{y-1}+1$。

因为$y\ge 2,b\in N$，所以必有$b=1$。

所以$y^3+1=(xy-1)(y-1)$，故$y^3=xy^2-xy-y,y^2=xy-y-1$

所以$x=\frac{y^2+1}{y-1}=y+1+\frac{2}{y-1}\in N$，所以$y=2$或$y=3$

当$y=2$时，$x=5$；

当$y=3$时，$x=5$，对应的a为1或2。

由条件（*）知$x=2,y=5$以及$x=3,y=5$也是原方程的解，对应的整数a为14或9。

综上，当$a=1,2,3,9,14$时原方程有整数解，它们分别是：（3，1），（5，2）；（2，1），（5，3），（2，2）；（1，2），（3，5）；（1，3），（2，5）。

例8．求证：边长为整数的直角三角形的面积不可能是完全平方数。

证明：假设结论不成立，在所有的面积为平方数勾股三角形中选取一个面积最小的，设其边长为$x<y<z$，则$\frac{1}{2}xy$是平方数，则必有$(x,y)=1$。

因为$x^2+y^2=z^2$，故存在整数$a>b>0,a,b$中一奇一偶，$(a,b)=1$，使得（不妨设y是偶数）$x=a^2-b^2,y=2ab,z=a^2+b^2$。

由于$\frac{1}{2}xy=(a-b)(a+b)ab$是完全平方数，而知$a-b,a+b,ab$两两互素，故它们是平方数，

即$a=p^2,b=q^2,a+b=u^2,a-b=v^2$，

所以$u^2-v^2=2q^2$即$(u+v)(u-v)=2q^2$

因为u,v是奇数，易知$(u+v,u-v)=2$，于是$u-v$与$u+v$中有一个是$2r^2$，另一个是$(2s)^2$，而$q^2=4r^2s^2$；

另一方面，$a=p^2,b=q^2,a+b=u^2,a-b=v^2$得

$$p^2=a=\frac{1}{2}(u^2+v^2)=\frac{1}{4}[(u+v)^2+(u-v)^2]$$

$$=\frac{1}{4}[(2r^2)^2+(2s)^4]=r^4+4s^4$$

所以，以$r^2, 2s^2, p$为边的三角形都是直角三角形，其面积等于$\frac{1}{2}r^2\times 2s^2=(rs)^2$是平方数，

但是$(rs)^2=\frac{q^2}{4}=\frac{b}{4}<(a^2-b^2)ab=\frac{1}{2}xy$，于是构造出了一个面积更小的勾股三角形，矛盾！

大 中 小 推荐给朋友 打印 关闭

【上一篇】

【下一篇】

地址：北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼
邮编：100081
E-mail:pep@pep.com.cn

电话：010-58758866
400-810-5788
传真：010-58758877