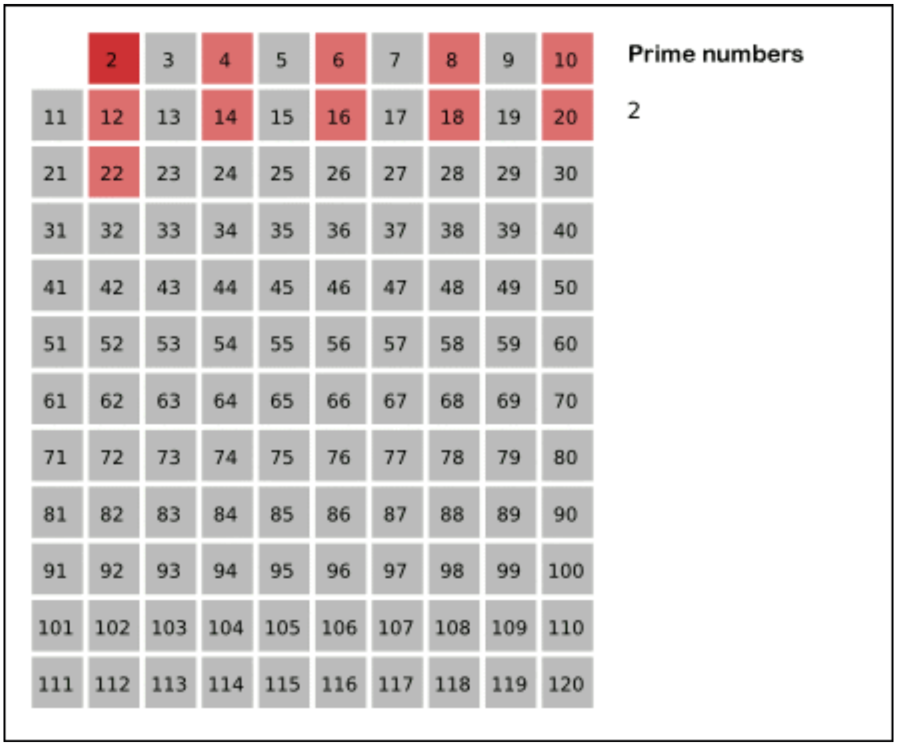
埃拉托斯特尼筛法

维基百科，自由的百科全书

埃拉托斯特尼筛法，简称埃氏筛或爱氏筛，是一种公元前250年由古希腊数学家埃拉托斯特尼所提出的一种简单检定素数的算法。



目录

算式

给出要筛数值的范围n，找出$\sqrt{n}$以内的素数$p_1, p_2, \ldots, p_k$。先用2去筛，即把2留下，把2的倍数剔除掉；再用下一个质数，也就是3筛，把3留下，把3的倍数剔除掉；接下去用下一个质数5筛，把5留下，把5的倍数剔除掉；不断重复下去......。

步骤

详细列出算法如下：

1. 列出2以后的所有序列：
   - 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25
2. 标出序列中的第一个素数，也就是2，序列变成：
   - 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25
3. 将剩下序列中，划摽2的倍数（用红色标出），序列变成：
   - 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25
4. 如果现在这个序列中最大数小于最后一个标出的素数的平方，那么剩下的序列中所有的数都是素数，否则回到第二步。

---

1. 本例中，因为25大于2的平方，我们返回第二步：
2. 剩下的序列中第一个素数是3，将主序列中3的倍数划出（红色），主序列变成：
   - 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

1. 我们得到的素数有：2，3
2. 25仍然大于3的平方，所以我们还要返回第二步：
3. 现在序列中第一个素数是5，同样将序列中5的倍数划出，主序列成了：
   - 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25
4. 我们得到的素数有：2 3 5 。
5. 因为25等于5的平方，跳出循环.

结论：去掉红色的数字，2到25之间的素数是：2 3 5 7 11 13 17 19 23。

下列是虚拟码算法：

```
// arbitrary search limit
limit ← 1.000.000

// assume all numbers are prime at first

is_prime(i) ← true, i ∈ [2, limit]

for n in [2, √limit]:
    if is_prime(n):
        // eliminate multiples of each prime,
        // starting with its square
        is_prime(i) ← false, i ∈ {n², n²+n, n²+2n, ..., limit}

for n in [2, limit]:
    if is_prime(n): print n
```

可再简化为：

```
limit = 1000000
sieve$ = string of the character "P" with length limit

prime = 2
repeat while prime^2 < limit
    set the character at the index of each multiple of prime (excluding index prime * 1) in sieve$ to "N"
    prime = index of the next instance of "P" in sieve$ after index prime
end repeat

print the index of each instance of "P" in sieve$
```

黎曼猜想的素数公式与埃拉托斯特尼筛法关系

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots 。 \quad (5)$$

在等号两边乘以$\frac{1}{2^s}$，由幂运算规则得到。

$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \cdots$。（6）

我们从第（6）式子减去第二个式子，在左边我有一个$\zeta(s)$. 又有它的$\frac{1}{2^s}$,做减法得：

（$1 - \frac{1}{2^s}$）$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{15^s} + \cdots$。（7）

这个减法从那个无穷和中去掉了所有偶数项。现在在等号两边乘以$\frac{1}{3^s}$,而3是右边第一个还没有去掉的数：

$\frac{1}{3^s}$（$1 - \frac{1}{2^s}$）$\zeta(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + \frac{1}{27^s} + \frac{1}{33^s} + \frac{1}{39^s} + \cdots$。（8）

们再做减法得：（$1 - \frac{1}{3^s}$）（$1 - \frac{1}{2^s}$）
$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{17^s} + \frac{1}{19^s} + \frac{1}{23^s} + \cdots$。（9）

3的所有倍数都从那个无穷和中消失了，右边还有第一个没有被去掉的数是5，如果我们两边都乘以$\frac{1}{5^s}$,结果是：

$\frac{1}{5^s}$（$1 - \frac{1}{3^s}$）（$1 - \frac{1}{2^s}$）$\zeta(s) = \frac{1}{5^s} + \frac{1}{25^s} + \frac{1}{35^s} + \frac{1}{55^s} + \frac{1}{65^s} + \frac{1}{85^s} + \frac{1}{95^s} + \cdots$
。（10）

从前面那个式子减去这个式子得：

（$1 - \frac{1}{5^s}$）（$1 - \frac{1}{3^s}$）（$1 - \frac{1}{2^s}$）
$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{17^s} + \frac{1}{19^s} + \frac{1}{23^s} + \frac{1}{29^s} + \cdots$。（11）

继续下去，对于大于1的任意s，左边对每一个带括号的表达式，并向右边一直继续下去，对这个式子的两边都依次逐个除以这些括号，我们得到：

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} =$$
$$\frac{1}{1-2^{-s}} \cdot \frac{1}{1-3^{-s}} \cdot \frac{1}{1-5^{-s}} \cdot \frac{1}{1-7^{-s}} \cdot \frac{1}{1-11^{-s}} \cdots \frac{1}{1-p^{-s}} \cdots$$ 。（12）

即：（5）式=（12）式

这就是重复埃拉托塞尼筛法的过程。也就是说，黎曼猜想不是凭空出现的，而是有埃拉托斯特尼筛法作为基础的。

参考

1. *Κοσκινον Ερατοσθενους or, The Sieve of Eratosthenes. Being an Account of His Method of Finding All the Prime Numbers*, by the Rev. Samuel Horsley, F. R. S., Philosophical Transactions (1683-1775), Vol. 62. (1772), pp. 327-347.

参见

- 卢卡斯-莱默检验法
- 米勒-拉宾检验
- 试除法
- 费马素性检验
- 孪生素数
- 三胞胎素数
- 四胞胎素数
- 素数判定法则
- 表兄弟素数
- 六素数
- X^2+1素数

外部链接

- Interactive animation (需要JavaScript) (http://www.faust.fr.bw.schule.de/mhb/eratosiv.htm)

来自“http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=埃拉托斯特尼筛法&oldid=19800555”
