广义 Euler 乘积公式：设 f(n) 为满足 $f(n_1)f(n_2)=f(n_1n_2)$，且 $\sum_n |f(n)|<\infty$ 的函数（n_1、 n_2 均为自然数），则： $\sum_n f(n)=\prod_p[1+f(p)+f(p2)+f(p3)+\ldots]$

Euler 本人的证明：除了上述证明方法外，Euler 原始论文中的证明方法也相当简洁，值得介绍一下。仍以广义 Euler 乘积公式为框架，注意到——利用 f(n) 的性质：

$f(2)\sum_n f(n)=f(2)+f(4)+f(6)+\cdots$

因此：

$[1-f(2)]\sum_n f(n)=f(1)+f(3)+f(5)+\cdots$

上式右端的一个显著特点，是所有含有因子 2 的 f(n) 项都消去了（这种逐项对消有赖于 $\sum_n |f(n)|<\infty$，即 $\sum_n f(n)$ 绝对收敛这一条件）。类似地，以 [1-f(3)] 乘以上式，则右端所有含有因子 3 的 f(n) 项也将被消去，依此类推，以所有 [1-f(p)]（p 为素数）乘以上式，右端便只剩下了 f(1)，即：

$\prod_p[1-f(p)]\sum_n f(n)=f(1)=1$

其中最后一步再次使用了 f(n) 的性质，即 $(1)f(n)=f(n)\quad f(1)=1$ 将上式中的无穷乘积移到等式右边，显然就得到了广义 Euler 乘积公式。