第55卷第1期　　数 学 学 报 中 文 版　　Vol.55, No.1
2012年1月　　ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series　　Jan., 2012

文章编号: 0583-1431(2012)01-0117-14　　**文献标识码: A**

模糊软 P- 超群

殷允强

东华理工大学理学院 抚州 344000
E-mail: yunqiangyin@gmail.com

詹建明

湖北民族学院数学系 恩施 445000
E-mail: zhanjianming@hotmail.com

摘　要　把模糊软集理论应用到 P- 超群, 引入了 $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群和正规 $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群的概念, 并研究了其性质.

关键词　模糊软集; P- 超群; $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群
MR(2010) 主题分类　20N20, 20N15, 20N25
中图分类　O153.3

Fuzzy Soft Polygroups

Yun Qiang YIN

College of Science, East China Institute of Technology, Fuzhou 344000*, P. R. China*
E-mail: *yunqiangyin@gmail.com*

Jian Ming ZHAN

Department of Mathematics, Hubei University for Nationalities, Enshi 445000*, P. R. China*
E-mail: *zhanjianming@hotmail.com*

Abstract　This paper applies the concept of fuzzy soft sets to polygroup theory. The notions of $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy soft polygroups and normal $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy soft polygroups over a polygroup are introduced and their basic properties are investigated.

Keywords　fuzzy soft sets; Polygroups; $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy soft polygroups
MR(2010) Subject Classification　20N20, 20N15, 20N25
Chinese Library Classification　O153.3

1　引言

在现实生活中, 我们经常处理精确或模糊的信息. 获得的信息有时是模糊的, 有时是不确定

收稿日期: 2010-10-04; 接受日期: 2011-05-27
基金项目: 江西省青年自然科学基金 (2010GQS0003); 江西省教育厅青年科学基金 (GJJ11143);
湖北省高校创新团队资助项目 (T201109)

的, 有时甚至是不充分的. 多年来, 研究人员一直在努力寻找科学地处理不完整性和不确定性的有效途径. 1965 年, Zadeh [1] 提出模糊集概念, 模糊集理论是处理不确定信息的一种数学方法. 1982 年, Pawlak [2] 提出了粗糙集理论, 它是又一种刻划不完整性和不确定性的数学工具. 但是这些数学工具都具有共同的缺陷, 就是参数工具理论的不充分. 因此在 1999 年, Molodtsov [3] 引入了软集的概念. 用软集理论描述或设置对象的方式与传统的数学方法有很大的不同. 在传统的数学方法中, 我们需要建立关于对象的数学模型, 并定义模型精确解的概念. 但通常由于数学模型过于复杂, 不可能找到精确解, 因此我们一般会引入近似解的概念, 用它来代替所要求的精确解. 在软集理论中, 我们可以任意地选择参数来对对象进行描述. 总的说来, 在处理不确定性问题时, 软集理论可以克服传统数学方法 (如概率论、区间数学、模糊集等) 的很多缺陷, 是一个包含模糊集、粗糙集等内涵更为广泛的理论知识, 引起了学者们的广泛关注.

Maji, Biswas Roy [4–6] 将软集的参数模糊化和直觉模糊化, 提出了软集和直觉模糊软集的概念, 给出了模糊软集和直觉模糊软集的定义, 并分析模糊软集、直觉模糊软集在决策问题中应用. Xu 等 [7] 将软集理论应用到 vague 集, 给出了 vague 软集的概念, 并讨论了 vague 软集的性质. Ali 等 [8] 研究了软集上的一些新的代数运算性质. Aktaş 和 Çağman [9] 探讨了软集、模糊集和粗糙集之间的关系, 首次把软集理论应用到群, 并研究和讨论了软群的基本性质. Aygünoğlu 和 Aygün [10] 又在软群的基础上提出了模糊软群和正规模糊软群的概念. Feng 等 [11–12] 进一步的研究了软集、模糊集和粗糙集之间的关系, 引入了软粗集和软粗模糊集的概念, 并讨论了其性质. Feng 等 [13] 将软集理论推广到半环上, 给出了软半环, 软半环的软理想等的定义. Jun 等 [14] 引入并研究了软 BCK/BCI- 代数. Jun 和 Park [15], Jun 等 [16] 分别给出了 BCK/BCI- 代数和 d- 代数的软理想的概念, 并研究了其性质. Acar 等 [17] 引入并研究了软环. 这些研究工作大大地丰富了软集理论的代数结构.

1934 年, Marty [18] 在斯德哥尔举行的第八届斯堪的那维亚数学家大会上首次提出了超结构的概念. 之后, 国内外许多数学工作者将超结构应用到许多分支, 模糊超代数学是其中最活跃的一个研究分支. Corsini [19], Cristea [20], Davvaz [21–22], Kazanci [23], Leoreanu [24–25], Yin [26–28], Zhan [29–31] 及其它一些学者分别研究了超结构和模糊集之间的关系, 得到了一系列的结论.

本文在上述基础上, 将模糊软集理论应用到 P- 超群上, 引入了 $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群和正规 $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群的概念, 研究了其代数性质, 并讨论了这类 $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群的同态像及原像等问题.

2 预备知识

考虑超结构 $(H, \circ)$, 其中 $\circ$ 是 $H \times H \to \mathscr{P}^*(H)$ 的映射, 记作 $(x, y) \mapsto x \circ y$, 这里 $\mathscr{P}^*(H)$ 表示 H 的所有子集构成的集合. 称超结构 $(H, \circ)$ 是 P- 超群, 如果 H 满足下列条件:

(i) 对任意 $x, y, z \in H$, 有 $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$;

(ii) 存在 $e \in H$ 使得对任意 $x \in H$, 有 $e \circ x = x \circ e = \{x\}$ (e 称为单位元);

(iii) 对任意 $x \in H$, 存在 $x' \in H$, 使 $e \in x \circ x' \cap x' \circ x$, ($x'$ 称为 x 的逆元, 记作 x^{-1});

(iv) 对任意 $x, y, z \in H$, 有 $z \in x \circ y \Rightarrow x \in z \circ y^{-1}, y \in x^{-1} \circ z$.

由定义, 下述结论显然成立: 对任意的 $x, y \in H$, $(x^{-1})^{-1} = x$, $e^{-1} = e$ 且 $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$, 其中 $A^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in A\}$. P- 超群 $(H, \circ)$ 的子集 A 称为 H 的子 P- 超群, 如果 $(A, \circ)$

是 P- 超群. H 的子 P- 超群是正规的, 如果对任意的 $x \in H$, 有 $x^{-1} \circ A \circ x \subseteq A$.

设 X 是一个集合, 函数 $\mu : X \to [0,1]$ 称为 X 的一个模糊集. 对任意的 $P \subseteq X$, $r \in (0,1]$, 定义模糊集 r_P 为

$$r_P(x) = \begin{cases} r, & \text{如果 } x \in P, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases} \qquad \forall\, x \in X.$$

特别地, 当 $P = \{x\}$, r_P 称为模糊点, 记作 x_r.

设 $\gamma, \delta \in [0,1]$, 且 $\gamma < \delta$, 对任意的模糊点 x_r 和模糊集 μ, 我们称

(1) $x_r \in_\gamma \mu$, 如果 $\mu(x) \geq r > \gamma$.

(2) $x_r\, q_\delta\, \mu$, 如果 $\mu(x) + r > 2\delta$.

(3) $x_r \in_\gamma \vee q_\delta\, \mu$, 如果 $x_r \in_\gamma \mu$ 或 $x_r\, q_\delta\, \mu$.

(4) $x_r \overline{\alpha} \mu$, 如果 $x_r\, \alpha\, \mu$ 不成立, 其中 $\alpha \in \{\in_\gamma, q_\delta, \in_\gamma \vee q_\delta\}$.

模糊软集理论是一种新的处理不确定模糊对象的工具, 由 Maji 等在文 [4] 中提出.

定义 2.1 [4] 设 U 是一个论域, E 是参数集, $A \subseteq E$, $\mathscr{F}(U)$ 是 U 上所有模糊集构成的集合. 若 $\widetilde{F}$ 是 A 到 $\mathscr{F}(U)$ 的映射, 则称 $(\widetilde{F}, A)$ 为 U 上的一个模糊软集.

设 $A \subseteq E$, $\mu \in \mathscr{F}(U)$, 定义模糊软集 $(\widetilde{\mu}, A)$ 为 $\widetilde{\mu}(\alpha) = \mu$, $\forall\, \alpha \in A$. 任给 U 上的模糊点 x_r, 定义模糊软集 $(\widetilde{x}_r, A)$ 为 $\widetilde{x}_r(\alpha) = x_r$, $\forall\, \alpha \in A$.

定义 2.2 [4] 设 $(\widetilde{F}, A)$ 和 $(\widetilde{G}, B)$ 是 U 上的两个模糊软集, 定义它们的并为模糊软集 $(\widetilde{H}, C)$, 其中 $C = A \cup B$ 且

$$\widetilde{H}(\alpha) = \begin{cases} \widetilde{F}(\alpha), & \text{若 } \alpha \in A - B, \\ \widetilde{G}(\alpha), & \text{若 } \alpha \in B - A, \\ \widetilde{F}(\alpha) \cup \widetilde{G}(\alpha), & \text{若 } \alpha \in A \cap B, \end{cases} \qquad \forall\, \alpha \in Z,$$

记作 $(\widetilde{H}, C) = (\widetilde{F}, A) \widetilde{\cup} (\widetilde{G}, B)$.

定义 2.3 [4] 设 $(\widetilde{F}, A)$ 和 $(\widetilde{G}, B)$ 是 U 上的两个模糊软集, 定义 "$(\widetilde{F}, A)$ 且 $(\widetilde{G}, B)$" 为模糊软集 $(\widetilde{H}, A \times B)$, 其中 $\widetilde{H}(\alpha, \beta) = \widetilde{F}(\alpha) \cap \widetilde{G}(\beta)$, $\forall\, (\alpha, \beta) \in (A, B)$, 记作 $(\widetilde{H}, A \times B) = (\widetilde{F}, A) \widetilde{\wedge} (\widetilde{G}, B)$.

定义 2.4 [4] 设 $(\widetilde{F}, A)$ 和 $(\widetilde{G}, B)$ 是 U 上的两个模糊软集, 其中 $A \cap B \neq \emptyset$, 定义它们的严格交为模糊软集 $(\widetilde{H}, C)$, 其中 $C = A \cap B$ 且 $\widetilde{H}(\alpha) = \widetilde{F}(\alpha) \cap \widetilde{G}(\alpha)$, $\forall\, \alpha \in C$, 记作 $(\widetilde{H}, C) = (\widetilde{F}, A) \widetilde{\sqcap} (\widetilde{G}, B)$.

定义 2.5 [4] 设 $(\widetilde{F}, A)$ 和 $(\widetilde{G}, B)$ 是 U 上的两个模糊软集, 称 $(\widetilde{F}, A)$ 是 $(\widetilde{G}, B)$ 的模糊软集, 记作 $(\widetilde{F}, A) \sqsubseteq (\widetilde{G}, B)$, 如果下列条件成立:

(i) $A \subset B$;

(ii) 对任意的 $\alpha \in A$, 有 $\widetilde{F}(\alpha) \subseteq \widetilde{G}(\alpha)$.

称 $(\widetilde{F}, A)$ 和 $(\widetilde{G}, B)$ 是相等的, 如果 $(\widetilde{F}, A) \sqsubseteq (\widetilde{G}, B)$ 且 $(\widetilde{G}, B) \sqsubseteq (\widetilde{F}, A)$.

下面定义软集上一些新的运算.

定义 2.6 设 $(\widetilde{F}, A)$ 和 $(\widetilde{G}, B)$ 是 U 上的两个模糊软集, 定义 "$(\widetilde{F}, A)$ 或 $(\widetilde{G}, B)$" 为软集 $(\widetilde{O}, A \times B)$, 其中 $\widetilde{O}(\alpha, \beta) = \widetilde{F}(\alpha) \cup \widetilde{G}(\beta)$, $\forall\, (\alpha, \beta) \in (A, B)$, 记作 $(\widetilde{O}, A \times B) = (\widetilde{F}, A) \widetilde{\vee} (\widetilde{G}, B)$.

定义 2.7 设 $(\widetilde{F}, A)$ 和 $(\widetilde{G}, B)$ 是 U 上的两个模糊软集, 定义它们的交为模糊软集 $(\widetilde{H}, C)$,

其中 $C=A\cup B$ 且

$$\widetilde{H}(\alpha)=\begin{cases}\widetilde{F}(\alpha), & 若\ \alpha\in A-B,\\ \widetilde{G}(\alpha), & 若\ \alpha\in B-A,\\ \widetilde{F}(\alpha)\cap\widetilde{G}(\alpha), & 若\ \alpha\in A\cap B,\end{cases}\quad \forall\,\alpha\in Z,$$

记作 $(\widetilde{H},C)=(\widetilde{F},A)\widetilde{\cap}(\widetilde{G},B)$.

设 $(\widetilde{F},A)$ 和 $(\widetilde{G},B)$ 是 U 上的两个模糊软集, 称 $(\widetilde{F},A)\subseteq\vee q_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{G},B)$, 如果 $A\subseteq B$, 且对任意的 $\alpha\in A$, $x\in U$, $r\in(\gamma,1]$, $x_r\in_\gamma\widetilde{F}(\alpha)\Rightarrow x_r\in_\gamma\vee q_\delta\,\widetilde{G}(\alpha)$.

定义 2.8 设 $(\widetilde{F},A)$ 和 $(\widetilde{G},B)$ 是 U 上的两个模糊软集, 称 $(\widetilde{F},A)$ 是 $(\widetilde{G},B)$ 的 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$-模糊软集, 如果 $(\widetilde{F},A)\subseteq\vee q_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{G},B)$. 称 $(\widetilde{F},A)$ 和 $(\widetilde{G},B)$ 是 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 相等的, 记作 $(\widetilde{F},A)=_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{G},B)$, 如果 $(\widetilde{F},A)\subseteq\vee q_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{G},B)$ 且 $(\widetilde{G},B)\subseteq\vee q_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{F},A)$.

引理 2.9 设 $(\widetilde{F},A)$ 和 $(\widetilde{G},B)$ 是 U 上的两个模糊软集, 则 $(\widetilde{F},A)\subseteq\vee q_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{G},B)$ 的充要条件是对任意的 $\alpha\in A$, $x\in U$, 有 $\max\{\widetilde{G}(\alpha)(x),\gamma\}\geq\min\{\widetilde{F}(\alpha)(x),\delta\}$.

证明 设 $(\widetilde{F},A)\subseteq\vee q_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{G},B)$, 如果存在 $\alpha\in A$, $x\in U$, 使得 $\max\{\widetilde{G}(\alpha)(x),\ \gamma\}<r=\min\{\widetilde{F}(\alpha)(x),\delta\}$, 则 $\widetilde{F}(\alpha)(x)\geq r$, $\widetilde{G}(\alpha)(x)<r$, 且 $\widetilde{G}(\alpha)(x)+r<2r\leq2\delta$. 于是 $x_r\in_\gamma\widetilde{F}(\alpha)$, 但 $x_r\ \overline{\in_\gamma\vee q_\delta}\,\widetilde{G}(\alpha)$, 矛盾. 因此

$$\max\{\widetilde{G}(\alpha)(x),\gamma\}\geq\min\{\widetilde{F}(\alpha)(x),\delta\}.$$

反之, 设对任意的 $\alpha\in A$, $x\in U$, 有

$$\max\{\widetilde{G}(\alpha)(x),\gamma\}\geq\min\{\widetilde{F}(\alpha)(x),\delta\}.$$

如果 $(\widetilde{F},A)\overline{\subseteq\vee q_{(\gamma,\delta)}}(\widetilde{G},B)$, 则存在 $\alpha\in A,x\in U$ 和 $r>\gamma$, 使得 $x_r\in_\gamma\widetilde{F}(\alpha)$, 但 $x_r\ \overline{\in_\gamma\vee q_\delta}\,\widetilde{G}(\alpha)$, 从而 $\widetilde{F}(\alpha)(x)\geq r$, $\widetilde{G}(\alpha)(x)<r$, 且 $\widetilde{G}(\alpha)(x)+r<2\delta$, 于是 $\widetilde{G}(\alpha)(x)<\delta$. 因此

$$\max\{\widetilde{G}(\alpha)(x),\gamma\}<\min\{\widetilde{F}(\alpha)(x),\delta\},$$

矛盾. 故 $(\widetilde{F},A)\subseteq\vee q_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{G},B)$. 命题得证.

由引理 2.9 易知,

(1) 若 $(\widetilde{F},A)\sqsubseteq(\widetilde{G},B)$, 则 $(\widetilde{F},A)\subseteq\vee q_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{G},B)$;

(2) $(\widetilde{F},A)$ 和 $(\widetilde{G},B)$ 是 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 相等的充要条件是对任意的 $\alpha\in A$, $x\in U$, 有

$$\max\{\min\{\widetilde{F}(\alpha)(x),\delta\},\gamma\}=\max\{\min\{\widetilde{G}(\alpha)(x),\delta\},\gamma\}.$$

引理 2.10 设 $(\widetilde{F},A)$, $(\widetilde{G},B)$ 和 $(\widetilde{H},C)$ 是 U 上的模糊软集, 其中 $(\widetilde{F},A)\subseteq\vee q_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{G},B)$ 且 $(\widetilde{G},B)\subseteq\vee q_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{H},C)$, 则 $(\widetilde{F},A)\subseteq\vee q_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{H},C)$.

定义 2.11 设 H 是 P- 超群, $\mu,\nu\in\mathscr{F}(H)$, 对任意的 $x\in H$, 定义

$$(\mu\otimes\nu)(x)=\sup_{x\in a\circ b}\min\{\mu(a),\nu(b)\}.$$

显然 $\mu\otimes\nu$ 是 H 的模糊子集.

定义 2.12 设 $(\widetilde{F},A)$ 和 $(\widetilde{G},B)$ 是 P- 超群 H 上的模糊软集, 定义 $(\widetilde{F},A)$ 和 $(\widetilde{G},B)$ 的和为模糊软集 $(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{G},B)=(\widetilde{F}\otimes\widetilde{G},C)$, 其中 $C=A\cup B$ 且

$$(\widetilde{F}\otimes\widetilde{G})(\alpha)(x)=\begin{cases}\widetilde{F}(\alpha)(x), & 若\ \alpha\in A-B,\\ \widetilde{G}(\alpha)(x), & 若\ \alpha\in B-A,\\ (\widetilde{G}(\alpha)\otimes\widetilde{F}(\alpha))(x), & 若\ \alpha\in A\cap B,\end{cases}\quad\forall\,\alpha\in C,\quad x\in H.$$

记作 $(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{G},B)$.

由上述定义, 易知:

引理 2.13 设 $(\widetilde{F_1},A)$, $(\widetilde{F_2},A)$, $(\widetilde{G_1},B)$ 和 $(\widetilde{G_2},B)$ 是 P- 超群 H 上的模糊软集, 其中 $(\widetilde{F_1},A)\subseteq\vee q_{(\gamma,\delta)}\ (\widetilde{F_2},A)$ 且 $(\widetilde{G_1},B)\subseteq\vee q_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{G_2},B)$, 则

(1) $(\widetilde{F_1},A)\odot(\widetilde{G_1},B)\subseteq\vee q_{(\gamma,\delta)}\ (\widetilde{F_2},A)\odot(\widetilde{G_2},B)$.

(2) $(\widetilde{F_1},A)\widetilde{\cap}(\widetilde{G_1},B)\subseteq\vee q_{(\gamma,\delta)}\ (\widetilde{F_2},A)\widetilde{\cap}(\widetilde{G_2},B)$.

引理 2.14 设 $(\widetilde{F},A)$, $(\widetilde{G},B)$ 和 $(\widetilde{H},C)$ 是 P- 超群 H 上的模糊软集, 则

(1) $((\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{G},B))\odot(\widetilde{H},C)=(\widetilde{F},A)\odot((\widetilde{G},B)\odot(\widetilde{H},C))$.

(2) $(\widetilde{F},A)\odot((\widetilde{G},B)\widetilde{\cup}(\widetilde{H},C))\sqsubseteq(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{G},B)\widetilde{\cup}(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{H},C)$,
$((\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{G},B))\odot(\widetilde{H},C)\sqsubseteq(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{H},C)\widetilde{\cup}(\widetilde{G},B)\odot(\widetilde{H},C)$.

(3) $(\widetilde{F},A)\odot((\widetilde{G},B)\widetilde{\cap}(\widetilde{H},C))\sqsubseteq(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{G},B)\widetilde{\cap}(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{H},C)$,
$((\widetilde{F},A)\widetilde{\cap}(\widetilde{G},B))\odot(\widetilde{H},C)\sqsubseteq(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{H},C)\widetilde{\cap}(\widetilde{G},B)\odot(\widetilde{H},C)$.

引理 2.15 设 $(\widetilde{F},A)$ 是 P- 超群 H 上的模糊软集, 则对任意的 $x\in H$, 有

$$(\widetilde{F},A)\sqsubseteq(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{e}_1,A)\sqsubseteq(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{x}_1,A)\odot(\widetilde{x^{-1}}_1,A).$$

3 (正规) $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群

下文中, 除非特别指明, H 均指某一 P- 超群.

定义 3.1 H 上的模糊软集 $(\widetilde{F},A)$ 称为 H 的 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群, 如果对任意 $\alpha\in A$, $r,s\in(\gamma,1]$, $x,y\in H$, 有

(F1a) $x_r\in_\gamma\widetilde{F}(\alpha), y_s\in_\gamma\widetilde{F}(\alpha)\Rightarrow z_{\min\{r,s\}}\in_\gamma\vee q_\delta\widetilde{F}(\alpha),\ \forall z\in x\circ y$;

(F2a) $x_r\in_\gamma\widetilde{F}(\alpha)\Rightarrow(x^{-1})_r\in_\gamma\vee q_\delta\widetilde{F}(\alpha)$.

H 的 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群 $(\widetilde{F},A)$ 称为正规的, 如果对任意的 $\alpha\in X$, $r\in(\gamma,1]$, $x,y\in H$, 有

(F3a) $y_r\in_\gamma\widetilde{F}(\alpha)\Rightarrow z_r\in_\gamma\vee q_\delta\widetilde{F}(\alpha),\ \forall z\in x^{-1}\circ y\circ x$.

例 3.2 设 $H=\{e,a,b,c,d\}$, 定义 H 上的二元超运算 “$\circ$” 如下

$\circ$	e	a	b	c	d
e	$\{e\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$
a	$\{a\}$	$\{e\}$	$\{c\}$	$\{b\}$	$\{d\}$
b	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{e\}$	$\{a\}$	$\{d\}$
c	$\{c\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\{e\}$	$\{d\}$
d	$\{d\}$	$\{d\}$	$\{d\}$	$\{d\}$	$\{e,a,b,c\}$,

则 $(H,\circ)$ 是 P- 超群. 设 $E=\{e_1,e_2\}$ 是参数集. 定义 H 上的模糊软集 $(\widetilde{F},E)$ 为

$$\widetilde{F}(e_1)=\frac{0.6}{e}+\frac{0.7}{a}+\frac{0.3}{b}+\frac{0.2}{c}+\frac{0.1}{d},\quad \widetilde{F}(e_2)=\frac{0.5}{e}+\frac{0.5}{a}+\frac{0.5}{b}+\frac{0.5}{c}+\frac{0.1}{d},$$

则 $(\widetilde{F},E)$ 是 H 的正规 $(\in_{0.3},\in_{0.3}\vee q_{0.6})$- 模糊软 P- 超群.

引理 3.3 设 $(\widetilde{F},A)$ 是 H 上的模糊软集, 则 (F1a) 成立当且仅当下列条件之一成立: $\forall\alpha\in A,x,y\in H$,

(F1b) $\max\{\inf\limits_{z\in x\circ y}\widetilde{F}(\alpha)(z),\gamma\}\geq\min\{\widetilde{F}(\alpha)(x),\widetilde{F}(\alpha)(y),\delta\}$;

(F1c) $(\widetilde{F}, A) \odot (\widetilde{F}, A) \subseteq \vee q_{(\gamma,\delta)} (\widetilde{F}, A)$.

证明 (F1a)⇒(F1b) 任取 $\alpha \in A, x, y \in H$. 如果存在 $z \in H$, 使得 $z \in x \circ y$ 且

$$\max\{\widetilde{F}(\alpha)(z), \gamma\} < r = \min\{\widetilde{F}(\alpha)(x),\ \widetilde{F}(\alpha)(y), \delta\},$$

则 $\widetilde{F}(\alpha)(x) \geq r$, $\widetilde{F}(\alpha)(y) \geq r$, $\widetilde{F}(\alpha)(z) < r \leq \delta$, 从而 $x_r, y_r \in_\gamma \widetilde{F}(\alpha)$, 但 $z_r \overline{\in_\gamma \vee q_\delta}\, \widetilde{F}(\alpha)$, 矛盾. 故 (F1b) 成立.

(F1b)⇒(F1c) 假设存在 $\alpha \in A$, $x_r \in_\gamma (\widetilde{F} \otimes \widetilde{F})(\alpha)$, 但 $x_r \overline{\in_\gamma \vee q_\delta} \widetilde{F}(\alpha)$, 则 $x_r \overline{\in_\gamma} \widetilde{F}(\alpha)$, $x_r \overline{q_\delta} \widetilde{F}(\alpha)$, 即 $\widetilde{F}(\alpha)(x) < r$, $\widetilde{F}(\alpha)(x) + r \leq 2\delta$, 从而 $\widetilde{F}(\alpha)(x) < \delta$. 如果存在 $y, z \in H$, 使得 $x \in y \circ z$, 由 (F1b) 有 $\max\{\widetilde{F}(\alpha)(x), \gamma\} \geq \min\{\widetilde{F}(\alpha)(y), \widetilde{F}(\alpha)(z), \delta\}$, 从而由 $\widetilde{F}(\alpha)(x) < \delta$, 有

$$\max\{\widetilde{F}(\alpha)(x), \gamma\} \geq \min\{\widetilde{F}(\alpha)(y), \widetilde{F}(\alpha)(z)\}.$$

因此

$$\begin{aligned} r &\leq (\widetilde{F} \otimes \widetilde{F})(\alpha)(x) \\ &= \sup_{x \in a \circ b} \min\{\widetilde{F}(\alpha)(a), \widetilde{F}(\alpha)(b)\} \leq \sup_{x \in a \circ b} \max\{\widetilde{F}(\alpha)(x), \gamma\} = \max\{\widetilde{F}(\alpha)(x), \gamma\}, \end{aligned}$$

矛盾. 故 (F1c) 成立.

(F1c)⇒(F1a) 设 $\alpha \in A$, $r, s \in (\gamma, 1]$, $x, y \in H$ 满足 $x_r, y_s \in_\gamma \widetilde{F}(\alpha)$, 则对任意 $z \in x \circ y$, 有

$$\begin{aligned} (\widetilde{F} \otimes \widetilde{F})(\alpha)(z) &= \sup_{z \in a \circ b} \min\{\widetilde{F}(\alpha)(a), \widetilde{F}(\alpha)(b)\} \geq \min\{\widetilde{F}(\alpha)(x), \widetilde{F}(\alpha)(y)\} \\ &\geq \min\{r, s\} > \gamma. \end{aligned}$$

从而 $z_{\min\{r,s\}} \in_\gamma (\widetilde{F} \otimes \widetilde{F})(\alpha)$, 进一步地, 由 (F1c) 有 $z_{\min\{r,s\}} \in_\gamma \vee q_\delta \widetilde{F}(\alpha)$. 故 (F1a) 成立.

设 $(\widetilde{F}, A)$ 是 H 上的模糊软集, 对任意的 $\alpha \in A$, $x \in H$, 定义 $\widetilde{F}^{-1}(\alpha)(x) = \widetilde{F}(\alpha)(x^{-1})$. 显然 $(\widetilde{F}^{-1}, A)$ 是 H 的模糊软集.

类似于引理 3.3, 我们有下述引理.

引理 3.4 设 $(\widetilde{F}, A)$ 是 H 上的模糊软集, 则 (F2a) 成立当且仅当下列条件之一成立: $\forall \alpha \in A$, $x \in H$,

(F2b) $\max\{\widetilde{F}(\alpha)(x^{-1}), \gamma\} \geq \min\{\widetilde{F}(\alpha)(x), \delta\}$;

(F2c) $(\widetilde{F}, A) \subseteq \vee q_{(\gamma,\delta)} (\widetilde{F}^{-1}, A)$.

引理 3.5 设 $(\widetilde{F}, A)$ 是 H 上的模糊软集, 则 (F3a) 成立当且仅当下列条件之一成立: $\forall \alpha \in A$, $x \in H$,

(F3b) $\max\big\{\inf\limits_{z \in x^{-1} \circ y \circ x} \widetilde{F}(\alpha)(z), \gamma\big\} \geq \min\{\widetilde{F}(\alpha)(y), \delta\}$;

(F3c) $(\widetilde{x^{-1}}_1, A) \odot (\widetilde{F}, A) \odot (\widetilde{x}_1, A) \subseteq \vee q_{(\gamma,\delta)} (\widetilde{F}, A)$.

设 $(\widetilde{F}, A)$ 是 H 的 $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群, 由引理 3.3 和引理 3.4 易知, 对任意 $\alpha \in A$, $x \in H$, 有

$$\max\{\widetilde{F}(\alpha)(e), \gamma\} \geq \min\{\widetilde{F}(\alpha)(x), \delta\}.$$

设 $(\widetilde{F}, A)$ 是 H 上的模糊软集, $\alpha \in A$, $r \in [0, 1]$, 定义 $\widetilde{F}(\alpha)_r = \{x \in H \,|\, x_r \in_\gamma \widetilde{F}(\alpha)\}$, $\widetilde{F}(\alpha)_r^\delta = \{x \in H \,|\, x_r q_\delta \widetilde{F}(\alpha)\}$, $[\widetilde{F}(\alpha)]_r^\delta = \{x \in H \,|\, x_r \in_\gamma \vee q_\delta\, \widetilde{F}(\alpha)\}$. 显然 $[\widetilde{F}(\alpha)]_r^\delta = \widetilde{F}(\alpha)_r \cup \widetilde{F}(\alpha)_r^\delta$.

下述定理揭示了 H 的正规 $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群和 H 的经典正规 P- 超群的关系.

定理 3.6 设 $(\widetilde{F}, A)$ 是 H 上的模糊软集, 则

(1) $(\widetilde{F}, A)$ 是 H 的正规 $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群的充要条件是对任意的 $\alpha \in A$, $r \in (\gamma, \delta]$, 非空集 $\widetilde{F}(\alpha)_r$ 是 H 的正规 P- 超群.

(2) 如果 $2\delta = 1 + \gamma$, 则 $(\widetilde{F}, A)$ 是 H 的正规 $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群的充要条件是对任意的 $\alpha \in A$, $r \in (\delta, 1]$, 非空集 $\widetilde{F}(\alpha)_r^\delta$ 是 H 的正规 P- 超群.

(3) 如果 $2\delta = 1 + \gamma$, 则 $(\widetilde{F}, A)$ $(\widetilde{F}, A)$ 是 H 的正规 $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群的充要条件是对任意的 $\alpha \in A$, $r \in (\gamma, 1]$, 非空集 $[\widetilde{F}(\alpha)]_r^\delta$ 是 H 的正规 P- 超群.

证明 我们仅证 (3). (1) 和 (2) 的证明类似. 设 $(\widetilde{F}, A)$ 是 H 的正规 $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群, $x, y \in [\widetilde{F}(\alpha)]_r^\delta$, 其中 $\alpha \in A$, $r \in (\gamma, 1]$. 则 $x_r \in_\gamma \vee q_\delta \widetilde{F}(\alpha)$, $y_r \in_\gamma \vee q_\delta \widetilde{F}(\alpha)$, 即 $\widetilde{F}(\alpha)(x) \geq r$ 或 $\widetilde{F}(\alpha)(x) > 2\delta - r \geq 2\delta - 1 = \gamma$, 且 $\widetilde{F}(\alpha)(y) \geq r$ 或 $\widetilde{F}(\alpha)(y) > 2\delta - r \geq 2\delta - 1 = \gamma$. 因为 $(\widetilde{F}, A)$ 是 H 的正规 $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群, 且 $\min\{\widetilde{F}(\alpha)(x), \widetilde{F}(\alpha)(y), \delta\} > \gamma$, 则对任意 $z \in x \circ y$, 有

$$\widetilde{F}(\alpha)(z) \geq \min\{\widetilde{F}(\alpha)(x), \widetilde{F}(\alpha)(y), \delta\}.$$

现考虑下述情况:

(1) $r \in (\gamma, \delta]$. 由 $r \in (\gamma, \delta]$, 有 $2\delta - r \geq \delta \geq r$, 从而

如果 $\widetilde{F}(\alpha)(x) \geq r$ 或 $\widetilde{F}(\alpha)(y) \geq r$, 则 $\widetilde{F}(\alpha)(z) \geq \min\{\widetilde{F}(\alpha)(x), \widetilde{F}(\alpha)(y), \delta\} \geq r$, 因此 $z_r \in_\gamma \widetilde{F}(\alpha)$;

如果 $\widetilde{F}(\alpha)(x) > 2\delta - r$ 且 $\widetilde{F}(\alpha)(y) > 2\delta - r$, 则 $\widetilde{F}(\alpha)(z) \geq \min\{\widetilde{F}(\alpha)(x), \widetilde{F}(\alpha)(y), \delta\} = \delta \geq r$, 因此 $z_r \in_\gamma \widetilde{F}(\alpha)$.

(2) $r \in (\delta, 1]$. 由 $r \in (\delta, 1]$, 有 $2\delta - r < \delta < r$, 从而

如果 $\widetilde{F}(\alpha)(x) \geq r$ 且 $\widetilde{F}(\alpha)(y) \geq r$, 则 $\widetilde{F}(\alpha)(z) \geq \min\{\widetilde{F}(\alpha)(x), \widetilde{F}(\alpha)(y), \delta\} = \delta$, 于是 $\widetilde{F}(\alpha)(z) + r \geq r + \delta > 2\delta$. 因此 $z_r\, q_\delta\, \widetilde{F}(\alpha)$.

如果 $\widetilde{F}(\alpha)(x) > 2\delta - r$ 或 $\widetilde{F}(\alpha)(y) > 2\delta - r$, 则 $\widetilde{F}(\alpha)(z) \geq \min\{\widetilde{F}(\alpha)(x), \widetilde{F}(\alpha)(y), \delta\} > 2\delta - r$. 因此 $z_r\, q_\delta\, \widetilde{F}(\alpha)$.

综上可知 $z_r \in_\gamma \vee q_\delta \widetilde{F}(\alpha)$, 即 $z \in [\widetilde{F}(\alpha)]_r^\delta$. 同理可证: 对任意的 $x \in [\widetilde{F}(\alpha)]_r^\delta$, 有 $x^{-1} \in [\widetilde{F}(\alpha)]_r^\delta$; 对任意的 $x \in H$, $y \in [\widetilde{F}(\alpha)]_r^\delta$, 有 $x \circ y \circ x^{-1} \in [\widetilde{F}(\alpha)]_r^\delta$. 因此 $\widetilde{F}(\alpha)_r$ 是 H 的正规 P- 超群.

反之显然成立.

推论 3.7 设 $\gamma, \gamma', \delta, \delta' \in [0, 1]$, 其中 $\gamma < \delta$, $\gamma' < \delta'$, $\gamma < \gamma'$ 且 $\delta' < \delta$, 则 H 的任一 (正规) $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群均是 H 的 (正规) $(\in_{\gamma'}, \in_{\gamma'} \vee q_{\delta'})$- 模糊软 P- 超群.

注 3.8 若 $(\widetilde{F}, A)$ 是 H 的 (正规) $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群, 则

(1) 当 $\gamma = 0$, $\delta = 1$ 时, 对任意 $\alpha \in A$, $\widetilde{F}(\alpha)$ 是 H 的 (正规) 模糊 P- 超群 (见文 [21]);

(2) 当 $\gamma = 0$, $\delta = 1$ 时, $(\widetilde{F}, A)$ 是 H 的 (正规) 模糊软 P- 超群 (见文 [10]).

命题 3.9 设 $(\widetilde{F}, A)$ 是 H 的模糊软集, $B \subseteq A$, 若 $(\widetilde{F}, A)$ 是 H 的正规 $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群, 则 $(\widetilde{F}, B)$ 亦是 H 的正规 $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群.

定理 3.10 若 $(\widetilde{F}, A)$ 和 $(\widetilde{G}, B)$ 是 H 的正规 $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群, 则 $(\widetilde{F}, A) \widetilde{\wedge} (\widetilde{G}, B)$ 也是 H 的正规 $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群.

证明 由定义 2.3, $(\widetilde{F},A)\widetilde{\wedge}(\widetilde{G},B)=(\widetilde{H},C)$, 其中 $C=A\times B$, 且 $\widetilde{H}(\alpha,\beta)=\widetilde{F}(\alpha)\cap\widetilde{G}(\beta)$, $\forall(\alpha,\beta)\in C$. 现设 $(\alpha,\beta)\in C$, $x,y,z\in H$, 其中 $z\in x\circ y$, 由于 $(\widetilde{F},A)$ 和 $(\widetilde{G},B)$ 都是 H 的正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群, 故有

$$\begin{aligned}\max\{(\widetilde{F}(\alpha)\cap\widetilde{G}(\beta))(z),\gamma\}&=\max\{\min\{(\widetilde{F}(\alpha)(z),\widetilde{G}(\beta)(z)\},\gamma\}\\&=\min\{\max\{(\widetilde{F}(\alpha)(z),\gamma\},\max\{\widetilde{G}(\beta)(z),\gamma\}\}\\&\geq\min\{\min\{(\widetilde{F}(\alpha)(x),\widetilde{F}(\alpha)(y),\delta\},\min\{\widetilde{G}(\beta)(x),\widetilde{G}(\beta)(y),\delta\}\}\\&=\min\{\min\{(\widetilde{F}(\alpha)(x),\widetilde{G}(\beta)(x)\},\min\{\widetilde{F}(\alpha)(y),\widetilde{G}(\beta)(y)\},\delta\}\\&=\min\{(\widetilde{F}(\alpha)\cap\widetilde{G}(\beta))(x),(\widetilde{F}(\alpha)\cap\widetilde{G}(\beta))(y),\delta\}.\end{aligned}$$

同理可证: 对任意的 $x\in H$, 有 $\max\{(\widetilde{F}(\alpha)\cap\widetilde{G}(\beta))(x^{-1}),\gamma\}\geq\min\{(\widetilde{F}(\alpha)\cap\widetilde{G}(\beta))(x),\delta\}$; 对任意的 $x,y,z\in H$, 其中 $z\in x^{-1}\circ y\circ x$, 有 $\max\{(\widetilde{F}(\alpha)\cap\widetilde{G}(\beta))(z),\gamma\}\geq\min\{(\widetilde{F}(\alpha)\cap\widetilde{G}(\beta))(y),\delta\}$. 因此 $(\widetilde{F},A)\widetilde{\wedge}(\widetilde{G},B)$ 是 H 的正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群.

定理 3.11 设 $(\widetilde{F},A)$ 和 $(\widetilde{G},B)$ 是 H 的正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群, 若对任意的 $\alpha\in A$ 和 $\beta\in B$, $\widetilde{F}(\alpha)\subseteq\widetilde{G}(\beta)$ 或 $\widetilde{G}(\beta)\subseteq\widetilde{F}(\alpha)$, 则 $(\widetilde{F},A)\widetilde{\vee}(\widetilde{G},B)$ 也是 H 的正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群.

证明 由定义 2.6, $(\widetilde{F},A)\widetilde{\vee}(\widetilde{G},B)=(\widetilde{O},C)$, 其中 $C=A\times B$, 且对任意 $(\alpha,\beta)\in C$, 有 $\widetilde{O}(\alpha,\beta)=\widetilde{F}(\alpha)\cup\widetilde{G}(\beta)$. 现设 $(\alpha,\beta)\in C$, 由假设 $\widetilde{F}(\alpha)\subseteq\widetilde{G}(\beta)$ 或 $\widetilde{G}(\beta)\subseteq\widetilde{F}(\alpha)$, 不妨设 $\widetilde{F}(\alpha)\subseteq\widetilde{G}(\beta)$. 现对任意的 $x,y,z\in S$, 其中 $z\in x\circ y$, 我们有

$$\begin{aligned}\max\{\widetilde{O}(\alpha,\beta)(z),\gamma\}&=\max\{(\widetilde{F}(\alpha)\cup\widetilde{G}(\beta))(z),\gamma\}=\max\{\widetilde{F}(\alpha)(z),\widetilde{G}(\beta)(z),\gamma\}\\&=\max\{\widetilde{G}(\beta)(z),\gamma\}\geq\min\{\widetilde{G}(\beta)(x),\widetilde{G}(\beta)(y),\delta\}\\&=\min\{(\widetilde{F}(\alpha)\cup\widetilde{G}(\beta))(x),(\widetilde{F}(\alpha)\cup\widetilde{G}(\beta))(y),\delta\}\\&=\min\{\widetilde{O}(\alpha,\beta)(x),\widetilde{O}(\alpha,\beta)(y),\delta\}.\end{aligned}$$

同理可证: 对任意的 $x\in H$, 有 $\max\{\widetilde{O}(\alpha,\beta)(x^{-1}),\gamma\}\geq\min\{\widetilde{O}(\alpha,\beta)(x),\delta\}$; 对任意的 $x,y,z\in H$, 其中 $z\in x^{-1}\circ y\circ x$, 有 $\max\{\widetilde{O}(\alpha,\beta)(z),\gamma\}\geq\min\{\widetilde{O}(\alpha,\beta)(y),\delta\}$. 因此 $(\widetilde{F},A)\widetilde{\vee}(\widetilde{G},B)$ 是 H 的正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群.

若存在 $\alpha\in A$ 和 $\beta\in B$, 使得 $\widetilde{F}(\alpha)\overline{\subseteq}\widetilde{G}(\beta)$ 且 $\widetilde{G}(\beta)\overline{\subseteq}\widetilde{F}(\alpha)$, 则定理 3.11 一般不成立, 见下例.

例 3.12 设 $H=\{e,a,b,c,d\}$, 定义二元超运算 “$\circ$” 如下

$\circ$	e	a	b	c	d
e	$\{e\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$
a	$\{a\}$	$\{e,a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$
b	$\{b\}$	$\{b\}$	$\{e,a\}$	$\{d\}$	$\{c\}$
c	$\{c\}$	$\{c\}$	$\{d\}$	$\{e,a\}$	$\{b\}$
d	$\{d\}$	$\{d\}$	$\{c\}$	$\{b\}$	$\{e,a\}$,

则 $(H,\circ)$ 是 P- 超群. 设 $E=\{e_1,e_2\}$ 是参数集, 定义模糊软集 $(\widetilde{F},\{e_1\})$ 和 $(\widetilde{G},\{e_1\})$ 分别为

$$\widetilde{F}(e_1)=\frac{0.5}{e}+\frac{0.5}{a}+\frac{0.5}{b}+\frac{0.2}{c}+\frac{0.1}{d},\quad\widetilde{G}(e_1)=\frac{0.5}{e}+\frac{0.5}{a}+\frac{0.2}{b}+\frac{0.5}{c}+\frac{0.1}{d},$$

则 $(\widetilde{F},\{e_1\})$ 和 $(\widetilde{G},\{e_1\})$ 均是 H 的正规 $(\in_{0.25},\in_{0.25}\vee q_{0.6})$- 模糊软 P- 超群. 另一方面, $d=b\circ c$, 但

$$\max\{\widetilde{O}(e_1,e_1)(d),0.25\}=\max\{\widetilde{F}(e_1)(d),\widetilde{G}(e_1)(d),0.25\}=0.25,$$

且

$$\begin{aligned}&\min\{\widetilde{O}(e_1,e_1)(b),\widetilde{O}(e_1,e_1)(c),0.6\}\\&=\min\{\max\{\widetilde{F}(e_1)(b),\widetilde{G}(e_1)(b)\},\max\{\widetilde{F}(e_1)(c),\widetilde{G}(e_1)(c)\},0.6\}\\&=\min\{\max\{0.5,0.2\},\max\{0.2,0.5\},0.6\}=0.5,\end{aligned}$$

从而

$$\max\{\widetilde{O}(e_1,e_1)(d),0.25\}<\min\{\widetilde{O}(e_1,e_1)(b),\widetilde{O}(e_1,e_1)(c),0.6\},$$

故 $(\widetilde{O},\{e_1\}\times\{e_1\})=(\widetilde{F},\{e_1\})\widetilde{\vee}(\widetilde{G},\{e_1\})$ 不是 H 的正规 $(\in_{0.25},\in_{0.25}\vee q_{0.6})$- 模糊软 P- 超群.

定理 3.13 若 $(\widetilde{F},A)$ 和 $(\widetilde{G},B)$ 是 H 的两个正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群, 则 $(\widetilde{F},A)\widetilde{\sqcap}(\widetilde{G},B)$ 也是 H 的正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群.

证明 由定义 2.4, $(\widetilde{F},A)\widetilde{\sqcap}(\widetilde{G},B)=(\widetilde{H},C)$, 其中 $C=A\cap B$, 且对任意 $\alpha\in C$, 有 $\widetilde{H}(\alpha)=\widetilde{F}(\alpha)\cap\widetilde{G}(\alpha)$. 类似定理 3.10 的证明, 易知 $(\widetilde{F},A)\widetilde{\sqcap}(\widetilde{G},B)$ 也是 H 的正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群.

定理 3.14 若 $(\widetilde{F},A)$ 和 $(\widetilde{G},B)$ 是 H 的两个正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群, 则 $(\widetilde{F},A)\widetilde{\cap}(\widetilde{G},B)$ 也是 H 的正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群.

证明 由定义 2.7, $(\widetilde{F},A)\widetilde{\cap}(\widetilde{G},B)=(\widetilde{H},C)$, 其中 $C=A\cup B$, 且对任意 $\alpha\in C$, 有

$$\widetilde{H}(\alpha)=\begin{cases}\widetilde{F}(\alpha), & \text{if } \alpha\in A-B,\\ \widetilde{G}(\alpha), & \text{if } \alpha\in B-A,\\ \widetilde{F}(\alpha)\cap\widetilde{G}(\alpha), & \text{if } \alpha\in A\cap B.\end{cases}$$

现对任意 $\alpha\in C$, 考虑下述情况：

(1) $\alpha\in A-B$, 则 $\widetilde{H}(\alpha)=\widetilde{F}(\alpha)$. 由 $(\widetilde{F},A)$ 是 H 的正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群, 有 $\widetilde{H}(\alpha)$ 满足条件 (F1b), (F2b) 和 (F3b).

(2) $\alpha\in B-A$, 则 $\widetilde{H}(\alpha)=\widetilde{G}(\alpha)$. 由 $(\widetilde{G},B)$ 是 H 的正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群, 有 $\widetilde{H}(\alpha)$ 满足条件 (F1b), (F2b) 和 (F3b).

(3) $\alpha\in A\cap B$, 则 $\widetilde{H}(\alpha)=\widetilde{F}(\alpha)\cap\widetilde{G}(\alpha)$. 由定理 3.10 的证明易知 $\widetilde{H}(\alpha)$ 满足条件 (F1b), (F2b) 和 (F3b).

综上可知, $(\widetilde{F},A)\widetilde{\cap}(\widetilde{G},B)$ 是 H 的正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群.

定理 3.15 若 $(\widetilde{F},A)$ 和 $(\widetilde{G},B)$ 是 H 的两个正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群, 且 A 和 B 是非交的, 则 $(\widetilde{F},A)\widetilde{\cup}(\widetilde{G},B)$ 也是 H 的正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群.

证明 与定理 3.14 的证明类似.

定理 3.16 设 $(\widetilde{F},A)$ 和 $(\widetilde{G},B)$ 是 H 的两个 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群, 则 $(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{G},B)$ 是 H 的 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群的充要条件是 $(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{G},B)=_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{G},B)\odot(\widetilde{F},A)$.

证明 设 $(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{G},B)=_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{G},B)\odot(\widetilde{F},A)$, 则

$$\begin{aligned}((\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{G},B))\odot((\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{G},B))&=(\widetilde{F},A)\odot((\widetilde{G},B)\odot(\widetilde{F},A))\odot(\widetilde{G},B)\\&=_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{F},A)\odot((\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{G},B))\odot(\widetilde{G},B)\\&=((\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{F},A))\odot((\widetilde{G},B)\odot(\widetilde{G},B))\\&\subseteq\vee q_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{G},B).\end{aligned}$$

从而 $((\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{G},B))\odot((\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{G},B))\subseteq\vee q_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{G},B)$. 现对任意的 $\alpha\in A\cup B$, $x\in H$, 考虑下述情况:

(1) $\alpha\in A-B$, 则

$$\begin{aligned}\max\{(\widetilde{F}\otimes\widetilde{G})(\alpha)(x^{-1}),\gamma\}&=\max\{\widetilde{F}(\alpha)(x^{-1}),\gamma\}\geq\min\{\widetilde{F}(\alpha)(x),\delta\}\\&=\min\{(\widetilde{F}\otimes\widetilde{G})(\alpha)(x),\delta\}.\end{aligned}$$

(2) $\alpha\in B-A$, 类似于情况 (1) 有

$$\max\{(\widetilde{F}\otimes\widetilde{G})(\alpha)(x^{-1}),\gamma\}\geq\min\{(\widetilde{F}\otimes\widetilde{G})(\alpha)(x),\delta\}.$$

(3) $\alpha\in A\cap B$, 则

$$\begin{aligned}\max\{(\widetilde{F}\otimes\widetilde{G})(\alpha)(x^{-1}),\gamma\}&=\max\Big\{\sup_{x^{-1}\in a\circ b}\min\{\widetilde{F}(\alpha)(a),\widetilde{G}(\alpha)(b)\},\gamma\Big\}\\&=\sup_{x\in b^{-1}\circ a^{-1}}\min\{\max\{\widetilde{F}(\alpha)(a),\gamma\},\max\{\widetilde{G}(\alpha)(b),\gamma\}\}\\&\geq\sup_{x\in b^{-1}\circ a^{-1}}\min\{\min\{\widetilde{F}(\alpha)(a^{-1}),\delta\},\min\{\widetilde{G}(\alpha)(b^{-1}),\delta\}\}\\&=\min\Big\{\sup_{x\in b^{-1}\circ a^{-1}}\min\Big\{\widetilde{F}(\alpha)(a^{-1}),\widetilde{G}(\alpha)(b^{-1})\Big\},\delta\Big\}\\&=\min\{(\widetilde{G}\otimes\widetilde{F})(\alpha)(x),\delta\}=\min\{(\widetilde{F}\otimes\widetilde{G})(\alpha)(x),\delta\}.\end{aligned}$$

综上可知, $\max\{(\widetilde{F}\otimes\widetilde{G})(\alpha)(x^{-1}),\gamma\}\geq\min\{(\widetilde{F}\otimes\widetilde{G})(\alpha)(x),\delta\}$. 因此, $(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{G},B)$ 是 H 的 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群.

反之, 设 $(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{G},B)$ 是 H 的 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群. 对任意的 $\alpha\in A\cup B$, 考虑下述情况:

(1) $\alpha\in A-B$, 则 $(\widetilde{F}\otimes\widetilde{G})(\alpha)=\widetilde{F}(\alpha)=(\widetilde{G}\otimes\widetilde{F})(\alpha)$.

(2) $\alpha\in B-A$, 则 $(\widetilde{F}\otimes\widetilde{G})(\alpha)=\widetilde{G}(\alpha)=(\widetilde{G}\otimes\widetilde{F})(\alpha)$.

(3) $\alpha\in A\cap B$, 则对任意的 $x\in H$, 有

$$\begin{aligned}\max\{(\widetilde{F}\otimes\widetilde{G})(\alpha)(x),\gamma\}&\geq\max\{\min\{(\widetilde{F}\otimes\widetilde{G})(\alpha)(x^{-1}),\delta\},\gamma\}\\&=\min\{\max\{(\widetilde{F}\otimes\widetilde{G})(\alpha)(x^{-1}),\gamma\},\delta\}\\&=\min\Big\{\max\Big\{\sup_{x^{-1}\in a\circ b}\min\{\widetilde{F}(\alpha)(a),\widetilde{G}(\alpha)(b)\},\gamma\Big\},\delta\Big\}\\&=\min\Big\{\sup_{x\in b^{-1}\circ a^{-1}}\min\{\max\{\widetilde{F}(\alpha)(a),\gamma\},\max\{\widetilde{G}(\alpha)(b),\gamma\}\},\delta\Big\}\\&\geq\min\Big\{\sup_{x\in b^{-1}\circ a^{-1}}\min\{\min\{\widetilde{F}(\alpha)(a^{-1}),\delta\},\min\{\widetilde{G}(\alpha)(b^{-1}),\delta\}\},\delta\Big\}\\&=\min\Big\{\sup_{x\in b^{-1}\circ a^{-1}}\min\{\widetilde{F}(\alpha)(a^{-1}),\widetilde{G}(\alpha)(b^{-1})\},\delta\Big\}\\&=\min\{(\widetilde{G}\otimes\widetilde{F})(\alpha)(x),\delta\}.\end{aligned}$$

从而 $\max\{\min\{(\widetilde{F}\otimes\widetilde{G})(\alpha)(x),\delta\},\gamma\}\geq\max\{\min\{(\widetilde{G}\otimes\widetilde{F})(\alpha)(x),\delta\},\gamma\}$. 同理可证

$$\max\{\min\{(\widetilde{G}\otimes\widetilde{F})(\alpha)(x),\delta\},\gamma\}\geq\max\{\min\{(\widetilde{F}\otimes\widetilde{G})(\alpha)(x),\delta\},\gamma\}.$$

综上可知, $(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{G},B)=_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{G},B)\odot(\widetilde{F},A)$, 得证.

引理 3.17 若 $(\widetilde{F},A)$ 是 H 的正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群, 则对任意 $x\in H$, 有 $(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{x}_1,A)=_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{x}_1,A)\odot(\widetilde{F},A)$.

证明 由引理 3.5, $(\widetilde{x^{-1}}_1,A)\odot(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{x}_1,A)\subseteq\vee q_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{F},A)$, 从而由引理 2.15 有

$$\begin{aligned}(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{x}_1,A)&\sqsubseteq(\widetilde{e}_1,A)\odot((\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{x}_1,A))\\&\sqsubseteq((\widetilde{x}_1,A)\odot(\widetilde{x^{-1}}_1,A))\odot((\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{x}_1,A))\\&=(\widetilde{x}_1,A)\odot((\widetilde{x^{-1}}_1,A)\odot(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{x}_1,A))\\&\subseteq\vee q_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{x}_1,A)\odot(\widetilde{F},A).\end{aligned}$$

同理可证 $(\widetilde{x}_1,A)\odot(\widetilde{F},A)\subseteq\vee q_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{x}_1,A)$. 因此, $(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{x}_1,A)=_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{x}_1,A)\odot(\widetilde{F},A)$.

设 ρ 是 H 上的一等价关系, μ 和 ν 是 H 的模糊子集, 称 $\mu\rho\nu$, 如果下列条件成立:

(1) 若 $\mu(x)>0$, 则存在 $y\in H$, 使得 $\nu(y)>0$ 且 $x\rho y$;

(2) 若 $\nu(a)>0$, 则存在 $b\in H$, 使得 $\mu(b)>0$ 且 $a\rho b$.

定义 3.18 H 上的等价关系 ρ 称为正则的, 如果对任意的 $x,y,z\in H$, 有

$$x\rho y\Rightarrow x\circ z\rho y\circ z \text{ 且 } z\circ x\rho z\circ y.$$

引理 3.19 设 $(\widetilde{F},A)$ 是 H 的正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群, $\alpha\in A$, $r\in[\gamma,\min\{\widetilde{F}(\alpha)(e),\delta\})$, 定义 H 上的一二元关系 $\widetilde{F}(\alpha)^*_r$ 为

$$x\widetilde{F}(\alpha)^*_r y\Leftrightarrow\min\{(\widetilde{x}_1\otimes\widetilde{F})(\alpha)(y),\delta\}>r,\quad\forall\, x,y\in H,$$

则 $\widetilde{F}(\alpha)^*_r$ 是 H 上的正则关系.

证明 先证 $\widetilde{F}(\alpha)^*_r$ 是 H 上的等价关系.

(1) $\widetilde{F}(\alpha)^*_r$ 是 H 上的自反关系. 事实上, 对任意 $x\in H$, 有

$$\min\{(\widetilde{x}_1\otimes\widetilde{F}(\alpha))(x),\delta\}=\min\Big\{\sup_{x\in x\circ a}\widetilde{F}(\alpha)(a),\delta\Big\}\geq\min\{\widetilde{F}(\alpha)(e),\delta\}>r.$$

从而 $x\widetilde{F}(\alpha)^*_r x$, 于是 $\widetilde{F}(\alpha)^*_r$ 是自反的.

(2) 由引理 3.17, 易知 $\widetilde{F}(\alpha)^*_r$ 是 H 上的对称关系.

(3) $\widetilde{F}(\alpha)^*_r$ 是 H 上的传递关系. 事实上, 对任意的 $x,y,z\in H$, 其中 $x\widetilde{F}(\alpha)^*_r y$, $y\widetilde{F}(\alpha)^*_r z$, 有 $\min\{(\widetilde{x}_1\otimes\widetilde{F})(\alpha)(y),\delta\}>r$ 且 $\min\{(\widetilde{y}_1\otimes\widetilde{F})(\alpha)(x),\delta\}>r$. 由 $(\widetilde{F},A)\odot\widetilde{F},A)\subseteq\vee q_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{F},A)$, 有 $(\widetilde{x}_1,A)\odot(\widetilde{F},A)\odot(\widetilde{F},A)\subseteq\vee q_{(\gamma,\delta)}(\widetilde{x}_1,A)\odot(\widetilde{F},A)$, 从而

$$\begin{aligned}\max\{(\widetilde{x}_1\otimes\widetilde{F})(\alpha)(z),\gamma\}&\geq\min\{(\widetilde{x}_1\otimes\widetilde{F}\otimes\widetilde{F})(\alpha)(z),\delta\}\\&=\min\Big\{\sup_{a\in H}\min\{(\widetilde{x}_1\otimes\widetilde{F})(\alpha)(a),(\widetilde{a}_1\otimes\widetilde{F})(\alpha)(z)\},\delta\Big\}\\&\geq\min\{(\widetilde{x}_1\otimes\widetilde{F})(\alpha)(y),(\widetilde{y}_1\otimes\widetilde{F})(\alpha)(z),\delta\}>r.\end{aligned}$$

由于 $r\geq\gamma$, 从而 $\min\{(\widetilde{x}_1\otimes\widetilde{F})(\alpha)(z),\delta\}>r$, 于是 $x\widetilde{F}(\alpha)^*_r z$. 因此 $\widetilde{F}(\alpha)^*_r$ 是传递的.

现证 $\widetilde{F}(\alpha)^*_r$ 是正则的. 设 $x,y,z,a\in H$, 其中 $x\widetilde{F}(\alpha)^*_r y$, $a\in x\circ z$, 则 $\min\{(\widetilde{y}_1\otimes\widetilde{F})(\alpha)(x),\delta\}>r$. 由引理 3.17, 有

$$\begin{aligned}\min\{(\widetilde{1_{y\circ z}}\otimes\widetilde{F})(\alpha)(a),\delta\}&=\min\{(\widetilde{y}_1\otimes\widetilde{z}_1\otimes\widetilde{F})(\alpha)(a),\delta\}=\min\{(\widetilde{y}_1\otimes\widetilde{F}\otimes\widetilde{z}_1)(\alpha)(a),\delta\}\\&=\min\Big\{\sup_{b\in H}\min\{(\widetilde{y}_1\otimes\widetilde{F})(\alpha)(b),(\widetilde{b}_1\otimes\widetilde{z}_1)(\alpha)(a)\},\delta\Big\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\geq \min\{(\widetilde{y}_1\otimes\widetilde{F})(\alpha)(x),(\widetilde{x}_1\otimes\widetilde{z}_1)(\alpha)(a),\delta\}\\&=\min\{(\widetilde{y}_1\otimes\widetilde{F})(\alpha)(x),\delta\}>r.\end{aligned}$$

因此存在 $c\in H$, 使得 $c\in y\circ z$ 且 $\min\{(\widetilde{c}_1\otimes\widetilde{F})(\alpha)(a),\delta\}>r$, 于是 $a\widetilde{F}(\alpha)^*_r c$. 同理可证: 对任意的 $d\in y\circ z$, 存在 $e\in H$, 使得 $d\in x\circ z$ 且 $d\widetilde{F}(\alpha)^*_r e$. 因此 $x\circ z\widetilde{F}(\alpha)^*_r y\circ z$. 类似地, 我们有 $z\circ x\widetilde{F}(\alpha)^*_r z\circ y$, 得证.

令 $\widetilde{F}(\alpha)^*_r[x]$ 表示包含 x 的等价类, 记 $H/\widetilde{F}(\alpha)^*_r=\{\widetilde{F}(\alpha)^*_r[x]\,|\,x\in H\}$. 由于 $\widetilde{F}(\alpha)^*_r$ 是 H 上的正则关系, 易得下面的定理.

定理 3.20 $(H/\widetilde{F}(\alpha)^*_r,\uplus)$ 是 P- 超群, 其中超运算 $\uplus$ 定义为

$$\widetilde{F}(\alpha)^*_r[x]\uplus\widetilde{F}(\alpha)^*_r[y]=\{\widetilde{F}(\alpha)^*_r[z]\,|\,z\in x\circ y\},\quad\forall\, x,y\in H.$$

4 (正规) $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群的同态性质

定义 4.1 设 U 是论域集, E 是参数集, 称 U 上的所有模糊软集构成的集合为一模糊软类, 记作 (U,E).

定义 4.2 设 (U,E) 和 (U',E') 是两个模糊软类, $\varphi:U\to U'$ 和 $\phi:E\to E'$ 是两个映射, 定义映射 $(\varphi,\phi):(U,E)\to(U',E')$ 为:

(1) 对任意的 $(\widetilde{F},A)\in(U,E)$, $(\varphi,\phi)(\widetilde{F},A)=(\varphi(\widetilde{F}),\phi(A))$, 其中

$$\varphi(\widetilde{F})(\beta)(x')=\begin{cases}\sup\limits_{\alpha\in\phi^{-1}(\beta)\cap A,x\in\varphi^{-1}(x')}\widetilde{F}(\alpha)(x) & \text{若 }\varphi^{-1}(x')\neq\emptyset,\\ 0 & \text{否则},\end{cases}\quad\forall\,\beta\in\phi(A),\quad x'\in U'.$$

(2) 对任意的 $(\widetilde{G},B)\in(U',E')$, $(\varphi,\phi)^{-1}(\widetilde{G},B)=(\varphi^{-1}(\widetilde{G}),\phi^{-1}(B))$, 其中

$$\varphi^{-1}(\widetilde{G})(\alpha)(x)=\widetilde{F}(\phi(\alpha))(\varphi(x)),\quad\forall\,\alpha\in\phi^{-1}(B),\quad x\in U.$$

定义 4.3 设 $(H,\circ)$ 和 $(H',\circ')$ 是两个 P- 超群, φ 是 H 到 H' 的映射, 称 φ 为 P- 超群同态, 如果 $\varphi(e)=e'$, 且对任意 $x,y\in H$, 有 $\varphi(x\circ y)=\varphi(x)\circ'\varphi(y)$.

由上述定义易知: 对任意 $x\in H$, $\varphi(x^{-1})=\varphi(x)^{-1}$.

定理 4.4 设 $(H,\circ)$ 和 $(H',\circ')$ 是两个 P- 超群, (H,E) 和 (H',E') 是两个模糊软同态, $(\widetilde{F},A)$ 是 H 的 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群, $\varphi:H\to H'$ 是 P- 超群同态, 且 $\phi:E\to E'$ 是一单射, 则

(1) $(\varphi,\phi)(\widetilde{F},A)$ 是 H' 的 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群.

(2) 如果 $\varphi:H\to H'$ 是 P- 超群满同态, $(\widetilde{F},A)$ 是 H 的正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群, 则 $(\varphi,\phi)(\widetilde{F},A)$ 是 H' 的正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群.

证明 设 $(\widetilde{F},A)$ 是 H 的 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群, $\beta'\in\phi(A)$, 则存在唯一的 $\beta\in A$, 使得 $\phi(\beta)=\beta'$. 进一步地, 有

(1) 对任意的 $x',y'\in H'$, 若 $\varphi^{-1}(x')=\emptyset$ 或 $\varphi^{-1}(y')=\emptyset$, 则显然有

$$\max\Big\{\inf_{z'\in x'\circ'y'}\varphi(\widetilde{F})(\beta')(z'),\gamma\Big\}\geq 0=\min\{\varphi(\widetilde{F})(\beta')(x'),\varphi(\widetilde{F})(\beta')(y'),\delta\}.$$

现假设存在 $x,y\in H$, 使得 $\varphi(x)=x'$ 且 $\varphi(y)=y'$, 则对任意的 $z'\in x'\circ'y'=\varphi(x)\circ'\varphi(y)=\varphi(x\circ y)$, 有 $\varphi^{-1}(z')\subseteq\varphi^{-1}(\varphi(x\circ y))$. 令 $a\in\varphi^{-1}(z')$, 则存在 $b\in x\circ y$, 使得 $a=\varphi^{-1}(\varphi(b))$, 于

是 $z'=\varphi(a)=\varphi(b)$. 因此

$$\begin{aligned}\max\{\varphi(\widetilde{F})(\beta')(z'),\gamma\}&=\max\Big\{\sup_{\varphi(a)=z'}\widetilde{F}(\beta)(a),\gamma\Big\}\geq\sup_{a\in x\circ y}\max\{\widetilde{F}(\beta)(a),\gamma\}\\&\geq\min\{\widetilde{F}(\beta)(x),\widetilde{F}(\beta)(y),\delta\}.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\max\{\varphi(\widetilde{F})(\beta)(z'),\gamma\}&\geq\min\Big\{\sup_{\varphi(x)=x'}\widetilde{F}(\beta)(x),\sup_{\varphi(y)=y'}\widetilde{F}(\beta)(y),\delta\Big\}\\&=\min\{\varphi(\widetilde{F})(\beta')(x'),\varphi(\widetilde{F})(\beta')(y'),\delta\},\end{aligned}$$

故

$$\max\Big\{\inf_{z'\in x'\circ' y'}\varphi(\widetilde{F})(\beta')(z'),\gamma\Big\}\geq\min\{\varphi(\widetilde{F})(\beta')(x'),\varphi(\widetilde{F})(\beta)(y'),\delta\}.$$

(2) 对任意的 $x'\in H'$, 有

$$\begin{aligned}\max\{\varphi(\widetilde{F})(\beta')(x'^{-1}),\gamma\}&=\max\Big\{\sup_{\varphi(x)=x'^{-1}}\widetilde{F}(\beta)(x),\gamma\Big\}=\sup_{\varphi(x^{-1})=x'}\max\{\widetilde{F}(\beta)(x),\gamma\}\\&\geq\sup_{\varphi(x^{-1})=x'}\min\{\widetilde{F}(\beta)(x^{-1}),\delta\}=\min\Big\{\sup_{\varphi(x^{-1})=x'}\widetilde{F}(\beta)(x^{-1}),\delta\Big\}\\&=\min\{\varphi(\widetilde{F})(\beta')(x'),\delta\}.\end{aligned}$$

由 (1) 和 (2) 知, $(\widetilde{F},A)$ 是 H 的 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群.

现设 $\varphi:H\to H'$ 是 P- 超群满同态, $(\widetilde{F},A)$ 是 H 的正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群. 要证明 $(\varphi,\phi)(\widetilde{F},A)$ 是 H' 的正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群, 只需证对任意的 $\beta'\in\phi(A)$, $x',y'\in H'$, 有

$$\max\Big\{\inf_{z'\in x'^{-1}\circ' y'\circ' x'}\varphi(\widetilde{F})(\beta')(z'),\gamma\Big\}\geq\min\{\varphi(\widetilde{F})(\beta')(y'),\delta\}.$$

类似于 (1) 的证明, 这显然成立, 得证.

定理 4.5 设 $(H,\circ)$ 和 $(H',\circ')$ 是两个 P- 超群, (H,E) 和 (H',E') 是两个模糊软同态, $(\widetilde{G},B)$ 是 H' 的正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群, $\varphi:H\to H'$ 是 P- 超群同态, 且 $\phi:E\to E'$ 是一映射, 则 $(\varphi,\phi)^{-1}(\widetilde{G},B)$ 是 H 的正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群.

证明 设 $(\widetilde{G},B)$ 是 H' 的正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群, $\alpha\in\phi^{-1}(B)$, 则

(1) 对任意 $x,y,z\in H$, 其中 $z\in x\circ y$, 有 $\phi(\alpha)\in B$ 且 $\varphi(z)\in\varphi(x\circ y)=\varphi(x)\circ'\varphi(y)$, 从而

$$\max\{\varphi^{-1}(\widetilde{G})(\alpha)(z),\gamma\}=\max\{\widetilde{G}(\phi(\alpha))(\varphi(z)),\gamma\}\geq\min\{\varphi^{-1}(\widetilde{G})(\alpha)(x),\varphi^{-1}(\widetilde{G})(\alpha)(y),\delta\}.$$

因此

$$\max\Big\{\inf_{z\in x\circ y}\varphi^{-1}(\widetilde{G})(\alpha)(z),\gamma\Big\}\geq\min\{\varphi^{-1}(\widetilde{G})(\alpha)(x),\varphi^{-1}(\widetilde{G})(\alpha)(y),\delta\}.$$

(2) 对任意 $x\in H$, 有

$$\begin{aligned}\max\{\varphi^{-1}(\widetilde{G})(\alpha)(x^{-1}),\gamma\}&=\max\{\widetilde{G}(\phi(\alpha))(\varphi(x^{-1})),\gamma\}=\max\{\widetilde{G}(\phi(\alpha))(\varphi(x)^{-1}),\gamma\}\\&\geq\min\{\widetilde{G}(\phi(\alpha))(\varphi(x)),\delta\}=\min\{\varphi^{-1}(\widetilde{G})(\alpha)(x),\delta\}.\end{aligned}$$

(3) 令 $\alpha\in\phi^{-1}(B)$, $x,y\in H$, 类似于 (1) 的证明, 有

$$\max\Big\{\inf_{z\in x^{-1}\circ y\circ x}\varphi^{-1}(\widetilde{G})(\alpha)(z),\gamma\Big\}\geq\min\{\varphi^{-1}(\widetilde{G})(\alpha)(y),\delta\}.$$

综上可知, $(\varphi,\phi)^{-1}(\widetilde{G},B)$ 是 H 的正规 $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$- 模糊软 P- 超群.

致谢 本文作者感谢审稿人的建议与帮助.

参 考 文 献

[1] Zadeh L. A., Fuzzy sets, *Inform and control*, 1965, **8**: 338–353.
[2] Pawlak Z., Rough sets, *Int. J. Comput. Inform. Sci.*, 1982, **11**: 341–356.
[3] Molodtsov D., Soft set theory-First results, *Comput. Math. Appl.*, 1999, **37** : 19–31.
[4] Maji P. K., Biswas R., Roy A. R., Fuzzy soft sets, *J. Fuzzy Math.*, 2001, **9(3)**: 589–602.
[5] Maji P. K., Biswas R., Roy A. R., Intuitionistic fuzzy soft set, *J. Fuzzy Math.*, 2001, **9(3)**: 677–692.
[6] Maji P. K., Roy A. R., Biswas R., An application of soft sets in a decision making problem, *Comput. Math. Appl.*, 2002, **44**: 1077–1083.
[7] Xu W., Ma J., Wang S., Hao G., Vague soft sets and their properties, *Comput. Appl. Math.*, 2010, **59**: 787–794.
[8] Ali M. L., Feng F., Liu X. Y., Min W. K., Shair M., on some orperations in soft set theory, *Comput. Math. Appl.*, 2008, **57**: 1547–1553.
[9] Aktaş H., Çğman N., Soft sets and soft groups, *Inform. Sci.*, 2007, **177**: 2726–2735.
[10] Aygünoğlu A., Aygün H., Introduction to fuzzy soft groups, *Comput. Math. Appl.*, 2009, **58**: 1279–1286.
[11] Feng F., Li C. X., Davvaz B., Ali M. I., Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets: a tentative approach, *Soft Comput.*, 2010, **14**: 899–911.
[12] Feng F., Li Y. M., Leoreanu-Fotea V., Jun Y. B., Soft sets and soft rough sets, *Inform. Sci.*, 2011, **181**: 1125–1137.
[13] Feng F., Jun Y. B., Zhao X., Soft semirings, *Comput. Math. Appl.*, 2008, **56**: 2621–2628.
[14] Jun Y. B., Soft BCK/BCI-algebras, *Comput. Math. Appl.*, 2008, **56**: 1408–1413.
[15] Jun Y. B., Park C. H., Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-algebras, *Inform. Sci.*, 2008, **178**: 2466–2475.
[16] Jun Y. B., Lee K. J., Park C. H., Soft set theory applied to ideals in d-algebras, *Comput. Math. Appl.*, 2009, **57**: 367–378.
[17] Acar U., Koyuncu F., Tanay B., Soft sets and soft rings, *Comput. Math. Appl.*, 2010, **59**: 3458–3463.
[18] Marty F., Sur une generalization de la notion de groupe, in: 8th Congress Math. Scandinaves, Stockholm, 1934, 45–49.
[19] Corsini P., Prolegomena of Hypergroup Theory, Italy: Aviani Editore, 1993.
[20] Cristea I., Hyperstructures and fuzzy sets endowed with two membership functions, *Fuzzy Sets Syst.*, 2009, **160**: 1114–1124.
[21] Davvaz B., Corsini P., Leoreanu-Fotea V., Fuzzy n-ary subpolygroups, *Comput. Math. Appl.*, 2009, **57**: 141–152
[22] Davvaz B., Leoreanu-Fotea V., Applications of interval valued fuzzy n-ary polygroups with respect to t-norms (t-conorms), *Comput. Math. Appl.*, 2009, **57**: 1413–1424.
[23] Kazanci O., Davvaz B., Yamak S., Fuzzy n-ary hypergroups related to fuzzy points, *Neural Comput Applic*, 2010, **19**: 649–655.
[24] Leoreanu-Fotea V., The lower and upper approximations in a hypergroup, *Inform. Sci.*, 2008, **178**: 3605–3615.
[25] Leoreanu-Fotea V., Fuzzy hypermodules, *Comput. Math. Appl.*, 2009, **57**: 466–475.
[26] Yin Y., Zhan J., Xu D., Wang J., The L-fuzzy hypermodules, *Comput. Math. Appl.*, 2010, **59**: 953–963.
[27] Yin Y., Zhan J., Corsini P., L-fuzzy roughness of n-ary polygroups, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2011, **27**(1): 97–118.
[28] Yin Y., Zhan J., Huang X., A new view of L-fuzzy polygroups, *Neural Comput Applic*, 2011, **20**: 589–602.
[29] Zhan J., Davvaz B., Shum K. P., Isomorphism theorems of hypermodules, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2007, **50**(4): 909–914.
[30] Zhan J., Davvaz B., Shum K. P., A new view of fuzzy hypermodules, 20*Acta Mathematica Sinica, English Series*, **23**(8): 1345–1356.
[31] Zhan J., Dudek W. A., Interval valued intuitionistic (S,T)-fuzzy Hv-submodules, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2006, **22**(4): 963–970.