1) $x\cos(\frac{y}{x})\frac{dy}{dx} = y\cos(\frac{y}{x}) - x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{\cos(y/x)} = F(y/x)$ şeklinde olduğundan denklem sıfırıncı dereceden homojendir. O halde, $u = \frac{y}{x}$ dersek

$=> dy = udx + xdu$

$=> \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$

$=> \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{\cos(y/x)}$

$=> u + x\frac{du}{dx} = u - \frac{1}{\cos u}$

$=> x\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\cos u}$

$=> \int -\cos u du = \int \frac{dx}{x}$

$=> -\sin u = \ln x + c$

$=> -\sin\frac{y}{x} = \ln x + c$

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y + 6}{2x + y + 2}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$(x - 2y + 6)dx - (2x + y + 2)dy = 0$

$\begin{matrix} x = X + h \\ y = Y + k \end{matrix}$ dönüşümünü uygularsak $\begin{matrix} x - 2y + 6 = X + h - 2Y - 2k + 6 \\ 2x + y + 2 = 2X + 2h + Y + k + 2 \end{matrix}$

$\begin{matrix} h - 2k + 6 = 0 \\ 2h + k + 2 = 0 \end{matrix}$ $=> h = -2, k = 2$ bulunur.

$\begin{matrix} x = X - 2 \\ y = Y + 2 \end{matrix}$ Dönüşümü uygulanır.

$\begin{matrix} dx = dX \\ dy = dY \end{matrix}$ olur.

O halde;

$(X - 2 - 2Y - 4 + 6)dX - (2X - 4 + Y + 2 + 2)dY = 0$

$=> (X - 2Y)dX - (2X + Y)dY = 0$

1.dereceden homojen diferansiyel denklemdir.
$Y = UX$ dönüşümü uygularsak; $dY = UdX + XdU$

$$=> (X - 2UX)dX - (2X + UX)(UdX + XdU) = 0$$

$$=> XdX - 2UXdX - 2XUdX - 2X^2dU - U^2XdU = 0$$

$$=> dX - 2UdX - 2UdX - 2XdU - U^2dX - UXdU = 0$$

$$=> (1 - 4U - U^2)dX - (2X + UX)dU = 0$$

$$=> (1 - 4U - U^2)dX = X(2 + U)dU$$

$$=> \frac{dX}{X} = \frac{1}{-2}\left(\frac{-2(2+U)}{1 - 4U - U^2}\right)dU$$

$$=> \ln X = -\frac{1}{2}\ln(1 - 4U - U^2) + \ln c_1$$

$$=> 2\ln x + \ln(1 - 4u - u^2) = \ln c$$

$$=> c = X^2(1 - 4U - U^2) => c = X^2\left(1 - \frac{4Y}{X} - \frac{Y^2}{X^2}\right)$$

$$=> c = X^2\left(\frac{X^2 - 4XY - Y^2}{X^2}\right)$$

$$=> c = X^2 - 4XY - Y^2, x = X - 2, y = Y + 2$$

$$c = (x+2)^2 - 4(x+2)(y-2) - (y-2)^2$$

3) Değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklem aynı zamanda tamdır. Gösteriniz.

Değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklemin genel formu;

$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$ şeklindedir.

$$=> g(x)dx - h(y)dy = 0$$

$$=> M(x, y) = g(x), N(x, y) = -h(y)$$

Tam olması için $M_y = N_x$ olmalıdır.

$$M_y = \frac{\delta g(x)}{\delta y} = 0, N_x = \frac{\delta h(y)}{\delta x} = 0$$

0=0 olduğundan $M_y = N_x$ olup, değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklem aynı zamanda tamdır.

4) $(x + ye^y)\frac{dy}{dx} = 1$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$(x + ye^y)dy = dx$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = x + ye^y$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} - x = ye^y$$ olur.

$(x' + P(y)x = Q(y))$ x'e göre lineer diferansiyel denklemdir.

$$\mu(y) = e^{\int(-1)dy} = e^{-y}$$

$$\Rightarrow e^{-y}x' - e^{-y}x = y$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}(e^{-y}x) = y$$

$$\Rightarrow e^{-y}x = \int ydy$$

$$\Rightarrow e^{-y}x = \frac{y^2}{2} + c_1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}y^2e^y + c_1e^y$$

5) $x\frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2$$

n = 2 için Bernoulli diferansiyel denklemidir. Her iki tarafı y^{-2} ile çarparsak;

$$y^{-2}y'+\frac{1}{x}y^{-1}=\frac{\ln x}{x}, W=y^{-1} => W'=-y^{-2}y'$$

$$=> -W'+\frac{1}{x}W=\frac{\ln x}{x}$$

$$=> W'-\frac{1}{x}W=-\frac{\ln x}{x}$$ W' ya göre lineer

$$\mu(x)=e^{\int -\frac{1}{x}dx}=\frac{1}{x}$$

$$=> \frac{1}{x}W'-\frac{1}{x^2}W=-\frac{\ln x}{x^2}$$

$$=> \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}W)=-\frac{\ln x}{x^2}$$

$$=> \frac{1}{x}W=-\int\frac{1}{x^2}\ln x dx$$

$$=> \begin{matrix} u=\ln x => du=\frac{1}{x}dx \\ \frac{1}{x^2}dx=dv => -\frac{1}{x}=v \end{matrix}$$

$$=> \frac{1}{x}W=-\{-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}\}+c$$

$$=> \frac{1}{x}w=\frac{1}{x}\{\ln x+1\}+c$$

$$=> w=\ln x+1+cx$$

$$=> y=\frac{1}{1+\ln x+cx}$$

6) $x^2y'-1+xy=x^2y^2$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümü $y_1=\frac{1}{x}$ olduğuna göre genel çözümünü bulunuz.

$$y'-\frac{1}{x^2}+\frac{y}{x}=-y^2$$

$$=> y' = -y^2 - \frac{1}{x} y + \frac{1}{x^2}$$ Ricatti diferansiyel denklemidir.

$$y = y_1 + z => y = \frac{1}{x} + z => y' = -\frac{1}{x^2} + z'$$

$$y^2 = (\frac{1}{x} + z)^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{2z}{x} + z^2$$

$$=> -\frac{1}{x^2} + z' = -\frac{1}{x^2} - \frac{2z}{x} - z^2 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} z + \frac{1}{x^2}$$

$$=> z' + \frac{3}{x} z = -z^2 \qquad n = 2$$ için Bernoulli

$$=> z^{-2} z' + \frac{3}{x} z^{-1} = -1 \qquad w = z^{-1} => w' = -z^{-2} z'$$

$$=> -w' + \frac{3}{x} w = -1 => w' - \frac{3}{x} w = 1$$ lineer diferansiyel denklemi elde edilir.

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{3}{x} dx} = e^{-3\ln x} = \frac{1}{x^3}$$

$$=> \frac{1}{x^3} w' - \frac{3}{x^4} w = \frac{1}{x^3} => \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3} w\right) = \frac{1}{x^3}$$

$$=> \frac{1}{x^3} w = \int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + c$$

$$=> w = -\frac{1}{2} x + cx^3 => z = \frac{1}{x(cx^2 - \frac{1}{2})}$$

$$=> y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x(cx^2 - \frac{1}{2})}$$