**T.C.**

**SAMSUN ÜNİVERSİTESİ**

**MÜHENDİSLİK VE DOĞA BİLİMLERİ FAKÜLTESİ**

**YAZILIM MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ**

**MAT204 DİFERANSİYEL DENKLEMLER DÖNEM SONU SINAVI SORULARI**

**Adı:** **Soyadı:** **No:**

1) $y=\dfrac{x}{1+c_1x}$ ile verilen eğri ailesinin dik yörüngelerinin denklemini bulunuz **(10 Puan)**.
2) $(xy-y^2)dx-x^2dy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz **(20 Puan)**.
3) $xy'=y(1-\ln y+\ln x)$ diferansiyel denkleminin $y(e)=1$ koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz **(20 Puan)**.
4) $y'''+y''=3e^x+4x^2$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü sıfırlayan operatör yardımı ile bulunuz **(25 Puan)**.
5) $y'''+4y'=\sin x\cos x$ denklemini parametrelerin değişimi metodu yardımıyla çözünüz **(25 Puan)**.

**Süre 100 dakikadır. Başarılar. 12.06.2024** **Prof. Dr. Hüseyin DEMİR**

**ÇÖZÜMLER**

1)

$$y=\frac{x}{1+c_1x} \Rightarrow y'=\frac{1+c_1x-c_1x}{(1+c_1x)^2}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{(1+c_1x)^2}$$

$$y=\frac{x}{(1+c_1x)} \Rightarrow y^2=\frac{x^2}{(1+c_1x)^2} \Rightarrow (1+c_1x)^2=\frac{x^2}{y^2}$$

$$\Rightarrow y^2=x^2y'$$

$y'\to -\dfrac{1}{y'}$ alırsak

$$y^2=-x^2\frac{1}{y'} \Rightarrow y'y^2+x^2=0$$

$\Rightarrow y^2dy+x^2dx=0$ değişkenlerine ayrılmış diferansiyel denklemdir.

$$\Rightarrow y^2dy=-x^2dx$$

$$\Rightarrow \frac{y^3}{3}+\frac{x^3}{3}=C$$

2)

$M(x,y) = xy - y^2 \Rightarrow M(tx,ty) = t^2(xy - y^2)$

$N(x,y) = -x^2 \Rightarrow N(tx,ty) = -t^2x^2$

Denklem homojendir.

$y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$

$\Rightarrow (ux^2 - u^2x^2)dx - x^2(udx + xdu) = 0$

$\Rightarrow x^2(u - u^2)dx - x^2udx - x^3du = 0$

$x^2$ ile her iki tarafı bölersek;

$\Rightarrow (u - u^2 - u)dx - xdu = 0$

$$\Rightarrow u^2dx = -xdu \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{du}{u^2}$$

$$\Rightarrow \ln x = \frac{1}{u} + C \Rightarrow \ln x = \frac{x}{y} + C$$

$\Rightarrow x = ce^{x/y}$

3)

$y(1 - \ln y + \ln x)dx - xdy = 0$

$\Rightarrow yM(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$M_y = 1 - \ln y - 1 + \ln x = \ln x - \ln y$

$N_x = -1$

$M_y \neq N_x$ tam değil.

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{1 - \ln y + \ln x}{-y(1 - \ln y + \ln x)} = -\frac{1}{y}$$

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{1}{y}dy} = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow (1 - \ln y + \ln x)dx - \frac{x}{y}dy = 0$$

$\Rightarrow M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$M_y = -1/y, N_x = -1/y \Rightarrow M_y = N_x$ tamdır.

$\Rightarrow df = f_x dx + f_y dy = 0$ olduğuna göre $\exists f$ vardır.

$f_x = 1 - \ln y + \ln x,\ f_y = -x/y$

$$\Rightarrow f(x,y) = \int -\frac{x}{y}dy = -x\ln y + g(x)$$

$=> f_x = -\ln y + g'(x) = 1 - \ln y + \ln x$
$=> g'(x) = 1 + \ln x$
$=> g(x) = x + \int \ln x dx$
$=> g(x) = x + \ln x - x + c$
$=> f(x, y) = -x\ln y + x\ln x = c$
$y(e) = 1 => -e\ln 1 + e\ln e = c => c = e$
$=> f(x, y) = -x\ln y + x\ln x = e$

4)

$y''' + y'' = 3e^x + 4x^2$
$(D^3 + D^2)y = 3e^x + 4x^2$
Önce homojen kısmı çözelim
$(D^3 + D^2)y = 0 => D^2(D+1)y = 0$
$M^2(M+1) = 0$
$M_1 = M_2 = 0$
$M_3 = -1$
$y_c(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$
$e^x$ in sıfırlayan operatörü $(D-1)$ dir.
$(D-1)(3e^x) = 0$
$4x^2$ nin sıfırlayan operatörü $D^3$ dür.
$D^3(4x^2) = 0$
Denklemin her iki tarafına $D^3(D-1)$ operatörünü uygulayalım.
$D^3(D-1)D^2(D+1)y = D^3(D-1)(3e^x + 4x^2) = 0$
$D^5(D-1)(D+1)y = 0$
$M^5(M-1)(M+1) = 0$
$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = 0, M_6 = 1, M_7 = -1$
$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4 + c_6 e^x + c_7 e^{-x}$
$y_c(x) = c_1 + c_2 + c_7 e^{-x}$
$y_p(x) = c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4 + c_6 e^x$
$y_p(x) = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + De^x$
$y'_p(x) = 2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3 + De^x$
$y''_p(x) = 2A + 6Bx + 12Cx^2 + De^x$
$y'''_p(x) = 6B + 24Cx + De^x$

$$6B+24Cx+De^x+2A+6Bx+12Cx^2+De^x=3e^x+4x^2$$
$$2De^x+12Cx^2+(24C+6B)x+(6B+2A)=3e^x+4x^2$$
$$2D=3, D=3/2, 12C=4, C=1/3$$
$$24C+6B=0, 6B=-8, B=-4/3$$
$$6B+2A=0, -8+2A=0, A=4$$
$$y_p=4x^2-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{3}x^4+\frac{3}{2}e^x$$
$$y=c_1+c_2x+c_3e^{-x}+4x^2-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{3}x^4+\frac{3}{2}e^x$$

5)

$$y'''+4y'=\sin x\cos x$$

Homojen kısmı $y'''+4y'$ olup, yardımcı denklem $m^3+4m=0 \Rightarrow m_1=0, m_2=2i, m_3=-2i$ bulunur.

$\Rightarrow y_c=c_1+c_2\cos 2x+c_3\sin 2x$ olup $y_1=1, y_2=\cos 2x, y_3=\sin 2x$ için

$$y_1u_1'+y_2u_2'+y_3u_3'=0 \Rightarrow u_1'+(\cos 2x)u_2'+(\sin 2x)u3'...(1)$$
$$y_1u_1'+y_2u_2'+y_3u_3'=0 \Rightarrow -2\sin x.u_2'+2\cos 2x.u_3'...(2)$$
$$y_1u_1'+y_2u_2'+y_3u_3'=f(x) \Rightarrow -4\cos 2x.u_2'-4\sin x.u_3'=\frac{1}{2}\sin 2x...(3)$$

olup (1) ve (3) den

$$u_1'=\frac{1}{8}\sin 2x \Rightarrow u_1=-\frac{1}{16}\cos 2x$$
$$u_2'=\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 0 & 2\cos 2x \\ \frac{1}{2}\sin 2x & -4\sin 2x \end{vmatrix}=-\frac{1}{8}\sin 2x\cos 2x \Rightarrow u_2=-\frac{1}{16}.\frac{1}{2}\sin^2 2x=-\frac{1}{32}\sin^2 2x$$
$$u_3'=\begin{vmatrix} -2\sin 2x & 0 \\ -4\cos 2x & \frac{1}{2}\sin 2x \end{vmatrix}=-\frac{1}{8}\sin^2 2x$$
$$\Rightarrow u_3=-\frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx=-\frac{1}{8}\int(\frac{1-\cos 4x}{2})$$
$$u_3=-\frac{1}{16}(x-\frac{\sin 4x}{4})$$

bulunur. O halde

$$y_p=u_1+u_2\cos 2x+u_3\sin 2x=-\frac{1}{16}\cos 2x-\frac{1}{32}\sin^2 2x\cos 2x-\frac{1}{16}(x-\frac{\sin 4x}{4})\sin 2x$$

olup, genel çözüm

$$y=y_c+y_p=c_1+c_2\cos 2x+c_3\sin 2x-\frac{1}{16}\cos 2x-\frac{1}{32}\sin^2 2x\cos 2x-\frac{1}{16}(x-\frac{\sin 4x}{4})\sin 2x$$

veya

$$y=c_1+c_2\cos 2x+c_3\sin 2x-\frac{1}{32}\sin^2 2x\cos 2x-\frac{1}{16}(x-\frac{\sin 4x}{4})\sin 2x$$