T.C.

SAMSUN ÜNİVERSİTESİ

MÜHENDİSLİK VE DOĞA BİLİMLERİ FAKÜLTESİ

YAZILIM MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

OMAT204 DİFERANSİYEL DENKLEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

Adı: **Soyadı:** **No:**

1) $\frac{dy}{dx}+xy^2+(x+1)y+R(x)=0$ diferansiyel denklemi için $y=x+1$ fonksiyonunun bir özel çözüm olabilmesi için $R(x)$ ne olmalıdır? Buna göre elde edilen denklemin genel çözümünü bulunuz. **(25 Puan)**

2) $y^{(4)}-y'''=x+e^x$ denklemini diferansiyel operatör yardımıyla belirsiz katsayılar metodunu kullanarak çözünüz. **(25 Puan)**

3) $y''+y=4\cos x-\sin x$ denklemini parametrelerin değişimi metodu ile çözünüz. **(25 Puan)**

4) $(2x-1)^2y''-(2x-1)y'+y=1$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz. **(25 Puan)**

Süre 100 dakikadır. Başarılar. 26.06.2024 **Prof. Dr. Hüseyin DEMİR**

CEVAPLAR

1) $\frac{dy}{dx}+xy^2+(x+1)y+R(x)=0$ denkleminin $y=x+1$ bir çözümü var ise denklemi sağlamalıdır.

$y=x+1 \Rightarrow y'=1$

$$1+x(x+1)^2+(x+1)(x+1)+R(x)=0$$
$$R(x)=-\{1+x(x+1)^2+(x+1)^2\}$$
$$R(x)=-\{1+(x+1)^2(x+1)\}=-\{1+(x+1)^3\}$$

$R(x)=-1-(x+1)^3$ bulunur.

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}+xy^2+(x+1)y-1-(x+1)^3=0$$

$y=y_1+z$ dönüşümü uygulanır. $y=z+x+1$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}+1$$

$$\frac{dz}{dx}+1+x(z+x+1)^2+(x+1)(z+x+1)-1-(x+1)^3=0$$

$$\frac{dz}{dx}+x(z^2+x^2+1+2zx+2x+2z)+(xz+x^2+x+z+x+1)-(x+1)^3=0$$

$$\frac{dz}{dx}+xz^2+x^3+x+2zx^2+2x^2+2zx+xz+x^2+x+z+x+1-(x+1)^3=0$$

$$\frac{dz}{dx}+xz^2+x^3+3x+2zx^2+3x^2+3zx+z+1-(x+1)^3=0$$

$$\frac{dz}{dx}+xz^2+z(2x^2+3x+1)=0$$

$$\frac{dz}{dx}+(2x^2+3x+1)z=-xz^2 \text{ Bernoulli}$$

$$w=z^{1-2}=z^{-1}$$

$$\frac{dw}{dx}=-z^{-2}\frac{dz}{dx} => \frac{dz}{dx}=-z^2\frac{dw}{dx}$$

$$-z^2\frac{dw}{dx}+(2x^2+3x+1)z=-zx^2$$

$$\frac{dw}{dx}-(2x^2+3x+1)z^{-1}=x$$

$$\frac{dw}{dx}-(2x^2+3x+1)w=x$$

Lineer Diferansiyel Denklem

$\mu=e^{-\int(2x^2+3x+1)dx}=e^{-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x}$ bulunur.

$$e^{-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x}.\frac{dw}{dx}-(2x^2+3x+1).e^{-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x}.w=x.e^{-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x}$$

$$\frac{d}{dx}\{e^{-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x}.w\}=x.e^{-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x}$$

$$e^{-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x}.w=\int xe^{-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x}dx$$

$$w=\{\int xe^{-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x}dx\}.e^{-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x}$$

2) $y^{(4)}-y'''=x+e^x$ denklemin homojen kısmı $D^3(D-1)y=0$ olup, yardımcı denklem

$m^3(m-1)=0 => m_1=m_2=m_3=0, m_4=1$ bulunur. Böylece homojen kısmının genel çözümü

$y_c=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^x$

$f(x)=x+e^x$ için $D^2(x)=0$ ve $(D-1)(e^x)=0$ olacağından $D^2(D-1)f(x)=0$ bulunur. O halde diferansiyel denklemin her iki tarafına $D^2(D-1)$ operatörü uygulanırsa

$D^5(D-1)^2y=0$ olup yardımcı denklem $m^5(m-1)^2=0$ olacağından

$m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=0, m_6=m_7=1$ elde edilir.

$$=> y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3+c_5x^4+c_6e^x+c_7xe^x$$
$$=> y_c=c_1+c_2x+c_3x^2+c_6e^x$$

olacağından, bir özel çözüm

$y_p=Ax^3+Bx^4+Cxe^x$ şeklindedir.

$$y'_p=3Ax^2+4Bx^3+Ce^x+Cxe^x$$
$$y''_p=6Ax+12Bx^2+2Ce^x+Cxe^x$$
$$y'''=6A+24Bx+3Ce^x+Cxe^x$$
$$y^{(4)}=24B+4Ce^x+Cxe^x$$

olduğuna göre

$$=> 24B+4Ce^x+Cxe^x-6A-24B-3Ce^x-Cxe^x=x+e^x$$
$$=> 24B-6A-24Bx+Ce^x=x+e^x$$
$$=> C=1, B=-\frac{1}{24}, A=-\frac{1}{6}$$

$y_p=-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4+xe^x$ bulunur.

O halde genel çözüm

$$y=y_c+y_p=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4+xe^x$$

3) $y''+y=4\cos x-\sin x$ homojen kısmı $y''+y=0$ olup, karakteristik denklem

$m^2+1=0 => m_1=i, m_2=-i$ olup,

$$y_c=c_1\cos x+c_2\sin x$$
$$y_1=\cos x$$
$$y_2=\sin x$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=1$$

$$u'_1=\frac{f(x)y_2}{W}=-\sin x(4\cos x-\sin x)=\sin^2 x-4\sin x\cos x$$

$$=> u_1(x)=\int(\sin^2 x-4\sin x\cos x)dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}-\frac{4\sin^2 x}{2}$$

$$u'_2 = \frac{y_1 f(x)}{W} = \cos x(4\cos x - \sin x)$$

$$=> u_2(x) = \int (4\cos^2 x - \sin x \cos x)dx = \int (2\cos 2x + 2 - \sin x \cos x)dx = \sin 2x + 2x - \frac{\sin^2 x}{2}$$

$$=> y_p = u_1 \cos x + u_2 \sin x$$

$$= (\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} - 2\sin^2 x)\cos x + (\sin 2x + 2x - \frac{\sin^2 x}{2})\sin x$$

$$= \frac{x}{2}\cos x - \frac{\sin x \cos^2 x}{2} - 2\sin^2 x \cos x + 2\sin^2 x \cos x + 2x \sin x$$

$$= \frac{x}{2}\cos x + 2x \sin x - \frac{\sin x}{2}(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

olup, genel çözüm

$$y = y_c + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x}{2}\cos x + 2x \sin x - \frac{\sin x}{2}$$

veya

$y = c_1 \cos x + c_2^* \sin x + \frac{x}{2}\cos x + 2x \sin x$ elde edilir.

4)

$$2x - 1 = u => 2dx = du => \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{2dy}{du}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{2dy}{du}) = \frac{2d^2y}{du^2}\frac{du}{dx} = \frac{4d^2y}{du^2}$$

$$4u^2 \frac{d^2y}{du^2} - 2u\frac{dy}{du} + y = 1$$

$u = e^t$ alınırsa $t = \ln u$

$=> 4\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + y = 1$ sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem elde edilir.

Homojen diferansiyel denklem

$$4w^2 - 6w + 1 = 0 => w_{1,2} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{5}$$

$$y_c(t) = c_1 e^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}t} + c_2 e^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}t}$$

Homojen olmayan diferansiyel denklem;

$D(1)=0$

$D(4D^2-6D+1)=D(1)=0$

$y(t)=c_1e^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}t}+c_2e^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}t}+c_3$

$y_p(t)=A$ şeklindedir. $A=1$ bulunur.

$y_p(t)=1$

$=> y=c_1e^{\frac{(3+\sqrt{5})}{4}t}+c_2e^{\frac{(3-\sqrt{5})}{4}t}+1$

$y=c_1u^{\frac{3+\sqrt{5}}{4}}+c_2u^{\frac{3-\sqrt{5}}{4}}+1=c_1(2x-1)^{\frac{3+\sqrt{5}}{4}}+c_2(2x-1)^{\frac{3-\sqrt{5}}{4}}+1$