T.C.

SAMSUN ÜNİVERSİTESİ

MÜHENDİSLİK ve DOĞA BİLİMLERİ FAKÜLTESİ

YAZILIM MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

OMAT301 NÜMERİK YÖNTEMLER DÖNEM SONU CEVAP ANAHTARI

Adı: **Soyadı:** **No:**

Soru 1: $\int_0^2 e^{-3x}\,\mathrm{Sin}\,3x\,dx$ integralinin yaklaşık değerini birleşik yamuk kuralından sırasıyla $h = 1/2$ ve $h = 1/4$ alarak dört ondalık basamak için bulunuz

a. İki ondalık basamak içeren sonucun doğruluğu için kaç tane alt aralığa ihtiyaç vardır.

b. $h = 1/2$ ve $h = 1/4$ için bulduğunuz sonuçları kullanarak Romberg Integral kuralı ile daha hassas bir yaklaşık çözüm bulunuz.

c. Sonuçları gerçek çözüm $I(f) = \frac{1}{6} - \frac{\sin(6)+\cos(6)}{6e^6}$ değeri ile karşılaştırınız, **(35p)**

Çözüm: Birleşik Yamuk (Trapez) kuralı:

$h = \frac{1}{2}$ için

$$Q(t) = \frac{h}{2}\{f(x_0) + f(x_n)\} + h\{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})\}$$

$$= \frac{1}{4}\{f(0) + f(2)\} + \frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right)\right\} = 0.109$$

$h = \frac{1}{4}$ için

$$Q(t) = \frac{h}{2}\{f(0) + f(2)\} + h\left\{f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\{f(0) + f(2)\} + \frac{1}{4}\left\{f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right)\right\} = 0.1512$$

h değeri küçüldükçe gerçek çözüme hızlı bir yakınsama olur.

2 ondalık basamak içeren sonucun doğruluğu için ihtiyaç duyulan alt aralık seviyesinin tespiti;

$$|E(t)| = \frac{1}{2}10^{-2},\ k = \frac{(b-a)}{12} sup_{0 \le x \le 2}|f''(x)|$$

$$=> f'(x) = e^{-3x}[\cos 3x - \sin 3x]$$

$$=> f''(x) = -18e^{-3x} \cdot \cos 3x$$

$$k = \frac{2}{12} sup_{0 \le x \le 2}|18 \cdot e^{-3x} \cdot \cos 3x| = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3$$

$$kh^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} => h^2 = \frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}}{3} => h = \left[\frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}}{3}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$nh = b - a => n = \frac{(b-a)}{h} = \frac{2}{\left(\frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}}{3}\right)^{\frac{1}{2}}} = 48.989$$

$n \le 49$

$n \le 49$ değeri I(f)'nin yaklaşık çözümünü iki ondalık basamak için garanti eder.

Gerçek çözüm ise,

$$\int_0^2 e^{-3x} \sin(3x)\, dx = \frac{1}{6} - \frac{\sin(6) + \cos(6)}{6e^6} \approx 0.16639$$

bulunur.

$$\left.\begin{array}{l} h = \frac{1}{2} \rightarrow Q(t) = 0.109 \\ h = \frac{1}{4} \rightarrow Q(t) = 0.1512 \end{array}\right\} \rightarrow \textit{Romberg Interpolasyon Metodundan}$$

$$\int_0^2 e^{-3x} \sin 3x dx \cong \frac{1}{3}[4 \cdot (0.1512) - 0.109] = 0.165266$$

Görüldüğü üzere gerçek çözüme en yakın sonuç Romberg Integrasyon ile elde edilmektedir.

Soru 2: $y' = y + x + 1,\ y(0) = 0.5$ ile verilen başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümünü

a. 4. dereceden Taylor Serisi açılımı yöntemi,

b. 4. dereceden Runge-Kutta yöntemi ile

$h = 0.25$ olmak üzere $y(1.0)$ değerini bulunuz.

c. Diferansiyel denklemin tam çözümü $y(x) = 3.5e^x - x^2 - 2x - 3$ olmak üzere her bir noktadaki tam çözüm, Taylor Serisi yöntemi ve Runge-Kutta Yöntemi sonuçlarını tablo ile vererek yorumlayınız. **(35p)**

Çözüm: 4. dereceden Taylor Serisi açılımı yöntemi,

$$y_{i+1} = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_i)$$

yada

$$y_{i+1} = y(x_i) + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!}f'(x_i, y_i) + \frac{h^3}{3!}f''(x_i, y_i) + \frac{h^4}{4!}f'''(x_i, y_i)$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} y' &= y + x + 1 = f(x, y) \\ y'' &= y' + 1 = y + x + 1 + 1 = y + x + 2 = f'(x, y) \\ y''' &= y' + 1 = y + x + 1 + 1 = y + x + 2 = f''(x, y) \\ y^{(4)} &= y' + 1 = y + x + 2 = f'''(x, y) \end{aligned}$$

olmak üzere bulunan bu ifadeleri yukarıda yerine yazarsak,

$$y_{i+1} = y_i + h(y_i + x_i + 1) + \frac{h^2}{2!}(y_i + x_i + 2) + \frac{h^3}{3!}(y_i + x_i + 2) + \frac{h^4}{4!}(y_i + x_i + 2)$$

bulunur, ayrıca başlangıç şartlarından

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0.5, \quad h = 0.25$$

alabiliriz. Şimdide çözümü bulalım

Buna göre her bir düğüm noktasında elde edilen çözümler i=*0, 1, 2, 3,4* için aşağıdaki gibidir.

y (0) = 0.5

y (0.25) = 0.960042

y (0.5) = 1.621748

y (0.75) = 2.542395

y (1) = 3.795524 bulunur.

Çözüm: 4. dereceden Runge-Kutta yöntemi,

Çözümün için ilk başlangıç noktası, denklemin başlangıç değerinden bulunan (0, 0.5) noktasıdır. Bu durumda $x_0 = 0$, $y_0 = 0.5$ olur. Çözümün geri kalanı ilerleyen adımlarda bulunur. Herbir adımda bağımsız değişkenin sonraki değeri

$$x_{i+1} = x_i + h = x_i + 0.25$$

bulunur. Önce k_1, k_2, k_3 *ve* k_4 değerleri aşağıdaki eşitliklerden hesaplanır.

$$k_1 = hf\,(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$
$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$$
$$k_4 = hf\,(x_i + h, y_i + k_3)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$f(x, y) = y + x + 1$$

olmak üzere i=*0, 1, 2, 3,4* için sonuçlar aşağıdaki gibidir,

x = 0.25, y = 0.960042
x = 0.50, y = 1.621749
x = 0.75, y = 2.542395
x = 1.00, y = 3.795525
y (1) = 3.795525 bulunur.

x	y-tam	y-ts4	hata	y-rk4	hata
0.00	**0.5**	**0.5**	**0**	**-----**	**-----**
0.25	**0.96**	**0.960042**	**0.000043**	**0.960042**	**0.000043**
0.50	**1.621803**	**1.621748**	**0.000033**	**1.621749**	**0.000033**
0.75	**2.542500**	**2.542395**	**0.000041**	**2.542395**	**0.000041**
1.00	**3.795704**	**3.795525**	**0.000047**	**3.795525**	**0.000047**

Not: 2. soru sadece a ve b şıkları üzerinden değerlendirilmiştir.

Soru 3: Diferansiyel denklemi $y'' + y = x$ ve sınır şartları $y(0) = 0,\ y(1) = 0$ ile verilen sınır değer probleminin yaklaşık çözümünü n=2 ve *n=4* olması durumunda sonlu farklar metodu ile bulunuz. Ayrıca diferansiyel denklemin kesin çözümü $y(x) = -\dfrac{\sin(x)}{\sin(1)} + x$ olmak üzere bulduğunuz yaklaşık çözümlerde oluşan bağıl hata miktarlarını hesaplayınız ve sonuçları yorumlayınız. **(30p)**

Çözüm: $x = 0,\ x = 1$ sınır şartları olduğundan çözüm [0, 1] aralığında yapılır.

a) *n=2* durumunu göz önüne alalım. Bu durumda *h=(b-a) /n* olmak üzere *h=0.5* elde edilir. Çözüm aralığının uç noktalarında çözüm değerleri $y(0) = 0,\ y(1) = 0$ sınır şartları olarak tanımladığı için bu değerler $y(0) = y_0 = 0,\ y(1) = y_2 = 0$. O halde $x_{i+1} = x_i + h \Rightarrow x_1 = x_0 + 0.5 \Rightarrow x_1 = 0.5$ olmak üzere bu noktada çözüm bulunacaktır. $y'' + y = x$ denkleminin bu noktada sonlu fark denklemini yazarsak

$y_i'' + y_i = x_i \Rightarrow y_i'' = \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$ olmak üzere $\dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + y_i = x_i$ elde edilir.

i=1 için $x_1 = 0.5$, $y_0 = 0,\ y_2 = 0$ ve *h=0.5* değerleri yerine yazılırsa

$\dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{(0.5)^2} + y_1 = x_1 \Rightarrow \dfrac{0 - 2y_1 - 0}{0.25} + y_1 = 0.5 \Rightarrow y_1 = y(0.5) = -0.07143$ bulunur. Kesin çözüm ise

$y(x) = -\dfrac{\sin(x)}{\sin(1)} + x \Rightarrow y(0.5) = -0.06975$ bulunur. O halde **Bağıl Hata = 0,0241.**

b) n=4 için *h=(b-a) /n* olmak üzere *h=0.25*. $y_0 = 0,\ y_4 = 0$ sınır değerleri olmak üzere y_1, y_2, y_3 bilinmeyenlerdir. $x_{i+1} = x_i + h \Rightarrow x_{i+1} = x_i + 0.25 \Rightarrow x_1 = 0.25,\ x_2 = 0.5,\ x_3 = 0.75$.

Böylece $y'' + y = x$ diferansiyel denklemi bu noktalarda ayrı ayrı yazılmalıdır. Yani *i=1, 2, 3* için

$\dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + y_i = x_i$ eşitliğinden üç bilinmeyenli üç denklem elde edilir. Çözüm noktalarında sınır değerleri de kullanılarak aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir. y_1, y_2, y_3 çözüm değerleri ve her bir çözüm için Bağıl Hatalar aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} -31y_1 + 16y_2 &= 0.25 \\ 16y_1 - 31y_2 + 16y_3 &= 0.5 \\ 16y_2 - 31y_3 &= 0.75 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} -31 & 16 & 0 \\ 16 & -31 & 16 \\ 0 & 16 & -31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.50 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

Denklem sisteminin çözümü, Gauss Eliminasyon yöntemi ile aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{bmatrix} -31 & 16 & 0 \\ 0 & -22.74193 & 16 \\ 0 & 0 & -19.74326 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.62903 \\ 1.19255 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.04427 \\ -0.07015 \\ -0.06040 \end{bmatrix}$$

$$y(0.25) \cong -0.04427 \ ve\ y_{kç}(0.25) = -0.04401 \Rightarrow Bağıl\ Hata = 0.0059$$
$$y(0.5) \cong -0.07015 \ ve\ y_{kç}(0.25) = -0.06975 \Rightarrow Bağıl\ Hata = 0.0057$$
$$y(0.75) \cong -0.06040 \ ve\ y_{kç}(0.25) = -0.06006 \Rightarrow Bağıl\ Hata = 0.0057$$

bulunur.