Samsun Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Yazılım Mühendisliği Bölümü

Nümerik Yöntemler Ara Sınav 2023-Cevap Anahtarı

1) Verilen ifade düzenlenirse $f\left(\theta_0\right)=40\tan\theta_0-\dfrac{9,81}{2.\left(20\right)^2\cos^2\theta_0}40^2+1,8-1$ yazılabilir.

$f\left(30\right)=-2,266,\;\; f\left(40\right)=0,93$

$f\left(30\right)f\left(40\right)<0$ olduğundan $\theta_0=30^o$ **ile** $\theta_0=40^o$ arasında en az bir kök vardır.

İterasyon $\theta_r=\dfrac{30+40}{2}=35$, $f\left(35\right)=-0,4312$

İterasyon $\theta_r=\dfrac{35+40}{2}=37,5$, $f\left(37,5\right)=0,321$, $\left|\varepsilon_a\right|=\left|\dfrac{37,5-35}{37,5}\right|\times100=\%6,67$

İterasyon $\theta_r=\dfrac{35+37,5}{2}=36,25$, $f\left(36,25\right)=-0,039$, $\left|\varepsilon_a\right|=\%3,45$

İterasyon $\theta_r=\dfrac{36,25+37,5}{2}=36,875$, $f\left(36,875\right)=0,145$, $\left|\varepsilon_a\right|=\%1,7$

İterasyon $\theta_r=\dfrac{36,25+37,875}{2}=36,5625$, $f\left(36,5625\right)=0,054$, $\left|\varepsilon_a\right|=\%0,85$

$\theta_0=36,5625$, $\left|\varepsilon_a\right|=\%0,85<\%1$

2) Verilen fonksiyonun türevi, $f'(x)=-\frac{5}{x^2}$ olur. Newton-Raphson yönteminden,

$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ iterasyon formülünü kullanalım. Buradan,

$x_{k+1}=x_k-\frac{\frac{5}{x}-2}{-\frac{5}{x^2}}=2x_k-\frac{2x_k{}^2}{5}$ elde edilir.

$k=0$ için, $x_1=2x_0-\frac{2x_0{}^2}{5}=2.3-\frac{2.3^2}{5}=2{,}4$ olur. $|\epsilon_1|=\left|\frac{2{,}4-3}{2{,}4}\right|.100=25\%$

$k=1$ için, , $x_2=2x_1-\frac{2x_1{}^2}{5}=2.2{,}4-\frac{2.(2{,}4)^2}{5}=2{,}496$ olur. $|\epsilon_2|=\left|\frac{2{,}496-2{,}4}{2{,}496}\right|.100=3{,}8\%$

$k=2$ için, , $x_3=2x_2-\frac{2x_2{}^2}{5}=2.2{,}496-\frac{2.(2{,}496)^2}{5}=2{,}4999$ olur.

$|\epsilon_3|=\left|\frac{2{,}4999-2{,}496}{2{,}4999}\right|.100=0{,}2\%$

3) $f(x) = 4.5x - 2cosx = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{4,5}cosx$ tir.

$g(x) = 0,4444cosx \Rightarrow g'(x) = -0,4444sinx$ tir.

$x_0 = 0,1$ için, $|g'(0,1) = -0,4444\sin(0,1)| = 0,0443 < 1$ dir. Yakınsaklık şartı sağlandığından,

$x = 0,4444cosx$ eşitliği, $x_0 = 0,1$ başlangıç şartı ile iterasyon formülü olarak alınabilir.

Bu iterasyon formülü genelleştirilirse,

$x_{k+1} = 0,4444cosx_k$ olur.

$k = 0$ için, $x_1 = 0,4444.\cos(0,1) = 0,4421$ olur. $|\epsilon_1| = \left|\frac{0,4421-0,1}{0,4421}\right|.100 = 77,4\%$

$k = 1$ için, $x_2 = 0,4444.\cos(0,4421) = 0,4016$ olur. $|\epsilon_2| = \left|\frac{0,4016-0,4421}{0,4016}\right|.100 = 10,1\%$

$k = 2$ için, $x_2 = 0,4444.\cos(0,4016) = 0,4090$ olur. $|\epsilon_3| = \left|\frac{0,4090-0,4016}{0,4090}\right|.100 = 1,8\%$.

4) Verilen denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -8 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 14 \\ -2 & 4 & -2 & -8 \\ 4 & -2 & 8 & 30 \end{bmatrix}$ 1.satırı $a_{11} = 2$ pivotuyla bölersek, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 7 \\ -2 & 4 & -2 & -8 \\ 4 & -2 & 8 & 30 \end{bmatrix}$ olur.

$S_1 + S_2 \rightarrow S_2$ ve $-2S_1 + S_3 \rightarrow S_3$ işlemlerini uyguladığımızda,

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olur. $S_2 + S_1 \rightarrow S_1$ ve $-S_2 + S_3 \rightarrow S_3$ işlemlerini uyguladığımızda,

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ olur. 3. satırı $a_{33} = -1$ pivotuyla bölersek, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ olur.

$-3S_3 + S_1 \rightarrow S_1$ ve $-S_3 + S_2 \rightarrow S_2$ işlemlerini uyguladığımızda, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ olur.

Böylece $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ olarak bulunur.

5) Verilen denklem sistemi

$$Ax = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 15 \end{bmatrix}$$ şeklinde yazılabilir.

A=$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ tür.

A matrisine $S_2 + S_1 \rightarrow S_2$ ve $S_3 - 2S_1 \rightarrow S_3$ işlemlerini uyguladığımızda,

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ olur. $-S_2 + S_3 \rightarrow S_3$ işlemini uyguladığımızda,

$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ olur.

$$A = LU \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ bu eşitlikten,

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ olur.

$Ax = B \Rightarrow LUx = B$ dir. $Ux = y$ dersek, $Ly = B$ olur.

$$Ly = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 15 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{y} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$ olur.

$$Ux = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$ elde edilir.