II. BÖLÜM: ENTERPOLASYON POLİNOMLARI

Pratikte karşılaşılan problemlerin birçoğunda çözüme analitik olarak ulaşılamaz. Bu nedenle bu bölümde, genel olarak verilen bir fonksiyona daha basit fonksiyonların oluşturduğu bir sınıfla yaklaşmaya çalışacağız. Bunun için iki yol izlenir. Birincisi, daha karmaşık yapılı olan fonksiyonları daha basit yapıda olan fonksiyonlarla temsil etmektir. Bu yolla türev, integral gibi işlemler daha kolay şekilde hesaplanır. İkincisi ise, analitik olarak yazılamayıp sadece tablo noktaları ile verilen değerler yardımıyla fonksiyonların tablo noktaları dışındaki ifadelerini ya da bu tür noktalarda fonksiyonla ilgili problemleri çözebilmek için sayısal olarak verilen fonksiyonu analitik olarak ifade etmektir. Bu yollardan birincisine "Fonksiyon Yaklaşımı" ikincisine ise "İnterpolasyon" adı verilir. Her iki yöntemde de en çok kullanılan fonksiyon sınıfları, polinomlar, trigonometrik fonksiyonlar, üstel fonksiyonlar şeklinde verilebilir. Fonksiyonlar sınıfının bir önemli üyesi cebirsel polinomlardır. Yani, n negatif olmayan bir tamsayı $a_0, a_1, \dots, a_n$ ler de reel tanımlı katsayılar olmak üzere

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

şeklinde yazılan polinomlardır. Bu cebirsel yapının önemi ve yukarıdaki gibi seçilişi aşağıda vereceğimiz iki teoremden anlaşılabilir.

Teorem I. Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli bir fonksiyon ise interpolasyon fonksiyonu olarak bir $p_N(x)$ polinomu alınabilir ve bu aralıkta istenilen kadar küçük bir sayı $\varepsilon > 0$ olmak üzere $|f(x) - p_N(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists N$ sayısı daima bulunabilir.

Teorem II. Periyodu 2π olan herhangi bir sürekli fonksiyon için

$$p_N(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

şeklinde bir sonlu trigonometrik açılım interpolasyon polinomu olarak kullanılabilir ve belirli bir n için Teorem I deki eşitsizlik sağlanır.

Yukarıda verilen iki teorem Weierstrass tarafından ispat edilmiş iki teoremin ifadesidir.

Şimdi $(x_i \neq x_j, i \neq j)$ olmak üzere $[a,b]$ kapalı aralığındaki $n+1$ tane farklı $x_0, x_1, \ldots, x_n$ noktalarındaki bir gerçek değerli $f(x)$ fonksiyonun $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$ değerleri belli olsun.

$$p_n(x) = f(x_i)\,, 0 \leq i \leq n \qquad \text{II.1}$$

şartını sağlayan $p_n(x)$ polinomuna $f(x)$ fonksiyonu için $x_0, x_1, \ldots, x_n$ interpolasyon noktalarına göre interpolasyon polinomu denir.

$[a,b]$ aralığında sürekli keyfi $f(x)$ fonksiyonu için derecesi n' den büyük olmayan (**II.1**) şartını sağlayan bir tek interpolasyon polinomu vardır. Gerçekten,

$p_N(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$

ile derecesi n' den büyük olmayan keyfi bir polinom belirlersek, bu durumda bunun $f(x)$ için interpolasyon polinomu olması, (**I.1**)' e göre

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_n x_i^n = f(x_i), i = 0,1,\ldots,n \qquad \text{II.2}$$

şartlarını sağlamasıyla mümkündür. (**II.2**) bağıntıları $a_0, a_1, \ldots, a_n$' e göre lineer cebirsel denklemler sistemidir. Bu sistemin determinantı

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 \ldots & x_1^n \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^2 \ldots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Şeklinde bir Vandermonde determinantıdır ve $(x_i \neq x_j, i \neq j)$ olduğu için determinant sıfırdan farklı olacaktır. Dolayısıyla (II.2) sistemi tek çözüme sahip olacaktır. Yani interpolayon polinomu bir tektir.

İnterpolasyon Polinomları için çeşitli yazılış biçimleri kullanılmaktadır. Bunlardan en fazla kullanılanları Lagrange ve Newton formlarıdır.

Örnek II.1: $[0,1]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Buna göre $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1$ Enterpolasyon noktalarında bir kuadratik polinom oluşturalım. Bu Enterpolasyon polinomu $p_2(x) = (2x-1)(x-1)f(0) + 4x(1-x)f(\frac{1}{2}) + x(2x-1)f(1)$.

Kolayca gösterilebilir ki $p_2(0) = f(0),\ p_2(1/2) = f(1/2),\ p_2(1) = f(1)$. Yukarıdaki yaklaşımı $[0,1]$ aralığında $f(x) = e^x$ için uygulayalım. Bu takdirde,

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= (2x-1)(x-1)e^0 + 4x(1-x)e^{1/2} + x(2x-1)e^1 \\
&= 1 + \left(4e^{1/2} - 3 - e\right)x + 2\left(1 + e - e^{1/2}\right)x^2 \\
&\cong 1 + 0.8766x + 0.8417x^2
\end{aligned}
$$

bulunur.

Özel olarak $x = 0.2$ değeri için ise $p_2(0.2) = 1.2090,\quad f(0.2) = 1.2214$ olduğundan, böylece $p_2(x) - f(x) = p_2(0.2) - f(0.2) = 0.0124$.

Sonuç: Enterpolasyon işlemi $j = 0,1,\ldots,n$ olmak üzere $x \neq x_j$ noktalarında Enterpolasyon polinomunun değerini bulma işlemidir.

II.1. Lagrange Enterpolasyon Polinomu:

$f(x)$ fonksiyonu için $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$ noktalarından geçen bir tek düzgün doğru Enterpolasyonu vardır ve $p_1(x) = \left(\dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) f(x_0) + \left(\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) f(x_1)$ ile belirli olup doğrusal Enterpolasyon olarak adlandırılır.

Tanım 1: Verilen bir $n \geq 1$ tamsayısı ve $n+1$ tane farklı $x_0, x_1, \ldots, x_n$ noktaları için biz $n+1$ tane Lagrange katsayısı tanımlarız. Bu katsayılar

$$
\begin{aligned}
L_r(x) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq r}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_r - x_j}\right), \quad 0 \leq r \leq n \\
&= \left(\frac{x - x_0}{x_r - x_0}\right)\left(\frac{x - x_1}{x_r - x_1}\right)\cdots\left(\frac{x - x_n}{x_r - x_n}\right)
\end{aligned}
$$

eşitliğinden hesaplanır. Burada her bir $L_r(x)$ polinomu n. dereceden polinom olup $\delta_{r,j} = \begin{cases} 1, & r = j \\ 0, & r \neq j \end{cases}$ olmak üzere $L_r(x_j) = \delta_{r,j}$ olarak yazılır. Özel olarak $n = 1$ için biz $L_0(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1}$ ve $L_1(x) = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$ buluruz. Buradan $p_1(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1)$ elde ederiz. Şayet bu işlemi genelleştirirsek n. dereceden Enterpolasyon polinomu $p_n(x) = \sum_{m=0}^{n} L_m(x) f(x_m)$ şeklinde yazılır.

Teklik Teoremi: $n+1$ tane farklı $x_0, x_1, \ldots, x_n$ noktalarında verilen $f(x)$ fonksiyonunun aldığı değerleri alan n. dereceden en fazla bir tek polinom vardır.

İspat: Lagrange formülünün tanımından dolayı biz bu tür bir $p_n(x)$ polinomu oluşturabiliriz. Kabul edelim ki bu tür başka bir polinom $g_n(x)$ olsun. Şimdi $p_n(x) - g_n(x)$ polinomunu göz önüne alalım. $p_n - g_n$ en fazla n. dereceden bir polinom olduğundan dolayı en çok n-tane kökü vardır ve $0 \le j \le n$ olmak üzere $(p_n - g_n)(x_j) = 0$ olmalıdır. Bu ise $p_n - g_n \equiv 0$ olmasını gerektirir. Yani $p_n = g_n$. Böylece Enterpolasyon polinomu tektir.

Örnek2: $f(x)$ fonksiyonu $x = 1, -1, 2$ noktalarında sırasıyla $f = 0, -3, 4$ değerlerini alsın. Bu takdirde verilen değerlere karşılık gelen Enterpolasyon polinomunu bulunuz.

Çözüm:

x	1	-1	2
$f(x)$	0	-3	4

n=2 için tabloda verilen değerler kullanılarak Enterpolasyon polinomu $p_n(x) = \sum_{m=0}^{n} L_m(x) f(x_m)$ formülünden aşağıdaki gibi hesaplanır. İlk önce $L_0(x)$ ve $L_1(x)$ $L_2(x)$ Lagrange katsayılarını hesaplayalım. Buna göre,

$$L_0(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2}\right) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-2), \qquad L_1(x) = \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\right) = \frac{1}{6}(x-1)(x-2), \qquad L_2(x) = \left(\frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) = \frac{1}{3}(x-1)(x+1)$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla,

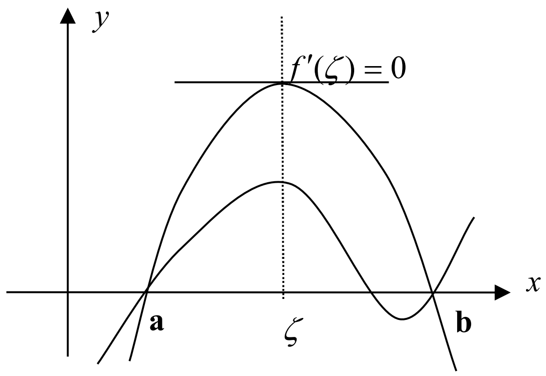
$$\begin{aligned} p_2(x) &= -\frac{1}{2}(x+1)(x-2).0 + \frac{1}{6}(x-1)(x-2).(-3) + \frac{1}{3}(x-1)(x+1).4 \\ &= \frac{1}{6}\left(5x^2 + 9x - 14\right) \end{aligned}$$

ikinci dereceden Enterpolasyon polinomu elde edilir.

II.2. Enterpolasyonun Kesinliği:

Enterpolasyon polinomu ile $f(x)$ fonksiyonunun yaklaşık değeri bulunurken veya hesaplanırken sonucun kesinliği yani doğruluğunun araştırılması çok önemlidir. Bu tip çözümlerde $x \in [a,b]$ olmak üzere Enterpolasyon işleminin hatası $f(x) - p_n(x)$.

Rolle Teoremi: $[a,b]$ kapalı aralığında $f(a)=f(b)=0$ olmak üzere f fonksiyonu sürekli ve (a,b) aralığında f diferansiyellenebilir olsun. Bu takdirde $\zeta \in (a,b)$ için en az bir polinom vardır ki $f'(\zeta)=0$.



Teorem II.2: $x_0,x_1,\ldots,x_n$ noktaları $[a,b]$ aralığında farklı noktalar olsun. $f,f',f'',\ldots,f^{(n)}$ türevleri de bu aralıkta tanımlı ve sürekli olsunlar. Ayrıca $f^{(n+1)}$ de aynı aralıkta tanımlı olmak üzere bu takdirde verilen bir $x \in (a,b)$ noktası için (a,b) aralığında $\exists \zeta_x$ vardır ki $f(x)-p_n(x)=\dfrac{\phi_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\zeta_x)}{(n+1)!}$ şeklinde yazılır. Burada $\phi_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$ ile tanımlı ve $p_n(x)$ ise $x_0,x_1,\ldots,x_n$ noktalarındaki Enterpolasyon polinomudur.

İspat: $x_0,x_1,\ldots,x_n$ noktalarında $f-p_n$ ve ϕ_{n+1} *n+1*-tane köke sahip olduklarından $g(x)=f(x)-p_n(x)+\lambda\phi_{n+1}(x)\ldots$(**1**) yazabiliriz. (Burada $g(x)$ λ ya bağlıdır. Çünkü $f(x)=p_n(x)$). Böylece λ herhangi bir sabit olmak üzere biz $g(x)$ 'i en az *n+2* tane kökü olacak şekilde seçebiliriz. $[a,b]$ aralığındaki $x=\alpha$ noktasında oluşan hatayı $g(\alpha)=0$ olacak şekilde göz önüne alarak λ yı seçelim. Bu takdirde

$0=f(\alpha)-p_n(\alpha)+\lambda\phi_{n+1}(\alpha) \;\Rightarrow\; \lambda=-\dfrac{(f(\alpha)-p_n(\alpha))}{\phi_{n+1}(\alpha)}$ bulunur. λ'nın bu değerini (**1**) denkleminde yerine yazarsak $g(x)=f(x)-p_n(x)-\dfrac{(f(\alpha)-p_n(\alpha))}{\phi_{n+1}(\alpha)}\phi_{n+1}(x)$ elde edilir. $[a,b]$ aralığında $g(x)$ fonksiyonu *n+2* tane köke sahip olup bu kökler $x_0,x_1,\ldots,x_n,\alpha$. Örneğin $[a,b]$ aralığında bunları $x_0, x_1, \alpha,\ldots,x_n$ şeklinde sıralayabiliriz. Bu takdirde *n+1* tane alt aralık $[x_0,x_1],[x_1,\alpha],[\alpha,x_2]\ldots,[x_{n-1},x_n]$ elde edilir ve bunların bitim noktalarında $g(x)$ fonksiyonu sıfır değeri almaktadır. Şimdi *Rolle Teoremini* her bir alt aralık üzerinde $g(x)$ 'e uygularsak (a,b) aralığında $g'(x)$'in en az *n+1* tane kökü bulunur. Farz edelim ki bu kökler $\zeta_0,\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ olsunlar. Şimdi $[\zeta_0,\zeta_1],[\zeta_1,\zeta_2],\ldots,[\zeta_{n-1},\zeta_n]$ şeklinde oluşan *n* tane alt aralığı göz önüne alalım ve buradaki her bir alt aralık üzerinde ***Rolle Teoremini*** tekrar uygulayalım. Bu takdirde $g''(x)$'in (a,b) aralığında en az *n* tane köke sahip olacaktır. ***Rolle Teoreminin*** uygulamasını bu şekilde devam ettirirsek (a,b) aralığında $g^{(n+1)}(x)$'in en az bir tane kökü vardır sonucuna ulaşılır. Bu şekildeki bir kök ζ_x olsun. Yani $g^{(n+1)}(\zeta_x)=0$. Şimdi

$g(x)$ fonksiyonun $n+1$ kere türevlersek $g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \dfrac{(n+1)!}{\phi_{n+1}(\alpha)}\big(f(\alpha) - p_n(\alpha)\big)$ bulunur.

Dolayısıyla ,

$$g^{(n+1)}(\zeta_x) = f^{(n+1)}(\zeta_x) - \frac{(n+1)!}{\phi_{n+1}(\alpha)}\big(f(\alpha) - p_n(\alpha)\big) \Rightarrow f(\alpha) - p_n(\alpha) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta_x)\,\phi_{n+1}(\alpha)}{(n+1)!}$$ elde

edilir. Denklemde α yerine x alınarak ispat tamamlanır.

Not:

$$\begin{aligned}
\Phi_{n+1}(x) &= (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \\
&= x^{n+1} + g_n(x) \\
\Phi'_{n+1}(x) &= (n+1)x^n + g'_n(x) \\
\Phi''_{n+1}(x) &= n(n+1)x^{n-1} + g''_n(x) \\
&\vdots \\
\Phi^{(n+1)}_{n+1}(x) &= (n+1)! + 0
\end{aligned}$$

Örnek3: $x = x_o$ ve $x = x_1$ noktaları arasındaki $f(x)$'in lineer Enterpolasyon için bir önceki teoremden $f(x) - p_n(x) = f''(\zeta_x)\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}$ yazabiliriz. $f(x) = e^x$ fonksiyonu için $x_0 = 0$ ve $x_1 = 1$ noktaları arasındaki lineer Enterpolasyon işleminde $x = \dfrac{1}{2}$ noktasındaki işlemde oluşan hatayı bulalım.

$n = 1,\ x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ f(x) = e^x$ olduğundan $f\left(\tfrac{1}{2}\right) - p_1\left(\tfrac{1}{2}\right) = e^{\zeta_{1/2}}\dfrac{\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}-1\right)}{2} = -\dfrac{1}{8}e^{\zeta_{1/2}}$ ve $\zeta_{1/2} \in (0,1)$ olduğundan dolayı $-\dfrac{1}{8}e < -\dfrac{1}{8}e^{\zeta_{1/2}} < -\dfrac{1}{8}$ olacaktır. Böylelikle işlemde oluşan hata *0.125* ve *0.3398* değerleri arasında bulunur.

II.3 Newton Formülü ve Bölünmüş Farklar:

Tekrar $n+1$ tane $x_0, x_1, \dots, x_n$ farklı noktaları göz önüne alalım ve bu noktalardaki f fonksiyonu için Enterpolasyon polinomu

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

şeklinde yazılır. Şimdi bu denklemin her bir teriminde sırasıyla $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ alınırsa

$$\begin{aligned}
p_0(x_0) &= f(x_0) = a_0 \quad , \\
&= f(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \quad , \\
&\vdots \\
&= f(x_n) = a_0 + a_1(x_n - x_0) + \dots + a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})
\end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklemlerdeki noktalar farklı olduklarından dolayı $a_0, a_1, \dots, a_n$ ler tek bir biçimde tanımlıdırlar. Bu katsayıları a_k olarak göz önüne alırsak, bunların yazılımda sadece $x_0, x_1, \ldots, x_k$ ve $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_k)$ lar vardır. Buna göre $a_0, a_1, \ldots, a_n$ lerin uygun şekilde tanımlanmasıyla bu denklem sistemi çözümlenebilir. Böylece $p_{n+1}(x) = p_n(x) + a_{n+1}\phi_n(x)$ ardışık tekrar bağıntısı elde edilir.

Tanım: a_k katsayısı f fonksiyonunun $x_0, x_1, \ldots, x_k$ noktalarındaki k.bölünmüş farkı olarak adlandırılır ve $a_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ şeklinde yazılır. Şimdi $p_k(x)$ k. dereceden Enterpolasyon polinomu olmak üzere x^k nın katsayıları olan a_k değerlerini $n = 1,2,\ldots,k$ için sırasıyla

$$a_k = f\left[x_0, x_1, \ldots, x_k\right] = \sum_{j=0}^{k}\left\{\frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{l=0\\ l\neq j}}^{k}(x_j - x_l)}\right\}$$

bölünmüş farklar formülünden hesaplayabiliriz. Buna göre,

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_0]}{(x_0 - x_1)} + \frac{f[x_1]}{(x_1 - x_0)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_0)}$$

$$\vdots$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{(x_k - x_0)}$$

elde edilir. Yukarıda elde edilen bölünmüş fark formüllerinin hesaplanması için aşağıdaki tablo bize kolaylık sağlar. Örneğin $k = 3$ için bölünmüş fark formülleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & f[x_0] & & & & \\
 & & f[x_0,x_1] & & & \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_0,x_1,x_2] & & \\
 & & f[x_1,x_2] & & f[x_0,x_1,x_2,x_3] & \\
x_2 & f[x_2] & & f[x_1,x_2,x_3] & & \\
 & & f[x_2,x_3] & & & \\
x_3 & f[x_3] & & & &
\end{array}$$

Buna göre $f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{(x_3 - x_1)}$ eşitliğinden bulunur. Böylece bölünmüş fark formüllerini kullanarak biz Enterpolasyon polinomunu aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&\quad + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})
\end{aligned}$$

Bu formül Newton Formülü olarak adlandırılır. Elde edilen bu formül aslında Lagrange enterpolasyon polinomu yönteminin basit bir şekilde yeniden elde edilmesidir. Gerçekten yukarıdaki formülden $n=1$ için

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0) \\ &= f(x_0)+\left\{\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right\}(x-x_0) \\ &= \frac{(x_1-x_0)f(x_0)+f(x_1)(x-x_0)-f(x_0)(x-x_0)}{x_1-x_0} \\ &= \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)f(x_0)+\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)f(x_1) \\ &= L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1) \end{aligned}$$

elde ederiz. Diğer taraftan bölünmüş farklar formülünün Lagrange formülüne göre en önemli avantajı p_n polinomunun hesaplanması için önceden hesaplanmış olan p_{n-1} polinomuna ekstra bir terimin ilave edilmesi yeterli olacaktır. Çünkü yukarıdaki formülden $p_n(x)=p_{n-1}(x)+f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$ olduğu açıkça görülmektedir.

Ö rnek4: Aşağıdaki tabloda verilen verilere göre bölünmüş farkları oluşturarak Newton Formülü ile kuadratik Enterpolasyon polinomunu oluşturunuz.

x	1	-1	2
$f(x)$	0	-3	4

Aranılan Enterpolasyon polinomu $p_2(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$ formundadır ve bölünmüş farkları tablodan hesaplarsak $i=0,1,2$ için

x_i	$f(x_i)$		
1	0		
		$\frac{-3-0}{-1-1}=\frac{3}{2}$	
-1	-3		$\frac{\frac{7}{3}-\frac{3}{2}}{2-1}=\frac{5}{6}$
		$\frac{4-(-3)}{2-(-1)}=\frac{7}{3}$	
2	4		

Böylece $p_2(x)=0+\frac{3}{2}(x-1)+\frac{5}{6}(x-1)(x+1)=\frac{1}{6}\left[5x^2+9x-14\right]$ olarak elde edilir.

II.4 Eşit Aralıklı Enterpolasyon Noktaları:

$j=0,1,2,\ldots,n$ olmak üzere $(n+1)$ tane farklı Enterpolasyon noktaları h adım uzunluğuna göre $x_j=x_0+hj$ olarak ifade edilir. Buna göre bölünmüş fark formüllerini biz eşit aralıklı noktalar için yeniden yazabiliriz. Örneğin k=3 için bölünmüş farklar

$$
\begin{array}{llccc}
x_0 & f_0 & & & \\
 & & \dfrac{f_1-f_0}{x_1-x_0}=\dfrac{f_1-f_0}{h} & & \\
x_1 & f_1 & & \dfrac{f_2-2f_1+f_0}{2h^2} & \\
 & & \dfrac{f_2-f_1}{x_2-x_1}=\dfrac{f_2-f_1}{h} & & \dfrac{1}{6h^3}\left(f_3-3f_2+3f_1-f_0\right) \\
x_2 & f_2 & & \dfrac{f_3-2f_2+f_1}{2h^2} & \\
 & & \dfrac{f_3-f_2}{x_3-x_2}=\dfrac{f_3-f_2}{h} & & \\
x_3 & f_3 & & &
\end{array}
$$

yazabiliriz. Burada $f(x_0)=f_0,\quad f(x_1)=f_1,\quad f(x_2)=f_2,\quad f(x_3)=f_3$ kullanıldı.

Teorem (Bölünmüş Farklar ve Sonlu Farklar) $f[x_0,x_1,\ldots,x_k]=\dfrac{\Delta^k f(x_0)}{k!h^k}$

İspat: İspatı Tümevarım ile yapacağız.

$k=0$ için $f[x_0]=f(x_0),\ 0!=1$ ve $\Delta^0 f(x_0)=f(x_0)$ olduğundan dolayı teoremin ispatının sağlandığı açıktır. $k=k-1$ için formülün doğru olduğunu kabul edelim. O halde tanımdan

$$
\begin{aligned}
f[x_0,x_1,\ldots,x_k] &= \frac{f[x_1,x_2,\ldots,x_k]-f[x_0,x_1,\ldots,x_{k-1}]}{x_k-x_0} \\
&= \frac{1}{(x_k-x_0)}\left(\frac{\Delta^{k-1}f(x_1)}{(k-1)!h^{k-1}}-\frac{\Delta^{k-1}f(x_0)}{(k-1)!h^{k-1}}\right) \\
&= \frac{1}{hk}\frac{\Delta^{k-1}}{(k-1)!h^{k-1}}\left(f(x_1)-f(x_0)\right) \\
&= \frac{\Delta^{k-1}}{k!h^k}\left(f(x_1)-f(x_0)\right) \\
&= \frac{\Delta^{k-1}}{k!h^k}\left(\Delta f(x_0)\right) \\
&= \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!h^k}
\end{aligned}
$$

dolayı

elde edilir. Newton Formülünü eşit aralıklı noktalar için daha basit bir şekilde yazalım. Şöyle ki , s reel bir değişken olmak üzere $x = x_0 + sh$ alalım. Böylece

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k]\phi_k(x) = \frac{1}{k!h^k}\Delta^k f(x_0)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})$$

yazabiliriz. Burada $x - x_j = (x_0 + sh) - (x_0 + jh) = (s - j)h$ olduğundan

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, \ldots x_k]\phi_k(x) &= \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!h^k}(sh)((s-1)h)\ldots((s-(k-1))h) \\ &= \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!}s(s-1)\ldots(s-k+1) \\ &= \Delta^k f(x_0)\binom{s}{k} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $p_n(x)$ Enterpolasyon polinomu için Newton *ileri fark formülü* ile aşağıdaki eşitliğe ulaşabiliriz.

$$\begin{aligned} p_n(x_0 + sh) &= f(x_0) + \Delta f(x_0)\binom{s}{1} + \Delta^2 f(x_0)\binom{s}{2} + \cdots + \Delta^n f(x_0)\binom{s}{n} \\ &= f(x_0) + s\Delta f(x_0) + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \cdots + \frac{s(s-1)\ldots(s-(n-1))}{n!}\Delta^n f(x_0) \end{aligned}$$

Şayet Enterpolasyon polinomunu bulma işleminde oluşan hata terimini de $\zeta_x \in (a,b)$ olmak üzere formüle ilave edersek,

$$f(x_0 + sh) = \sum_{k=0}^{n}\Delta^k f(x_0)\binom{s}{k} + h^{n+1}\binom{s}{n+1}f^{(n+1)}(\zeta_x)$$

elde edilir.

Benzer şekilde yukarıda yapılan işlemler $x = x_n + sh$ olmak üzere geri fark operatörü cinsinden bölünmüş farklar $f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \dfrac{\nabla^k f(x_k)}{h^k k!}$ şeklinde yazılır ve bu formül kullanılarak

$$\begin{aligned} p_n(x_n + sh) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{-s}{k}\nabla^k f(x_k) \\ &= f(x_n)s\nabla f(x_n) + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f(x_n) + \cdots + \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f(x_n) \end{aligned}$$

şeklinde enterpolasyon polinomu bulunabilir.

Kalan terimi ise $R_n = \dfrac{h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}s(s+1)\ldots(s+n)$ ile hesaplanır.

Bu formüle $p_n(x)$ Enterpolasyon polinomu için Newton *geri fark formülü* denir.

Örnek5: $x = 0.63$ noktasında $\sin x$ fonksiyonunun yaklaşık değerini tabloda verilen değerleri kullanarak ileri fark formülünden hesaplayınız ve sonucun doğruluğunu kontrol ediniz.

x	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\sin x$	0.564642	0.644218	0.717356	0.783327	0.841771

Çözüm: Çözüm için tablo yöntemini kullanırsak 4.dereceden Enterpolasyon polinomunun değeri aşağıdaki gibi bulunur.

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0.6	0.564642				
		0.079576			
0.7	0.644218		-0.006438		
		0.073138		-0.000729	
0.8	0.717356		-0.007167		0.000669
		0.065971		-0.000660	
0.9	0.783327		-0.007527		
		0.058444			
1.0	0.841771				

Şimdi $h = 0.1$,$x_0 = 0.6$,$n = 4$ ve $x = x_0 + sh$ alarak sonucu işlemde oluşan hatayı bularak değerlendirelim. Buna göre $0.63 = 0.6 + s.(0.1) \Rightarrow s = 0.3$ elde edilir. O halde

$p_4(0.63) = Sin(0.63) \cong \sum_{k=0}^{4} \binom{0,3}{k} \Delta^k \sin(0.6) \cong 0.589145$ olur. Ayrıca,

$\zeta_x \in (0.6,1)$ olmak üzere $E = (0.1)^5 \binom{0.3}{5} f^{(5)}(\zeta_x) = (0.1)^5 \dfrac{(0.3)(-0.7)(-1.7)(-2.7)(-3.7)}{5!} \cos\zeta_x$

bu işlemde oluşan hata değerinin $Cos\zeta_x$ mutlak değerce 1'den büyük olamayacağı için $0.297 * 10^{-6}$ dan büyük olmadığı görülür. Böylece 6 ondalık basamak için sonucun doğruluğu görülmüş olur.

Not: $\binom{0.3}{0} = 1, \binom{0.3}{1} = 0.3, \binom{0.3}{2} = \dfrac{0.3(-0.7)}{2!}$ $vd....$

II.5 Hermit İnterpolasyon Polinomu

Tekrar $n+1$ tane farklı $x_0, x_1, \ldots, x_n$ enterpolasyon noktalarını göz önüne alalım ve bu noktalardaki $f(x)$ fonksiyonu ile $f'(x)$ türevinin değerleri biliniyor olsun. Böylece biz $2(n+1)$ tane değere sahip olacağız. Bu şekilde fonksiyonun ve birinci türevinin değerlerinin kullanılmasıyla kurulan polinoma Hermit Enterpolasyon polinomu denir. Şimdi $2n+1$. dereceden bir Hermit polinomunun nasıl kurulacağını görelim. Bunun için $x_0, x_1, \ldots, x_n$ şeklinde $(n+1)$ tane farklı nokta alalım. Bu takdirde bu noktalarda

$H(x_i)=f(x_i)$, $H'(x_i)=f'(x_i)$, $(i=0\ldots n)$ değerleri ile $2n+1$. dereceden bir Hermit enterpolasyon polinomu tanımlanabilir ve bu polinom tektir.

Teorem: Eğer $x_0,x_1,\ldots,x_n$ noktaları $[a,b]$ aralığında farklı noktalar, $f(x)$ fonksiyonu da $2n+2$ dereceden sürekli türevlere sahip ve $H(x_i)=f(x_i)$, $H'(x_i)=f'(x_i)$, $(i=0\ldots n)$ olacak şekilde $2n+1$. dereceden polinom Hermit polinomu olmak üzere, bu takdirde $x\in[a,b]$ için $a<\xi_x<b$ şartını sağlayan en az bir ξ sayısı için,

$$f(x)-H(x)=\frac{[\Phi_{n+1}(x)]^2}{(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\xi_x)$$

eşitliği vardır.

İspat: İspat Lagrange enterpolasyon polinom konusunda olduğu gibi benzer şekilde yapılır. Bunun için $g(x)=f(x)-H(x)+\lambda[\Phi_{n+1}(x)]^2$ seçiniz.

Örnek: $f(x)$ ve $f'(x)$ fonksiyonlarını $x=0$ ve $x=1$'de enterpole edecek şekilde bir polinom $H(x)=f(0)p(x)+f(1)q(x)+f'(0)r(x)+f'(1)s(x)$ ise, bu takdirde $p(x),q(x),r(x)$ ve $s(x)$ kübik polinomlarını bulunuz.

İlk olarak biz p,q,r ve s polinomlarını aşağıdaki eşitlikleri sağlıyacak şekilde seçmeliyiz. Bu eşitlikler;

$$H(0)=f(0):\quad p(0)=1,\quad q(0)=r(0)=s(0)=0$$
$$H(1)=f(1):\quad p(1)=0,\quad q(1)=1,\quad r(1)=s(1)=0$$
$$H'(0)=f'(0):\quad p'(0)=q'(0)=0,\quad r'(0)=1, s'(0)=0$$
$$H'(1)=f'(1):\quad p'(1)=q'(1)=r'(1)=0, s'(1)=1$$

O halde $p'(x)=ax(x-1)$ olarak seçilebilir. Böylece a,b sabitler olmak üzere $p(x)=\frac{ax^3}{3}-\frac{ax^2}{2}+b$. Buradan yukarıdaki şartlar gereği $p(0)=1\Rightarrow b=1$ ve $p(1)=0\Rightarrow a=6$ elde edilir. Yani $p(x)=2x^3-3x^2+1=(1-x)^2(1+2x)$ bulunur. Benzer şekilde diğer polinomlar da bulunabilir.

II.6 Fonksiyon Yaklaşımı ile İnterpolasyon Polinomları

Cebirsel polinomlarla interpolasyon, uygulamadaki kolaylık açısından en sık kullanılan interpolayon kuralıdır. Eğer fonksiyon analitik olarak verilmiş ise belli bir aralıkta bu fonksiyonun polinom yaklaşımını kullanmak fonksiyonun kendisini kullanmaktan daha yararlı olabilir. Fakat keyfi bir fonksiyon verildiğinde fonksiyon yerine daha basit fonksiyonlardan oluşmuş bir fonksiyonlar cümlesi de kullanılabilir. Bu nedenle yaklaşım verilen bir fonksiyonun başka tür fonksiyonlarla yer değiştirmesi olarak tanımlanabilir. Şimdi bu yaklaşımlardan, verilen fonksiyonun Taylor serisi ve Chebyshew açılımı ile fonksiyon yaklaşım metotlarını vereceğiz.

II.6.1 Taylor Serisi ile Fonksiyon Yaklaşımı

Analiz derslerinden bilindiği üzere

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

$$Sinx = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

ifadelerini yazabiliriz. Burada açılımdaki bütün terimleri yazamayacağımız için, istenilen duyarlılığa göre açılımı belli bir yerde durdurmak gerekir. Bu yüzden de açılımda bir kesme hatası meydana gelmektedir. Kesme hatasını $R_n = \frac{1}{n!}x^n f^{(n)}(\zeta_x)$ formülünden $f(x) = e^x$ için $\frac{x^n}{n!}e^{\zeta_x}$ olarak buluruz.

Taylor açılımı ile fonksiyon yaklaşımının bazı dezavantajları vardır. Bunlardan en önemlisi serinin istenen sonuçtan ıraksaması, hata dağılımın düzensiz olması ve yakınsama için fazla terim gerektirmesidir. Bunun için daha iyi metotlara ihtiyaç vardır. Bunların en kullanışlı olanlarından birisi Chebyshew Polinomları metodudur.

II.6.2 Chebyshew Polinomları ile Fonksiyon Yaklaşımı

Bu metotta verilen fonksiyon Chebyshew Polinomları ile temsil edilir ve aşağıdaki özellikler mevcuttur.

1. Verilen fonksiyonu temsil edecek yaklaşım Taylor açılımından daha küçük dereceli bir polinom olmalı,
2. Hata miktarı x ' in değiştiği aralığa eşit miktarda yayılmalı,
3. Gereken duyarlılık derecesini vermelidir.

Bu nedenle x değişkenini kolaylık olması açısından $[-1,1]$ aralığında alacağız.

Tanım: $-1 \le x \le 1, -\pi \le \theta \le \pi, x = Cos\theta$ olmak üzere $T_n(x) = Cos(n \arccos x) = Cosn\theta$ şeklinde verilen $T_n(x)$ ifadelerine birinci cins Chebyshew Polinomları denir. Buna göre;

$n = 0$ ise $T_0(x) = 1$

$n = 1$ ise $T_1(x) = x = Cos\theta$

$n = 2$ ise $T_2(x) = Cos2\theta = Cos^2\theta - Sin^2\theta = 2x^2 - 1$

elde edilir. Şimdi genel olarak ifade edebileceğimiz ardışık tekrar formülünü bulalım. Tanıma göre

$$T_{n+1}(x) = Cos(n+1)\theta = Cosn\theta.Cos\theta - Sinn\theta.Sin\theta$$
$$T_{n-1}(x) = Cos(n-1)\theta = Cosn\theta.Cos\theta + Sinn\theta.Sin\theta$$

olduğundan bu ifadeleri taraf tarafa toplarsak

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2Cos\theta.Cosn\theta = 2x.T_n(x) \qquad \text{II6.1}$$

ardışık tekrar formülü bulunur. Bu formül yardımıyla diğer Chebyshew Polinomları bulunabilir. Bu polinomlar ve x'in monomialleri $T_n(x)$'in fonksiyonları olarak aşağıdaki tabloda verilmiştir.

$T_0(x)=1$	$1=T_0(x)$
$T_1(x)=x$	$x=T_1(x)$
$T_2(x)=2x^2-1$	$x^2=\frac{1}{2}(T_0+T_2)$
$T_3(x)=4x^3-3x$	$x^3=\frac{1}{4}(3T_1+T_3)$
$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$	$x^4=\frac{1}{8}(3T_0+4T_2+T_4)$
$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$	$x^5=\frac{1}{16}(10T_1+5T_3+T_5)$
$\vdots$	$\vdots$

Örnek: $f(x)=e^x$ fonksiyonu için dördüncü dereceden en iyi polinom yaklaşımını bulunuz.
Çözüm: Dördüncü dereceden en iyi yaklaşım için beşinci dereceye kadar Taylor açılımını ele alalım. $f(x)=e^x$ fonksiyonunun Taylor seri açılımı,

$$f(x)=e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+...$$

şeklindedir. Şimdi Chebyshev polinomu ile yaklaşım yapalım.

$$1=T_0$$

$$x=T_1$$

$$x^2=\frac{1}{2}(T_0+T_2)$$

$$x^3=\frac{1}{4}(T_3+3T_1)$$

$$x^4=\frac{1}{8}(3T_0+4T_2+T_4)$$

$$x^5=\frac{1}{16}(10T_1+5T_3+T_5)$$

ifadeleri Taylor seri açılımında yerine yazılırsa,

$$f(x)=\frac{81}{64}T_0+\frac{217}{192}T_1+\frac{13}{48}T_2+\frac{17}{384}T_3+\frac{1}{192}T_4+\frac{1}{1920}T_5$$

elde edilir. T_5'li terim ihmal edilirse ve T_0, T_1, T_2, T_3 ve T_4 ifadeleri yerine yazılırsa,

$$f(x)=1+\frac{383}{384}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{17}{96}x^3+\frac{1}{24}x^4$$

bulunur. Şimdi $x=1$ değeri için sonuçları karşılaştıralım.

Taylor açılımı için $x=1$ alırsak $f(1)=2,708332$, Chbyshev polinomu için $x=1$ alırsak $f(1)=2,716144$ ve tam çözüm için $f(1)=2,718281$ bulunur.