T.C.

SAMSUN ÜNİVERSİTESİ

MÜHENDİSLİK ve DOĞA BİLİMLERİ FAKÜLTESİ

YAZILIM MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

OMAT301 NÜMERİK YÖNTEMLER DÖNEM SONU SINAV CEVAP ANAHTARI

Adı: **Soyadı:** **No:**

1) Bir A sayısının n. kuvvetten kök değerini Newton-İterasyon metodu ile bulan formülü çıkarınız ve buna göre $x_0 = 1$ başlangıç değeri için $\sqrt{3}$ ün yaklaşık değerini hesaplayıp sonucu yorumlayınız. **(15p)**

$$x = \sqrt[n]{A} \Rightarrow f(x) = x^n - A \Rightarrow f^{-1}(x) = nx^{n-1}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x)} = x_i - \frac{x_i^n - A}{n x_i^{n-1}}$$

$$x_{i+1} = \frac{(n-1)x_i^n + A}{n x_i^{n-1}}$$

burada n=2 alınmalıdır. Böylece;

$$f(x) = x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow x_{i+1} = \frac{x_i^2 + 3}{2x_i}$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = \frac{1^2 + 3}{2 \cdot 1} = 2$$

$$x_2 = \frac{2^2 + 3}{2 \cdot 2} = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$x_3 = 1,73214$$

$$x_4 = 1,73204$$

elde edilir. Gerçek sonuç ise x=1.73205 olmak üzere yaklaşım sağlanır.

2) $(1,6),(2,3) ve (3,2)$ noktalarından geçen polinom denklemini (lineer denklem sistemi oluşturarak) bulunuz. **(20p)**

(1, 6), (2, 3) ve (3, 2) noktalarından geçen polinom denklemi 2. derecedendir.

$y(x) = ax^2 + bx + c$ *olmak üzere*

$(1, 6)$ *noktasında* $y(x) = a(1)^2 + b(1) + c = 6$

$\Rightarrow a + b + c = 6$

$(2, 3)$ *noktasında* $y(x) = a(2)^2 + b(2) + c = 3$

$\Rightarrow 4a + 2b + c = 3$

$(3, 2)$ *noktasında* $y(x) = a(3)^2 + b(3) + c = 2$

$\Rightarrow 9a + 3b + c = 2$

Denklem sistemi 3 bilinmeyenli 3 denklemden oluşur ve matris formunda

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

olarak bellidir. Çözümü Gauss-Jordan ile gerçekleştirirsek,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 4 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 9 & 3 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 = r_2 - 4r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -2 & -3 & \vdots & -21 \\ 9 & 3 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -2 & -3 & \vdots & -21 \\ 9 & 3 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 = r_3 - 9r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -2 & -3 & \vdots & -21 \\ 0 & -6 & -8 & \vdots & -52 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -2 & -3 & \vdots & -21 \\ 0 & -6 & -8 & \vdots & -52 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 = r_3 - 3r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -2 & -3 & \vdots & -21 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -2 & -3 & \vdots & -21 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 = r_2 + 3r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 6 \\ 0 & -2 & 0 & \vdots & 12 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 6 \\ 0 & -2 & 0 & \vdots & 12 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 = r_1 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & -5 \\ 0 & -2 & 0 & \vdots & 12 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & -5 \\ 0 & -2 & 0 & \vdots & 12 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 = -\frac{r_2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & -5 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & -5 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 = r_1 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 11 \end{bmatrix}$$

$a = 1$

$b = -6$

$c = 11$

Böylece aranılan polinom denklemi $p_2(x) = x^2 - 6x + 11$ olarak bulunur.

3)

x_i	1	4	5	8	10
y_i	2	-5	-20	1	3

Bir haberleşme hattında, alıcı uçta alınan sıkıştırılmış ayrık veriler tablodaki gibidir. Bu verilere göre **Newton interpolasyon** yöntemiyle, 2. dereceden bir polinom uydurup, $x = 2$ noktasında gönderilen bilginin alıcı uçta hangi değeri aldığını bulunuz. **(15p)**

x_i	y_i	1.Bölünmüş Fark	2.Bölünmüş Fark
1	2	$\frac{-5-2}{4-1} = -2.3333$	$\frac{-15+2.33}{5-1} = -3.1675$
4	-5	$\frac{-20+5}{5-4} = -15$	$\frac{7+15}{8-4} = 5.5$
5	-20	$\frac{1+20}{8-5} = 7$	$\frac{1-7}{10-5} = -1.2$
8	1	$\frac{3-1}{10-8} = 1$	
10	3		

İkinci dereceden polinom;

$$f(x) = 2 - 2.3333(x-1) - 3.1675(x-1)(x-4)$$

$x = 2$ için,

$$f(2) = 2 - 2.3333 - 3.1675(2-4)$$

$$f(2) = 6.0017$$

bulunur.

4) $\int_0^2 e^{-3x}\,\mathrm{Sin}\,3x dx$ integralinin yaklaşık değerini birleşik yamuk kuralından sırasıyla $h = 1/2 \quad ve \quad h = 1/4$ alarak dört ondalık basamak için bulunuz

a. Sonuçları gerçek çözüm ile karşılaştırınız,

b. İki ondalık basamak içeren sonucun doğruluğu için kaç tane alt aralığa ihtiyaç vardır.

c. $h = 1/2 \quad ve \quad h = 1/4$ için bulduğunuz sonuçları kullanarak Romberg Integral kuralı ile daha hassas bir yaklaşık çözüm bulunuz. **(30p)**

Birleşik Yamuk (Trapez) kuralı:

$$h = \frac{1}{2} \ \text{için}$$

$$Q(t) = \frac{h}{2}\{f(x_0) + f(x_n)\} + h\{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})\}$$

$$= \frac{1}{4}\{f(0) + f(2)\} + \frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right)\right\} = 0.109$$

$$h = \frac{1}{4} \ \text{için}$$

$$Q(t) = \frac{h}{2}\{f(0) + f(2)\} + h\left\{f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\{f(0) + f(2)\} + \frac{1}{4}\left\{f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right)\right\} = 0.1512$$

h değeri küçüldükçe gerçek çözüme hızlı bir yakınsama olur.

2 ondalık basamak içeren sonucun doğruluğu için ihtiyaç duyulan alt aralık seviyesinin tespiti;

$$|E(t)| = \frac{1}{2}10^{-2}, \ k = \frac{(b-a)}{12} sup_{0 \le x \le 2}|f''(x)|$$

$$=> f'(x) = e^{-3x}[\cos 3x - \sin 3x]$$

$$=> f''(x) = -18e^{-3x} \cdot \cos 3x$$

$$k = \frac{2}{12} sup_{0 \le x \le 2}|18 \cdot e^{-3x} \cdot \cos 3x| = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3$$

$$kh^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} => h^2 = \frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}}{3} => h = \left[\frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}}{3}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$nh = b - a => n = \frac{(b-a)}{h} = \frac{2}{\left(\frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}}{3}\right)^{\frac{1}{2}}} = 48.989$$

$$n \le 49$$

$n \leq 49$ değeri I(f)'nin yaklaşık çözümünü iki ondalık basamak için garanti eder.

Gerçek çözüm ise,

$$\int_0^2 e^{-3x}\sin(3x)\,dx = \frac{1}{6} - \frac{\sin(6)+\cos(6)}{6e^6} \approx 0.16639$$

bulunur.

$$\left.\begin{array}{l} h = \dfrac{1}{2} \rightarrow Q(t) = 0.109 \\ \\ h = \dfrac{1}{4} \rightarrow Q(t) = 0.1512 \end{array}\right\} \rightarrow \textit{Romberg Interpolasyon Metodundan}$$

$$\int_0^2 e^{-3x}\sin 3x dx \cong \frac{1}{3}\left[4\cdot(0.1512) - 0.109\right] = 0.165266$$

Görüldüğü üzere gerçek çözüme en yakın sonuç Romberg Integrasyon ile elde edilmektedir.

5) $\frac{dy}{dx} = -2y - 16$ diferansiyel denklemini, başlangıç şartlarını $x_0 = 0$ ve $y_0 = 0$ alarak, $x = 1.5$ noktasındaki sayısal çözümünü **Euler** yöntemi ile $h = 0.5$ alarak üç iterasyonda bulunuz ve $x = 1.5$ noktasındaki bağıl hatayı hesaplayınız. **(20p)**

$f(x_i, y_i) = -2y_i - 16$ dır.

Euler yönteminden, iterasyon formülü;

$$y_{i+1} = y_i + 0.5.(-2y_i - 16)$$

dır. $i = 0$ için,

$$y_1 = y_0 + 0.5.(-2y_0 - 16) = 0 + 0.5.(-2.(0) - 16) = -8$$

$i = 1$ için,

$$y_2 = y_1 + 0.5.(-2y_1 - 16) = -8 + 0.5.(-2.(-8) - 16) = -8$$

$i = 2$ için,

$$y_3 = y_2 + 0.5.(-2y_2 - 16) = -8 + 0.5.(-2.(-8) - 16) = -8$$

bulunur. Gerçek çözüm ise,

$$\frac{dy}{dx} = -2y - 16$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y+8} = \int -2dx$$

$$\Rightarrow \ln(y+8) = -2x + c$$

$$\Rightarrow \mathrm{y} = \mathrm{e}^{-2x+c} - 8$$

$$y(0) = 0 \text{ ile, } 8 = \mathrm{e}^{c} \Rightarrow c = \ln(8) \Rightarrow c = 2.0794$$

$$\Rightarrow \mathrm{y} = \mathrm{e}^{-2x+2.0794} - 8\,.$$

$x = 1.5$ noktasındaki değer ise,

$$\mathrm{y} = \mathrm{e}^{-3+2.0794} - 8 \Rightarrow \mathrm{y} = \mathrm{e}^{-0.9206} - 8 = 0.3982 - 8 = -7.6018$$

bulunur.

Bağıl hata;

$$\left|\frac{-7.6018 - (-8)}{-7.6018}\right| = 5.23\%$$

bulunur.

Not: Virgülden sonra altı hane alınız. Sınav süresi **120 dakika** olup, ilk **30 dakika** sınavdan çıkılmayacaktır. Sınavınızda başarılar dilerim. **16.01.2024**

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR