Bölüm 3

Lineer ve Lineer Olmayan Denklem Sistemlerin Çözümü

3.1 Giriş

Bu bölümde n bilinmeyenli n lineer cebirsel denklem sistemlerinin çözümünü sunacağız. Lineer denklem sistemleri, birçok mühendislik ve fenbilimleri problemleri, yanı sıra, sosyal bilimler, iş ve ekonomi problemlerinin matematiksel uygulamaları ile ilişkilidir.

Cebirsel denklemlerin bir sistemi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{3.1}$$

formunda ele alalım. Burada a_{ij} katsayıları ve b_i sabitleri bilinenler ve x_i bilinmiyenleri temsil etmektedir. Matris notasyonunda, denklemleri

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ya da

$$AX = B$$

biçiminde yazabiliriz. Lineer Cebir ve Matematik derslerinde denklem sistemlerinin doğrudan çözüm yöntemleri verildi. Bu dersde n bilinmiyenli n tane denklemin çözüm vektörünü dolaylı yoldan, yaklaşık olarak bulabilmek için yöntemler vereceğiz. Vereceğimiz yöntemler şunlardır.

1. Jacobi İterasyon Yöntemi
2. Gauss-Seidel Yöntemi
3. S.O.R (Successive over Relaxation) Yöntemi

3.2 Jacobi İterasyon Yöntemi

Lineer denklem sistemlerinin çözümünde denklem sistemi oldukça büyük ise Matris işlemleri kullanılarak yok etme metodlarının kullanılması yapılan temel aritmetik işlemlerin çokluğundan dolayı tercih edilmezler. Bu durumda iterasyon yöntemleri tercih edilir. Yöntemde çözümlere bir başlangıç tahmininde bulunulur ve denklemlerde yerine konularak yeni tahmin değerleri bulunur. İşlemler bir birini takip eden yaklaşık değerler arasında mutlak fark çok küçük oluncaya kadar devam eder.

Bu yöntem aynı zamanda eş zamanlı olarak yer değiştirme yöntemi olarak bilinir. Basit ve anlaşılabilir olması açısından denklem (3.1) de $n = 3$ alalım, yani üç bilinmiyenli üç denklem sistemini ele alalım. Bu denklem sistemi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

olsun. Burada, a_{11}, a_{22} ve a_{33} katsayıları ilgili denklemlerin en büyük katsayıları olduğunu varsayıyoruz, bu varsayım yöntemin çözülebilirlik yada yakınsama şartıdır. Yani;

$$\begin{aligned} |a_{11}| &> |a_{12}| + |a_{13}| \\ |a_{22}| &> |a_{21}| + |a_{23}| \\ |a_{33}| &> |a_{31}| + |a_{32}| \end{aligned} \tag{3.2}$$

Jacobi iterasyon yöntemi, denklem (3.2)'de verilen koşullar yerine getirildiği durumunda geçerlidir.

Bu denklem sistemini

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(n)} - a_{13}x_3^{(n)}\right) \\ x_2^{(n+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(n)} - a_{23}x_3^{(n)}\right) \\ x_3^{(n+1)} &= \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(n)} - a_{32}x_2^{(n)}\right) \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada üstel (n) gösterimi n. ci iterasyondaki değerini belirtmektedir. Üstün (0) olması durumu x_i lerin başlangıç değerini ifade etmektedir.

Yukarıdaki iterasyon şemasını $(N \times N)$ lik bir sisteme genelleştirirsek formül:

$$x_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left\{b_i - \left(\sum_{j=1}^{j=i-1} a_{ij}x_j^{(n)} + \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij}x_j^{(n)}\right)\right\}, \quad i = 1, \ldots, N \tag{3.3}$$

ile verilir.

Örnek:

$$\begin{aligned} 15x + 3y - 2z &= 85 \\ 2x + 10y + z &= 51 \\ x - 2y + 8z &= 5 \end{aligned}$$

sistemini Jocobi iterasyon yöntemi ile çözünüz.

Çözüm: Yukarıdaki denklem için

$$\begin{aligned} |15| &> |3| + |-2| \\ |10| &> |2| + |1| \\ |8| &> |1| + |-2| \end{aligned}$$

şartlar üç denklem içinde sağlamaktadır. Şimdi Jakobi yöntemini uygulayalım:

$$x^{(n+1)} = \frac{1}{15}\left(85 - 3y^{(n)} + 2z^{(n)}\right)$$
$$y^{(n+1)} = \frac{1}{10}\left(51 - 2x^{(n)} - z^{(n)}\right)$$
$$z^{(n+1)} = \frac{1}{8}\left(5 - x^{(n)} + 2y^{(n)}\right)$$

başlangıç şartı önceden verilmediğinden $x^{(0)} = 0,\ y^{(0)} = 0,\ z^{(0)} = 0$ olsun.

1. *İterasyon:*

$$x^{(1)} = \frac{85}{15} = \frac{17}{3}$$
$$y^{(1)} = \frac{51}{10}$$
$$z^{(1)} = \frac{5}{8}$$

2. *İterasyon:*

$$x^{(2)} = \frac{1}{15}\left(85 - 3 \times \frac{51}{10} + 2 \times \frac{5}{8}\right) = 4.73$$
$$y^{(2)} = \frac{1}{10}\left(51 - 2 \times \frac{17}{3} - \frac{5}{8}\right) = 3.90417$$
$$z^{(2)} = \frac{1}{8}\left(5 - \frac{17}{3} + 2 \times \frac{51}{10}\right) = 1.19167$$

3. *İterasyon:*

$$x^{(3)} = \frac{1}{15}(85 - 3 \times 3.90417 + 2 \times 1.19167) = 5.04472$$
$$y^{(3)} = \frac{1}{10}(51 - 2 \times 4.73 - 1.19167) = 4.03483$$
$$z^{(3)} = \frac{1}{8}(5 - 4.73 + 2 \times 3.90417) = 1.00979$$

4. *İterasyon:*

$$x^{(4)} = \frac{1}{15}(85 - 3 \times 4.03483 + 2 \times 1.00979) = 4.99434$$
$$y^{(4)} = \frac{1}{10}(51 - 2 \times 5.04472 - 1.00979) = 3.99008$$
$$z^{(4)} = \frac{1}{8}(5 - 5.04472 + 2 \times 4.03483) = 1.00312$$

5. *İterasyon:*

$$x^{(5)} = \frac{1}{15}(85 - 3 \times 3.99008 + 2 \times 1.00312) = 5.0024$$
$$y^{(5)} = \frac{1}{10}(51 - 2 \times 4.99434 - 1.00312) = 4.00082$$
$$z^{(5)} = \frac{1}{8}(5 - 4.99434 + 2 \times 3.99008) = 0.998227$$

6. *İterasyon:*

$$x^{(6)} = \frac{1}{15}(85 - 3 \times 4.00082 + 2 \times 0.998227) = 4.9996$$
$$y^{(6)} = \frac{1}{10}(51 - 2 \times 5.0024 - 0.998227) = 3.9997$$
$$z^{(6)} = \frac{1}{8}(5 - 5.0024 + 2 \times 4.00082) = 0.999905$$

9. İterasyon:

$$x^{(9)} = 5.0$$
$$y^{(9)} = 4.0$$
$$z^{(9)} = 1.0$$

Örnek:

$$3x + y - z = 2$$
$$x + 4y + z = 12$$
$$2x + y + 2z = 10$$

sistemini $x^{(0)} = 1,\ y^{(0)} = 1,\ z^{(0)} = 1$ başlangıç değerleriyle, Jocobi iterasyon yöntemi ile çözünüz.

Çözüm: Yukarıdaki denklem için

$$|3| > |1| + |-1|$$
$$|4| > |1| + |1|$$
$$|2| < |2| + |1|$$

şartlar iki denklem için sağlamakta fakat son denklem için sağlamamaktadır buda çözümü yavaşlatacak ama çözüme engel olmayacaktır. Fakat denklemlerin çoğunda bu durum olsaydı o zaman muhtemelen yakınsama olmayacaktı. Şimdi Jakobi yöntemini uygulayalım:

$$x^{(n+1)} = \frac{1}{3}\left(2 - y^{(n)} + z^{(n)}\right)$$
$$y^{(n+1)} = \frac{1}{4}\left(12 - x^{(n)} - z^{(n)}\right)$$
$$z^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(10 - 2x^{(n)} - y^{(n)}\right)$$

başlangıç şartı $x^{(0)} = 1,\ y^{(0)} = 1,\ z^{(0)} = 1$ dir.

1. İterasyon:

$$x^{(1)} = \frac{1}{3}(2 - 1 + 1) = 0.666667$$
$$y^{(1)} = \frac{1}{4}(12 - 1 - 1) = 2.5$$
$$z^{(1)} = \frac{1}{2}(10 - 2 \times 1 - 1) = 3.5$$

2. İterasyon:

$$x^{(2)} = \frac{1}{3}(2 - 2.5 + 3.5) = 1.0$$
$$y^{(2)} = \frac{1}{4}(12 - 0.666667 - 3.5) = 1.95833$$
$$z^{(2)} = \frac{1}{2}(10 - 2 \times 0.666667 - 2.5) = 3.08333$$

3. İterasyon:

$$x^{(3)} = \frac{1}{3}(2 - 1.95833 + 3.08333) = 1.04167$$
$$y^{(3)} = \frac{1}{4}(12 - 1.0 - 3.08333) = 1.97917$$
$$z^{(3)} = \frac{1}{2}(10 - 2 \times 1.0 - 1.95833) = 3.02084$$

4. *İterasyon:*

$$x^{(4)} = \frac{1}{3}(2 - 1.97917 + 3.02084) = 1.01389$$
$$y^{(4)} = \frac{1}{4}(12 - 1.04167 - 3.02084) = 1.98437$$
$$z^{(4)} = \frac{1}{2}(10 - 2 \times 1.04167 - 1.97917) = 2.96875$$

5. *İterasyon:*

$$x^{(5)} = \frac{1}{3}(2 - 1.98437 + 2.96875) = 0.994793$$
$$y^{(5)} = \frac{1}{4}(12 - 1.01389 - 2.96875) = 2.00434$$
$$z^{(5)} = \frac{1}{2}(10 - 2 \times 1.01389 - 1.98437) = 2.99393$$

6. *İterasyon:*

$$x^{(6)} = \frac{1}{3}(2 - 2.00434 + 2.99393) = 0.99653$$
$$y^{(6)} = \frac{1}{4}(12 - 0.994793 - 2.99393) = 2.00282$$
$$z^{(6)} = \frac{1}{2}(10 - 2 \times 0.994793 - 2.00434) = 3.00304$$

17. *İterasyon:*

$$x^{(17)} = 1.0$$
$$y^{(17)} = 2.0$$
$$z^{(17)} = 3.0$$

3.3 *Gauss-Seidel Yöntemi*

Bu yöntem Jacobi iterasyon yöntemiyle hemen hemen aynıdır. Aralarındaki fark $(n+1)$ inci değeri bulunan bilinmiyenler hemen kullanılır. Yani;

$$\begin{aligned}
x_1^{(n+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(n)} - a_{13}x_3^{(n)}\right) \\
x_2^{(n+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(n+1)} - a_{23}x_3^{(n)}\right) \\
x_3^{(n+1)} &= \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(n+1)} - a_{32}x_2^{(n+1)}\right)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

yukarıdada görüldüğü gibi ikinci denklemde x_1 yerine birinci denklemden hesaplanan $x_1^{(n+1)}$ değeri kullanılmıştır, üçüncü denklemde birinci ve ikinci denklemlerde hesaplana $x_1^{(n+1)}$ ve $x_2^{(n+1)}$ değerleri kullanılmıştır.

Burada da, a_{11}, a_{22} ve a_{33} katsayılarını, Jacobi iterasyon yönteminde olduğu gibi ilgili denklemlerin en büyük katsayıları olduğunu varsayıyoruz, bu varsayım yöntemin çözülebilirlik yada yakınsama şartıdır. Yani;

$$\begin{aligned}
|a_{11}| &> |a_{12}| + |a_{13}| \\
|a_{22}| &> |a_{21}| + |a_{23}| \\
|a_{33}| &> |a_{31}| + |a_{32}|
\end{aligned} \tag{3.5}$$

denklem (3.4) deki iterasyon, (3.5)'de verilen koşullar yerine getirildiği durumunda geçerlidir.

Gauss-Seidel iterasyon yönteminin $N \times N$ lik bir sistem ve x_i bilinmiyenleri için iterasyon formülü:

$$x_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \left(\sum_{j=1}^{j=i-1} a_{ij} x_j^{(n+1)} + \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij} x_j^{(n)} \right) \right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{3.6}$$

ile verilir.

Örnek:

$$\begin{aligned} 15x + 3y - 2z &= 85 \\ 2x + 10y + z &= 51 \\ x - 2y + 8z &= 5 \end{aligned}$$

sistemini Gauss-Seidel iterasyon yöntemi ile çözünüz.

Çözüm: Yukarıdaki denklem için

$$\begin{aligned} |15| &> |3| + |-2| \\ |10| &> |2| + |1| \\ |8| &> |1| + |-2| \end{aligned}$$

şartlar üç denklem içinde sağlamaktadır. Şimdi Gauss-Seidel yöntemini uygulayalım:

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} &= \frac{1}{15}\left(85 - 3y^{(n)} + 2z^{(n)}\right) \\ y^{(n+1)} &= \frac{1}{10}\left(51 - 2x^{(n+1)} - z^{(n)}\right) \\ z^{(n+1)} &= \frac{1}{8}\left(5 - x^{(n+1)} + 2y^{(n+1)}\right) \end{aligned}$$

başlangıç şartı önceden verilmediğinden $x^{(0)} = 0,\ y^{(0)} = 0,\ z^{(0)} = 0$ olsun.

1. *İterasyon:*

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \frac{85}{15} = 5.66667 \\ y^{(1)} &= \frac{1}{10}(51 - 2 \times 5.66667 - 0) = 3.96667 \\ z^{(1)} &= \frac{1}{8}(5 - 5.66667 + 2 \times 3.96667) = 0.908333 \end{aligned}$$

2. *İterasyon:*

$$\begin{aligned} x^{(2)} &= \frac{1}{15}(85 - 3 \times 3.96667 + 2 \times 0.908333) = 4.99838 \\ y^{(2)} &= \frac{1}{10}(51 - 2 \times 4.99838 - 0.908333) = 4.01028 \\ z^{(2)} &= \frac{1}{8}(5 - 4.99838 + 2 \times 4.01028) = 1.00326 \end{aligned}$$

3. *İterasyon:*

$$\begin{aligned} x^{(3)} &= \frac{1}{15}(85 - 3 \times 4.01028 + 2 \times 1.00326) = 4.99838 \\ y^{(3)} &= \frac{1}{10}(51 - 2 \times 4.99838 - 1.00326) = 4.0 \\ z^{(3)} &= \frac{1}{8}(5 - 4.99838 + 2 \times 4.0) = 1.0002 \end{aligned}$$

4. İterasyon:

$$x^{(4)} = \frac{1}{15}(85 - 3 \times 4.0 + 2 \times 1.0002) = 5.00003$$
$$y^{(4)} = \frac{1}{10}(51 - 2 \times 5.00003 - 1.0002) = 3.99997$$
$$z^{(4)} = \frac{1}{8}(5 - 5.00003 + 2 \times 3.99997) = 0.99999$$

5. İterasyon:

$$x^{(5)} = \frac{1}{15}(85 - 3 \times 3.99997 + 2 \times 0.99999) = 5.0$$
$$y^{(5)} = \frac{1}{10}(51 - 2 \times 5.0 - 0.99999) = 4.0$$
$$z^{(5)} = \frac{1}{8}(5 - 5.0 + 2 \times 4.0) = 0.999999$$

6. İterasyon:

$$x^{(6)} = \frac{1}{15}(85 - 3 \times 4.0 + 2 \times 0.999999) = 5.0$$
$$y^{(6)} = \frac{1}{10}(51 - 2 \times 5.00 - 0.999999) = 4.0$$
$$z^{(6)} = \frac{1}{8}(5 - 5.00 + 2 \times 4.0) = 1.0$$

7. İterasyon:

$$x^{(7)} = \frac{1}{15}(85 - 3 \times 4.0 + 2 \times 1.0) = 5.0$$
$$y^{(7)} = \frac{1}{10}(51 - 2 \times 5.0 - 1.0) = 4.0$$
$$z^{(7)} = \frac{1}{8}(5 - 5.0 + 2 \times 4.0) = 1.0$$

Örnek:

$$3x + y - z = 2$$
$$x + 4y + z = 12$$
$$2x + y + 2z = 10$$

sistemini $x^{(0)} = 1,\ y^{(0)} = 1,\ z^{(0)} = 1$ başlangıç değerleriyle, Gauss-Seidel iterasyon yöntemi ile çözünüz.

Çözüm: Yukarıdaki denklem için

$$|3| > |1| + |-1|$$
$$|4| > |1| + |1|$$
$$|2| < |2| + |1|$$

şartlar iki denklem için sağlamakta fakat son denklem için sağlamamaktadır buda çözümü yavaşlatacak ama çözüme engel olmayacaktır. Fakat denklemlerin çoğunda bu durum olsaydı o zaman muhtemelen yakınsama olmayacaktı. Şimdi Gauss-Seidel yöntemini uygulayalım:

$$x^{(n+1)} = \frac{1}{3}\left(2 - y^{(n)} + z^{(n)}\right)$$
$$y^{(n+1)} = \frac{1}{4}\left(12 - x^{(n)} - z^{(n)}\right)$$
$$z^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(10 - 2x^{(n)} - y^{(n)}\right)$$

başlangıç şartı $x^{(0)} = 1,\ y^{(0)} = 1,\ z^{(0)} = 1$ dir.

1. *İterasyon:*

$$x^{(1)} = \frac{1}{3}(2 - 1 + 1) = 0.666667$$
$$y^{(1)} = \frac{1}{4}(12 - 0.666667 - 1) = 2.58333$$
$$z^{(1)} = \frac{1}{2}(10 - 2 \times 0.666667 - 2.58333) = 3.04167$$

2. *İterasyon:*

$$x^{(2)} = \frac{1}{3}(2 - 2.58333 + 3.04167) = 0.819447$$
$$y^{(2)} = \frac{1}{4}(12 - 0.819447 - 3.04167) = 2.03472$$
$$z^{(2)} = \frac{1}{2}(10 - 2 \times 0.819447 - 2.03472) = 3.16319$$

3. *İterasyon:*

$$x^{(3)} = \frac{1}{3}(2 - 2.03472 + 3.16319) = 1.04282$$
$$y^{(3)} = \frac{1}{4}(12 - 1.04282 - 3.16319) = 1.9485$$
$$z^{(3)} = \frac{1}{2}(10 - 2 \times 1.04282 - 1.9485) = 2.98293$$

4. *İterasyon:*

$$x^{(4)} = \frac{1}{3}(2 - 1.9485 + 2.98293) = 1.01148$$
$$y^{(4)} = \frac{1}{4}(12 - 1.01148 - 2.98293) = 2.0014$$
$$z^{(4)} = \frac{1}{2}(10 - 2 \times 1.01148 - 2.0014) = 2.98782$$

5. *İterasyon:*

$$x^{(5)} = \frac{1}{3}(2 - 2.0014 + 2.98782) = 0.995473$$
$$y^{(5)} = \frac{1}{4}(12 - 0.995473 - 2.98782) = 2.00418$$
$$z^{(5)} = \frac{1}{2}(10 - 2 \times 0.995473 - 2.00418) = 3.00244$$

6. *İterasyon:*

$$x^{(6)} = \frac{1}{3}(2 - 2.00418 + 3.00244) = 0.99942$$
$$y^{(6)} = \frac{1}{4}(12 - 0.99942 - 3.00244) = 1.99953$$
$$z^{(6)} = \frac{1}{2}(10 - 2 \times 0.99942 - 1.99953) = 3.00081$$

11. *İterasyon:*

$$x^{(11)} = 1.0$$
$$y^{(11)} = 2.0$$
$$z^{(11)} = 3.0$$