BİRİNCİ MERTEBEDEN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Gerçek hayattaki birçok problem, türevler arasındaki ilişkiyi görmek daha kolay olduğundan diferansiyel denklemlerle modellenir. Örneğin Newton'un ikinci kanunu,

$$f = m.a$$

İvmenin hızın zamanla değişimi olduğu hatırlanarak

$$\frac{dV}{dt} = a = \frac{F}{m}$$

şeklinde birinci dereceden, veya hızın da mesafenin türevi olduğu hatırlanarak

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a = \frac{F}{m}$$

şeklinde ikinci dereceden bir adi diferansiyel denklem haline getirilebilir. İvmenin sabit olması halinde bu denklemlerin analitik çözümleri sırasıyla

$$V(t) = at + V_0$$
$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0$$

şeklinde olup, çözümlerde yer alan V_0 ve x_0 sabitleri, sırasıyla hız ve konumun başlangıç değerleridir. Bu denklemler kullanılarak, bağımsız değişken olan t zamanının herhangi bir değerinde V hızının ve x konumunun sayısal değerleri elde edilebilir.

Birçok diferansiyel denklem analitik olarak çözülebilir ve bulunan genel çözümde denklemin derecesine eşit sayıda keyfi integral sabiti yer alır. Şayet sabit sayısınca koşul ortaya konulursa sabitlerin değerlerini elde etmek mümkün olur. Bütün koşulların bağımsız değişkenin aynı değeri için belirlenmesi halinde problem 'Başlangıç Değer Problemi' olarak adlandırılır. Koşullar bağımsız değişkenin iki farklı değerinde, özellikle ilgilenilen bir bölgenin sınırlarında verildiği takdirde problem 'Sınır Değer Problemi' olarak nitelendirilir.

Bu bölümde adi diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan sayısal teknikler ele alınacaktır. Problemin sayısal olarak çözümü için gerekli sayıda koşulun bilinmesi ve bu koşulların sayısal çözümde kullanılması gereklidir. Çözüm tekniklerine Taylor-serisi yöntemi ile başlanacaktır. Taylor serisi kendi başına iyi bir yöntem olmakla kalmayıp diğer başka birçok yöntemin esasını teşkil eder.

1. Taylor Serisi Yöntemi

Bilindiği gibi Taylor serisi, çoğu fonksiyonu kuvvet serisi şeklinde ifade etmenin bir yoludur. $x = a$ civarındaki Taylor açılımında $(x-a)$ büyüklüğünün üslerinden oluşan terimlerin katsayıları fonksiyonun türevlerinin $x = a$ daki değerlerini içerir. Bunun anlamı, bir fonksiyonun ve türevlerinin $x = a$ noktasındaki değerleri biliniyorsa bu fonksiyonun bütün *x* noktalarındaki değerleriyle aynı değerleri verecek bir kuvvet serisinin yazılabileceği demektir. Buradaki incelemelerde $x = a$ yerine $x = x_0$ kullanılacaktır.

Bir $y(x)$ fonksiyonunun birinci türevi $y' = f(x,y)$ şeklinde ve fonksiyonun başlangıç değeri de $y(x_0)$ şeklinde verilmiş olsun. Bu bilgiler kullanılarak $y(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ civarındaki Taylor açılımı yazılabilir. Bu açılım için gerekli olan $y' = f(x,y)$ büyüklüğünün istenilen dereceden türevleri alınabilir ve $x = x_0$ da değerleri hesaplanabilir.

Verilen bir diferansiyel denklemin çözümü için,

$$y(x) = y(x_0) + (x-x_0)y'(x_0) + \frac{1}{2!}(x-x_0)^2 y''(x_0) + \frac{1}{3!}(x-x_0)^3 y'''(x_0) + \ldots$$

Taylor açılımından yararlanılacaktır.

Burada yapılan hata, $h=x-x_0$ adımına ve Taylor serisinde alınan terim sayısına bağlıdır. Örnek olarak seride dördüncü türevden sonrası atılıyorsa oluşan hatanın mertebesi $O(h^5)$ olacaktır. Seride n. türev ve sonrası atılıyorsa oluşan hata

$$e = \frac{h^{n+1}}{(n+1!)} y^{(n)}(x_s), \; x_n < x_s < x_n + h$$

şeklindedir.

Seride yer alan $y(x_0)$ değeri, problem ile birlikte verilen başlangıç şartından dolayı belirli olup, $y'(x_0)$ hariç $y''(x_0),\ldots$ değerleri diferansiyel denklemin türevlerinin alınmasıyla elde edilebilir. O halde;

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

ve

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = f_x + f_y y'$$

olduğundan

$$y''(x_0) = f_x(x_0,y_0) + f_y(x_0,y_0) f(x_0,y_0)$$

yazılabilir. Benzer şekilde $y'''(x_0),\ldots$ değerleri de hesaplanabilir.

Örnek: $y' = \frac{y}{x} + x,\ y(1) = 0$ başlangıç değer problemini ikinci mertebe Taylor seri yöntemiyle çözünüz.

Çözüm:

$x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $f(x,y) = \frac{y}{x} + x$ olup

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0) \Rightarrow y'(1) = f(1,0) = 1 \Rightarrow y'(1) = 1$$

$$y''(x_0) = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_{0,} y_0) f(x_0, y_0)$$

$$f_x = -\frac{y}{x^2} + 1 \Rightarrow f_x(1,0) = 1$$

olup,

$$f_y = \frac{1}{x} \Rightarrow f_y(1,0) = 1$$

$y''(x_0) = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_{0,} y_0) f(x_0, y_0) = 1 + 1.1 = 2$ bulunur. O halde

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0) y'(x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 y''(x_0) + ...$$

$$y(x) = 0 + (x - 1) + 2.\frac{(x-1)^2}{2!} = x^2 - x$$

Bulunur.

Örnek: $\frac{dy}{dx} = x - y$, $y(1) = 2$ diferansiyel denklemini Taylor Seri yöntemiyle çözünüz. (h=0.2)

Çözüm: Yöntemin gerektirdiği türevleri alalım;

$$y'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = (x - y)_{x_0} = x_0 - y_0 = -1$$

$$y''(x_0) = \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x_0} = (1 - y')_{x_0} = 1 - (-1) = 2$$

$$y'''(x_0) = \left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x_0} = -y''_{x_0} = -2$$

$$y^{iv}(x_0) = \left.\frac{d^4y}{dx^4}\right|_{x_0} = -y'''_{x_0} = 2$$

$$y^{v}(x_0) = \left.\frac{d^5y}{dx^5}\right|_{x_0} = -y^{iv}_{x_0} = -2$$

$$y = 2 - 1(0.2) + 2\frac{(0.2)^2}{2!} - 2\frac{(0.2)^3}{3!} + 2\frac{(0.2)^4}{4!} - 2\frac{(0.2)^5}{5!} = 2 - 0.2 + 0.04 - 0.00273 + 0.000133 - 0.00000532$$

$y = 1.83746$ elde edilir.

Örnek: 4. Mertebeden taylor seri yöntemini kullanarak $xy' = x - y,\ y(2) = 2$ ile verilen başlangıç değer probleminin h=0.1 için x=2.1 deki çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$$y' = 1 - \frac{y}{x} = f(x,y) \Rightarrow y'_0 = y'(2) = 0$$

$$y'' = -\frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} \Rightarrow y''_0 = -\frac{0}{2} + \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$y''' = -\frac{y''}{x} + \frac{2y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3} \Rightarrow y'''_0 = -\frac{3}{4}$$

$$y^{iv} = -\frac{y'''}{x} + \frac{3y''}{x^2} - \frac{6y'}{x^3} + \frac{6y}{x^4} \Rightarrow y^{iv}_0 = \frac{3}{2}$$

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 y''(x_0) + \frac{1}{3!}(x - x_0)^3 y'''(x_0) + \frac{1}{4!}(x - x_0)^4 y^{iv}(x_0)$$

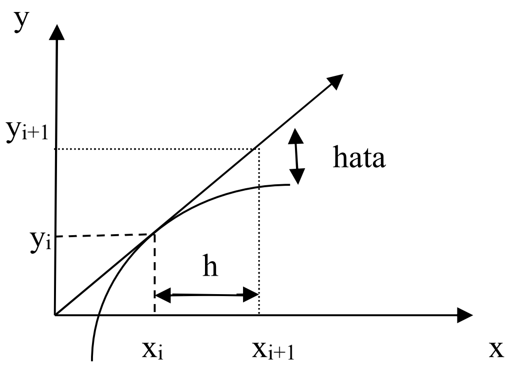
$$y = 2 + (2.1 - 2)(0) + \frac{(2.1-2)^2}{2!}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{(2.1-2)^3}{3!}\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{(2.1-2)^4}{4!}\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$y = 2 + (0.1)(0) + \frac{(0.1)^2}{2!}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{(0.1)^3}{3!}\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{(0.1)^4}{4!}\left(\frac{3}{2}\right) = 2.00238$$

2. Euler Yöntemi

Taylor serisi yönteminin kolay programlanabilir hale getirilmiş özel bir formudur. Taylor serisinde birinci türevden sonrası atılarak hesaplamaların gerçekleştirilmesi Euler Yöntemi olarak bilinir. Bu yöntemde ilave türevler gerekmediği için oldukça basittir. Ancak hassas sonuç alınabilmesi için h adımı küçük seçilmelidir.

Euler yöntemi, diferansiyel denklemlerin çözümüne ulaşmak için eğim bilgisini kullanmaktadır.



$f(x,y) = \frac{dy}{dx}$, $y(x_0) = y_0$ …(1) başlangıç değer probleminde x'in yeni değerleri h adım büyüklüğüne bağlı olarak,

$$x_{i+1} = x_i + h,\ i = 1,2,3,...,n$$

şeklinde belirlenmektedir. (1) denkleminde türev ifadesi yerine

$$f(x_i, y_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

Kullanılırsa, yeni y_{i+1} değeri eşitlik yeniden düzenlenerek bulunur.

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Bu şekilde yazılan tekrarlama bağıntısı ‘Euler Yöntemi’ olarak bilinir.

Örnek: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, $y(4) = 0.75$, $y(7) = ?$

Çözüm: $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$

$f(x_i, y_i) = -\frac{y_i}{x_i}$ ve $h = 1$ alınırsa ,

$$y(5) = y(4) + (-y(4)/4)*1 = 0.75 - (0.75/4) \Rightarrow y(5) = 0.5625$$
$$y(6) = y(5) + (-y(5)/5)*1 = 0.5625 - (0.5625/5) \Rightarrow y(6) = 0.45$$
$$y(7) = y(6) + (-y(6)/64)*1 = 0.45 - (0.45/6) \Rightarrow y(7) = 0.375$$

Örnek: $\frac{dy}{dx} = 2x + y$, $y(0) = 1$ diferansiyel denkleminin h=0.2 olmak üzere çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$$x_1 = x_0 + h = 0.2 \text{ , } f(x_0, y_0) = f(0,1) = 1$$
$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + (0.2)(1) = 1.2$$
$$x_2 = x_1 + h = 0.4 \text{ , } f(x_1, y_1) = f(0.4,1.2) = 1.6$$
$$y_2 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1.2 + (0.2)(1.6) = 1.52$$
$$x_3 = x_2 + h = 0.6 \text{ , } f(x_2, y_2) = f(0.4,1.52) = 2.32$$
$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1.52 + (0.2)(2.32) = 1.984$$
$$x_4 = x_3 + h = 0.8 \text{ , } f(x_3, y_3) = f(0.6,1.984) = 3.184$$
$$y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = 1.984 + (0.2)(3.184) = 2.621$$
$$x_5 = x_4 + h = 1 \text{ , } f(x_4, y_4) = f(0.8,2.621) = 4.221$$
$$y_5 = y_4 + hf(x_4, y_4) = 2.621 + (0.2)(4.221) = 3.465$$

olarak hesaplanır.

4. Mertebeden Runge – Kutta Yöntemi

Alman matematikçiler Carl Runge ve Wilhelm Kutta tarafından geliştirilen Runge-Kutta yöntemlerinin formülasyonunda bazı fonksiyonların Taylor seri açılımında kullanılmaktadır. Taylor serisinde olduğu gibi yüksek mertebeden türevlere ihtiyaç göstermeyen, programlanması kolay olan bu yöntemler

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n, h)$$

genel formunda yazılabilirler. Burada artım fonksiyonu ϕ ağırlıklı ortalamalar içermekte olup genel olarak a_i ler sabit olmak üzere

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + ... + a_ik_i$$

şeklinde yazılabilir.

Özellikle lineer olmayan diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde çok yaygın olarak kullanılan ve hassasiyeti yüksek olan bu yöntem, türevin tahmini için dört değerin ağırlıklı ortalamasına dayanır.

Verilen bir diferansiyel denklemin adım adım sayısal çözümünün n. adımındaki katsayılar

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right) \\
k_3 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right) \\
k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3) \\
x_{n+1} &= x_n + h
\end{aligned}$$

olmak üzere, 4. Mertebe Runge Kutta yönteminin genel iterasyon denklemi ise

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5)$$

olarak yazılabilir.

Örnek: Aşağıdaki diferansiyel denklemi $h = 0.2$ olmak üzere $x \in [0\ ,\ 0.6]$ aralığında çözerek x değerlerine karşılık y değerlerini bulunuz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y} \quad , \ y(0) = 2$$

Çözüm: Genel iterasyon ifadesi

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

olan 4. Mertebe Runge Kutta yöntemi kullanılarak çözüm için $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ değerleriyle gerekli büyüklükler sırayla hesaplanır.

$n = 0$ *için*;

$$k_1 = f\left(x_0, y_0\right) = \frac{1}{0+2} = 0.5$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hk_1\right) = \frac{1}{(0+0.1)+\left(2+0.05\right)} = 0.465$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hk_2\right) = \frac{1}{\left(0+0.1\right)+\left(2+\frac{1}{2}\left(0.2\right)\left(0.465\right)\right)} = 0.466$$

$$k_4 = f\left(x_0 + h, y_0 + hk_3\right) = \frac{1}{\left(0+0.2\right)+\left(2+\left(0.2\right)\left(0.466\right)\right)} = 0.436$$

Değerleriyle

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) = 2 + \frac{0.2}{6}\left(0.5 + 2.\left(0.465\right) + 2.\left(0.466\right) + 0.436\right) = 2.0933$$

Elde edilir.

$n = 1$ *için*; $x_1 = x_0 + h = 0 + 0.2 = 0.2$, $y_1 = 2.0933$ alınarak,

$$k_1 = f\left(x_1, y_1\right) = \frac{1}{\left(0.2\right)+\left(2.0933\right)} = 0.436$$

$$k_2 = f\left(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}hk_1\right) = \frac{1}{(0.2+0.1)+\left(2.0933+0.0436\right)} = 0.410$$

$$k_3 = f\left(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}hk_2\right) = \frac{1}{\left(0.2+0.1\right)+\left(2.0933+\frac{1}{2}\left(0.2\right)\left(0.410\right)\right)} = 0.411$$

$$k_4 = f\left(x_1 + h, y_1 + hk_3\right) = \frac{1}{\left(0.2+0.2\right)+\left(2.0933+\left(0.2\right)\left(0.411\right)\right)} = 0.388$$

Değerleriyle

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) = 2.0933 + \frac{0.2}{6}\left(0.436 + 2.\left(0.410\right) + 2.\left(0.411\right) + 0.388\right) = 2.1755$$

elde edilir.

$n = 2$ *için*; $x_2 = x_1 + 0.2 = 0.4$, $y_2 = 2.1755$ alınarak,

$$k_1 = f\left(x_2, y_2\right) = \frac{1}{\left(0.4\right)+\left(2.1755\right)} = 0.388$$

$$k_2 = f\left(x_2 + \frac{1}{2}h, y_2 + \frac{1}{2}hk_1\right) = \frac{1}{(0.4+0.1)+\left(2.1755+\frac{1}{2}\left(0.2\right)\left(0.388\right)\right)} = 0.368$$

$$k_3 = f\left(x_2 + \frac{1}{2}h, y_2 + \frac{1}{2}hk_2\right) = \frac{1}{\left(0.4+0.1\right)+\left(2.1755+\frac{1}{2}\left(0.2\right)\left(0.368\right)\right)} = 0.369$$

$$k_4 = f\left(x_2 + h, y_2 + hk_3\right) = \frac{1}{\left(0.4+0.2\right)+\left(2.1755+\left(0.2\right)\left(0.369\right)\right)} = 0.351$$

değerleriyle

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) = 2.1755 + \frac{0.2}{6}\left(0.388 + 2.\left(0.368\right) + 2.\left(0.369\right) + 0.351\right) = 2.2493$$

elde edilir.

n	x_n	y_n	k_1	k_2	k_3	k_4
0	0.00	20000	0.5000	0.465	0.466	0.436
1	0.20	2.0933	0.436	0.410	0.411	0.388
2	0.40	2.1755	0.388	0.368	0.369	0.351
3	0.60	2.2493				