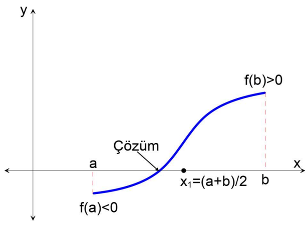
Bölüm 2

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümü

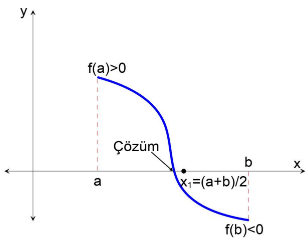
2.1 İkiye Bölme Yöntemi

İkiye bölme kuralı, $f(x)$ fonksiyonu verilen bir $[a, b]$ aralığında sürekli ve bir köke sahip olduğu biliniyorsa, $f(x) = 0$ formunda bir denklemin yaklaşık kökünü bulmak için bir parantez açma yöntemidir. Böyle bir duruma $f(x)$ fonksiyonu çözüm aralığının uç noktalarında zıt işaretli olacaktır. Yandaki şekillerde görüldüğü gibi, eğer $f(x)$ fonksiyonu $x = a$ ve $x = b$ noktaları arasında bir çözüme sahipse, ya $f(a) < 0$ ve $f(b) > 0$ yada $f(a) > 0$ ve $f(b) < 0$ dür. Başka bir deyişle, eğer $x = a$ ve $x = b$ arasında bir çözüm varsa bu durumda $f(a).f(b) < 0$ dür.



Şekil 2.1: İkiye Bölme Metodu

İkiye bölme kuralıyla bir kök bulunmak istenirse önce $x = a$ ve $x = b$ uç noktaları olmak üzere çözümün var olduğu bir aralık tespit edilir. Böyle bir aralık ya $f(x)$ in grafiği çizilir ve x eksenini kestiği yer tespit edilir yada işaretleri zıt olan fonsiyonunun iki değeri tespit edilerek bulunur. Aralığın orta noktası x_{r1} yaklaşık çözümün ilk tahmini olarak alınır. Gerçek çözüm ya a ve x_{r1} noktaları arasındaki aralıkta yada x_{r1} ve b noktaları arasındaki aralıktadır. Eğer yaklaşık çözüm yeterince doğru değil ise doğru çözümü içeren yeni bir aralık tanımlanır. Çözümü içine alan yeni aralık önceki aralığın yarısı kadardır, ve onunda orta noktası yaklaşık çözüm için yeni (ikinci) tahmindir. Bu şekilde iterasyon önceden seçilen bir kritere göre yaklaşık çözüm yeterince doğru oluncaya kadar devam ettirilir.



Şekil 2.2: İkiye Bölme Metodu

İkiye bölme yöntemiyle yaklaşık çözüm bulmak için prosedür (yada algoritma) aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Adım 1: Fonksiyonun kökünü içine alan ve $f(a).f(b) < 0$ şartını sağlayan bir $x_a = a$ ve $x_{ü} = b$ noktaları belirlenir.

Adım 2: Fonksiyonun kökünün ilk tahmin x_{r1} aşağıdaki formülden bulunur:

$$x_{r1} = \frac{x_a + x_{ü}}{2}$$

Adım 3: Fonksiyonun kökünü yeni bulunan değere göre hangi alt aralıkta olduğunu bulmak için aşağıdaki hesaplar yapılır;

- $f(a).f(x_{r1}) < 0$ ise kök $[a, x_{r1}]$ arasındadır. O halde yeni kök tahmini yapmak için Adım 2 ye dönülür.
- $f(x_{r1}).f(b) < 0$ ise kök $[x_{r1}, b]$ arasındadır. O halde yeni kök tahmini yapmak için Adım 2 ye dönülür.

- $f(a)f(x_{r1}) = 0$ yada $f(b).f(x_{r1}) = 0$ ise kök x_{r1}'e eşittir, hesaplamaya son verilir.

Örnek: $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ denkleminin bir kökünü ikiye bölme yöntemiyle bulunuz.
Çözüm: Öncelikle denklemin kökünün hangi aralıkta olduğunu bulalım

$$f(1) = -6 \qquad f(2) = -1 \qquad f(3) = 16$$

bu durumda denklemin kökü $[2,3]$ arasındadır.

$$x_1 = \frac{2+3}{2} = 2.5 \quad \Rightarrow \quad f(2.5) = 5.625$$
$$f(2).f(2.5) = -1\,.\,5.625 = -5.625 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{kök } x \in [2, 2.5]$$
$$x_2 = \frac{2+2.5}{2} = 2.25 \quad \Rightarrow \quad f(2.25) = 1.89063$$
$$f(2).f(2.25) = -1\,.\,1.89063 = -1.89063 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{kök } x \in [2, 2.25]$$
$$x_3 = \frac{2+2.25}{2} = 2.125 \quad \Rightarrow \quad f(2.125) = 0.345703$$
$$f(2).f(2.125) = -1\,.\,0.345703 = -0.345703 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{kök } x \in [2, 2.125]$$
$$x_4 = \frac{2+2.125}{2} = 2.0625 \quad \Rightarrow \quad f(2.0625) = -0.351318$$
$$f(2.0625).f(2.125) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{kök } x \in [2.0625, 2.125]$$

denklemin yaklaşık kökü 2.09455 dir. Bu durumda köke yaklaşma bilhayli

r	x_a	$x_ü$	x_r	$f(x_r)$	ε_a	ε_t
1	2	3	2.5	5.625	-	-19.3574
2	2	2.5	2.25	1.189063	-11.1111	-7.42164
3	2	2.25	2.125	0.345703	-5.88235	-1.45377
4	2	2.125	2.0625	-0.351318	-3.0303	1.53016
5	2.0625	2.125	2.09375	-0.008942	1.49254	0.0381944
6	2.09375	2.125	2.10938	-0.166893	0.740976	-0.708028
7	2.09375	2.10938	2.10157	0.0786466	-0.371627	-0.335156
8	2.09375	2.10157	2.09766	0.0786466	-0.186398	-0.148481
9	2.09375	2.09766	2.0957	0.0128274	-0.0935248	-0.0549044
10	2.09375	2.0957	2.09473	0.00199272	-0.0463067	-0.00859373

yavaş olmaktadır.
Örnek: $f(x) = x^2 - 3 = 0$ denkleminin bir kökünü ikiye bölme yöntemiyle bulunuz.
Çözüm: Denklemin kökünün hangi aralıkta olduğunu bulalım

$$f(-3) = 6 \qquad f(-2) = 1 \qquad f(-1) = -2 \qquad f(0) = -3$$
$$f(3) = 6 \qquad f(2) = 1 \qquad f(1) = -2$$

bu durumda denklemin kökleri $[-2,-1]$ ve $[1,2]$ aralarındadır. Biz sadece $[1,2]$ aralasındaki kökü bulmaya çalışalım

$$x_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5 \quad \Rightarrow \quad f(1.5) = -0.750$$
$$f(1.5).f(2) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{kök } x \in [1.5, 2]$$
$$x_2 = \frac{1.5+2}{2} = 1.75 \quad \Rightarrow \quad f(1.75) = 0.0625$$

$$
\begin{aligned}
f(1.5).f(1.75) < 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{kök } x \in [1.5, 1.75] \\
x_3 = \frac{1.5 + 1.75}{2} = 1.625 \quad &\Rightarrow \quad f(1.625) = -0.359375 \\
f(1.625).f(1.75) < 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{kök } x \in [1.625, 1.75] \\
x_4 = \frac{1.625 + 1.75}{2} = 1.6875 \quad &\Rightarrow \quad f(1.6875) = -0.152344 \\
f(1.6875).f(1.75) < 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{kök } x \in [1.6875, 1.75]
\end{aligned}
$$

denklemin yaklaşık kökü 2.09455 dir. Bu durumda köke yaklaşma bilhayli

Tablo 2.1: İkiye bölme Tablosu

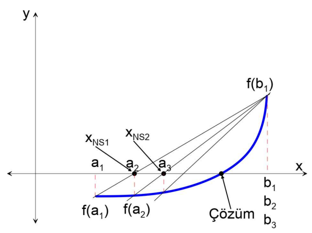
r	x_a	$x_ü$	x_r	$f(x_r)$	ε_a	ε_t
1	1	2	1.5	-0.75	-	-13.3974
2	1.5	2	1.75	0.0625	14.2857	-1.03634
3	1.5	1.75	1.625	-0.359375	-7.69231	6.18054
4	1.625	1.75	1.6875	-0.152344	3.7037	2.5721
5	1.6875	1.75	1.71875	-0.0458984	1.81818	0.767876
6	1.71875	1.75	1.73438	0.00807398	0.901187	-0.134523
7	1.71875	1.73438	1.72657	-0.018956	-0.452342	0.316388
8	1.72657	1.73438	1.73048	-0.00543897	0.225949	0.090644
9	1.73048	1.73438	1.73243	0.0013137	0.112559	-0.0219393
10	1.73048	1.73243	1.73146	-0.00204627	-0.0560221	0.0340637

yavaş olmaktadır.

2.2 *Regula-Falsi (Kiriş) Yöntemi*

Regula-Falsi yöntemi, $f(x) = 0$ fonksiyonu verilen bir $[a, b]$ aralığında sürekli ve bir kökü mevcut ise yaklaşık bir kökünü bulmak için bir kestirme yöntemidir. Şekil 2.3 ve 2.4 da gösterildiği gibi *çözümü* içine alan bir $[a_1, b_1]$ kapalı aralığın belirlenmesiyle başlanır. Bu aralığın uç noktalarında fonksiyonun değerleri $f(a_1)$ ve $f(b_1)$ dir. Bu noktalar düz bir doğruyla birleştirilir ve doğrunun x- eksenini kestiği nokta bizim için ilk kök tahminimiz (x_{NS1}) olur. İkiye bölme yöntemin de alınan aralığın tam ortasını kök olarak almamıza rağmen burada ondan farklı olarak doğrunun ekseni kestiği yeri kök olarak almaktayız. İkinci iterasyon için yeni aralığımız $[a_2, b_2]$ olarar tanımlanır. İkinci aralık ilk aralığın bir alt aralığı olur. Kök ya $[a_1, x_{NS1}]$ yada $[x_{NS1}, b_1]$ aralığında olur. İkinci aralığının uç noktaları tekrar düz bir doğruyla birleştirilir bu doğrunun x- eksenini kestiği nokta ikinci kök tahminimizdir (x_{NS2}). Üçüncü itersyon için $[a_3, b_3]$ alt aralığı seçilir ve istenen doğrulukta yaklaşık kök buluncaya kadar aynı yolda iterasyon devam ettirilir.

Şekil 2.3: Regula-Falsi Metodu



Verilen bir $[a, b]$ aralığı için $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren düz doğrunun denklemi:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(b) \tag{2.1}$$

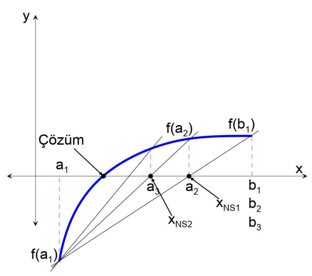
ile verilir.

Denklem (2.1) de $y = 0$ alınıp x yalnız bırakılırsa, bize lazım olan iterasyon fomülünü buluruz. Buda:

$$x_{NS} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \tag{2.2}$$

dır.

Şekil 2.4: Regula-Falsi Metodu



Regula-false yöntemiyle bir çözüm bulmak için kullanılan prosedür ikiye bölme yönteminde kullanılanlarla hemen hemen aynıdır.

2.2.1 Regula-Falsi Yöntemi için Algoritma

1. Aralarında çözümün olduğu bilinen bir a ve b noktaları bulunup ilk aralık seçilir. Bu aralık $f(a)f(b) < 0$ olacak şekilde $f(a)$ ve $f(b)$ nin işaretleri farklı olmalıdır. Bunuda değer vererek yarda fonksiyonun grafiğini çizerek belirleyebiliriz.
2. Denklem (2.2) den yararlanarak ilk yaklaşık çözüm x_{NS} belirlenir.
3. Gerçek çözüm ya a ve x_{NS1} yada x_{NS1} ve b arasındadır. Bunu belirlemek için $f(a).f(x_{NS1})$ çarpımına bakılır:
   Eğer $f(a).f(x_{NS1}) < 0$ ise çözüm a ve x_{NS1} arasındadır.
   Eğer $f(a).f(x_{NS1}) > 0$ ise çözüm x_{NS1} ve b arasındadır.
4. Çözümü kapsayan yeni alt aralık belirlenir ve yenibir alt aralık belirlemek için Adım 2 ye geri dönülür ve bu şekilde devam edilir.

Örnek: $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ denkleminin bir kökünü Regula-Falsi yöntemiyle bulunuz.

Çözüm: Öncelikle denklemin kökünün hangi aralıkta olduğunu bulalım

$$f(1) = -6 \qquad f(2) = -1 \qquad f(3) = 16$$

bu durumda denklemin kökü $[2, 3]$ arasındadır.

$$x_1 = \frac{2f(3) - 3f(2)}{f(3) - f(2)} = 2.05882 \quad \Rightarrow \quad f(2.05882) = -0.390838$$

$$f(2.05882) \times f(3) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{kök } x \in [2.05882, 3]$$

$$x_2 = \frac{2.05882 f(3) - 3f(2.05882)}{f(3) - f(2.05882)} = 2.08126 \quad \Rightarrow \quad f(2.08126) = -0.147244$$

$$f(2.08126) \times f(3) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{kök } x \in [2.08126, 3]$$

$$x_3 = \frac{2.08126 f(3) - 3f(2.08126)}{f(3) - f(2.08126)} = 2.08964 \quad \Rightarrow \quad f(2.08964) = -0.0546677$$

$$f(2.08964) \times f(3) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{kök } x \in [2.08964, 3]$$

$$x_4 = \frac{2.08964 f(3) - 3f(2.08964)}{f(3) - f(2.08964)} = 2.09274 \quad \Rightarrow \quad f(2.09274) = -0.0201981$$

$$f(2.09274) \times f(3) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{kök } x \in [2.09274, 3]$$

denklemin yaklaşık kökü 2.09455 dir. Bu durumda köke yaklaşma bilhayli yavaş olmaktadır.

r	x_r	$f(x_r)$	ε_t	ε_a
1	2.05882	-0.390838	1.70586	-
2	2.08126	-0.147244	0.634504	-1.08994
3	2.08964	-0.0546677	0.234418	-0.402641
4	2.09274	-0.0201981	0.0864147	-0.148351
5	2.09388	-0.00749187	0.0319878	-0.054474
6	2.09430	-0.0028065	0.0119357	-0.0200585
7	2.09446	-0.00102101	0.00429687	-0.00763978
8	2.09452	-0.000351373	0.00143229	-0.0028647
9	2.09454	-0.00012815	0.00047743	-0.000954873
10	2.09455	-0.0000165361	0.0	-0.000477432

Tablo 2.2: Regula-Falsi yöntemiyle $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ denkleminin kökü ve hata tablosu

2.3 Sabit Nokta İterasyonu

Sabit nokta[1] iterasyonu $f(x) = 0$ yapısında bir denklemi çözmek için bir yöntemdir. Yöntemde, denklem

$$x = g(x) \tag{2.3}$$

biçiminde tekrar yazılarak uygulanır. Burada x i eğer $f(x) = 0$ denkleminin çözümü olarak alırsak bu durumda (2.3) nın sağ tarafıyla sol tarafı eşit olmalıdır.

Çözümü $y = x$ ve $y = g(x)$, şekil 2.5 de gösterildiği gibi, grafiklerinin kesişim noktası olarak alabiliriz. Yaklaşık çözüm bulmak için $x = x_0$ değeri $g(x)$ de yazılarak x_2 değeri bulunur, daha sonra $x = x_2$ değeri $g(x)$ de yazılarak x_3 değeri bulunur bu şekilde iterasyon devam ettirilirse genel $x_{i+1} = g(x_i)$ formülü elde edilir. Yani;

$$\begin{aligned} x_1 &= g(x_0) \\ x_2 &= g(x_1) \\ x_3 &= g(x_2) \\ &\vdots \\ x_{i+1} &= g(x_i) \end{aligned}$$

iterasyonu ortaya çıkar.

Yakınsama için $x_{i+1} = g(x_i)$ iterasyonunda x_r gerçek kök olarak ele alalım, bu durumda $x_r = g(x_r)$ elde edilirdi. Buradan $x_{i+1} - x_r = g(x_i) - g(x_r)$ yazılabilir. $x_i - x_r \neq 0$ olduğundan sağ tarafı bununla çarpıp bölelim

$$x_{i+1} - x_r = (g(x_i) - g(x_r))\,\frac{x_i - x_r}{x_i - x_r} = \frac{g(x_i) - g(x_r)}{x_i - x_r}\,(x_i - x_r)$$

olur. Ortalama Değer Teoreminden

$$x_{i+1} - x_r = g'(x_s)\,(x_i - x_r) \qquad x_s \in [x_i, x_r]$$

yazılabilir. Böylece $e_i = x_i - x_r$, $e_{i+1} = x_{i+1} - x_r$ dersek

$$e_{i+1} = g'(x_s) e_i \quad \Rightarrow \quad g'(x_s) = \frac{e_{i+1}}{e_i}$$

elde edilir. Hata değerlerinin her adımda küçülmesi gerektiğinden $|e_{i+1}| < |e_i|$ ise $|e_{i+1}/e_i| < 1$ olmalıdır. Bu durumda

$$|g'(x_s)| < 1$$

elde edilir. Bu her x_s için geçerlidir.

İterasyon $|g'(x)| < 1$ ise yakınsama mutlak olur, yani mutlaka köke doğru yaklaşır. Ancak bu şartın sağlanmadığı durumlardada köke yakınsama olabilir.

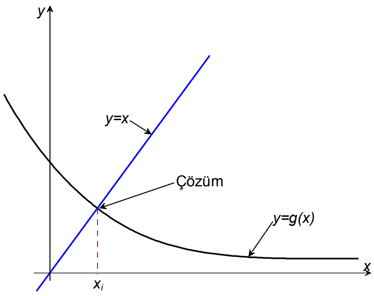
Örnek: $x^3 - 2x - 5 = 0$ denklemini göz önüne alalım denklemin yaklaşık kökü 2.09455 olduğundan $x_0 = 1$ den başlayarak kökü bulmaya çalışalım.

Çözüm: Denklem üç faklı yoldan $x = g(x)$ formunda yazılabilir.

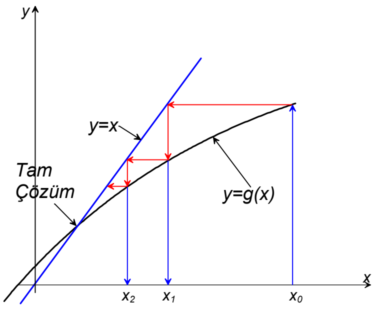
Durum a:

$$x = \frac{x^3 - 5}{2}$$

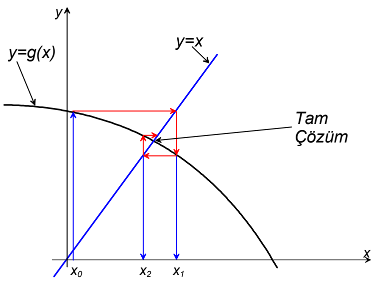
[1] Sabit-nokta yöntemi matematiğin biçok alanında kullanılan eski bir yöntemdir, teknik eski olmasına rağmen ilk defa Alman matematikçi L.E.J. Brouwer (1882-1962) tarafından 1900 lerin başlarında kullanılmıştır.



Şekil 2.5: Sabit Nokta İterasyonu şekli



Şekil 2.6: Monoton Yakınsama



Şekil 2.7: Salınımlı Yakınsama

bu durumda, $g(x) = \frac{x^3-5}{2}$ ve $g'(x) = \frac{3x^2}{2}$ dir. $x_0 = 1$ için

$$|g'(1)| = |1.5| > 1$$

Durum b:

$$x = \frac{5}{x^2 - 2}$$

bu durumda, $g(x) = \frac{5}{x^2-2}$ ve $g'(x) = -\frac{10x}{(x^2-2)^2}$ dir. $x_0 = 1$ için

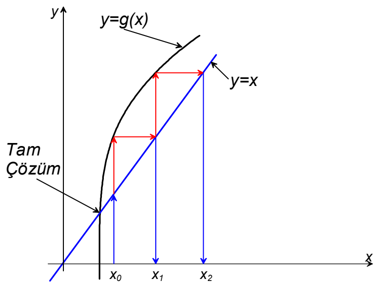
$$|g'(1)| = |-10| > 1$$

Durum c:

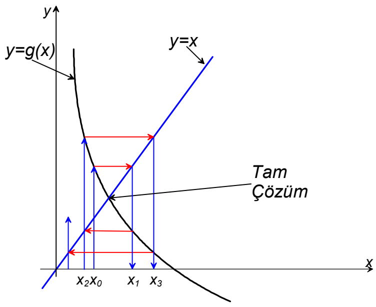
$$x = \sqrt[3]{2x+5}$$

bu durumda, $g(x) = \sqrt[3]{2x+5}$ ve $g'(x) = \frac{2}{3(2x+5)^{2/3}}$ dir. $x_0 = 1$ için

$$|g'(1)| = |0.182184| < 1$$



Şekil 2.8: Monoton Iraksama



Şekil 2.9: Salınımlı Iraksama

Görüldüğü gibi **c** şıkkında seçilen $g(x)$ fonksiyonu çözüm için uygundur, $x_0 = 1$ değeri için mutlak bir yakınsama elde edileceği söylenebilir. Fakat $|g'(x_0)| < 1$ koşulu yeterli bir şart olsada gerekli olmayabilir. Bazen $|g'(x_0)| > 1$ ve $|g'(x_0)| = 1$ koşulu olduğundada iterasyonda çözüme yaklaşılabilir. İterasyon fonksiyonu ile kökü bulmaya çalışalım

$$x_{i+1} = \sqrt[3]{2x_i + 5}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{2 \times 1 + 5} = 1.91293 \\
x_2 &= \sqrt[3]{2 \times 1.91293 + 5} = 2.06658 \\
x_3 &= \sqrt[3]{2 \times 2.06658 + 5} = 2.09029 \\
x_4 &= \sqrt[3]{2 \times 2.09029 + 5} = 2.09390 \\
x_5 &= \sqrt[3]{2 \times 2.09390 + 5} = 2.09445 \\
x_6 &= \sqrt[3]{2 \times 2.09445 + 5} = 2.09454 \\
x_7 &= \sqrt[3]{2 \times 2.09454 + 5} = 2.09455
\end{aligned}$$

iterasyonu kesebiliriz çünki artık x_7, x_8, x_9 ve diğerlerinin ilk beş basamağı aynı çıkacaktır. Çıkan değerler ve ε_t değerleri aşağıdaki tabloda kaşılaştırılmıştır.

i	x_i	$\lvert\varepsilon_t\rvert$
0	1	52.267
1	1.91293	8.67107
2	2.06658	1.33537
3	2.09029	0.203385
4	2.09390	0.0310329
5	2.09445	0.0047743
6	2.09454	0.00047743
7	2.09455	0.0

Örnek: $xe^{0.5x} + 1.2x - 5 = 0$ denklemi ele alalım. Denklemin yaklaşık çözümü $x = 1.5050$ olduğu için $x_0 = 1$ den başlayarak çözüm bulalım,

Çözüm: Denklem üç faklı yoldan $x = g(x)$ formunda yazılabilir.

Durum a:

$$x = \frac{5 - xe^{0.5x}}{1.2}$$

bu durumda, $g(x) = \frac{5-xe^{0.5x}}{1.2}$ ve $g'(x) = -(e^{0.5x} + 0.5xe^{0.5x})/1.2$ dir. $x_0 = 1$ için

$$|g'(1)| = \left|-(e^{0.5\times1} + 1 \times 0.5\, e^{0.5\times1})/1.2\right| = 2.0609$$

Durum b:

$$x = \frac{5}{e^{0.5x} + 1.2}$$

bu durumda, $g(x) = \frac{5}{e^{0.5x}+1.2}$ ve $g'(x) = \frac{-5\times0.5\,e^{0.5x}}{2(e^{0.5x}+1.2)^2}$ dir. $x_0 = 1$ için

$$|g'(1)| = \left|\frac{-5\, e^{0.5\times1}}{2\left(e^{0.5\times1} + 1.2\right)^2}\right| = 0.5079$$

Durum c:

$$x = \frac{5 - 1.2x}{e^{0.5x}}$$

bu durumda, $g(x) = \frac{5-1.2x}{e^{0.5x}}$ ve $g'(x) = \frac{-3.7+0.6x}{e^{0.5x}}$ dir. $x_0 = 1$ için

$$|g'(1)| = \left| \frac{-3.7 + 0.6 \times 1}{e^{0.5\times 1}} \right| = 1.8802$$

Görüldüğü gibi **b** şıkkında seçilen $g(x)$ fonksiyonu çözüm için uygundur, $x_0 = 1$ değeri için bir yakınsama elde edileceği söylenebilir.

$$x_{i+1} = \frac{5}{e^{0.5x_i} + 1.2}$$

$$x_1 = \frac{5}{e^{0.5\times 1} + 1.2} = 1.7552 \qquad x_2 = \frac{5}{e^{0.5\times 1.7552} + 1.2} = 1.3869$$
$$x_3 = \frac{5}{e^{0.5\times 1.3869} + 1.2} = 1.5622 \qquad x_4 = \frac{5}{e^{0.5\times 1.5622} + 1.2} = 1.4776$$
$$x_5 = \frac{5}{e^{0.5\times 1.4776} + 1.2} = 1.5182 \qquad x_6 = \frac{5}{e^{0.5\times 1.5182} + 1.2} = 1.4986$$

Beklenildiği gibi, iterasyonda bulunan değerler gerçek çözüm $x = 1.5050$ değerine doğru yakınsamaktadır.

Buna karşılık, eğer durum **a** daki $g(x)$ fonksiyonunu itarasyonda kullanırsak çıkan değerler:

$$x_1 = \frac{5 - 1 \times e^{0.5\times 1}}{1.2} = 2.7927 \qquad x_2 = \frac{5 - 2.7927 \times e^{0.5\times 2.7927}}{1.2} = -5.2364$$
$$x_3 = \frac{5 - (-5.2364) \times e^{0.5\times(-5.2364)}}{1.2} = 4.4849 \qquad x_4 = \frac{5 - 4.4849 \times e^{0.5\times 4.4889}}{1.2} = -31.0262$$

çıkar, bu durumda iterasyonlar gerçek çözümden uzaklaşmaktadır.

2.4 *Newton-Raphson Yöntemi*

Newton[2]'un (yada Newton-Raphson[3]) metodu bir kök bulma probleminin çözümü için sayısal yöntemlerde en çok bilinen ve en kuvvetli yöntemdir. Newton yöntemini tanıtmak için aşağıdaki iki yolu verelim.

Eğer x_i gerçek kök ise $f(x_i) = 0$ dır. Eğriye $(x_0, f(x_0))$ noktasından geçen teğetin eğimi,

$$f'(x) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \quad \Rightarrow \quad x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

düzenlersek

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{2.4}$$

[2] Isaac Newton (1641-1727) tüm zamanların en çok tanınan, bir çiftçi ailesinin çocuğu olan, kıymeti ve yaptıkları sağlığında bilinen, maddi sıkıntı çekmede yaşayabilen ender bilim insanlarındandır. Fen ve Matematiğin bir çok alanında çalışmaları vardır. O, metodunu 1671 yılında $x^3 - 2x - 5 = 0$ polinomunun bir kökünü bulmak için kullanmıştır. Herne kadar polinomun kökünü bulmak için metodu kullansada, metod daha geniş alanlarda fonksiyonarın kökünü bulmak içinde rahatlıkla kullanılabilmektedir.

[3] Joseph Raphson (1648-1715) 1690 yılında Isac Newtona atfedilen metodun bir tarifini ondan bağımsız olarak vermiştir. Ne Newton nede Raphson herikiside yanlızca polinomları düşündükleri için metodun tanıtımında türevi açıkca kullanmamışlardır. Diğer matematikçiler de özellikle James Gregory (1636-1675) bu yöntemin

bulunur aynı işlemleri diğer x değerlerinede yapıp işlemleri genellersek;

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$
$$\vdots$$
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

bulunur. Aynı formülü Taylor serisindende elde edebiliriz. Taylor serisini x_i civarında açarsak

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f'(x_i) + (x_{i+1} - x_i)^2 f''(x_i) + \cdots$$

formülü gerçekleşmektedir. Burada x_{i+1} in gerçek köke çok yakın olduğunu varsayılırsa $f(x_{i+1}) \approx 0$ alınır, $(x_{i+1} - x_i)^2$ ve sonraki terimlerine ihmal edebiliriz. Bu durumda taylor serisinden;

$$0 = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f'(x_i)$$

ve buradan;

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{2.5}$$

elde edilir.

Örnek: $f(x) = e^x - 3x$ denkleminin kökünü $x_0 = 0$ için

(a) Sabit-nokta yöntemiyle

(b) Newton-Raphson yöntemiyle

bulunuz.

Çözüm:

(a) Denklemi $x = g(x)$ formunda yazılım.

$$e^x - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}e^x$$

$x_0 = 0$ dır.

$$x_1 = \frac{e^0}{3} = \frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{e^{1/3}}{3} = 0.465$$
$$x_3 = \frac{e^{0.465}}{3} = 0.530 \qquad x_4 = \frac{e^{0.530}}{3} = 0.567$$
$$x_5 = \frac{e^{0.567}}{3} = 0.587 \qquad x_6 = \frac{e^{0.587}}{3} = 0.5995$$
$$x_7 = \frac{e^{0.5995}}{3} = 0.607 \qquad x_8 = \frac{e^{0.607}}{3} = 0.612$$
$$x_9 = \frac{e^{0.612}}{3} = 0.615 \qquad x_{10} = \frac{e^{0.612}}{3} = 0.616$$

(b) Newton-Raphson ile;

$$f(x) = e^x - 3x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x - 3$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{x_i} - 3x_i}{e^{x_i} - 3}$$

başlangıç noktası $x_0 = 0$ dır.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{e^0 - 0}{e^0 - 3} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}$$
$$x_2 = 0.5 - \frac{e^{0.5} - 3.(0.5)}{e^{0.5} - 3} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0.6100596$$
$$x_3 = 0.6100596 - \frac{e^{0.6100596} - 3.(0.6100596)}{e^{0.6100596} - 3} \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0.618966$$
$$x_4 = 0.618966 - \frac{e^{0.618966} - 3.(0.618966)}{e^{0.618966} - 3} \quad \Rightarrow \quad x_4 = 0.619061$$

yaklaşık hata;

$$E_a = |x_4 - x_3| = |0.619061 - 0.618966| = 0.000095$$

Bağıl yaklaşık yüzde hata;

$$\varepsilon_a = \frac{S.D - Ö.D}{S.D} \times 100\% = \frac{0.619061 - 0.618966}{0.619061} \times 100\% = \%0.015$$

görüldüğü gibi Newton-Raphson yöntemi çok daha hızlı yaklaşım sağlamaktadır.

2.4.1 Newton-Raphson Yöntemi için Yakınsama Koşulu

Sabit-nokta iterasyonu için yakınsama kuralı $|g'(x)| < 1$ idi bu kural newton-raphson yöntemindede geçerlidir

$$\left| \left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right)' \right| = \left| \frac{f(x_0).f''(x_0)}{(f'(x_0))^2} \right| < 1 \tag{2.6}$$

olmalıdır. Önceki örnekteki yakısama durumuna bakalım

$$f(x) = e^x - 3x$$
$$f'(x) = e^x - 3$$
$$f''(x) = e^x$$

$x_0 = 0$ için

$$\left| \frac{f(0).f''(0)}{(f'(0))^2} \right| = \left| \frac{1.1}{(-2)^2} \right| = \frac{1}{4} < 1$$

yakınsama vardır.
$x_0 = 2$ için

$$\left| \frac{f(2).f''(2)}{(f'(2))^2} \right| = \left| \frac{10.29}{19.29} \right| < 1$$

yakınsama vardır. Denklemin kökleri yaklaşık olarak $x_1 = 0.619061$, $x_2 = 1.51213$ dır. Buna göre $x_0 = 2$ için denklemin diğer kökünü bulalım

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 - \frac{e^2 - 6}{e^2 - 3} = 1.683518$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1.683518 - \frac{e^{1.683518} - 3 \times 1.683518}{e^{1.683518} - 3} = 1.543481$$
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1.5335$$
$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \quad \Rightarrow \quad x_4 = 1.51213$$
$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} \quad \Rightarrow \quad x_5 = 1.51213$$

başlangıç değeri $x_0 = 5$ alınsa idi yakınsama olup olmayacağına bakalım;

$$f(5) = e^5 - 15 = 133.41$$
$$f'(5) = e^5 - 3 = 145.41$$
$$f''(5) = e^5 = 148.41$$

$$\left| \frac{f(5).f''(5)}{(f'(5))^2} \right| = \left| \frac{(133.41)(148.41)}{(143.41)^2} \right| = \left| \frac{19799.38}{20567.33} \right| < 1$$

yakınsama vardır ama kökten çok uzakta başlamış oluruz.

2.4.2 *Newton-Raphson Yöntemindeki Tuzaklar*

Newton-Raphson yöntemi yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi çoğu zaman etkili ve hızlı yaklaşım sağlamasına ragmen bazı durumlarda zayıf ve etkisiz kalmaktadır. Bu durum yakınsama kriterindeki ifadelerin yani $f(x)$ fonksiyonun birinci ve ikinci türevi ve fonksiyonun değeriyle ilgilidir.

(i) Kök civarında dönüm noktası olması durumunda ($f''(x) = 0$) kökten gittikçe uzaklaşma göstermektedir.

(ii) Başlangıç noktasını yerel maksimum veya minimumlar civarında seçersek diğer iterasyon değerleri salınma eğilimi göstererek köke yaklaşmayacaktır, hatta bu salınma devam edebilir veya egim ($f'(x)$) sıfır yada sıfıra yakın bir değer çıkabilir bu durumdada çözüm ya çıkmayacak yada ilgilendiğimiz aralığın çok dışında bir yere gidecektir.

(iii) Kökten çok uzakta bir yerden başlangıç noktası seçersekde yukarıdaki sebeplerdende dolayı köke sağlıklı bir şekilde yaklaşım olmayacaktır.

• Şimdi bir A sayısının n ci kuvvetten kök değerini bulmaya çalışalım. Bunun için

$$x = \sqrt[n]{A} \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^n - A$$

şeklinde yazılır

$$f(x) = x^n - A \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}$$
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad \Rightarrow \quad x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^n - A}{n\,.\,x_i^{n-1}}$$

payda eşitlenip düzenlenirse

$$x_{i+1} = \frac{(n-1)x_i^n + A}{n\,.\,x_i^{n-1}}$$

Karakök için $n = 2$ almalıyız.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2 - A}{2\,.\,x_i} = \frac{x_i + A}{2\,.\,x_i}$$

Küpkök için $n = 3$ almalıyız.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 - A}{3\,.\,x_i^2} = \frac{2x_i^3 + A}{3\,.\,x_i^2}$$

Örnek1: Newton-Raphson yöntemiyle $\sqrt{3}$ ün değerini hesaplıyalım. için yatay tablo türetiniz.

Çözüm: Karakök için $n = 2$ almalıyız. Bu durumda

$$f(x) = x^2 - 3, \qquad f'(x) = 2x$$

$$x_{i+1} = \frac{x_i^2 + 3}{2\,.\,x_i}$$

$x_0 = 1$ için

$$x_1 = \frac{1^2 + 3}{2\,.\,1} = 2$$
$$x_2 = \frac{2^2 + 3}{2\,.\,2} = 7/4 = 1.75$$
$$x_3 = \frac{(1.75)^2 + 3}{2\,.\,1.75} = 1.73214$$
$$x_4 = \frac{(1.73214)^2 + 3}{2\,.\,1.73214} = 1.73204$$

$\sqrt{3}$ ün gerçek değeri 1.73205 olduğundan yakınsama oldukça iyidir.

2.5 Secant Yöntemi

Newton-Raphson yöntemi hızlı yakınsama sağlayan iyi bir yöntemdir, fakat onun zayıf noktası $f(x)$ fonksiyonun türevinin gerekli olmasıdır. Polinomlar ve birçok değişik fonksiyonun türevini almakta sorun yoktur fakat bazen karmaşık fonksiyonların türevini almak zor olabilmektedir. Türev almada sorun yaşayabileceğimiz durumlarda Secant[4] yöntemi kullanılarak çözüm üretilebilir. Secant yöntemi Newton-Raphson yöntemine benzer bir yöntemdir fakat türevli ifade bu yöntemde kullanılmaz.

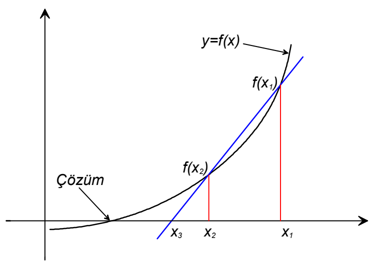
[4] Secant kelimesi latince kesme manasına gelen *secan* kelimesinden türetilmiştir. Secant yöntemi bir köke yaklaşmak için kesme doğrusu kullanır, bu doğru eğri üzerindeki iki noktayı birleştirerek eğriyi kesen bir doğrudur.

Secant doğrusunun eğimi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_1) - 0}{x_1 - x_2}$$

burada x_2 yanlız bırakılırsa

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)\,(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}$$



Şekil 2.11: Secant Yöntemi

x_2 noktasının bulunuşu gibi x_3, x_4, $\cdots$ bulunur. Denklemi genellersek x_{i+1} noktasını bulmak için x_i ve x_{i-1} noktalarını bilmemiz gerekir ve bu durumda denklemin genel hali:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)\,(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} \tag{2.7}$$

bulunur.

Aynı formülü Newton-Raphson yöntemindeki formüldende bulabiliriz.

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

bu eşitlik newtonun formülünde yerine yazılırsa

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{f(x_i)}{\frac{f(x_{i-1})-f(x_i)}{x_{i-1}-x_i}}$$

yada düzenlersek

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)\,(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

formülü bulunabilir.

Örnek: $f(x) = e^{-x} - x$ denkleminin kökünü $x_0 = 0,\ x_1 = 1$ için Secant yöntemiyle bulunuz. (Denklemin kökü $x = 0.567143$ dur.)

Çözüm:

$x_0 = 0,\ x_1 = 1$

Birinci İterasyon:

$$x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = 1.0000$$
$$x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = -0.63212$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)\,(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)} = 1 - \frac{-0.63212\,.\,(0-1)}{1-(-0.63212)} = 0.61270$$

$\varepsilon_t = \%8.0$ çıkar.

İkinci İterasyon:

$$x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = -0.63212$$
$$x_2 = 0.61270 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) = -0.07081$$

dikkat edilirse her iki değerde kökün aynı tarafındadır.

$$x_3 = 0.61270 - \frac{-0.07081\,.\,(1 - 0.61270)}{(-0.63212) - (-0.07081)} = 0.56384$$

$\varepsilon_t = \%0.58$ çıkar.

Üçüncü İterasyon:

$$x_2 = 0.61270 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) = -0.07081$$
$$x_3 = 0.56384 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) = 0.00518$$

$$x_4 = 0.56384 - \frac{0.00518\,.\,(0.61270 - 0.56384)}{(-0.07081) - (0.00518)} = 0.56717$$

$\varepsilon_t = \%0.00048$ çıkar.

i	x_i (N-R)	$\lvert\varepsilon_t\rvert$
0	0	100
1	0.5	11.8
2	0.566311003	0.147
3	0.567143165	0.0000220
4	0.567143290	$< 10^{-8}$