Bölüm 1

Hata Analizi

Sayısal yöntemler, elimizdeki matematiksel modeli (cebirsel denklem, diferansiyel denklem, integral, türev v.s.) sayıları kullanarak yaklaşık olarak çözme tekniklerini kapsar. Bu metodların verdiği sonuçlar sayılar ile ifade edildiğinden gerçek sonuçlar ile karşılaştırıldığında hatalar barındırır. Çözümlerin kullanılabilirliği için bu hataların büyüklüğü önemlidir. Hataların büyüklüğünü iyi analiz edebilmek için Hata kavramını sistematik bir şekilde ele alacağız.

1.1 Hata Tanımları

Sayısal yöntemlerde hata, yöntemden ve sayılarda yapılan kesme ve yuvarlatma hatalarından kaynaklanır. Matematiksel model oluştururken yapılan basitleştirici kabullerin yol açtığı hatalar da bu tanıma ilave edilebilir. Hata kısaca elde edilen yaklaşık bir değerin gerçek değer ile arasındaki farktır. Dolayısıyla Gerçek değer şu şekilde hesaplanır.

$$\text{Gerçek Değer} = \text{Yaklaşık Değer} + \text{Gerçek Hata}$$

Burada gerçek hata ise;

$$\text{Gerçek Hata}(E_t) = |\text{Gerçek Değer} - \text{Yaklaşık Değer}| \tag{1.1}$$

şeklindedir. Burada E (eror) hatayı t (true) ise bu hatanın gerçek değer kullanarak hesaplandığını gösterir. Mutlak değer kullanmamızın nedeni hatanın işareti ile değil büyüklüğü ile ilgilenmemizdir. Farklı ölçekteki problemleri karşılaştırırken hatanın büyüklüğü yetersiz kalmaktadır.

Örneğin bir dersin sorumlusu bir sınavdan öğrencinin biri 10 sorudan 5'ini yapmadığında başarılı olarak değerlendirmiyorsa, 100 soruluk bir sınavda yine aynı 5 soru hatalı yapan birini bu sefer yine başarısız olarak dğerlendiremez. Bunun nedeni bir sınavda 10 soruda 5 yalnış diğer sınavda 100 soruda 5 yanlış yapılmasıdır. Bu sınavlar için hata kriteri hatalı soru sayısı baz alınarak yapılırsa dersin sorumlusunun çok adaletli olmadığını söylememiz gerekir. Dolayısıyla soru sayısından bağımsız bir başarılı/başarısız kriteri uygulanmalıdır. Yukarıdaki örnektede anlatıldığı gibi sayısal yötemlerde de aynı mantık geçerlidir. Farklı şekil ve ölçekteki problemlerin de hatalarını karşılaştırabilmek için aşağıdaki "gerçek oransal bağıl hata" tanımlanabilir.

$$\text{Gerçek Oransal Bağıl Hata} = \frac{\text{Gerçek Hata}}{\text{Gerçek Değer}} = \frac{\text{G.H.}}{\text{G.D.}}$$

Bu hata tanımının daha kullanışlı olabilmesi için yüzde hata cinsinden tanımlayalım

$$\text{Gerçek Oransal Bağıl Yüzde Hata} = \varepsilon_t = \frac{\text{Gerçek Hata}}{\text{Gerçek Değer}}.\%100$$

olacaktır. Basitlik açısından kitabın bundan sonraki kısımlarında "gerçek oransal bağıl yüzde hata" yerine kısaca yüzde hata tanımını kullanacağız.

Örnek 1.1 *Bir köprü ve bir perçinin uzunluklarını ölçmekle görevlendirildiğinizi ve bunları sırasıyla* 9999 *cm ve* 9 *cm bulduğunuzu varsayalım. Eğer gerçek değer sırasıyla* 10, 000 *cm ve* 10 *cm ise her iki durum için (a) Gerçek hatayı (b) Gerçek bağıl yüzde hatayı hesaplayınız.*

(a) Köprünün ölçülmesindeki hata

$$E_t = 10,000 - 9999 = 1 \; cm$$

ve perçin için

$$E_t = 10 - 9 = 1 \; cm$$

(b) Köprü için gerçek bağıl yüzde hata

$$\varepsilon_t = (1/10,000).\%100 = \%0.01$$

ve perçin için

$$\varepsilon_t = (1/10).\%100 = \%10$$

Bu durumda; her iki ölçmedede 1 *cm'lik hata olduğu halde perçin için bağıl hata çok daha büyüktür. Bu durumda köprü için iyi bir ölçüm yaptığımız söylenebilir fakat perçin için iyi bir ölçüm yapılmamıştır.*

Sayısal yöntemlerde gerçek değerin bilinmesi ancak analitik çözümleri bilinen denklemler için geçerlidir. Buda özel bir yöntemin çözümlerinin geçerliliğini kontrol için uygulanan bir durumda mümkündür. Ancak gerçek uygulamalarda tam çözümleri bilmemiz mümkün değildir. Eğer ele aldığımız problemin gerçek değerleri yok ise hata hesaplamalarında yukarıdaki hata tanımlamalarını kullanamayız. Bu durumda en iyi yapılacak şey hatanın tolere edilebilir miktara indirilmesidir, bunun için aşağıdaki tanımlamayı yapabiliriz.

$$\varepsilon_a = \frac{\text{Yaklaşık Hata}}{\text{Yaklaşık Değer}} 100\% \tag{1.2}$$

burada a alt indisi (approximate) yaklaşık hatayı temsil eder. Mühendislik uygulamalarında (1.1) eşitliği, (1.3) eşitliğindeki hatanın hesaplanmasında kullanılmaz. Sayısal yöntemlerde zor işlerden biride gerçek değeri hakkında bilği sahibi olmadan hata tahminleri yapmaktır. Örneğin, belirli sayısal yöntemlerle çözüm yapmada *iterasyon* kullanılır. Bu gibi durumlarda, mevcut bir yaklaşım bir önceki yaklaşımın temeli üzerinde yapılır. Bu prosedürde ard arda, yada iterafif olarak, gittikçe iyileşen (umuduyla) yaklaşımlar uygulanır. Bu gibi durumlar için, hata genellikle o andaki yalaşık değer ile bir önceki yaklaşık değer arasındaki fark olarak tahmin edilir. Dolayısıyla bağıl yüzde hata aşağıdaki gibi bulunur

$$\varepsilon_a = \frac{|\text{Mevcut yaklaşık değer - Önceki yaklaşık değer}|}{\text{Mevcut yaklaşık Değer}} 100\% \tag{1.3}$$

Hata analizi yapıldığında hatanın pozitif yada negatif çıkması önemli değildir. Daha çok hatanın tolere edilebilecek miktarda olması önemlidir. Tolere edilebilecek yüzde hatayı ε_s ile belirtirsek bulduğumuz değer ε_s den mutlak değerce küçük olmalıdır. Bu durumda aşağıdaki şart sağlanıncaya kadar hesablamaya devam edilir.

$$\varepsilon_a < \varepsilon_s$$

Bu bağıntı iterasyonda durmamız gereken noktayı belirler, o yüzden *durma kriteri* olarakta kabul ederiz. Eğer bağıntı sağlanırsa, sonucun kabul edilebilir ε_s hata sınırları içinde kaldığı kabul edilir.

Hataları anlamlı basamak sayısıylada ilişkilendirmek yararlı olacaktır. Aşagıdaki kriter gerçekleştiği taktirde sonucun *en az n* anlamlı basamak için kesinlikle doğru olduğu gösterilebilir (Scarborough, 1966).

$$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\% \tag{1.4}$$

Örnek 1.2 (İteratif Yöntemler için Hata Tahminleri) *Matematikte fonksiyonlar çoğu zaman sonsuz serilerle gösterilebilir. Örneğin exponansiyel fonksiyon aşağıdaki gibi hesaplanabilir:*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \tag{1.5}$$

Böylece, dizinin içine ne kadar çok terim eklenirse, yaklaşım, e^x'in gerçek değerini o kadar daha iyi tahmin eder. (1.5) eşitliğine Maclauren Serisi Açılımı denir.

En basit şekilden, yani $e^x = 1$ den başlayarak, tek tek terimler ekleyerek $e^{0.5}$ sayısını tahmin edin. Her bir terimi ekledikten sonra, sırasıyla gerçek ve yaklaşık bağıl yüzde hatayı hesaplayın. Gerçek değerin $e^{0.5} = 1.648721\ldots$ olduğunu kabul edin. Yaklaşık hata tahmini ε_a'nın mutlak değeri, üç anlamlı basamak veren belirli bir ε_s hata kriteinden daha küçük oluncaya kadar terim eklemeye devam edin.

Çözüm 1 *Önce (1.4) eşitliği kullanılarak, sonucun en az üç anlamlı basamak için doğru olmasını garanti eden hata kriteri belirlenebilir:*

$$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-3})\% = 0.05\%$$

Demekki ε_a bu seviyenin altına ininceye kadarseriye term ekleyeceğiz.

İlk tahmin (1.5) eşitliğinin ilk terimine eşittir. Dolayısıyla ilk tahminimiz 1 rakamına eşittir. İkinci tahmin aşağıdaki gibi ikinci terimin eklenmesiyle elde edilir.

$$e^x = 1 + x$$

ve $x = 0.5$ için,

$$e^{0.5} = 1 + 0.5 = 1.5$$

bu değer, aşagıdaki gerçek bağıl yüzde hatayı verir.

$$\varepsilon_a = \left| \frac{1.648721 - 1.5}{1.648721} \right| \times 100\% = 9.02\%$$

(1.3) eşitliği kullanılarak hatanın yaklaşık bir tahmin aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\varepsilon_a = \left| \frac{1.5 - 1}{1.5} \right| \times 100\% = 33.3\%$$

ε_a, istenen ε_s değerinden küçük olmadığından, hesaplarımıza bir terim daha, $x^2/2!$, ilave ederek ve hataları yeniden bularak devam edeceğiz. İşleme $\varepsilon_a < \varepsilon_s$ oluncaya kadar devam edilir. Bütün hesaplar aşağıdaki tabloda verilmiştir;

Terimler	Sonuç	$\varepsilon_t\%$	$\varepsilon_a\%$
1	1	39.3	.
2	1.5	9.02	33.3
3	1.625	1.44	7.69
4	1.645833333	0.175	1.27
5	1.648437500	0.0172	0.158
6	1.648697917	0.00142	0.0158

Dolayısıyla 5 terim sonra yaklaşık hata $\varepsilon_s = 0.05\%$ değerinin altına iner ve hesaplama sona erer. Hatta anlamlı basamak sayısı altıncı terimde üçdende daha fazla olduğu görülmektedir. Burada hem gerçek bağıl hata yüzdesinin hemde yaklaşık bağıl hata yüzdesinin paralel değerlere doğru gittiğini söyleyebiliriz buda bizim yaklaşık bağıl yüzde hata tanımının çoğunlukla doğru çıkacağını gösterir, tabii ileri sürülen metodun kullanışlı olmasıda formülün doğru çıkmasını etkiler.

Sayısal yöntemlerde hesaplama yaparken bazı hatala oluşur bu hataları aşağıdaki gibi sıralayabiliriz.

1.2 Hataya Yol Açan Durumlar

1.2.1 Yuvarlama Hataları

π, e, $\sqrt{3}$ gibi irrasyonel sayıların virgülden sonraki terimleri sonsuza gider yada sabit sayıda anlamlı basamak yazılamaz. Bundan dolayı bilgisayarda tam olarak ifade edilemezler. Ayrıca bilgisayarlar 2-tabanlı gösterim kullandıklarından bazı 10-tabanlı sayılarıda hassas olarak ifade edemezler. Anlamlı basamakların bu şekilde ifade edilmesinden dolayı oluşan farka *yuvarlama hatası* denir.

1.2.2 Kesme Hataları

Sayısal yöntemlerde kullanılan seriler, belli bir yerde kesilip geri kalan terimlerinin atılması biçiminde kullanılır. Örneğin;

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

serisinden $e^{0.5}$ değerini elde etmek istediğimizde sonsuz seriyi alamayacağımızdan belli sayıda terim alınıp geri kalnını atmamız gerekir. Sayısal yöntemlerde bu tür hatalara *kesme hatası* denir.

1.2.3 Veri ve Formülasyon Hataları

Bu durumlar matematiksel modellemeyle ilgilidir. Modelin dayandığı fiziksel verilerin belirsizliği nedeniyle analizde bazen hatalar oluşur. Örneğin; düşen bir cisim modelinin denemek için bir cismi defalarca belli bir yükseklikten atarak belirli bir zaman sonra düşme hızını ölçtüğümüzde, bu ölçümlerde mutlaka belirsizlik olacaktır, çünki cismin bazı düşmelerinde diğerlerine göre daha hızlı olacaktır bu gibi durumlara *Veri ve Formülasyon Hataları* denir.

Alıştırmalar

1. $p = e^{0.1} - 0.231 \times 10^2$ değerini elde edebilmek için $e^{0.1}$'in seri açılımında ilk dört terimi alarak kesme hatası ile sonucu bulunuz. Sonra $e^{0.1}$'in hesap makinasında değerini bularak yuvarlama hatası ile sonucu bulunuz ve karşılaştırınız.
2. $p = \ln 3.5 + 2.5248569 + 0.0328289$

   (a) p değerini virgülden sonra üç anlamlı basamak için yuvarlama yaparak bulunuz.