III. BÖLÜM: SAYISAL İNTEGRASYON

$\int_a^b f(x)\,dx$ ...(1) İntegralinin yaklaşık değerini hesaplamada kullanılan temel metodlar sayısal integrasyon diye bilinir ve ağırlıklı olarak tek değişkenli integralin yaklaşık çözümünü bulmak için kullanılan sayısal integrasyon formülleri üzerinde duracağız. Bu tip formüllerin uygulanmasına;

1. $f(x)$'e uygun ilkel fonksiyon mevcut olduğu halde (1)'in kesin değerine ulaşmanın çok az hallerde mümkün olması,

2. $f(x)$ fonksiyonu analitik biçimde değil de, tablo biçiminde verilmesi nedenlerinden dolayı ihtiyaç duyulmaktadır.

Burada sunacağımız integral formülleri genel olarak $\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$ toplamını bulma işlemine dayanır ve $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$ ...(2) biçiminde yazılır. Burada a_i ler fomülün katsayıları, $x_i \in [a,b]$'lere ise formülün interpolasyon noktaları denir. Bu yüzden bu metodlar lagrange enterpolasyon polinomuyla birlikte kullanılırlar. $R_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$ farkına ise kuadratür formülün hatası veya kalan terimi denir.

Şimdi [a,b] aralığında n+1 tane farklı $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ noktalarını seçelim. Bu takdirde biliyoruz ki $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$ idi. Burada verilen $P_n(x)$ enterpolasyon polinomunu [a,b] aralığında integre edersek

$$a_i = \int_a^b L_i(x)\,dx \text{ olmak üzere } \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b P_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) \text{ olur.}$$

Şimdi eşit aralıklı noktalardaki birinci ve ikinci dereceden lagrange polinomlarını gözönüne alalım. Bu takdirde bu formüllerden bulunan sonuçlar sırasıyla trapezoidal (yamuk) ve Simpson Kuralları olarak bilinir.

III.1. Trapezoidal(Yamuk)Kuralı:

Kabul edelim ki $x_o = a, x_1 = b$ ve $h = b - a$ olsun. Önceki bölümden bildiğimiz üzere

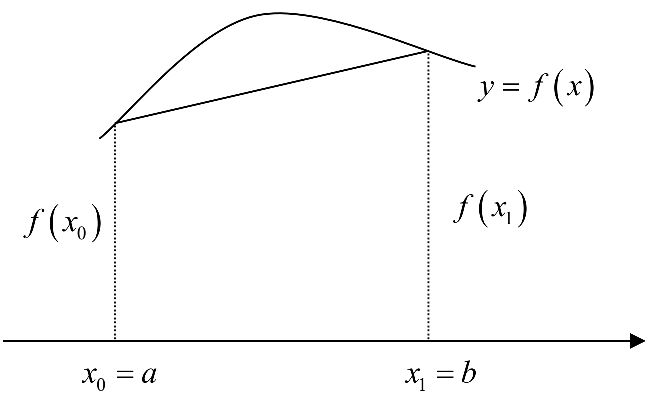
$$P_1(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) f(x_1)$$ idi. Bu takdirde

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) f(x_1) \right\} dx$$

$$= \frac{x_1 - x_0}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + R_i(f)$$

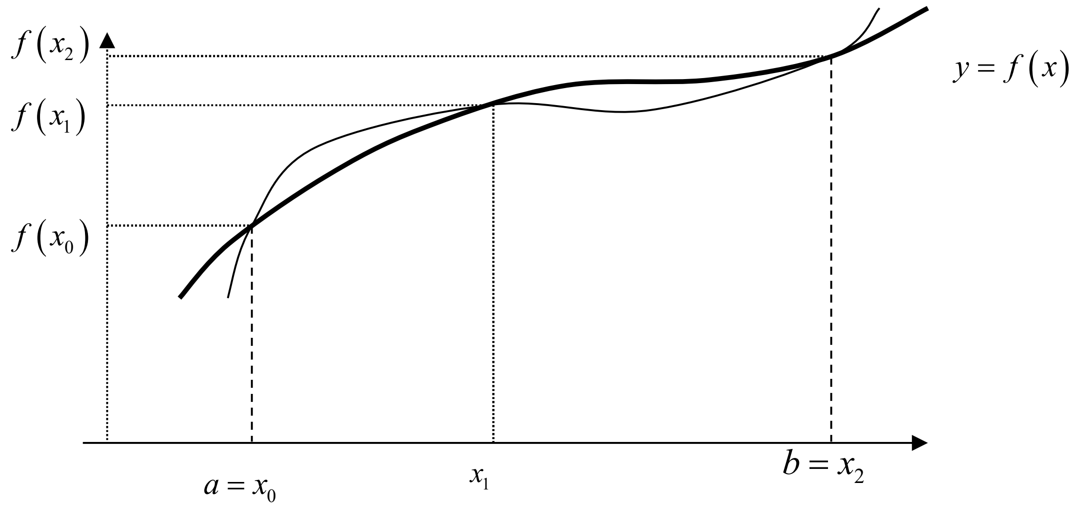
elde edilir.

Yamuk metodu aşağıdaki şekilden de kolayca görüleceği üzere basit geometrik anlama sahiptir. Şöyle ki, $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$ noktalarından geçen ve genişliği $h = b - a$ yükseklikleri ise $f(x_0), f(x_1)$ olan bir yamuğun alanıdır. Bu yüzden de bu kural Yamuk kuralı olarak adlandırılır.



III.2. Simpson Kuralı:

Aynı şekilde $x_0 = a$ ve $x_2 = b$ olsun. $x_1 = a + h$ ve $h = \dfrac{b - a}{2}$ olur. x_0, x_1, x_2 noktalarında ikinci dereceden lagrange polinomunu kullanarak $\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$ formülü bulunur ve Simpson kuralı olarak adlandırılır. Geometrik anlamı ise, yukarıdaki şekilde de görüldüğü gibi, $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ noktalarından geçen parabolün altında kalan bölgenin alanı $\frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$ değerinin hesaplanmasına dayanır.



Şimdi elde ettiğimiz Yamuk ve Simpson integrasyon kuralları ile bulunan yaklaşık çözümünün $\int_a^b f(x)\,dx$ integrali değerine ne kadar yakın bir sonuç verebilir sorusuna cevap arayalım. Bu soruya cevap vermeden önce integral ortalama değer teoreminin ifadesini verelim.

İNTEGRAL ORTALAMA DEĞER TEOREMİ:

Şayet $f(x)$ sürekli ve $g(x)$ $[a,b]$ aralığında integrallenebilir ve bu aralıkta işreti değişmiyorsa, bu takdirde $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$ olacak şekilde bir $\xi \in (a,b)$ vardır.

Bir önceki bölümden bildiğimiz gibi $p_1(x)$ lagrange polinomu hesaplanırken enterpolasyon işleminde oluşan hata formülü;

$$f(x) = p_1(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2} f''(\xi_x)\text{. Burada } \xi_x \in (a,b) \text{ olmak üzere}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b p_1(x)\,dx + \underbrace{\int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2} f''(\xi_x)\,dx}_{\text{yamuk kuralı için hata oranı}} \quad \text{yazabiliriz.}$$

O halde son eşitlikteki $(x-x_0)(x-x_1)$ teriminin $[x_0,x_1]$ aralığında işareti değişmemektedir. Böylece integral ortalama değer teoremini uygulayarak gösterebiliriz ki yamuk kuralından meydana gelen hata $\xi \in (x_0,x_1)$ olmak üzere

$$E_1(f) = \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)\,dx,$$

$$\Rightarrow E_1(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi).$$

SİMPSON KURALI İÇİN HATA TESPİTİ:

$\phi(t)=g(t)-\left(\frac{t}{h}\right)^5 g(h)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada,

$$g(t)=\int_{c-t}^{c+t} f(x)\,dx-\frac{t}{3}\{f(c+t)+4f(c)+f(c-t)\}$$

olmak üzere, işlemi $[0,h]$ aralığında göz önüne alıyoruz. Aralığın başlangıç ve bitiş noktalarında ϕ fonksiyonu sıfıra eşittir. Şimdi ϕ fonksiyonuna Rolle teoremini uygularsak $\phi'(\xi_1)=0$ olacak şekilde $\exists \xi_1\in(0,h)$ vardır. $\phi'(t)=g'(t)-5\left(\frac{t^4}{h^5}\right)g(h)$. Burada integral işareti altında türev (Leibniz Kuralı) kullanılırsa,

$$g'(t)=f(c+t)+f(c-t)-\frac{1}{3}\{f(c+t)+4f(c)+f(c-t)\}-\frac{t}{3}\{f'(c+t)-f'(c-t)\}$$

$$=\frac{2}{3}\{f(c+t)-2f(c)+f(c-t)\}-\frac{1}{3}t\{f'(c+t)-f'(c-t)\}$$ bulunur.

Şimdi $\phi'(0)=0=\phi'(\xi_1)$ olmak üzere $(0,\xi_1)$ aralığında ϕ' fonksiyonuna Rolle Teoremini uygularsak $\phi''(\xi_2)=0$ olacak şekilde $\exists \xi_2\in(0,\xi_1)$ ve $\phi''(t)=g''(t)-20\left(\frac{t^3}{h^5}\right)g(h)$

$$g''(t)=\frac{1}{3}\{f'(c+t)-f'(c-t)\}-\frac{t}{3}\{f''(c+t)+f''(c-t)\}$$

olarak bulunur. Bu şekilde devam edilerek $\phi''(0)=0=\phi''(\xi_2)$ olmak üzere $[0,\xi_2]$ aralığında ϕ'' fonksiyonuna Rolle Teoremini uygulanırsa $\phi'''(\xi_3)=0$ olacak şekilde $\exists \xi_3\in(0,\xi_2)$ vardır ve $\phi'''(t)=g'''(t)-60\left(\frac{t^2}{h^5}\right)g(h)$ bulunur ve buradan $g'''(t)=-\frac{t}{3}\left[f'''(c+t)-f'''(c-t)\right]$ dir.

Burada f fonksiyonunun $[c-h,c+h]$ aralığında ilk dört türevi mevcut olduğundan ortalama değer teoremini f''' e uygulayabiliriz. Böylece

$$\frac{f'''(c+t)-f'''(c-t)}{2t}=f^{(4)}(\mu)$$

olacak şekilde $\exists\mu\in[c-h,c+h]$ vardır. Buradan ϕ''' türevinin ξ_3 noktasındaki değerine bakılırsa $\phi'''(\xi_3)=0=-\frac{1}{3}\xi_3 2\xi_3 f^{(4)}(\mu)-60\left(\frac{t^2}{h^5}\right)g(h) \qquad (t=\xi_3)$

olur. Böylece en son yazılan ifadede $g(h)$ yalnız bırakılırsa ;

$g(h)=-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\mu)$ bulunur. Böylece

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\{f(c+h)+4f(c)+f(c-h)\} - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu).$$

III.3 BİRLEŞİK FORMÜLLER

$[a,b]$ aralığını $h = \dfrac{b-a}{n}$ olmak üzere n tane alt aralığa bölelim. $j = 0,1,\ldots,n-1$ olmak üzere $[x_j, x_{j+1}]$ ile ifade edelim. Her bir alt aralık üzerinde integrasyon kuralını uygularsak ve bunları toplarsak aşağıdaki formül bulunur.

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \text{ olur.}$$

III.3.1 Yamuk Kuralı

$$\theta(f) = \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1)+f(x_2)] + \ldots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

$$\theta(f) = \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_n)] + h[f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})]$$

bulunur. Kuralın toplam hatası ise,

$$E(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi_1) - \frac{h^3}{12} f''(\xi_2) - \ldots - \frac{h^3}{12} f''(\xi_n) \qquad j = 1,2,\ldots,n \qquad \xi_j \in (x_{j-1}, x_j).$$

Burada oluşan toplam hata $E(f) = -\dfrac{h^3}{12}\sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j)$ şeklinde de formüle edilebilir. Böylece $I(f) = \theta(f) + E(f)\ldots(*)$ elde edilir.

İntegral Ortalama Değer Teoreminin Ayrışmış Formülü

$\sum_{j=1}^{n} g_{ij} = G$ olmak üzere negatif olmayan sayıların bir cümlesi $g_1, g_2, \ldots, g_n$ olsun ve $\phi(x)$ de $[a,b]$ aralığında sürekli olsun. Bu takdirde $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ noktalarının herbiri için $\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\phi(\xi_j) = G\phi(\xi)$ olacak şekilde $\exists \xi \in (a,b)$ vardır. Bütün j ler için $g_j = 1$ olmak üzere bu sonucu $E(f)$ ye uygularsak $\phi = f''$ olmak üzere $\sum_{j=1}^{n} f''(\xi) = nf''(\xi)$ olacak şekilde $\exists \xi \in (a,b)$ vardır. Buradan

$$E(f) = -\frac{h^3}{12} nf''(\xi) \Rightarrow E(f) = -\frac{h^2}{12}(b-a) f''(\xi) \qquad \text{elde edilir.}$$

(yamuk kuralından : $h = \dfrac{(b-a)}{n} \Rightarrow b-a = nh \Rightarrow \dfrac{(b-a)}{h} = n$)

Örnek:

1. $h=0,2$ için $I(f)=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ integralinin yaklaşık çözümünü birleşik yamuk kuralı ile bulunuz.
2. $h=0,1$ ve $h=0,05$ için bu kural ile hesaplamanın yakınsaklığını araştırınız ve bunu tablo ile gösteriniz.
3. $I(f)$ için bulduğunuz çözümün 4 ondalık basamak için h 'ın hangi değerlerinde daha ileri sonuç verdiğini araştırınız.

Çözüm:

1.

$$b-a=nh \Rightarrow 1-0=n\cdot 0,2 \Rightarrow n=5, \quad f(x)=\frac{1}{1+x}$$

$$x_0=0 \quad x_5=1$$

$$x_j=x_0+hj$$

$$x_1=x_0+h=0+0,2=0,2$$

$$x_2=x_0+2h=0+0,4=0,4$$

$$\theta(f)=\frac{0,2}{2}\left[1+\frac{1}{2}\right]+0,2\left[\frac{1}{1,2}+\frac{1}{1,4}+\frac{1}{1,6}+\frac{1}{1,8}\right]=0,6956$$

2.

h	N	$\theta(f)$
0,2	5	0,6956
0,1	10	0,6938
0,05	20	0,6933

3. $\left|E(f)\right|<\frac{1}{2}10^{-4}$ olacak şekilde h=1 seçelim. Böylece $\left|E(f)\right|<k\cdot 10^{-4}$ olduğundan

burada ;

$$k=\frac{b-a}{12}\sup_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|$$

$$b-a=1 \quad ,f(x)=\frac{1}{1+x} \quad ,f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$$

olduğundan

$$k=\frac{1}{12}\cdot 2=\frac{1}{6}\ ve \quad \frac{1}{6}h^2<\frac{1}{2}10^{-4} \quad (olacak\ şekilde \quad seçtik)$$

$$\Rightarrow h=0,0173 \Rightarrow (b-a)=nh \Rightarrow nh=1 \Rightarrow n=58 \rightarrow h=\frac{1}{58}$$

Birleşik Yamuk Kuralı Sonucunun Hassaslığı

Şayet f fonksiyonu iki kere diferansiyellenebilir sürekli ise ;

- Bütün $f(x) = ax + b$ lineer fonksiyonları için $E(f) = 0$ dır.
- $h \to 0 \quad E(f) = 0(h^2)$ (hata h bağlı olarak ikinci derecedendir.)

$\left|E(f)\right| < kh^2, \quad k = \dfrac{b-a}{12} \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|$ olması demek birleşik yamuk kuralının yakınsak olması demektir. Yani $h \to 0$ iken $E(f) \to 0$.

III.3.2 Birleşik Simpson Kuralı

Her bir alt aralığın uzunluğu $h = \dfrac{b-a}{2n}$ olmak üzere $[a,b]$ aralığını 2n tane eşit aralıklara bölelim.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx$$

yazılabilir. Buradaki her bir integrale Simpson kuralı formülünü uygularsak,

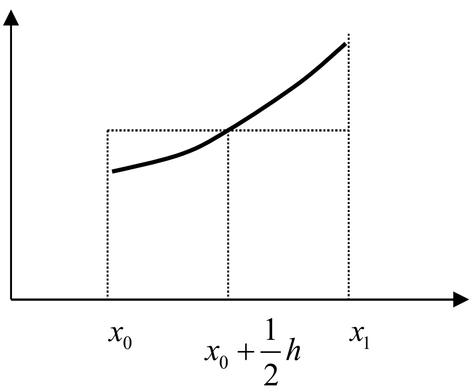
$$\theta(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] + \frac{h}{3}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right] + \ldots + \frac{h}{3}\left[f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\right]$$

$$\theta(f) = \frac{h}{3}\left\{\left[f(x_0) + f(x_{2n})\right] + 4\left[f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1})\right] + 2\left[f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2n-2})\right]\right\}$$

Orta-Nokta Kuralı

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \cong hf\left(x_0 + \tfrac{1}{2}h\right)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \cong h\sum_{r=0}^{n-1} f\left(x_1 + \tfrac{1}{2}h\right)$$



III.3.3 Romberg İntegrasyonu

Sayısal integrasyon kurallarında hata terimini limit durumunda extrapolasyon ile eleyebiliriz. Böylece yamuk kuralını kullanarak $\int_a^b f(x)\,dx$ integralinin yaklaşık çözümünü n tane eşit aralıkta T_n ile temsil edelim. Euler-Maclourin formülünden;

$$\int_a^b f(x)\,dx = T_n + A_2h^2 + A_4h^4 + A_6h^6 + \ldots$$

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx \cong \left\{ f_0 + f_2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i \right\} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j h^{2j}\right) \qquad \ldots 1$$

bulunur. Burada $b-a=nh$ dır.

Diğer yandan $\int_a^b f(x)\,dx$ integralinin 2n tane eşit mesafede alt aralık kullanarak yamuk kuralı ile çözümünü T_{2n} ile temsil edersek bu takdirde ;

$$\int_a^b f(x)\,dx = T_{2n} + A_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 + A_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \ldots \qquad \ldots 2$$

bulunur. Şimdi h^2 değerini (1) ve (2) de yok edersek yaklaşık çözümü h a göre dördüncü mertebeden buluruz.(2) yi 4 ile çarpar ve (1) i (2) den çıkarırsak ;

$$3\int_a^b f(x)\,dx = 4T_{2n} - T_n + 4A_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 - A_4h^4 + O\left(h^6\right)$$

bulunur.

$\int_a^b f(x)\,dx = \dfrac{\left(4T_{2n}-T_n\right)}{3} - \dfrac{3A_4h^4}{4} + O\left(h^6\right)$ eşitliğinden $\dfrac{\left(4T_{2n}-T_n\right)}{3}$ olarak bulunur.

Buraya kadar anlattığımız kural Romberg İntegrasyonu olarak bilinir. Buna göre bir önceki örnekte $T_5 = 0,6956$ ve $T_{10} = 0,6938$ bulunmuştu. Böylece daha iyi bir yaklaşık çözüm Romberg İntegrasyonu ile 0,6932 olarak bulunur.

III.4 ORTAGONAL POLİNOMLAR

Tanım: $\{P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots\}$ polinomlarının kümesi $[a,b]$ aralığında $\omega(x) \geq 0$ ağırlık fonksiyonuna bağlı olmak üzere, eğer $r \neq s$ için

$$\int_a^b \omega(x) p_r(x)\, p_s(x)\,dx = 0$$

şartı sağlanıyorsa, bu tür polinomlar $[a,b]$ aralığında ortagonaldirler denir.

Örnek: $\omega(x)=1$ olmak üzere $[-1,1]$ aralığındaki ilk birkaç ortagonal polinomu oluşturunuz.

Çözüm: Bunun için ilk olarak $p_0(x)=1$ alalım ve kabul edelim ki her bir $p_r(x)$ polinomununda, polinomun derecesini veren x'li terimin katsayısı 1 olsun. Buna göre $p_1(x) = x + a$ alalım. Burada a p_1, p_0'a ortagonal olacak şekilde bulunacaktır. Yani

$$\int_{-1}^{1} p_1(x) p_0(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (x+a)\,dx = 0.$$

Gerekli integral işlemlerinden sonra $a=0$ olarak bulunur. O halde $p_1(x)=x$.

Şimdi $p_2(x)=x^2+bx+c$ alalım. Burada b,c sabitleri p_2,p_1 ve p_0'a ortagonal olacak şekilde seçilecektir. Böylece,

$$\int_{-1}^{1} p_2(x)p_0(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\left(x^2+bx+c\right)dx=0=\frac{2}{3}+2c\Rightarrow c=-\frac{1}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} p_2(x)p_1(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\left(x^2+bx+c\right)x\,dx=0=\frac{2}{3}b\Rightarrow b=0$$

$$\therefore\ p_2(x)=x^2-\frac{1}{3}$$

bulunur. Integral işlemi bu şekilde devam ettirilirse diğer bazı ortagonal polinomlarda benzer şekilde bulunabilir.

Şimdiye kadar tartıştığımız sayısal integral kurallarında eşit adımlı noktalar kullanıldı. Bununla birlikte yine aynı sayıda fakat eşit adımlı olmayan noktalar kullanılarak da yaklaşık çözümün duyarlılığı belki de artırılabilir. Yani, işleme dahil edilen noktalar arasındaki uzaklık eşit olmamak kaydıyla daha duyarlı bir sayısal integral yaklaşımı elde etmek mümkün olabilir. Bunun olabilirliğini bize aşağıdaki kural vermektedir.

III.4.1 Gauss İntegral Kuralı:

x_i noktaları kesinlikle eşit adımlı noktalar olmamak üzere

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i) \qquad 1$$

kuadratür formülünü göz önüne alalım. Şayet f ve g fonksiyonları için integral kuralı tam ise (hatası sıfır), integral kuralı α ve β reel sabitler olmak üzere $\alpha f+\beta g$ fonksiyonu içinde tamdır. Böylece, yukarıda verilen integral kuralı kuralı her bir $1,x,x^2,\ldots,x^n$ monomialleri için tamsa *n.* dereceye kadar her bir polinom içinde tam olacaktır,. Bunun terside doğrudur. Dolayısıyla, eğer kuadratür kural $f(x)=x^j$ için tam ise biz,

$$\int_{-1}^{1} x^j\,dx=\sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i^j \qquad 2$$

yazabiliriz. Buradan $j=0,1,2,\ldots,2n+1$ alarak $2n+2$ tane bilinmeyen ω_i ve x_i $(0\le i\le n)$ leri içeren $2n+2$ tane denklem çözülecektir. Bu formül, derecesi $2n+1$ veya daha düşük dereceli bütün polinomlar için tam olacaktır. Böylece 1 nolu formül en iyi duyarlı formüldür. Buradaki denklemler lineer olmadığından dolayı bir reel çözümün bulunup bulunamayacağı açık değildir. Bu yüzden ω_i-ağırlık ve x_i-bileşenleri en iyi duyarlı olacak şekilde bulunmalıdır.

Kabul edelim ki $\Phi_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$ ve $p_n(x)$ $n.$ veya daha düşük dereceli bir polinom olmak üzere bir çözüm $f(x)=\Phi_{n+1}(x)p_n(x)$ olacak şekilde var olsun. Bu takdirde, $f(x)$ $2n+1$ veya daha düşük dereceli bir polinom olmak üzere integral kuralı mutlaka tam sonuç verecektir. Şimdi, $p_n(x)$ derecesi n veya daha düşük dereceli bir polinom olduğundan $f(x)$ $j=0,1,2,\ldots,n$ için x_j noktalarında gerçekten sıfır olmak üzere

$$\int_a^b \Phi_{n+1}(x)p_n(x)\,dx=\sum_{i=0}^{n}\omega_i\Phi_{n+1}(x_i)\,p_n(x_i)=0.$$

Biliyoruz ki, Φ_{n+1} kendisinden daha düşük dereceden her bir polinom ile ortagonaldir. Böylece $\omega(x)=1$ ağırlık fonsiyonuna bağlı olarak $[a,b]$ aralığındaki ortagonal polinomların kümesinin $(n+1)$ dereceli üyesi olmak zorundadır. Böyle polinomların bütün sıfırları, reel, farklı ve $[a,b]$ aralığındadır. Φ_{n+1} polinomlarının kökleri olarak x_j-ler ve ağırlıkları ω_j-ler ilk $n+1$ tane denklemin çözümü ile tanımlanabilirler. Bu denklemler $0\le j\le n$ için

$$\int_a^b x^j\,dx=\sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i^j$$

İle bellidir. Bunu $n=1$ için aşağıda verilen örnekle elde edelim.

Örnek: $[-1,1]$ aralığında $\omega(x)=1, n=1$ için $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i)$ eşitliğini hesaplayalım.

O halde $\Phi_2(x)=x^2-\frac{1}{3}$ olduğundan $x_0=-\frac{1}{\sqrt{3}}, x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$ olarak bulunur. Böylece

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\omega_0 f(x_0)+\omega_1 f(x_1)$$

eşitliğinde

$f(x)=1$ için $2=\omega_0+\omega_1\ldots(*)$

$f(x)=x$ için $0=\omega_0\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\omega_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

buradan $\omega_0=\omega_1$ bulunur. Böylece $(*)$ dan $\omega_0=\omega_1=1$ bulunur.

$$\therefore \int_{-1}^{1} f(x)dx=f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+E \qquad 3$$

olarak hesaplanır. Burada E, $f(x)$ derecesi üç veya daha düşük dereceli polinomlar olmak üzere sıfırdır. 3-nolu formül $n=1$ için *Gauss* Formülü olarak adlandırılır. Gerçekten, formül $f(x)$ üç yada daha düşük dereceli polinom iken tam olduğu açıktır.

Yukarıdaki örnek aşağıdaki gibi de çözülebilir.

$$\int_a^b x^j dx = \sum_{i=0}^{n} \omega_i x_i^j$$

ve

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1).$$

$$j = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^0 dx = \omega_0 x_0^0 + \omega_1 x_1^0 \Leftrightarrow 2 = \omega_0 + \omega_1$$

$$j = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^1 dx = \omega_0 x_0^1 + \omega_1 x_1^1 \Leftrightarrow 0 = \omega_0 x_0 + \omega_1 x_1$$

$$j = 2 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^2 dx = \omega_0 x_0^2 + \omega_1 x_1^2 \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \omega_0 x_0^2 + \omega_1 x_1^2$$

$$j = 3 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^3 dx = \omega_0 x_0^3 + \omega_1 x_1^3 \Leftrightarrow 0 = \omega_0 x_0^3 + \omega_1 x_1^3$$

denklemleri elde edilir. Burada ikinci denklemi x_0^2 ile çarpar, dördüncü denklemden çıkarırsak

$$x_1(x_1 - x_0)(x_1 + x_0) = 0$$

sonucu bulunur. Buradan da $x_1 = -x_0$ elde edilir. Bu sonuç diğer denklemlerde yerine yazılırsa

$\omega_0 = \omega_1 = 1, x_0^2 = \dfrac{1}{3}$ çıkar. Dolayısıyla

$$\therefore \int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

bulunur.

Singular İntegral : İntegral işleminde $\int_0^1 \log x \cos x dx$ integralinde olduğu gibi bazen singularity ile karşılaşabiliriz. Yukarıda verilen integral $x = 0$ noktasında sonsuz olduğu açıkça bellidir. Gerçekten, integralin var olmasına rağmen polinom kullanarak integralin sayısal olarak bir yaklaşık çözümünün duyarlı olarak elde edilebilmesi mümkün görülmemektedir. Bu zorluk

$$\int_0^1 \log x \cos x dx = \sum_{j=0}^{n} \omega_j f(x_j) + E_n$$

formundaki formül kullanılarak aşılabilmektedir. Burada polinom kullanımı integrali alınacak tüm ifade için değil, sadece $f(x)$ fonksiyonu için yapılmaktadır.

Yukarıda verilen formül, şayet x_j noktaları $[0,1]$ aralığında ağırlık fonksiyonu $\log x$ 'e bağlı olarak ortagonal polinom olan $\Phi_{n+1}(x)$ polinomunun sıfırları olarak seçilmeleri kaydıyla, f derecesi $2n+1$ veya daha düşük dereceden bir polinom için tam olacaktır. Böyle polinomlar $r \neq s$ için $\int_0^1 \log x \Phi_r(x)\Phi_s(x)dx = 0$ şartını sağlamaktadır.

Örnek: Her bir polinom için $E=0$ 0lmak üzere $\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx = \omega_1 f(0) + \omega_2 f(x_2) + E$ eşitliğindeki ω_1, ω_2 ve x_2 değerlerini bulunuz. $x \in [0,\infty]$ olmak üzere genel olarak verilen $f(x)$ için, verilen $|f'''(x)| < M$ değerine karşılık E nin değerini bulunuz.

Çözüm: Integral kuralı her ikinci dereceden polinom için tam olduğundan $1, x, x^2$ monomialleri içinde tam olacaktır. Dolayısıyla,

$$f(x) = 1 \Rightarrow 1 = \omega_1 + \omega_2$$
$$f(x) = x \Rightarrow 1 = \omega_1.0 + \omega_2 x_2$$
$$f(x) = x^2 \Rightarrow 2 = \omega_1.0 + \omega_2 x_2^2$$
$$\therefore 2 = (\omega_2 x_2) x_2$$
$$\Rightarrow x_2 = 2$$
$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{2} = \omega_1$$

bulunur. Böylece,

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx = \frac{1}{2}\left[f(0) + f(2)\right] + E$$

elde edilir.

Genel olarak verilen $f(x)$ fonksiyonu için biz $f(x) = p_2(x) + e_2(x)$ yazabiliriz. Burada $\xi_x \in (0,x)$ için $x=0$ noktasında $f(x)$ fonksiyonunu Taylor serisine açarsak

$$p_2(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(0)$$

ve

$$e_2(x) = \frac{1}{6}x^3 f'''(\xi_x)$$

olacaktır. Integral kuralı $p_2(x)$ için tam olduğundan

$$E=\int_0^\infty e^{-x}f(x)dx-\left[\omega_1 f(0)+\omega_2 f(x_2)\right]$$
$$=\int_0^\infty e^{-x}p_2(x)dx-\left[\omega_1 p_2(0)+\omega_2 p_2(x_2)\right]$$
$$+\int_0^\infty e^{-x}e_2(x)dx-\left[\omega_1 e_2(0)+\omega_2 e_2(x_2)\right]$$

$$\therefore E=\frac{1}{6}\int_0^\infty e^{-x}x^3 f'''(\xi_x)dx-\frac{1}{6}.\frac{1}{2}\left[2^3 f'''(\xi_2)\right]$$
$$\leq\frac{1}{6}\int_0^\infty e^{-x}x^3\left|f'''(\xi_x)\right|dx+\frac{1}{12}.8\left|f'''(\xi_2)\right|$$
$$\leq\frac{M}{6}\int_0^\infty e^{-x}x^3dx+\frac{2M}{3}$$
$$=M+\frac{2M}{3}$$
$$=\frac{5M}{3}$$

bulunur.