LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde $f_i(x_1,x_2,\dots,x_n)=0 \quad (i=1,2,\dots,n)$ şeklinde n adet denklemi aynı anda sağlayan $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ değerleri araştırılacaktır.
Şayet $f_i(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$ denklemleri aşağıdaki gibi yazılırsa lineer denklem sistemi olarak adlandırılır.

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\
&\vdots\\
&a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n
\end{aligned}
$$

Bu sistem matris formunda

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}\end{bmatrix},\ x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

şeklinde veya kısaca

$$Ax=B$$

olarak ta yazılabilir.

IV.1. Grafik Metodu

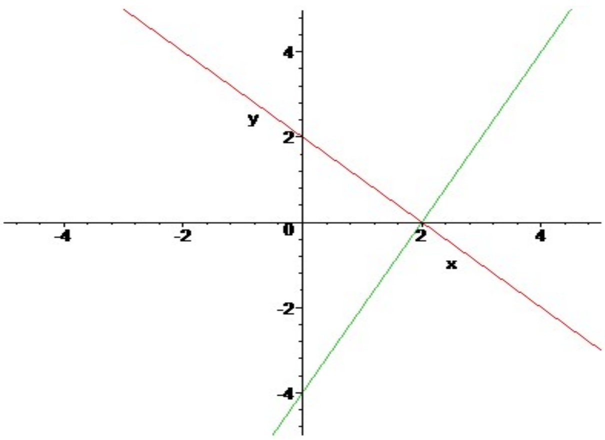
Bu yöntem ikiden fazla bilinmeyen içeren denklem sistemlerine uygulanamaz. Ayrıca bu yöntemde çözümler hakkında geometri yardımıyla yorum yapılabilir.

Örnek:

$$
\begin{aligned}
x+y&=2\\
2x-y&=4
\end{aligned}
$$

İle verilen denklem sisteminin çözümünü grafik metodu ile araştırınız.

Çözüm:

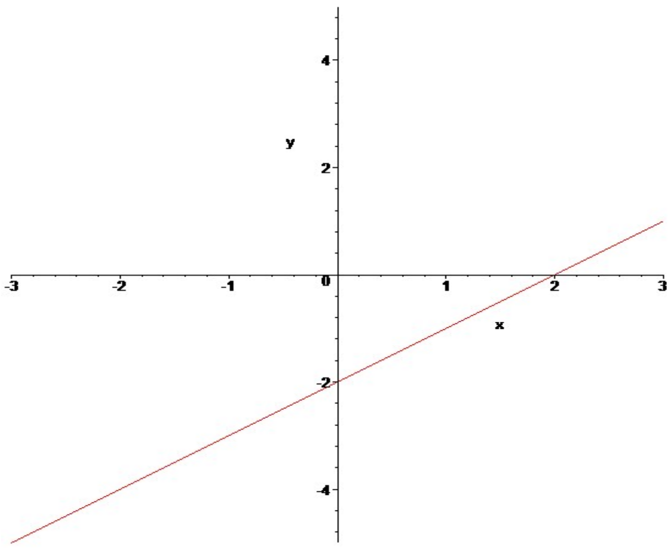


Örnek:

$$x - y = 2$$
$$2x - 2y = 4$$

İle verilen denklem sisteminin çözümünü grafik metodu ile çözünüz.

Çözüm:



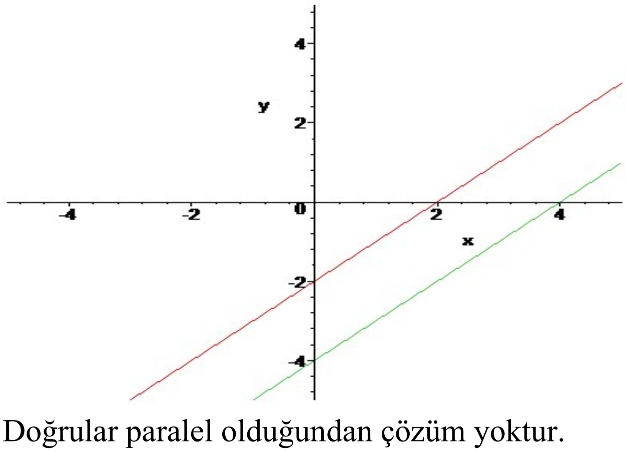
Doğrular çakışık olduğundan sonsuz sayıda çözüm vardır.

Örnek:

$$x - y = 2$$
$$x - y = 4$$

verilen denklem sisteminin çözümünü grafik metodu ile çözünüz.

Çözüm:



Doğrular paralel olduğundan çözüm yoktur.

Bir denklem sisteminde eğer bir denklem diğer denklemlerden birinin belirli bir katı ya da diğer birkaç denklemden elde edilebilen bir sonuç değilse bu denklem bağımsızdır denir.
Bir denklem sisteminde bağımsız denklem sayısına o sistemin rankı denir. Bunun için katsayılar matrisine bakılır. Eğer katsayılar matrisinin rankı bilinmeyen sayısından küçükse

sistemin tek çözümü yoktur. Böyle sistemler sayısal olarak çözülemezler (çakışıktır). Bunu kontrol etmenin başka bir yolu da katsayılar matrisinin determinantına bakmaktır. Eğer determinant sıfırdan farklı ise sistemin tek çözümü vardır. Şayet determinant sıfır ise sistemin tek çözümü yoktur.

IV.2. Determinantlar ve Cramer Yöntemi

Bu yöntemin üç bilinmeyenli denklem sistemleri için kullanışlı olduğunu söyleyebiliriz ve aşağıdaki gibi yazılmış üç bilinmeyenli denklem için uygulamasını şu şekilde yapabiliriz.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Burada,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$detA = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ve

$$|D_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, |D_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, |D_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{|A|}, x_2 = \frac{D_2}{|A|}, x_3 = \frac{D_3}{|A|}$$

Örnek:

$$0.3x_1 + 0.52x_2 + x_3 = 0.01$$
$$0.5x_1 + x_2 + 1.9x_3 = 0.67$$
$$0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.5x_3 = -0.44$$

verilen denklem sisteminin çözümünü Cramer yöntemi ile bulunuz.

Çözüm:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0.3 & 0.52 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1.9 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{vmatrix} = (0.15 + 0.15 + 0.0988) - (0.1 + 0.171 + 0.13) = -0.0022$$

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 0.01 & 0.52 & 1 \\ 0.67 & 1 & 1.9 \\ -0.44 & 0.3 & 0.5 \end{vmatrix} = 0.0313$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} 0.3 & 0.01 & 1 \\ 0.5 & 0.67 & 1.9 \\ 0.1 & -0.44 & 0.5 \end{vmatrix} = 0.0637$$

$$|D_3| = \begin{vmatrix} 0.3 & 0.52 & 0.01 \\ 0.5 & 1 & 0.67 \\ 0.1 & 0.3 & -0.44 \end{vmatrix} = -0.0425$$

$$x_1 = \frac{-0.0313}{0.0022} = -14.2272$$

$$x_2 = \frac{-0.0637}{0.0022} = -28.9545$$

$$x_3 = \frac{0.0425}{0.0022} = 19.3181$$

IV.3. Bilinmeyenlerin Yok Edilmesi Yöntemi

Bu yöntemi iki bilinmeyenli lineer denklem sistemleri üzerinde gösterelim.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \qquad (1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \qquad (2)$$

(1)denklemini a_{21} ve (2) denklemi $-a_{11}$ ile çarpılır ve bu denklemler taraf tarafa toplanırsa, x_1 değişkeni yok edilerek x_2 aşağıdaki gibi bulunur.

$$a_{21}a_{11}x_1 + a_{21}a_{12}x_2 = a_{21}b_1$$
$$-a_{11}a_{21}x_1 - a_{11}a_{12}x_2 = -a_{11}b_2$$

$$\Rightarrow (a_{21}a_{12} - a_{11}a_{12})x_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2$$

$$\Rightarrow \; x_2 = \frac{a_{21}b_1 - a_{11}b_2}{a_{21}a_{12} - a_{11}a_{12}}$$

Elde edilen x_2 değeri denklemlerden birinde yerine yazılırsa gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$x_1 = \frac{a_{21}b_1 - a_{21}a_{12}\,x_2}{a_{21}a_{11}}$$

olarak bulunur.

Örnek:

$$3x_1 + 2x_2 = 18$$
$$-x_1 + 2x_2 = 2$$

Yukarıda verilen denklem sistemini çözünüz.

Çözüm:

$$3x_1 + 2x_2 = 18$$
$$-x_1 + 2x_2 = 2$$

İkinci denklemi 3 ile çarpıp üstteki denklem ile toplarsak,

$x_2 = 3 \Rightarrow x_1 = 4$

olur. $Ç.K. = (4,3)$

IV.4. Gauss-Jordon Yok Etme Yöntemi

Gauss-Jordon yok etme yönteminde verilen denklem sistemine basit elemanter işlemlerin uygulanmasıyla çözümü kolay bir şekilde elde etmek amaçlanır. Yani artırılmış matrise aşağıdaki gibi işlemler uygulayarak çözüme direkt ulaşılabilen bir matrisle denklem sisteminin çözümü elde edilir. Bunun için;

1) Lineer denklem sisteminin artırılmış matrisi yazılır.
2) Elemanter satır işlemleri uygulanarak artırılmış matrisin eşelon formu elde edilir. Yani bu işlemle pivotu "1" yapmamız amaçlanmaktadır. Daha sonra her pivotun altındaki ve üstündeki elemanlar ilk sütundan başlanarak "0" yapılır.
3) Böylece indirgenmiş eşelon forma karşılık gelen lineer denklem sistemi yazılır ve denklem sisteminin çözümü bulunur.

Bu adımlar izlendiğinde $[[A][x] = [B] \Rightarrow [A:B]]$ $[A:B]$ artırılmış matrisi $[A^*:B^*]$ formuna dönüşecektir.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \qquad [A][x] = [B] \Rightarrow [A:B] \Rightarrow [A^*:B^*]$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \\ b_4^* \\ \vdots \\ b_n^* \end{matrix}\right| = [A^*:B^*]$$

ve böylece lineer denklem sisteminin çözümü

$x_1 = b_1^*, x_2 = b_2^*, x_3 = b_3^*, \dots, x_n = b_n^*$ şeklinde elde edilir.

Örnek: Lineer denklem sistemleriyle polinom katsayılarını belirleyebiliriz. Verilen (x_1,y_1), (x_2,y_2), …, (x_n,y_n) noktaları için $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ Bu polinom denklemini yazmak için denklemdeki katsayıların hesaplanması gerekmektedir. O halde verilen noktalar polinom denkleminde yerine yazılarak elde edilen denklem sisteminden katsayılar belirlenebilir. Örneğin, $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$olmak üzere $(1,6),(2,3)$ ve $(3,2)$ noktalarından geçen polinom denklemini bulalım.

$6 = a_0 + a_1 + a_2$

$3 = a_0 + 2a_1 + 4a_2$

$2 = a_0 + 3a_1 + 9a_2$

Bu sistemden de $\begin{vmatrix} 1^* & 1^* & 1^* \\ 1^* & 2^* & 4^* \\ 1^* & 3^* & 9^* \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{vmatrix}$ elde edilir.

IV.5. Gauss Yok Etme Yöntemi

Gauss yok etme yönteminin çözüm tekniği hemen hemen Gauss-Jordon yok etme yöntemiyle aynıdır. Yine aynı şekilde lineer denklem sisteminin çözümünde denklemin çözümü kolay hale gelinceye kadar artırılmış matrise elemanter satır işlemleri uygulanır. Yukarıda yazdığımız denklem sisteminde katsayılar matrisi $[A]$ ve artırılmış matris $[A:B]$ olmak üzere burada $\boldsymbol{A}$ katsayılar matrisinin asal köşegen elemanları "1" olacak şekilde bir üst üçgen matris haline dönüştürülmesiyle;

$$[A^*: B^*] = \begin{vmatrix} 1 & a_{12}^* & a_{13}^* & a_{14}^* & \dots & a_{1n}^* \\ 0 & 1 & a_{23}^* & a_{24}^* & \dots & a_{2n}^* \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & a_{3n}^* \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1{}^* \\ b_2{}^* \\ b_3{}^* \\ b_4{}^* \\ \vdots \\ b_n{}^* \end{vmatrix}$$

şeklinde yazılır.
Nihayetinde $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ bilinmeyenler, $x_n = b_n{}^*$ olmak üzere geriye yerine koyma yöntemiyle sırasıyla bulunur.

$n = 3$ durumunda,

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12}{}^* & a_{13}^* \\ 0 & 1 & a_{23}^* \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1{}^* \\ b_2{}^* \\ b_3{}^* \end{vmatrix}$$

olur.

$x_1 + a_{12}{}^* x_2 + a_{13}^* x_3 = b_1{}^*$
$x_2 + a_{23}^* x_3 = b_2{}^*$
$x_3 = b_3{}^*$

$\Rightarrow x_2 = b_2{}^* - a_{23}^* b_3{}^* \Rightarrow x_1 = b_1{}^* - a_{12}{}^* x_2 - a_{13}^* x_3$

IV.6. Ters Matris Yöntemi

Eğer bilinmeyen sayısı denklem sayısına eşit ve katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı ise $Ax = B$ sisteminin çözümü $x = A^{-1}B$ şeklinde bulunur. Gerçekten $detA \neq 0$ olduğunda A^{-1}in mevcut olduğunu biliyoruz. Böylece $A^{-1}(Ax) = A^{-1}B$
$\Rightarrow (A^{-1}A)x = (A^{-1}B) \Rightarrow Ix = (A^{-1}B) \Rightarrow x = A^{-1}B$ bulunur.

IV.7. Lu Ayrıştırma Yöntemi

$n < 4$ için lineer denklem sistemleri ele alındığında çözüm için Gauss-Jordon, Gauss yok etme, ters matris ve Cramer çözüm yöntemleri kullanılmasına karşın lineer denklem sistemi daha geniş olduğunda bu yöntemlerde işlem sayısı fazla olacağından daha verimli ve daha kısa bir yöntem olan Lu ayrıştırma yöntemi kullanılabilir. Bu yöntem ile amaçlanan katsayılar matrisinin çarpanlarına ayrılması esas alınmaktadır. Yani herhangi bir $[A]$ matrisinin bir alt üçgensel ve bir üst üçgensel matrisin çarpımı olarak yazılabilmesidir. Örneğin, $[A]$ matrisi elemanları $[a_{ij}]$ ler , $[L]$ matrisi elemanları $[l_{ij}]$ ler esas köşegen elemanları "1" olan alt üçgensel matris ve $[U]$ matrisi elemanları $[u_{ij}]$ler bir üst üçgensel matris olsun. Bu durumda $(i,j = 1,2,\dots,n)$ olmak üzere,

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kj}$$

dir.

$[A] = [L][U]$ şeklinde yazılabilir. Bu söylediklerimizi $3x3$ tipinden bir A matrisi için yazacak olursak,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Buna göre L ve U yukarıdaki özelliklere sahip iki üçgen matris ve $A = LU$ olsun. Diğer taraftan $Ax = B$ eşitliğini kullanacak olursak $(LU)x = B$ elde edilir. $LUx = Ax = B$ olur ve $Ux = y$ dersek buradan $Ax = Ly = B$ elde edilir. O halde sistem,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır.

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 \\ l_{21}y_1 + y_2 &= b_2 \\ l_{31}y_1 + l_{32}y_2 + y_3 &= b_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_2 = b_2 - l_{21}b_1 \Rightarrow y_3 = b_3 - l_{31}b_1 - l_{32}b_2 - l_{32}l_{21}b_1$$

Bu işlemde bilinmeyen y_i ler bulunarak $Ux = y$ sisteminden U üst üçgensel matris olmak üzere x bilinmeyenleri kolayca bulunabilir.

Not : y_i lerin bulunmasını genelleştirirsek $b_i = y_i + l_{i1}y_1 + l_{i2}y_2 + \cdots + l_{i,i-1}y_{i-1}$ denkleminden y_i ler bulunabilir.

Örnek: $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 12 & -3 \\ 1 & 15 & 1 \end{vmatrix}$ olmak üzere A matrisini Lu ayrıştırma yöntemi ile ayrıştırınız.

Çözüm:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 12 & -3 \\ 1 & 15 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{vmatrix}$$

$u_{11} = 1, u_{12} = 3, u_{13} = -2$

$l_{21}u_{11} = 2 \Rightarrow l_{21} = 2$
$l_{21}u_{12} + u_{22} = 12 \Rightarrow u_{22} = 6$
$l_{21}u_{13} + u_{23} = -3 \Rightarrow u_{23} = 1$
$l_{31}u_{11} = 1 \Rightarrow l_{31} = 1$
$l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 15 \Rightarrow l_{32} = 2$
$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = 1 \Rightarrow u_{33} = 1$

$$l = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, u = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Gauss yok etme yönteminde ve benzerlerinde belirli bir işlem adımından sonra lineer denklem sisteminin çözümüne direkt olarak ulaşılır. Bu yüzden bu tip yöntemlere doğrudan yöntemler denir. Lineer denklem sistemlerinin çözüm kümesini bulmak için kullanılabilecek başka tür diğer yöntemlerde ise önce bir başlangıç çözümü seçilir sonra bu çözüm üzerinde art arda iyileştirmeler yapılarak doğru çözüm kümesine belirli bir hassasiyet mertebesinde ulaşılır.

IV.8. Jacobi Yöntemi

Jacobi yöntemiyle çözüm işlemine verilen başlangıç değerleriyle başlanır ve bu değerler kullanılarak $\boldsymbol{x}$ değerleri hesaplanır. Yöntemin geliştirilmiş ifadesi aşağıda verilmektedir. $\boldsymbol{k}$' lar, her bir iterasyonda hesaplanmış değerleri göstermektedir. $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$ için başlangıç değerleri $\boldsymbol{x}_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ kullanılarak $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$ hesaplanır. Bunlar; $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}$ değerlerinin hesaplanmasında kullanılır. İşlemlere başlamadan önce $[A]$ nın köşegen elemanlarının sıfıra eşit olup olmadığı kontrol edilmelidir. Köşegen üzerinde sıfır değerleri varsa satır değiştirme işlemleriyle, köşegen elemanlarının sıfırdan farklı olması sağlanmalıdır.
Jacobi yönteminde işleyiş aşağıdaki gibidir.
Buna göre aşağıdaki üç bilinmeyenli üç denklemden oluşan lineer denklem sistemini göz önüne alalım.

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$
$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$

Çözüm için rastgele başlangıç değerleri seçilir. Kabul edelim ki yukarıda verilen sistem metodun uygulanması için uygun olsun. O halde k iterasyon sayısı olmak üzere çözüm kümesi

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_1^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}\right]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}\right]$$

Burada k. bağıl hata

$$\epsilon_k = \left|\frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k+1)}}\right|.100$$

ile hesaplanır. ϵ_k değerlerinin toplamı verilen bir tolerans değerinden küçük oluncaya kadar işleme devam edilir.
Yöntemin genelleştirilmiş şekli aşağıdaki gibidir. $i = 1,2,3,\dots,n$ için

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}]$$

İterasyona, $\epsilon_k = \left|\frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k+1)}}\right|.100 \leq T.D.$ oluncaya kadar devam edilir.

IV.9. Gauss-Seidel Yöntemi

Gauss-Seidel yönteminde işleyiş aşağıdaki gibidir. Buna göre aşağıdaki üç bilinmeyenli üç denklemden oluşan lineer denklem sistemini göz önüne alalım.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Bu verilen sistemde en büyük katsayı a_{11}, ikinci büyük katsayı a_{22} ve üçüncü büyük katsayı a_{33} olacak şekilde sistem yeniden düzenlenir. Yani en büyük katsayılar birinci asal köşegen üzerinde sıralanırlar. Çözüm için rastgele başlangıç değerleri seçilir. Kabul edelim ki yukarıda verilen sistem metodun uygulanması için uygun olsun. O halde k iterasyon sayısı olmak üzere çözüm kümesi

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_1^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right]$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}\right]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}\right]$$

Burada k. bağıl hata

$$\epsilon_k = \left| \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k+1)}} \right| .100$$

ile hesaplanır.

ϵ_k değerlerinin toplamı verilen bir tolerans değerinden küçük oluncaya kadar işleme devam edilir. Genel olarak bu yöntemde uygulanması gereken adımlar şunlardır.

1) Köşegen elemanları mutlak değerce en büyük olacak şekilde satırlar yer değiştirilir.
2) Her denklemden bir bilinmeyen çekilir.
3) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilinmeyenleri için ilk tahmini değerler seçilir. Seçilen bu tahmini değerler birinci denklemde yazılarak x_i değerleri sırasıyla bulunur. Bu hesaplamaların her defasında denklemlerin sağ taraflarına x_i lerin bilinen son değerleri yazılır.
4) Bu işlemler k defa tekrar edilir. k. iterasyona ait genel ifadeler aşağıdaki gibidir.

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_1^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)}\right]$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right]$$

Burada ayrı ayrı yazılan n denklem kısaca indis notasyonu kullanılarak tek bir denklem halinde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{k}\right], (i = 1,2, \ldots, n)$$

5) İterasyonda tolerans değeri sonlanıncaya kadar yani $\epsilon_k = \left| \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k+1)}} \right| .100 \leq T.D$

oluncaya kadar devam edilir. Son bulunan x_i değerleri aradığımız $x_i^{(k+1)}$ çözüm vektörüdür.