

T.C.
SAMSUN ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK VE DOĞA BİLİMLERİ FAKÜLTESİ
YAZILIM MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ



MAT301 NUMERİK YÖNTEMLER ARA SINAV CEVAP ANAHTARI

- 1) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$ fonksiyonunu Newton-Raphson yöntemini ile $x_0 = 3$ başlangıç şartına bağlı olarak bağlı hata 0.01 oluncaya kadar yaklaşık kökünü hesaplayınız.

Cevap: Newton-Raphson formülü

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad f(x) = x^3 - 2x^2 - 5 \quad f'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$\text{Bağıl Hata } B.H = \left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right|$$

1.İterasyon: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$$f(3) = 3^3 - 2 \times 3^2 - 5 = 27 - 18 - 5 = 4$$

$$f'(3) = 3 \times 3^2 - 4 \times 3 = 27 - 12 = 15$$

$$x_1 = 3 - \frac{4}{15} = 3 - 0.2667 = 2.7333$$

$$B.H = \left| \frac{x_1 - x_0}{x_1} \right| = \left| \frac{2.7333 - 3}{2.7333} \right| = \frac{0.2667}{2.7333} \approx 0.0976$$

2. İterasyon: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

$$f(2.7333) \approx (2.7333)^3 - 2 \times (2.7333)^2 - 5 = 0.542$$

$$f'(2.7333) \approx 3 \times (2.7333)^2 - 4 \times (2.7333) = 9.541$$

$$x_2 = 2.7333 - \frac{0.542}{9.541} = 2.7333 - 0.0568 = 2.6765$$

$$B.H = \left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{2.6765 - 2.7333}{2.6765} \right| = \frac{0.0568}{2.6765} \approx 0.0212$$

3. İterasyon: $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$

$$f(2.6765) \approx (2.6765)^3 - 2 \times (2.6765)^2 - 5 = 0.046$$

$$f'(2.6765) \approx 3 \times (2.6765)^2 - 4 \times (2.6765) = 9.059$$

$$x_3 = 2.6765 - \frac{0.046}{9.059} = 2.6765 - 0.0051 = 2.6714$$

$$B.H = \left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{2.6714 - 2.6765}{2.6714} \right| = \frac{0.0051}{2.6714} \approx 0.0019$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & 4x - y + z = 7 \\ & -x + 3y - z = -8 \\ & x - y + 3z = 4 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini Jacobi metodu ile 5 iterasyonda yaklaşık çözümünü bulunuz. Başlangıç değerleri $x^{(0)} = y^{(0)} = z^{(0)} = 0$.

Cevap: Bir değişkeni diğerleri cinsinden ifade etmek için her denklemi yeniden düzenleyin

$$4x - y + z = 7 \Rightarrow x = \frac{7 + y - z}{4}$$

$$-x + 3y - z = -8 \Rightarrow y = \frac{-8 + x + z}{3}$$

$$x - y + 3z = 4 \Rightarrow z = \frac{4 - x + y}{3}$$

$$x^{(k+1)} = \frac{7 + y^{(k)} - z^{(k)}}{4}$$

$$y^{(k+1)} = \frac{-8 + x^{(k)} + z^{(k)}}{3}$$

$$z^{(k+1)} = \frac{4 - x^{(k)} + y^{(k)}}{3}$$

1. İterasyon

$$x^{(1)} = \frac{7 + 0 + 0}{4} = 1.75$$

$$y^{(1)} = \frac{-8 + 0 + 0}{3} = -2.67$$

$$z^{(1)} = \frac{4 - 0 - 0}{3} = 1.33$$

2. İterasyon

$$x^{(2)} = \frac{7 + (-2.67) - 1.33}{4} = 1.75$$

$$y^{(2)} = \frac{-8 + 1.75 + 1.33}{3} = -2.67$$

$$z^{(2)} = \frac{4 - 0.75 + (-2.67)}{3} = 1.33$$

3. İterasyon

$$x^{(3)} = \frac{7 + (-1.64) - 0.19}{4} = 1.29$$

$$y^{(3)} = \frac{-8 + 0.75 + 0.19}{3} = -2.35$$

$$z^{(3)} = \frac{4 - 1.29 + (-1.64)}{3} = 0.36$$

4. İterasyon

$$x^{(4)} = \frac{7 + (-2.35) - 0.36}{4} = 1.07$$

$$y^{(4)} = \frac{-8 + 1.29 + 0.36}{3} = -2.12$$

$$z^{(4)} = \frac{4 - 1.07 + (-2.35)}{3} = 0.19$$

5. İterasyon

$$x^{(5)} = \frac{7 + (-2.12) - 0.19}{4} = 1.17$$

$$y^{(5)} = \frac{-8 + 1.07 + 0.19}{3} = -2.25$$

$$z^{(5)} = \frac{4 - 1.17 + (-2.12)}{3} = 0.24$$

Sonuç: $x \approx 1.17, y \approx -2.25, z \approx 0.24$

3) $(1, 6), (2, 3)$ ve $(3, 2)$ noktalarından geçen polinom denklemini (lineer denklem sistemini oluşturarak) bulunuz.

Cevap: $(1, 6), (2, 3)$ ve $(3, 2)$ noktalarından geçen polinom denklemi 2. derecedendir.

$$y(x) = ax^2 + bx + c \text{ olmak üzere}$$

$$(1, 6) \text{ noktasında } y(x) = a(1)^2 + b(1) + c = 6$$

$$\Rightarrow a + b + c = 6$$

$$(2, 3) \text{ noktasında } y(x) = a(2)^2 + b(2) + c = 3$$

$$\Rightarrow 4a + 2b + c = 3$$

$$(3, 2) \text{ noktasında } y(x) = a(3)^2 + b(3) + c = 2$$

$$\Rightarrow 9a + 3b + c = 2$$

Denklem sistemi 3 bilinmeyenli 3 denklemden oluşur ve matris formunda

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

olarak bellidir. Çözümü Gauss-Jordan ile gerçekleştirebilirsek,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 4 & 2 & 1 & : & 3 \\ 9 & 3 & 1 & : & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 = r_2 - 4r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & -2 & -3 & : & -21 \\ 9 & 3 & 1 & : & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & -2 & -3 & : & -21 \\ 9 & 3 & 1 & : & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 = r_3 - 9r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & -2 & -3 & : & -21 \\ 0 & -6 & -8 & : & -52 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & -2 & -3 & : & -21 \\ 0 & -6 & -8 & : & -52 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 = r_3 - 3r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & -2 & -3 & : & -21 \\ 0 & 0 & 1 & : & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & -2 & -3 & : & -21 \\ 0 & 0 & 1 & : & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 = r_2 + 3r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 6 \\ 0 & -2 & 0 & : & 12 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 6 \\ 0 & -2 & 0 & : & 12 \\ 0 & 0 & 1 & : & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 = r_1 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & : & -5 \\ 0 & -2 & 0 & : & 12 \\ 0 & 0 & 1 & : & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & : & -5 \\ 0 & -2 & 0 & : & 12 \\ 0 & 0 & 1 & : & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 = -\frac{r_2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & : & -5 \\ 0 & 1 & 0 & : & -6 \\ 0 & 0 & 1 & : & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & : & -5 \\ 0 & 1 & 0 & : & -6 \\ 0 & 0 & 1 & : & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 = r_1 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & -6 \\ 0 & 0 & 1 & : & 11 \end{bmatrix}$$

$$a = 1$$

$$b = -6$$

$$c = 11$$

Böylece aranılan polinom denklemi $p_2(x) = x^2 - 6x + 11$ olarak bulunur.

4) (1,4), (2,7), (4,19) ve (5,31) noktalarından geçen P(x) polinomunu Langrange interpolasyonu ile hesaplayınız ve buna göre P(3) değerini bulunuz.

Cevap: Langrange interpolasyon polinomu

$$P(x) = \sum_{i=1}^n y_i \times L_i(x)$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Veri noktaları tanımlanır

$$(x_1, y_1) = (1, 4), (x_2, y_2) = (2, 7), (x_3, y_3) = (4, 19), (x_4, y_4) = (5, 31)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} = \frac{(x - 2)(x - 4)(x - 5)}{(1 - 2)(1 - 4)(1 - 5)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} = \frac{(x - 1)(x - 4)(x - 5)}{(2 - 1)(2 - 4)(2 - 5)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} = \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 5)}{(4 - 1)(4 - 2)(4 - 5)}$$

$$L_4(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} = \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 4)}{(5 - 1)(5 - 2)(5 - 4)}$$

$$P(x) = 4L_1(x) + 7L_2(x) + 19L_3(x) + 31L_4(x)$$

$$P(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{25}{4}x + 4$$

$$P(3) = 11.5$$