T.C.

SAMSUN ÜNİVERSİTESİ

MÜHENDİSLİK ve DOĞA BİLİMLERİ FAKÜLTESİ

YAZILIM MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

OMAT301 NÜMERİK YÖNTEMLER DÖNEM SONU CEVAP ANAHTARI

Adı: **Soyadı:** **No:**

Soru 1: $\int_0^2 e^{-3x} \operatorname{Sin} 3x dx$ integralinin yaklaşık değerini birleşik yamuk kuralından sırasıyla $h = 1/2$ ve $h = 1/4$ alarak dört ondalık basamak için bulunuz

a. İki ondalık basamak içeren sonucun doğruluğu için kaç tane alt aralığa ihtiyaç vardır.

b. $h = 1/2$ ve $h = 1/4$ için bulduğunuz sonuçları kullanarak Romberg Integral kuralı ile daha hassas bir yaklaşık çözüm bulunuz.

c. Sonuçları gerçek çözüm $I(f) = \frac{1}{6} - \frac{\sin(6)+\cos(6)}{6e^6}$ değeri ile karşılaştırınız, **(35p)**

Çözüm: Birleşik Yamuk (Trapez) kuralı:

$$h = \frac{1}{2} \quad için$$

$$Q(t) = \frac{h}{2}\{f(x_0) + f(x_n)\} + h\{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\}$$

$$= \frac{1}{4}\{f(0) + f(2)\} + \frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right)\right\} = 0.109$$

$$h = \frac{1}{4} \quad için$$

$$Q(t) = \frac{h}{2}\{f(0) + f(2)\} + h\left\{f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\{f(0) + f(2)\} + \frac{1}{4}\left\{f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right)\right\} = 0.1512$$

h değeri küçüldükçe gerçek çözüme hızlı bir yakınsama olur.

2 ondalık basamak içeren sonucun doğruluğu için ihtiyaç duyulan alt aralık seviyesinin tespiti;

$$|E(t)| = \frac{1}{2}10^{-2},\ k = \frac{(b-a)}{12} sup_{0 \le x \le 2} |f''(x)|$$

$$=> f'(x) = e^{-3x}[\cos 3x - \sin 3x]$$

$$=> f''(x) = -18e^{-3x} \cdot \cos 3x$$

$$k = \frac{2}{12} sup_{0 \le x \le 2} |18 \cdot e^{-3x} \cdot \cos 3x| = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3$$

$$kh^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} => h^2 = \frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}}{3} => h = \left[\frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}}{3}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$nh = b - a => n = \frac{(b-a)}{h} = \frac{2}{\left(\frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}}{3}\right)^{\frac{1}{2}}} = 48.989$$

$$n \le 49$$

$n \le 49$ değeri I(f)’nin yaklaşık çözümünü iki ondalık basamak için garanti eder.

Gerçek çözüm ise,

$$\int_0^2 e^{-3x} \sin(3x)\, dx = \frac{1}{6} - \frac{\sin(6) + \cos(6)}{6e^6} \approx 0.16639$$

bulunur.

$$\left.\begin{aligned} h = \frac{1}{2} \to Q(t) = 0.109 \\ h = \frac{1}{4} \to Q(t) = 0.1512 \end{aligned}\right\} \to \textit{Romberg Interpolasyon Metodundan}$$

$$\int_0^2 e^{-3x} \sin 3x dx \cong \frac{1}{3}[4 \cdot (0.1512) - 0.109] = 0.165266$$

Görüldüğü üzere gerçek çözüme en yakın sonuç Romberg Integrasyon ile elde edilmektedir.

Soru 2: $y' = y + x + 1,\ y(0) = 0.5$ ile verilen başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümünü

a. 4. dereceden Taylor Serisi açılımı yöntemi,

b. 4. dereceden Runge-Kutta yöntemi ile

$h = 0.25$ olmak üzere $y(1.0)$ değerini bulunuz.

c. Diferansiyel denklemin tam çözümü $y(x) = 3.5e^{x} - x^{2} - 2x - 3$ olmak üzere her bir noktadaki tam çözüm, Taylor Serisi yöntemi ve Runge-Kutta Yöntemi sonuçlarını tablo ile vererek yorumlayınız. **(35p)**

Çözüm: 4. dereceden Taylor Serisi açılımı yöntemi,

$$y_{i+1} = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_i)$$

yada

$$y_{i+1} = y(x_i) + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!}f'(x_i, y_i) + \frac{h^3}{3!}f''(x_i, y_i) + \frac{h^4}{4!}f'''(x_i, y_i)$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
y' &= f(x,y) = y + x^2 + 1 \\
y'' &= f'(x,y) = y' + 2x = y + x^2 + 2 + 1x \\
y''' &= f''(x,y) = y + x^2 + 2x + 3 \\
y^{(4)} &= f'''(x,y) = y + x^2 + 2x + 3
\end{aligned}$$

elde edilir. Denklem (7.12)'ü denklem (7.11)'deki yerlerine yazdığımızda

$$y_{i+1} = y_i + h(y_i + x_i^2 + 1) + \frac{h^2}{2!}(y_i + x_i^2 + 2x_i + 1) + \frac{h^3}{3!}(y_i + x_i^2 + 2x_i + 3)$$
$$+ \frac{h^4}{4!}(y_i + x_i^2 + 2x_i + 3)$$

bulunur, ayrıca başlangıç şartlarından

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0.5, \quad h = 0.25$$

alabiliriz. Şimdide çözümü bulalım
$i = 0$ için

$$x_1 = 0 + 0.25 = 0.25$$
$$y_1 = 0.5 + 0.25 \times (0.5 + 0^2 + 1) + \frac{0.25^2}{2!}(0.5 + 0^2 + 1 + 2 \times 0)$$
$$+ \frac{0.25^3}{3!}(0.5 + 0^2 + 3 + 2 \times 0) + \frac{0.25^4}{4!}(0.5 + 0^2 + 3 + 2 \times 0)$$
$$y(0.25) = 0.931559$$

$i = 1$ için işlemler daha öncede yapıdığı için sadece sonuçları yazarak gidersek

$$x_2 = 0 + 2 \times 0.25 = 0.50$$
$$y_2 = 1.52045$$
$$y(0.5) = 1.52045$$

$i = 2$ için

$$x_3 = 0 + 3 \times 0.25 = 0.75$$
$$y_3 = 2.34685$$
$$y(0.75) = 2.34685$$

$i = 3$ için

$$x_4 = 0 + 4 \times 0.25 = 1.0$$
$$y_4 = 3.51373$$
$$y(1.0) = 3.51373$$

bulunur.

Çözüm: 4. dereceden Runge-Kutta yöntemi,

Çözümün için ilk başlangıç noktası, denklemin başlangıç değerinden bulunan $(0, 0.5)$ noktasıdır. Bu durumda $x_0 = 0$, $y_0 = 0.5$ olur. Çözümün geri kalanı ilerleyen adımlarda bulunur. Herbir adımda bağımsız değişkenin sonraki değeri

$$x_{i+1} = x_i + h = x_i + 0.25$$

den hesaplanır.
Bağımlı değişken y_{i+1} değeri ilk olarak denklem (7.23) den k_1, k_2, k_3 ve k_4 değerlerinin hesaplanması

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$
$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$$
$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$f(x,y) = y + x^2 + 1$$

Birinci adımda i=0 alınırsa

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.25 = 0.25$$
$$k_1 = hf(0, 0.5) = 0.25\,(0.5 + 0^2 + 1) = 0.375$$
$$x_0 + \frac{h}{2} = 0 + \frac{0.25}{2} = 0.125, \quad y_0 + \frac{k_1}{2} = 0.5 + \frac{0.375}{2} = 0.6875$$
$$k_2 = 0.25\,(0.6875 + 0.125^2 + 1) = 0.425781$$
$$y_0 + \frac{k_2}{2} = 0.5 + \frac{0.425781}{2} = 0.712891$$
$$k_3 = 0.25\,(0.712891 + 0.125^2 + 1) = 0.432129$$
$$y_0 + k_3 = 0.5 + 0.432129 = 0.932129$$
$$k_4 = 0.25\,(0.932129 + 0.25^2 + 1) = 0.498657$$
$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.931589$$

Birinci adımın sonunda $x_1 = 0.25$, $y_1 = 0.931589$ bulunur.

İkinci adım i=1 alınırsa

$$x_2 = x_1 + h = 0.25 + 0.25 = 0.5$$
$$k_1 = hf(0.25, 0.931589) = 0.25\,(0.931589 + 0.25^2 + 1) = 0.49852$$
$$x_1 + \frac{h}{2} = 0.25 + \frac{0.25}{2} = 0.375, \quad y_1 + \frac{k_1}{2} = 0.931589 + \frac{0.49852}{2} = 1.18084$$
$$k_2 = 0.25\,f(0.375, 1.18084) = 0.25\,(1.18084 + 0.375^2 + 1) = 0.580366$$
$$y_1 + \frac{k_2}{2} = 0.931589 + \frac{1.18084}{2} = 1.22176$$
$$k_3 = 0.25\,f(0.375, 1.22176) = 0.25\,(1.22176 + 0.375^2 + 1) = 0.590597$$
$$x_1 + h = 0.25 + 0.25 = 0.50, \quad y_1 + k_3 = 0.931589 + 0.590597 = 1.52218$$
$$k_4 = 0.25\,f(0.5, 1.52218) = 0.25\,(1.52218 + 0.5^2 + 1) = 0.693044$$
$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.52049$$

İkinci adımın sonunda $x_2 = 0.5$, $y_2 = 1.52049$ bulunur.

Üçüncü adım i=2 alınırsa

$$x_3 = x_2 + h = 0.5 + 0.25 = 0.75$$
$$k_1 = hf(0.5, 0.52049) = 0.25\,(0.52049 + 0.5^2 + 1) = 0.692625$$
$$x_2 + \frac{h}{2} = 0.5 + \frac{0.25}{2} = 0.625, \quad y_2 + \frac{k_1}{2} = 0.52049 + \frac{0.692625}{2} = 1.86681$$
$$k_2 = 0.25\,f(0.625, 1.86681) = 0.25\,(1.86681 + 0.625^2 + 1) = 0.814359$$
$$y_2 + \frac{k_2}{2} = 0.52049 + \frac{1.814359}{2} = 1.92768$$
$$k_3 = 0.25\,f(0.625, 1.92768) = 0.25\,(1.92768 + 0.625^2 + 1) = 0.829576$$
$$x_2 + h = 0.5 + 0.25 = 0.750, \quad y_2 + k_3 = 1.52049 + 0.829576 = 2.35008$$
$$k_4 = 0.25\,f(0.750, 2.35008) = 0.25\,(2.35008 + 0.750^2 + 1) = 0.978144$$
$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2.34694$$

Üçüncü adımın sonunda $x_3 = 0.75,\ y_3 = 2.34694$ bulunur.

Dördüncü adım adım i=3 alınırsa

$$x_4 = x_3 + h = 0.75 + 0.25 = 1.0$$
$$k_1 = hf(0.75, 2.34694) = 0.25\,(2.34694 + 0.75^2 + 1) = 0.97736$$
$$x_3 + \frac{h}{2} = 0.75 + \frac{0.25}{2} = 0.875, \quad y_3 + \frac{k_1}{2} = 2.34694 + \frac{0.97736}{2} = 2.83562$$
$$k_2 = 0.25\,f(0.875, 2.83562) = 0.25\,(2.83562 + 0.875^2 + 1) = 1.15031$$
$$y_3 + \frac{k_2}{2} = 2.34694 + \frac{1.15031}{2} = 2.9221$$
$$k_3 = 0.25\,f(0.875, 2.9221) = 0.25\,(2.9221 + 0.875^2 + 1) = 1.17193$$
$$x_3 + h = 0.75 + 0.25 = 1.0, \quad y_3 + k_3 = 2.34694 + 1.17193 = 3.51887$$
$$k_4 = 0.25\,f(1.0, 3.51887) = 0.25\,(3.51887 + 1.0^2 + 1) = 1.37972$$
$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 3.51387$$

Dördüncü adımın sonunda $x_4 = 1.0,\ y_4 = 3.51387$ bulunur.

x	y-tam	y-ts4	hata	y-rk4	hata
0.00	0.5	0.5	0	-----	-----
0.25	0.931589	0.931559	0.0032203	0.93158	0.000966091
0.50	1.52052	1.52045	0.00460369	1.52049	0.00197301
0.75	2.347	2.34685	0.00639114	2.34694	0.00255646
1.00	3.51389	3.51373	0.007399	3.51387	0.00341492

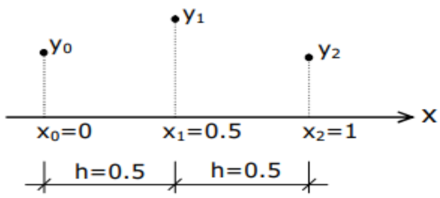
Soru 3: Diferansiyel denklemi $y''+y=x$ ve sınır şartları $y(0)=0,\ y(1)=0$ ile verilen sınır değer probleminin yaklaşık çözümünü n=2 ve *n=4* olması durumunda sonlu farklar metodu ile bulunuz. Ayrıca diferansiyel denklemin kesin çözümü $y(x)=-\dfrac{\sin(x)}{\sin(1)}+x$ olmak üzere bulduğunuz yaklaşık çözümlerde oluşan bağıl hata miktarlarını hesaplayınız ve sonuçları yorumlayınız. **(30p)**

ÇÖZÜM: Sınır şartları **x=0** ve **x=1** noktalarında tanımlanmış olduğundan problemin çözüm aralığı [0,1] olarak belirlenir. Problem iki farklı bölme sayısı için çözülecektir.

a) Çözüm bölgesinin **"n=2"** eşit parçaya bölünmesi durumu:

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{2}$$

$$h=0.5$$



$y_0=0$ ve **$y_2=0$** değerleri sınır şartı olarak bilinmektedir. Burada **y_1** değeri bilinmeyendir. Bu nedenle, **$x_1=0.5$** noktası için diferansiyel denklem yazılacaktır.

$y_1''+y_1=x_1 \quad\rightarrow\quad$ y″ için sayısal türev formül karşılığı yazılacak

$\dfrac{y_2-2y_1+y_0}{h^2}+y_1=x_1 \quad\rightarrow\quad x_1=0.5$, $y_0=0$, $y_2=0$ ve h=0.5 değerleri yazılırsa

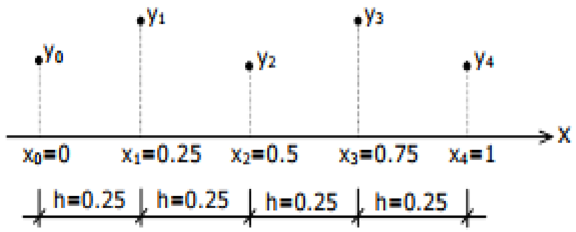
$$\frac{0-2y_1+0}{(0.5)^2}+y_1=0.5 \;\Rightarrow\; \underbrace{\left(1-\frac{2}{0.25}\right)}_{-7}y_1=0.5 \;\Rightarrow\; \boxed{\mathbf{y_1=y(0.5)\cong-0.07143}}$$

$$\text{Kesin çözüm} \;\rightarrow\; y=x-\frac{\mathrm{Sin}(x)}{\mathrm{Sin}(1)} \;\Rightarrow\; \boxed{\mathbf{y(0.5)=-0.06975}} \;\rightarrow\; \mathrm{BH}=\%2.41$$

b) Çözüm bölgesinin **"n=4"** eşit parçaya bölünmesi durumu:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4}$$

$$h = 0.25$$



$y_0=0$ ve **$y_4=0$** değerleri sınır şartı olarak bilinmekte iken; **y_1, y_2** ve **y_3** değerleri bilinmeyenlerdir. Diferansiyel denklem **$x_1=0.25$**, **$x_2=0.5$** ve **$x_3=0.75$** noktaları için ayrı ayrı yazılacaktır.

x_1 noktası için $\rightarrow \quad y_1'' + y_1 = x_1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + y_1 = x_1$

x_2 noktası için $\rightarrow \quad y_2'' + y_2 = x_2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} + y_2 = x_2$

x_3 noktası için $\rightarrow \quad y_3'' + y_3 = x_3 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{y_4 - 2y_3 + y_2}{h^2} + y_3 = x_3$

x_1, x_2, x_3, y_0, y_4 ve h değerleri yukarıdaki ifadelerde yerine yazıldıktan sonra denklemler yeniden düzenlenirse, bilinmeyenler cinsinden aşağıda görülen lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} -31y_1 + 16y_2 &= 0.25 \\ 16y_1 - 31y_2 + 16y_3 &= 0.5 \\ 16y_2 - 31y_3 &= 0.75 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -31 & 16 & 0 \\ 16 & -31 & 16 \\ 0 & 16 & -31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.50 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

Denklem sisteminin çözümü, Gauss Eliminasyon yöntemi ile aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{bmatrix} -31 & 16 & 0 \\ 0 & -22.74193 & 16 \\ 0 & 0 & -19.74326 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.62903 \\ 1.19255 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.04427 \\ -0.07015 \\ -0.06040 \end{bmatrix}$$

y(0.25) ≅ −0.04427	**y(0.25) = −0.04401**	→	BH=%0.59
y(0.50) ≅ −0.07015	**y(0.50) = −0.06975**	→	BH=%0.57
y(0.75) ≅ −0.06040	**y(0.75) = −0.06006**	→	BH=%0.57