bulunur. O halde orijinal değişkenlerimiz

$$a_0 = e^{0.43956} = 1.55202$$

eğri denklemide

$$y = 1.55202\; x^2$$

bulunur.

(c) Bu durumda da sadece birinci denklemi kullanmak zorundayız

$$5\;A + 4.709430 \times (-1) = 11.61666 \quad \Longrightarrow \quad A = 3.265218$$

bulunur. O halde orijinal değişkenlerimiz

$$a_0 = e^{3.265218} = 26.185819$$

eğri denklemide

$$y = 26.185819/x$$

bulunur.

4.2.5 En Küçük Kareler Yönteminde Kullanılacak Fonksiyonun Seçimi

Kullanılacak fonksiyonun seçimi için aşağıdaki işlemler yapılır.

1. Veriler tablosunun incelenmesi polinomun derecesi hakkında bilgi verebilir.
2. Grafik çizilir ve simetriler aranır. Eğer y eksenine göre simetri varsa

   $$y = \sum_{k=1}^{n} c_k x^{2k}$$

   gibi bir polinom kullanılabilir.
3. Eğer verilen değerler periyodik olarak değişiyorsa sinüzoidal yapıda trigonometrik terimler kullanılabilir.
4. Eğer verilerde $x = 0$ yada negatif değerler içermiyorsa logaritmik fonksiyonlar kullanılabilir.
5. Bütün değerler pozitif yada negatif ise ve orijinden geçmiyorsa exponansiyel fonksiyon kullanılabilir.
6. $y = 0$ değeri yok ise ters fonksiyonlar kullanılabilir.
7. Bazı hallerde verilen değerlere dayanılarak çizilen grafik parçalara ayrılıp her parçaya ayrı bir eğrilik kullanılabilir.

4.3 Lagrange İnterpolasyon Polinomları

Newtonun ileriye ve geriye interpolasyon formülleri eşit aralıklı veri noktaları için geçerli olmasına karşın Lagrange interpolasyon polinom formülü eşit aralıklı olmayan veri grubu içinde genel formül vermektedir. Bu polinomlarda, eğri uydurmalarda olduğu gibi katsayılarını hesaplamak için ön işlemlerede gerek kalmadan direk polinom hesaplanabilmektedir.

(x_0, y_0), ve (x_1, y_1) noktalarından geçen polinomu Fransız matematikçi Joseph Louis Lagrange, birinci dereceden Lagrange polinomu olarak bu iki noktadan da geçecek şekilde aşağıdaki biçimde yazmıştır:

$$P_1(x) = y = a_0(x - x_1) + a_1(x - x_0) \tag{4.15}$$

Denk. (4.15) içine verilen iki noktayı sırasıyla yazarsak

$$y_0 = a_0(x_0 - x_1) + a_1(x_0 - x_0) \quad \text{yada} \quad a_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)} \tag{4.16}$$

$$y_1 = a_0(x_1 - x_1) + a_1(x_1 - x_0) \quad \text{yada} \quad a_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)} \tag{4.17}$$

a_0 ve a_1 katsayıları bulunur, bulunanlar tekrar Denk. (4.15) içine yerleştirilirse

$$P_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} y_0 + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} y_1 \tag{4.18}$$

Lagrange polinomu elde edilir. Denk. (4.18) iki noktadan geçen bir doğru denklemi olduğundan x e göre lineer bir fonksiyondur. Eğer denklemde x yerine x_0 yazılırsa y_0 ve eğer x yerine x_1 yazılırsa y_1 değeri elde edildiği kolayca görülebilir. Denklem (4.18) de y_0 ve y_1 Lagrange polinumu katsayıları

$$L_{1,0} = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}, \quad L_{1,1} = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

şeklinde gösterilir.

Şimdide, benzer şekilde (x_0, y_0), (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) verilen üç noktadan geçen ikinci dereceden Lagrange polinomu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$P_2(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) + a_1(x - x_0)(x - x_2) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \tag{4.19}$$

bu üç noktadan geçen polinomun katsayıları yukarıdaki gibi hesaplandığında,

$$P_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2 \tag{4.20}$$

polinomu elde edilir. Bu denklemdede verilen x_0, x_1 ve x_2 noktaları deklemdeki x yerlerine yazılırsa sırasıyla y_0, y_1 ve y_2 değerleri elde edilir. Denklem (4.20) de y_0, y_1 ve y_2 Lagrange polinumu katsayıları

$$L_{2,0} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \; L_{2,1} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \; L_{2,2} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

şeklinde gösterilir.

Denklem (4.18) ve (4.20) de ifade edile Lagrange polinomlarını genellersek, verilen n tane $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ noktalarından geçen n. dereceden Lagrange polinomu,

$$\begin{aligned} P_n(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)} y_0 \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)} y_1 + \cdots \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} y_k \\ & + \cdots + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})} y_n \end{aligned} \tag{4.21}$$

elde edilir. Bu poliomu kısaca toplam sembolünde

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_{n,k}\, y_k \tag{4.22}$$

buradaki $L_{n,k}$ Lagrange katsayılarıda

$$L_{n,k} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} \tag{4.23}$$

gibi ifade edilir.

Örnek: $y = \sin \pi x$ fonksiyonu için Lagrange interpolasyon polinomunu türetiniz. İnterpolasyon düğüm noktalarını $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{6},\ x_2 = \frac{1}{2}$ olarak alınız.

Çözüm. $x_0,\ x_1,\ x_2$ noktalarına ait y_i görüntülerini hesaplarsak

$$y_0 = 0,\ y_1 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\ y_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

bulunur. (5) formülünü kullanarak

$$\begin{aligned} P_2(x) = & \frac{(x-\frac{1}{6})\times(x-\frac{1}{2})}{-\frac{1}{6}\times(-\frac{1}{2})}\times 0 + \frac{x\times(x-\frac{1}{2})}{\frac{1}{6}\times(\frac{1}{6}-\frac{1}{2})}\times\frac{1}{2} + \frac{x\times(x-\frac{1}{6})}{\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})}\times 1 \\ = & -3x^2 + \frac{7}{2}x \end{aligned}$$

şeklinde Lagrange polinomunu türetiriz.

Örnek: $y = f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki tablo ile verilmiştir $f(323.5)$ değerini bulunuz.

x_i	y_i
321.0	2.50651
322.8	2.50893
324.2	2.51081
325.0	2.51188

Çözüm: $x = 323.5$; $n = 3$ kabul edelim. Bu taktirde (4.21) formülüne göre

$$\begin{aligned} f(323.5) = & \frac{(323.5-322.8)(323.5-324.2)(323.5-325.0)}{(321.0-322.8)(321.0-322.8)(321.0-325.0)}.2.50621 \\ & + \frac{(323.5-321.0)(323.5-324.2)(323.5-325.0)}{(322.8-321.0)(322.8-324.2)(322.8-325.0)}.2.50893 \\ & + \frac{(323.5-321.0)(323.5-322.8)(323.5-325.0)}{(324.2-321.0)(324.2-322.8)(324.2-325.0)}.2.51081 \\ & + \frac{(323.5-321.0)(323.5-322.8)(323.5-324.2)}{(325.0-321.0)(325.0-322.8)(325.0-324.2)}.2.51188 \\ = & -0.07996 + 1.18794 + 1.83897 - 0.43708 = 2.50987 \end{aligned}$$

bulunur.

4.4 Lagrange İnterpolasyon Formülünün Hatası

$y = f(x)$ fonksiyonu için $P_n(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ özelliğine sahip $P_n(x)$ Lagrange polinomunu bir önceki kısımda bulmuştuk.

$$R_n(x) = f(x) - P_n$$

fonksiyonuna kalan terim fonksiyonu denir. Düğüm noktaları dışında ele alınan x noktasında interpolasyon polinomu ile bulunan değer uygun $f(x)$ değerine ne kadar yakın olmaktadır. Bir başka değişle bu x noktasındaki $R_n(x)$ değeri ne kadar büyüktür. $R_n(x)$ küçük oldukça $P_n(x)$ değeri x noktasında $f(x)$ değerine yaklaşmaktadır. Bu yaklaşma derecesini bulabilmemiz için $f(x)$ fonksiyonu belirli özellikli bir fonksiyon olmalıdır. Düğüm noktalarının tümünü içerdiği $[a, b]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunun $(n+1)$. mertebeye kadar tüm türevlerinin mevcut olduğunu varsayalım.

$$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

olmak üzere

$$U(x) = f(x) - P_n(x) - k\,\Pi_{n+1}(x) \tag{4.24}$$

fonksiyonunu ele alalım. $U(x)$ fonksiyonunu

$$x_0, x_1, \cdots, x_n$$

noktalarında sıfır olacağı açıktır. k'nı öyle seçelim ki, $U(x)$ fonksiyonunun $(n+2)$. sıfırı $[a,b]$ aralığının keyfi şekilde seçilmiş fakat $i = 0, 1, \cdots, n$ olmak üzere x_i lerden farklı olan belirli bir $\bar{x}$ noktasında gerçekleşmiş olsun. Bunun için

$$f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) - k\,\Pi_{n+1}(\bar{x}) = 0$$

olması yeterlidir. Burada $\Pi_{n+1}(\bar{x}) \neq 0$ olması nedeniyle

$$k = \frac{f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})}{\Pi_{n+1}(\bar{x})} \tag{4.25}$$

olmalıdır. k çarpanının bu değeri için $U(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında $(n+2)$ köke sahip olacaktır ve

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_i, \bar{x}], [\bar{x}, x_{i+1}], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

aralıklarının her birinin uç noktalarında sıfıra eşit olacaktır. Her aralığa Rolle teoremini uygularsak, sonuçta $U'(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında $(n+1)$ tane sıfıra sahip olacağı ortaya çıkar. Rolle teoremini $U'(x)$ fonksiyonuna uygularsak, sonuçta $U''(x)$ fonksiyonunun n tane noktada sıfıra eşit olacağı ortaya çıkar. Bu işlemleri tekrarlarsak sonuçta bakılan $[a,b]$ aralığında $U^{(n+1)}(x)$ fonksiyonunun en az bir sıfıra sahip olacağı ortaya çıkar. $U^{(n+1)}(x)$ fonksiyonunu sıfır yapan nokta ξ noktası olsun. Yani $U^{(n+1)}(\xi) = 0$ olacaktır.

$$P_n^{(n+1)}(x) = 0 \qquad \text{ve} \qquad \Pi_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)!$$

olduğu için (4.24) formülünden

$$U^{(n+1)} = f^{(n+1)}(x) - k(n+1)!$$

bulunacaktır. $x = \xi$ kabul edersek

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)!$$

veya

$$k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{4.26}$$

bulunacaktır. (4.25) ve (4.26) ün sağ tarafını kıyaslarsak

$$\frac{f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})}{\Pi_{n+1}(\bar{x})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

veya

$$f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \times \Pi_{n+1}(\bar{x}) \tag{4.27}$$

elde edilecektir. $\bar{x}$ noktası keyfi şekilde ele alındığı için (4) formülü

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \times \Pi_{n+1}(x) \tag{4.28}$$

şekilde de yazılabilir. Burada ξ, x değerine bağlıdır ve $[a, b]$ nın bir iç noktası olmaktadır. (4.28) formülü $[a, b]$ aralığının düğüm noktaları dahil tüm noktaları için geçerlidir.

$$M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$$

olsun. Bu taktirde Lagrange interpolasyon formülünün mutlak hatası için

$$|R(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} . |\Pi_{n+1}(x)| \tag{4.29}$$

eşitsizliği elde edilecektir.

Örnek: $\sqrt{115}$ sayısının değerini y= $\sqrt{x}$ fonksiyonu için türetilmiş Lagrange interpolasyon formülü yardımıyla hangi hassasiyetle hesaplama mümkündür $x_0 = 100,\ x_0 = 121,\ x_0 = 144$, düğüm noktaları olarak verilmiştir.

Çözüm:

$$y' = -\frac{1}{2}x^{-1/2},\ y'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2},\ y''' = \frac{3}{8}x^{-5/2}.$$

Burada

$$M_3 = \max_{100 \leq x \leq 144} |y'''| = \frac{3}{8} \times 10^{-5}$$

bulunacaktır. (6) formülüne göre

$$\begin{aligned} |R_2| &= \frac{3}{8} \times 10^{-5} \times \frac{1}{3!} |(115 - 100)(115 - 121)(115 - 144)| \\ &= \frac{1}{16} \times 10^{-5} \times 15,6 \times 29 \\ &\approx 1,6.10^{-3} \end{aligned}$$

olacaktır.

4.5 Newton İnterpolasyon Polinomları

Newton interpolasyon polinomları verilen noktalara eğri uydurmada kullanılan popüler bir yöntemdir. n noktadan geçen n. dereceden Newton polinomu aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned} P(x) = a_0 &+ a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &+ a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots \\ &+ a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{4.30}$$

ifade edilir. Bu yapıda polinom gösteriminin bir özelliği, a_0 dan a_n e kadar bütün katsayılar basit matematiksel işlemlerle bulunabilir. Polinomun katsayıları bilinirse, verilen x_i verileri arasındaki bir x ara verisi için polinomun değeri bulunabilir.

Newton interpolasyon polinomlarını popüler yapan Lagrange polinomlarından farklı olarak $P_n(x)$ polinomu bulmak için $P_{n-1}(x)$ polinomundan yararlanılmasıdır. Lagrange polinomlarında $P_n(x)$ ve $P_{n-1}(x)$ polinomları birbirinden tamamen bağımsız yapılardadır. Newton interpolasyo polinomlarında veri noktaları herhangi azalan yada artan bir sıralamaya sahip olmayabilir. Dahası herhangi bir nokta grubu verildiğinde hesaplanan a_i katsayılarına yeni veri grubu geldiğinde önceden hesaplanan a_i katsayıları değiştirilmeden ilave katsayılar yazarak polinomu yeniden bulabiliriz. Bu durumu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) \quad (4.31)$$

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \quad (4.32)$$

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \quad (4.33)$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ + a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \cdots \quad (4.34) \\ + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Dolayısıyla $P_n(x)$ polinomunu $P_{n-1}(x)$ polnomundan yararlanarak kısaca

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1}) \quad (4.35)$$

yazılabilir.

Örnek: $x_0 = 1,\ x_1 = 3,\ x_2 = 4$ ve $x_3 = 5$ noktaları ve onların katsayıları $a_0 = 5,\ a_1 = -2,\ a_2 = 1,\ a_3 = -0.5$ ve $a_4 = 0.1$ verilsin, $P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x)$ ve $P_4(x)$ polinomlarını bulunuz ve $k = 1, 2, 3, 4$ için $P_k(2.5)$'i hesaplayınız.

Çözüm: (4.31) den (4.34)'e formülleri kullanırsak,

$$\begin{aligned} P_1(x) &= 5 - 2(x - 1) \\ P_2(x) &= 5 - 2(x - 1) + 1\,(x - 1)(x - 3) \\ P_3(x) &= P_2(x) - 0.5(x - 1)(x - 3)(x - 4) \\ P_4(x) &= P_3(x) + 0.1(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 5) \end{aligned}$$

bulunur. $x = 2.5$ da polinomların değerleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} P_1(2.5) &= 5 - 2(1.5) = 2 \\ P_2(2.5) &= P_1(2.5) + 1\,(1.5)(-0.5) = 1.25 \\ P_3(2.5) &= P_2(2.5) - 0.5(1.5)(-0.5)(-1.5) = 0.6875 \\ P_4(2.5) &= P_3(2.5) + 0.1(1.5)(-0.5)(-1.5)(-2.5) = 0.40625 \end{aligned}$$

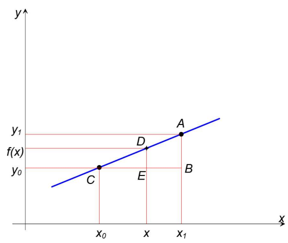
elde edilir.

Birinci Mertebe Newton Polinomu

Newton interpolasyon polinomunun bu en basit yapısı (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) iki noktayı bir doğruyla birleştirilerek elde edilir. Bu yapının polinom yapısı

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) \quad (4.36)$$

biçiminde ifade edilir. Bu doğru denkleminde a_0 ve a_1 katsayılarını iki noktadan geçen doğru denkleminden rahatlıkla bulabiliriz, ayrıca a_1 doğrunun eğimini temsil ettiğinden eğim formülündende a_1 bulabiliriz. Bu işlemlere ilaveten şekil 4.4 deki benzer üçgenlerden yararlanarak a_0 ve a_1 katsayılarını bulalım



Şekil 4.4: Birinci derece Newton polinomu

$$\frac{DE}{CE} = \frac{AB}{CB} \quad \text{yada} \quad \frac{f(x) - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad (4.37)$$

Denklem (4.37) de $f(x)$ gerekli düzenlemeler yapılıp yanlız bırakılırsa

$$f(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \quad (4.38)$$

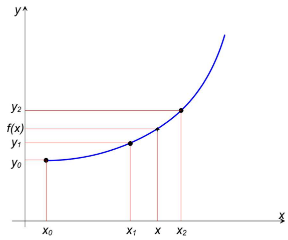
bulunur. Denklem (4.36) ile (4.38) karşılaştırılırsa a_0 ve a_1 katsayılarını aşağıdaki gibi bulabiliriz

$$a_0 = y_0 \quad \text{ve} \quad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad (4.39)$$

burada metodun sağlıklı işlemesi için verilen noktaların birbirine yakın olmasına dikkat etmeliyiz, aksi takdirde interpolasyon polinomu doğrusal olduğundan istenen aradeğerin sonucu sağlıklı olmayabilir.

İkinci Mertebe Newton Polinomu

Bir eğriye doğru çizerek yaklaşma sağlıklı bir sonuç sağlamaz. Dolayısıyla, bir eğriye yaklaşmak istiyorsak verilen aralıkta bir eğri çizmek gerekir. Bunun için ikinci ve daha üst mertebe Newton polinomları kullanılır. Şekil 4.5 den görüldüğü gibi üç noktadan bir parabol geçmektedir, bu durumda (x_0, y_0), (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) üç nokta verildiğinde bu üç noktadan geçen ikinci derece Newton interpolasyon polinomu aşağıdaki formda yazılabilir:



Şekil 4.5: İkinci derece Newton polinomu

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \tag{4.40}$$

denklem (4.40) daki a_0, a_1 ve a_2 katsayılarını bulmak için sırasıyla denklem (4.40) içine verilen x değerleri yazılır. Denklemin içine $x = x_0$ ve $f(x_0) = y_0$ yazılırsa $a_0 = y_0$ bulunur. İkinci nokta olan $x = x_1$ ve $f(x_1) = y_1$ denklem (4.40) içine yerleştirilirse (ve $a_0 = y_0$ da)

$$y_1 = y_0 + a_1(x - x_0) \quad \text{yada} \quad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \tag{4.41}$$

bulunur.

Üçüncü nokta $x = x_2$ ve $f(x_2) = y_2$ denklem (4.40) nın içine yerleştirilirse (ve $a_0 = y_0$ ile $a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ da)

$$y_2 = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \tag{4.42}$$

ve eşitliğin her iki tarafına $-y_1$ ilave edelip

$$y_2 - y_1 = y_0 - y_1 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \tag{4.43}$$

yada

$$y_2 - y_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_1) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \tag{4.44}$$

denklem (4.44) da a_2 yalnız bırakılısa

$$a_2 = \frac{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \tag{4.45}$$

bulunur.

Dikkat edilirse a_0 ve a_1 katsayıları birince mertebe de çıkan katsayılarla aynıdır. Bu durumu daha öncede izah etmiştik, bundan faydalanarak daha üst mertebe katsayılarda bulabiliriz.

Üçüncü Mertebe Newton Polinomu

Verilen (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) ve (x_3, y_3) dört nokta için, Newton interpolasyon polinomunu dört noktadan geçecek şekilde

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \tag{4.46}$$

ifade edilir.

Formulasyondaki a_0, a_1 ve a_2 katsayıları ikinci mertebe polinomdaki katsayılarla aynıdır. Denklem (4.46) deki a_4 katsayısnipolını bulmak için denklemin içinde $x = 3$ ve $f(x_3) = y_3$ yazılır a_3 yanlız bırakılır vede düzenlenirse

$$a_3 = \frac{\dfrac{\dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1} - \dfrac{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}}{x_3 - x_0} \tag{4.47}$$

bulunur.

Newton Polinomunun Genel Bir Yapısı ve Onun Katsayıları

a_0, a_1, a_2 ve a_3 katsayılarının eşitlerine dikkat edilirse herbir katsayıların belli bir kalıpla yazıldığı anlaşılmaktadır. Bu kalıba biz *sonlu bölünmüş farklar* olarak adlandırmaktayız.

İki nokta için ilk sonlu bölünmüş fark aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \tag{4.48}$$

İki birinci bölünmüş farkın farkını temsil eden ikinci bölünmüş fark

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k} \tag{4.49}$$

gibi ifade edilir.

Benzer şekilde, $n$ci sonlu bölünmüş farkta

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0]}{x_n - x_0} \tag{4.50}$$

biçiminde ifade edebiliriz.

Bu durumda Newton interpolasyon polinomunun katsayılarını

$$\begin{aligned} a_0 &= f(x_0) \\ a_1 &= f[x_1, x_0] \\ a_2 &= f[x_2, x_1, x_0] \\ &\vdots \\ a_n &= f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] \end{aligned} \tag{4.51}$$

biçiminde yazabilriz.

Bu tanımlamalarla birlikte, $n$ci mertebe Newton polinomu yani denklem (4.30) yi aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned} P(x) = &\underbrace{y_0}_{a_0} + \underbrace{f[x_1, x_0]}_{a_1}(x - x_0) + \underbrace{f[x_2, x_1, x_0]}_{a_2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &+ \underbrace{f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]}_{a_n}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{4.52}$$

Tablo 4.1: Newton intepolasyon tablosu

x	y	Birinci	İkinci	Üçüncü	Dördüncü
x_0 x_1 x_2 x_3 x_4	y_0 y_1 y_2 y_3 y_4	$f[x_1, x_0]$ $f[x_2, x_1]$ $f[x_3, x_2]$ $f[x_4, x_3]$	$f[x_2, x_1, x_0]$ $f[x_3, x_2, x_1]$ $f[x_4, x_3, x_2]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$ $f[x_4, x_3, x_2, x_1]$	$f[x_4, x_3, x_2, x_1, x_0]$

Not: Newtonun interpolasyon yönteminde, veri noktalar arasındaki aralıklar eşit olmak zorunda değildir.

Örnek: Beş veri noktası ve onların değerleri yanda verilmiştir

(a) Verilen noktalardan geçen dördüncü dereceden Newton Polinomunu bulunuz. Bölünmüş fark tablosunu kullanarak katsayıları hesaplayınız.

(b) Bulunan Newton polinomundan yararlanarak $x = 3$ için interpolasyon polinomunun değerini bulunuz.

x	1	2	4	5	7
y	54	7	-3	-38	12

Tablo 4.2: Veri Değerleri

Çözüm. *(a)* Verilmiş beş nokta için Newton polinomu

$$P(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)(x-2) + a_3(x-1)(x-2)(x-4) + a_4(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)$$

a_i katsayıları aşağıdaki bölünmüş fark tablosunda hesaplanabilir:

katsayışarın hesaplanmasıyla, polinom:

Tablo 4.3: Bölünmüş Fark Tablosu

x_i	y_i	Birinci	İkinci	Üçüncü	Dördüncü
1	54	$\frac{7-54}{2-1} = -47$	$\frac{-5+47}{4-1} = 14$	$\frac{-10-14}{5-1} = -6$	$\frac{6+6}{7-1} = 2$
2	7	$\frac{-3-7}{4-2} = -5$	$\frac{-35+5}{5-2} = -10$	$\frac{20+10}{7-2} = 6$	
4	-3	$\frac{-38+3}{5-4} = -35$	$\frac{25+35}{7-4} = 20$		
5	-38	$\frac{12+38}{7-5} = 25$			
7	12				

$$P(x) = 54 - 47(x-1) + 14(x-1)(x-2) - 6(x-1)(x-2)(x-4) + 2(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)$$

(b) yukarıdaki polinomda $x = 3$ yazılırsa

$$P(3) = 54 - 47(3-1) + 14(3-1)(3-2) - 6(3-1)(3-2)(3-4) + 2(3-1)(3-2)(3-4)(3-5) = 8$$

bulunur.

Örnek:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds$$

Gauss hata fonksiyonunun değerleri Tablo (4.9) de verilmiştir. $erf(0.53)$ ün değerini hesaplayınız.

$y = erf(x)$ fonksiyonu için fark tablosu ve sonlu farkları aşağıda verilmiştir.

x_k	$y = f[x_k]$	$f[\,,\,]$	$f[\,,\,,\,]$	$f[\,,\,,\,,\,]$	$f[\,,\,,\,,\,,\,]$
0.51	$\overbrace{0.5292437}^{a_0}$	$\overbrace{0.865500}^{a_1}$	$\overbrace{-0.449167}^{a_2}$	$\overbrace{-0.11665}^{a_3}$	$\overbrace{0.0551667}^{a_4}$
0.52	0.5378987	0.852025	-0.453833	-0.11334	
0.54	0.5549392	0.838410	-0.459500		
0.55	0.5633233	0.824625			
0.57	0.5798158				

Tablo 4.4: $erf(x)$ fonksiyonunun fark tablosu

yukarıdaki tabloda elde ettiğimiz değerleri yerlerine yazarsak Newton polinomu:

$$\begin{aligned} P(x) = {} & 0.5292437 + 0.865500(x-0.51) - 0.449167 \times (x-0.51)(x-0.52) \\ & - 0.11665 \times (x-0.51) \times (x-0.52) \times (x-0.54) \\ & + 0.0551667 \times (x-0.51) \times (x-0.52) \times (x-0.54) \times (x-0.55) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(0.53) = {} & 0.5292437 + 0.865500(0.53-0.51) \\
& -0.449167 \times (0.53-0.51)(0.53-0.52) \\
& -0.11665 \times (0.53-0.51) \times (0.53-0.52) \times (0.53-0.54) \\
& +0.0551667 \times (0.53-0.51) \times (0.53-0.52) \times (0.53-0.54) \times (0.53-0.55) \\
= {} & 0.546464
\end{aligned}
$$

bulunur bu değer $erf(0.53) = 0.546464$ değeri ile aynı değerdir.

4.6 Sonlu Farklar

$y = f(x)$ verilmiş fonksiyon olsun. $\Delta x = h$ argumantın ilerlemesidir. Bu taktirde

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

İfadesine y fonksiyonunun 1.sonlu farkı denir. Benzer şekilde yüksek mertebeden sonlu farklar tanımlanabilir:

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y) \ (n = 2, 3, \cdots)$$

Örnek:

$$
\begin{aligned}
\Delta^2 y &= \Delta(\Delta y) \\
&= \Delta(f(x+\Delta x) - f(x)) \\
&= \Delta f(x+\Delta x) - \Delta f(x) \\
&= (f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x)) - (f(x+\Delta x) - f(x)) \\
&= f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)
\end{aligned}
$$

olacaktır

Örnek: $P(x) = x^3$ fonksiyonu için $\Delta x = 1$ kabul ederek tüm sonlu farkları türetiniz.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
\Delta P(x) &= (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1 \\
\Delta^2 P(x) &= \left[3(x+1)^2 + 3(x+1) + 1\right] - \left(3x^2 + 3x + 1\right) = 6x + 6 \\
\Delta^3 P(x) &= (6(x+1) + 6) - (6x + 6) = 6 \\
\Delta^n P(x) &= 0 \text{ eğer n>3 ise}
\end{aligned}
$$

$P(x)$ in 3. mertebeden sonlu farkının sabit olduğuna dikkat edelim genelde aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem: Eğer $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ n. dereceden bir polinom ise, bu taktirde

$\triangle^n P_n(x) = n! a_0 h^n = sabit$ dir. Burada $\triangle x = h$ dir.

İspat:

$$
\begin{aligned}
\triangle P_n(x) &= P_n(x+h) - P_n(x) \\
&= a_0[(x+h)^n - x^n] + a_1[(x+h)^{n-1} - x^{n-1}] + \cdots + a_{n-1}[(x+h) - x]
\end{aligned}
$$

Küçük parantezdeki ifadeyi Newton binom formülü yardımıyla sadeleştirirsek $\triangle P_n(x)$ ifadesinin $(n-1)$. dereceden bir polinom olacağı kesindir. Yani

$$\triangle P(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}$$

Burada $b = n.h.a_0$ dir. Düşünceleri benzer şekilde tekrarlarsak 2. mertebeden sonlu fark ifadesinin $(n-2)$. dereceden bir polinom olacağı kesinlik kazanacaktır. Yani

$$\triangle^2 P_n(x) = c_0 x^{n-2} + c_1 x^{n-3} + \cdots + c_{n-2}$$

dir. Açıktır ki,

$$c_0 = (n-1)hb_0 = n(n-1)h^2 a_0$$

olacaktır. Nihayet, sonuçta

$$\triangle^n P_n(x) = n! a_0 h^n = sabit$$

buluruz. Neticede $s > n$ özellikli $s \in N$ sayısı için

$$\triangle^s P_n(x) = 0$$

olacaktır. Sembolüne bir operatör gibi bakılabilir. Bu operatörün temel özelliklerini sırası ile yazalım

1. $\triangle(u+v) = \triangle u + \triangle v$
2. $\triangle(Cu) = C \triangle u$
3. $\triangle^m(\triangle^n y) = \triangle^{m+n} y (m, n$ negatif olmayan tam sayılardır)

$\triangle^0 y = y$ kabul edilmektedir. Formulünden $f(x+\triangle x) = f(x) + \triangle f(x)$ eşitliği yazılabilir. Burada $\triangle$ ya sembolik bir çarpım gibi bakılırsa

$$f(x+\triangle x) = (1+\triangle)f(x) \tag{4.53}$$

Eşitliği de yazılabilir. Bu bağıntının n defa ardışık olarak uygularsak, sonuçta

$$f(x+n\triangle x) = (1+\triangle)^n f(x) \tag{4.54}$$

buluruz. Newton formülünü kullanırsak, sonuçta

$$f(x+n\triangle x) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \Delta^m f(x) \tag{4.55}$$

elde edilecektir. Burada $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ dır. (3) formülü yardımıyla $f(x)$ in ardışık değerleri onun muhtelif mertebeden sonlu farkıyla bulunabilir.

$$\triangle = (1+\triangle) - 1 \tag{4.56}$$

eşitliği kullanırsak ve Newton binom formülü uygulayarak

$$\begin{aligned}\triangle^n f(x) &= [(1+\triangle)-1]^n f(x) \\ &= (1+\triangle)^n f(x) - C_n^1(1+\triangle)^{n-1} f(x) + C_n^2 (1+\triangle)^{n-2} f(x) - \cdots + (-1)^n f(x)\end{aligned} \tag{4.57}$$

Elde edebiliriz. (3) formülünü kullanırsak

$$\triangle^n f(x) = f(x+n\triangle x) - C_n^1 f[x+(n-1)\triangle x] + C_n^2 f[x+(n-2)\triangle x] - \cdots + (-1)^n f(x) \tag{4.58}$$

bağıntısı bulunacaktır. (6) formülü, n. mertebeden sonlu farkın fonksiyonun ardışık değerleri ile bağlantısını ifade ediyor.

$f(x)$ fonksiyonu $[x, x+n\triangle x]$ aralığında n. mertebeden sürekli türeve sahip olsun. Bu taktirde

$$\triangle^n f(x) = (\triangle x)^n f^n(x+\theta n \triangle x) \tag{4.59}$$

formülü gerçekleşmektedir. Burada $0 < \theta < 1$ dir. (7) formülünü tümevarım bağıntı metodu ile ispatlayabiliriz. Gerçekten $n = 1$ durumunda fonksiyonun sonlu artımı hakkında Lagrange teoremi elde ediyoruz. Yani (7) formülü doğrudur. Şimdi de $k < n$ durumunda

$$\triangle^k f(x) = (\triangle x)^k f^{(k)}(x + \theta^1 k \triangle x)$$

eşitliği sağlanmış olsun. Burada $0<\theta^{'}<1$ dir. Bu taktirde

$$\triangle^{k+1} f(x) = (\triangle x)^k [f(x+\triangle x) - f(x)] = (\triangle x)^k [f^{(k)}(x+\triangle x+\theta^{'} k \triangle x) - f(x+\theta^{'} k \triangle x)]$$

olacaktır. $f^{(k)}(x)$ e Lağrange teoremini uygularsak

$$\triangle^{k+1} f(x) = (\triangle x)^k \triangle x f^{(k+1)}(x + \theta^{'} k \triangle x + \theta^{''} \triangle x)]$$

buluruz. Burada $0 < \theta'' < 1$ dir.

$$\frac{\theta' k + \theta''}{k+1} = \theta \tag{4.60}$$

kabul edersek.

$$\triangle^{k+1} f(x) = (\triangle x)^{k+1} \triangle x f^{(k+1)}[x + \theta(k+1) \triangle x]$$

elde edilecektir. Tabii ki $0 < \theta < 1$ dir. Böylece (7) formülünün doğru olduğu ispatlanmış oldu. (7) formülünden

$$f^{(n)}(x + \theta n \triangle x) = \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n}$$

yazabiliriz. $\triangle x \to 0$ durumunda bu eşitliğin limitini $f(x)$ in n. mertebeden sürekli türeve sahip olacağını varsayarak

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n} \tag{4.61}$$

şeklinde hesaplayabiliriz. Dolayısıyla küçük $\triangle x$ ler için

$$f^{(n)}(x) \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n} \tag{4.62}$$

bağıntısını yazabiliriz.

4.7 *Fark Tabloları*

$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ eşit dağılım veri grubu olsun. x'in bu değerine y'nin $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n$ değerleri tekabül etsin. $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n$ ler için sonlu farklar

$$\begin{array}{rcl} \triangle y_i & = & y_{i+1} - y_i \\ \triangle^2 y_i & = & \triangle(\triangle y_i) = \triangle y_{i+1} - \triangle y_i \\ \cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \triangle^n y_i & = & \triangle(\triangle^{n-1} y_i) = \triangle^{n-1} y_{i+1} - \triangle^{n-1} y_i \end{array}$$

şeklinde bulunur. 1. denklemden

$$y_{i+1} = y_i + \triangle y_i = (1 + \triangle) y_i$$

bulunur. Burada da sırası ile

$$\begin{aligned} y_{i+2} &= (1+\triangle)y_{i+1} = (1+\triangle)^2 y_i \\ y_{i+3} &= (1+\triangle)^3 y_i \\ \cdots & \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{i+n} &= (1+\triangle)^n y_i \end{aligned}$$

bağıntıları bulunur. Newton Binom formülünü kullanırsak

$$y_{i+n} = y_i + C_n^1 \triangle y_i + C_n^2 \triangle^2 y_i + C_n^3 \triangle^3 y_i + \cdots + \triangle^n y_i$$

Aksine

$$\begin{aligned} \triangle^n y_{i+n} = [(1+\triangle)-1]^n y_i &= (1+\triangle)^n y_i - C_n^1 (1+\triangle)^{n-1} y_i + C_n^2 (1+\triangle)^{n-2} y_i + \cdots + (-1)^n y_i \\ &= y_{i+n} - C_n^1 y_{i+n-1} + C_n^2 y_{i+n-2} + \cdots + (-1)^n y_i \end{aligned}$$

de yazılabilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} \triangle^2 y_i &= y_{i+2} - 2y_{i+1} - y_i \\ \triangle^3 y_i &= y_{i+3} - 3y_{i+2} + y_{i+1} - y_i \end{aligned}$$

Muhtelif mertebeden sonlu farkları yatay veya köşegen biçimli fark tabloları yardımı ile basitçe hesaplanabilir.

Örnek1: $x_0 = 0$ dan başlayarak $h = 1$ adımı ile $y = 2x^2 - 2x^2 + 3x - 1$ fonksiyonu için yatay tablo türetiniz.

Çözüm: Tablo 1 (3. Dereceden fonksiyon için yatay fark tablosu)

x	y	$\triangle y$	$\triangle^2 y$	$\triangle^3 y$
0	-1	3	8	12
1	2	11	20	12
2	13	31	32	12
3	44	63	44	12
4	107	107	56	12
5	214	163	68	12
...	...	...	...	...

Tablo 4.5: Fark tablosu

$$x_0 = 1;\ x_1 = 2;\ x_2 = 3$$
$$y_0 = -1;\ y_1 = 2;\ y_2 = 13$$

Buradan

$$\begin{aligned} \triangle y_0 &= y_1 - y_0 = 3 \\ \triangle y_1 &= y_2 - y_1 = 11 \\ \triangle y_2 &= y_3 - y_2 = 8 \end{aligned}$$

bulunur. Ele alınan polinom 3. dereceden olduğu için $\triangle^3 y_i = 2.3! = 12$ olacaktır. Aşağıdaki eşitliklerin sağlandığına dikkat edelim.

$$\begin{aligned} \triangle^2 y_{i+1} &= \triangle^2 y_i + 12 \quad (i = 0, 1, 2, \cdots) \\ \triangle y_{i+1} &= y_i + \triangle^2 y_i \quad (i = 1, 2, \cdots) \\ y_{i+1} &= y_i + \triangle y_i \quad (i = 2, 3, \cdots) \end{aligned}$$

Bu formülleri kullanırsak düz çizgilerin altındaki elemanları hesaplayabiliriz. (Bkz. Tablo 1)

$x = x_n$ de y nin y_n değerinin ε hata ile bulunduğunu düşünelim. Bu hata sonlu farkların değerini nasıl etkiler? Bu soruya cevaplayabilmek için köşegen biçimli fark tablosunu türetelim (Bkz. Tablo 1)

Tablo 2 den üç sonucu hemen söyleyelim

1. Eğer y_n hatalı olarak verilmiş ise

$$\triangle y_{n-1}; \triangle y_n; \triangle^2 y_{n-2}; \triangle^2 y_{n-1}; \triangle^3 y_n \text{ ve } b$$

sonlu farklar da hatalı olarak hesaplanacaktır.

Tablo 4.6: İleri fark tablosu

x	y	$\triangle y$	$\triangle^2 y$	$\triangle^3 y$	$\triangle^4 y$
x_{n-4}	y_{n-4}				
		$\triangle y_{n-4}$			
x_{n-3}	y_{n-3}		$\triangle^2 y_{n-4}$		
		$\triangle y_{n-3}$		$\triangle^3 y_{n-4}$	
x_{n-2}	y_{n-2}		$\triangle^2 y_{n-3}$		$\triangle^4 y_{n-4}+\varepsilon$
		$\triangle y_{n-2}$		$\triangle^3 y_{n-3}+\varepsilon$	
x_{n-1}	y_{n-1}		$\triangle^2 y_{n-2}+\varepsilon$		$\triangle^4 y_{n-3}-4\varepsilon$
		$\triangle y_{n-1}+\varepsilon$		$\triangle^3 y_{n-2}-3\varepsilon$	
x_n	y_n		$\triangle^2 y_{n-1}-2\varepsilon$		$\triangle^4 y_{n-2}+6\varepsilon$
		$\triangle y_n-\varepsilon$		$\triangle^3 y_{n-1}+3\varepsilon$	
x_{n+1}	y_{n+1}		$\triangle^2 y_n+\varepsilon$		$\triangle^4 y_{n-1}-4\varepsilon$
		$\triangle y_{n+1}$		$\triangle^3 y_n+\varepsilon$	
x_{n+2}	y_{n+2}		$\triangle^2 y_{n+1}$		$\triangle^4 y_n+\varepsilon$
		$\triangle y_{n+2}$		$\triangle^3 y_{n+1}$	
x_{n+3}	y_{n+3}		$\triangle^2 y_{n+2}$		
		$\triangle y_{n+3}$			
x_{n+4}	y_{n+4}				

2. $D^k y_n$ sonlu farkının ifadesine hata oluşumları işaretini değişen binominal katsayılarla katkı sağlayacaktır. Yani toplam hata oluşumuna katkı gösteren hata oluşumlar,
$$C_k^0\varepsilon,\ -C_k^1\varepsilon,\ C_k^2\varepsilon,\ \cdots,\ (-1)^k C_k^k\varepsilon$$
olacaktır. Bu toplam hatanın mutlak değerinin hızla artacağını gösteriyor.
3. Her sonlu $D^k y_n$ farkı için hataların toplamı sıfıra, mutlak değerinin toplamı ise $2^{k|\varepsilon|}$ na eşittir.

4.8 *Genelleştirilmiş Derece Kavramı*

x sayısının n dereceden genelleştirilmiş derecesi h belirli bir sabit olmak üzere

$$x^{[n]} = x(x-h)(x-2h)\cdots[x-(n-1)h] \tag{4.63}$$

ifadesine denir. $x^{[0]}=1$ kabul ediliyor. $h=0$ olduğu taktirde

$$x^{[n]} = x^n$$

oluyor. Sonlu farkları hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\triangle x^{[n]} &= (x+h)^{[n]} - x^{[n]}\\ &= (x+h)x(x-h)\cdots[x-(n-2)h] - x(x-h)\cdots[x-(n-1)h]\\ &= x(x-h)\cdots[x-(n-2)h][(x+h)-(x-(n-1)h)]\\ &= x(x-1)\cdots[x-(n-2)h]nh = nhx^{[n-1]}\end{aligned} \tag{4.64}$$

Yani $\triangle x^{[n]} = nhx^{[n-1]}$. Bu formülü kullanarak 2. mertebeden sonlu farkı bulalım

$$\triangle^2 x^{[n]} = \triangle\left(\triangle x^{[n]}\right) = \triangle\left(nhx^{[n-1]}\right) = nh\Delta x^{[n-1]} = nh.(n-1)hx^{[n-2]} = n(n-1)h^2x^{[n-2]}$$

Matematiksel rekürans metodu ile

$$\triangle^k x^{[n]} = n(n-1)\cdots[n-(k-1)]h^k x^{[n-k]}$$

formülü bulunabilir. Burada $k=1,2,\cdots,n$ dir. $k>n$ durumunda $\triangle^k x^{[n]}=0$ olacağı açıktır. (2) formülünün bulunarak Newton Leibnitz formülünün benzerini türetelim. $x_0, x_1, \cdots, x_n$ eşit adımlı noktalar olsun. Yani $x_{i+1}-x_i = h = sbt$ dir. $i=0,1,2,\cdots$ dir.

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} x_i^{[n]}$$

toplamını ele alalım. (2) formülüne göre

$$x^{[n]} = \frac{\Delta x^{n+1}}{h(n+1)}$$

olduğu için

$$\begin{aligned} S_N = \frac{1}{h(n+1)} \sum_{i=0}^{N-1} \triangle x_i^{[n+1]} &= \frac{1}{h(n+1)} \left\{ x_1^{[n+1]} - x_0^{[n+1]} + x_2^{[n+1]} - x_1^{[n+1]} + \cdots + x_N^{[n+1]} - x_{N-1}^{[n+1]} \right\} \\ &= \frac{1}{h(n+1)} \left\{ x_N^{[n+1]} - x_0^{[n+1]} \right\} \end{aligned}$$

olacaktır. Neticede

$$\sum_{i=0}^{N-1} \triangle x_i^{[n]} = \frac{x_N^{[n+1]} - x_0^{[n+1]}}{h(n+1)} \tag{4.65}$$

formülü bulunacaktır. Bu formül tam pozitif genelleştirilmiş derecelerin toplam formülü olup Newton-Leibnitz formülüne benzemektedir.

4.9 İnterpolasyon Probleminin Konumu

$[a, b]$ aralığında $n + 1$ tane $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ noktalarının verildiğini düşünelim. Bu noktalar düğün noktaları olarak adlandırılmaktadır. Bu noktaların yanı sıra bu noktalarda belli bir $f(x)$ fonksiyonunun

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \cdots, f(x_n) = y_n \tag{4.66}$$

değerlerinin verildiğini düşünelim belirli sınıfa mensup ve

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \cdots, F(x_n) = y_n \tag{4.67}$$

özelliğine sahip $F(x)$ fonksiyonunun bulunması gerekmektedir. Bu fonksiyona ileride interpolasyon polinomu denilecektir.

Geometrik olarak $F(x)$ fonksiyonunun bulunması $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ olmak üzere $M_i(x_i, y_i)$ noktalar sisteminden geçen $y = F(x)$ eğrisinin bulunmasına denktir. (Bkz. Şek.1)

$$P_n(x_0) = y_0, P_n(x_1) = y_1, \cdots, P_n(x_n) = y_n$$

özellikli n. dereceden $P_n(x)$ polinomunun bulunması gerekseydi bu problemi çözümü tek olacaktı. Böylece bulunacaktır $y = F(x)$ biçimli interpolasyon formülü yardımı ile $y = f(x)$ fonksiyonunun, interpolasyon düğüm noktalarından farklı x noktasında değeri hesaplanabilir. Bu işleme $f(x)$ fonksiyonunun interpolasyon yapılması denir. Eğer $x \in [x_0, x_n]$ ise bu noktada fonksiyonun değerinin bulunması problemine interpolasyon problemi denir. Eğer $x \notin [x_0, x_n]$ ise bu noktada fonksiyonun değerinin bulunması problemine ekstrapolasyon problemi denir.

4.10 Newton 1.İnterpolasyon Formülü

$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ noktaları eşit aralıklı noktalar olsun. Yani $x_i = x_0 + ih$ dır.Burada $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ dir. Bu noktalarda $y = f(x)$ fonksiyonunun değerleri $y_i = f(x_i)$ olsun

Derecesi n'i aşmayan

$$P_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n) \tag{4.68}$$

Özellikli $P_n(x)$ polinomununu bulmak gerekir. (1) şartı

$$\triangle^m P_n(x_0) = \triangle^m y_0 \quad (m = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

bağıntılarının sağlanmasına denktir. Bu polinomu aşağıdaki şekilde bulalım

$$\begin{aligned} P_n(x) = & a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ & + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Genelleştirilmiş dereceleri kullanırsak (2) eşitliğini

$$\begin{aligned} P_n(x) = & a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0)^{[2]} + a_3(x - x_0)^{[3]} \\ & + \cdots + a_n(x - x_0)^{[n]} \end{aligned} \tag{4.69}$$

şekline dönüştürelim. $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ olmak üzere a_i katsayılarının bulunması gerekmektedir. (2') formülünde $x = x_0$ kabul edilirsek

$$P_n(x_0) = y_0 = a_0$$

elde edilecektir. a_1 'i bulmak için 1. sonlu farkı türetelim

$$\triangle P_n(x) = a_1 h + 2a_2(x - x_0)^{[1]} h + 3a_3(x - x_0)^{[2]} h + \cdots + n a_n (x - x_0)^{[n-1]} h$$

$x = x_0$ kabul edersek $\triangle P_n(x) = \triangle y_0 = a_1 h$ elde ederiz. Buradan

$$a_1 = \frac{\Delta y_0}{1!h}$$

buluruz. a_2 katsayısını bulabilmek için 2. mertebeden sonlu farkı türetelim.

$$\triangle^2 P_n(x) = 2!h^2 a_2 + 2.3h^2 a_3(x - x_0)^{[1]} h + \cdots + (n-1)nh^2 a_n (x - x_0)^{[n-2]}$$

$x = x_0$ kabul edersek $\triangle^2 P_n(x) = \triangle^2 y_0 = 2!h^2 a_2$ buluruz. Buradan

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$$

elde edilecektir. Bu işlemi benzer şekilde tekrarlarsak

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!h^i} \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

buluruz. Burada $0! = 1$ ve $\triangle^0 y = y$ kabul dilmektedir. Bulunan ifadeleri (2.13) formülünde yerine yazarsak

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0)^{[1]} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h}(x - x_0)^{[2]} + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)^{[n]}$$

Bu formüle Newtonun 1.interpolasyon formülü denir. Göründüğü gibi $P_n(x)$ polinomu n. derecelidir ve $P_n(x_0) = y_0$

$$\begin{aligned} P_n(x_k) &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x_k - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x_k - x_0)(x_k - x_1) + \cdots \\ &+ \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1}) \\ &= y_0 + k \triangle y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \triangle^2 y_0 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots 1}{k!} \triangle^k y_0 \\ &= (1 + \triangle)^k y_0 = y_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \end{aligned}$$

sağlamaktadır. $h \to 0$ durumunda (3) formülü y fonksiyonu için Taylor polinomuna dönüşüyor. Gerçekten

$$\lim_{h\to 0} \frac{\delta^k y_0}{h^k} = \left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)_{x=x_0} = y^{(k)}(x_0)$$

dir. Öte yandan da

$$\lim_{h\to 0} (x-x_0)^{[n]} = (x-x_0)^n$$

olacaktır. Burada (3) formülü $h \to 0$ durumunda

$$P_n(x_k) = y(x_0) + y'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^n$$

biçiminde Taylor formülüne dönüşüyor. Newton interpolasyon formülünün kullanımında pratikliği sağlamak için bu formülü biraz değişik yazıyorlar.

$$q = \frac{x-x_0}{h}$$

olsun. Bu takdirde

$$\frac{(x-x_0)^{[n]}}{h^i} = \frac{x-x_0}{h} . \frac{x-x_0-h}{h} \cdots \frac{x-x_0-(i-1)h}{h} = q(q-1)\cdots(q-i+1)$$

burada $(i = 1, 2, \cdots, n)$. Bu ifadeyi (3) formülünde yazalım. Bu taktirde

$$P_n(x_k) = y(x_0) + q \triangle y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \triangle^2 y_0 + \cdots + \frac{q(q-1)\cdots(q-n+1)}{n!} \Delta^n y_0 \tag{4.70}$$

elde edilecektir. Newton 1.interpolasyon formülünün son şekli (4) formülüdür. (4) formülünü $y = f(x)$ fonksiyonunun x_0 başlangıç değerinin komşuluğundaki x lerde hesaplarken uygulamak gerekmektedir. (Bu durumda $|q|$ küçük olacaktır.) Eğer (4) formülünde $n = 1$ kabul edersek

$$P_1(x) = y_0 + q \triangle y_0$$

bulunacaktır. Bu bir lineer interpolasyondur. $n = 2$ durumunda kuadratik interpolasyon ortaya çıkacaktır.

$$P_2(x) = y_0 + q \triangle y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \triangle^2 y_0$$

Bu interpolasyon formülü uygulanırken yatay fark tablosunun kullanılması gerekiyor.

4.11 *Newton'un 2. İnterpolasyon Formülü*

$\{x_i\}$ düğüm noktaları $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ formülü ile türetilmiş olsun. Burada h=sabit dir.ve adımı ifade etmektedir. $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ olmak üzere $x = x_i$ de fonksiyonun y_i değerlerinin bilindiğini varsayalım. Fonksiyonun değerinin bulunması gereken x apsisi x_n sağ ucuna yakın olduğunda 1.interpolasyon formülünü uygulanması hassas sonuç vermiyor. Bu durumda Newton'un 2. intepolasyon formülü uygulanacaktır. Bu polinom

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_n) + a_2(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \cdots + a_n(x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots(x-x_1)$$

şeklinde bulalım. Genelleştirilmiş dereceleri kullanırsak

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n)^{[1]} + a_2(x - x_n)^{[2]} + \cdots + a_n(x - x_n)^{[n]} \tag{4.71}$$

elde ederiz. Bilinmeyen $a_0, a_1, \cdots, a_n$ katsayıları $P_n(x_i) = y_i$ olacak şekilde bulunacaktır. $P_n(x_n) = y_n = a_0$ bulunacaktır. Yinede (1) den

$$\triangle P_n(x) = a_1 h + 2ha_2(x - x_{n-1})^{[1]} + \cdots + nha_n(x - x_1)^{[n-1]}$$

yazılabilir olduğu için

$$\triangle P_n(x_{n-1}) = a_1 h \text{ veya } a_1 = \frac{\Delta P_0(x_{n-1})}{1!h} = \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}$$

bulunacaktır. Nihayet (1) den sonuçta

$$a_i = \frac{\Delta y_{n-i}}{1!h^i} \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

bulunacaktır. Böylece

$$\begin{aligned} P_n(x) = y_n &+ \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x - x_n) + \frac{\Delta y_{n-1}}{2!h}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots \\ &+ \frac{\Delta y_{n-1}}{n!h}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_0) \end{aligned} \tag{4.72}$$

şeklinde Newton 2. interpolasyon formülü türetilmiş oldu.

$$q = \frac{x - x_n}{h}$$

olsun. Bu taktirde

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - x_n + h}{h} = q + 1, \quad \frac{x - x_{n-2}}{h} = q + 2$$

ve b. olacaktır. (4) de bu formülleri kullanırsak

$$P_n(x) = y_n + q \triangle y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \triangle^2 y_{n-2} + \cdots + \frac{q(q+1)\cdots(q+n-1)}{n!} \Delta^n y_0 \tag{4.73}$$

elde edilecektir.

4.12 Merkezi Fark Tablosu

Newton interpolasyon formüllerini kullanabilmek için fonksiyonun değerinin $\{x_i\}_{i=0}^n$ düğüm noktalarının uçlarına yakın noktalarda hesaplanması istenmesi gerekmektedir. x ara noktası x_0 ve x_n uç noktalarından uzak nokta olunca fonksiyonun bu x noktasında değerini hesaplamak için Newton formülleri değil merkezi fark formülleri uygulanacaktır. Bu formüllere örnek olarak Gauss, Stirling ve Bessel formüllerini göstermekle olur.

4.13 Gauss İnterpolasyon Formülü

$x_{-n}, x_{-(n-1)}, \cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$ eşit aralıklı düğüm noktaları olsun. Burada $\triangle x_i = x_{i+1} - x_i = h = sbt$ dir. Burada $(i = -n, -(n-1), \cdots, n-1)$ dır. $y = f(x)$ fonksiyonunun bu düğüm noktalarda $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, \pm 1, \cdots, \pm n)$ değerleri belli olsun.

Tablo 4.7: Merkezi fark tablosu

x	y	$\triangle y$	$\triangle^2 y$	$\triangle^3 y$	$\triangle^4 y$	$\triangle^5 y$	$\triangle^6 y$
x_{-4}	y_{-4}	$\triangle y_{-4}$	$\triangle^2 y_{-4}$	$\triangle^3 y_{-4}$	$\triangle^4 y_{-4}$	$\triangle^5 y_{-4}$	$\triangle^6 y_{-4}$
x_{-3}	y_{-3}	$\triangle y_{-3}$	$\triangle^2 y_{-3}$	$\triangle^3 y_{-3}$	$\triangle^4 y_{-3}$	$\triangle^5 y_{-3}$	$\triangle^6 y_{-3}$
x_{-2}	y_{-2}	$\triangle y_{-2}$	$\triangle^2 y_{-2}$	$\triangle^3 y_{-2}$	$\triangle^4 y_{-2}$	$\triangle^5 y_{-2}$	$\triangle^6 y_{-2}$
x_{-1}	y_{-1}	$\triangle y_{-1}$	$\triangle^2 y_{-1}$	$\triangle^3 y_{-1}$	$\triangle^4 y_{-1}$	$\triangle^5 y_{-1}$	
x_0	y_0	$\triangle y_0$	$\triangle^2 y_0$	$\triangle^3 y_0$	$\triangle^4 y_0$		
x_1	y_1	$\triangle y_1$	$\triangle^2 y_1$	$\triangle^3 y_1$			
x_2	y_2	$\triangle y_2$	$\triangle^2 y_2$				
x_3	y_3	$\triangle y_3$					
x_4	y_4						

Derecesi $2n$'i aşmayan ve $P(x_i) = y_i$ $(i = 0, \pm 1, \cdots, \pm n)$ özelliğine sahip $P(x)$ polinomunun türetilmesini gerekmektedir. $P(x_i) = y_i$ şartından tüm i ve k lar için

$$\triangle^k P(x_0) = \triangle^k y_i \tag{4.74}$$

bağıntısının sağlanacağı sonucu elde ediliyor. $P(x)$ polinomunu

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_{-1})(x - x_1)(x - x_2) \\ &\quad + a_4(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &\quad + a_5(x - x_{-2})(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots \\ &\quad + a_{2n-1}(x - x_{-(n-1)}) \cdots (x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \\ &\quad + a_{2n}(x - x_{-(n-1)}) \cdots (x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n) \end{aligned} \tag{4.75}$$

şeklinde bulalım. Genelleştirilmiş dereceleri kullanırsak (2) eşitliğini

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0)^{[2]} + a_3(x - x_{-1})^{[3]} + a_4(x - x_{-1})^{[4]} \\ &\quad + \cdots + a_{2n-1}\left(x - x_{-(n-1)}\right)^{[2n-1]} + a_{2n}\left(x - x_{-(n-1)}\right)^{[2n]} \end{aligned} \tag{4.76}$$

elde edilecektir. Newton interpolasyon polinomunun katsayılarının bulunması işlemini tekrarlarsak, (1) formülünü kullanarak

$$a_0 = y_0, a_1 = \frac{\Delta y_0}{1!h}, a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}, a_3 = \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!h^3}, a_4 = \frac{\Delta^4 y_{-1}}{4!h^4}, \cdots, a_{2n-1} = \frac{\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{(2n-1)!h^{2n-1}}, a_{2n} = \frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2n)!h^{2n}}$$

bulabiliriz. Daha sonra

$$q = \frac{y - y_0}{h}$$

kabul ederek ve (3) formülünden

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 + q \triangle y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \triangle^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!} \triangle^3 y_{-1} \\ &\quad + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!} \triangle^4 y_{-2} + \frac{(q+1)(q+1)q(q-1)(q-2)}{5!} \triangle^5 y_{-2} + \cdots \\ &\quad + \frac{(q+n-1)\cdots(q-n+1)}{(2n-1)!} \triangle^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)\cdots(q-n)}{(2n)!} \triangle^{2n} y_{-n} \end{aligned}$$

şeklinde Gauss'un 1. interpolasyon formülünü bulabiliriz (4) formülü.

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 + q \triangle y_0 + \frac{q^{[2]}}{2!} \triangle^2 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[3]}}{3!} \triangle^3 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[4]}}{4!} \triangle^4 y_{-2} \\ &\quad + \cdots + \frac{(q+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!} \triangle^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)^{[2n]}}{(2n)!} \triangle^{2n} y_{-n} \end{aligned}$$

şeklinde de yazabiliriz. Burada $x = x_0 + qh$ ve $q^{[m]} = q(q-1)\cdots[q-(m-1)]$ dır.

Gauss 1. interpolasyon formülü

$$\triangle y_0, \triangle^2 y_{-1}, \triangle^3 y_{-1}, \triangle^4 y_{-2}, \triangle^5 y_{-2}, \triangle^6 y_{-3}, \cdots$$

katsayılarını içermektedir. (Bkz tablo. Gösterilen katsayılar bu tabloda okun yönünde alt kırık satırı oluşturan katsayılar olmaktadır.) benzer şekilde

$$\triangle y_{-1}, \triangle^2 y_{-1}, \triangle^3 y_{-2}, \triangle^4 y_{-2}, \triangle^5 y_{-3}, \triangle^6 y_{-3}, \cdots$$

merkezi farkları içerecek şekilde Gauss 2. interpolasyon formülü türetilebilinir. (Bu katsayılar tablo da ok yönünde üst kırır satırı oluşturan katsayılardır.)

Gauss 2. interpolasyon formülü

$$\begin{aligned}P(x) &= y_0 + q \triangle y_{-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \triangle^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!} \triangle^3 y_{-2} \\ &+ \frac{(q+1)(q+1)q(q-1)}{4!} \triangle^4 y_{-2} + \cdots + \frac{(q+n-1)\cdots(q-n+1)}{(2n-1)!} \triangle^{2n-1} y_{-n} \\ &+ \frac{(q+n)(q+n-1)\cdots(q-n+1)}{(2n)!} \triangle^{2n} y_{-n}\end{aligned} \tag{4.77}$$

şekline sahiptir. Yine q= $\frac{x-x_0}{h}$ ötelemesi kabul edersek (5) formülü.

$$\begin{aligned}P(x) &= y_0 + q \triangle y_{-1} + \frac{(q+1)^{[2]}}{2!} \triangle^2 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[3]}}{3!} \triangle^3 y_{-2} + \frac{(q+2)^{[4]}}{4!} \triangle^4 y_{-2} \\ &+ \cdots + \frac{(q+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!} \triangle^{2n-1} y_{-n} + \frac{(q+n)^{[2n]}}{(2n)!} \triangle^{2n} y_{-n}\end{aligned} \tag{4.78}$$

şekline dönüşecektir.

4.14 Stirling İnterpolasyon Formülü

1. ve 2. Gauss interpolasyon formüllerinin aritmetik ortasını ele alırsak, sonuçta Stirling formülünü aşağıdaki şekilde bulabiliriz.

$$\begin{aligned}P(x) &= y_0 + q\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2} \triangle^2 y_{-1} + \frac{q(q^2-1)}{3!} . \frac{\Delta^2 y_{-2} + \Delta^2 y_{-1}}{2} \\ &+ \frac{q^2(q^2-1^2)}{4!} \triangle^4 y_{-2} + \frac{q(q^2-1^2)^2(q^2-2^2)}{5!} . \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} \\ &+ \frac{q^2(q^2-1^2)^2(q^2-2^2)}{6!} . \triangle^6 y_{-3} + \cdots \\ &+ \frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)(q^2-3^2)\cdots(q^2-(n-1)^2)}{(2n-1)!} . \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{2} \\ &+ \frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)\cdots(q^2-(n-1)^2)}{(2n)!} \triangle^{2n} y_{-n}\end{aligned} \tag{4.79}$$

Burada $q = \frac{x-x_0}{h}$ dir. $i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm n$ değerleri için $P(x_i) = y_i$ olacağı açıktır.