Chương 1: Sự kiện ngẫu nhiên và phép tính xác suất

Lê Xuân Lý [1]

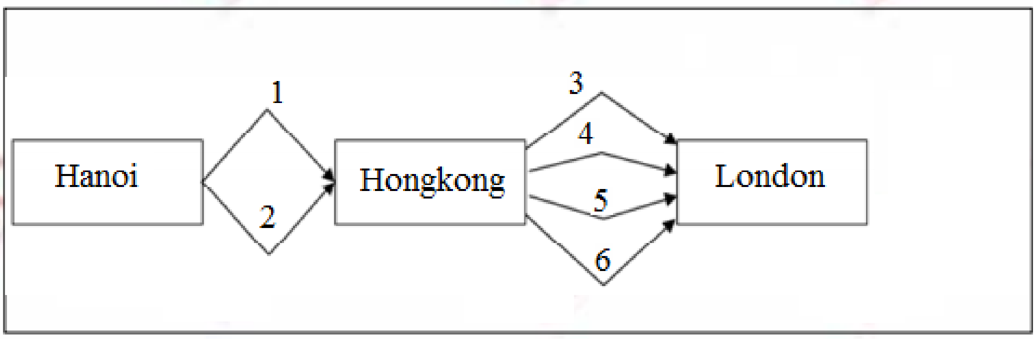
Hà Nội, tháng 1 năm 2016

[1]Email: lexuanly@gmail.com

1.1 Quy tắc nhân

Ví dụ 1

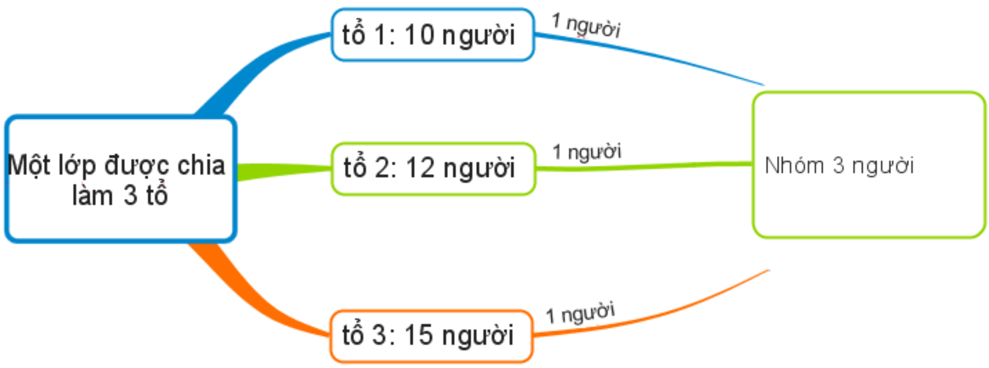
Để bay từ Hà Nội tới London phải qua trạm dừng chân tại Hong Kong. Có 2 hãng hàng không phục vụ bay từ Hà Nội tới Hong Kong (Vietnam airline, Pacific Airline) và có 4 hãng hàng không phục vụ bay từ Hong Kong tới London (Air Hong Kong Limited, Cathay Pacific Airways, CR Airways, Hong Kong Airlines).
Hỏi có bao nhiêu cách bay từ Hà Nội đến London qua trạm dừng chân Hong Kong?
Đáp án: 2x4 = 8 cách.



1.1 Quy tắc nhân

Ví dụ 2

Một lớp được chia làm 3 tổ với số lượng sinh viên tương ứng là 10, 12, 15. Cần lấy ra 3 người làm một nhóm (mỗi tổ 1 người). Có bao nhiêu nhóm 3 người có thể tạo nên?



Đáp án là $10.12.15 = 1800$

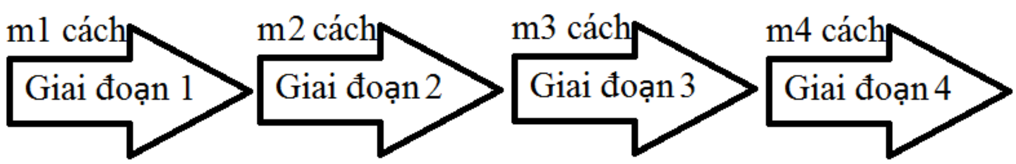
1.1 Quy tắc nhân

Chú ý 1.1

Có thể phát biểu quy tắc nhân theo cách sau: Một công việc được chia làm n giai đoạn:

- giai đoạn thứ nhất có m_1 cách giải quyết,
- giai đoạn thứ 2 có m_2 cách giải quyết,
- ...
- giai đoạn thứ n có m_n cách giải quyết.

Khi đó có $m_1 \times m_2 \ldots \times m_n$ cách giải quyết công việc trên.



Số cách thực hiện công việc có 4 giai đoạn: m1.m2.m3.m4

Câu hỏi trắc nghiệm

I. Một lớp có 25 học sinh nam và 20 học sinh nữ

1. Số cách chọn một học sinh đi dự trại hè là:
   A. 2 B. 45 C. 500 D. 20
   Đáp án: 1B
2. Số cách chọn một hs nam và một hs nữ đi dự trại hè là:
   A. 2 B. 45 C. 100 D. 500
   Đáp án: 2D
3. Số cách chọn ban điều hành lớp 3 người gồm 1 lớp trưởng, 1 lớp phó học tập và 1 bí thư là:
   A. 69 B. 132 C. 85140 D. 1980
   Đáp án: 3C
4. Số cách chọn ban điều hành 3 người gồm: 1 lớp trưởng (nữ), 1 lớp phó học tập nam, 1 bí thư là:
   A. 21500 B. 88 C. 85140 D. 90
   Đáp án: 4C

Câu hỏi trắc nghiệm

II. Có 4 cửa hàng cạnh nhau. Có 4 khách đến, mỗi khách chọn ngẫu nhiên 1 cửa hàng để vào.

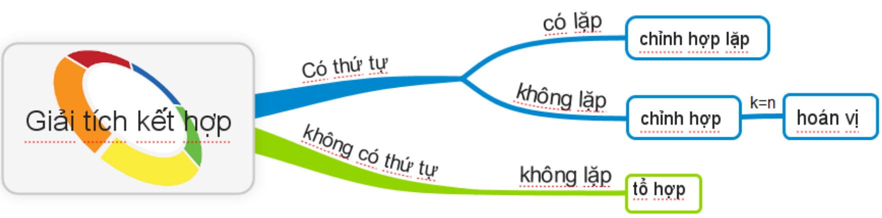
1. số trường hợp chọn cửa hàng là: A. 1 B. 4 C. 24 D. 256
   Đáp án: 1D
2. Số trường hợp chọn cửa hàng sao cho mỗi cửa hàng có đúng 1 khách vào
   A. 1 B. 4 C. 24 D. 256
   Đáp án: 2C

Vấn đề xảy ra

Vẫn xét một lớp có 25 nam và 20 nữ. Cần chọn một nhóm 3 sinh viên, trong đó có 2 nam và 1 nữ.
Theo cách làm trước, ta sẽ chia làm 2 bước:
Bước 1: Chọn 2 nam từ 25 nam,
Bước 2: Chọn 1 nữ từ 20 nữ.
Vấn đề: **Có bao nhiêu cách chọn 2 nam từ 25 nam ???**

Giải tích kết hợp

Ta có một tập hợp gồm n phần tử, từ n phần tử này ta sẽ chọn ra k phần tử. Tuỳ vào điều kiện chọn các phần tử như thế nào (có thứ tự, có lặp) thì số cách chọn k phần tử cũng có sự khác nhau.



Định nghĩa 1.1

Chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử chọn từ n phần tử đã cho, trong đó mỗi phần tử có thể được chọn nhiều lần. Ký hiệu số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử bởi $\tilde{A}_n^k$.
Công thức tính:

$$\boxed{\tilde{A}_n^k = n^k.} \tag{1.1}$$

Giải tích kết hợp

Chỉnh hợp lặp

Ví dụ 3

Từ 5 chữ số $1, 2, 3, 4, 5$ lập được bao nhiêu số có 3 chữ số?

Giải:
Một số được lập nên là một cách lấy 3 chữ số có thứ tự và có thể giống nhau từ 5 chữ số đã cho. Do đó số các số có 3 chữ số được lập nên là: $\tilde{A}_5^3 = 5^3 = 125$.

Ví dụ 4

Xếp 5 cuốn sách khác nhau cho vào 3 ngăn. Hỏi có bao nhiêu cách phân phối sách trong 3 ngăn? (mỗi ngăn có bao nhiêu sách, loại sách gì)

Giải:
Mỗi lần xếp một cuốn sách lên là tương đương với việc chọn một trong 3 ngăn để cho sách vào. Mỗi ngăn có thể được chọn nhiều lần. Do đó số cách xếp 5 cuốn sách vào 3 ngăn là một chỉnh hợp lặp chập 5 của 3 phần tử. Vậy số cách xếp là: $\tilde{A}_3^5 = 3^5 = 243$.

Giải tích kết hợp

Chỉnh hợp

Định nghĩa 1.2

Chỉnh hợp chập k của n phần tử là một nhóm gồm k phần tử có thứ tự và khác nhau chọn từ n phần tử đã cho (điều kiện: $k \leq n$). Ký hiệu số chỉnh hợp chập k của n phần tử bởi A_n^k.

Công thức tính

$$\boxed{A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.} \qquad (1.2)$$

Ví dụ 5

Một buổi họp gồm 10 người tham dự, hỏi có mấy cách chọn 1 chủ toạ và 1 thư ký?

Giải:
Ta thấy 2 người được chọn làm chủ toạ và thư ký là một cặp (A, B) có thứ tự và khác nhau được chọn từ 10 người dự họp. Do đó số cách chọn là $A_{10}^2 = 10.9 = 90$ (cách).

Giải tích kết hợp
Hoán vị

Định nghĩa 1.3

Hoán vị của n phần tử là một nhóm có thứ tự có n phần tử gồm đủ mặt n phần tử đã cho. Ký hiệu số hoán vị của n phần tử bởi P_n.

Chú ý 1.2

Hoán vị là một trường hợp đặc biệt của chỉnh hợp khi $k = n$ $(P_n = A_n^n)$.

Công thức tính

$$\boxed{P_n = n!}. \tag{1.3}$$

Giải tích kết hợp
Hoán vị

Ví dụ 6

Có 6 người khách cần xếp vào 6 ghế hàng đầu dành cho khách. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp? Nếu xếp 6 người ngồi vào bàn tròn mà chỉ quan tâm đến người ngồi xung quanh là ai thì sẽ có bao nhiêu cách?

Giải:
Đây chính là việc sắp xếp 6 người theo một thứ tự xác định.Số cách xếp là:
$P_6 = 6! = 720$ (cách).

Giải tích kết hợp

Tổ hợp

Định nghĩa 1.4

Tổ hợp chập k của n phần tử $(k \leq n)$ là một nhóm không phân biệt thứ tự gồm k phần tử khác nhau chọn từ n phần tử đã cho. Ký hiệu: C_n^k

Công thức tính

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}. \qquad (1.4)$$

Chú ý 1.3

- *Qui ước* $0! = 1$;
- $C_n^k = C_n^{n-k}$;
- $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Giải tích kết hợp

Tổ hợp

Ví dụ 7

Mỗi đề thi gồm 3 câu hỏi lấy trong 25 câu hỏi cho trước. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề thi có nội dung khác nhau?

Giải:

Số đề thi có thể lập nên là: $C_{25}^3 = \dfrac{25.24.23}{3!} = 2300$.

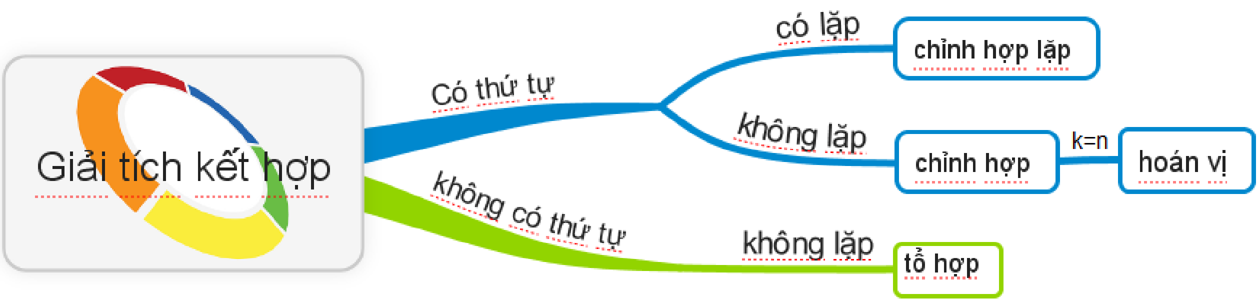
Ví dụ 8

Khai triển nhị thức Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n,$$

trong đó $a, b \in \mathbb{R}$ *và* $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải tích kết hợp - TỔNG KẾT



Câu hỏi trắc nghiệm

III. Một nhóm học sinh gồm 7 nam và 3 nữ. GV cần chọn 5 em.

1. Số cách chọn 5 em tùy ý
   A. 2520 B. 252 C. 60 D. 30240
   Đáp án: 1B
2. Số cách chọn 5 em có ít nhất 1 nữ và 3 nam
   A. 105 B. 11025 C. 630 D. 210
   Đáp án: 2D

IV. Một bàn dài có 10 ghế và có 5 học sinh: 5 nam, 5 nữ(có bạn An và Bình).

1. Số cách xếp 10 học sinh tùy ý vào bàn đó là:
   A. 14400 B. 3628800 C. 100 D. 125470
   Đáp án: 1B
2. Số cách xếp 10 học sinh ngồi vào bàn đó để An và Bình ngồi cạnh nhau là:
   A. 362880 B. 80640 C. 725760 D. 40320
   Đáp án: 2C

Phép thử và sự kiện

Định nghĩa 2.1

Việc thực hiện một nhóm các điều kiện cơ bản để quan sát một hiện tượng nào đó được gọi là một *phép thử*.
Không gian mẫu: tập gồm tất cả các kết quả có thể xảy ra. Ký hiệu: Ω
Sự kiện: là một tập con của không gian mẫu.
Đơn giản hơn: kết quả mà ta quan tâm là *sự kiện*.
Sự kiện được ký hiệu bằng chữ in: A, B, C, ...

Ví dụ 9

Gieo một con xúc xắc để quan sát số chấm xuất hiện (đây là một phép thử). Các kết quả sau đều là các sự kiện:

- "Xuất hiện mặt k chấm ", $k = 0, 1, .., 6$
- "Xuất hiện mặt chẵn"
- "Xuất hiện mặt có số chấm không vượt quá 2"

Phép thử và sự kiện

Như vậy sự kiện chỉ có thể xảy ra nếu ta thực hiện phép thử.

Sự kiện sơ cấp : Là sự kiện không thể phân tích được nữa

Sự kiện chắc chắn : Là sự kiện luôn xảy ra trong phép thử, ký hiệu là Ω

Sự kiện không thể : Là sự kiện không bao giờ xảy ra khi thực hiện phép thử. Ký hiệu là $\emptyset$.

Sự kiện ngẫu nhiên : Là sự kiện có thể xảy ra cũng có thể không xảy ra khi thực hiện phép thử.

Phép thử ngẫu nhiên : Phép thử mà các kết quả của nó là các sự kiện ngẫu nhiên.

Để thuận tiện, các sự kiện thường được ký hiệu bằng chữ in hoa: $A, B, C, \dots$

Ví dụ 10

Gieo một con xúc xắc, khi đó

- Ω= *"Gieo được mặt có số chấm* ≤ 6 *và* ≥ 1 *" là sự kiện chắc chắn;*
- $\emptyset$= *"Gieo được mặt* 7 *chấm" là sự kiện không thể;*
- A = *"Gieo được mặt chẵn" là sự kiện ngẫu nhiên.*

Phép thử và sự kiện

Ví dụ 11

Xét một gia đình có 2 con. Gọi:

- *A: "gia đình có 1 trai và 1 gái"*
- *B: "gia đình có 2 con"*
- *C: "gia đình có 3 con"*

Sự kiện nào là sự kiện chắc chắn, sk không xảy ra, sự kiện ngẫu nhiên?

Ví dụ 12

Hộp có 8 viên bi trong đó có 6 bi xanh và 2 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên ra 3 bi xem màu. Gọi:

- *A: "lấy được 3 bi xanh"*
- *B: "lấy được 3 bi màu đỏ"*
- *C: "lấy được 3 bi"*

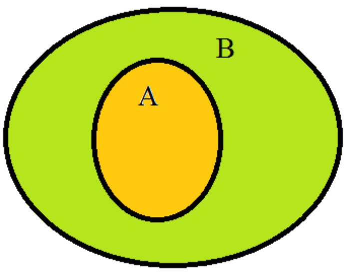
Sự kiện nào là sự kiện chắc chắn, sk không xảy ra, sự kiện ngẫu nhiên?

Quan hệ của các sự kiện

Giả sử A và B là hai sự kiện trong cùng một phép thử.

Quan hệ kéo theo

Sự kiện A được gọi là kéo theo sự kiện B, ký hiệu $A \subset B$ (hoặc $A \Rightarrow B$), nếu A xảy ra thì B xảy ra.



Quan hệ tương đương

Sự kiện A được gọi là tương đương với sự kiện B, ký hiệu $A \Leftrightarrow B$ (hoặc $A = B$), nếu $A \Rightarrow B$ và $B \Rightarrow A$.

Ví dụ 13

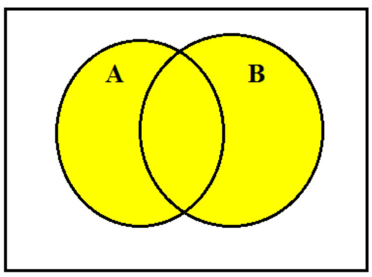
- *Sinh viên mua một tờ vé số. Gọi:*
  A: "sv có vé số trúng giải đặc biệt"
  B: "sv có vé số trúng giải"
- $A \Rightarrow B$ *hay* $B \Rightarrow A$
- *dùng biểu đồ Ven để minh họa*

Ví dụ 14

- *Tung một con xúc xắc 1 lần. Gọi:*
  A: "xúc xắc ra mặt có số chấm chẵn"
  B: "xúc xắc ra mặt có số chấm 2 hoặc 4"
  C: "xúc xắc ra mặt có số chấm 2, 4, 6"
  D: "xúc xắc ra mặt có số chấm nhỏ hơn 4"
- $A \Rightarrow B$ *hay* $B \Rightarrow A$
- $A \Rightarrow C$ *hay* $C \Rightarrow A$
- $A \Rightarrow D$ *hay* $D \Rightarrow A$

Sự kiện tổng

Sự kiện C được gọi là tổng của 2 sự kiện A và B, ký hiệu là $C = A + B$, nếu C xảy ra khi và chỉ khi ít nhất một trong 2 sự kiện A và B xảy ra.



A + B

Ví dụ 15

Hai người thợ săn cùng bắn một con thú. Nếu gọi A *là sự kiện người thứ nhất bắn trúng con thú và* B *là sự kiện người thứ 2 bắn trúng con thú, khi đó* $C = A + B$ *là sự kiện con thú bị bắn trúng.*

Quan hệ và phép toán của các sự kiện

Chú ý 2.1

- $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ là sự kiện xảy ra khi có ít nhất một trong n sự kiện đó xảy ra
- Mọi sự kiện ngẫu nhiên đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng của một số sự kiện sơ cấp nào đó.
- Sự kiện chắc chắn Ω là tổng của mọi sự kiện sơ cấp có thể. Do đó Ω còn được gọi là không gian các sự kiện sơ cấp.

Ví dụ 16

Tung một con xúc xắc. Ta có 6 *sự kiện sơ cấp* A_i $(i = \overline{1,6})$, *trong đó* A_i *là sự kiện xuất hiện mặt* i *chấm* $i = 1, 2, \ldots, 6$.

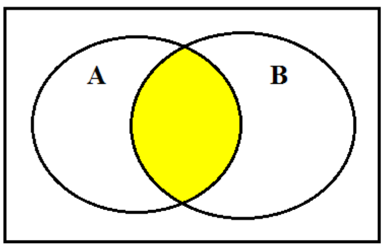
- A= *"Xuất hiện mặt có số chấm chẵn", ta suy ra* $A = A_2 + A_4 + A_6$
- B = *"Xuất hiện mặt có số chấm không vượt quá* 3*", ta suy ra* $B = A_1 + A_2 + A_3$.

Khi đó $C = A + B = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_6$.

Quan hệ và phép toán của các sự kiện

Sự kiện tích

- Sự kiện C được gọi là tích của 2 sự kiện A và B, ký hiệu $C = A.B$ (hoặc AB), nếu C xảy ra khi và chỉ khi cả A và B cùng xảy ra.
- Tích của n sự kiện $A_1.A_2 \ldots A_n$ là sự kiện xảy ra khi cả n sự kiện cùng xảy ra.



A.B

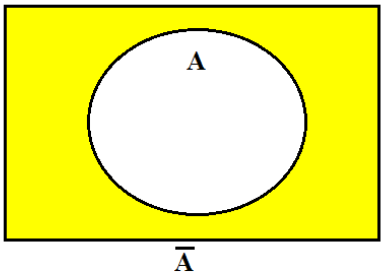
Ví dụ 17

Hai người thợ săn cùng bắn một con thú. Nếu gọi A *là sự kiện người thứ nhất bắn trượt con thú và* B *là sự kiện người thứ* 2 *bắn trượt con thú, khi đó* $C = A.B$ *là sự kiện con thú không bị bắn trúng.*

Quan hệ và phép toán của các sự kiện

Sự kiện đối lập

Sự kiện đối lập với sự kiện A, ký hiệu là $\overline{A}$, là sự kiện xảy ra khi A không xảy ra. Ta có



Ví dụ 18

Gieo một con xúc xắc một lần, khi đó

- A = *"Gieo được mặt chẵn" suy ra* $\overline{A}$= *"Gieo được mặt lẻ"*
- A = *"Gieo được mặt 1 chấm" suy ra* $\overline{A}$= *"Gieo không được mặt 1 chấm"*

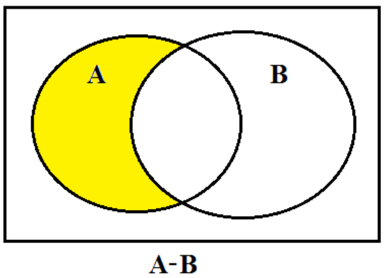
Quan hệ và phép toán của các sự kiện

Sự kiện hiệu

Hiệu của 2 sự kiện A và B, ký hiệu là $A - B$, là sự kiện xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra nhưng B không xảy ra.
Trường hợp hay sử dụng sự kiện hiệu:

$$\bar{A} = \Omega - A$$
$$A = \Omega - \bar{A}$$

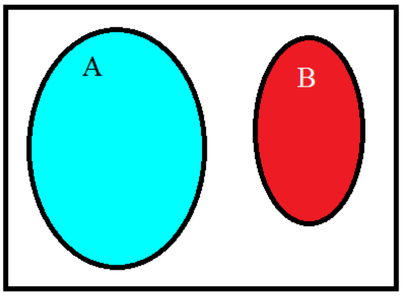
Trường hợp tổng quát: ta biến đổi thành sự kiện tích như sau: $A - B = A.\overline{B}$.



Quan hệ và phép toán của các sự kiện

Hai sự kiện xung khắc

Hai sự kiện A và B được gọi là xung khắc với nhau nếu chúng không đồng thời xảy ra trong một phép thử. A và B xung khắc khi và chỉ khi $A.B = \emptyset$.



A.B = Ø

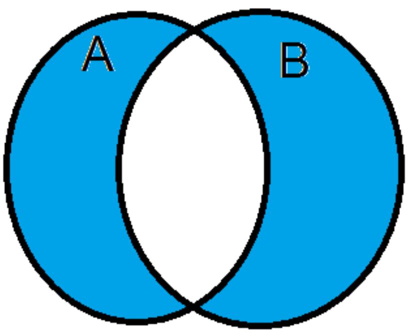
Ví dụ 19

Một xạ thủ bắn 1 viên đạn vào bia. Gọi A là sự kiện xạ thủ đó bắn trúng vòng 8 và B là sự kiện xạ thủ đó bắn trúng vòng 10. Khi đó ta thấy ngay $AB = \emptyset$ tức là A, B là 2 sự kiện xung khắc với nhau.

Trắc nghiệm

I. Miền được tô màu ở hình dưới được biểu diễn bởi:

A. $(A.\bar{B}).(\bar{A}.B)$
B. $(A + \bar{B})(\bar{A} + B)$
C. $A.\bar{B} + \bar{A}.B$
D. cả 3 kết quả trên đều sai



Trắc nghiệm

II. Gieo một con xúc xắc lý tưởng.
A: "số chấm xuất hiện là lẻ"
B: "số chấm xuất hiện là lớn hơn hoặc bằng 4"
C: "số chấm xuất hiện nhiều nhất là 2"

1. Sự kiện $\bar{A}$ là:
   A. { }   B. { 1;3;5}   C. { 1;3}   D. { 2;4;6}
2. Sự kiện $A.B$ là:
   A. { 5;7}   B. { 5;6}   C. { 5}   D. {1;3;5;6}
3. Sự kiện $B + C$ là:
   A. { Φ }   B. { 1;4;5;6}   C. { 1;5;6}   D. {1;2;5;6}

Trắc nghiệm

III. Có 3 sv A, B, C cùng thi môn XSTK.
Gọi A_i: "có i sv thi qua môn XSTK", $i = 0, 1, 2, 3$.

1. Gọi B: "sinh viên B thi qua môn XSTK". Sự kiện $A_2.\bar{B}$ là:
   A. sv B thi hỏng   B. chỉ có sv B thi đỗ
   C. có 2 sv thi đỗ   D. chỉ có sv B thi hỏng
2. Sự kiện $\overline{A_0}.\bar{B}$ là:
   A. sv B thi hỏng   B. sv A hoặc C thi đỗ
   C. có 2 sv thi đỗ   D. sv A và C thi đỗ
3. Chọn đáp án đúng:
   A. $\overline{A_0}.\bar{B} \subset \overline{A_1}.\bar{B}$ B. $\overline{A_1}.\bar{B} \subset \overline{A_2}$
   C. $\overline{A_0}.\bar{B} = A_1.\bar{B}$ D. $\overline{A_3}.\bar{B} \subset \overline{A_3}$
4. Gọi H: "có một sinh viên thi hỏng". Kết quả nào ĐÚNG
   A. $A_1.A_2.\overline{A_3} = H$ B. $\overline{A_1} = H$
   C. $\overline{A_1}.A_2.A_3 \subset H$ D. $\overline{A_2}.A_3 \subset H$

Xác suất của một sự kiện

Định nghĩa 3.1

Xác suất của một sự kiện là một số nằm giữa 0 và 1, số này đo lường khả năng xuất hiện của sự kiện đó khi phép thử được thực hiện. Ký hiệu xác suất của sự kiện A là $P(A)$.

Một số tính chất cơ bản

- $0 \leq P(A) \leq 1$;
- $P(\Omega) = 1; \quad P(\emptyset) = 0$;
- $P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$.

Định nghĩa xác suất theo cổ điển

Định nghĩa 3.2

Xét một phép thử có hữu hạn kết quả có thể xảy ra (có n kết quả), đồng thời các kết quả này là đồng khả năng xuất hiện; trong đó có m kết quả thuận lợi cho sự kiện A. Khi đó:

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{Số trường hợp thuận lợi cho } A}{\text{Số trường hợp có thể xảy ra}}.} \tag{3.1}$$

Ví dụ 20

Một người gọi điện thoại nhưng lại quên 2 chữ số cuối của số điện thoại cần gọi mà chỉ nhớ là 2 chữ số đó khác nhau. Tìm xác suất để người đó chọn ngẫu nhiên 1 số để gọi thì trúng số cần gọi.

Giải:

- Gọi $A =$ "Người đó chọn ngẫu nhiên 1 số gọi thì trúng số cần gọi".
- Số các kết quả có thể xảy ra khi chọn 2 chữ số cuối là: $n = A_{10}^2 = 90$;
- Số kết quả thuận lợi cho việc chọn được đúng số cần gọi là $m = 1$;
- Vậy $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{90}$.

Định nghĩa xác suất theo cổ điển

Ví dụ 21

Trong hộp có 4 viên bi trắng và 6 viên bi đỏ cùng kích cỡ. Lấy ngẫu nhiên đồng thời ra 2 viên bi. Tính xác suất xảy ra sự kiện:

1. $A =$ "Được 2 viên bi trắng";
2. $B =$ "Được ít nhất 1 viên bi đỏ".

Giải:
Số cách lấy ra 2 bi từ hộp là $n = C_{10}^2 = 45$.

1. Số cách lấy được 2 bi trắng là $C_4^2 = 6$. Vậy $P(A) = \dfrac{6}{45} = \dfrac{2}{15}$.
2. Ta có $\overline{B} =$ "không có bi đỏ nào", suy ra $\overline{B} = A$. Do đó
$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}.$$

Trắc nghiệm

1. Tung 2 lần liên tiếp một đồng xu (khả năng ra sấp và ngửa như nhau). Xác suất cả 2 lần đều xuất hiện mặt sấp là:
   A. 0 B. 1/4 C. 1/2 D. 1
2. Trong hộp có 10 viên bi cùng kích cỡ (6 trắng 4 đen). Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi. Xác suất cả 2 bi màu trắng là:
   A. 1/5 B. 1/3 C. 1/2 D. 1
3. Trong hộp có 10 viên bi cùng kích cỡ (6 trắng 4 đen). Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi. Xác suất có 1 bi trắng và 1 bi đen là:
   A. 1/45 B. 10/45 C. 24/45 D. 1

Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học

Định nghĩa 3.3

Giả sử tập hợp vô hạn các kết quả đồng khả năng của một phép thử có thể biểu thị bởi một miền hình học Ω có độ đo (độ dài, diện tích, thể tích, ...) hữu hạn khác 0, còn tập các kết quả thuận lợi cho sự kiện A là một miền A. Khi đó xác suất của sự kiện A được xác định bởi:

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Độ đo của miền } A}{\text{Độ đo của miền } \Omega}.} \tag{3.2}$$

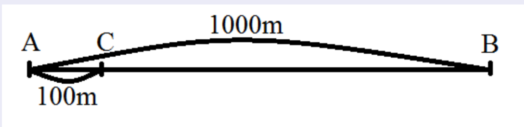
Khái niệm đồng khả năng trên Ω có nghĩa là điểm gieo có thể rơi vào bất kỳ điểm nào của Ω và xác suất để nó rơi vào một miền con nào đó của Ω tỉ lệ với độ đo của miền ấy.

Các định nghĩa xác suất | Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học

Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học

Ví dụ 22

Đường dây điện thoại ngầm nối một tổng đài với một trạm dài 1km. Tính xác suất để dây đứt cách tổng đài không quá 100m.



Giải

Rõ ràng nếu dây đồng chất thì khả năng bị đứt tại một điểm bất kỳ trên dây là như nhau, nên tập hợp các kết quả có thể xảy ra có thể biểu thị bằng đoạn thẳng nối tổng đài với trạm dài 1km. Còn sự kiện $A :=$ "Dây bị đứt cách tổng đài không quá 100m" được biểu thị bằng độ dài 100m. Khi đó ta có

$$P(A) = \frac{100}{1000} = 0.1.$$

Định nghĩa xác suất theo tần suất (theo thống kê)

Do tính đồng khả năng là rất khó có được trong thực tế, nên cần có một cách khác để xác định xác suất của một sự kiện.

Định nghĩa 3.4

Giả sử một phép thử có thể thực hiện lặp lại nhiều lần trong những điều kiện giống nhau. Nếu trong n lần thực hiện phép thử trên có mlần xuất hiện sự kiện A, khi đó tỉ lệ $f_n(A) = \frac{m}{n}$ được gọi là tần suất xuất hiện của sự kiện A trong n phép thử.
Cho số phép thử tăng lên vô hạn, tần suất xuất hiện A dần tới một giới hạn xác định, giới hạn đó được định nghĩa là xác suất của A:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} f_n(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}.$$

Thực tế $P(A)$ được tính xấp xỉ bởi tần suất $f_n(A)$ với n đủ lớn.

Định nghĩa xác suất theo tần suất (theo thống kê)

Ví dụ 23

Để xác định xác suất của một người đàn ông 25 tuổi sẽ bị chết trong 1 năm sắp tới, người ta theo dõi 100000 nam thanh niên 25 tuổi và thấy rằng có 138 người chết trong vòng 1 năm sau đó. Vậy xác suất cần tìm xấp xỉ bằng:

$$\frac{138}{100000} = 0.00138.$$

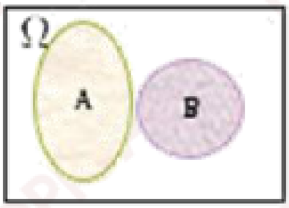
Chú ý 3.1

Định nghĩa này chỉ dùng được cho các phép thử ngẫu nhiên có thể lặp lại nhiều lần một cách độc lập trong các điều kiện giống nhau. Ngoài ra để xác định một cách tương đối chính xác giá trị của xác suất ta phải tiến hành một số đủ lớn các phép thử, mà việc này đôi khi không thể thực hiện được do hạn chế về thời gian và kinh phí.

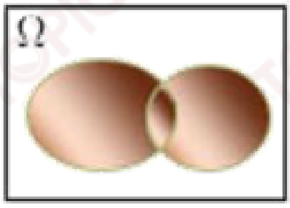
Công thức cộng xác suất

- Nếu A và B là hai sự kiện xung khắc thì

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B)}. \tag{4.3}$$



A, B xung khắc



A + B

- **Công thức cộng xác suất**: Nếu A và B là hai sự kiện bất kỳ thì ta có

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).} \tag{4.4}$$

Công thức cộng xác suất

- **Công thức cộng xác suất tổng quát**: Cho n sự kiện bất kỳ $\{A_i\}$, $i = \overline{1,n}$. Khi đó ta có

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P\left(\prod_i A_i\right). \tag{4.5}$$

- **Trường hợp đặc biệt**: Khi các sự kiện A_i, $i = \overline{1,n}$ xung khắc từng đôi, tức là $A_iA_j = \emptyset\ \forall i \neq j$ thì ta có

$$\boxed{P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).} \tag{4.6}$$

Công thức cộng xác suất

Ví dụ 24

Một lô hàng gồm 10 sản phẩm, trong đó có 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên đồng thời từ lô hàng ra 6 sản phẩm. Tìm xác suất để có không quá 1 phế phẩm trong 6 sản phẩm được lấy ra.

Công thức cộng xác suất

Bài làm

Gọi

- A: "không có phế phẩm trong sản phẩm"
- B: "có đúng 1 phế phẩm trong sản phẩm"
- C: "có không quá 1 phế phẩm trong sản phẩm"

Dễ dàng thấy A và B là 2 sự kiện xung khắc và $C = A + B$. Ngoài ra

$$P(A) = \frac{C_8^6}{C_{10}^6} = \frac{2}{15}; \quad P(B) = \frac{C_2^1 C_8^5}{C_{10}^6} = \frac{8}{15}.$$

Do đó $P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) = \dfrac{2}{15} + \dfrac{8}{15} = \dfrac{2}{3}$.

Công thức cộng xác suất

Ví dụ 25

Một lớp có 100 sinh viên, trong đó có 40 sinh viên giỏi ngoại ngữ, 30 sinh viên giỏi tin học, 20 sinh viên giỏi cả ngoại ngữ lẫn tin học. Sinh viên nào giỏi ít nhất một trong hai môn sẽ được thêm điểm trong kết quả học tập của học kỳ. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong lớp. Tìm xác suất để sinh viên đó được tăng điểm.

Công thức cộng xác suất

Bài làm

Gọi

- A : "sinh viên đó được tăng điểm"
- N : "sinh viên đó giỏi ngoại ngữ"
- T : "sinh viên đó giỏi tin học"

Dễ thấy $A = T + N$, do đó

$$P(A) = P(T + N) = P(T) + P(N) - P(TN) = \frac{30}{100} + \frac{40}{100} - \frac{20}{100} = \frac{50}{100} = 0.5.$$

Xác suất có điều kiện

Định nghĩa 4.1

Xác suất xảy ra sự kiện A với điều kiện sự kiện B đã xảy ra được gọi là xác suất có điều kiện B của sự kiện A. Ký hiệu là $P(A|B)$.

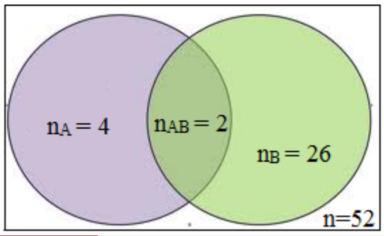
Ví dụ 26

Từ một bộ bài tú lơkhơ 52 cây đã trộn kỹ rút ngẫu nhiên ra một cây bài. Biết đó là cây đen, tính xác suất đó là cây át.

Bài làm

Gọi A "rút được cây át" và B "rút được cây đen". Xác suất cần tính là $P(A|B)$.

$$P(A|B) = \frac{2}{26} = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{n_{AB}/n}{n_B/n} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$



Xác suất có điều kiện

Công thức tính

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.} \tag{4.7}$$

Công thức nhân xác suất

Công thức nhân xác suất

$$\boxed{P(AB) = P(A).P(B|A) = P(B).P(A|B)}.$$

Định nghĩa 4.2

Hai sự kiện A và B được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra sự kiện này không làm ảnh hưởng tới việc xảy ra hay không xảy ra sự kiện kia. Ta có:

$$\begin{cases} P(A) & = P(A|B) = P(A|\overline{B}) \\ P(B) & = P(B|A) = P(B|\overline{A}). \end{cases}$$

Hai sự kiện A và B độc lập với nhau khi và chỉ khi

$$\boxed{P(AB) = P(A).P(B).}$$

Chú ý 4.1

Nếu A và B độc lập thì các cặp sau cũng độc lập: A và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và B ; $\overline{A}$ và $\overline{B}$

Công thức nhân xác suất

Tổng quát

Cho n sự kiện $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Khi đó xác suất tích được tính như sau:

$$\boxed{P\left(A_1A_2\ldots A_n\right) = P\left(A_1\right).P\left(A_2|A_1\right).P\left(A_3|A_1A_2\right)\ldots P\left(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}\right).}$$

Định nghĩa 4.3

Các sự kiện $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là độc lập (hay độc lập trong tổng thể) nếu việc xảy ra hay không xảy ra của một nhóm bất kỳ k sự kiện $(1 \leq k \leq n)$ không làm ảnh hưởng tới việc xảy ra hay không xảy ra của các sự kiện còn lại.
Khi đó ta có: $P(A_1.A_2\ldots A_n) = P(A_1).P(A_2)\ldots P(A_n)$

Công thức nhân xác suất

Ví dụ 27

Có 4 que thăm, trong đó có 3 que thăm dài bằng nhau và 1 que thăm ngắn hơn. Bốn người lần lượt lên rút ngẫu nhiên một que thăm. Tính xác suất người thứ i rút được thăm ngắn $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Giải

Gọi A_i: "Người thứ i rút được thăm ngắn" với $i = 1, 2, 3, 4$. Ta có

$$\begin{aligned}
P(A_1) &= \frac{1}{4};\\
P(A_2) &= P\left(\overline{A}_1\right).P\left(A_2|\overline{A}_1\right) = \frac{3}{4}.\frac{1}{3} = \frac{1}{4};\\
P(A_3) &= P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\right) = P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{A}_2|A_1\right)P\left(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2\right) = \frac{3}{4}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4};\\
P(A_4) &= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Vậy khả năng rút được thăm ngắn của 4 người là như nhau và bằng $\frac{1}{4}$.

Công thức nhân xác suất

Ví dụ 28

Ba xạ thủ độc lập với nhau, mỗi người bắn một viên đạn vào bia với xác suất bắn trúng của từng người tương ứng là $0.7; 0.8$ và 0.9. Tính xác suất:

1. Có đúng 2 người bắn trúng;
2. Có ít nhất 1 người bắn trúng.

Công thức nhân xác suất

Giải

Gọi A_i: "người thứ i bắn trúng bia" với $i = 1, 2, 3$. Theo bài ra ta có A_1, A_2, A_3 xung khắc với nhau (từng đôi) và $P(A_1) = 0.7; \quad P(A_2) = 0.8; \quad P(A_3) = 0.9$.

1. Gọi A: "Có đúng hai người bắn trúng", khi đó
   $A = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$.
   Dùng tính xung khắc của ba số hạng trong tổng và tính độc lập của các sự kiện A_1, A_2, A_3 ta có:
   $$\begin{aligned} P(A) &= P\left(A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3\right) \\ &= P\left(A_1A_2\overline{A}_3\right) + P\left(A_1\overline{A}_2A_3\right) + P\left(\overline{A}_1A_2A_3\right) \\ &= P(A_1)P(A_2)P\left(\overline{A}_3\right) + P(A_1)P\left(\overline{A}_2\right)P(A_3) + P\left(\overline{A}_1\right)P(A_2)P(A_3) \\ &= 0.7 \times 0.8 \times (1-0.9) + 0.7 \times (1-0.8) \times 0.9 + (1-0.7) \times 0.8 \times 0.9 = 0.398. \end{aligned}$$
2. Gọi B: "Có ít nhất 1 người bắn trúng bia" suy ra $\overline{B}$: "Không có ai bắn trúng". Ta có $\overline{B} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, suy ra
   $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\right) = 1 - P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{A}_2\right)P\left(\overline{A}_3\right) =$
   $1 - 0.3 \times 0.2 \times 0.1 = 0.994$.

Trắc nghiệm

1. Cho $P(A) = 1/3, P(B) = 1/4, P(C) = 1/12$. A và B là 2 sự kiện:
   A. độc lập
   B. xung khắc
   C. không độc lập và không xung khắc
2. Cho $P(A) = 1/3, P(B) = 1/4, P(C) = 6/12$. A và B là 2 sự kiện:
   A. độc lập
   B. xung khắc
   C. không độc lập và không xung khắc
3. Cho $P(A) = 1/3, P(B) = 1/4, P(C) = 7/12$. A và B là 2 sự kiện:
   A. độc lập
   B. xung khắc
   C. không độc lập và không xung khắc

Công thức nhân xác suất

Ví dụ 29

Một người thỏa thuận với vợ sắp cưới như sau: anh ta chỉ cần có con trai. Nếu vợ anh sinh cho anh một đứa con trai thì lập tức dừng lại liền, không sinh nữa. Giả sử một người phụ nữ sinh tối đa n lần, và xác suất sinh con trai ở mỗi lần là 1/2 (khả năng sinh con trai ở mỗi lần sinh không ảnh hưởng tới nhau).
a. Hỏi khả năng anh này có con trai là bao nhiêu?
b. Hỏi n phải là bao nhiêu thì khả năng anh này có con trai lớn hơn hoặc bằng 90%.

Giải

a. Gọi T_i : "sinh con trai ở lần sinh thứ i", $i = 0, 1, 2, ..., n$
T: "anh này có con trai ".
$P(T) = 1 - P(\overline{T}) = 1 - P(\overline{T_1}.\overline{T_2}...\overline{T_n})$
$= 1 - 0,5^n$.
b. $P(T) \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - 0,5^n \geq 0,90 \Leftrightarrow 0,5^n \leq 0,01$
$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{ln0,1}{ln0,5} \Leftrightarrow n \geq 3,322$
Vậy $n \geq 4$. :(

Công thức Bernoulli

Định nghĩa 4.4

(Dãy phép thử Bernoulli) Tiến hành n phép thử độc lập. Giả sử trong mỗi phép thử chỉ có thể xảy ra một trong hai trường hợp: hoặc sự kiện A xảy ra hoặc sự kiện A không xảy ra. Xác suất xảy ra sự kiện A trong mỗi phép thử luôn bằng p. Đó chính là dãy phép thử Bernoulli.

Công thức Bernoulli

Xác suất để sự kiện A xuất hiện đúng k lần trong n phép thử của dãy phép thử Bernoulli là:

$$\boxed{p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p; k = 0, 1, \ldots, n.} \tag{4.8}$$

Ví dụ 30

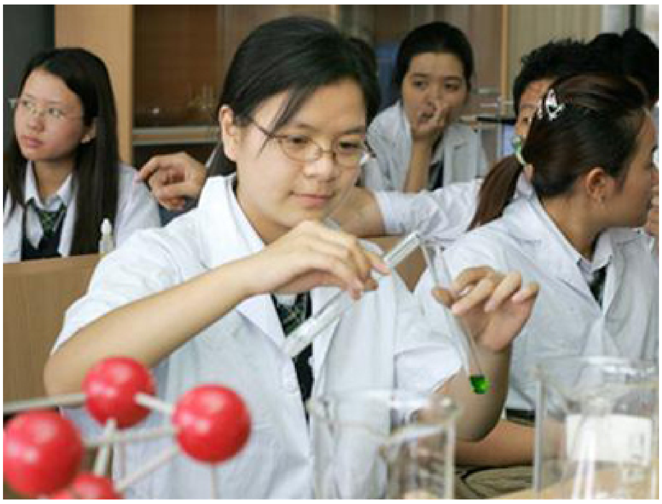
- *Gieo một đồng tiền* 10 *lần. Ta quan tâm ra mặt sấp*
- 5 *xạ thủ, mỗi người bắn* 1 *viên vào mục tiêu. Ta quan tâm đến số người bắn trúng*
- *Gieo một con xúc xắc* 100 *lần, ta quan tâm đến sự kiện ra mặt lục*

Công thức Bernoulli

Ví dụ 31

Xác suất thành công của một thí nghiệm sinh hóa là 40%. Một nhóm gồm 9 sinh viên tiến hành cùng thí nghiệm trên độc lập với nhau. Tìm xác suất để:

1. Có đúng 6 thí nghiệm thành công
2. Có ít nhất 1 thí nhiệm thành công



Công thức Bernoulli

Giải

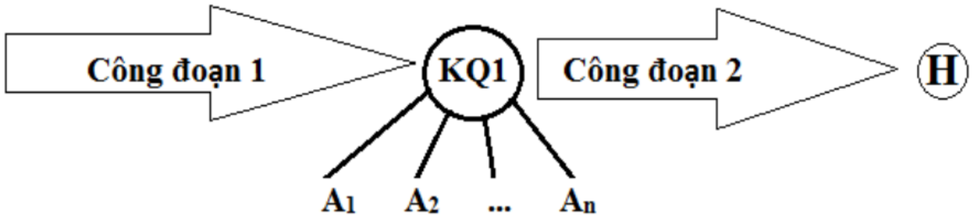
Phép thử là tiến hành thí nghiệm. A là sự kiện thí nghiệm thành công. Ta có

$$p = P(A) = 0.4; \quad q = 1 - p = 0.6; \quad n = 9.$$

1. Xác suất cần tính: $p_9(6) = C_9^6 p^6 q^3 = C_9^6 (0.4)^6 (0.6)^3 = 0.0743.$
2. Gọi B là sự kiện "có ít nhất 1 thí nghiệm thành công".
   Ta có $\overline{B}$: "không có thí nghiệm nào thành công". Khi đó

$$P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right) = 1 - (0.6)^9 = 0.9899.$$

Công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes



Mục tiêu: Tính xác suất xảy ra kết quả H sau công đoạn 2.
Khó khăn: Kết quả công đoạn 2 phụ thuộc vào kết quả công đoạn 1.
Các kết quả của công đoạn 1 được chia làm n tập A_i, mỗi một tập sẽ gồm một số kết quả có ảnh hưởng giống nhau đến khả năng xảy ra H.

Khái niệm nhóm đầy đủ

Định nghĩa 5.1

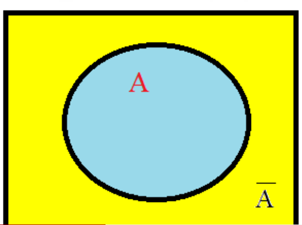
Nhóm các sự kiện $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ của một phép thử được gọi là một nhóm đầy đủ nếu thỏa mãn 2 điều kiện:

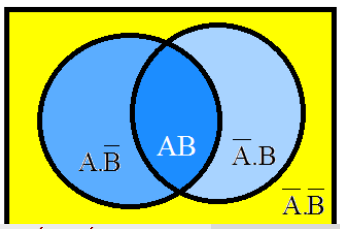
- $A_i A_j = \emptyset \; \forall i \neq j$;
- $A_1 + A_2 + \cdots A_n = \Omega$.

Tính chất: $P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1$

Chú ý 5.1

- Đối với một sự kiện A thì ta có nhóm đầy đủ $\{A, \overline{A}\}$
- Đối với 2 sự kiện A và B,một nhóm đầy đủ: $\{AB, A\overline{B}, \overline{A}B, \overline{A}.\overline{B}\}$.





Khái niệm nhóm đầy đủ

Ví dụ 32

Xét phép thử gieo một con xúc xắc 1 lần.

- Gọi A_i: "Gieo được mặt i chấm" với $i = 1, 2, \ldots, 6$. Ta có nhóm đầy đủ $A_1, A_2, \ldots, A_6$.
- Gọi
  - A: "Gieo được mặt chẵn"
  - B: "Gieo được mặt 1 chấm hoặc 3 chấm"
  - C: "Gieo được mặt 5 chấm"

  Khi đó A, B, C là một nhóm đầy đủ.

Công thức xác suất đầy đủ

Công thức xác suất đầy đủ

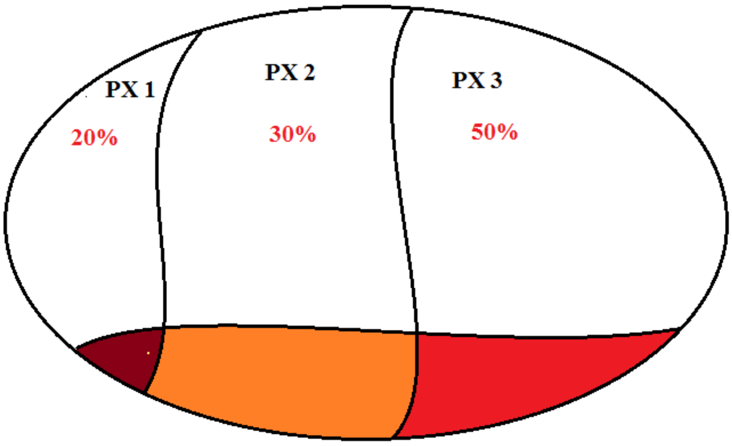
Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là một nhóm đầy đủ các sự kiện. Xét sự kiện H sao cho H chỉ xảy ra khi một trong các sự kiện $A_1, A_2, \ldots, A_n$ xảy ra. Nói cách khác H xảy ra thì một sự kiện A_i nào đó xảy ra. Khi đó ta có công thức xác suất đầy đủ

$$\boxed{P(H) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) . P(H|A_i) .} \tag{5.9}$$

Công thức xác suất đầy đủ

Ví dụ 33

Xét một lô sản phẩm có số lượng rất lớn trong đó số sản phẩm do phân xưởng I sản xuất chiếm 20%, phân xưởng II sản xuất chiếm 30%, phân xưởng III sản xuất chiếm 50%. Xác suất phế phẩm của phân xưởng I là 0.001; phân xưởng II là 0.005; phân xưởng III là 0.006. Lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm của lô hàng. Tìm xác suất để sản phẩm đó là phế phẩm.



Công thức xác suất đầy đủ

Giải

Gọi H: "Sản phẩm lấy ra là phế phẩm"; A_i: "Sản phẩm đó do phân xưởng i sản xuất" $i = 1, 2, 3$. Ta có $\{A_1, A_2, A_3\}$ là một nhóm đầy đủ và

$$P(A_1) = 0.2; \quad P(A_2) = 0.3; \quad P(A_3) = 0.5$$
$$P(H|A_1) = 0.001; \quad P(H|A_2) = 0.005; \quad P(H|A_3) = 0.006.$$

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta có

$$P(H) = P(A_1).P(H|A_1) + P(A_2).P(H|A_2) + P(A_3).P(H|A_3)$$
$$= 0.2 \times 0.001 + 0.3 \times 0.005 + 0.5 \times 0.006 = 0.0047.$$

Công thức xác suất đầy đủ

Ví dụ 34

Có hai chuồng thỏ. Chuồng thỏ thứ nhất có 3 thỏ trắng và 3 thỏ nâu. Chuồng thỏ thứ hai có 6 thỏ trắng và 4 thỏ nâu. Bắt ngẫu nhiên 2 con thỏ từ chuồng thứ nhất bỏ vào chuồng thứ hai rồi sau đó bắt ngẫu nhiên 1 con thỏ từ chuồng thứ hai ra. Tính xác suất bắt được thỏ nâu từ chuồng thứ hai.

Giải

Gọi A_i: "Trong 2 con thỏ bắt từ chuồng một có i con thỏ nâu" , $i = 0, 1, 2$. Ta có A_0, A_1, A_2 lập thành một nhóm đầy đủ. Gọi H: "Bắt được thỏ nâu từ chuồng hai". Ta có

$$P(A_0) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}; \quad P(A_1) = \frac{C_3^1 C_3^1}{C_6^2} = \frac{3}{5}; \quad P(A_2) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}$$

$$P(H|A_0) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}; \quad P(H|A_1) = \frac{5}{12}; \quad P(H|A_2) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ:

$$P(H) = \sum^{2} P(A_i)\, P(H|A_i) = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{12} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{12}.$$

Công thức Bayes

- Trong công thức xác suất đầy đủ, H là sự kiện kết quả, còn các sự kiện A_i $i = \overline{1, n}$ là các sự kiện nguyên nhân. Nếu biết nguyên nhân nào xảy ra thì ta xác định được xác suất xảy ra H.
- Bây giờ ngược lại, người ta đã biết được kết quả xảy ra H, muốn tính xác suất để nguyên nhân thứ i xảy ra là bao nhiêu, tức là đi tính $P(A_i|H)$. $P(A_i)$ được gọi là xác suất tiên nghiệm, còn $P(A_i|H)$ được gọi là xác suất hậu nghiệm.

Ta có công thức Bayes:

$$\boxed{P(A_i|H) = \frac{P(A_i)P(H|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j).P(H|A_j)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.} \tag{5.10}$$

Công thức Bayes

Chứng minh.

Theo công thức xác suất có điều kiện ta có:

$$P\left(A_i|H\right) = \frac{P(A_iH)}{P(H)} = \frac{P(A_i).P(H|A_i)}{P(H)}.$$

Mặt khác theo công thức xác suất đầy đủ: $P(H) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j).P(H|A_j)$. Thay vào công thức trên ta có đpcm. □

Công thức Bayes

Ví dụ 35

Một nhà máy sản xuất bóng đèn có tỷ lệ bóng đèn tốt là 90%. Trước khi xuất ra thị trường, mỗi bóng đèn đều được qua kiểm tra chất lượng. Vì sự kiểm tra không tuyệt đối hoàn toàn nên một bóng đèn tốt có xác suất 0.9 được công nhận là tốt, còn một bóng đèn hỏng có xác suất 0.95 bị loại bỏ.

1. Tính tỷ lệ bóng qua được kiểm tra chất lượng.
2. Tính tỷ lệ bóng hỏng qua được kiểm tra chất lượng.

Giải.

Gọi A: "Bóng đèn thuộc loại tốt"; B: "Bóng đèn thuộc loại hỏng". Ta có A, B là một nhóm đầy đủ và $P(A) = 0.9$; $P(B) = 0.1$. Gọi H: "Bóng qua được kiểm tra chất lượng", ta có $P(H|A) = 0.9$; $P(H|B) = 0.05$.

1. Theo công thức xác suất đầy đủ ta có

$$P(H) = P(A).P(H|A) + P(B).P(H|B) = 0.9 \times 0.9 + 0.1 \times 0.05 = 0.815.$$

2. Ta có $P(B|H) = \dfrac{P(B).P(H|B)}{P(H)} = \dfrac{0.1 \times 0.05}{0.815} = 0.0061.$