Chương 5: Kiểm định giả thuyết

Lê Xuân Lý [1]

Viện Toán ứng dụng và Tin học, ĐHBK Hà Nội

Hà Nội, tháng 8 năm 2014

[1] Email: lexuanly@gmail.com

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng

- Giả thuyết thống kê: Trong nhiều lĩnh vực của đời sống kinh tế xã hội, chúng ta thường nêu ra các nhận xét khác nhau về đối tượng quan tâm. Những nhận xét như vậy có thể đúng hoặc sai. Vấn đề kiểm tra tính đúng sai của nhận xét sẽ được gọi là kiểm định.
- Kiểm định giả thuyết là bài toán đi xác định có nên chấp nhận hay bác bỏ một khẳng định về giá trị của một tham số của tổng thể.

Bài toán

- Cho biến ngẫu nhiên X có $EX = \mu, VX = \sigma^2$.
  Mẫu cụ thể của X là $(x_1, x_2, ..., x_n)$
  Chú ý: nếu cỡ mẫu $n \leq 30$ thì ta phải thêm điều kiện $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
- Bài toán đặt ra là ta cần so sánh giá trị kỳ vọng μ với một số μ_0 cho trước.

Giả thuyết H_0	$\mu = \mu_0$	$\mu \leq \mu_0$	$\mu \geq \mu_0$
Đối thuyết H_1	$\mu \neq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\mu < \mu_0$

- Tuy nhiên do giả thuyết luôn có dấu "=" nên người ta chỉ cần viết giả thuyết $H_0 : \mu = \mu_0$

Kiểm định giả thuyết một mẫu

Cách giải quyết

- Từ bộ số liệu đã cho $x_1, x_2, ..., x_n$ ta tính được giá trị quan sát k.
- Ta chia được trục số thành 2 phần, trong đó một phần là W_α
  +) Nếu $X \in W_\alpha$ thì bác bỏ H_0 và chấp nhận H_1
  +) Nếu $X \notin W_\alpha$ thì ta không có cơ sở bác bỏ H_0

Sai lầm mắc phải

Có 2 loại sai lầm c ó thể mắc phải

- Sai lầm loại 1: Bác bỏ H_0 trong khi H_0 đúng.
  Xác suất xảy ra sai lầm loại 1: $\alpha = P(k \in W_\alpha | H_0$ đúng)
  α được gọi là **mức ý nghĩa**
- Sai lầm loại 2: Chấp nhận H_0 trong khi H_0 sai.
  Xác suất xảy ra sai lầm loại 2: $\beta = P(k \notin W_\alpha | H_0$ sai)
- Mục tiêu là cực tiểu cả 2 sai lầm, tuy nhiên điều đó là rất khó khăn. Người ta chọn cách cố định sai lầm loại 1 và cực tiểu sai lầm loại 2.

Kiểm định giả thuyết một mẫu

Kết luận	Bản chất tổng thể: H_0 đúng	Bản chất tổng thể: H_0 Sai
Chấp nhận H_0	Quyết định đúng	Sai lầm loại II
Bác bỏ H_0	Sai lầm loại I	Quyết định đúng

Quan hệ của thực tế và quyết định toán học

Kiểm định giả thuyết một mẫu

Các bước làm một bài kiểm định

- **Bước 1**: Gọi biến ngẫu nhiên, xây dựng cặp giả thuyết - đối thuyết
- **Bước 2**: Chọn tiêu chuẩn kiểm định
  Tính giá trị quan sát k
- **Bước 3**: Xác định miền bác bỏ $H_0 : W_\alpha$
- **Bước 4**: Kiểm tra xem giá trị quan sát $k \in W_\alpha$ hay không và ra quyết định.

Kiểm định cho kỳ vọng - σ^2 đã biết

Trường hợp 1: σ^2 đã biết

- Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $\boxed{Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0;1)}$ nếu giả thuyết H_0 đúng.
- Từ mẫu cụ thể $(x_1, x_2, .., x_n)$, ta tính được giá trị quan sát: $k = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$
- Miền bác bỏ H_0 được xác định cho 3 trường hợp như sau:

H_0	H_1	Miền bác bỏ $H_0 : W_\alpha$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$(-\infty; -u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty)$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$(u_{1-\alpha}; +\infty)$
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$(-\infty; -u_{1-\alpha})$

Kiểm định cho kỳ vọng - σ^2 đã biết

Ví dụ

Doanh thu của một cửa hàng là biến ngẫu nhiên X(triệu/tháng) có độ lệch chuẩn 2 triệu/tháng. Điều tra ngẫu nhiên doanh thu của 500 cửa hàng có qui mô tương tự nhau ta tính được doanh thu trung bình là 10 triệu/tháng. Có người cho rằng thu nhập trung bình của cửa hàng loại đó phải trên 9 triệu/tháng. Với mức ý nghĩa 5% có thể kết luận gì về nhận xét trên.

Bài làm

- X là doanh thu của cửa hàng loại đang xét, $EX = \mu$, $VX = \sigma^2$ với $\sigma = 2$
  Cặp giả thuyết: $H_0 : \mu = \mu_0$ và $H_1 : \mu > \mu_0$ (với $\mu_0 = 9$)
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0;1)$ nếu H_0 đúng
  Giá trị quan sát $k = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \dfrac{10-9}{2}\sqrt{500} = 11,18$
- Với $\alpha = 0,05$, miền bác bỏ H_0:
  $W_\alpha = (u_{1-\alpha}; +\infty) = (u_{0,95}; +\infty) = (1,645; +\infty)$
- Do $k \in W_\alpha$ nên ta bác bỏ H_0 và chấp nhận H_1. Nghĩa là nhận xét đó là đúng

Kiểm định cho kỳ vọng - σ^2 chưa biết

Trường hợp 2: σ^2 chưa biết

Do σ chưa biết nên ta thay thế bằng s.

- Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $\boxed{Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)}$ nếu giả thuyết H_0 đúng.
- Từ mẫu cụ thể $(x_1, x_2, .., x_n)$, ta tính được giá trị quan sát: $k = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n}$
- Miền bác bỏ H_0 được xác định cho 3 trường hợp như sau:

H_0	H_1	Miền bác bỏ $H_0 : W_\alpha$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$(-\infty; -t(n-1; 1-\frac{\alpha}{2})) \cup (t(n-1; 1-\frac{\alpha}{2}); +\infty)$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$(t(n-1; 1-\alpha); +\infty)$
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$(-\infty; -t(n-1; 1-\alpha))$

Kiểm định cho kỳ vọng - σ^2 chưa biết

Chú ý

Nếu $n > 30$ thì ta có thể chuyển từ tiêu chuẩn kiểm định theo phân phối Student sang phân phối chuẩn, nghĩa là ta có thể dùng :

- Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $\boxed{Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s}\sqrt{n} \sim N(0;1)}$ nếu giả thuyết H_0 đúng.
- Từ mẫu cụ thể $(x_1, x_2, .., x_n)$, ta tính được giá trị quan sát: $k = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n}$
- Miền bác bỏ H_0 được xác định cho 3 trường hợp như sau:

H_0	H_1	Miền bác bỏ H_0 : W_α
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$(-\infty; -u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty)$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$(u_{1-\alpha}; +\infty)$
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$(-\infty; -u_{1-\alpha})$

SAMI 1956

Kiểm định cho kỳ vọng - σ^2 chưa biết

Ví dụ: Ví dụ trước sẽ được sửa hợp với thực tế hơn

Doanh thu của một cửa hàng là biến ngẫu nhiên X(triệu/tháng). Điều tra ngẫu nhiên doanh thu của 500 cửa hàng có qui mô tương tự nhau ta tính được doanh thu trung bình là 10 triệu/tháng và độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh là 2 triệu/tháng. Có người cho rằng thu nhập trung bình của cửa hàng loại đó phải trên 9 triệu/tháng. Với mức ý nghĩa 5% có thể kết luận gì về nhận xét trên.

Bài làm

- X là doanh thu của cửa hàng loại đang xét, $EX = \mu$, $VX = \sigma^2$
  Cặp giả thuyết: $H_0 : \mu = \mu_0$ và $H_1 : \mu > \mu_0$ (với $\mu_0 = 9$)
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$ nếu H_0 đúng
  Giá trị quan sát $k = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} = \frac{10-9}{2}\sqrt{500} = 11,18$
- Với $\alpha = 0,05$, miền bác bỏ H_0:
  $W_\alpha = (t(n-1; 1-\alpha); +\infty) = (t(499; 0,95); +\infty) = (1,645; +\infty)$
- Do $k \in W_\alpha$ nên ta bác bỏ H_0 và chấp nhận H_1. Nghĩa là nhận xét đó là đúng

Kiểm định cho kỳ vọng - σ^2 chưa biết

Chú ý

Do $n > 30$ nên ta hoàn toàn có thể chuyển phân phối Student thành phân phối chuẩn. Bài giải có thể làm như sau:

Bài làm

- X là doanh thu của cửa hàng loại đang xét, $EX = \mu$, $VX = \sigma^2$
  Cặp giả thuyết: $H_0 : \mu = \mu_0$ và $H_1 : \mu > \mu_0$ (với $\mu_0 = 9$)
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $\boxed{Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{s}\sqrt{n} \sim N(0;1)}$ nếu H_0 đúng
  Giá trị quan sát $k = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} = \dfrac{10-9}{2}\sqrt{500} = 11,18$
- Với $\alpha = 0,05$, miền bác bỏ H_0:
  $\boxed{W_\alpha = (u_{1-\alpha}; +\infty) = (u_{0,95}; +\infty) = (1,645; +\infty)}$
- Do $k \in W_\alpha$ nên ta bác bỏ H_0 và chấp nhận H_1. Nghĩa là nhận xét đó là đúng

Kiểm định cho tỷ lệ

Bài toán

Xác suất xảy ra sự kiện A là p.
Do không biết p nên người ta thực hiện n phép thử độc lập, cùng điều kiện.
Trong đó có m phép thử xảy ra A.
$f = {}^m/_n$ là ước lượng điểm không chệch cho p.
Câu hỏi: Hãy so sánh p với giá trị p_0 cho trước.

Cách giải quyết: tương tự cách làm cho kỳ vọng

- Bài toán đặt ra là ta cần so sánh p với giá trị p_0 cho trước.

Giả thuyết H_0	$p = p_0$	$p \leq p_0$	$p \geq p_0$
Đối thuyết H_1	$p \neq p_0$	$p > p_0$	$p < p_0$

- Tuy nhiên do giả thuyết luôn có dấu "=" nên người ta chỉ cần viết giả thuyết $H_0 : p = p_0$

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

Cách giải quyết

- Cách xử lý tương tự như với kỳ vọng
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $\boxed{Z = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} \sim N(0;1)}$ nếu giả thuyết H_0 đúng.
- Từ mẫu thu thập, ta tính được giá trị quan sát: $k = Z = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}$ với $f = \dfrac{m}{n}$
- Miền bác bỏ H_0 được xác định cho 3 trường hợp như sau:

H_0	H_1	Miền bác bỏ $H_0 : W_\alpha$
$p = p_0$	$p \neq p_0$	$(-\infty; -u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty)$
$p = p_0$	$p > p_0$	$(u_{1-\alpha}; +\infty)$
$p = p_0$	$p < p_0$	$(-\infty; -u_{1-\alpha})$

kiểm định cho tỷ lệ

Ví dụ

Tại một bến xe, kiểm tra ngẫu nhiên 100 xe thấy có 35 xe xuất phát đúng giờ. Với mức ý nghĩa 5% có thể khẳng định được rằng tỷ lệ xe xuất phát đúng giờ thấp hơn 40% hay không?

Bài làm

- Gọi p là tỷ lệ xe xuất phát đúng giờ.
  Cặp giả thuyết: $H_0 : p = p_0$ và $H_1 : p < p_0$ (với $p_0 = 0,4$)
- Tiêu chuẩn kiểm định: $\boxed{Z = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} \sim N(0;1)}$ nếu giả thuyết H_0 đúng.

  Giá trị quan sát $k = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} = \dfrac{35/100 - 0,4}{\sqrt{0,4.0,6}}\sqrt{100} = -1,02$
- Với $\alpha = 0,05$, miền bác bỏ H_0:
  $\boxed{W_\alpha = (-\infty; -u_{1-\alpha}) = (-\infty; -u_{0,95}) = (-\infty; -1,645)}$
- Do $k \notin W_\alpha$ nên ta không có cơ sở bác bỏ H_0. Nghĩa là không thể khẳng định.

Kiểm định cho phương sai

Bài toán

Cho biến ngẫu nhiên X có $EX = \mu, VX = \sigma^2$.
Mẫu cụ thể của X là $(x_1, x_2, ..., x_n)$
Chú ý: nếu cỡ mẫu $n \leq 30$ thì ta phải thêm điều kiện $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
Câu hỏi: Hãy so sánh σ^2 với giá trị σ_0^2 cho trước.

Cách giải quyết

- Bài toán đặt ra là ta cần so sánh σ^2 với giá trị σ_0^2 cho trước.

Giả thuyết H_0	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$
Đối thuyết H_1	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$

- Tuy nhiên do giả thuyết luôn có dấu "=" nên người ta chỉ cần viết giả thuyết $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

Kiểm định cho phương sai

Cách làm

- Tiêu chuẩn kiểm định: $\boxed{Z = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)}$ nếu giả thuyết H_0 đúng.
- Từ mẫu cụ thể $(x_1, x_2, .., x_n)$, ta tính được giá trị quan sát: $k = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$
- Miền bác bỏ H_0 được xác định cho 3 trường hợp như sau:

H_0	H_1	Miền bác bỏ $H_0 : W_\alpha$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$(0; \chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}) \cup (\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$(\chi^2_{n-1;1-\alpha}; +\infty)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$(-\infty; \chi^2_{n-1;\alpha})$

kiểm định cho phương sai

Ví dụ

Đo đường kính 12 sản phẩm của một dây chuyền sản xuất, người kỹ sư kiểm tra chất lượng tính được $s = 0,3$. Biết rằng nếu độ biến động của các sản phẩm lớn hơn 0,2 thì dây chuyền sản xuất phải dừng lại để điều chỉnh. Với mức ý nghĩa 5%, người kỹ sư có kết luận gì?

Bài làm:

- X là đường kính sản phẩm, $EX = \mu$, $VX = \sigma^2$
  Cặp giả thuyết: $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ và $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ (với $\sigma_0 = 0,2$)
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $\boxed{Z = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)}$ nếu H_0 đúng
  Giá trị quan sát $k = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{11.0,3^2}{0,2^2} = 24,75$
- Với $\alpha = 0,05$, miền bác bỏ H_0:
  $\boxed{W_\alpha = (\chi^2_{n-1;1-\alpha}; +\infty) = (\chi^2_{11;0,95}; +\infty) = (19,6752; +\infty)}$
- Do $k \in W_\alpha$ nên ta bác bỏ H_0 và chấp nhận H_1. Nghĩa là dây chuyền cần điều chỉnh vì độ biến động lớn hơn mức cho phép.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng

Bài toán

- Cho hai biến ngẫu nhiên X có $EX = \mu_1, VX = \sigma_1^2$ và Y có $EY = \mu_2, VY = \sigma_2^2$. Mẫu cụ thể của X là $(x_1, x_2, ..., x_{n_1})$, của Y là $(y_1, y_2, ..., y_{n_2})$.
  Chú ý: Nếu cỡ mẫu nhỏ thì ta phải thêm giả thuyết biến ngẫu nhiên gốc tuân theo phân phối CHUẨN.
- Bài toán đặt ra là ta cần so sánh giá trị kỳ vọng μ_1 với μ_2.

Giả thuyết H_0	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 \geq \mu_2$
Đối thuyết H_1	$\mu_1 \neq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$

- Tuy nhiên do giả thuyết luôn có dấu "=" nên người ta chỉ cần viết giả thuyết $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Kiểm định cho kỳ vọng - σ_1^2, σ_2^2 đã biết

Trường hợp 1: σ_1^2, σ_2^2 đã biết

- Chọn tiêu chuẩn kiểm định:
  $\boxed{Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0;1)}$ nếu giả thuyết H_0 đúng thì $\mu_1 - \mu_2 = 0$.
- Từ mẫu cụ thể $(x_1, x_2, .., x_{n_1}), (y_1, y_2, ..., y_{n_2})$, ta tính được giá trị quan sát:
  $$k = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$
- Miền bác bỏ H_0 được xác định cho 3 trường hợp như sau:

H_0	H_1	Miền bác bỏ $H_0 : W_\alpha$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$(-\infty; -u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$(u_{1-\alpha}; +\infty)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$(-\infty; -u_{1-\alpha})$

Kiểm định cho kỳ vọng - σ_1^2, σ_2^2 chưa biết

Trường hợp 2: σ_1^2, σ_2^2 chưa biết

- Chọn tiêu chuẩn kiểm định:

$$\boxed{Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \sim t(n_1+n_2-2)}$$

nếu giả thuyết H_0 đúng thì $\mu_1 - \mu_2 = 0$.

- Từ mẫu cụ thể $(x_1, x_2, .., x_{n_1}), (y_1, y_2, ..., y_{n_2})$, ta tính được giá trị quan sát:

$$k = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

- Miền bác bỏ H_0 được xác định cho 3 trường hợp như sau:

H_0	H_1	Miền bác bỏ $H_0 : W_\alpha$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$(-\infty; -t(n_1+n_2-2; 1-\frac{\alpha}{2})) \cup (t(n_1+n_2-2; 1-\frac{\alpha}{2}); +\infty)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$(t(n_1+n_2-2; 1-\alpha); +\infty)$

Kiểm định cho kỳ vọng - σ_1^2, σ_2^2 chưa biết

Chú ý: σ_1^2, σ_2^2 chưa biết, n_1, n_2 lớn

- Chọn tiêu chuẩn kiểm định:

$$\boxed{Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim N(0;1)}$$ nếu giả thuyết H_0 đúng thì $\mu_1 - \mu_2 = 0$.

- Từ mẫu cụ thể $(x_1, x_2, .., x_{n_1}), (y_1, y_2, ..., y_{n_2})$, ta tính được giá trị quan sát:

$$k = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

- Miền bác bỏ H_0 được xác định cho 3 trường hợp như sau:

H_0	H_1	Miền bác bỏ $H_0 : W_\alpha$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$(-\infty; -u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup u_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$(u_{1-\alpha}; +\infty)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$(-\infty; -u_{1-\alpha})$

Kiểm định 2 mẫu cho kỳ vọng

Ví dụ

Khảo sát điểm thi môn Xác suất thống kê của sinh viên 2 lớp A, B ta có kết quả:
•Trường A: $n = 64, \overline{x} = 7,32, s_1 = 1,09$
•Trường B: $n = 68, \overline{x} = 7,66, s_1 = 1,12$
Với mức ý nghĩa 1% có thể kết luận rằng kết quả thi của lớp B cao hơn của lớp A hay không?

Kiểm định 2 mẫu cho kỳ vọng

Bài làm

- Gọi X, Y là điểm thi môn XSTK của lớp A, B tương ứng.
  $EX = \mu_1, VX = \sigma_1^2$ và $EY = \mu_2, VX = \sigma_2^2$
  Cặp giả thuyết: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ và $H_1 : \mu_1 < \mu_2$
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} \sim N(0;1)$ nếu H_0 đúng.
  Giá trị quan sát $k = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} = \dfrac{7,32 - 7,66}{\sqrt{\dfrac{1,09^2}{64} + \dfrac{1,12^2}{68}}} = -31,43$
- Với $\alpha = 0,01$, miền bác bỏ H_0:
  $\boxed{W_\alpha = (-\infty; -u_{1-\alpha}) = (-\infty; -u_{0,99}) = (-\infty; -2,33)}$
- Do $k \in W_\alpha$ nên ta bác bỏ H_0 và chấp nhận H_1. Nghĩa là kết luận là đúng

Kiểm định 2 mẫu cho tỷ lệ

Bài toán

Giả sử p_1, p_2 tương ứng là tỷ lệ các phần tử mang dấu hiệu A nào đó của tổng thể thứ nhất và tổng thể thứ hai.
Mẫu của tổng thể thứ nhất: Thực hiện n_1 phép thử độc lập cùng điều kiện, có m_1 phép thử xảy ra sự kiện A.
Mẫu của tổng thể thứ hai: Thực hiện n_2 phép thử độc lập cùng điều kiện, có m_2 phép thử xảy ra sự kiện A.
Câu hỏi: Hãy so sánh p_1 với p_2.

Cách giải quyết

- Bài toán đặt ra là ta cần so sánh p_1 và p_2.

Giả thuyết H_0	$p_1 = p_2$	$p_1 \leq p_2$	$p_1 \geq p_2$
Đối thuyết H_1	$p_1 \neq p_2$	$p_1 > p_2$	$p_1 < p_2$

- Tuy nhiên do giả thuyết luôn có dấu "=" nên người ta chỉ cần viết giả thuyết $H_0 : p_1 = p_2$

Kiểm định giả thuyết 2 mẫu cho tỷ lệ

Cách giải quyết

- Chọn tiêu chuẩn kiểm định:
$$\boxed{Z = \frac{f_1 - f_2}{\sqrt{\overline{f}(1-\overline{f})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \sim N(0;1)}$$ nếu giả thuyết H_0 đúng.
- Từ mẫu thu thập, ta tính được giá trị quan sát: $k = \dfrac{f_1 - f_2}{\sqrt{\overline{f}(1-\overline{f})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$

  với $f_1 = \dfrac{m_1}{n_1}, f_2 = \dfrac{m_2}{n_2}, \overline{f} = \dfrac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2} = \dfrac{n_1.f_1 + n_2.f_2}{n_1 + n_2}$
- Miền bác bỏ H_0 được xác định cho 3 trường hợp như sau:

H_0	H_1	Miền bác bỏ $H_0 : W_\alpha$
$p_1 = p_2$	$p_1 \neq p_2$	$(-\infty; -u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty)$
$p_1 = p_2$	$p_1 > p_2$	$(u_{1-\alpha}; +\infty)$
$p_1 = p_2$	$p_1 < p_2$	$(-\infty; -u_{1-\alpha})$

Kiểm định giả thuyết 2 mẫu cho tỷ lệ

Ví dụ

Kiểm tra các sản phẩm được chọn ngẫu nhiên của 2 nhà máy sản xuất ta được số liệu sau:
• Nhà máy thứ nhất: kiểm tra 100 sản phẩm có 20 phế phẩm.
• Nhà máy thứ hai : kiểm tra 120 sản phẩm có 36 phế phẩm.
Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$ có thể coi tỷ lệ phế phẩm của nhà máy thứ ai cao hơn của nhà máy thứ nhất hay không?
Bài làm:
Gọi p_1, p_2 lần lượt là tỷ lệ phế phẩm của nhà máy thứ nhất và thứ hai.
$n_1 = 100, m_1 = 20$ và $n_2 = 120, m_2 = 36$.
• Cặp giả thuyết: $H_0 : p_1 = p_2$, $H_1 : p_1 < p_2$
• Với $f_1 = \dfrac{m_1}{n_1} = 0,2; f_2 = \dfrac{m_2}{n_2} = 0,3; \overline{f} = \dfrac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2} = 0,227$ Giá trị quan sát

$$k = \frac{f_1 - f_2}{\sqrt{\overline{f}(1-\overline{f})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{0,2 - 0,3}{\sqrt{0,227(1-0,227)(\frac{1}{100} + \frac{1}{120})}} = 1,763$$

• Với $\alpha = 0,05$ ta có miền bác bỏ H_0 :
$W_\alpha = (-\infty; -u_{1-\alpha}) = (-\infty; -u_{0,95}) = (-\infty; -1,645)$
• Do $k \in W_\alpha$ nên ta bác bỏ H_0, chấp nhận H_1.

Kiểm định 2 mẫu cho phương sai

Bài toán

- Cho hai biến ngẫu nhiên X có $EX = \mu_1, VX = \sigma_1^2$ và Y có $EY = \mu_2, VY = \sigma_2^2$. Mẫu cụ thể của X là $(x_1, x_2, ..., x_{n_1})$, của Y là $(y_1, y_2, ..., y_{n_2})$.
- Bài toán đặt ra là ta cần so sánh giá trị kỳ vọng σ_1^2 với σ_2^2.

Giả thuyết H_0	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$
Đối thuyết H_1	$\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$

- Tuy nhiên do giả thuyết luôn có dấu "=" nên người ta chỉ cần viết giả thuyết $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Kiểm định 2 mẫu cho phương sai

Cách làm

- Tiêu chuẩn kiểm định: $\boxed{K = \dfrac{s_1^2.\sigma_2^2}{s_2^2.\sigma_1^2}}$

  nếu giả thuyết H_0 đúng ta có $K \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$.
- Từ mẫu cụ thể $(x_1, x_2, .., x_{n_1}), (y_1, y_2, ..., y_{n_2})$, suy ra giá trị quan sát: $k = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$
- Miền bác bỏ H_0 được xác định cho 3 trường hợp như sau:

H_0	H_1	Miền bác bỏ $H_0 : W_\alpha$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$(0; F(n_1 - 1; n_2 - 1; \frac{\alpha}{2})) \cup (F(n_1 - 1; n_2 - 1; 1 - \frac{\alpha}{2}); +\infty)$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$(F(n_1 - 1; n_2 - 1; 1 - \alpha); +\infty)$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$(0; F(n_1 - 1; n_2 - 1; \alpha))$

Chú ý: $F(n_1 - 1; n_2 - 1; p) = \dfrac{1}{F(n_1 - 1; n_2 - 1; 1 - p)}$

kiểm định cho phương sai

Ví dụ

Hai máy A, B cùng gia công một loại chi tiết máy. Người ta muốn kiểm tra xem hai máy có độ chính xác như nhau hay không. Để làm điều đó người ta tiến hành lấy mẫu và thu được kết quả sau:
Máy A: 135 138 136 140 138 135 139
Máy B: 140 135 140 138 135 138 140
Với mức ý nghĩa 5% hãy kiểm tra xem 2 máy có độ chính xác như nhau hay không? Biết rằng kích thước của chi tiết do máy làm ra tuân theo phân phối chuẩn.

kiểm định cho phương sai

Ví dụ

- Gọi X, Y là đường kính chi tiết do máy A và B làm ra
  $X \sim N(\mu_1; \sigma_1^2)$ và $Y \sim N(\mu_2; \sigma_2^2)$
  Cặp giả thuyết: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ và $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $K = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} \sim F(n_1 - 1; n_2 - 1)$ nếu H_0 đúng
  Với mẫu số liệu ta có $s_1^2 = 3,905; s_2^2 = 5$
  Giá trị quan sát $k = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} = \dfrac{3,905}{5} = 0,781$
- Với $\alpha = 0,05$, miền bác bỏ H_0:
  $W_\alpha = (-\infty; F(n_1 - 1; n_2 - 1; \frac{\alpha}{2})) \cup (F(n_1 - 1; n_2 - 1; 1 - \frac{\alpha}{2}); +\infty)$
  Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$, $n_1 = n_2 = 7$ ta có $F(6; 6; 0,025) = 0,17$ và $F(6; 6; 0,975) = 5,82$
  $W_\alpha = (0; 0,17) \cup (5,82; +\infty)$
- Do $k \notin W_\alpha$ nên ta chấp nhận H_0. Nghĩa là độ chính xác của 2 máy là như nhau.