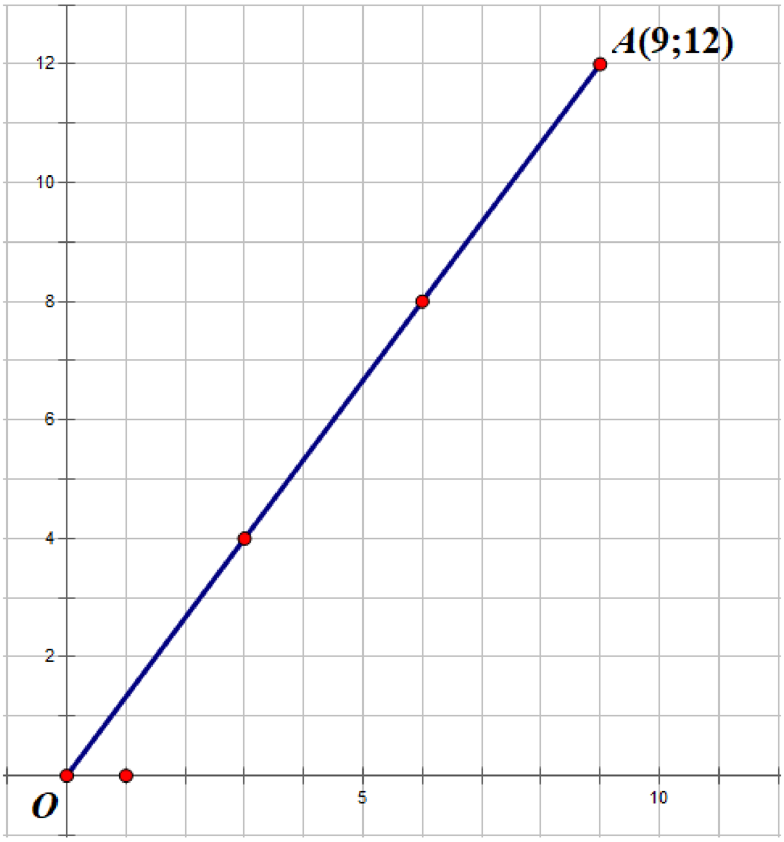
Áp dụng 1: Đếm số lượng điểm có tọa độ nguyên thuộc đoạn thẳng đi qua điểm $O(0;0)$ và $A(N;M)$

Ví dụ: $N = 9, M = 12$ sẽ có 4 điểm có tọa độ nguyên thuộc đoạn thẳng OA



Lời giải:

Dễ thấy, chúng ta chỉ cần xét trường hợp $0 \leq N \leq M$.

- $N = 0$, dễ dàng nhận thấy có $M + 1$ điểm có tọa độ nguyên trên đoạn thẳng OA
- $1 \leq N \leq M$:

Khi đó mọi điểm $(x;y) \in OA$ phải thỏa mãn phương trình $y = \frac{M}{N}x$. Phương trình này cho nghiệm nguyên $\Leftrightarrow (M * x) \vdots N$

Gọi $D = GCD(M,N)$, khi đó $x = K * \frac{N}{D}; y = K * \frac{M}{D}$.

$(x;y) \in OA \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq N \\ 0 \leq y \leq M \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq k \leq D$

Vậy số điểm có tọa độ nguyên trên đoạn thẳng đi qua điểm $O(0;0)$ và $A(N;M)$ là $GCD(M;N) + 1$. Chúng ta có thể tính trong độ phức tạp $O(\log(N + M))$

Áp dụng 2: ***Định lý Pick***

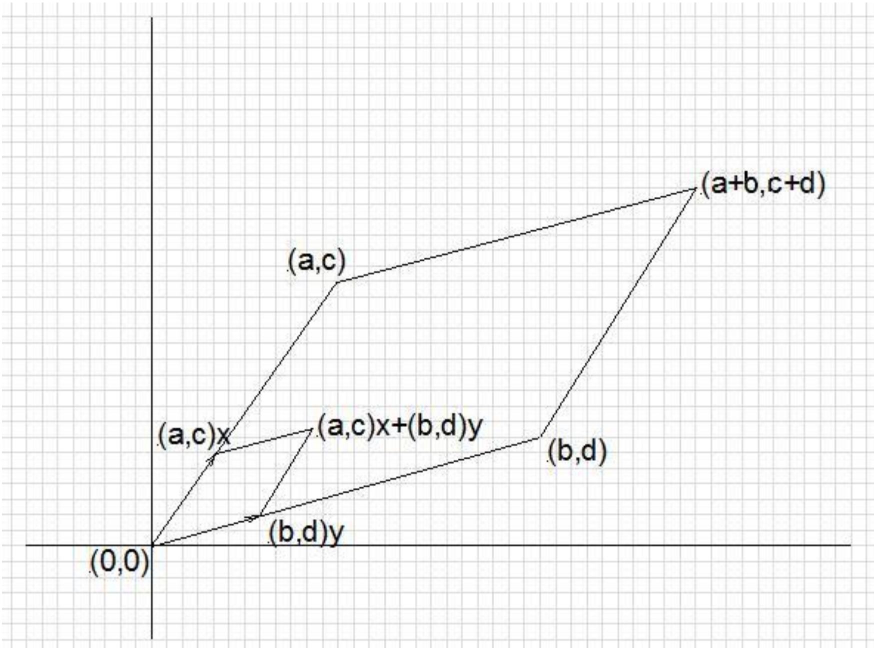
$$I + \frac{B}{2} - 1 = S$$

Trong đó:

- I là số điểm tọa độ nguyên nằm đúng trong đa giác;
- B là số điểm nằm trên cạnh đa giác;
- S là diện tích của đa giác và được tính theo công thức

$$S = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i+1})(y_i + y_{i+1})\right|$$

Lời giải:



Đặt

$\begin{cases} AX + BY = x \\ CX + DY = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \dfrac{Dx - By}{AD - BC} \\ Y = \dfrac{-Cx + Ay}{AD - BC} \end{cases}$ $(AD - BC \neq 0)$ thì số cặp $(X;Y)$ thực thỏa mãn đề bài

bằng số cặp $(x;y)$ nguyên thỏa mãn $0 < \dfrac{Dx - By}{AD - BC} < 1, 0 < \dfrac{-Cx + Ay}{AD - BC} < 1$.

Đó chính là số điểm nguyên nằm trong hình bình hành (hình vẽ - phương trình các cạnh của hình bình hành chính là $\dfrac{Dx - By}{AD - BC} = 0, \dfrac{Dx - By}{AD - BC} = 1, \dfrac{-Cx + Ay}{AD - BC} = 0, \dfrac{-Cx + Ay}{AD - BC} = 1$).

Theo định lý Pick với:

- n là số điểm nguyên nằm trong hình bình hành (mà ta đang cần tìm);
- m là số điểm nguyên nằm trên các cạnh của hình bình hành

$$S_{hbh} = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=0}^{n}(x_i - x_{i+1})(y_i + y_{i+1})\right| = |AD - BC|$$

$$S_{hbh} = n + \frac{m}{2} - 1$$

Số điểm nguyên nằm trên hai cạnh song song của hình bình hành là bằng nhau.

Ta tìm số điểm nguyên trên cạnh nối hai điểm có tọa độ $(0;0)$ và $(A;C)$.

Với $GCD(A;C) = d$ thì sẽ có $d+1$ điểm nguyên (bao gồm cả hai đỉnh $(0;0)$ và $(A;C)$).

Tương tự như vậy trên biên của hình bình hành có tổng cộng $m = 2GCD(A;C) + 2GCD(B;D)$ điểm nguyên (đã trừ các hằng số $+1$ để mỗi đỉnh của hình bình hành chỉ tính đúng một lần).

Do đó $n = S_{hbh} - \frac{m}{2} + 1 = |AD - BC| - GCD(A;C) - GCD(B;D) + 1$.