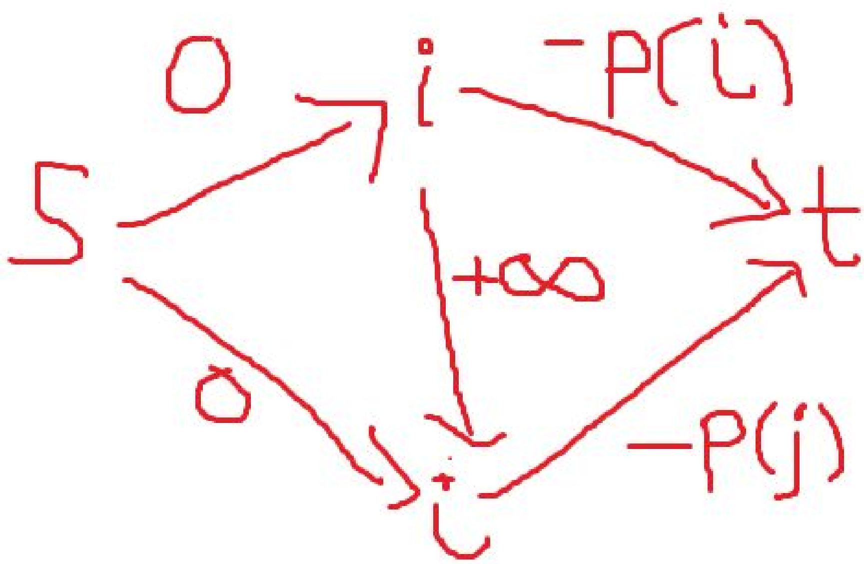
Bài toán:
Cho n dự án. Thực hiện dự án i thu được lợi nhuận p(i). p(i) > 0 nghĩa là lời, = 0 hòa vốn, < 0 lỗ.
Có m điều kiện ràng buộc, có dạng: nếu làm dự án i thì bắt buộc phải làm dự án j nữa.
Tìm cách làm dự án sao cho thu nhiều lợi nhuận nhất.

Lời giải:
Tạo 1 đồ thị như sau:
Có n + 2 đỉnh: n đỉnh ứng với n dự án và thêm 2 đỉnh s, t.
Với mỗi dự án i, có cạnh 1 chiều s->i với trọng số 0, i->t với trọng số -p(i).
Với mỗi ràng buộc dạng nếu làm dự án i thì bắt buộc phải làm dự án j, sẽ có cạnh 1 chiều i->j với trọng số dương vô cùng +oo.

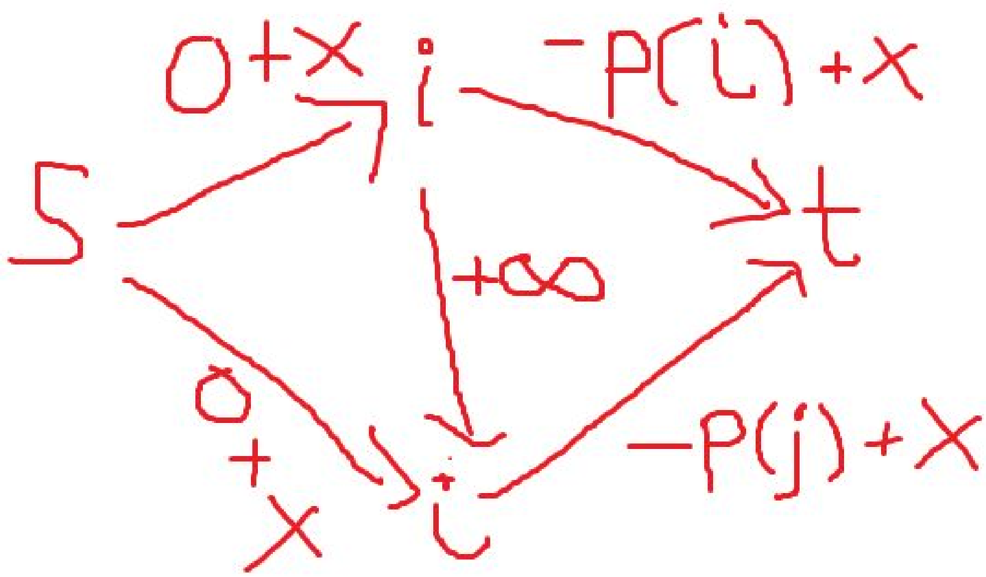


Ta sẽ chứng minh 1 lời giải (tức 1 cách chọn dự án) sẽ tương đương với 1 **lát cắt cực tiểu** từ s tới t.

- Một lát cắt **cực tiểu** từ s tới t sẽ làm cho ko có đường đi từ s tới t. Như vậy với mọi i, **đúng 1** trong 2 cạnh (s->i) hoặc (i->t) sẽ bị cắt, vì ko có lý do gì để cắt cả 2 cạnh trong lát cắt cực tiểu cả. (Lập luận này **sai**, chỉ đúng khi trọng số 2 cạnh này đều dương, trong khi đó trọng số cạnh (i->t) là -p(i) có thể âm. Tuy nhiên, ta tạm thời giả sử là các cạnh đều có trọng số dương hết).
- Cắt cạnh (s->i) sẽ tương đương với việc ko làm dự án i, lợi nhuận thu được là chi phí cạnh cắt (s->i) = 0.
- Cắt cạnh (i->t) sẽ tương đương với việc làm dự án i, lợi nhuận thu được là chi phí cắt cạnh (i->t) nhân với -1, tức -p(i) * (-1) = p(i). (tại sao lại chọn gán trọng -p(i) thay vì p(i) cho cạnh (i->t) sẽ được giải thích sau). **(*)**
- Giả sử (i, j) là 1 cặp dự án bị ràng buộc. Như thế sẽ có cạnh (i->j) với trọng số +oo. Nếu cạnh (i->t) bị cắt (tức dự án i đc chọn) thì cạnh (j->t) cũng sẽ bị cắt (tức dự án j

được chọn) trong lát cắt **cực tiểu**. Bởi vì: trọng số cạnh (i->j) là +oo nên nó sẽ ko bao giờ bị cắt trong lát cắt cực tiểu. Trái lại, nếu cạnh (s->j) bị cắt thay vì cạnh (j->t), thì lát cắt sẽ ko còn là lát cắt nữa, vì s vẫn đi được đến t, thông qua đường đi s->i->j->t.

Vậy, lát cắt cực tiểu * (-1) sẽ ra lợi nhuận max có thể. Điều này giải thích **(*),** tức giải thích vì sao ta lại chọn gán trọng số cạnh (i->t) là -p(i) chứ ko phải p(i), bởi vì lát cắt * (-1) = lợi nhuận, ta cần lợi nhuận max nên cần tìm lát cắt cực tiểu.
Vậy ta cần tìm lát cắt cực tiểu trên đồ thị.
Tuy nhiên, trọng số cạnh của đồ thị có thể âm. Để khắc phục, ta làm như sau.
Đặt X = max(|p(1)|, |p(2)|, …, |p(n)|) + 1
Cộng với mỗi cạnh của đồ thị cũ thêm X. Như vậy bây giờ mọi cạnh đều có trọng số > 0.



Bây giờ, lợi nhuận cực đại sẽ là n * X - min_cut chứ ko phải đơn thuần -min_cut như lúc trước nữa.