

Grundlagen

Größen

Vektorpotential [A] = $\frac{V_m}{m}$	magn. Flussdichte [B] = $\frac{Vs}{m^2} = T$
el. Flussdichte [D] = $\frac{As}{m^2}$	el. Feldstärke [E] = $\frac{Vm}{m}$
Magn. Feldstärke [H] = $\frac{Am}{m}$	Polarisierung [P] = $\frac{Cm^2}{m^2}$
Poyntingvektor [S] = $\frac{W_m}{m^2} = \frac{Ns}{m^2}$	Kraft [T] = $N = \frac{q_1 q_2}{r^2}$
Leistung [W] = $\frac{Js}{s} = \frac{Ns^2}{s^2}$	Energie [Σ] = $J = N \cdot m = \frac{Ns^2}{s^2}$
Wellen Permittivity [ϵ] = $\frac{\epsilon_0}{m}$	Permeability [μ] = $\frac{\mu_0}{m}$

$$\text{Kreiswellenzahl Vakuum: } n = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{Medium: } n = \frac{\omega}{c}$$

$$\text{Brechungsindex: } n = \sqrt{\epsilon \mu} \quad \text{Kreisfreq.: } \omega = 2\pi f = c/n = c \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\text{Lichtgeschw.: } C = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad \text{Wellenimpedanz: } Z = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} \quad Z = \frac{\omega \mu_0 \mu}{n} \quad \frac{1}{c^2} = \epsilon \mu \quad \frac{Z}{c} = N_o M$$

$$\text{Phasengeschw.: } V_p = \frac{\omega \sin \theta}{k_{\text{carrie}} \sin \theta} \quad \text{Gruppengeschw.: } V_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

$$\text{Statik}$$

Statik \Rightarrow keine beschleunigten Ladungen $\Rightarrow p \neq 0, \frac{\partial}{\partial t} p \neq 0, \frac{\partial^2}{\partial t^2} p = 0$

E-Feld & Spannung el. Spannung zw. 2 Punkten A,B ist in einem Feld definiert als Linienintegral $V = \int_A^B \vec{E} d\vec{s}$

Kräfte Coulomb Kraft $\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$ el. Feld ist eine Kraft auf eine Ladung q aus - Elektrostatisik

Lorentz Kraft $\vec{F}_m = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ Interaktion zw. statischen Strömen - Magnetostatisik

Kraft Übertragung $\vec{F} = q \cdot (\vec{E}(r,t) + \vec{v}(r,t) \times \vec{B}(r,t))$

Ladungsdichte $p(\vec{r}) = \sum_n q_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n)$

Stromdichte $\vec{j}(r) = \sum_n q_n v_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \rightarrow \vec{j}(r,t) = \frac{d}{dt} \int_V p(\vec{r},t) \vec{v}(\vec{r},t) dV$

Poissonl. $\nabla \vec{E} = -\nabla \phi = \frac{P}{\epsilon}$ ϕ : Potential

Monopol E-Feld: $\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r^2} \cdot \vec{Q}$ Potential: $\phi = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r}$

Dipol Potenzial: $\phi(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$ \vec{p} : Dipolmoment

befindet sich der Dipol an Position \vec{r}' , so muss als neuer Vektor $\vec{r} - \vec{r}'$ verwendet werden.

magn. Punkt-dipol Adip (\vec{r}) = $\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{M} \times \vec{r}'}{r'^2}$ $M = \vec{J} \cdot A = \text{const.}$: magn. Dipolmoment

Leitfähigkeit $\sigma = \frac{\vec{j}}{\vec{E}} = \frac{\text{Stromdichte}}{\text{el. Feldstärke}}$ $E = -\nabla \phi$ ϕ : Potential

$B = \nabla \times A$ $\mu = \mu_0 \mu$

Maxwell-Gleichungen

Per MW El-dynamics

Gesetz von Gauss Der el. netto Fluss durch Oberfläche dV entspricht der in V eingeschlossenen Ladung.

$$\int_V \vec{E}(r,t) \cdot \vec{n} da = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(r,t) dV$$

Gesetz von Faraday Das el. Feld entlang Schleife integriert ergibt die neg. zeitliche Änderg. des Magnetfelds.

$$\int_A \vec{E}(r,t) ds = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B}(r,t) \cdot \vec{n} da$$

Gesetz von Ampere Der magnet. Fluss entlang Schleife entspricht dem Strom, der durch die Fläche fließt.

$$\int_A \vec{B}(r,t) \cdot \vec{n} da = \mu_0 \int_A \vec{J}(r,t) \cdot \vec{n} da$$

Keine magn. Monopole Der magnet. Fluss durch eine geschlossene Fläche ist immer = 0

$$\int_V \vec{B}(r,t) \cdot \vec{n} da = 0$$

MW Integraldarstellung

Gauss $\int_V \vec{D}(r,t) \cdot \vec{n} da = \int_V \rho(r,t) dV \quad \int_A \vec{E}(r,t) ds = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B}(r,t) \cdot \vec{n} da$

Ampere $\int_A \vec{H}(r,t) ds = [\int_A \vec{J}(r,t) + \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B}(r,t)] \cdot \vec{n} da \quad \int_V \vec{B}(r,t) \cdot \vec{n} da = 0$

Displacement: $\vec{D}(r,t) = \epsilon_0 \vec{E}(r,t) + \vec{P}(r,t) = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}(r,t)$

Mag. Field: $\vec{B}(r,t) = \mu_0 (H(r,t) + M(r,t)) = \mu_0 \mu H(r,t)$ μ : rel. Materie

MW Diff Gln.

$\nabla \cdot \vec{D}(r,t) = \rho(r,t) \quad \nabla \times \vec{E}(r,t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(r,t)$

$\nabla \times \vec{H}(r,t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(r,t) + \vec{j}(r,t) \quad \nabla \cdot \vec{B}(r,t) = 0$

Spektraldarstellung

$\nabla \cdot \vec{D}(r,\omega) = \rho(r,\omega) \quad \nabla \times \vec{E}(r,\omega) = i\omega \vec{B}(r,\omega) \quad D(\vec{r}) = \epsilon \epsilon_0 \epsilon(\omega) \vec{E}(r)$

$\nabla \times \vec{H}(r,\omega) = -i\omega \vec{D}(r,\omega) + \vec{j}(r,\omega) \quad \nabla \cdot \vec{B}(r,\omega) = 0 \quad B(\vec{r}) = \mu_0 \mu(\omega) H(\vec{r})$

Monochrom. Wellen

$\nabla \cdot \vec{D}(r) = \rho(r) \quad \nabla \times \vec{E}(r) = i\omega \vec{B}(r) \quad \text{Ausatz: } \vec{E}(r,t) = \text{Re}\{\vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t}\}$

$\nabla \times \vec{H}(r) = -i\omega \vec{D}(r) - \vec{j}(r) \quad \nabla \cdot \vec{B}(r) = 0$

Kontinuitätsgl. & Ladungssatz

Ein Ladungsänderung in einem Volumen generiert immer ein entsprechenden Strom durch die Oberfläche des Volumens.

$$\int_V j(r,t) \cdot \vec{n} da = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(r,t) dV \quad \vec{p}(r,t) = \int_V j(r,t) dV$$

Wechselwir. mit Materie

El. Felder polarisieren Ladungen auf mikroskop. Ebene wodurch Feld selbst verstärkt oder abgeschwächt werden. In dispersiven (frequenzabhängig) Medien wird die Permittivität frequenzabhängig. Primäre Quellen erzeugen äußere Felde ($\vec{E} \times \vec{B}$) \rightarrow Pol. Sekundäre Quellen werden von prim. oder durch entstehende Felde ($\vec{E} \times \vec{B}$) erzeugt (induziert) und erzeugen ihrerseits ein Feld: \vec{p}_{pol} \rightarrow $\vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_0 + \vec{p}_{\text{pol}}$

Verlustfrei: $\epsilon_{\text{ur}} \in \mathbb{R}$

Total current $\vec{j}_{\text{tot}} = \vec{j}_0 + \vec{j}_{\text{cond}} + \vec{j}_{\text{pol}} + \vec{j}_{\text{mag}}$ pol: Induz. do Polarisation cond: mobile Ladung durch \vec{E} bewegt mag: zirk. Kreisströme

$$\vec{j}_{\text{pol}} = \frac{d}{dt} \vec{P} \quad \vec{j}_{\text{mag}} = \nabla \times \vec{M} \quad \vec{j}_{\text{cond}} = \sigma \vec{E}$$

Polarisation \vec{P} $\int_V \vec{P}(r,t) \cdot \vec{n} da = -\int_V \vec{p}(r,t) dV$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1+\epsilon) \vec{E} \quad \epsilon = (1+\epsilon)$$

Magnetisierung \vec{M} $\int_V \vec{M}(r,t) \cdot \vec{n} da = \int_V \vec{m}(r,t) dV \Rightarrow \vec{M} = \chi_m(\omega) \vec{H}$

$$\vec{B} = \mu_0 (1+\mu_m) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

Skin Eintrittshöhe Av. Oberfläche eines Leiters wird Strom in z transportiert $j(z) = j(z=0) \cdot e^{-(\lambda/4)z} \cdot D_s$

$$D_s = \sqrt{\frac{2}{\sigma \mu_0 \mu}}$$

Wellengleichung

Ladungen sind beschleunigt, MW-Kontraktions koppelt MW-Gleichungen

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} [\vec{D} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{P} + \nabla \times \vec{M}]$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{H} = \nabla \times \vec{J} + \nabla \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{P} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{M}$$

Materie & Quellraum

$$\text{Quellfct: } \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{Wellengleichung: } \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{E} = 0 \quad \text{analog für } \vec{H}$$

$$\text{Harmonischer Zeitanteil: } \vec{E}(r,t) = \text{Re}\{\vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t}\} \quad \vec{H}(r,t) = \text{Re}\{\vec{H}(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t}\} \quad E(\vec{r}) \in \mathbb{C} \quad H(\vec{r}) \in \mathbb{C}$$

$$\text{Helmholtz Gl.} \quad \left[\nabla^2 + k^2 \right] \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad k^2 = \frac{\omega^2 \mu^2}{c^2} \quad n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

$$\text{Ebene Welle: } \vec{E}(\vec{r},t) = \text{Re}\{\vec{E}_0 e^{i(kr - \omega t)}\} \quad +: \text{pos. Ausstrahl. in } \vec{r} \quad -: \text{neg. Ausstrahl. in } -\vec{r}$$

Dispersionsgl. Der Wellenvektor \vec{k} zeigt Ausbreitungsrichtung an. $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \Leftrightarrow k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$

Magnetisches Feld folgt aus Faraday Gl. $\vec{H} = \frac{i}{\omega \mu_0 \mu} (\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{1}{c} \vec{k} \times \vec{E}$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\omega \mu_0 \mu} (\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{1}{c} \vec{k} \times \vec{E} = \frac{i}{\omega \epsilon_0 \epsilon} (\nabla \times \vec{E}(\vec{r}))$$

Rechtssystem $\vec{E}, \vec{H}, \vec{H}$ sind orthogonal: $\vec{E} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot \vec{H} = \vec{E} \cdot \vec{H} = 0$

Propagation (0' Attribut)

$$E(z=0,+) \rightarrow E(z,+)=E(0,+ - \frac{z}{c}) \quad E(z,+0) \rightarrow E(z,+)=E(z,-c,0)$$

2. Wellen/Polarisation

$$E(r,t) = \text{Re}\{\vec{E}(\vec{r}) e^{i(kr - \omega t)}\} \quad \rightarrow E_0 \in \mathbb{C} \rightarrow \text{Phase in } E_0 \text{ result in phase shift}$$

\rightarrow $\text{el. sp. oscillation}$

(1) $E_1, E_2 \in \mathbb{R} \rightarrow$ lin. pol. \rightarrow $E_1 \text{ und } E_2 \text{ sind linear unabh.}$

(2) $E_0 = E_1 + iE_2 \rightarrow$ circ. pol. $\rightarrow E_1, E_2 \in \mathbb{C}, E_1 \perp E_2, |E_1| = |E_2| \rightarrow E_0 = E_0 \cdot e^{i\phi}$

Time harmonic

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{i\omega \mu_0 \mu} \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) \quad \text{for plane wave} \quad \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \vec{k} \times \vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{i\omega \epsilon_0 \epsilon} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) \quad \text{for plane wave} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 \cdot \vec{k} \times \vec{H}(\vec{r})$$

Energie und Kraft

Felder sind Träger von Energie, da sie über Distanz Kraft ausüben können

EM Energiedichte $W = \frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H})$ [J/m³] $W = \frac{1}{4} \epsilon_0 \sum E(r)^2$

Poynting Vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ $\langle S(r) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}\{\vec{E} \cdot \vec{H}^*\}$ $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\epsilon_0} |\vec{E}(r)|^2 \vec{H}(r)$

Leistung die innerhalb eines Volumens erzeugt/consumiert wird:

$$\frac{dW}{dt} = \vec{P} = \int \vec{S} \cdot d\vec{A} = \int_V \langle \vec{S} \rangle dV$$

MW Spannungstensor

Spannungstensor $\tilde{T} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \vec{E} + \mu_0 \vec{H} \vec{H} - \frac{1}{2} (\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2) \mathbb{I}$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad \vec{E}: \text{Einheitsmatrix}$$

\vec{E} : Totales Feld $\vec{E} = \vec{E}_{\text{refl.}} + \vec{E}_{\text{field}}$

Erhaltungssatz Impuls $\int \partial_V \tilde{T}(\vec{r}+t) \cdot \vec{n} dA = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{G}_{\text{field}} + \vec{G}_{\text{rech.}})$

Feldimpuls $\vec{G}_{\text{field}} = \frac{1}{c^2} \int_V \vec{E} \vec{H} dV$ **mech. Kraft**: $\vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{G}_{\text{rech.}}$

$\langle \vec{F} \rangle = \int_V \langle \tilde{T}(\vec{r}+t) \rangle \cdot \vec{n} dA$

Strahlungsdruck $P = \frac{l_0}{c} (1 + R)$ $l_0 = \frac{c_0}{2} c E_0^2$

Für perfekt reflektierendes Material ($R=1$) ist Strahlungsdruck doppelt so hoch wie für perfekt absorbierendes Material ($R=0$).

Strahlung

Greensche Funktion

Inhom. lin. DGL Problem (z.B. NW-Gl.) mit bekannter Ausreg. $\vec{B}(\vec{r})$ und Lösung $\vec{A}(\vec{r})$ auf die ein Sollwert lin. Operator wirkt: $f_A \vec{A}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})$

Die alg. Lsg. ist die Summe von hom. & partikulärer Lsg. Wir nehmen an, dass die hom. Lsg. \vec{A}_h bekannt ist. Wir lösen ein einfaches Problem:

$$\delta \vec{G}(\vec{r}, \vec{r}') = \vec{I} \delta(\vec{r}, \vec{r}')$$
 \vec{G} dyadische Greenfunktion

Wir gehen nun davon aus dass die Lsg. \vec{G} bekannt ist und erhalten:

$$\int_V \vec{P} \vec{G} \vec{B} dV = \int_V \vec{B} \vec{G} dV = \vec{B} = f_A \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \int_V \vec{G}(\vec{r}, \vec{r}') \vec{B}(\vec{r}') dV \quad \text{für } \vec{r} \notin V$$

Potentialtheorie

Goal: Simplify MW. E2B durch Skalar- & Vektorpot. ϕ, \vec{A} eindeutig bestimmt

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (\vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}) = -\nabla \phi \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \lambda(\vec{r}, t) - \nabla \phi \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t)$$

ϕ, \vec{A} nicht eindeutig: $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}$ $\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ \vec{A} : beliebige Eicher

Vektorfeld \vec{F} eindeutig durch ∇F & $\nabla \times F$ bestimmt. $\nabla F = 0 \rightarrow$ transversal $\nabla \times F = 0 \rightarrow$ longitudinal

Lorentz Eicher $\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}$

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad \text{oder entkoppelte DGL}$$

$$(\nabla^2 + k^2) \phi = -\frac{1}{c^2} \rho \quad \rho: \text{Ai nur von } z \text{ abh.}$$

$$i: \epsilon_{x,y,z}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = R_c \{ \vec{A}(\vec{r}) e^{i \omega t} \}$$

Coulomb Eicher $\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (\nabla^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = \vec{j} \quad \nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho = -\vec{j}$

Dipolstrahlung

\vec{p} strahlende Plat. Ladung (beschleunigte Ladung). Tremp. Zer. Ladung durch da infinitesimalen Abstand d.h. \vec{p} Delta-Ausreg., Antwort ist die Greenfunktion.

$$\text{Dipolmoment} \quad \vec{p}(t) = q(t) \cdot \vec{r} \cdot \vec{s} = q(t) \cdot \vec{r} \cdot \vec{n} ds$$

Stromdichte $\vec{j} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{p}(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}') = -i \omega \vec{p} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ $\vec{r}':$ Dipol Position

Feld mit Potentialen \vec{A}, ϕ und Ansatz $A(r,t) = R_c \{ A(r) e^{i \omega t} \}$ auf Rörs

Lorentz-Eicher sol. to scalar green function $G_0(r, r') = \frac{e^{i k |r-r'|}}{4 \pi |r-r'|}$ $A(r) = -i \omega \mu_0 \frac{e^{i k |r-r'|}}{4 \pi |r-r'|} \cdot \vec{p}$

$$E(r) = \omega^2 \mu_0 \mu_0 G_0(r, r') \vec{p} \quad H(r) = -i \omega (\nabla \times G_0(r, r')) \vec{p} \quad \vec{A} = \mu_0 \mu_0 G_0 dV'$$

Dyadische Greenfunktion \vec{G}_0 bildet \vec{p} auf Richtg. von \vec{E} als

$$G_0(r, r') = (\vec{I} + \frac{1}{\mu_0} \nabla \nabla) G_0(r, r') = \frac{e^{i k R}}{4 \pi R} \left[(1 + \frac{i k R - 1}{R^2}) \frac{R^2}{R^2} + \frac{3 - 3 i k R - k^2 R^2}{R^2} \right] \quad R = \sqrt{r^2 + r'^2}$$

Klassifizierung \vec{G}_0 hat Terme in $N_F = 1_F - FF$.

$\circ (kR)^{-1}$: Fernfeld $R \gg \lambda$ $\circ (kR)^{-2}$: Zwischenfeld $R \approx \lambda$ $\circ (kR)^{-3}$: Nahfeld $R \ll \lambda$

Fernfeld \circ use $r, \theta, \varphi \quad \vec{E} \parallel \theta \quad \vec{H} \parallel \varphi \quad \vec{k}, \vec{S} \parallel \vec{r} \quad \vec{E}, \vec{H} \propto \sin \theta \quad \vec{A} \parallel \vec{r}$

$\circ S_1 \ll \sin^2 \theta \quad \text{local plane wave} \rightarrow \text{Simplify calculations}$

Verschobener Dipol klein Verschiebung um \vec{a} Approximation

Ampl. Verlust, Phase ändert $\vec{r}_{\text{new}} \approx \vec{r}_{\text{alt}} - \frac{\vec{a} \times \vec{k}}{k^2}$ $\vec{E}_{\text{new}} = \vec{E}_{\text{alt}} e^{-i k \frac{\vec{r}_{\text{new}}}{R}}$

Dipol Power

$$\vec{P} = \frac{1 \mu^2}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{i^3 \omega^4}{3 c^3} \cdot \frac{i^2 P^2 \omega^3}{12 \pi \epsilon_0 \epsilon_0} = \frac{i^2 P^2 \omega^3}{12 \pi} \quad \text{via } \vec{P} = \int_V \frac{1}{2} \text{Re} \{ E(r) \times H^*(r) \} \cdot \vec{n} dA$$

Nur FF trägt zum Energie transport hinzu $P = |\vec{P}|$ \vec{P} leistig

Abstrahlcharakteristik $\frac{|\vec{P}(t, q)|}{|\vec{P}|} = \frac{3}{8 \pi} \sin^2 \theta$

Sekundärfeld z.B. Hückelris. R_0 : Ort Dipols

$$P_S = \frac{\omega}{2} \ln \{ \vec{P} \cdot \vec{E}_S(R_0) \} \quad \frac{\vec{P}}{P_0} = 1 + \frac{6 \pi \epsilon_0 \epsilon_0}{P^2} \cdot \frac{1}{k^2} \ln \{ \vec{P} \cdot \vec{E}_S(R_0) \}$$

gilt allgemein \vec{P} $\text{Mag. Dipol im Leitender Medium}$ $\vec{P}^*:$ konj. original Dipol $E_S:$ Sekundärfeld am Quellort

$$\text{kleiner Leiterschleife} \quad \vec{P} = \frac{P_m \pi^2 k^3 \omega \mu_0}{12 \pi} \quad \text{el.-mag. Dip. FF}$$

$\circ E \parallel \theta \quad H \parallel \theta$ $\circ \vec{P} \parallel \vec{k}$ \circ äquivalent $m = 2 i \omega d \vec{P}$

\circ gleiche Abstrahlcharakteristik

$$\vec{P} = \frac{P_m \pi^2 k^3 \omega \mu_0}{12 \pi} \quad \text{el.-mag. Dip. FF}$$

Feldwinkelspektrum $E(r, \theta, \varphi) = \int \int \int E(x, y, z, t) e^{i(kx + ky + kz)}$

$$E(r, \theta, \varphi) = \int \int \int E(x, y, z, t) e^{i(kx + ky + kz)}$$

Propagation zu gewünschtem z : $\hat{A}(k_x, k_y, z) = \hat{A}(k_x, k_y, 0) \cdot e^{i k_z z}$

$\Delta k_z = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_z^2}$ ist von Integrationsvariablen abhängig bei FF

Propagator $\hat{A} = e^{i k_z z}$ Tiefpassfilter. Nur Störungen $> \Delta x \approx \frac{1}{2k}$ werden übertragen

Gaußsche Strahlung

Feldstärke $E(x, y, 0) = E_0 e^{-(x^2+y^2)/w_0^2}$ in Objektebene $z=0$, w_0 : Strahlradius

Feldwinkelspektrum $\hat{E}(k_x, k_y, 0) = E_0 \frac{w_0}{4\pi} e^{-(k_x^2+k_y^2)/w_0^2/4}$

In Zyl. Koord. $\hat{E}(p, z) = E_0 \frac{w_0}{4\pi p} \exp\left(-\frac{p^2}{w_0^2} + i(k_z z - \eta(z) + kp^2/2R(z))\right)$

$$p^2 = x^2 + y^2 \quad \text{Strahlradius } w(z) = w_0 \sqrt{1 + z^2/w_0^2} \quad \text{Wavefront radius } R(z) = z(1 + z^2/w_0^2) \quad \text{Phase corr. } \eta(z) = \arctan\left(\frac{z}{w_0}\right)$$

$$\text{Rayleigh length } z_0 = \frac{w_0^2}{2} \quad \hat{A} \text{ verschwindet}$$

Approximationen

Paraxiale Näherung

Um $\hat{A} \approx 1$ zu erreichen. Annahme: \vec{k} parallel zu z -Achse

o MW-Gl. nicht mehr erfüllt

$$k_z = k \sqrt{1 - (k_x^2 + k_y^2)/k^2} \approx k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}$$

Fernfeld Approximation

Im Fernfeld $\hat{F} = \hat{F}_{\infty}$ Ebene Wellen im Winkel "Ziel". Dim. laufen Vektor \vec{r} zeigt nach rechts

$$\vec{r} = (x, y, z) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) = \left(\frac{k_x}{k}, \frac{k_y}{k}, \frac{k_z}{k} \right) \quad R = |\vec{r}| \quad k = \frac{w_0}{z_0} \quad z_0 = \frac{w_0^2}{2}$$

Fernfeld $\hat{E}_{\infty}(x, y, z) = -2\pi i k S_{\infty} \hat{E}(k_x x, k_y y, 0) \cdot \frac{e^{i k r}}{r}$

Umkehrung $\hat{E}(k_x, k_y, 0) = \frac{i \pi}{k_z} \cdot \frac{e^{-i k r}}{2 \pi} \hat{E}_{\infty} \left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}, 0 \right)$ $S_{\infty} = \sqrt{1 - (k_x^2 + k_y^2)}$ $\text{Freier Raum ist Fourier Transformator}$

Fresnel- & Fraunhofer Approximation

Quelle wird nur kleine Distanz verschoben.

$$(x', y'): \text{Quelle} \quad (x, y): \text{Beobachter}$$

$$\Gamma(x', y') \approx R \left[\frac{ix'}{R} + \frac{iy'}{R} + \frac{x^2 + y^2}{2R} \right] \quad R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z_0 = \frac{w_0^2}{8} \quad D = 2w_0 \quad \text{Übergang Fresnel} \leftrightarrow \text{Fraunhofer}$$

$$D: \text{Beam waist} - \text{max. Abstand der Quelle bei } z=0$$

$$\text{Bsp. Dipol um } \left(\frac{a}{2}, 0, 0 \right) \text{ verschoben} \quad \text{feld} @ (a, 0, 0) = E \cdot e^{i k \frac{a}{2}} \quad \text{feld} @ (a, b, c) = E \cdot e^{i k \left(\frac{xa}{2} - \frac{yc}{2} \right)}$$

Point Spread Function

Punktquelle (z.B. Dipol) ist im FF kein Punkt mehr da freier Raum Tiefpass

$$\text{Numerical aperture: } NA = n_1 \sin(\text{mergf.}) = \frac{f_2}{f_1} \sin(\text{mergf.})$$

$$\text{Magnification: } M = \frac{u_1}{u_2} \cdot \frac{f_2}{f_1}$$

$$\Delta x = 0.6098 \frac{NA}{M}$$

For better resolution: reduce λ o. inc. NA o. red. Magnification

Resonatoren & Wellenleiter

Resonatoren

$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{w^2(\omega) \omega^2}{c^2}$

$$\pi^2 \left(\frac{L_x^2}{k_x^2} + \frac{L_y^2}{k_y^2} + \frac{L_z^2}{k_z^2} \right) = \frac{\omega_{\text{reson}}^2 \omega^2 (\omega_{\text{reson}})}{c^2}$$

Wände sind poröse Leiter
Dispersionssrelation $\omega_x, \omega_y, \omega_z, E_x, E_y, E_z$

 $E_x(y=0) = E_y(y=L_y) = 0 \quad \& \quad E_x(z=0) = E_y(z=L_z) = 0 \quad \left[\frac{1}{L_x} E_0^{(x)} + \frac{1}{L_y} E_0^{(y)} + \frac{1}{L_z} E_0^{(z)} = 0 \right]$

$E_x = E_0^{(x)} \cos \frac{\pi \omega x}{L_x} \sin \frac{\pi \omega y}{L_y} \sin \frac{\pi \omega z}{L_z}$
 $E_y = E_0^{(y)} \sin \frac{\pi \omega x}{L_x} \cos \frac{\pi \omega y}{L_y} \sin \frac{\pi \omega z}{L_z}$
 $E_z = \sin / \sin / \cos$

Density of States

Number of states $N(\omega) = V \frac{\omega^3 \nu^3(\omega)}{3 \pi^2 c^3}$ # modes mit freq ω als cw
V: resonator volume

Density of states $p(\omega) = \frac{\omega^2 \nu^2(\omega)}{\pi^2 c^3}$

Q-factor $Q = \frac{\omega_0}{\delta \omega} = \frac{2 \omega_0}{\delta \omega}$ $\Delta \omega = 2 f$ Q: measure of how long EM-energy can be stored in a resonator

ω_0 : one of resonant freqs. ω_{reson}

$E(r, t) = \Re \{ \tilde{E}_0(r) e^{i(\omega_0 - \omega_0/2\alpha)t} \}$
 $W_{\text{tot}}(\omega) = \frac{\omega_0^2}{4 \alpha^2} \frac{W_0(\omega_0)}{(\omega - \omega_0)^2 + (\omega_0/2\alpha)^2}$

↑ E-field decays

↑ spectrum of stored energy density

Perturbation

$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} \approx - \frac{\int_V (\tilde{E}_0^* \epsilon_0 \partial_x \tilde{E}_0 + \tilde{H}_0^* \mu_0 \partial_x \tilde{H}_0) dV}{\int_V (\epsilon_0 \tilde{E}_0^* \tilde{E}_0 + \mu_0 \tilde{H}_0^* \tilde{H}_0) dV} = - \frac{\Delta W}{W_0}$



Partikel mit $\Delta \omega, \Delta \mu$ stört Resonator \tilde{E}_0, \tilde{H}_0

W_0 : ursprüngliche Energie ΔW : durch Partikel eingeführte Energie $\omega = \omega_0 \cdot \frac{W_0}{W_0 + \Delta W}$

Waveguides

Parallelplatten

- \tilde{E} for TE \tilde{H} for TM
TE Mode: kein \tilde{E} -Feld in Ausbreitungsrichtung, \tilde{E} -Feld ist parallel zu Platten

$\tilde{E}_1 = E_0 \exp(i k_x x \cos \theta + i k_z \sin \theta) \hat{u}_y$
 $\tilde{E}_2 = -E_0 \exp(i k_x x \cos \theta + i k_z \sin \theta) \hat{u}_y$
 $k_{\text{reson}} = \frac{\pi \omega}{d}$

$\tilde{E} = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 = -2i E_0 e^{ik_z \sin \theta} \sin(k_x x \cos \theta) \hat{u}_y$
 $k_{\text{reson}} = \sqrt{k^2 - \frac{\pi^2 \omega^2}{d^2}}$
 $k_y = 0$

$k_x = k \cdot \cos \theta$ Für $\frac{\pi \omega}{d} \gg k$ wird k_x in y -Richtung und nicht propärierend \rightarrow HP filter

$\omega_c = \frac{\pi \omega C}{d \cdot \nu(w_c)}$
 $v(w_c) = \sqrt{\nu(w_c) \mu_r}$
 $\omega < \omega_c$ können nicht propärieren

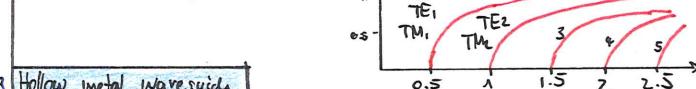
TM Mode: $\tilde{H}_1 = H_0 \exp(-ik_x x \cos \theta + ik_z \sin \theta) \hat{u}_y$

$\tilde{H}(r) = 2 H_0 e^{ik_z \sin \theta} \cos(k_x x \cos \theta) \hat{u}_y$
 $k_{\text{reson}} = \sqrt{k^2 - \frac{\pi^2 \omega^2}{d^2}}$

kein \tilde{H} -Feld in Ausbreitungsrichtung

TEM Mode für $w=0$ ist $k_z = k$: weder \tilde{E} noch \tilde{H} Feld in Ausbreitungsrichtung

$\text{TEU} = \text{TM}_0 \frac{k_x}{k_z} \uparrow \text{TM}_0 = \text{TEM}$



Hollow metal waveguide

$\tilde{E}(\tilde{r}) = E^{xy}(x, y) e^{ik_z \tilde{z}}$
 $k_z^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{\pi \omega}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{\pi \omega}{L_y} \right)^2$

gilt in allen Tonnen von Waveguides von L_x und L_y unbekannt

 $E_y = \frac{i k}{L_y} \frac{\partial H_x^y}{\partial y} + \frac{i k_x}{L_x} \frac{\partial E_x^y}{\partial x}$
 $E_y^y = -2 \frac{i k}{L_y} \frac{\partial H_x^y}{\partial x} + \frac{i k_x}{L_x} \frac{\partial E_x^y}{\partial y}$
 $H_x^y = -\frac{1}{2} \frac{i k}{L_y} \frac{\partial E_x^y}{\partial y} + \frac{i k_x}{L_x} \frac{\partial H_x^y}{\partial x}$
 $H_y^y = \frac{1}{2} \frac{i k}{L_y} \frac{\partial E_x^y}{\partial x} + \frac{i k_x}{L_x} \frac{\partial H_x^y}{\partial y}$

Rechteckige Hohlleiter

TE Mode $\rightarrow \text{TE}_{mn} \circ E_x^{yy} = 0 \rightarrow H_2^{yy} = H_0 \cos \left(\frac{\pi m}{L_x} x \right) \cos \left(\frac{\pi n}{L_y} y \right)$ $m, n \in \mathbb{N}_0$

TE_{00} existiert nicht

$k_z^2 \sqrt{k^2 - k_z^2} = \sqrt{\frac{\omega_{\text{reson}}^2}{c^2} - \left[\frac{\pi m}{L_x} \right]^2 - \left(\frac{\pi n}{L_y} \right)^2}$
 $\omega_{\text{reson}} = \frac{\pi c}{v(\omega_{\text{reson}})} \sqrt{\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}}$

↑ gilt auch für TM Fundamentalsmoden $\text{TE}_{01}, L_x < L_y$
 $\text{TE}_{10}, L_x > L_y$

TM Mode: $H_2^{yy} = 0 \rightarrow E_2^{yy} = E_0 \sin \left(\frac{\pi m}{L_x} x \right) \sin \left(\frac{\pi n}{L_y} y \right)$

$\omega \neq 0$ & $m \neq 0 \rightarrow$ würde zu \tilde{E} -Feld führen. laterale Mode: TM₀₀

Betrachtung als Welle: Es sind alle Wellen in z -Richtung

Wellenzahl k_z aussteile $k \Rightarrow$ Wellen sind langsamer als c !

$(\partial_x^2 + k_x^2) E_x(\tilde{r}) = 0$

transversale HH-Gl. im Plattenwellenleiter

Optische Wellenleiter

$\theta \Rightarrow \theta_{\text{crit}} = \arctan \frac{u_z}{u_x}$
 $\tilde{E} = \begin{cases} E_x & x < 0 \\ E_x + E_y & 0 < x < d \\ E_y & x > d \end{cases}$

TM Modes: $H_2 = 0$ $k_i = (k_x, 0, k_z)^T$ $u_2 = (u_{x2}, 0, u_{z2})^T$; $k_x = k_z = k_1$

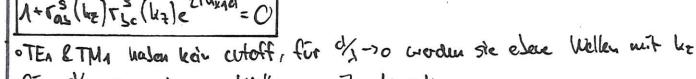
$E_1 = E_0 \begin{pmatrix} u_x/u_z \\ 0 \\ u_z/u_x \end{pmatrix} e^{-ik_z z} + i k_x z$
 $E_2 = E_0 \begin{pmatrix} u_x/u_z \\ 0 \\ u_z/u_x \end{pmatrix} e^{-ik_x x + i k_z z}$
 $E_3 = E_0 \begin{pmatrix} u_x/u_z \\ 0 \\ u_z/u_x \end{pmatrix} e^{ik_x x + i k_z z}$
 $E_4 = E_0 \begin{pmatrix} u_x/u_z \\ 0 \\ u_z/u_x \end{pmatrix} e^{ik_z z}$

$H_1 = \frac{E_1}{Z_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_z z + i k_x x}$
 $H_2 = \frac{E_2}{Z_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_x x + i k_z z}$
 $H_3 = \frac{E_3}{Z_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_x x + i k_z z}$
 $H_4 = \frac{E_4}{Z_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_z z}$

$1 + \Gamma_{ab}^P(k_z) \Gamma_{bc}^P(k_z) e^{2ik_z d} = 0$

TE Node

$1 + \Gamma_{ab}^S(k_z) \Gamma_{bc}^S(k_z) e^{2ik_z d} = 0$



Dipolfelder

$E_r = \omega^3 \mu_0 \nu p \sin \theta \cos \phi \left[\frac{2}{L_x^2 R^2} - \frac{2i}{L_x R} \right] e^{ik_z R}$

$E_\theta = \omega^3 \mu_0 \nu p \cos \theta \cos \phi \left[1 + \frac{i}{L_x R} - \frac{1}{L_x^2 R^2} \right] e^{ik_z R}$

$E_\phi = \omega^3 \mu_0 \nu p \sin \theta \left[\frac{1}{L_x^2 R^2} - \frac{i}{L_x R} - 1 \right] e^{ik_z R}$

$\tilde{E}(\tilde{r})_{x,y,z} = \omega^3 \nu p [G_{xx}, G_{xy}, G_{xz}]^\top$

$H_r = 0$

$H_\theta = \nu p \sin \theta \left[1 + \frac{i}{L_x R} \right] e^{ik_z R}$

$H_\phi = \nu p \cos \theta \cos \phi \left[1 + \frac{i}{L_x R} \right] e^{ik_z R}$

$E_r = \omega^3 \mu_0 \nu p \sin \theta \sin \phi \left[\frac{2}{L_x^2 R^2} - \frac{2i}{L_x R} \right] e^{ik_z R}$

$E_\theta = \omega^3 \mu_0 \nu p \cos \theta \sin \phi \left[1 + \frac{i}{L_x R} - \frac{1}{L_x^2 R^2} \right] e^{ik_z R}$

$E_\phi = \omega^3 \mu_0 \nu p \cos \phi \left[1 + \frac{i}{L_x R} - \frac{1}{L_x^2 R^2} \right] e^{ik_z R}$

$\tilde{E}(\tilde{r})_{x,y,z} = \omega^3 \nu p [G_{yx}, G_{yy}, G_{yz}]^\top$

$H_r = 0$

$H_\theta = \nu p \cos \theta \left[-1 - \frac{i}{L_x R} \right] e^{ik_z R}$

$H_\phi = \nu p \cos \theta \sin \phi \left[1 + \frac{i}{L_x R} \right] e^{ik_z R}$

$\tilde{H} = \frac{1}{i \omega \nu p \mu} (\nabla \times \tilde{E})$

$\omega^2 = \frac{k^2}{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0}$

$\omega = k \cdot c = \frac{k}{\epsilon_0 \epsilon_r c}$

↓ Near field
↑ Intermediate field
↑ Far field

$\frac{d}{dr} \left(\frac{e^{ik_z r}}{4\pi} \left[1 + \frac{i}{L_x R} - \frac{1}{L_x^2 R^2} \right] \right) = \frac{e^{ik_z r}}{4\pi} \left[ik \cdot \frac{1}{R} - \frac{2i}{L_x R^2} + \frac{2}{L_x^2 R^3} \right] = - \frac{e^{ik_z r}}{4\pi R} \left[ik R - 1 - \frac{2i}{R} + \frac{2}{L_x^2 R^2} \right]$

$G_{uu} = \left[1 + \frac{i h R - 1}{L_x^2 R^2} + \frac{3 - 2i h R - L_x^2 R^2}{L_x^2 R^2} \frac{u^2}{R^2} \right] e^{ik_z R}$

$G_{uv} = \left[\frac{3 - 3i h R - L_x^2 R^2}{L_x^2 R^2} \frac{u v}{R^2} \right] e^{ik_z R}$

Strahlung

Vector field due to arbitrary current distribution \tilde{j}

$\tilde{A}(\tilde{r}) = \nu M \int_V G_o(\tilde{r}, \tilde{r}') j_o(\tilde{r}') dV \propto \frac{N M e^{ik_z R}}{4\pi r} \int_V e^{-ik_z |\tilde{r} - \tilde{r}'|} j_o(\tilde{r}') dV$

↑ Fraunhofer
↓ Ladeungsdichte $j_o = \frac{e^{i k |r - r'|}}{4 \pi |r - r'|} \frac{e^{i k |r'|}}{c}$

$d(\tilde{r}) = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \int_V G_o(\tilde{r}, \tilde{r}') j_o(\tilde{r}') dV$

$G_o = \frac{e^{i k |r - r'|}}{4 \pi |r - r'|} \frac{e^{i k |r'|}}{c}$

Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln x &= \frac{1}{x}, x > 0 & \frac{d}{dx} a^x = a^x \ln(a) & \frac{d}{dx} \sin x = \cos x & \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x & \frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \\ \frac{d}{dx} \cot x &= -\frac{1}{\sin^2 x} & \frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{d}{dx} \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{d}{dx} \sinh x &= \cosh x & \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x & \frac{d}{dx} \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} & \frac{d}{dx} \coth x = \frac{-1}{\sinh^2 x} \\ (f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g' & f(g(x))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) & \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \end{aligned}$$

Integrale

$$\begin{aligned} \int x^n dx &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} & \int a^x dx &= \frac{1}{\ln a} a^x & \int \cos x dx &= \sin x & \int \sin x dx &= -\cos x \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x & \int \tan^2 x dx &= -\cot x & \int \cot^2 x dx &= -\operatorname{ctg} x - x \\ \int \frac{1}{1-x^2} dx &= \operatorname{arctg} x = -\operatorname{ctg} x & \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \tan^{-1} x & \int \cosh x dx &= \sinh x & \int \sinh x dx &= \cosh x \\ \int \frac{1}{\cosh^2 x} dx &= \tanh x & \int \tanh^2 x dx &= -\operatorname{coth} x & \int \operatorname{coth}^2 x dx &= x - \operatorname{tanh} x \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= 2\sqrt{x} & \int \sin^2 x dx &= -\frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{2}x & \int \cos^2 x dx &= \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{2}x \\ \int f(u) \phi'(u) \phi''(u) du &= \int f(u) du & \int u(x) v'(x) dx &= u(x) v(x) \Big|_a^b - \int u'(x) v(x) dx \end{aligned}$$

$\int \frac{x}{1+x} dx = x - \log(1+x)$

Trigo

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 & \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 \\ 2 &= a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma & \frac{a}{\sin \beta} = \frac{b}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} & \cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) & \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \\ \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cdot \cos x & \sin x + \sin y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \cos(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) & \sin(a)\sin(b) &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\ \cos(a)\sin(b) &= \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b)) \end{aligned}$$

Summen

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= \frac{n(n+1)}{2} & \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} & \sum_{k=0}^m e^{\frac{k}{m}} &= \frac{e^m - 1}{e^{\frac{1}{m}} - 1} \\ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^k &= (a+b)^n & \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(2k)!} &= \cos(x) \\ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} &= \sin(x) \end{aligned}$$

Fourier

$$\begin{aligned} \hat{f}(w) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iwt} dt & f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{-iwt} dw \\ f(at) &\Leftrightarrow \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{w}{a}\right) & \hat{f}(bw) &\Leftrightarrow b \hat{f}\left(\frac{w}{b}\right) & f(t-\tau) &\Leftrightarrow \hat{f}(w) \cdot e^{-i\omega\tau} & \hat{f}(w-\Omega) &\Leftrightarrow f(t)e^{i\omega t} \\ f'(t) &\Leftrightarrow i\omega \cdot \hat{f}(w) & f(t) * g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau & \Leftrightarrow \hat{f}(w) \cdot \hat{g}(w) & +^n f(t) &\Leftrightarrow (-i)^n \hat{f}'(w) \\ \sin(wt) &\Leftrightarrow \frac{1}{2i} (\delta(w+a) - \delta(w-a)) & \cos(wt) &\Leftrightarrow \frac{1}{2} (\delta(w+a) + \delta(w-a)) & e^{-iat} &\Leftrightarrow \delta(w+a) \\ \text{if } 1 < t < L \text{ else } 0 &\text{ then } \frac{\sin(Lw)}{w\pi} = \frac{L}{\pi} \sin(Lw) & e^{-atL} &\Leftrightarrow \frac{2a}{w^2 + a^2} \sin(wt) \Leftrightarrow \frac{\pi}{ab} \operatorname{rect}\left(\frac{w}{2a}\right) \\ f(t) \cdot g(t) &\Leftrightarrow (\hat{f} * \hat{g})(w) & e^{-at^2} &\Leftrightarrow \frac{1}{4a} e^{-\frac{w^2}{4a}} & \text{Parseval: } \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(w)|^2 dw \end{aligned}$$

Taylor Reihen

$$\begin{aligned} f(x; x_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x-x_0)^2 + \dots \\ 2D \quad g(x, y; x_0, y_0) &\approx g(x_0, y_0) + \partial_x g(x_0, y_0)(x-x_0) + \partial_y g(x_0, y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2} \partial_{xy} g(x_0, y_0)(x-x_0)^2 + \dots \\ f(t+\Delta t, y+\Delta y) &\approx f(t, y) + \partial_t f(t, y) \Delta t + \partial_y f(t, y) \Delta y + \frac{1}{2} \partial_{ty} f(t, y) \Delta t^2 + \dots \\ \sqrt{1+x} &\approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} \\ \sin(ax) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(ax)^{2k+1}}{(2k+1)!} & \cos(ax) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(ax)^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

Komplexe Zahlen

$$\begin{aligned} z &= a+ib & z = r \cdot e^{i\varphi} & |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r & \arg(z) = \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \\ z^* &= a-ib = r \cdot e^{-i\varphi} & e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) & \operatorname{Re}[e^{ix}] = \cos x & \operatorname{Im}[e^{ix}] = \sin x \\ \operatorname{Im}\{\sqrt[3]{z}\} &= \frac{1}{3} & |z|^2 = z \cdot z^* & \circ i = e^{i\frac{\pi}{2}} & \circ \operatorname{Re}\{z\} = \frac{1}{2}(z+z^*) \end{aligned}$$

Bestimmte Integrale

$$\begin{aligned} \int e^{ax^2} dx &\stackrel{x=\sqrt{t}}{=} \int e^{-at^2} dt & \int e^{-ax^2} dx &= 0, a>0 & \int e^{2x} dx &= \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx & \int e^{-ax^2+ibx} dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{b^2}{4a}} \\ \int \sin^3 x dx &= \frac{4}{3} & \int \sin^2 x dx &= \int \cos^2 x dx = \pi & \int \cos^2 x \sin x dx &= \frac{2}{3} & \int \sin^3 x dx &= \frac{\pi}{2} \\ \int x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

Geometrie

$$\begin{aligned} \text{Kreis: } A &= \pi r^2 & U &= 2\pi r & (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 &= r^2 \\ \text{Kugel: } V &= \frac{4}{3}\pi r^3 & O &= 4\pi r^2 & x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \end{aligned}$$

Vektoranalysis

$$\text{S.V. Gauss: } \int_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} dA = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV \quad \text{S.V. Stokes: } \int_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A [\nabla \times \vec{F}] \cdot \vec{n} dA$$

$$\text{Linienintegral } \int_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \begin{aligned} 1) \text{ Linie parametrisieren: } t \in [a, s] &\rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f(t) \\ 2) d\vec{s} \text{ ist tangential } &\rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ nach } t \text{ ableiten} \\ 3) \int_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_a^s \vec{F} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt \end{aligned}$$

$$\text{Oberfl.-Integral: } \int_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \underbrace{R^2 \sin\theta}_{dA} \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}}_{\vec{n}} \cdot \vec{F} d\varphi d\theta dr$$

$$\text{Satz von Schwarz: Partielle Abl. dürfen vertauscht werden: } \partial_{\bar{y}} f = \partial_y \bar{f}$$

$$\text{Betrag: } |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'}$$

Fourier

Operation	Cartesian (x, y, z)	Cylindrical (r, θ, z)	Spherical (r, θ, ϕ)	Coordinate conversion
				Total rows
Vector field A	$A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z$	$A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_z \vec{u}_z$	$A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_\phi \vec{u}_\phi$	Cartesian
Gradient ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$	$\frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$	$\frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{u}_\phi$	$x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta \cos \phi$ $z = r \sin \theta \sin \phi$
Divergence $\nabla \cdot A$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$	Cylindrical
Curl $\nabla \times A$	$(\partial_y A_z - \partial_z A_y) \vec{u}_x + (\partial_z A_x - \partial_x A_z) \vec{u}_y + (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \vec{u}_z$	$(\frac{1}{r} \partial_\theta A_z - \partial_z A_\theta) \vec{u}_r + (\partial_z A_r - \partial_r A_z) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} (\partial_r (\vec{r} \cdot A_\phi) - \partial_\phi (\vec{r} \cdot A_r)) \vec{u}_\phi$	$\frac{1}{r \sin \theta} (\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}) \vec{u}_r + \frac{1}{r} (\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (\vec{r} \cdot A_\phi)) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} (\frac{\partial}{\partial r} (\vec{r} \cdot A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}) \vec{u}_\phi$	Spherical
Laplace op. $\nabla^2 f = \Delta f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$	
Vector Laplacian $\nabla^2 A = \Delta A$ $= \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla(\nabla \times A)$	$\nabla^2 A_x \vec{u}_x + \nabla^2 A_y \vec{u}_y + \nabla^2 A_z \vec{u}_z$	$(\nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}) \vec{u}_r + (\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta}) \vec{u}_\theta + \nabla^2 A_\phi \vec{u}_\phi$	$(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (A_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}) \vec{u}_r + (\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}) \vec{u}_\theta + (\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}) \vec{u}_\phi$	
differential volume dV	$dx dy dz$	$r dr d\theta dz$	$r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$	

Unit vector conversion
in terms of dest./src.

Identities

- $\nabla \times (\nabla f) = 0$
- $\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$
- $\nabla \times (\nabla \cdot A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$
- $\nabla \times (fA) = f(\nabla \times A) - A \times (\nabla f)$
- $\nabla \cdot (A \times B) = (A \times B) \cdot B - A \cdot (\nabla \times B)$
- $A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B)$
- $A \times (B \times C) = B \times (C \times A) = C \times (A \times B) = 0$
- $A \times B = -B \times A$
- $A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$

	Cartesian	Cylindrical	Spherical
Cartesian	N/A	$\vec{u}_x = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$ $\vec{u}_y = \sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta$ $\vec{u}_z = \vec{u}_z$	$\vec{u}_r = \sin \theta \cos \phi \vec{u}_x + \cos \theta \cos \phi \vec{u}_y - \sin \phi \vec{u}_z$ $\vec{u}_\theta = \cos \theta \sin \phi \vec{u}_x + \cos \phi \sin \theta \vec{u}_y + \cos \theta \vec{u}_z$ $\vec{u}_\phi = \cos \theta \vec{u}_x - \sin \theta \vec{u}_y$
Cylindrical		$\vec{u}_r = \frac{x \vec{u}_x + y \vec{u}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\vec{u}_\theta = \frac{-y \vec{u}_x + x \vec{u}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\vec{u}_z = \vec{u}_z$ $\vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y$ $\vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y$ $\vec{u}_z = \vec{u}_z$	$\vec{u}_r = \frac{x(\sqrt{x^2 + y^2} \vec{u}_r + z \vec{u}_\theta)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - y \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \vec{u}_\theta + z \vec{u}_r}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ $\vec{u}_\theta = \frac{y(\sqrt{x^2 + y^2} \vec{u}_r + z \vec{u}_\theta)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + x \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \vec{u}_\theta + z \vec{u}_r}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ $\vec{u}_z = \frac{z \vec{u}_r - \sqrt{x^2 + y^2} \vec{u}_\theta}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
Spherical			$\vec{u}_r = \sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta$ $\vec{u}_\theta = \vec{u}_\theta$ $\vec{u}_\phi = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$ $\vec{u}_r = \frac{p \vec{u}_r + z \vec{u}_\theta}{\sqrt{p^2 + z^2}}$ $\vec{u}_\theta = \frac{z \vec{u}_r + p \vec{u}_\theta}{\sqrt{p^2 + z^2}}$ $\vec{u}_\phi = \frac{z \vec{u}_r - p \vec{u}_\theta}{\sqrt{p^2 + z^2}}$ $\vec{u}_\phi = \vec{u}_\phi$