Proyecto I

Análisis Aplicado I

Eric Bazaldua Miñana 155279
Hugo Delgado Curiel 155483
Adolfo Margain Orozco 157264
Francisco Gabriel Huerta Fernández 166040

7 de abril de 2020

Índice

1. Introducción

La función que elegimos fue la función de Matyas $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y está dada por la expresión:

$$f(x_1, x_2) = 0.26(x_1^2 + x_2^2) - 0.48x_1x_2. \tag{1.1}$$

Usualmente se toma como dominio de la función el rectángulo $[-10, 10] \times [-10, 10]$.

El gradiente de la función está dado por

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0.52x_1 - 0.48x_2 \\ 0.52x_2 - 0.48x_1 \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

y la matriz hessiana está dada por

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0.52 & -0.48 \\ -0.48 & 0.52 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

que es una matriz constante y simétrica positiva definida. Luego, como la matriz hessiana es positiva definida, entonces la función es estrictamente convexa.

La función de Matyas tiene como único punto crítico a $\boldsymbol{x}^* = (0, 0)^T$ y como la matriz hessiana es positiva definida, entonces $\boldsymbol{x}^* = (0, 0)^T$ es un mínimo local de la función. Luego, como la función es estrictamente convexa entonces $\boldsymbol{x}^* = (0, 0)^T$ es un mínimo global.

Para todos los códigos realizados en Matlab se utilizaron como parámetros:

$$\Delta = 1,\ \eta = 0.1,\ tol = 10^{-5},\ \Delta_{max} = 1.5. \tag{1.4}$$

2. Pregunta 1

Tomamos como punto inicial $\boldsymbol{x_0} = (0.5, 0.5)^T$, la matriz hessiana dada por (1.3) y los parámetros como en (1.4)

La gráfica del modelo cuadrático en la región de confianza se observa en la figura 1. El circulo en blanco muestra el modelo cuadrático y la gráfica en color es la función de Matyas.

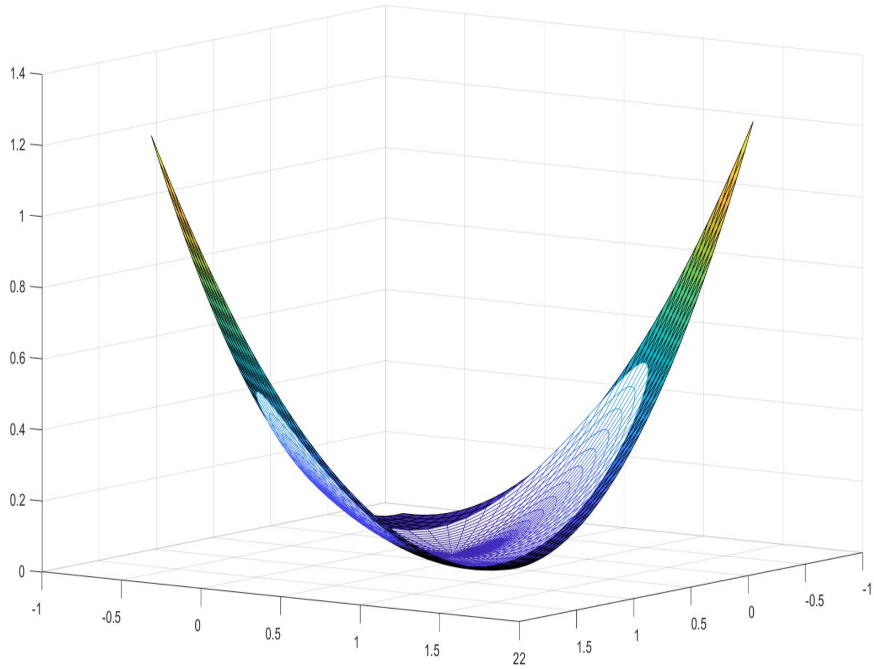

Figura 1: Gráfica de la función y del modelo cuadrático en una región de confianza

Código Para realizar este ejercicio se utilizo el código: *Ej1.m* en Matlab, donde se puede replicar los resultados.

3. Pregunta 2

Tomamos como punto inicial $\boldsymbol{x_0} = (-1.5, -1)^T$, la matriz hessiana dada por (1.3) y los parámetros como en (1.4).

El modelo cuadrático en el punto $\boldsymbol{x_0}$ está dado por la siguiente expresión:

$$m(\boldsymbol{p}) = 0.125 - 0.3p_1 + 0.2p_2 + 0.26p_1^2 - 0.48p_1p_2 + 0.26p_2^2. \tag{3.1}$$

La gráfica siguiente contiene:

- la frontera de la región de confianza (linea punteada en rojo),
- algunos conjuntos de nivel en $\mathbf{R}^2$ del modelo cuadrático en la región de confianza (las elipses),
- las direcciones de *Newton (color verde), Cauchy (color rojo), dogleg (color azul)*

que se pueden ver en la figura 2.

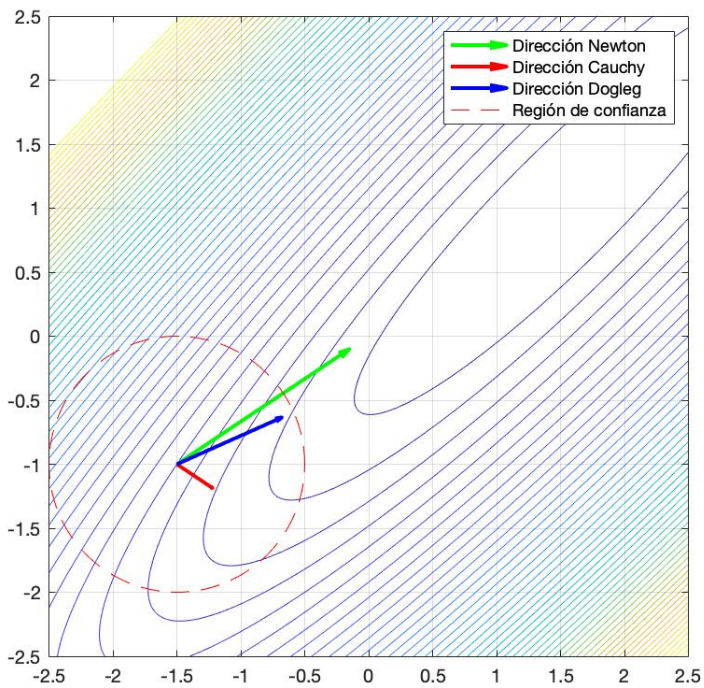

Figura 2: Curvas de nivel con las 3 direcciones.

Código
Para realizar este ejercicio se utilizo el código: *Ej2.m* en Matlab, donde se puede replicar los resultados.

4. Pregunta 3

Tomamos $\boldsymbol{x_0} = (3,4)^T$, $\boldsymbol{x}^* = (0,0)^T$, la matriz hessiana dada por (1.3) y los parámetros dados por (1.4). Como la función de Matyas es globalmente convexa escogemos una distancia mayor que $3\Delta_{max}$. Vemos que se satisface:

$$||\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{x}^*||_2 = 5 > 3(1.5) = 3\Delta_{max}.$$

Se muestran en la figura 3 las últimas 8 iteraciones de los archivos **mRC1.m** y **mRC2.m**, donde se reportan los valores de:

- k, la iteración,
- El valor de cada una de las entradas del punto $\boldsymbol{x_k}$
- $||\nabla f(\boldsymbol{x_k})||_2$,
- $f(\boldsymbol{x_k})$,
- $||\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}^*||_2$.

Se realizaron las iteraciones y pudimos ver que el método con el punto de Cauchy necesitaba hacer 114 iteraciones mientras que el método con el Dogleg solo 4, por lo cual en la siguientes tablas se muestran los resultados obtenidos con nuestra función. La primer tabla es el numero de iteraciones totales, la segunda tabla es el método con el punto Cauchy y la tercer tabla es el método con el punto Dogleg

Método	Iteraciones
pCauchy	114
pDogleg	4

Tabla para mRC1

Iteracion	Valor X	Valor Y	NormGrad	Evaluada	Error
107	2.222899e-04	2.102309e-04	1.491204e-05	1.907097e-09	3.0596e-04
108	1.808092e-04	2.028250e-04	1.897597e-05	1.592926e-09	2.7172e-04
109	1.856703e-04	1.755979e-04	1.245546e-05	1.330511e-09	2.5555e-04
110	1.510231e-04	1.694121e-04	1.584991e-05	1.111325e-09	2.2695e-04
111	1.550834e-04	1.466703e-04	1.040357e-05	9.282479e-10	2.1345e-04
112	1.261439e-04	1.415035e-04	1.323883e-05	7.753303e-10	1.8957e-04
113	1.295353e-04	1.225081e-04	8.689710e-06	6.476040e-10	1.7829e-04
114	1.053632e-04	1.181925e-04	1.105789e-05	5.409191e-10	1.5834e-04

Tabla para mRC2

Iteracion	Valor X	Valor Y	NormGrad	Evaluada	Error
1	3.059935e+00	3.001798e+00	7.343024e-01	3.682911e-01	4.2865e+00
2	1.781202e+00	2.217680e+00	1.763113e-01	2.075390e-01	2.8444e+00
3	9.771541e-01	9.513836e-01	3.287092e-01	3.735861e-02	1.3638e+00
4	5.940353e-08	5.724424e-08	3.635470e-09	1.372327e-16	8.2497e-08

Figura 3: Tabla de ultimas 8 iteraciones

Podemos observar que a medida que avanzan las iteraciones el error de aproximación se vuelve más chico y se acerca a cero, esto es, el punto aproximado se parece cada vez más a la solución óptima.

Código

Para realizar este ejercicio se utilizo el código: *Ej3.m* en Matlab, donde se puede replicar los resultados.

5. Pregunta 4

Retomando las iteraciones de la pregunta 3, realizamos 2 gráficas para visualizar el proceso de aproximación de ambos métodos, es claro que uno será mucho más rápido que otro.
Para el método Cauchy observamos 114 iteraciones, la figura 4 muestra el proceso:

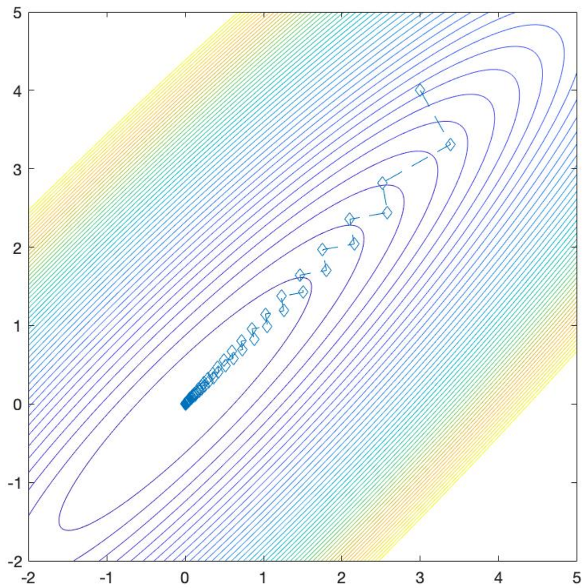

Figura 4: Proceso del metodo con punto de Cauchy

Para el Dogleg observamos 4 iteraciones, la figura 5 muestra el proceso:

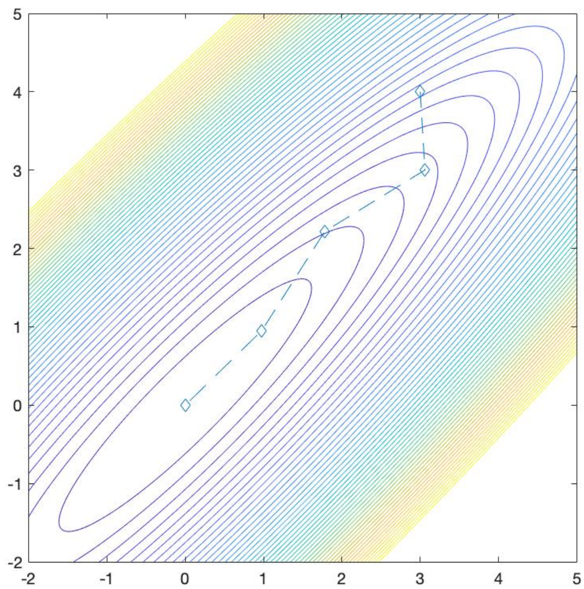

Figura 5: Proceso del metodo con punto Dogleg

Código
Para realizar este ejercicio se utilizo el código: *Ej4mRC1.m* y *Ej4mRC2.m* en Matlab, donde se puede replicar los resultados.

6. Conclusión

El proyecto nos ayudo para evaluar la capacidad de los algoritmos vistos en clase, así como entender un poco por que pasan algunas cosas teóricas. La función Matyas fue de gran ayuda puesto que fue sencillo calcular lo necesario para aplicar los algoritmos. Nos dimos cuenta como el algoritmo que utiliza el punto Dogleg fue mucho mas eficiente y rápido al momento de aproximar al mínimo, tanto las iteraciones como el error fueron mucho mejor que el que utiliza el punto Cauchy. Así pues pudimos corroborar con este ejemplo cual puede funcionar mucho mejor en la practica.