google.com/+VictorPedro

Cálculo Aplicado

TM406

Aleksandro • 2015.1 • UFRRJ

Last Revision: 16 de abril de 2015

Sumário

Resumo

Este documento apresenta notas sobre a cadeira de Cálculo Aplicado no curso de Ciência da Computação.

1 Exercícios Sobre Integral Dupla

1. Encontre o volume do sólido limitado pela superfície $f(f,x) = 4 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16}$, os planos $x = 3$, $y = 2$ e os planos coordenados. **Resposta**

$$V = \int_R \int f(x,y)dA \tag{1.1}$$

$$= \int_0^3 \int_0^2 4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} dydx \tag{1.2}$$

$$= \int_0^3 4y - \frac{x^2 y}{9} - \frac{y^3}{48} \,|_0^2 dx \tag{1.3}$$

$$= \int_0^3 8 - \frac{2x^2}{9} - \frac{8}{48} - (0 - 0 - 0)dx \tag{1.4}$$

$$= \int_0^3 \frac{2x^2}{9} + \frac{47}{6} dx \tag{1.5}$$

$$= \frac{2x^3}{27} + \frac{47x}{6} \,|_0^3 \tag{1.6}$$

$$= -2 + \frac{47}{2} - 0 = \frac{43}{2} \tag{1.7}$$

2 Teorema de Fubini

Seja R o retângulo $R = [a.b]$ e $[c,d]$. Se f é contínua em R, então

$$\int_R \int f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \tag{2.1}$$

<u>Ex.</u> Calcule $\int_R \int y^2 x dA$ no retângulo $-3 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 1$.

3 Integrais Duplas em Regiões não-retangulares

As Integrais iteradas podem apresentar limites de integração não-ctes, como

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx \tag{3.1}$$

E

$$\int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dydx \tag{3.2}$$

4 Integrais Triplas

A Integral tripla de uma função $f(x, y, z)$ é definida de forma análoga a integral dupla, nesse caso, $f(x, y, z)$ deve ser contínua em um sólido G do espaço 3D.
As propriedades de integral tripla são análogas às de integral dupla.
Integrais triplas em "caixas"retangulares:

Theorem 4.1. Seja G uma caixa retangular definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ e $l \leq z \leq m$, ou seja,

$$G = [a, b] * [c, d] * [l, m]. \tag{4.1}$$

Se f é uma função em G, então:

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dV = \int_l^m \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \tag{4.2}$$

não importando a ordem de integração

Example 4.1. Calcule $\iiint_G 12xy^2z^3dv$, onde G é a caixa $-1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$ e $0 \leq z \leq 2$.
Solução.

$$\iiint_G 12xy^2z^3\, dV$$
$$= \int_- 1^2 \int_0^3 \int_0^2 dz\, dy\, dx$$
$$\dots$$

4.1 Integrais triplas em Sólidos mais gerais

(1) G é um sólido do tipo xy simples

Theorem 4.2. Seja G um sólido xy simples com superfície inferior $z = g_1(x, y)$ e superfície superior $z = g_2(x, y)$. Seja R a projeção de um G no plano xy. Se f é uma função contínua em G, então.

$$\iiint_G f(x, y, z)dv$$
$$\iint_G [\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)dz]dA$$

(2) G é um sólido do tipo xz simples:

Theorem 4.3. Seja G um sólido xy simples, limitado à esquerda pela superfície $y = a_1(x, y)$ e pela direita pela superfície $y = g_2(x, y)$. Seja $\underline{R}$ A projeção de G no plano xy se f é contínua em G, então:

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dv$$
$$= \iint_R \left[\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy \right] dA$$

(3) G É um sólido xy simples:

Theorem 4.4. Seja G um sólido xy simples limitado atrás pela superfície $x = g_1(x, z)$, à frente pela superfície $x = g_2(x, z)$. Seja $\underline{R}$ a projeção de G no plano xz. Se f é contínua em G, então:

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dv = \iint_R \left[\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x, y, z)\, dx \right] dA$$

Example 4.2. Seja G a cunha do primeiro octante seccionada do sólido cilíndrico $y^2 + z^2 \leq 1$, pelos planos $= y = x$ e $x = 0$. Calcule $\iiint_G z\, dV$

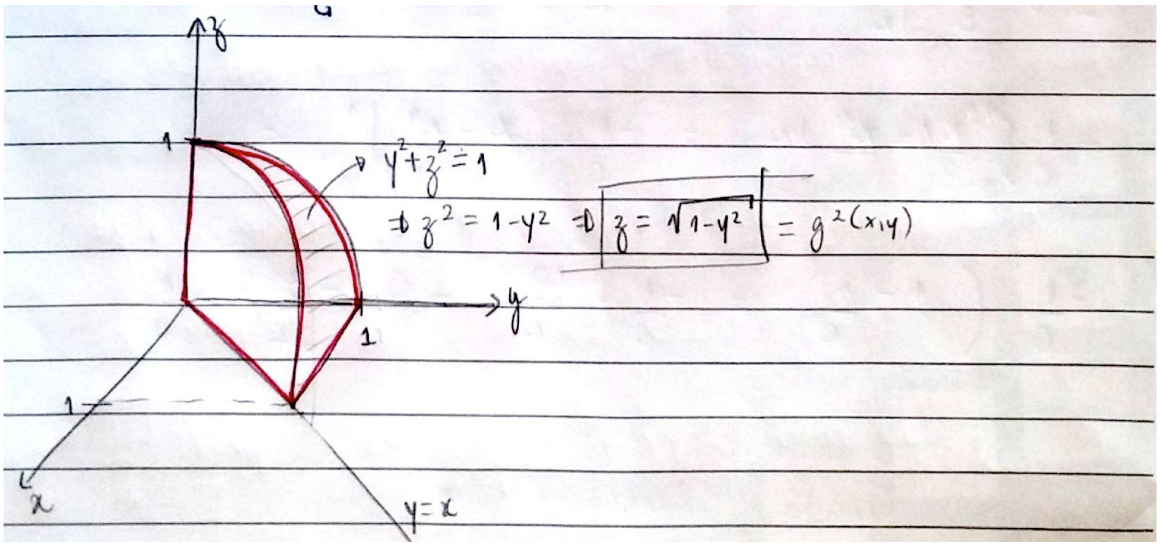
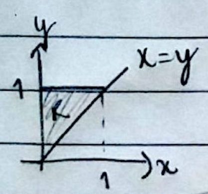


Figura 4.1: Solução - Parte 1

(a) G sólido xy simples



$$g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y) \Rightarrow 0 \le z \le \sqrt{1-y^2}$$

$R = Rx$

$0 \le x \le 1$

$x \le y \le 1$

$$\iiint_G z\,dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} z\,dV\right] dA$$

$$\int_0^1\int_x^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} z\,dz\right] dy\,dx$$

$$\int_0^1\int_x^1 \left[\frac{z^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1-y^2}}\right] dy\,dx \Rightarrow \iint_G \left[\frac{(\sqrt{1-y^2})^2}{2} - 0\right] dy\,dx$$

$$= \int_0^1\int_x^1 \frac{-y^2}{2}\,dy\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1\int_x^1 y^2\,dy\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y^3}{3}\Big|_x^1 dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{3}(1-x^3)\,dx$$

$$-\frac{1}{6}\int_0^1 1-x^3\,dx = -\frac{1}{6}\cdot\left(x-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 =$$

$$-\frac{1}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4} = -\frac{3}{24} = -\frac{1}{8}$$

Errado solução é $\boxed{\frac{1}{8}}$

Figura 4.2: Solução - Parte 2