$$= \tfrac{32}{3} \int_0^1 (2y^2 + 1)\sqrt{1 - y^2}\, dy$$

$$= -\tfrac{16}{3} y(1 - y^2)^{3/2} + 8y\sqrt{1 - y^2} + 8 \text{ arc sen } y \Big]_0^1$$

$$= 4\pi$$

Então, o volume é 4π unidades cúbicas, que coincide com a resposta do Exemplo 3.

Das soluções dos Exemplos 3 e 4 vemos que a integral dupla $\int_R\int (x^2 + 4y^2)dA$ pode ser calculada por meio de integrais iteradas

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}/2} (x^2 + 4y^2)\, dy\, dx \quad \text{ou} \quad \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-y^2}} (x^2 + 4y^2)\, dx\, dy$$

Se em qualquer das fórmulas (5) ou (6), $f(x, y) = 1$ para todo x e y, então obtemos uma fórmula que expressa a medida A da área de uma região R como uma integral dupla. Temos

$$A = \int_R\int dy\, dx = \int_R\int dx\, dy \tag{7}$$

EXEMPLO 5: Encontre por integração dupla a área da região no plano xy, limitado pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4x - x^2$.

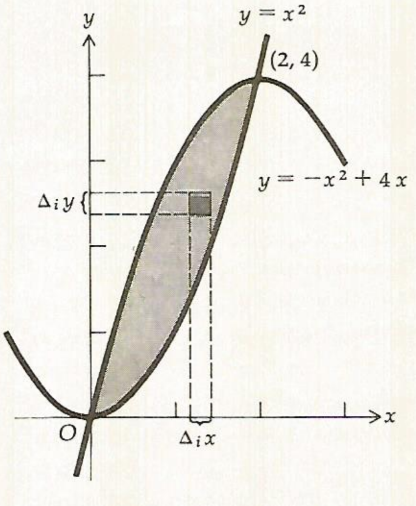

Figura 18.2.11

SOLUÇÃO: A região é mostrada na Fig. 18.2.11. Aplicando a fórmula (7), temos

$$A = \int_R\int dy\, dx = \int_0^2 \int_{x^2}^{4x-x^2} dy\, dx$$

$$= \int_0^2 (4x - x^2 - x^2)\, dx = 2x^2 - \tfrac{2}{3}x^3 \Big]_0^2$$

$$= \tfrac{8}{3}$$

Então, a área da região é $\frac{8}{3}$ unidades quadradas.

Exercícios 18.2

Nos Exercícios de 1 a 8, encontre a integral iterada.

1. $\int_1^2 \int_0^{2x} xy^3\, dy\, dx$
2. $\int_0^4 \int_0^y dx\, dy$
3. $\int_0^1 \int_0^{y^2} e^{x/y}\, dx\, dy$
4. $\int_{-1}^1 \int_1^{e^x} \dfrac{1}{xy}\, dy\, dx$
5. $\int_0^1 \int_{y^2}^y \sqrt{\dfrac{y}{x}}\, dx\, dy$
6. $\int_0^1 \int_{x^2}^x \sqrt{\dfrac{y}{x}}\, dy\, dx$
7. $\int_0^1 \int_0^1 |x - y|\, dy\, dx$
8. $\int_0^\pi \int_0^{y^2} \text{sen } \dfrac{x}{y}\, dx\, dy$

Nos Exercícios de 9 a 14, encontre o valor exato da integral dupla.

9. A integral dupla é a mesma do Exercício 1, nos Exercícios 18.1.
10. A integral dupla é a mesma do Exercício 4, nos Exercícios 18.1.
11. $\int_R\int \text{sen } x\, dA$, R é a região limitada pelas retas $y = 2x$, $y = \frac{1}{2}x$, e $x = \pi$.

12. $\iint_R \cos(x+y)\,dA$; R é a região limitada pelas retas $y = x$ e $x = \pi$ e o eixo x.

13. $\iint_R x^2\sqrt{9-y^2}\,dA$; R é a região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 9$.

14. $\iint_R \dfrac{y^2}{x^2}\,dA$; R é a região limitada pelas retas $y = x$ e $y = 2$, e a hipérbole $xy = 1$.

15. Encontre o volume do sólido abaixo do plano $z = 4x$, e acima da circunferência $x^2 + y^2 = 16$ no plano xy. Trace um esboço do sólido.

16. Encontre o volume do sólido limitado pelos planos $x = y + 2z + 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, e $3y + z - 3 = 0$. Trace um esboço do sólido.

17. Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado pelos dois cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + z^2 = 4$. Trace um esboço do sólido.

18. Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado pelo parabolóide $z = 9 - x^2 - 3y^2$. Trace um esboço do sólido.

19. Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado pelas superfícies $x + z^2 = 1$, $x = y$, e $x = y^2$. Trace um esboço do sólido.

20. Encontre por integração dupla o volume da porção do sólido limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que está no primeiro octante. Trace um esboço do sólido.

Nos Exercícios de 21 a 24, use integrais duplas para encontrar a área da região limitada pelas curvas dadas no plano xy. Trace um esboço da região.

21. $y = x^3$ e $y = x^2$ 22. $y^2 = 4x$ e $x^2 = 4y$ 23. $y = x^2 - 9$ e $y = 9 - x^2$ 24. $x^2 + y^2 = 16$ e $y^2 = 6x$

25. Expresse como integral iterada a medida do volume do sólido limitado pela elipsóide.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

26. Dada a integral iterada

$$\int_0^a \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dy\, dx$$

(a) Trace um esboço do sólido cuja medida do volume é representada pela integral iterada dada; (b) Calcule a integral iterada; (c) Escreva a integral iterada que dá a medida do volume do mesmo sólido com a ordem de integração invertida.

27. Dada a integral iterada

$$\frac{2}{3}\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (2x + y)\, dy\, dx$$

As instruções são as mesmas do Exercício 26.

28. Use a integração dupla para encontrar a área da região no primeiro octante limitada pela parábola $y^2 = 4x$, a circunferência $x^2 + y^2 = 5$ e o eixo x, por dois métodos: (a) integre primeiro em relação a x; (b) integre primeiro em relação a y. Compare os dois métodos de solução.

29. Encontre, por dois métodos, o volume do sólido abaixo do plano $3x + 8y + 6z = 24$ e acima da região do plano xy, limitada pela parábola $y^2 = 2x$, a reta $2x + 3y = 10$ e o eixo x: (a) Integre primeiro em relação a x; (b) Integre primeiro em relação a y. Compare os dois métodos de solução.

Nos Exercícios 30 e 31, a integral iterada não pode ser calculada exatamente em termos de funções elementares com a ordem de integração dada. Inverta a ordem de integração e faça o cálculo.

30. $$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy$$

31. $$\int_0^1 \int_x^1 \frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dy\, dx$$

32. Use integração dupla para encontrar o volume do sólido comum a dois cilindros circulares retos de raio r unidades, cujos eixos se interceptam em ângulos retos (Veja o Exercício 7.4).

18.3 CENTRO DE MASSA E MOMENTOS DE INÉRCIA

No Capítulo (7), usamos integrais simples para encontrar o centro de massa de uma lâmina homogênea. Ao usarmos integrais simples, podemos somente considerar lâminas de densidade de área constante (exceto em casos especiais). Entretanto, com integrais duplas, podemos encontrar o centro de massa de uma lâmina homogênea ou não homogênea.

Suponhamos uma lâmina com a forma de uma região fechada R no plano xy. Seja $\rho(x, y)$ a medida da densidade de área da lâmina em um ponto qualquer (x, y) de R onde ρ é contínua em R. Para encontrarmos a massa total da lâmina procedemos da seguinte forma. Seja Δ uma partição de R em n retângulos. Se (ξ_i, γ_i) é um ponto qualquer no i-ésimo retângulo que tem uma área de medida $\Delta_i A$, então uma aproximação da medida da massa do i-ésimo retângulo é dada por $\rho(\xi_i, \gamma_i)\Delta_i A$, e a medida da massa total da lâmina é aproximada por da densidade de área da lâmina em um ponto qualquer seja proporcional à medida da distância do ponto ao diâmetro. Se a massa é medida em kg e a distância em m, encontre o raio de giração da lâmina em relação ao eixo x.

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\gamma_i \, \Delta_i A$$

$$= \iint_R ky \, dA$$

$$= \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} ky \, dx \, dy$$

$$= k \int_0^a \Big[yx \Big]_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} dy$$

$$= 2k \int_0^a y\sqrt{a^2-y^2} \, dy$$

$$= -\tfrac{2}{3}k(a^2-y^2)^{3/2} \Big]_0^a$$

$$= \tfrac{2}{3}ka^3$$

Se I_x kg-m^2 é o momento de inércia da lâmina em relação ao eixo x, então

$$I_x = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2(k\gamma_i) \, \Delta_i A$$

$$= \iint_R ky^3 \, dy \, dx$$

$$= \int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} ky^3 \, dy \, dx$$

$$= k \int_{-a}^a \Big[\tfrac{1}{4}y^4 \Big]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= \tfrac{1}{4}k \int_{-a}^a (a^4 - 2a^2x^2 + x^4) \, dx$$

$$= \tfrac{1}{4}k(2a^5 - \tfrac{4}{3}a^5 + \tfrac{2}{5}a^5)$$

$$= \tfrac{4}{15}ka^5$$

Portanto, se r m é o raio de giração

$$r^2 = \frac{\frac{4}{15}ka^5}{\frac{2}{3}ka^3} = \frac{2}{5}a^2$$

e assim, $r = \frac{1}{5}\sqrt{10a}$. O raio de giração, então, é $\frac{1}{5}\sqrt{10a}$ m.

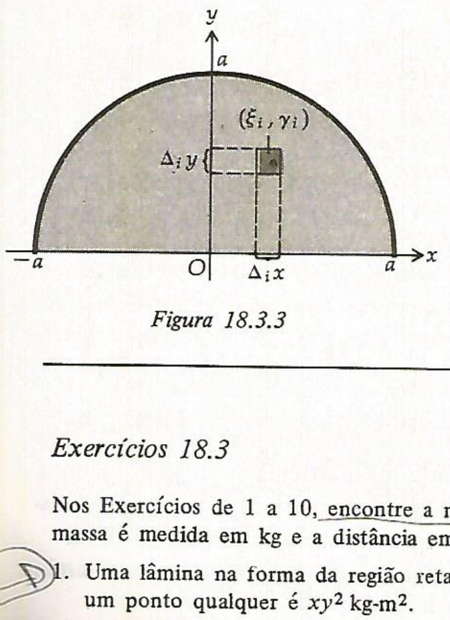

Figura 18.3.3

Exercícios 18.3

Nos Exercícios de 1 a 10, encontre a massa e o centro de massa da lâmina dada, conforme a densidade da área for indicada. A massa é medida em kg e a distância em m.

1. Uma lâmina na forma da região retangular limitada pelas retas $x = 3$ e $y = 2$ e os eixos coordenados. A densidade de área em um ponto qualquer é xy^2 kg-m^2.
2. Uma lâmina na forma da região no primeiro quadrante limitada pela parábola $y = x^2$, a reta $y = 1$ e o eixo y. A densidade de área em um ponto qualquer é $(x + y)$ kg-m^2.
3. Uma lâmina na forma da região limitada pela parábola $x^2 = 8y$, a reta $y = 2$ e o eixo y. A densidade de área varia com a distância à reta $y = -1$.
4. Uma lâmina na forma da região limitada pela curva $y = e^x$, a reta $x = 1$ e os eixos coordenados. A densidade de área varia com a distância ao eixo x.
5. Uma lâmina na forma da região no primeiro quadrante limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ e os eixos coordenados. A densidade de área varia com a soma das distâncias aos dois lados retos.
6. Uma lâmina na forma da região limitada pelo triângulo cujos lados são segmentos dos eixos coordenados e a reta $3x + 2y = 18$. A densidade de área varia com o produto das distâncias aos eixos coordenados.
7. Uma lâmina na forma da região limitada pela curva $y = \operatorname{sen} x$ e o eixo x de $x = 0$ a $x = \pi$. A densidade de área varia com a distância ao eixo x.

8. Uma lâmina na forma da região limitada pela curva $y = \sqrt{x}$ e a reta $y = x$. A densidade de área varia com a distância ao eixo y.

9. Uma lâmina na forma da região no primeiro quadrante limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 4$ e a reta $x + y = 2$. A densidade de área em um ponto qualquer é xy kg/m^2.

10. Uma lâmina na forma da região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e as retas $x = 1$ e $y = 1$. A densidade de área em um ponto qualquer é xy kg/m^2.

Nos Exercícios de 11 a 16, encontre o momento de inércia da lâmina homogênea dada em relação ao eixo indicado se a densidade da área é ρ kg/m^2 e a distância é medida em metros.

11. Uma lâmina na forma da região limitada por $4y = 3x$, $x = 4$ e o eixo x; em relação ao eixo dos x.

12. A lâmina do Exercício 11; em relação à reta $x = 4$.

13. Uma lâmina na forma da região limitada por uma circunferência de raio a unidades; em relação a seu centro.

14. Uma lâmina na forma da região limitada pela parábola $x^2 = 4 - 4y$ e o eixo x; em relação ao eixo dos x.

15. A lâmina do Exercício 14; em relação à origem.

16. Uma lâmina na forma da região limitada por um triângulo de lados de comprimentos a, b e c m, em relação ao lado de comprimento a m.

Nos Exercícios de 17 a 20, encontre para a lâmina dada, o seguinte: (a) o momento de inércia em relação ao eixo x; (b) o momento de inércia em relação ao eixo y; (c) o raio de giração em relação ao eixo x; (d) o momento polar de inércia.

17. A lâmina do Exercício 1.

18. A lâmina do Exercício 2.

19. A lâmina do Exercício 7.

20. A lâmina do Exercício 8.

21. Uma lâmina homogênea de área de densidade ρ kg-m^2 tem a forma da região limitada por um triângulo isósceles que tem uma base de comprimento b m e uma altura de comprimento h m. Encontre o raio de giração da lâmina em relação a sua reta de simetria.

22. Uma lâmina tem a forma da região limitada pela parábola $y = 2x - x^2$ e o eixo x. Encontre o momento de inércia da lâmina em relação à reta $y = 4$ se a densidade de área varia com sua distância à reta $y = 4$. A massa é medida em kg e a distância em metros.

18.4 A INTEGRAL DUPLA EM COORDENADAS POLARES

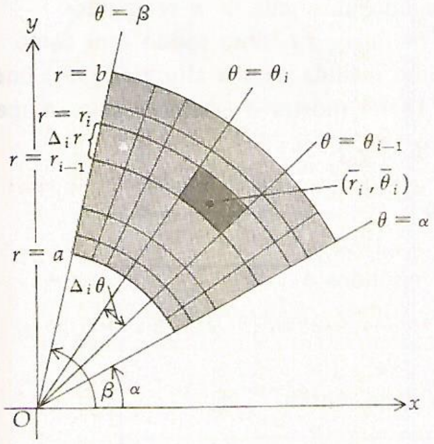

Figura 18.4.1

Agora, mostraremos como se pode definir a integral dupla de uma função em uma região fechada no plano coordenado polar. Consideremos primeiro a região mais simples. Seja R a região limitada pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e pelas circunferências $r = a$ e $r = b$. Seja Δ uma *partição* desta região que é obtida traçando retas que passam pelo polo e circunferências com centro no polo. Isto é mostrado na Figura 18.4.1. Obtemos uma rede de sub-regiões que chamamos retângulos "curvos". A norma de partição $\|\Delta\|$ é o comprimento da maior das diagonais dos retângulos "curvos". Seja n o número de sub-regiões e seja $\Delta_i A$ a medida da área do i-ésimo retângulo "curvo". Como a área da i-ésima sub-região é a diferença das áreas dos setores circulares, temos

$$\Delta_i A = \tfrac{1}{2} r_i^2(\theta_i - \theta_{i-1}) - \tfrac{1}{2} r_{i-1}^2(\theta_i - \theta_{i-1})$$
$$= \tfrac{1}{2}(r_i - r_{i-1})(r_i + r_{i-1})(\theta_i - \theta_{i-1})$$

Seja $\bar{r}_i = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})$, $\Delta_i r = r_i - r_{i-1}$ e $\Delta_i \theta = \theta_i - \theta_{i-1}$, temos

$$\Delta_i A = \bar{r}_i \, \Delta_i r \, \Delta_i \theta$$

Tomamos o ponto $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)$ na i-ésima sub-região, onde $\theta_{i-1} \leqslant \bar{\theta}_i \leqslant \theta_i$, e formamos a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \, \Delta_i A = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \bar{r}_i \, \Delta_i r \, \Delta_i \theta \tag{1}$$

Podemos mostrar que se f é contínua na região R, então o limite da soma em (1), quando $\|\Delta\|$ se aproxima de zero, existe e este limite será a integral dupla de f em R. Escrevemos

$$\boxed{\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \, \Delta_i A = \iint_R f(r, \theta) \, dA} \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \text{sen}^2\, 3\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\theta - \frac{1}{24}\,\text{sen}\, 6\theta \Big]_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{1}{12}\pi$$

Portanto, a área é $\frac{1}{12}\pi$ unidades quadradas.

Algumas vezes, é mais fácil calcularmos uma integral dupla, usando coordenadas polares no lugar de coordenadas cartesianas. Tal situação é mostrada no exemplo seguinte.

EXEMPLO 5: Calcule a integral dupla

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\, dA$$

onde a região R está no primeiro quadrante e é limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ e os eixos coordenados.

SOLUÇÃO: Como $x^2 + y^2 = r^2$ e $dA = r\, dr\, d\theta$, temos

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \iint_R e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^a e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \Big[e^{-r^2}\Big]_0^a\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (e^{-a^2} - 1)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\pi(1 - e^{-a^2})$$

Exercícios 18.4

Nos Exercícios de 1 a 6 use integrais duplas para encontrar a área da região dada.

1. A região interior à cardióide $r = 2(1 + \text{sen}\,\theta)$.
2. Uma pétala da rosácea $r = a\cos 2\theta$.
3. A região interior à cardióide $r = a(1 + \cos\theta)$ e exterior à circunferência $r = a$.
4. A região interior à circunferência $r = 1$ e exterior à lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$.
5. A região interior ao maior laço da limaçon $r = 2 - 4\,\text{sen}\,\theta$ e exterior ao menor laço.
6. A região interior à limaçon $r = 3 - \cos\theta$ e exterior à circunferência $r = 5\cos\theta$.

Nos Exercícios de 7 a 12, encontre o volume do sólido dado.

7. O sólido limitado pelo elipsóide $z^2 + 9r^2 = 9$.
8. O sólido recortado da esfera $z^2 + r^2 = 4$ pelo cilindro $r = 1$.
9. O sólido recortado da esfera $z^2 + r^2 = 16$ pelo cilindro $r = 4\cos\theta$.
10. O sólido sobre o plano polar limitado pelo cone $z = 2r$ e o cilindro $r = 1 - \cos\theta$.
11. O sólido limitado pelo parabolóide $z = 4 - r^2$, o cilindro $r = 1$ e o plano polar.
12. O sólido situado acima do parabolóide $z = r^2$ e abaixo do plano $z = 2r\,\text{sen}\,\theta$.

Nos Exercícios de 13 a 19, encontre a massa e o centro de massa da lâmina dada, se a densidade de área é a indicada. A massa é medida em quilogramas e a distância em metros.

13. Uma lâmina na forma da região do Exercício 1. A densidade de área varia com a distância ao pólo.
14. Uma lâmina na forma da região do Exercício 2. A densidade de área varia com a distância ao pólo.
15. Uma lâmina na forma da região dentro da limaçon $r = 2 - \cos\theta$. A densidade de área varia com a distância ao pólo.
16. Uma lâmina na forma da região limitada pela limaçon $r = 2 + \cos\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, e o eixo polar. A densidade de área em qualquer ponto é $k\,\text{sen}\,\theta$ kg/m^2.
17. A lâmina do Exercício 16. A densidade de área em qualquer ponto é $kr\,\text{sen}\,\theta$ kg/m^2.

18. Uma lâmina na forma da região do Exercício 6. A densidade de área varia com a distância ao pólo.

19. Uma lâmina na forma da região do Exercício 5. A densidade de área varia com a distância ao pólo.

Nos Exercícios de 20 a 25, encontre o momento de inércia da lâmina dada em relação ao eixo ou ponto indicado, conforme a densidade de área for indicada. A massa é medida em quilogramas e a distância em metros.

20. Uma lâmina na forma de uma região limitada pela circunferência $r = \operatorname{sen}\theta$; em relação ao eixo $\frac{1}{2}\pi$. A densidade de área em qualquer ponto é k kg/m^2.

21. A lâmina do Exercício 20 em relação ao eixo polar. A densidade de área da lâmina em qualquer ponto é k kg/m^2.

22. Uma lâmina na forma da região limitada pela cardióide $r = a(1 - \cos\theta)$ em relação ao pólo. A densidade de área em qualquer ponto é k kg/m^2.

23. Uma lâmina na forma da região limitada pela cardióide $r = a(1 + \cos\theta)$ e a circunferência $r = 2a\cos\theta$ em relação ao pólo. A densidade de área em qualquer ponto é k kg/m^2.

24. Uma lâmina na forma da região limitada pela lemniscata $r^2 = a^2\cos 2\theta$ em relação ao eixo polar. A densidade de área varia com a distância ao pólo.

25. Uma lâmina tem a forma da região limitada por um laço da lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$. Encontre o raio de giração da lâmina em relação a um eixo perpendicular ao plano polar no pólo.

26. Uma lâmina tem a forma de região limitada pela circunferência $r = 4$ e a densidade de área varia com a distância ao pólo. Encontre o raio de giração da lâmina em relação a um eixo perpendicular ao plano polar, no pólo.

27. Calcule, por coordenadas polares, a integral dupla

$$\iint_R e^{x^2+y^2}\, dA$$

onde R é a região limitada pelas circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$.

28. Calcule, por coordenadas polares, a integral dupla

$$\iint_R \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dA$$

onde R é a região no primeiro quadrante limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e pelos eixos coordenados.

29. As integrais duplas impróprias são discutidas em cálculo avançado e $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy$ é definida por

$$\lim_{h\to+\infty} \int_0^h\int_0^h f(x, y)\, dx\, dy$$

Use esta definição para demonstrar que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, fazendo o seguinte: (a) Demonstre que a integral dupla no Exemplo 5, pode ser expressa como $\left[\int_0^a e^{-x^2}\, dx\right]^2$; (b) como $\left[\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\right]^2 = \lim_{a\to+\infty}\left[\int_0^a e^{-x^2}\, dx\right]^2$ use o resultado do Exemplo 5, para obter o resultado desejado.

18.5 ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE

A integral dupla pode ser utilizada para determinarmos a área da porção da superfície $z = f(x, y)$ situada sobre uma região fechada R no plano xy. Para mostrarmos isto, devemos inicialmente definir o que significa a medida desta área e depois obter uma fórmula para que a calcule. Suponhamos que f e suas derivadas parciais primeiras sejam contínuas em R e suponhamos também que $f(x, y) > 0$ em R. Seja Δ uma partição de R em n sub-regiões retangulares. O i-ésimo retângulo tem dimensões de medidas $\Delta_i x$ e $\Delta_i y$ e uma área de medida $\Delta_i A$. Seja (ξ_i, γ_i) um ponto qualquer no i-ésimo retângulo, e o ponto $Q(\xi_i, \gamma_i, f(\xi_i, \gamma_i))$ na superfície. Consideremos o plano tangente à superfície. Projetamos verticalmente para cima o i-ésimo retângulo sobre o plano tangente e seja $\Delta_i\sigma$ a medida da área desta projeção. A Figura 18.5.1 mostra a região R, a porção da superfície sobre R, a i-ésima sub-região retangular de R e a projeção do i-ésimo retângulo sobre o plano tangente à superfície em Q. O número $\Delta_i\sigma$ é uma aproximação da medida da área da parte da superfície que está sobre o i-ésimo retângulo. Como temos n destas partes, a soma

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i\sigma$$

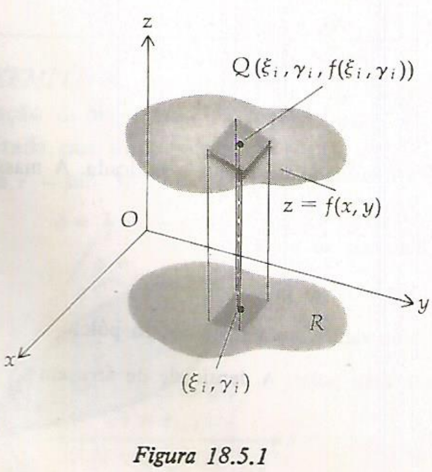

Figura 18.5.1