

1) Introduction et définitions

Je souhaite d'abord remercier Hugh Thomas pour avoir proposer ce projet et pour son soutien tout au long du stage, que ce soit pour le projet décrit ici ou mes recherches en parallèle. Comme on se servira de ce document pour des présentations avec une audience au parcours variable, il semble approprié de faire un rappel de notions élémentaires de théorie des groupes. On passe par les matrices pour introduire les concepts suivants, puisque nos groupes de monodromie seront exprimés sous forme matricielle plus tard.

1.1) Définition de groupe via $GL(n)$

Un groupe est un ensemble muni d'une opération qui a certaines propriétés. Celles qui nous intéressent ici sont:

- i) Il existe un inverse (par rapport à l'opération) pour chaque élément du groupe. C'est pour cette raison qu'on parle des matrices inversibles seulement.
- ii) Le groupe est stable sous son opération. Cette propriété est intéressante lorsqu'on parle d'une sous-structure, similaire à la stabilité d'un sous-espace vectoriel.

Les matrices inversibles de taille $n \times n$ munies du produit usuel de matrice forment un groupe, le groupe général linéaire $GL(n)$. Par souci de complétude, les autres propriétés de groupe sont (iii) l'associativité de l'opération et (iv) l'existence d'un élément neutre pour l'opération.

1.2) Définition de sous-groupes engendrés par des générateurs

De manière similaire aux espaces vectoriels engendrés par un certain nombre de vecteurs, on peut construire des sous-groupes engendrés par un certain nombre d'éléments. Le sous-groupe en question sera l'ensemble des produits des éléments entre eux. Par exemple, on peut prendre une matrice inversible M et regarder l'ensemble $\{M^z : z \in \mathbb{Z}\} = \langle M \rangle$ comme un sous-groupe de $GL(n)$. Dans ce cas-ci on parle d'un groupe *monogène*, puisqu'il n'a besoin que d'un seul générateur. On peut aussi prendre plusieurs générateurs (par exemple $\langle M_1, M_2, M_3 \rangle$), mais on essaie généralement de ne pas lister de générateurs redondants. Par exemple pour $\langle Id, -Id \rangle = \langle -Id \rangle$ on préfère noter seulement $\langle -Id \rangle$.

1.3) Définition du produit libre (avec amalgamation)

Pour deux groupes G et H , on notera $G^* = G - G \cap H$ ainsi que $H^* = H - G \cap H$ tout au long du texte. On définit rapidement le produit libre de deux groupes G et H comme le groupe suivant: $G * H = \{ \prod g_i h_i \mid g_i \in G^* \text{ et } h_i \in H^* \}$ tel qu'aucune séquence $\prod g_i h_i = \text{Id}$. Souvent, l'intersection $G \cap H$ est réduite à l'identité. Sinon, dans une séquence $\dots g_i a_i h_i \dots$ où les a_i sont des éléments de l'intersection, les a_i peuvent être absorbés d'un des deux côtés. On considère alors $g_i a_i \in G^*$ ou $a_i h_i \in H^*$. On parle alors de produit libre avec amalgamation. Bien qu'on perde l'unicité de l'expression, la séquence peut s'exprimer sous la forme $\prod g_i h_i$ sans problème.

1.4) Exemple de groupe de monodromie (extension analytique du logarithme)

Les groupes de matrice que l'on étudie proviennent de la monodromie, c'est-à-dire l'étude du comportement d'une fonction autour de singularités. On présente brièvement la notion de groupe de monodromie en passant par un exemple classique. Le logarithme réel est une fonction très utile qui pose un problème intéressant lorsqu'on tente de l'étendre aux complexes. Lorsqu'on effectue l'extension analytique de la fonction définie sur la demi-droite positive réelle en tournant autour de 0, lorsqu'on revient sur la droite réelle, la fonction n'est plus exactement la même. En fait, pour tout $r \in \mathbb{R}$: $r > 0$, si r' est le point r après une rotation anti-horaire autour de 0, $\log(r') = \log(r) + 2\pi i$. De manière analogue, après une rotation horaire on obtient $\log(r) - 2\pi i$. On a alors clairement que si on fait z tours anti-horaire autour de 0, on obtient $\log(r) + 2\pi i z$.

On peut donc facilement associer à un chemin dans le plan complexe un entier $z \in \mathbb{Z}$, qui correspond à l'ajustement qu'il faut faire lorsqu'on regarde la fonction logarithme à ce point. On dit donc que le groupe de monodromie à 0 de l'extension du logarithme sur les complexes est isomorphe à \mathbb{Z} .

Les matrices qu'on étudie engendrent des groupes qui encodent de l'information par rapport aux singularités de fonctions de la même manière que \mathbb{Z} décrit le comportement autour de la singularité 0 de cette fonction. Particulièrement, ces fonctions sont des solutions d'équations différentielles, mais ce n'est pas ce qui nous intéresse ici. On se concentre plutôt sur l'étude de ces matrices avec une perspective plus algébrique, en utilisant principalement l'algèbre linéaire pour pouvoir les catégoriser.

2) Lemme Ping-Pong

2.1) Lemme et preuve

On présente ici l'argument principal utilisé pour catégoriser les paires de matrices (T, R) selon si leur groupe engendré $\langle T, R \rangle$ est le produit libre (avec ou sans amalgamation) des groupes monogènes $\langle T \rangle$ et $\langle R \rangle$. Soit Ω un ensemble, G et H deux groupes agissant sur Ω . Si les 4 hypothèses suivantes sont vérifiées, on a $\langle G, H \rangle = G * H$.

- i) X et Y sont deux sous-ensembles disjoints de Ω ;
- ii) X et Y sont stables sous $G \cap H$
- iii) $(G^*)X \subseteq Y$
- iv) $(H^*)Y \subseteq X$

Preuve: Supposons pour une contradiction que $\langle G, H \rangle \neq G * H$. Donc il existe une séquence $g_1 h_1 g_2 h_2 \dots g_n h_n = \text{Id}$. On conjugue par un élément $g \in G$ pour obtenir: $g^{-1} g_1 h_1 g_2 h_2 \dots g_n h_n g = g^{-1} g = \text{Id}$. Posons $x \in X$. On sait donc que $g^{-1} g_1 h_1 g_2 h_2 \dots g_n h_n g(x) = x$. Par hypothèse $g(x) \in Y$, on pose donc $g(x) = y_n$. Puis, $g_n(y_n) = x_n \in X$. Puis $h_{n-1}(x_n) = y_{n-1} \in Y$. On alterne entre X et Y (d'où le nom ping-pong) jusqu'à ce qu'on trouve $(g^{-1} g_1)(x_1) \in Y$, ce qui est une contradiction car $x \notin Y$. On peut alors conclure que $\langle G, H \rangle = G * H$.

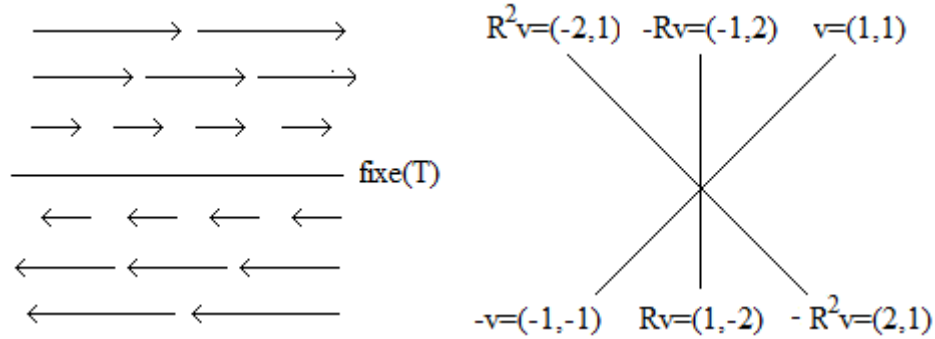
2.2) Exemple 2d et représentation géométrique

On commence les applications du lemme avec un cas à deux dimensions pour bien comprendre géométriquement R et T . L'exemple est tiré de l'article de Thomas et Brav, *Thin monodromy in $Sp(4)$* .

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note que $R^3 = \text{Id}$, donc que $\langle R \rangle \cong \mathbb{Z}_3$. On voit aussi assez facilement, avec l'expression de T^n , que $\langle T \rangle \cong \mathbb{Z}$. On souhaite appliquer le lemme sur $\langle R \rangle$ et $\langle T \rangle$, et les applications agissent clairement sur le plan \mathbb{Q}^2 . Comme R et T sont linéaires, elles envoient les droites sur des droites. Particulièrement, elles envoient des demi-droites sur des demi-droites. On construit donc des *tables de ping-pong* (X et Y du lemme) comme des familles de demi-droites. On appelle l'ensemble des demi-droites entre deux demi-droites le cône engendré par ces demi-droites (ou par les vecteurs qui les génèrent). Formellement, on parle des combinaisons linéaires positives des vecteurs qui génèrent les droites. On note $\mathbb{Q}_+ = \{q > 0\}$, et pour deux vecteurs v et w on peut donc écrire le cône ainsi: $C = v\mathbb{Q}_+ + w\mathbb{Q}_+$.

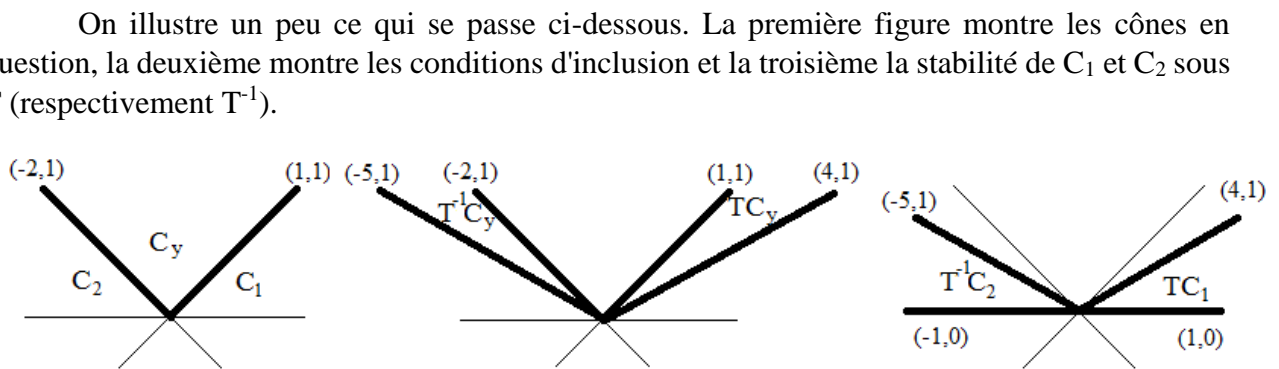
R est *presque* une rotation, c'est-à-dire que ses valeurs propres sont $e^{\pm i\theta}$ avec $\theta=2\pi/3$ dans ce cas. T est une transvection, c'est-à-dire que l'application translate tous les points dans la même direction, avec un facteur dépendant de la distance entre le point et la droite fixe de T (ici la droite fixe est $y=0$ et la direction est $(1,0)$). La première figure montre l'effet de T sur le plan, la deuxième l'effet de R sur le vecteur $v=(1,1)$, avec lequel on va construire la table de ping-pong.



On pose $w=-R^2v$, puis $C = v\mathbb{Q}_+ + w\mathbb{Q}_+$. On vérifie ensuite les hypothèses du lemme ping-pong pour les tables $X=C\cup -C$ et $Y=RX\cup R^2X=\pm((-2,1)\mathbb{Q}_+ + (1,1)\mathbb{Q}_+)$.

- i) On voit que $X\cap Y = \emptyset$ simplement en observant que $Y=\mathbb{Q}^2-X$.
- ii) Comme $G\cap H=\{\text{Id}\}$, il va sans dire que X et Y sont stables sous $G\cap H$.
- iii) On a construit Y explicitement de manière à ce que $\langle R \rangle^*: X \rightarrow Y$.

iv) Quelques tests sont nécessaires. Tout élément de $\langle T \rangle^*$ est de la forme T^z avec $z \neq 0$. On sépare ces cas en T^n et T^{-n} . On construit un cône C_1 stable sous T tel que $TC_y \subseteq C_1$ ainsi qu'un cône C_2 stable sous T^{-1} tel que $T^{-1}C_y \subseteq C_2$. Les cônes C_1 et C_2 sont délimités par la direction de T , c'est-à-dire $\pm(1,0)$, ainsi que les images $T((-2,1))$ et $T^{-1}((1,1))$.



Les résultats sont tous transférables sur la deuxième moitié du plan par symétrie, on a donc vérifié les 4 hypothèses du lemme. On conclue que $\langle R, T \rangle \cong \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}$.

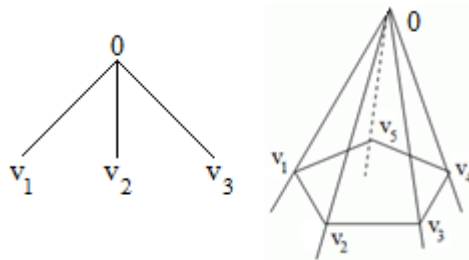
3) Tests d'hypothèses en 4d

3.1) Différences avec le cas 2d

Les groupes qui nous intéressent vraiment sont engendrés par des matrices symplectiques. Sans entrer dans les détails, le groupe symplectique $Sp(2n)$ est un sous-groupe de $GL(2n)$ qui ne peut être que de dimension paire. Donc le saut au-delà des exemples simples à deux dimensions vers des cas plus intéressants nous amène directement en quatre dimensions. Naturellement, certaines différences fondamentales se présentent lorsqu'on tente de construire les tables de ping-pong.

Premièrement, on note qu'en deux dimensions un cône propre engendré par une liste de vecteurs peut toujours être décrit par seulement 2 vecteurs. En effet, si on ajoute un troisième vecteur à un cône de 2 vecteurs, on a deux cas; soit le nouveau vecteur est déjà dans le cône auquel cas l'ajouter à l'ensemble générateur ne modifie pas le cône, soit il est à l'extérieur. Dans ce cas, un ancien vecteur générateur devient superflu et on peut l'enlever. Comme on souhaite avoir deux parties disjointes, on exclue le cône 'impropre' \mathbb{Q}^2 lui-même, qui est engendré par exemple par e_1 , e_2 et $-e_1$. Par contre, dès la troisième dimension, on peut avoir un cône défini par une infinité de vecteur sans qu'aucun ne soit redondant.

Les figures suivantes mettent en image l'argument précédent : dans la première figure $(v_1\mathbb{Q}_++v_2\mathbb{Q}_++v_3\mathbb{Q}_+=v_1\mathbb{Q}_++v_3\mathbb{Q}_+$ alors que $(v_1\mathbb{Q}_++v_3\mathbb{Q}_+)+v_2\mathbb{Q}_+=v_1\mathbb{Q}_++v_3\mathbb{Q}_+$. La deuxième figure donne un exemple de cône à 5 vecteurs non-redondants en trois dimensions.



La notation devenant lourde, on pose $C_+ = (\mathbb{Q}_+)\text{Id}$, avec l'identité de la dimension voulue. Ainsi, pour une liste de vecteur v_1, v_2, \dots, v_n , on peut poser la matrice $M = (v_1|v_2|\dots|v_n)$ où chaque colonne est un vecteur pour obtenir une notation concise : le cône engendré par v_1, v_2, \dots, v_n est simplement MC_+ .

On a remarqué dans le cas 2d que toutes les vérifications d'hypothèse sur un cône MC_+ impliquait les mêmes conclusions sur $-MC_+$. On n'a donc pas à les traiter séparément. Les cônes seront donc les combinaisons linéaires positives ou négatives (mais non-mixtes!) d'une liste de vecteurs potentiellement longue. On les note simplement $MC = MC_+ \cup (-MC_+)$.

Deuxièmement, on doit comprendre qu'on a implicitement utilisé la réflexion par rapport à $y=0$ dans l'exemple 2d. Cette réflexion permet d'inclure les puissances négatives de T . On peut la voir comme une deuxième symétrie (la première étant celle entre MC_+ et $-MC_+$). En 4d, ce choix doit être explicite et ne peut pas être une réflexion à proprement dit. Ce que l'on veut, c'est avoir une application B avec trois propriétés importantes de la réflexion: $B^2=Id$, $BRB=R^{-1}$ et $BTB=T^{-1}$.

Pour trouver un tel B , on pose simplement $B=(x_{ij})$ une matrice de variable, puis on traite les matrices 4×4 comme un espace vectoriel de dimension 16 pour calculer le noyau du système de 32 équations consistant des 16 entrées de $RB-BR^{-1}$ et de $TB-BT^{-1}$. Rien ne force l'existence ni l'unicité d'une telle application, mais dans tous les cas qu'on a étudié le noyau est toujours de dimension 1, donc l'application existe et est unique au signe près, puisqu'un seul choix (et son opposé) permet de satisfaire $B^2=Id$.

La dernière différence importante est qu'il faut définir les tables différemment. Ça découle directement du premier point; alors qu'on avait défini le cône C au complet pour ensuite le diviser en deux cônes C_1 et C_2 , on définit maintenant les deux cônes séparément puis on pose X comme l'union de ces deux cônes (qui n'est plus un cône lui-même). Pour continuer l'analogie avec notre cas à deux dimensions, MC est analogue à C_1 et BMC à C_2 . On pose ensuite:

$$\begin{aligned} X &= MC \cup BMC \\ Y &= \bigcup_{R^i \notin \langle T \rangle} R^i X \end{aligned}$$

3.2) Traduction en algèbre linéaire

On essaie en général d'utiliser seulement 4 vecteurs par cône. Dans ce cas, on a que M est une matrice carrée inversible (car libre au sens des cônes implique libre au sens des espaces vectoriels lorsqu'on parle de 4 vecteurs). Ça nous permet de traduire tous les tests d'hypothèses du lemme ping-pong en test relativement simples mais multiples d'algèbre linéaire.

Proposition 1: Si pour tout i,j $(B^{-1}A)_{ij} \geq 0$ ou $(B^{-1}A)_{ij} \leq 0$, alors $AC \subseteq BC$.

Preuve heuristique: On applique simplement B^{-1} de chaque côté de l'inégalité pour obtenir le test voulu.

Proposition 2: S'il existe $n,m | (B^{-1}A)_{nj} \geq 0$ et $(B^{-1}A)_{mj} \leq 0$, alors $AC \cap BC = \emptyset$.

Preuve heuristique: En 2d, avoir une ligne positive et une négative implique que tout vecteur est dans le même quadrant, soit celui où $x \geq 0$ et $y \leq 0$, soit celui où $y \geq 0$ et $x \leq 0$. Particulièrement, l'intersection avec les quadrants où tout est positif (respectivement où tout est négatif) est nul. On généralise aux octants en 3d puis aux orthant en dimension quelconque avec le même argument.

On fait maintenant la liste de toutes les hypothèses qu'il faut vérifier :

i) On n'a pas $Y = Q^4 - X$. Il faut donc vérifier qu'on a bien une intersection nulle pour les deux cônes (MC et BMC) pour chaque puissance de R hors de l'intersection avec $\langle T \rangle$.

ii) Dans nos cas $\langle T \rangle \cap \langle R \rangle = \{Id\}$ ou $\langle T \rangle \cap \langle R \rangle = \{\pm Id\}$, la stabilité est donc toujours trivialement vérifiée.

iii) On construit encore Y explicitement pour satisfaire cette hypothèse.

iv) Encore une fois on a plusieurs tests à faire. Par contre, on n'a pas à construire de nouveau cône stable sous T ou T^{-1} ; c'est directement MC et BMC qui permettent la construction cette fois-ci. La logique est la même: on vérifie que tous les cônes de Y sont envoyés sur MC par T et que MC est stable sous T, puis on vérifie que tous les cônes de Y sont envoyés sur BMC par T^{-1} et que BMC est stable sous T^{-1} .

Les tests à réaliser sont donc, pour $R^i \notin \langle T \rangle$ et $j \in \{0,1\}$:

- $R^i B^j MC \cap MC = 0$
- $R^i B^j MC \cap BMC = 0$
- $TR^i B^j MC \subseteq MC$
- $TMC \subseteq MC$
- $T^{-1} R^i B^j MC \subseteq BMC$
- $T^{-1} BMC \subseteq BMC$

Ces tests peuvent tous être vérifiés avec les deux propositions présentées plus haut. Tout ce qu'il reste à faire est de construire M de manière à satisfaire ces tests, ce qui dépendra bien entendu de la paire de matrices (R,T).

4) Cas spécifiques

4.1) Cas de base de l'article de Brav et Thomas

L'article de Brav et Thomas analyse une famille de matrice indexée par deux entiers d et k , en relation avec une matrice T fixe.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ d & d & 1 & 1 \\ 0 & -k & -1 & 1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $R=TU$ puis on cherche à déterminer si $\langle T, R(d,k) \rangle = \langle T \rangle * \langle R(d,k) \rangle$ en appliquant le lemme ping-pong. On regarde d'abord le cas où $d=k=5$, pour lequel les tests sont plutôt simples. Si on diagonalise $R(5,5)$ sur \mathbb{C} , on obtient:

$$R_d(5, 5) = \begin{pmatrix} e^{2i\pi/5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2i\pi/5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{4i\pi/5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-4i\pi/5} \end{pmatrix}$$

On voit facilement que $\langle R \rangle \cong \mathbb{Z}_5$. On a aussi que R induit une décomposition de \mathbb{Q}^4 en deux plans (en somme directe) telle que R restreinte à chacun des plans agit comme une rotation d'angle $2\pi/5$ et $4\pi/5$ respectivement car on a deux blocs diagonalisables avec $e^{\pm i\theta}$ comme valeurs propres. On a donc que B restreinte à chacun des plans est littéralement une réflexion par rapport à l'espace fixe de T dans le plan. Cette perspective géométrique nous permet de construire plus intuitivement des cônes à tester, et l'application B elle-même. La méthode utilisée par Brav et Thomas est par contre plus facile à généraliser aux autres cas, c'est pourquoi on la privilégie. On explique ici l'intuition derrière cette méthode pour la présenter formellement ensuite.

Si on sait qu'un certain vecteur v est dans le cône principal qu'on est en train de construire, on sait que pour $R^i \notin \langle T \rangle$, $R^i v$ est dans la deuxième table de ping-pong Y , et que pour $k \in \mathbb{Z}$, $T^k R^i v$ retourne dans X . On peut tester dans quel cône ($\pm MC$ ou $\pm BMC$) est ce vecteur pour un i et un k donné, puis répéter le processus, ce qui nous donne une liste de vecteurs qui doivent être dans MC : $\{(T^k R^i v)^n\}_{n>0}$. Ce processus est par contre incomplet; alors qu'il est utile pour trouver des contre-exemples, si tout fonctionne on ne peut pas tirer beaucoup de conclusion puisqu'on ne prend toujours qu'un nombre fini de vecteurs. Pour étendre la portée de notre construction, on prendra donc le logarithme de $T^k R^i$. Dans les cas de l'article de Brav et Thomas, on utilise $T^{-1}R$. Comme les matrices dont on parle sont nilpotentes de degré au plus 4, on peut définir $\log(M) := (M - \text{Id}) - (M - \text{Id})^2/2 + (M - \text{Id})^3/3$. On a donc l'application $P = \log(T^{-1}R)$, qui envoie MC dans MC . On construit alors $M = (v | Pv | P^2 v | P^3 v)$. On peut tester plusieurs v , et dans nos cas, un éventail de choix sont vérifiés, avec en plein centre $v = (0, 1, d/12 - k/2, 0)$. Pour $d=k=5$, tous les tests décrits plus haut (section 3.2)) sont vérifiés directement. On conclut donc que $\langle T, R(5,5) \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_5$.

4.2) Autres cas de l'article

Pour $d=2$ et $k=4$, on a que $R^4 = -Id$. On veut alors appliquer le lemme sur $\langle T, -Id \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ et $\langle R \rangle \cong \mathbb{Z}_8$. L'intersection n'est pas limitée à $\{Id\}$, mais bien à $\{\pm Id\}$. Les tests décrits plus haut sont tous vérifiés, mais il faut également que X et Y soit stables sous $\{\pm Id\}$, ce qui est bien entendu trivial étant donné que les tables sont définies comme l'union de cône positif et négatif. On conclue donc que le groupe engendré par T et R est isomorphe au produit libre avec amalgamation suivant: $\langle T, R(2,4) \rangle \cong (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2) * \mathbb{Z}_8$. Le cas $d=1$ et $k=4$ est vérifié de la même manière, mais $R^6 = -Id$. On a donc $\langle T, R(1,4) \rangle \cong (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2) * \mathbb{Z}_{12}$.

Pour le cas $d=16$ et $k=8$, $\langle R \rangle \cong \mathbb{Z}$. Il faudrait donc vérifier une infinité de puissance de R . On remarque que R n'a que -1 comme valeur propre, donc que $(-R - Id)$ est nilpotente. On a donc:

$$\begin{aligned} R^i &= (-1)^i (-R)^i = (-1)^i (e^{\log(-R)})^i \\ R^i &= (-1)^i \exp(i \cdot \log(-R)) \\ R^i &= (-1)^i \sum_{k=4} \frac{(i \cdot \log(-R))^k}{k!} \\ \Rightarrow \forall A, B \in GL(n) \exists A_i : AR^i B &= (-1)^i (i^3 A_3 + i^2 A_2 + i A_1 + Id) \end{aligned}$$

Cette expression polynômiale est suffisante pour faire les tests décrits en 3.2). De manière similaire à un calcul de limite à l'infini d'un polynôme, on montre qu'il existe un N tel que pour $n \geq N$, A_3 domine le polynôme, puis on vérifie les propriétés voulues sur A_3 ainsi que sur chacune des matrices calculées explicitement pour $n < M$. Les tests sont tous vérifiés: on peut donc conclure que $\langle T, R(16,8) \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, en notant que l'amalgamation est triviale.

Pour le cas $d=12$ et $k=7$, on a encore $\langle R \rangle \cong \mathbb{Z}$ mais on n'a pas seulement -1 comme valeur propre. L'argument précédent doit être raffiné. On note que $R^6 - Id$ et $\log(R^6 - Id)$ sont nilpotentes, de degré 4 et 2 respectivement. On pose donc $i = 6n + j$, avec $j \leq 6$, puis on réduit l'infinité de matrices à tester à 6 matrices seulement, c'est-à-dire celles-ci:

$$R^{6n+j} = R^j R^{6n} = R^j (e^{\log(R^6)})^n = R^j (Id + n \log(R^6)) = R^j + n R^j \log(R^6)$$

Les tests sont un peu différents puisqu'on ne peut pas regarder de terme dominant; pour le test d'intersection nulle il faut tester les deux matrices $(B^{-1}(R^j)A \text{ et } B^{-1}(nR^j \log(R^6))A)$ indépendamment mais vérifier que les *mêmes* lignes sont non-négatives et non-positives. De manière analogue pour le test d'inclusion, il faut que toutes les entrées soient de même signe dans les deux matrices. Les tests sont encore une fois tous vérifiés, on conclue donc que $\langle T, R(12,7) \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Les deux derniers cas pour lesquelles on peut trouver une table de ping-pong sont vérifiés de la même manière. Pour $d=8$ et $k=6$, on a $R^4 - Id$ nilpotente donc on exprime R^i comme R^{4n+j} avec $j \leq 4$. Pour $d=4$ et $k=5$, on a $-R^3 - Id$ nilpotente, donc on exprime R^i comme R^{3n+j} avec $j \leq 3$. Les tests sont les mêmes que pour $R(12,7)$ et sont tous vérifiés, donc peut donc conclure que $\langle T, R(8,6) \rangle \cong \langle T, R(4,5) \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

4.3) Cas arithmétiques de l'article

Les cas de l'article de Brav et Thomas pour lesquelles on ne peut construire de table ont une preuve simple et élégante: on donne une relation qu'on a explicitement identifiée dans le groupe. Par exemple, pour $d=1$ et $k=2$, on a $(RT)^8 = \text{Id}$. Il suit directement que le groupe engendré par R et T n'est pas un produit libre. Cette approche est par contre plutôt aléatoire donné un cas quelconque. Trouver la relation en question, alors qu'elle est potentiellement inexistante ne semble pas la méthode idéale pour traiter une multitude de cas inconnus. On propose alors une alternative constructive: comme expliqué en 3.3), donné un certain vecteur qu'on sait être dans le cône principal, on peut obtenir une liste de vecteurs étant obligatoirement dans le cône avec une construction plutôt simple.

Tableau famille (d,k) Brav et Thomas

(d,k)	Division en produit libre	Relation
(5,5)	$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_5$	
(2,4)	$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2) * \mathbb{Z}_8$	
(1,4)	$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2) * \mathbb{Z}_{12}$	
(16,8)	$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$	
(12,7)	$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$	
(8,6)	$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$	
(4,5)	$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$	
(2,3)		$(R^6 T)^2 (R^6 T^{-1})^2$
(1,2)		$(RT)^8$
(6,5)		$(R^6 T)^2 (R^6 T^{-1})^2$
(3,4)		$(R^3 T)^2 (R^3 T^{-1})^2$
(1,3)		$(R^2 T)^{12}$
(4,4)		?
(9,6)		?

On envoie ce premier vecteur dans Y avec une puissance de R , puis on le ramène dans X avec une puissance de T . Il ne reste maintenant qu'à trouver un vecteur qui doit être dans X . Le candidat parfait: la direction v de la transvection T . Si on regarde l'effet de T sur les droites plutôt que les points, on peut considérer que T^∞ envoie l'espace entier sur la droite $v\mathbb{Q}$. Les hypothèses du lemme nous oblige donc à inclure cette droite dans X .

4.4) Cas présenté par van Straten

Le principal cas exploré cet été pour lequel on a développé ces outils est un cas présenté par Duco van Straten. Les matrices sont les suivantes:

$$T_{vs} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -17 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_{vs} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On a que $\langle T \rangle \cong \langle R \rangle \cong \mathbb{Z}$, et on souhaite décrire $\langle T, R \rangle$. On aimerait utiliser le lemme ping-pong, mais c'est impossible. Si on tente de construire une table de la même manière que dans la famille (d,k) – c'est-à-dire en ayant une séparation de X en deux parties X_1 et X_2 telle que X_1 est stable pour T et X_2 est stable pour T^{-1} – on arrive à une contradiction très rapidement avec l'argument présenté précédemment. Puisqu'on doit avoir $T^m(\pm TR^n v) \in X$ pour tout $m > 0$ et que X_1

est stable pour T , on a que $\pm TR^n v \in X_1$, c'est-à-dire que $TR^n v$ ou $-TR^n v$ est dans le cône principal MC. On crée donc deux listes potentielles de vecteurs obligatoirement dans MC: $[v, TRv]$ et $[v, -TRv]$. On vérifie ensuite l'hypothèse d'intersection nulle entre X et Y , particulièrement entre MC et $R^i MC$ pour tout $i \neq 0$. Ici, il est important de ne pas oublier les i négatifs. Il y a déjà un problème avec la première liste, on la laisse donc tomber.

On étend la seconde en appliquant $\pm TR^2$ à chaque vecteur dans la liste pour obtenir $[v, TR^2 v, -TRv, -TR^2 TRv]$ et $[v, -TR^2 v, -TRv, TR^2 TRv]$. Les deux sont valides, mais lorsqu'on applique $\pm TR^3$, les quatre listes potentielles entrent en contradiction avec l'hypothèse qu'on a besoin pour appliquer le lemme ping-pong. Donc aucune table de cette forme n'existe.

Mais comme ici T_{vs} n'est pas une transvection à proprement dit, on peut s'imaginer qu'une table (X, Y) répond aux hypothèses sans que X se divise en X_1 et X_2 stables sous T et T^{-1} . T pourrait très bien envoyer des éléments de MC dans BMC par exemple, et bien que la construction soit différente que celle de l'article, on rappelle qu'on veut simplement que $T^{\pm 1} Y \subseteq X$ et que X soit stable sous T . La division en puissance positive et négative était utile mais non nécessaire. On veut alors vérifier qu'aucune table n'existe sans se limiter au modèle qu'on a utilisé pour les autres cas.

On pourrait appliquer un argument presque identique, mais en considérant les 4 listes potentielles à chaque fois qu'on itère une liste. Ce n'est par contre pas nécessaire ici puisque T^2 est vraiment une transvection. On a déjà des problèmes avec les puissances paires, ce qui est suffisant pour montrer l'inexistence d'une table de ping-pong qui répond aux hypothèses. En effet, dès trois itérations notre liste de vecteurs ne peut répondre aux hypothèses.

5) Conclusion

On a donc développé un processus quasi-algorithmique pour traiter des paires de matrices symplectiques (R, T) systématiquement de façon à savoir s'il est possible d'appliquer l'argument ping-pong pour décrire $\langle R, T \rangle$. Ce processus a aussi l'avantage de nous donner des listes de vecteurs qui peuvent potentiellement construire une table telle que voulue. La vérification d'hypothèse elle-même est complètement algorithmique, en passant par les quelques tests d'algèbre linéaire.

Pour le cas de van Straten qui orientait ce développement, on a montré l'impossibilité d'appliquer l'argument. Par contre, comme ça ne semblait pas très pertinent, on s'est réservé d'étendre les calculs ici. Plusieurs cas provenant de la géométrie ou d'équations différentielles (tout comme la famille (d, k) et (T_{vs}, R_{vs})) peuvent être traités avec cette méthode.

RÉFÉRENCES

C. Brav & H. Thomas, "Thin monodromy in $Sp(4)$ " *Compositio Mathematica*(vol 150 no 03), 2012

Hugh Thomas, *Communications personnelles*

Duco Van Straten, *Communications personnelles* (pour le cas (T_{vs}, R_{vs}))

Clara Löh, *Geometric group theory, an introduction*, 2011