COURS 17, VERSION PRÉLIMINAIRE

Version du 27 mars 2025.

Rappel. La dernière fois, j'ai mentionné une conséquence énumérative de la correspondance de Robinson–Schensted. J'ai donné la formule en termes des longueurs des équerres pour le nombre de tableaux de Young standard de forme λ.

Nous avons regardé la variante de la correspondance RS où on remplace une permutation par un mot composé de l'alphabète $\{1, \ldots, n\}$.

J'ai rappelé la définition du jeu de taquin. J'ai expliqué la rectification d'un tableau semistandard de forme λ/μ pour produire un tableau for forme droite. Le "premier théorème fondamental du jeu de taquin" dit que cette rectification ne dépend pas de la manière que nous faisons la rectification. (La démonstration est toujours à venir. Nous avancerons dans ce sens aujourd'hui.)

Cela nous a permi de définir un produit associatif sur les tableaux de forme droite.

Nous avons vu comment on peut calculer l'insertion par lignes en utilisant le jeu de taquin. Ça nous a aussi suggéré une façon de définir l'insertion par colonnes.

3.3. **Jeu de taquin, *suite*.** Il y a aussi une notion de "glissement jdt inverse." Soit T un tableau (semi)standard de forme λ/μ. On choisit une case minimale dans le complément de λ. Il s'agit donc d'une case qu'on pourrait ajouter à λ pour encore avoir le diagramme de Ferrers d'une partition. On veut faire un glissmenet vers cette case. Là, c'est les voisins d'en bas et à gauche qu'on regarde, et on déplace dans la case vide le plus grand. (Avec, encore, une préférence pour le voisin vertical, si les deux sont égaux.) On continue à remplir la case vide produite, jusqu'à ce qu'elle n'a plus de case voisine à gauche ou en bas remplie, et on arrête, avec une nouveau tableau de forme gauche, qui est encore (semi)standard.

Tout glissement peut être inversé par un glissement inverse, et vice versa.

Disons que deux tableaux sont "jeu de taquin équivalents" si on peut passer de l'un vers l'autre par une suite de glissements permis et de glissements inverses permis (qui peuvent être mélangés comme on le souhaite). Parmi les tableaux de taille deux, il y a deux classes d'équivalence. Une façon de lees définir est en terme du "mot de lecture." On lit les cases dans le sens conventionnel pour le français (par lignes, de gauche à droite sur chaque ligne, et du haut en bas). On remarque que les glissements de jeu de taquin ne changent pas le mot de lecture pour un remplissage de taille deux. Qui plus est, chaque tableau de taille deux peut être rectifié, ce qui donner forcément soit un rectangle vertical (avec mot de lecture 21) ou un rectange horizontal (avec mot de lecture 12). Donc, si deux tableaux de taille 2 ayant le même mot de lecture sont jeu de taquin équivalents.

3.4. **Équivalence duale.** L'équivalence duale est une des perspectives possible sur la combinatoire des tableaux. Elle nous permettra de démontrer le théorème fondamentale du jeu de taquin d'une manière que je trouve élégante. Je suis l'article de Haiman, "Dual equivalence with applications, including a conjecture of Proctor."

Pour l'étude de l'équivalence duale, nous nous restreignons aux tableaux standards.

Deux tableaux standards sont dits "dual équivalents" si après n'importe quelle suite de glissements et de glissements inverses (permis), ils gardent la même forme. Quand je dis "permis," je veux dire que si la forme est λ/μ, alors je fais un glissment jdt dans une case maximale de μ, ou bien un glissement inverse dans une case minimale du complément de λ. Et si à un moment donné, les formes deviennent différentes, alors les tableaux n'étaient pas dual équivalents, et j'arrête. Mais s'ils on toujours la même forme, ils sont dual équivalents.

3.4.1. *Les tableaux de taille deux.* Un tableau de forme gauche de taille deux est soit une rectangle 1×2 ou 2×1, ou bien est composé de deux cases non voisines. Un rectangle n'a qu'un seul remplissage standard. Deux cases non voisines ont deux remplissages standards différents (on met 1 dans une case et 2 dans l'autre) mais ces deux remplissages ne sont pas dual équivalents. Si on essaie de rectifier, un des remplissages finira comme un rectangle horizontal, et l'autre comme rectangle vertical : cela découle de nos observations sur les mots de lecture.