Rappel

$\pi \in S_n$ $\quad P(\pi)$ de forme λ

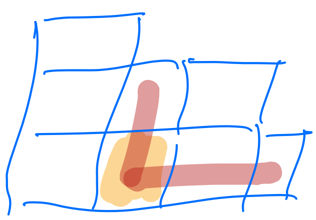
Th. de Greene explique λ en termes des suites croissantes et décroissantes.

(1) mot$(P(\pi))$ ✓

(2) changeait pas avec relations de Knuth

3.7 Formule pour f_λ

$\lambda \vdash n$ $\qquad f_\lambda = \dfrac{n!}{\prod_{(i,j)\in\lambda} h_{ij}}$



1			
4	2	1	
6	4	2	1

longueur.

$$f_\lambda = \frac{8!}{6\cdot 4\cdot 3\cdot 4\cdot 2}$$

Théorème: Frame–Robinson–Thrall

Dém. de Greene–Nijenhuis–Wilf

démonstration : $F(\lambda_1, \dots \lambda_m) = \dfrac{n!}{\prod_{(i,j)\in\lambda} h_{ij}}$

si $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m$

0 sinon.

Comment compter tableaux standards ?

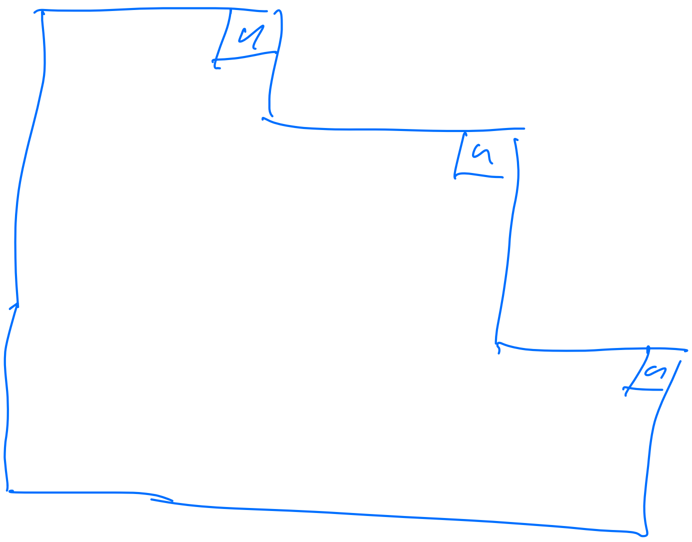
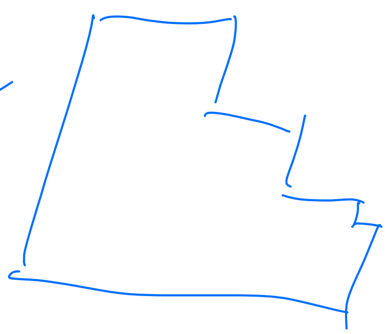
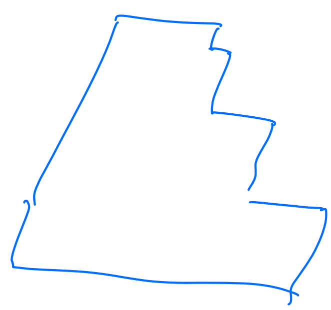
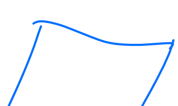
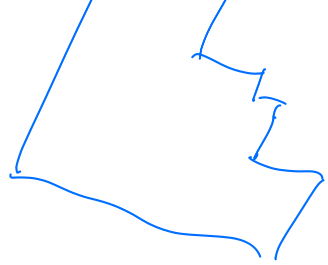


tableau () =

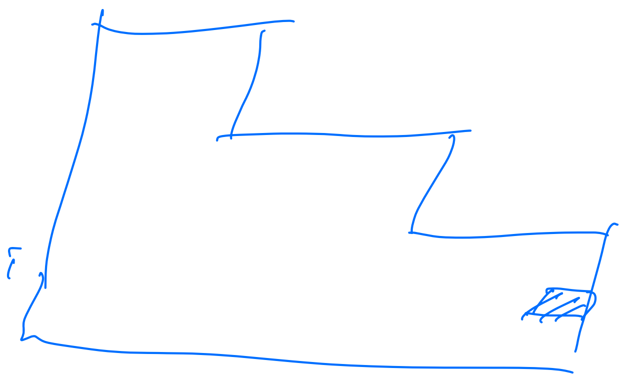
tableaux  + # tableaux 

+ # tabl. 



Définissons $F_i = F(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \lambda_{i+2}, \dots, \lambda_m)$.

F_i est nulle si il n'y a pas de case maximale dans la rangée i.



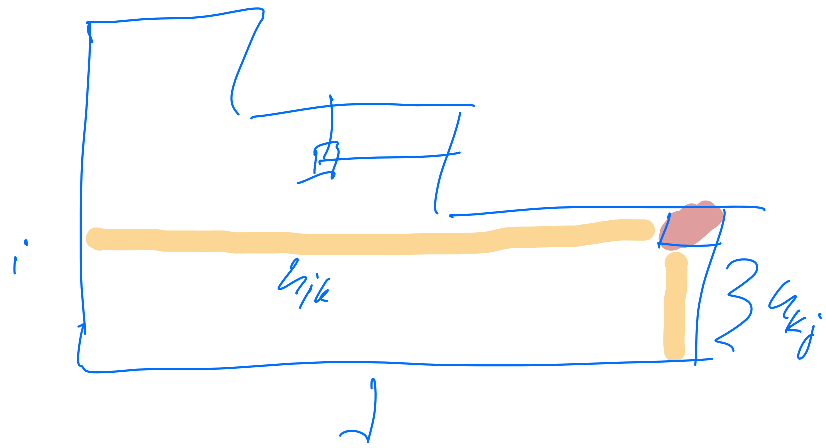
Donc ce qu'il faut démontrer c'est que

$$F = \sum_{i=1}^{m} F_i \qquad \left(= \sum_{\substack{(i,j) \\ \text{maximale}}} F_i \right)$$

La façon qu'on le fera c'est le définir une operation qui choisira une case maximale de λ.

Nous démontrerons que la probabilité que la case soit choisi dans la ligne i est F_i/F.

Simplifions F_i/F



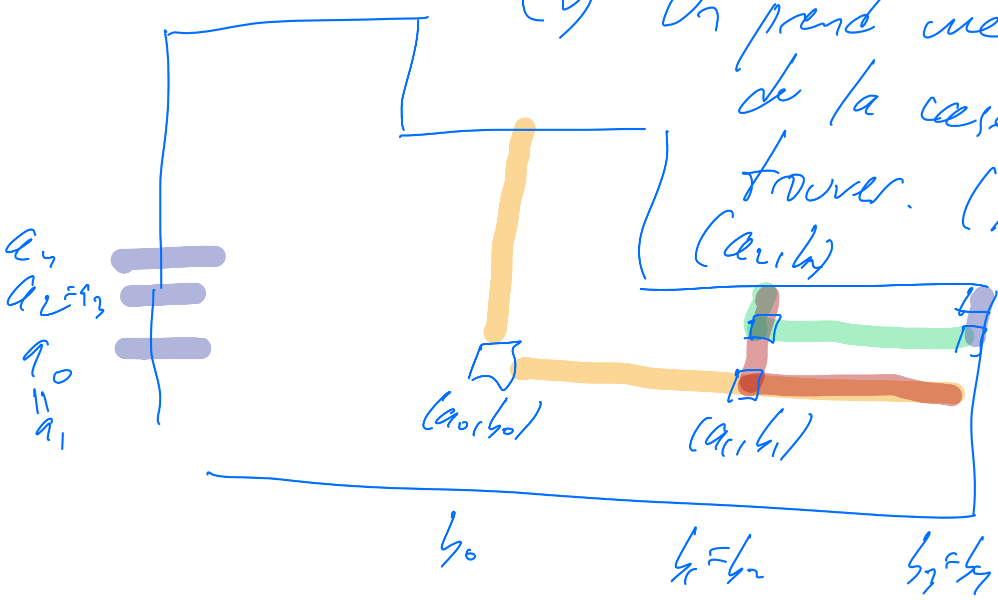
$$\frac{F_i}{F} = \frac{1}{n} \prod_{1\leq k<j} \frac{h_{ik}}{h_{ik}-1} \prod_{1\leq k<i} \frac{h_{kj}}{h_{kj}-1}$$

$$= \frac{1}{n} \prod_{1\leq k<j} \left(1+\frac{1}{h_{ik}-1}\right) \prod_{1\leq k<i} \left(1+\left(\frac{1}{h_{kj}-1}\right)\right)$$

Processus aléatoire

(1) On prend une case (a_0,b_0) au hasard uniformément

(2) On prend une case dans l'équerre de la case qu'on vient de trouver. (Pas la même case) (a_1,b_1)



(3) Répète jusqu'à ce qu'on trouve une case maximale.

Définissons les projections horizontales et verticales

La projection verticale $= \{a_0, a_1, \dots\}$
La projection horizontale $= \{b_0, b_1, \dots\}$.

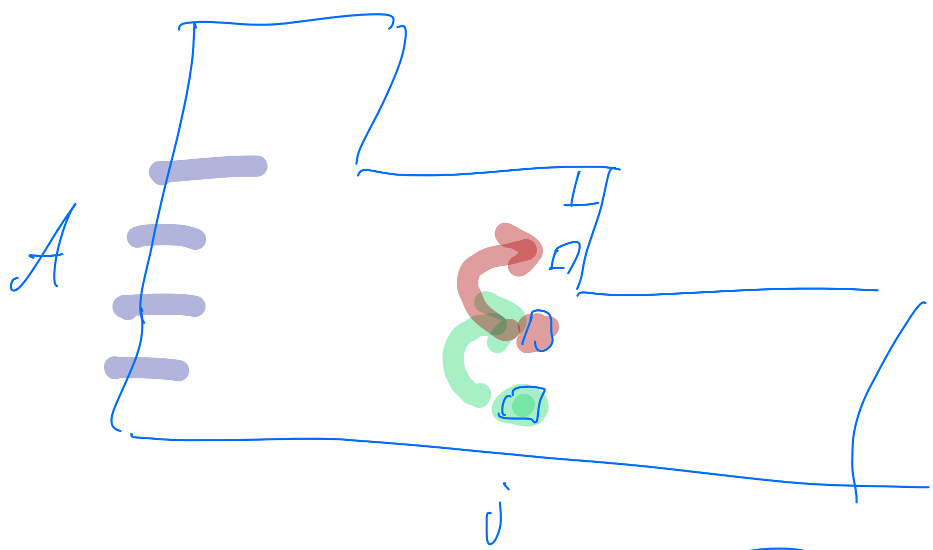
Quelle est la probabilité de suivre un chemin avec les projections A, B, finissant à (i,j).

supposant qu'on commence avec (a_0, b_0). $a_0 = \min A$. $b_0 = \min B$. $i = \max A$, $j = \max B$

Cette probabilité est

$$\prod_{a \in A \setminus \{i\}} \frac{1}{h_{aj} - 1} \prod_{b \in B \setminus \{j\}} \frac{1}{h_{ib} - 1} \quad (*)$$

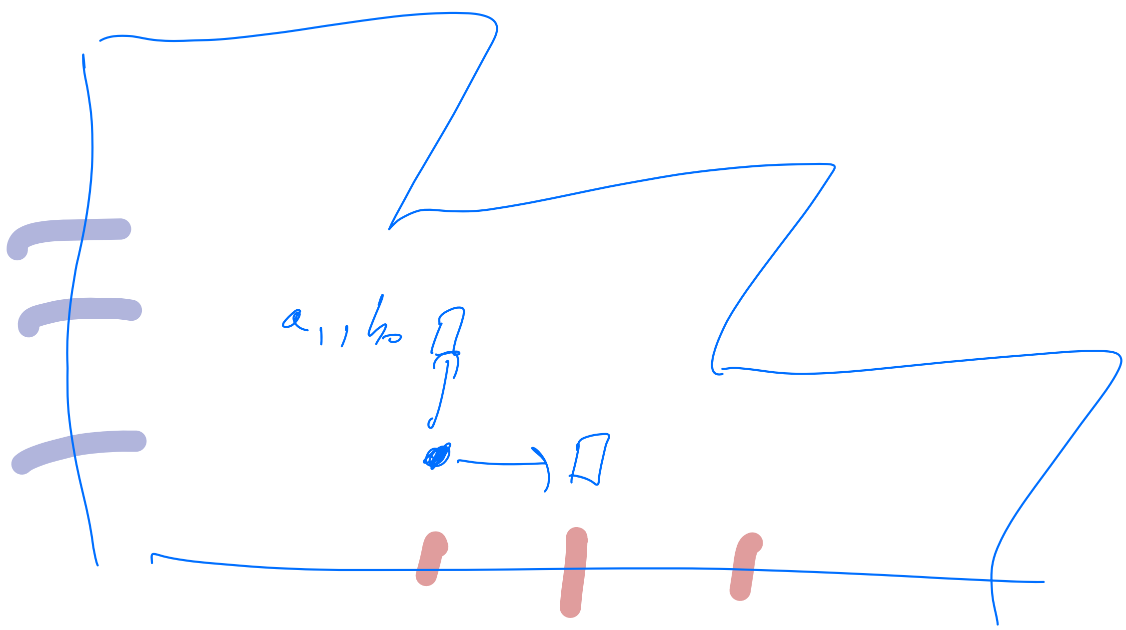
Pour se convaincre que c'est plausible, considérons le cas où $B = \{j\}$.



Formule donne $\underline{\prod_{a \in A \setminus i} \frac{1}{h_{aj} - 1}}$ ✓

Écrivons $P_{A,B}$ pour la probabilité qu'on suit un chemin avec projections A, B, supposant qu'on commence à (a_0, b_0).

Soit on passe de (a_0, b_0) à (a_0, b_1), soit à (a_1, b_0).



$$P_{A,B} = \frac{1}{h_{a_0 b_0} - 1} P_{A \setminus a_0, B} + \frac{1}{h_{a_0 b_0} - 1} P_{A, B \setminus b_0}$$

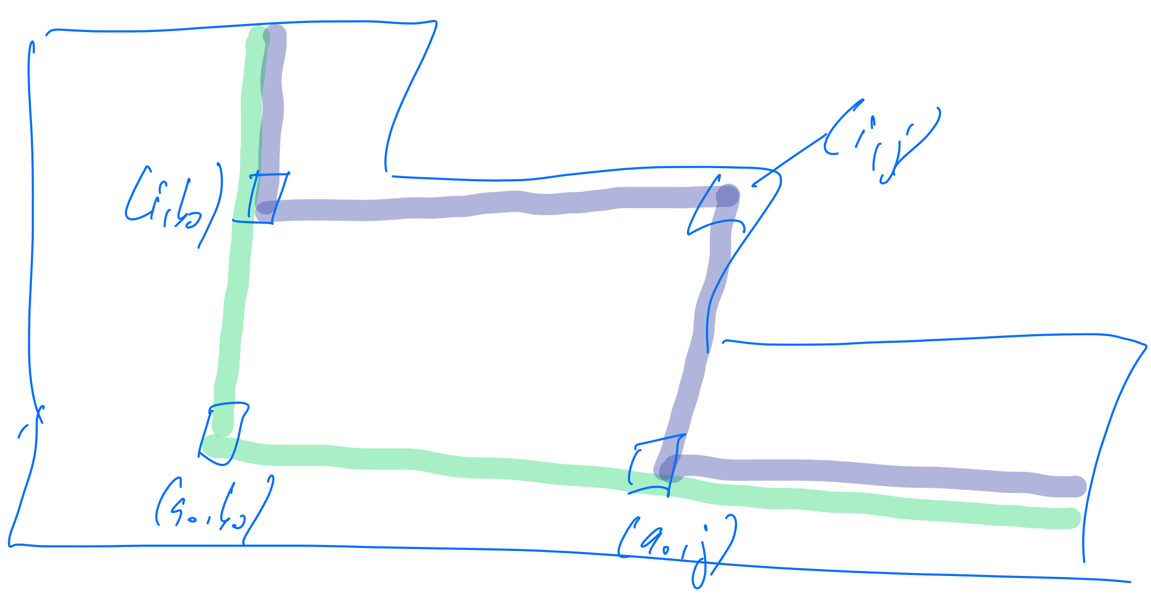
Par récurrence, on peut supposer que la formule pour $P_{A,B}$ est correcte pour $P_{A \setminus a_0, B}$ et $P_{A, B \setminus b_0}$

$p_{A, B\setminus b_0}$.

$$p_{A\setminus a_0, B} = (*)(h_{a_0 j}-1)$$

$$p_{A, B\setminus b_0} = (*)(h_{i b_0}-1).$$

$$p_{A,B} = \underbrace{\frac{(h_{a_0 j}-1)+(h_{i b_0}-1)}{h_{a_0 b_0}-1}}_{=1}(*)$$



On a démontré que

$P_{A,B} = (*)$.

la probabilité de finir à (i,j) et la somme de $\frac{1}{n} \underline{P_{A,B}}$ pour $i = \max A$ $j = \max B$.

$$\frac{1}{n} \sum_{A,B} P_{A,B} =$$

$$\frac{1}{n} \sum_{A,B} \prod_{a \in A \setminus \{i\}} \frac{1}{h_{a,j}-1} \prod_{b \in B \setminus \{j\}} \frac{1}{h_{i,b}-1}$$

$$= \frac{1}{n} \prod_{1 \le k < i} \left(\frac{1}{h_{k,j}-1} + 1 \right) \prod_{1 \le k < j} \left(\frac{1}{h_{i,k}-1} + 1 \right)$$

$$= F_i / F \quad ?$$

$P_{\ldots}$

Donc

$$\sum_i F_i / F = 1$$

Donc

$\#$tableaux standards de forme

$$\lambda = \sum_i F_i = F \checkmark.$$