Implémentation d'algorithmes de décision pour la fonctionnalité et la sous-séquentialité de transducteurs finis

Hugo Allard

Université de Mons

07/09/2015

Sommaire

Automates finis

- Accepte des mots sur un alphabet Σ
- Reconnaît un langage $\subseteq \Sigma^*$

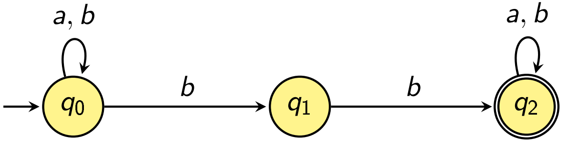
Définition

Un automate fini sur l'alphabet Σ est un quintuplet $\mathscr{A} = (\Sigma, Q, I, F, \delta)$ où

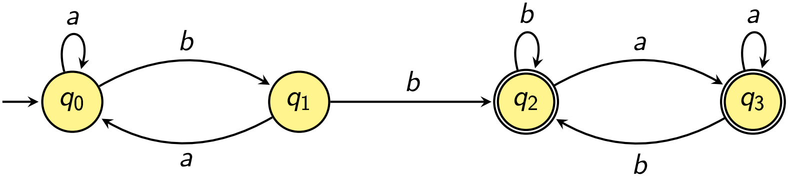
- Σ est l'alphabet d'entrée,
- Q est l'ensemble fini des états,
- I est l'ensemble des états initiaux,
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états finaux,
- $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ est la relation de transition.

$$L(\mathscr{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists \text{ un chemin réussi pour } w\}$$

Non-déterministe (NFA)



Déterministe (DFA)



Automates finis

- Les automates sont clos pour les opérations booléennes
- La plupart des problèmes de décisions sont décidables
- Pour chaque NFA, il existe un DFA équivalent
- Les automates caractérisent les *langages rationnels*

$$NFA \equiv DFA$$

Sommaire

- Automate augmenté d'un mécanisme de sortie
- Transforme des mots de Σ^* en des mots de Δ^*
- Réalise une transduction $\subseteq \Sigma^* \times \Delta^*$

Définition

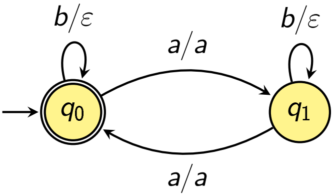
Un transducteur fini de Σ à Δ est une paire $\mathscr{T} = (\mathscr{A}, \Omega)$ où

- Δ est l'alphabet de sortie,
- $\Omega : \delta \to \Delta$ est le morphisme de sortie.

- Non déterministe (NFT) si $\mathscr{A}$ est non déterministe
- Déterministe (DFT) si $\mathscr{A}$ est déterministe

Transducteurs finis

Déterministe (DFT)



Exemple

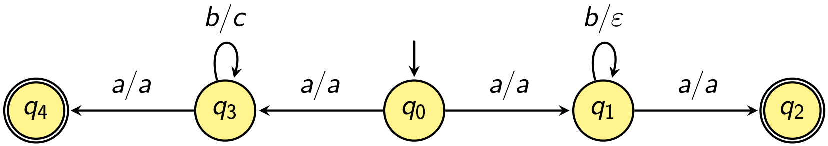
Retire tous les symboles b d'une entrée sur $\{a, b\}^*$.

- Un seul chemin compatible avec chaque entrée !

  $\rightarrow$ *Une seule sortie possible pour une entrée*

Transducteurs finis

Non-déterministe (NFT)



Exemple

$$R(\mathscr{T}) : \begin{cases} ab^n a \mapsto aa \\ ab^n a \mapsto ac^n a \end{cases}$$

- Plusieurs chemins compatibles pour une même entrée !

  $\rightarrow$ *Plusieurs sorties possibles pour une même entrée*

DFT

- Appartenance facilement décidable
- Inclusion/équivalence décidables en PTime
- Moins expressif car réalise forcément une fonction

NFT

- Appartenance nécessite du backtracking
- Inclusion/équivalence indécidables
- Plus expressif

$$DFT \subsetneq NFT$$

Sommaire

Transducteurs fonctionnels

Définition

Une transduction $R \subseteq \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ est fonctionnelle si pour tout mot $u \in \Sigma^*$ il existe au plus un mot $v \in \Delta^*$ tel que $(u, v) \in R$.

- Un transducteur est fonctionnel si il réalise une transduction fonctionnelle.
- Un DFT est forcément fonctionnel.
- Un NFT peut être fonctionnel.

Transducteurs fonctionnels

Définition

Une transduction $R \subseteq \Sigma^* \to \Delta^*$ est fonctionnelle si pour tout mot $u \in \Sigma^*$ il existe au plus un mot $v \in \Delta^*$ tel que $(u, v) \in R$.

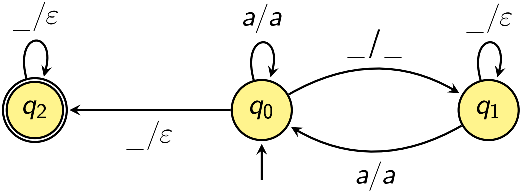
- Un transducteur est fonctionnel si il réalise une transduction fonctionnelle.
- Un DFT est forcément fonctionnel.
- Un NFT peut être fonctionnel.

Théorème

L'inclusion et l'équivalence pour un NFT fonctionnel sont PSpace-C.

Transducteurs fonctionnels

NFT fonctionnel [1]



Exemple

Remplace les espaces (_) consécutifs par un simple espace et retire les espaces en fin de mot.

1. Exemple d'Emmanuel Filiot

Transducteurs fonctionnels

Théorème (Schutzenberger, 1975)

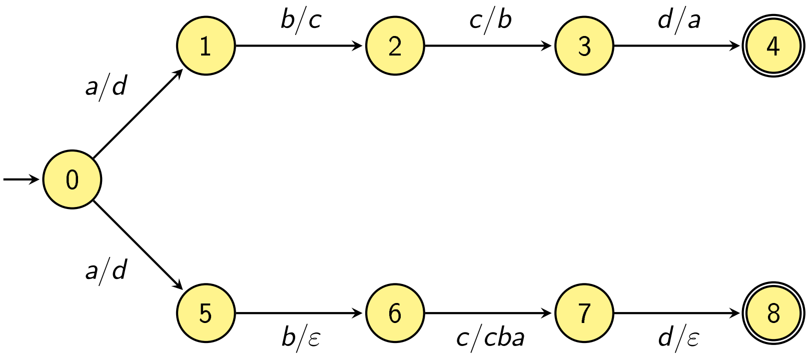
La fonctionnalité est une propriété décidable pour NFT.

Proposition

Soient $u, v, w \in \Sigma^*$.
Si u et v sont tous deux préfixes de w alors u et v sont comparables.

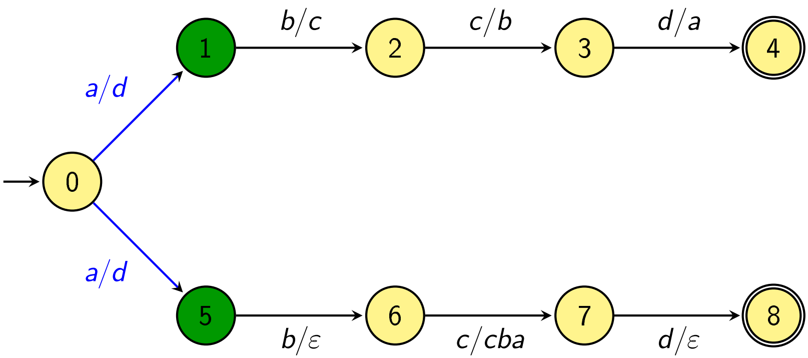
Transducteurs fonctionnels

Décider la fonctionnalité



Transducteurs fonctionnels

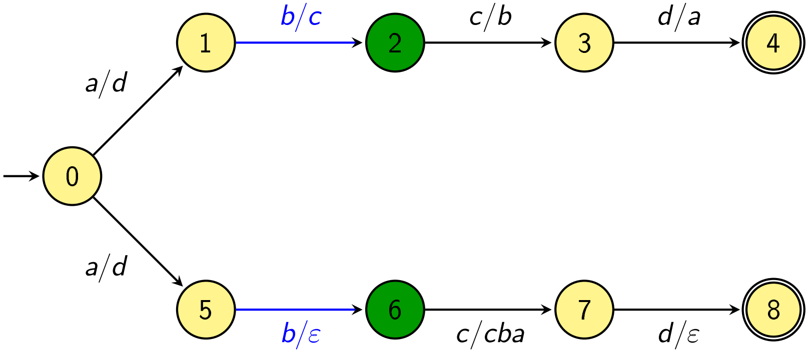
Décider la fonctionnalité



Sorties pour abcd : $\begin{cases} d \\ d \end{cases}$

Transducteurs fonctionnels

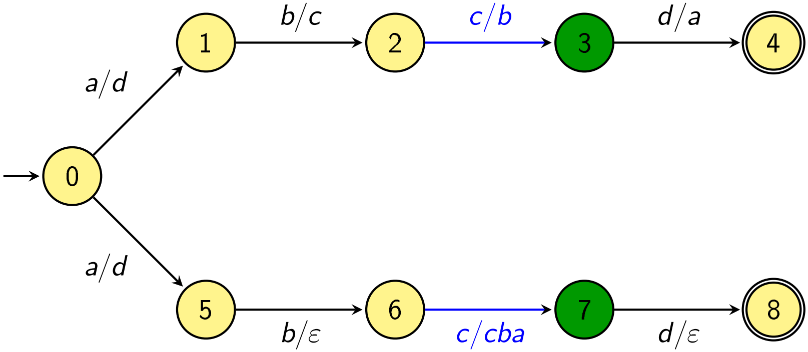
Décider la fonctionnalité



Sorties pour abcd : $\begin{cases} dc \\ d \end{cases}$

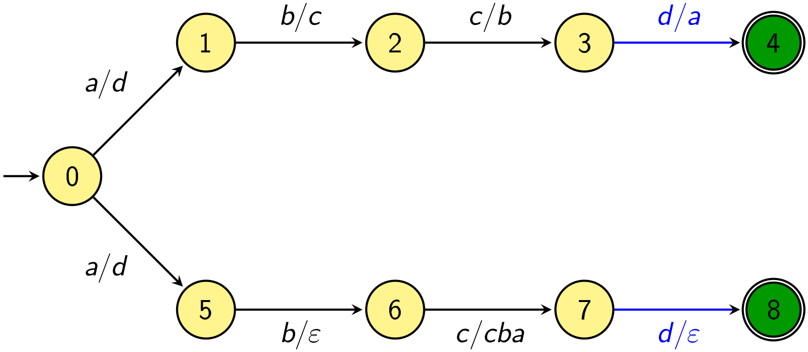
Transducteurs fonctionnels

Décider la fonctionnalité



Sorties pour abcd : $\begin{cases} dcb \\ dcba \end{cases}$

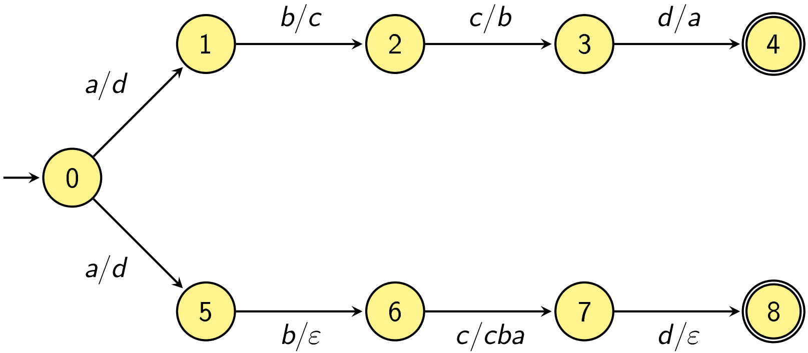
Décider la fonctionnalité



Sorties pour abcd : $\begin{cases} dcba \\ dcba \end{cases}$

Transducteurs fonctionnels

Décider la fonctionnalité



A faire pour chaque paire de chemins réussis sur une même entrée !

Transducteurs fonctionnels

Calcul du carré d'un transducteur

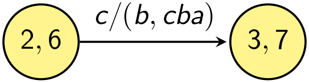
Pour un transducteur $\mathscr{T} = (\mathscr{A} = (\Sigma, Q, I, F, \delta), \Omega)$ de Σ à Δ.

- Les états de $\mathscr{T}^2$ sont l'ensemble $Q \times Q$,
- Pour chaque paire de transitions $p \xrightarrow[\mathscr{T}]{a/u} q$ et $r \xrightarrow[\mathscr{T}]{a/v} s$ on crée une transition $(p, r) \xrightarrow[\mathscr{T} \times \mathscr{T}]{a/(u,v)} (q, s)$
- Transducteur carré de Σ à $\Delta \times \Delta$
- Crée potentiellement des états inutiles
- Complexité en $O(|Q|^2 + |\delta|^2)$

Transducteurs fonctionnels

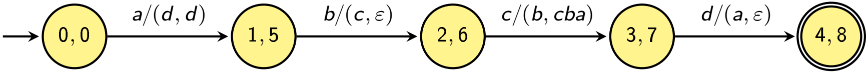
Dans $\mathscr{T}$:

Dans $\mathscr{T} \times \mathscr{T}$:



Transducteurs fonctionnels

$\mathscr{T} \times \mathscr{T}$:



Transducteurs fonctionnels

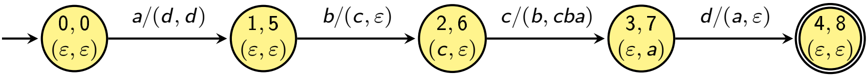
Définition (retard)

On définit le retard entre u et v comme $delay(u, v) = (u', v')$ tel que

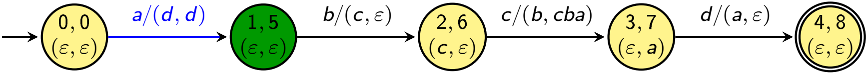
- $u = lu'$,
- $v' = lv'$ et
- $l = lcp(u, v)$

Exemple : $delay(abbc, abc) = (bc, c)$.

Décider la fonctionnalité



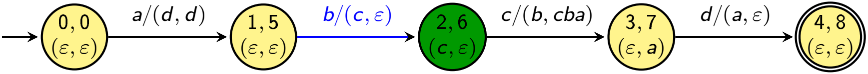
Décider la fonctionnalité



Retard en (1,5) :$delay(d, d) = (\varepsilon, \varepsilon)$

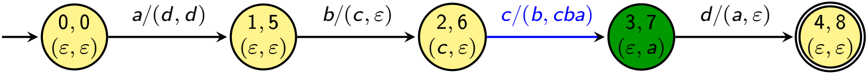
Transducteurs fonctionnels

Décider la fonctionnalité



Retard en (2,6) : $delay(c, \varepsilon) = (c, \varepsilon)$

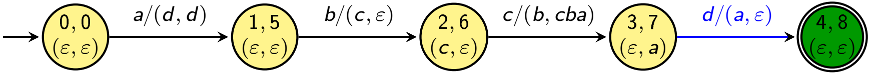
Décider la fonctionnalité



Retard en (3,7) : $delay(cb, cba) = (\varepsilon, a)$

Transducteurs fonctionnels

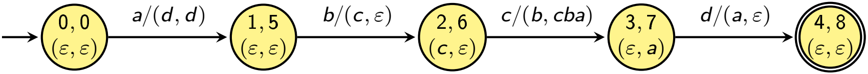
Décider la fonctionnalité



Retard en (4,8) : $delay(a, a) = (\varepsilon, \varepsilon)$

Transducteurs fonctionnels

Décider la fonctionnalité



- A faire pour chaque chemin réussi de $\mathscr{T}^2$!
- Fonctionnel si le retard calculé à chaque état final de $\mathscr{T}^2$ est $(\varepsilon,\varepsilon)$

$\rightarrow$ *Simple parcours de* $\mathscr{T}^2 \Rightarrow$ *linéaire en* $|Q|^2$.

Sommaire

Transducteurs sous-séquentiels

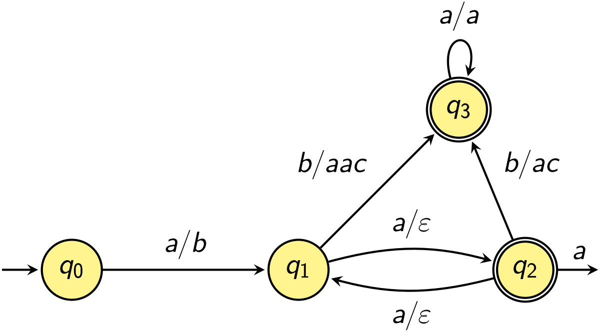
Définition

Un transducteur sous-séquentiel est une paire $(\mathscr{T}, \Omega_f : F \to \Delta^*)$ où

- $\mathscr{T}$ est un transducteur déterministe
- Ω_f associe une sortie à chaque état final, concaténée à la suite du mot produit

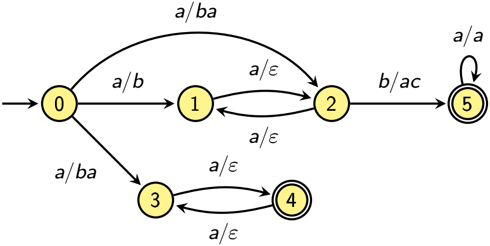
- Plus expressif que DFT
- Mêmes propriétés de décision que DFT
- Très intéressant en pratique

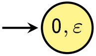
Transducteurs sous-séquentiels



Transducteurs sous-séquentiels

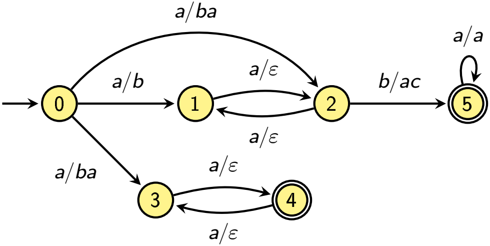
Déterminisation : étendre la construction des sous-ensembles

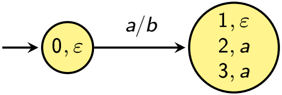




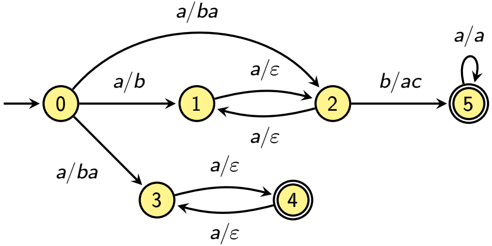
Transducteurs sous-séquentiels

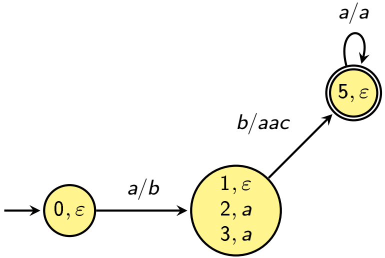
Déterminisation : étendre la construction des sous-ensembles



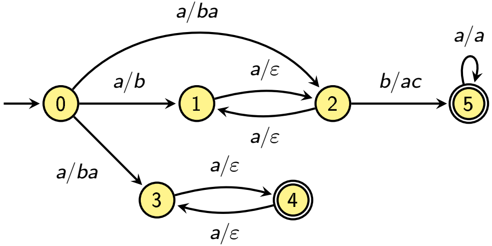


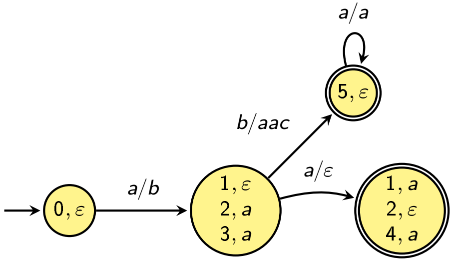
Déterminisation : étendre la construction des sous-ensembles





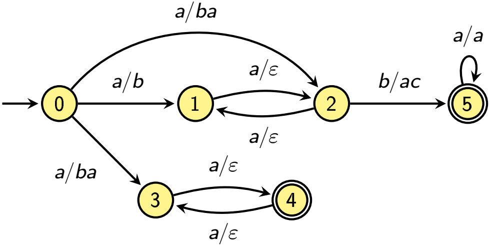
Déterminisation : étendre la construction des sous-ensembles

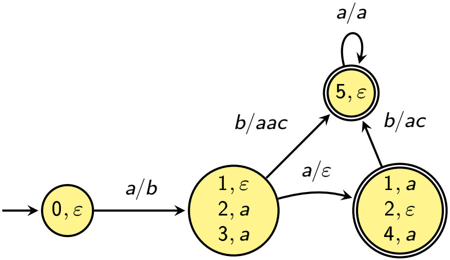




Transducteurs sous-séquentiels

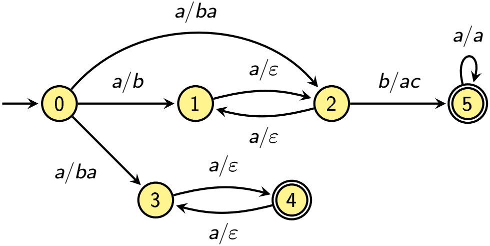
Déterminisation : étendre la construction des sous-ensembles

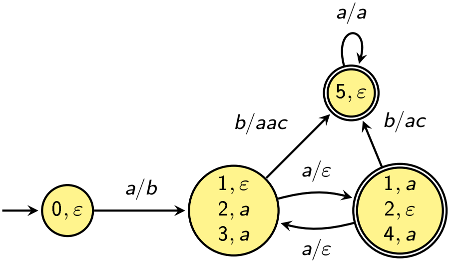




Transducteurs sous-séquentiels

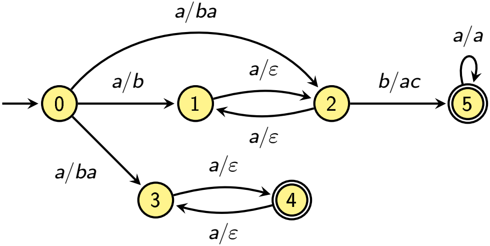
Déterminisation : étendre la construction des sous-ensembles

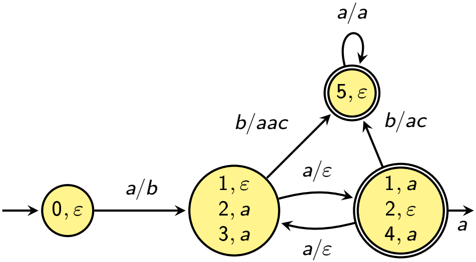




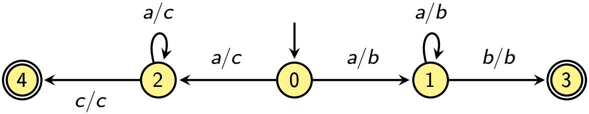
Transducteurs sous-séquentiels

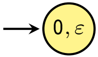
Déterminisation : étendre la construction des sous-ensembles





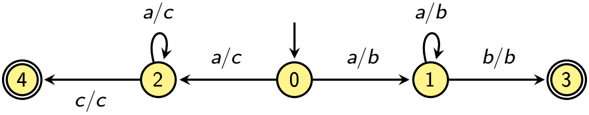
Déterminisation : ne fonctionne pas toujours

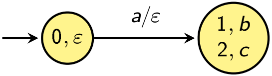




Transducteurs sous-séquentiels

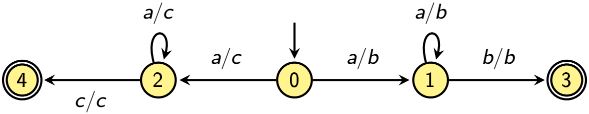
Déterminisation : ne fonctionne pas toujours

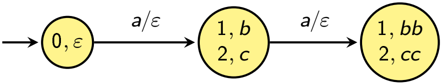




Transducteurs sous-séquentiels

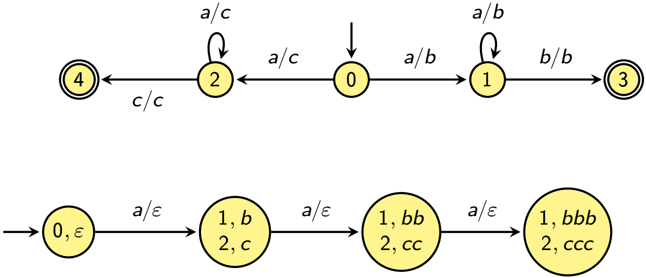
Déterminisation : ne fonctionne pas toujours





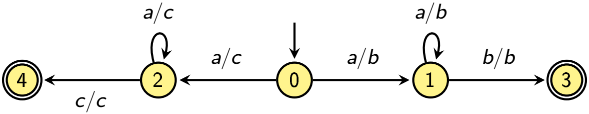
Transducteurs sous-séquentiels

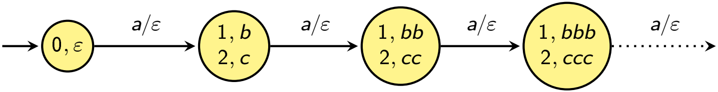
Déterminisation : ne fonctionne pas toujours



Transducteurs sous-séquentiels

Déterminisation : ne fonctionne pas toujours

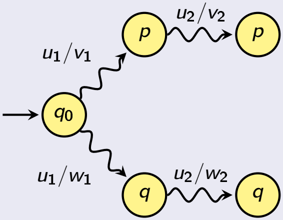




Transducteurs sous-séquentiels

Définition (Condition de jumelage)

Un transducteur vérifie la condition de jumelage si pour toute situation



On a $\mathit{delay}(v_1, w) = \mathit{delay}(v_1 v_2, w_1 w_2)$.

Théorème (Choffrut, 1977)

Un transducteur est sous-séquentialisable si et seulement si il vérifie la condition de jumelage.

Sommaire

Conclusion

$$DFT \subsetneq SSNFT \subsetneq FNFT \subsetneq NFT$$

- Implémentation JAVA des transducteurs
- Implémentation de fonctionnalité, sous-séquentialité, déterminisation

Questions