Exercícios Propostos[1]

⚠ *Equações da reta*

1. Determine as equações paramétricas e na forma simétrica (se existirem) das retas que passam pelos pontos A e B.

(a) $A = (5, 4, 1)$ e $B = (-2, 3, 2)$

(b) $A = (0, -1, 0)$ e $B = (1, 0, 0)$

(c) $A = (0, 1, -1)$ e $B = (0, 0, 0)$

(d) $A = (3, 2, 1)$ e $B = (6, 1, -4)$

2. Considere a reta r de equações paramétricas $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$

(a) Obtenha dois pontos e dois vetores diretores da reta r.

(b) Verifique se os pontos $P = (1, 3, -3)$ e $Q = (-3, 4, 12)$ pertencem à reta r.

(c) Obtenha equações paramétricas da reta que contém o ponto $(1, 4, -7)$ e é paralela à reta r.

3. Sejam $A = (3, 6, -7)$, $B = (-5, 2, 3)$ e $C = (4, -7, -6)$.

(a) Mostre que A, B e C são vértices de um triângulo.

(b) Escreva uma equação vetorial da reta que contém a mediana relativa ao vértice C.

4. (a) São dados os pontos $A = (0, 1, 8)$ e $B = (-3, 0, 9)$, e a reta $r : X = (1, 2, 0) + \lambda(1, 1, -3)$. Determine um ponto C de r tal que A, B e C sejam vértices de um triângulo retângulo.

(b) Sejam $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 0, 1)$ e $r : \ X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1)$. Determine os pontos de r equidistantes de A e B.

⚠ *Equações do plano*

5. Escreva uma equação vetorial e equações paramétricas do plano π utilizando as informações dadas em cada caso.

(a) π contém $A = (1, 2, 0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (2, 3, -1)$.

(b) π contém $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

(c) π contém os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, -2)$ e $C = (1, -1, 0)$.

6. Obtenha uma equação geral do plano π descrito em cada caso.

(a) π contém o ponto $A = (9, -1, 0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (0, 1, 0)$ e $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

(b) π contém os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (-1, 0, 1)$ e $C = (2, 1, 2)$.

(c) π contém $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo a $\vec{u} = (2, 1, 0)$.

(d) π contém $P = (1, -1, 1)$ e $r : \ X = (0, 2, 2) + \lambda(1, 1, -1)$.

[1] Resolva os exercícios sem omitir nenhuma passagem em seus cálculos. Respostas sem resolução e/ou justificativa não serão consideradas. **Data máxima de entrega: 25/06/2025 até 14:00 horas**

7. Dada uma equação geral, obtenha equações paramétricas do plano.

(a) $4x + 2y - z + 5 = 0$

(b) $5x - y - 1 = 0$

(c) $z - 3 = 0$

(d) $y - z - 2 = 0$

8. Dadas equações paramétricas, obtenha uma equação geral do plano.

(a) $\begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda + \mu \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x = -2 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + 2\mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$

⚠ *Posições relativas entre retas*

9. Verifique se as retas r e s são concorrentes e, se forem, determine o ponto de intersecção e obtenha uma equação geral do plano determinado por elas.

(a) $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \quad , \quad s: \begin{cases} x = -1 + 4\mu \\ y = -1 + 2\mu \\ z = -2 + 6\mu \end{cases}$

(b) $r: \; X = (1,1,0) + \lambda(1,2,3) \;, \quad s: \; X = (2,3,3) + \mu(3,2,1)$

(c) $r: \begin{cases} x = 2 - 4\lambda \\ y = 4 + 5\lambda \\ z = 11 \end{cases} \quad , \quad s: \; \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-2} = z$

(d) $r: \; \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+2}{4} = z \;, \quad s: \; \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-3}{2}$

10. Dizemos que uma reta está escrita na *forma planar* quando ela é descrita como a interseção de dois planos na forma geral. Obtenha uma equação vetorial da reta r a partir de suas equações planares.

(a) $r: \begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$

(b) $r: \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

(c) $r: \begin{cases} x = 3 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}$

(d) $r: \begin{cases} y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

11. Estude a posição relativa das retas r e s.

(a) $r: \; X = (1,-1,1) + \lambda(-2,1,-1) \;, \quad s: \begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$

(b) $r: \; \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{2} \;, \quad s: \; X = (0,0,0) + \lambda(1,2,0)$

(c) $r: \; X = (8,1,9) + \lambda(2,-1,3) \;, \quad X = (3,-4,4) + \mu(1,-2,2)$

(d) $r: \; \dfrac{x+1}{2} = y = z \;, \quad s: \begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$

⚠ *Posições relativas entre reta e plano*

12. Estude a posição relativa de r e π e, quando forem transversais, obtenha o ponto de intersecção P.

(a) $r: \ X = (1,1,0) + \lambda(0,1,1)$, $\pi: \ x - y - z = 2$

(b) $r: \ \dfrac{x-1}{2} = y = z$, $\pi: \ X = (3,0,1) + \lambda(1,0,1) + \mu(2,2,0)$

(c) $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$, $\pi: \ x + y = 2$

(d) $r: \ x - 2y = 3 - 2z + y = 2x - z$, $\pi: \ X = (1,4,0) + \lambda(1,1,1) + \mu(2,1,0)$

13. Considere os exercícios abaixo.

(a) Calcule m para que r seja paralela a π, onde $r: \ X = (1,1,1) + \lambda(2,m,1)$ e $\pi: \ X = (0,0,0) + \alpha(1,2,0) + \beta(1,0,1)$.

(b) Calcule m e n para que r esteja contida em π, sendo $r: \ X = (n,2,0) + \lambda(2,m,m)$ e $\pi: \ x - 3y + z = 1$.

(c) Para que valores de m a reta $r: \ \dfrac{x-1}{m} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{m}$ é transversal ao plano $\pi: \ x + my + z = 0$?

⚠ *Posições relativas entre planos*

14. Estude a posição relativa dos planos π_1 e π_2. Quando forem transversais, determine uma equação da intersecção na forma vetorial.

(a) $\pi_1: \ X = (4,2,4) + \lambda(1,1,2) + \mu(3,3,1)$
$\pi_2: \ X = (3,0,0) + \lambda(1,1,0) + \mu(0,1,4)$

(b) $\pi_1: \ x - y + 2z - 2 = 0$, $\pi_2: X = (0,0,1) + \lambda(1,0,3) + \mu(-1,1,1)$

(c) $\pi_1: \ 2x - y + z - 1 = 0$, $\pi_2: \ 4x - 2y + 2z - 9 = 0$

(d) π_1 é determinado por $A = (0,1,6)$, $B = (5,0,1)$ e $C = (4,0,0)$.
$\pi_2: 4x + 40y - 4z - 16 = 0$

15. Resolva os exercícios abaixo.

(a) Mostre que os planos

$$\pi_1: \begin{cases} x = -\lambda_1 + 2\mu_1 \\ y = m\lambda_1 \\ z = \lambda_1 + \mu_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi_2: \begin{cases} x = 1 + m\lambda_2 + \mu_2 \\ y = 2 + \lambda_2 \\ z = 3 + m\mu_2 \end{cases}$$

são transversais qualquer que seja o número real m.

(b) Calcule m e n para que os planos $\pi_1: \ X = (1,1,0) + \lambda(m,1,1) + \mu(1,1,m)$ e $\pi_2: \ 2x + 3y + 2z + n = 0$ sejam paralelos distintos.