Une construction combinatoire d'un automorphisme bidendriphorme de WQSym

Journées Nationales du GDR IM 2022
Hugo Mlodecki, hugo.mlodecki@gmail.com

LISN Laboratoire Interdisciplinaire des Sciences du Numérique

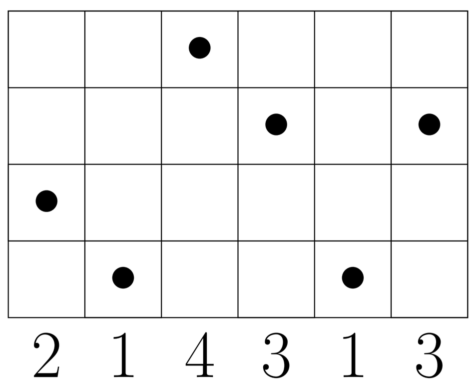
Motivation

L'algèbre **WQSym** est l'algèbre de Hopf indexée par les mots tassés.
WQSym est une bigèbre **bidendriforme** [1, 2], c'est-à-dire que le produit et le coproduit peuvent être scindés en deux demi-produits $(\prec, \succ)$ et demi-coproduits $(\Delta_\prec, \Delta_\succ)$.
Corollaire immédiat[1]: **WQSym** et sa duale sont isomorphes car générées librement par leurs sous espaces des totalement primitifs.
Problèmes:
· Trouver des bases de l'algèbre et la duale compatibles avec la structure bidendriforme.
· Construire un isomorphisme entre ces bases.
$a_n := \dim(\mathbf{WQSym}_n)$, $p_n := \dim(\mathrm{Prim}_n)$ et $t_n := \dim(\mathrm{TPrim}_n)$:

n	1	2	3	4	5	6	OEIS
a_n	1	3	13	75	541	4 683	A000670
p_n	1	2	8	48	368	3 376	A095989
t_n	1	1	4	28	240	2 384	

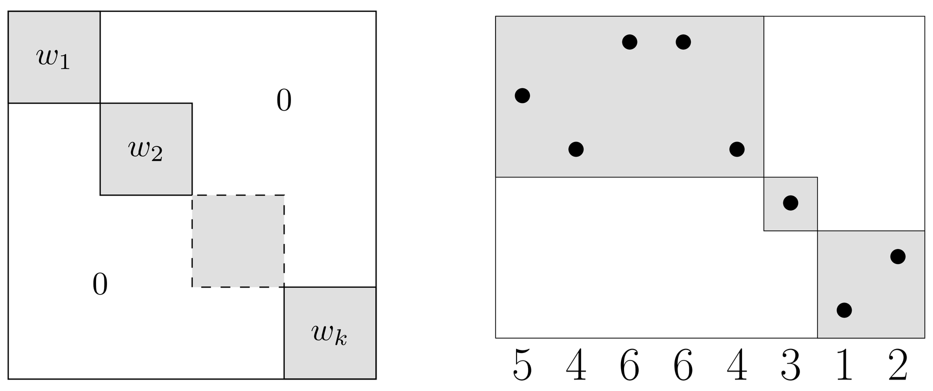
Mots tassés

· **Mot tassé**: toutes les lettres de 1 à son maximum m apparaissent au moins une fois.
123 132 213 231 312 321
122 212 221 112 121 211
111



Descentes globales

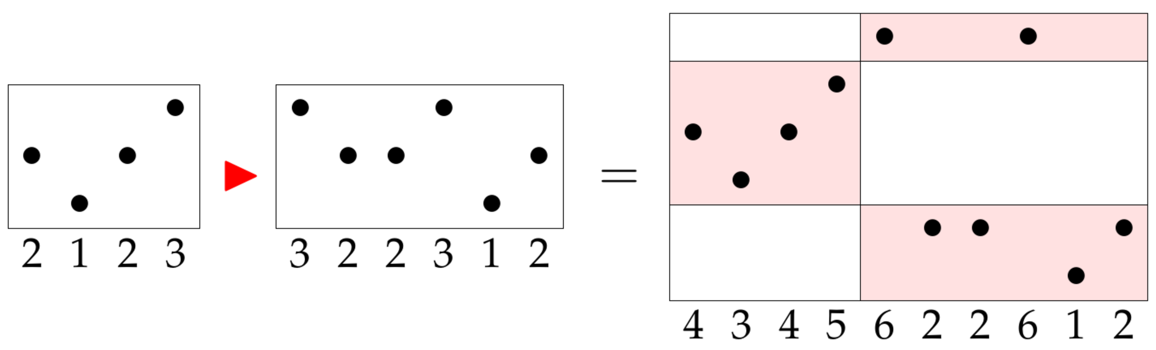
· **Concaténation décalée: 121/21 = 34321**.
· Tout mot w admet une unique **factorisation en descentes globales** $w = w_1/w_2/\dots/w_k$ où tous les w_i sont dits **irréductibles**.



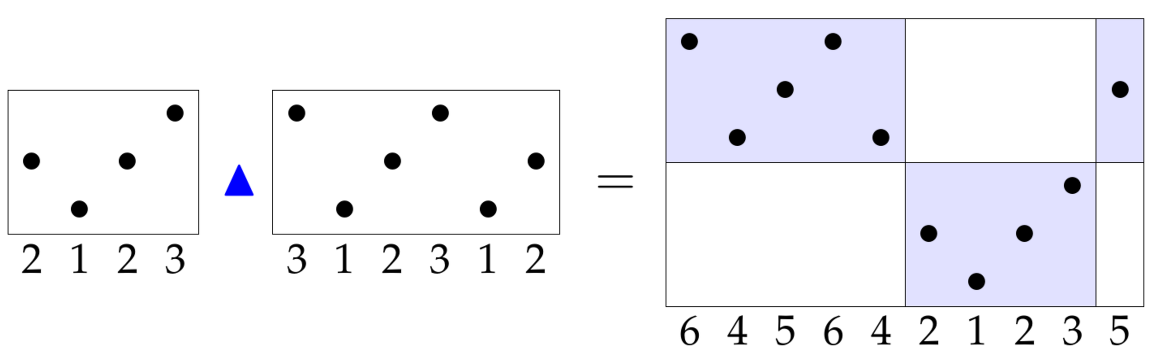
Irréductibles de taille $n = \dim(\mathrm{Prim}_n)$.

Nouvelles décompositions

· L'opération u►v: 2123►322312 = 4345622612
· Tout mot irréductible w admet une unique **factorisation rouge** $w = u$ ► v avec la taille de u maximisée et v est dit **rouge irréductible**.



· L'opération u▲v: 2123▲312312 = 6456421235
· Tout mot irréductible w admet une unique **factorisation bleue** $w = u$ ▲ v avec la taille de u maximisée et v est dit **bleu irréductible**.

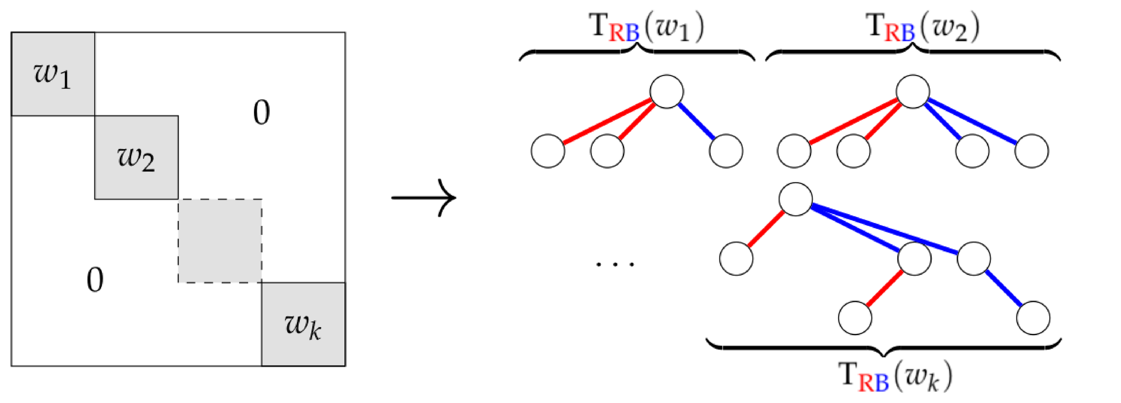


Irréductibles rouge de taille $n = \dim(\mathrm{TPrim}_n)$.

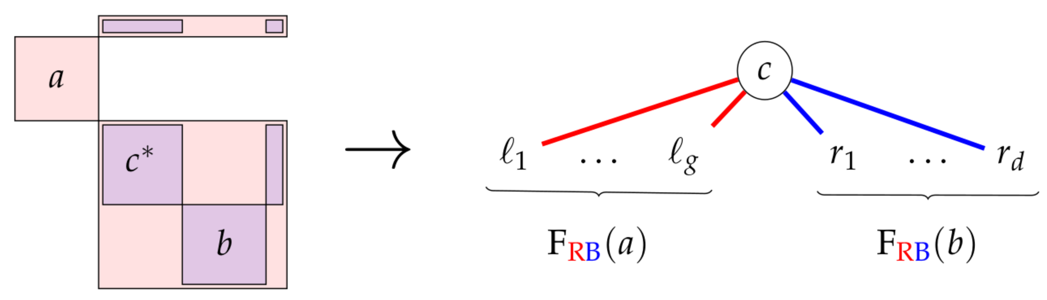
Irréductibles bleu de taille $n = \dim(\mathrm{TPrim}_n)$.

Arbres biplans

· $\mathrm{F}_{\mathrm{RB}}(\epsilon) := []$ (forêt vide),
· $\mathrm{F}_{\mathrm{RB}}(w_1/w_2/\dots/w_k) := [\mathrm{T}_{\mathrm{RB}}(w_1), \mathrm{T}_{\mathrm{RB}}(w_2), \dots, \mathrm{T}_{\mathrm{RB}}(w_k)]$,



· $\mathrm{T}_{\mathrm{RB}}(a$►$(b$▲$c)) := \mathrm{Node}_{\mathrm{RB}}(c, \mathrm{F}_{\mathrm{RB}}(a), \mathrm{F}_{\mathrm{RB}}(b))$.

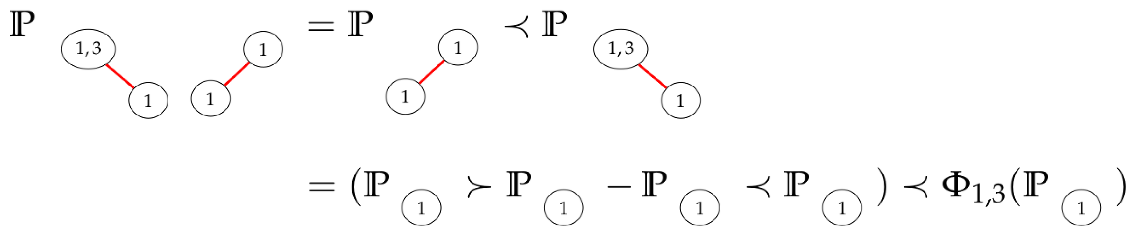


Les noeuds des arbres bicolores sont étiquetés par des mot **rouges et bleus irréductibles**.

Bases de WQSym et WQSym*

On peut définir une base de **WQSym*** indexée par des arbres biplans rouges.

$$\mathbb{P}_{[]} := \mathbb{R}_\epsilon,$$
$$\mathbb{P}_{t_1,\dots,t_k} := \mathbb{P}_{t_k} \prec (\mathbb{P}_{t_{k-1}} \prec (\dots \prec \mathbb{P}_{t_1})\dots),$$
$$[\dots]$$

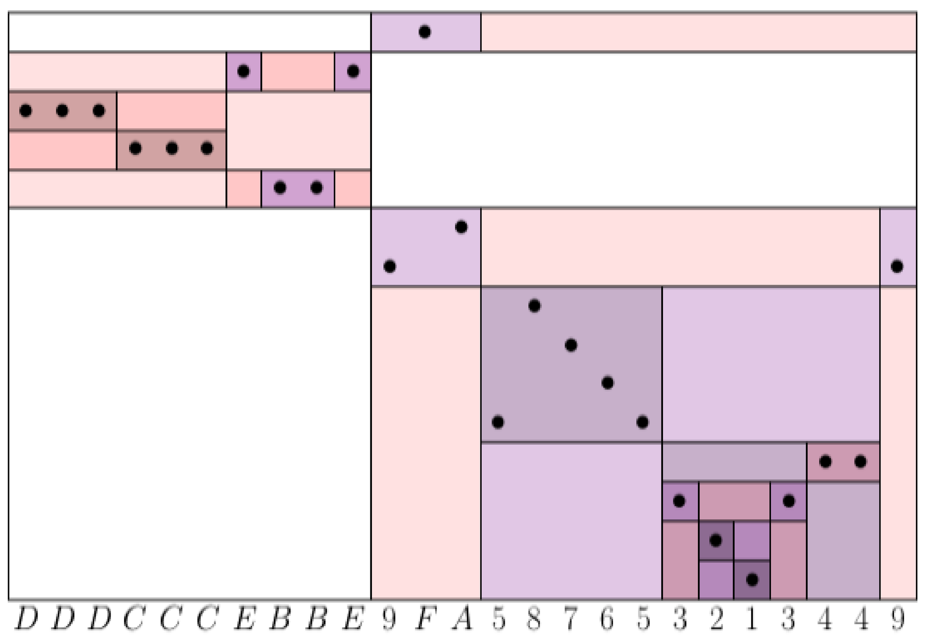


- $(\mathbb{P}_f)_{f \in \mathfrak{F}_{Rn}}$ est une base de $\mathbf{WQSym}^*_n$,
- $(\mathbb{P}_t)_{t \in \mathfrak{T}_{Rn}}$ est une base de Prim^*_n,
- $(\mathbb{P}_t)_{t \in \mathfrak{N}_{Rn}}$ est une base de TPrim^*_n.

Même construction sur **WQSym** avec une base $\mathbb{O}$ indexée par des arbres biplans bleus.
Les bases $\mathbb{O}$ et $\mathbb{P}$ sont donc compatibles avec la **structure bidendriforme**.

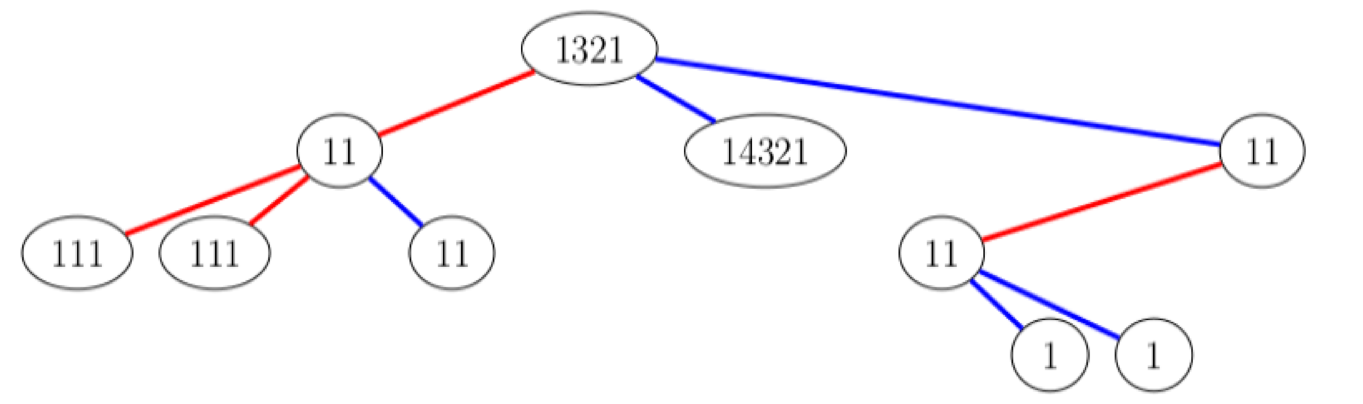
Une involution sur les mots tassés

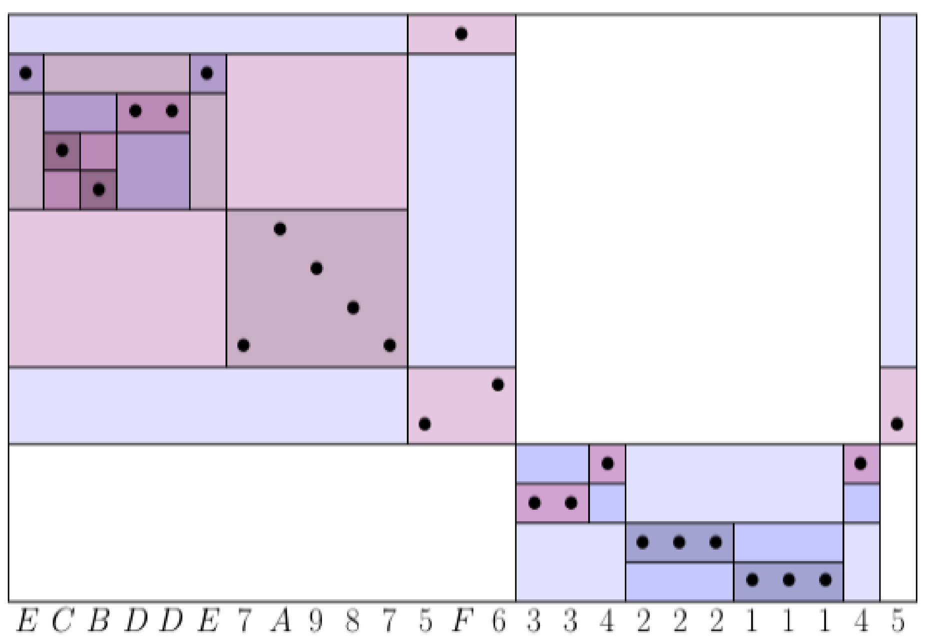
Un échange des couleurs rouge et bleu de toutes les arêtes des arbres bicolores définit une involution sur les mots tassés.
Voici un exemple conséquent où l'on part d'un mot tassé w écrit en hexadécimal.

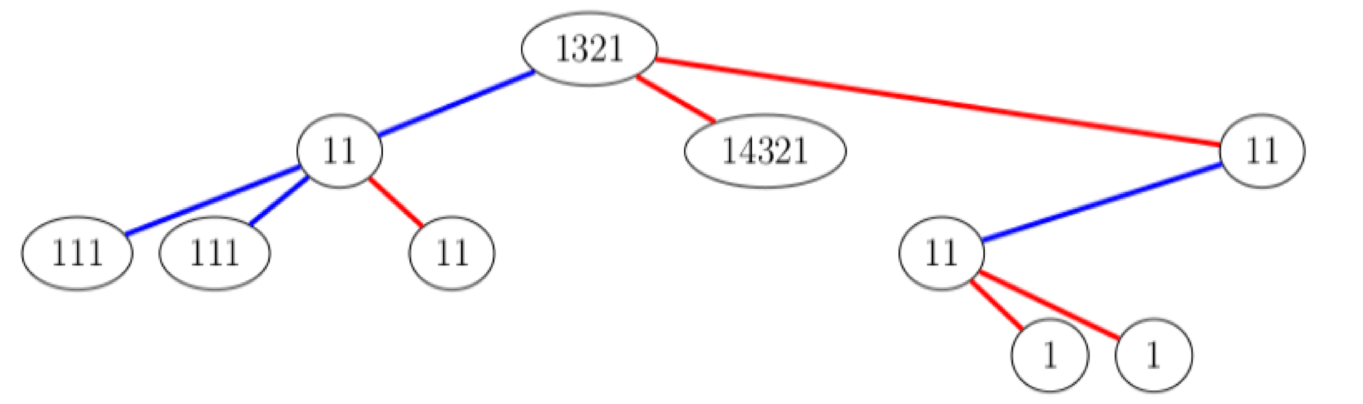


$w = DDDCCCEBBE9FA587653213449$

$w = ((111/111)$►$(11$▲$11))$►$((14321/(((1/1)$▲$11)$►$11))$▲$1321)$







$w' = ((111/111)$▲$(11$►$11))$▲$(((((1/1)$►$11)$▲$11)/14321)$►$1321)$

$w' = ECBDDE7A9875F633422211145$

L'involution décrite ici définit un **isomorphisme bidendriforme** entre les bases $\mathbb{O}$ et $\mathbb{P}$.

Ouvertures

· L'involution décrite plus haut restreinte aux permutations ne correspond pas directement à l'inversion. Néanmoins, elle est **compatible avec l'inversion** en y ajoutant une étape.

· La **généralisation de la théorie des arbres biplans** à toutes les bigèbres bidendriformes permettrait d'obtenir de manière constructive un automorphisme des bigèbres bidendriformes.

· Les opérations ► et ▲ font apparaître de façon inattendue deux nouvelles applications de l'**opérade dupliciale gauche** appliquée sur des mots tassés.

· Le nombre d'arbres biplans à n noeuds est égal à la dimension de la composante homogène de la *L*-**algèbre libre à un seul générateur**.

Références

[1] L. Foissy: *Bidendriform bialgebras, trees, and free quasi-symmetric functions*, Journal of Pure and Applied Algebra (2007)

[2] J.-C. Novelli,J.-Y. Thibon: *Polynomial realizations of some trialgebras*,(2006)

[3] H. Mlodecki: *Bidendriform automorphism of WQSym*, (2022+)

Remerciements

Je remercie les personnes suivantes pour toute l'aide apportée à la réalisation (fond et forme) de ce poster:
Balthazar Charles, Loïc Foissy, Florent Hivert, Jean-Christophe Novelli, Viviane Pons, Daniel Tamayo.