

Un auto-morphisme bidendrifforme de WQSym

Séminaire d'équipe:
Combinatoire et interactions
LaBRI

Nouveau membre du LaBRI
ATER à l'IUT de Bordeaux

Hugo Mlodecki

10 Octobre 2022

Exemples d'algèbres de Hopf

- Arbres binaires, **PBT**, Loday-Ronco
- Fonctions quasi-symétriques, **QSym**, Gessel
- Fonctions symétriques non-commutatives, **NCSF**, Gelfrand Krog Lascoux Leclerc Retakh Thibon
- Permutations, **FQSym**, Malvenuto-Reutenauer
- Mots tassés, **WQSym**, Hivert

Mots tassés

Définition

Un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}_{>0}$ est dit **tassé** si toutes les lettres de 1 à son maximum m apparaissent au moins une fois.

Mots tassés

Définition

Un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}_{>0}$ est dit **tassé** si toutes les lettres de 1 à son maximum m apparaissent au moins une fois.

Mots tassés de tailles 0, 1, 2 et 3

- ϵ

Mots tassés

Définition

Un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}_{>0}$ est dit **tassé** si toutes les lettres de 1 à son maximum m apparaissent au moins une fois.

Mots tassés de tailles 0, 1, 2 et 3

- ϵ
- 1

Mots tassés

Définition

Un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}_{>0}$ est dit **tassé** si toutes les lettres de 1 à son maximum m apparaissent au moins une fois.

Mots tassés de tailles 0, 1, 2 et 3

- ϵ
- 1
- 12 21 11

Mots tassés

Définition

Un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}_{>0}$ est dit **tassé** si toutes les lettres de 1 à son maximum m apparaissent au moins une fois.

Mots tassés de tailles 0, 1, 2 et 3

- ϵ
- 1
- 12 21 11
- 123 132 213 231 312 321
122 212 221 112 121 211 111

Mots tassés

Définition

Un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}_{>0}$ est dit **tassé** si toutes les lettres de 1 à son maximum m apparaissent au moins une fois.

Mots tassés de tailles 0, 1, 2 et 3

- ϵ
- 1
- 12 21 11
- 123 132 213 231 312 321
 122 212 221 112 121 211 111

Mots tassés de taille n [OEIS A000670]

n	1	2	3	4	5	6	7	8
PW_n	1	3	13	75	541	4683	47293	545835

Tassement

Exemple

$24154 \notin \mathbf{PW}$

Tassement

Exemple

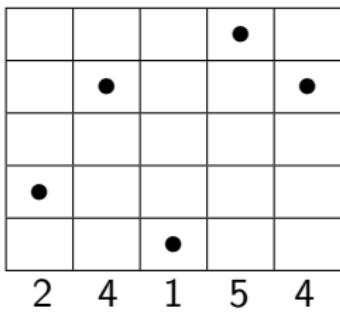
$24154 \notin \mathbf{PW}$ mais $pack(24154) = 23143 \in \mathbf{PW}$

Tassement

Exemple

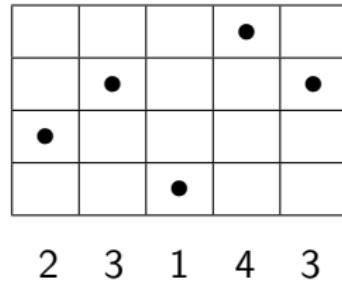
$24154 \notin \mathbf{PW}$ mais $\text{pack}(24154) = 23143 \in \mathbf{PW}$

Une représentation : $\#\text{lignes} \leq \#\text{colonnes}$



retrait lignes vides

$\rightarrow \text{pack} \rightarrow$



Algèbre de Hopf

Exemple

WQSym

- $3112 + 212 - 3 \cdot 212341 - \frac{5}{3} \cdot 111$

Algèbre de Hopf

Exemple

WQSym

- $\mathbb{R}_{3112} + \mathbb{R}_{212} - 3\mathbb{R}_{212341} - \frac{5}{3}\mathbb{R}_{111}$

Algèbre de Hopf

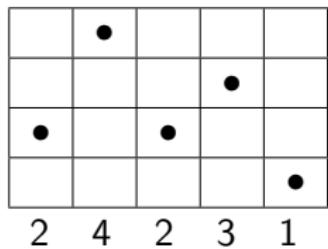
Exemple

WQSym

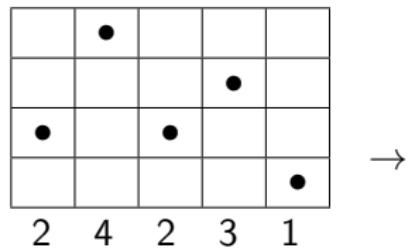
- $\mathbb{R}_{3112} + \mathbb{R}_{212} - 3\mathbb{R}_{212341} - \frac{5}{3}\mathbb{R}_{111}$
- $\mathbb{R}_{12}\mathbb{R}_{11} = \mathbb{R}_{1233} + \mathbb{R}_{1323} + \mathbb{R}_{1332} + \mathbb{R}_{3123} + \mathbb{R}_{3132} + \mathbb{R}_{3312}$
- $\Delta(\mathbb{R}_{24231}) = \mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{24231} + \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_{21} + \mathbb{R}_{1312} \otimes \mathbb{R}_1 + \mathbb{R}_{24231} \otimes \mathbb{R}_\epsilon$

- Un produit associatif unitaire \cdot
- Un coproduit coassociatif counitaire Δ
- La relation de Hopf $\Delta(a \cdot b) = \Delta(a) \cdot \Delta(b)$

Déconcaténation réduite

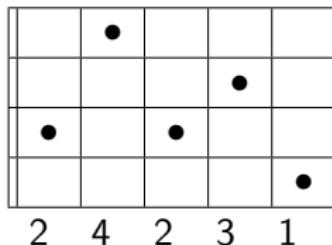


Déconcaténation réduite



Déconcaténation réduite

		•				
				•		
•			•			
2	4	2	3	1		



Déconcaténation réduite

		•				
				•		
•			•			
						•
2	4	2	3	1		

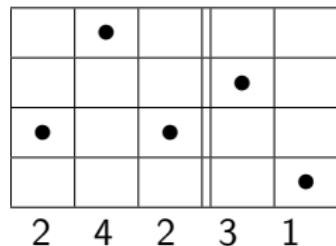
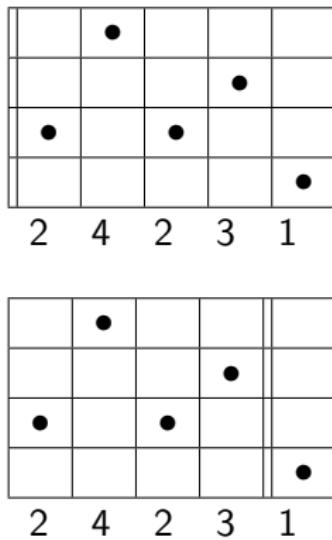


		•				
				•		
•			•			
						•
2	4	2	3	1		

		•				
					•	
•			•			
						•
2	4	2	3	1		

Déconcaténation réduite

		•				
				•		
•			•			
						•
2	4	2	3	1		



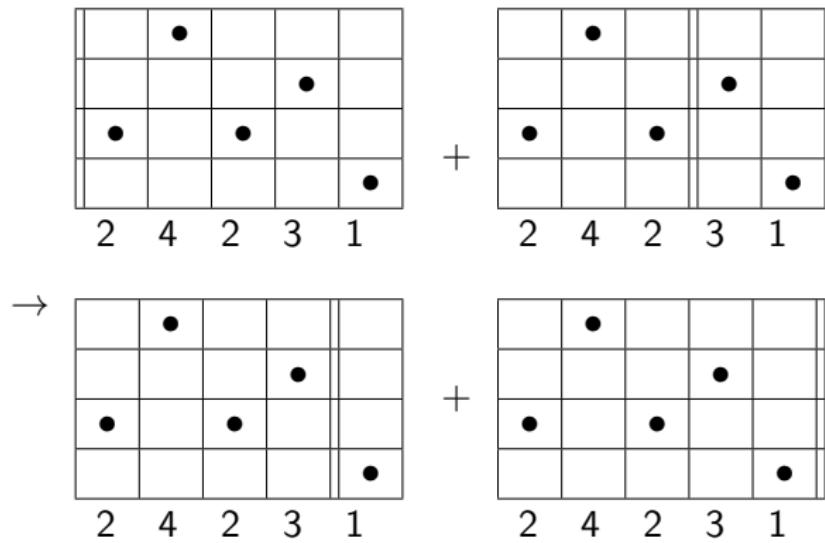
Déconcaténation réduite

	•				
			•		
•		•			
					•

2 4 2 3 1

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & \bullet & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & \bullet & \\ \hline & \bullet & & & \bullet & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array} & + & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & \bullet & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & \bullet & \\ \hline & \bullet & & & \bullet & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array} \\
 \xrightarrow{\hspace{1cm}} & & \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & \bullet & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & \bullet & \\ \hline & \bullet & & & \bullet & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array} & + & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & \bullet & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & \bullet & \\ \hline & \bullet & & & \bullet & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{c} 2 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \\ 2 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \\ 2 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \end{array} & & \begin{array}{c} 2 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \\ 2 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \\ 2 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \end{array}
 \end{array}$$

Déconcaténation réduite

 \mathbb{R}_{24231} 

Déconcaténation réduite

$$\mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{24231}$$

$$\mathbb{R}_{24231}$$

Δ

2	4	2	3	1	

+

2	4	2	3	1	

+

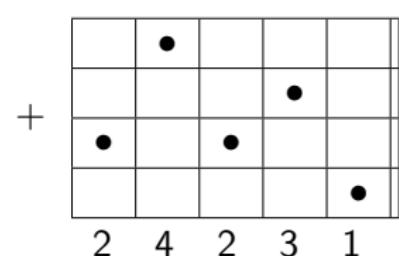
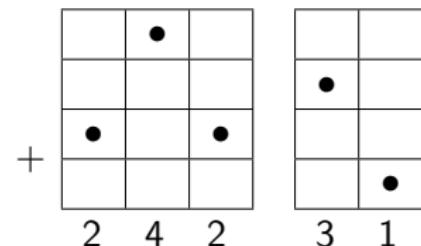
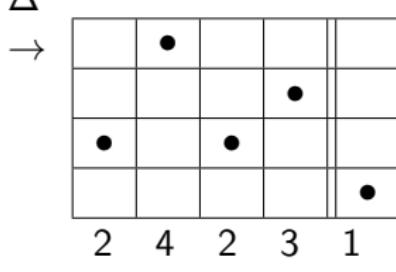
2	4	2	3	1	

Déconcaténation réduite

$$\mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{24231}$$

$$\mathbb{R}_{24231}$$

Δ



Déconcaténation réduite

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{24231} \\
 + & \begin{array}{c} \text{---} \\ \Delta \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \mathbb{R}_{24231} \end{array} \\
 + & \begin{array}{c} \text{---} \\ \Delta \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \mathbb{R}_{24231} \end{array}
 \end{aligned}$$

\mathbb{R}_{24231}
 Δ
 \rightarrow

 $2 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \quad 1$

\mathbb{R}_{24231}
 Δ
 \rightarrow

 $2 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \quad 1$

\mathbb{R}_{24231}
 Δ
 \rightarrow

 $2 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \quad 1$

Déconcaténation réduite

$$\mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{24231} + \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_{21}$$

$$\mathbb{R}_{24231}$$

Δ
 \rightarrow

		•				
				•		
•			•			
						•
2	4	2	3	1		

 $+$

	•					
				•		
•			•			
						•
2	4	2	3	1		

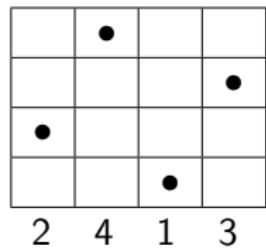
Déconcaténation réduite

$$\mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{24231} + \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_{21}$$

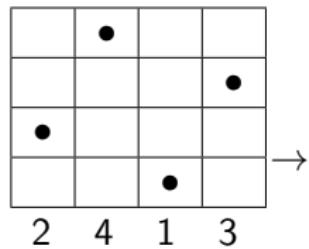
$$\mathbb{R}_{24231} \xrightarrow{\Delta}$$

$$\mathbb{R}_{1312} \otimes \mathbb{R}_1 + \mathbb{R}_{24231} \otimes \mathbb{R}_\epsilon$$

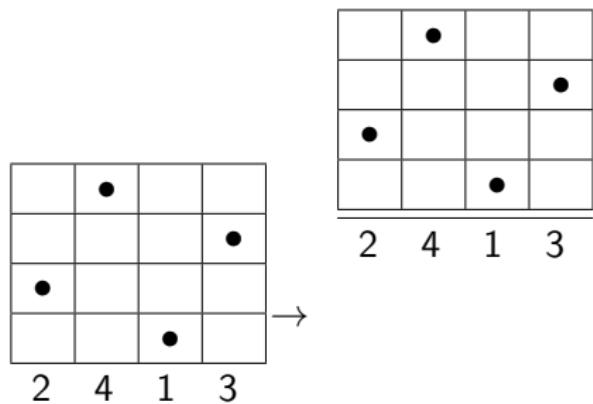
Désassemblage horizontal



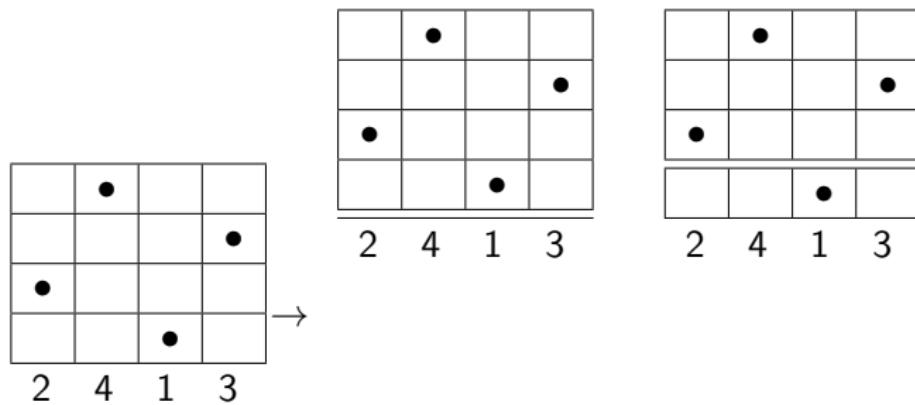
Désassemblage horizontal



Désassemblage horizontal



Désassemblage horizontal



Désassemblage horizontal

•			
			•
•			
		•	

2 4 1 3



	•		
•			
		•	

2 4 1 3

	•		
•			
		•	

2 4 1 3

	•		
•			
		•	

2 4 1 3

Désassemblage horizontal

•			
			•
•			
		•	

2 4 1 3



•			
•			
		•	

2 4 1 3

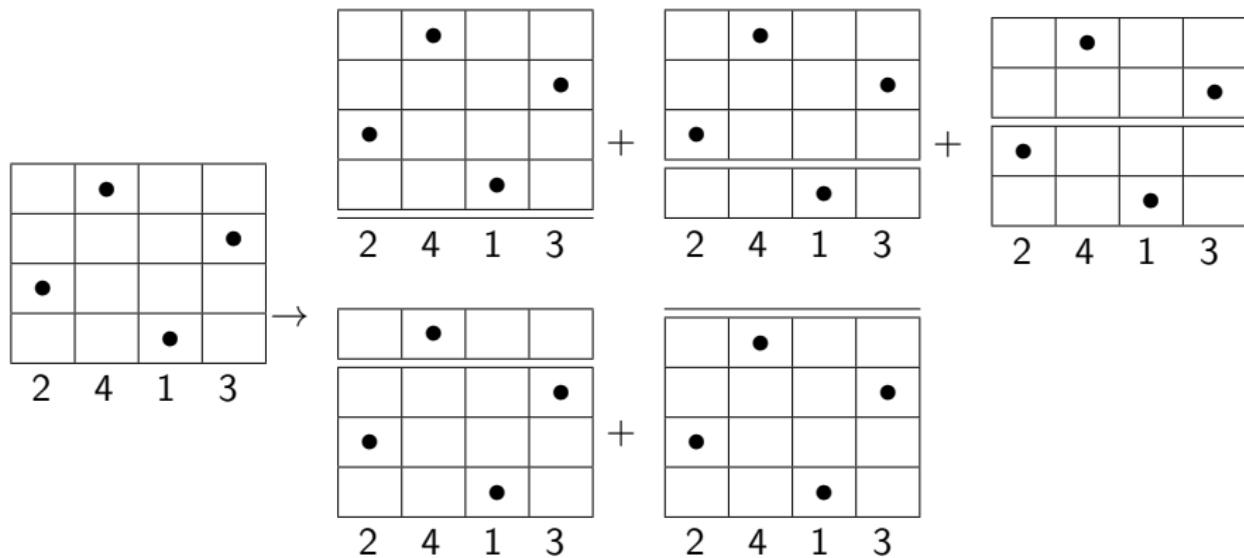
•			
•			
		•	

2 4 1 3

•			
•			
		•	

2 4 1 3

Désassemblage horizontal



Désassemblage horizontal

Q_{2413}

$$\begin{array}{c}
 \Delta \\
 \rightarrow
 \end{array} \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & \bullet & & \\
 & & & \\
 & & & \\
 & \bullet & & \\
 & & & \\
 & & & \\
 & & \bullet & \\
 \hline
 2 & 4 & 1 & 3
 \end{array} + \begin{array}{cccc}
 & \bullet & & \\
 & & & \\
 & & & \\
 & \bullet & & \\
 & & & \\
 & & & \\
 & & \bullet & \\
 \hline
 2 & 4 & 1 & 3
 \end{array} + \begin{array}{cccc}
 & \bullet & & \\
 & & & \\
 & & & \\
 & \bullet & & \\
 & & & \\
 & & & \\
 & & \bullet & \\
 \hline
 2 & 4 & 1 & 3
 \end{array} \\
 + \begin{array}{cccc}
 & \bullet & & \\
 & & & \\
 & & & \\
 & \bullet & & \\
 & & & \\
 & & & \\
 & & \bullet & \\
 \hline
 2 & 4 & 1 & 3
 \end{array} + \begin{array}{cccc}
 & \bullet & & \\
 & & & \\
 & & & \\
 & \bullet & & \\
 & & & \\
 & & & \\
 & & \bullet & \\
 \hline
 2 & 4 & 1 & 3
 \end{array}
 \end{array}$$

Désassemblage horizontal

$$\begin{array}{c}
 \mathbb{Q}_\epsilon \otimes \mathbb{Q}_{2413+} \\
 \Delta \rightarrow \\
 \mathbb{Q}_{2413} \\
 + \\
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \bullet & & \\ \hline & & & \\ \hline \bullet & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & \bullet & \\ \hline \end{array} \\
 2 \quad 4 \quad 1 \quad 3
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \bullet & & \\ \hline & & & \\ \hline \bullet & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & \bullet & \\ \hline \end{array} \\
 2 \quad 4 \quad 1 \quad 3
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \bullet & & \\ \hline & & & \\ \hline \bullet & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & \bullet & \\ \hline \end{array} \\
 2 \quad 4 \quad 1 \quad 3
 \end{array}
 \end{array}$$

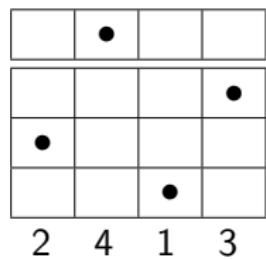
Désassemblage horizontal

$$\mathbb{Q}_\epsilon \otimes \mathbb{Q}_{2413+}$$

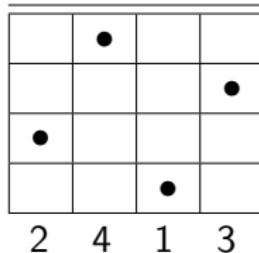
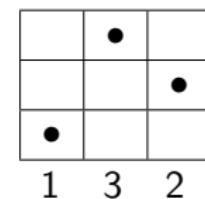
Δ

$$\mathbb{Q}_{2413} \rightarrow$$

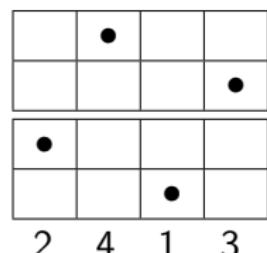
Désassemblage horizontal

 Q_{2413}
 Δ
 \rightarrow


+


 $Q_\epsilon \otimes Q_{2413+}$


+



Désassemblage horizontal

 Q_{2413}
 Δ
 \rightarrow

		•		
				•
•				
			•	

2 4 1 3

 $+$

		•		
				•
•				
			•	

2 4 1 3

$$Q_\epsilon \otimes Q_{2413} + Q_1 \otimes Q_{132} +$$

	•		
			•
•			
			•

2 4 1 3

Désassemblage horizontal

$$\mathbb{Q}_\epsilon \otimes \mathbb{Q}_{2413} + \mathbb{Q}_1 \otimes \mathbb{Q}_{132} + \mathbb{Q}_{21} \otimes \mathbb{Q}_{21}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}_{2413} & \xrightarrow{\Delta} & \\ & \rightarrow & \\ & & \mathbb{Q}_{213} \otimes \mathbb{Q}_1 + \mathbb{Q}_{2413} \otimes \mathbb{Q}_\epsilon \end{array}$$

Auto-dualité

- \mathbb{R} et \mathbb{Q} bases de \mathbf{WQSym}^* et \mathbf{WQSym}

Auto-dualité

- \mathbb{R} et \mathbb{Q} bases de **WQSym*** et **WQSym**
- 2001 Duchamp-Hivert-Thibon conjecturent l'auto-dualité de **WQSym**

Auto-dualité

- \mathbb{R} et \mathbb{Q} bases de **WQSym*** et **WQSym**
- 2001 Duchamp-Hivert-Thibon conjecturent l'auto-dualité de **WQSym**
- 2005 Foissy démontre l'auto-dualité des bigèbre bidendriforme (rigidité)

Auto-dualité

- \mathbb{R} et \mathbb{Q} bases de **WQSym*** et **WQSym**
- 2001 Duchamp-Hivert-Thibon conjecturent l'auto-dualité de **WQSym**
- 2005 Foissy démontre l'auto-dualité des bigèbre bidendriforme (rigidité)
- Pas d'isomorphisme explicite

Demis coproduits

Exemple de coproduits gauche et droit

- $\tilde{\Delta}(\mathbb{Q}_{12536434}) =$

Demis coproduits

Exemple de coproduits gauche et droit

- $\tilde{\Delta}(\mathbb{Q}_{12536434}) = \mathbb{Q}_1 \otimes \mathbb{Q}_{1425323} + \mathbb{Q}_{12} \otimes \mathbb{Q}_{314212} + \mathbb{Q}_{1233} \otimes \mathbb{Q}_{2311} + \mathbb{Q}_{123434} \otimes \mathbb{Q}_{12} + \mathbb{Q}_{1253434} \otimes \mathbb{Q}_1$

Demis coproduits

Exemple de coproduits gauche et droit

- $\tilde{\Delta}(\mathbb{Q}_{12536434}) = \mathbb{Q}_1 \otimes \mathbb{Q}_{1425323} + \mathbb{Q}_{12} \otimes \mathbb{Q}_{314212} + \mathbb{Q}_{1233} \otimes \mathbb{Q}_{2311} + \mathbb{Q}_{123434} \otimes \mathbb{Q}_{12} + \mathbb{Q}_{1253434} \otimes \mathbb{Q}_1$
- $\Delta_{\succeq}(\mathbb{Q}_{12536434}) = \mathbb{Q}_1 \otimes \mathbb{Q}_{1425323} + \mathbb{Q}_{12} \otimes \mathbb{Q}_{314212} + \mathbb{Q}_{1233} \otimes \mathbb{Q}_{2311},$
- $\Delta_{\preceq}(\mathbb{Q}_{12536434}) = \mathbb{Q}_{123434} \otimes \mathbb{Q}_{12} + \mathbb{Q}_{1253434} \otimes \mathbb{Q}_1.$

Demis coproduits

Définitions

- $\Delta_{\succeq}(\mathbb{Q}_u) := \sum_{i=1}^{u_n-1} \mathbb{Q}_{u|_{\leq i}} \otimes \mathbb{Q}_{\text{pack}(u|_{>i})},$
- $\Delta_{\preceq}(\mathbb{Q}_u) := \sum_{i=u_n}^{\max(u)-1} \mathbb{Q}_{u|_{\leq i}} \otimes \mathbb{Q}_{\text{pack}(u|_{>i})}.$

Exemple de coproduits gauche et droit

- $\tilde{\Delta}(\mathbb{Q}_{12536434}) = \mathbb{Q}_1 \otimes \mathbb{Q}_{1425323} + \mathbb{Q}_{12} \otimes \mathbb{Q}_{314212} + \mathbb{Q}_{1233} \otimes \mathbb{Q}_{2311} + \mathbb{Q}_{123434} \otimes \mathbb{Q}_{12} + \mathbb{Q}_{1253434} \otimes \mathbb{Q}_1$
- $\Delta_{\succeq}(\mathbb{Q}_{12536434}) = \mathbb{Q}_1 \otimes \mathbb{Q}_{1425323} + \mathbb{Q}_{12} \otimes \mathbb{Q}_{314212} + \mathbb{Q}_{1233} \otimes \mathbb{Q}_{2311},$
- $\Delta_{\preceq}(\mathbb{Q}_{12536434}) = \mathbb{Q}_{123434} \otimes \mathbb{Q}_{12} + \mathbb{Q}_{1253434} \otimes \mathbb{Q}_1.$

Bigèbre bidendriforme

Définition

- Raffinement de l'associativité et la coassociativité
 - 3 et 3 équations
- Raffinement de la relation de Hopf
 - 4 équations

Bigèbre bidendriforme

$$(a \prec b) \prec c = a \prec (b \prec c + b \succ c),$$

$$(a \succ b) \prec c = a \succ (b \prec c),$$

$$(a \prec b + a \succ b) \succ c = a \succ (b \succ c).$$

$$(\Delta_\prec \otimes \text{Id}) \circ \Delta_\prec(a) = (\text{Id} \otimes \Delta_\prec + \text{Id} \otimes \Delta_\succ) \circ \Delta_\prec(a),$$

$$(\Delta_\succ \otimes \text{Id}) \circ \Delta_\prec(a) = (\text{Id} \otimes \Delta_\prec) \circ \Delta_\succ(a),$$

$$(\Delta_\prec \otimes \text{Id} + \Delta_\succ \otimes \text{Id}) \circ \Delta_\succ(a) = (\text{Id} \otimes \Delta_\succ) \circ \Delta_\succ(a).$$

$$\Delta_\succ(a \succ b) = a' b'_\succ \otimes a'' \succ b''_\succ + b'_\succ \otimes a \succ b''_\succ + ab'_\succ \otimes b''_\succ + a' \otimes a'' \succ b + a \otimes b,$$

$$\Delta_\succ(a \prec b) = a' b'_\succ \otimes a'' \prec b''_\succ + b'_\succ \otimes a \prec b''_\succ + a' \otimes a'' \prec b,$$

$$\Delta_\prec(a \succ b) = a' b'_\prec \otimes a'' \succ b''_\prec + b'_\prec \otimes a \succ b''_\prec + ab'_\prec \otimes b''_\prec,$$

$$\Delta_\prec(a \prec b) = a' b'_\prec \otimes a'' \prec b''_\prec + b'_\prec \otimes a \prec b''_\prec + a' b \otimes a'' + b \otimes a.$$

Bigèbre bidendriforme

Définition

- Raffinement de l'associativité et la coassociativité
 - 3 et 3 équations
- Raffinement de la relation de Hopf
 - 4 équations

Théorème [Foissy]

Si A est une bigèbre bidendriforme alors A est généré librement par $T\text{Prim}(A)$ en tant qu'algèbre dendriforme.

Bigèbre bidendriforme

Définition

- Raffinement de l'associativité et la coassociativité
 - 3 et 3 équations
- Raffinement de la relation de Hopf
 - 4 équations

Théorème [Foissy]

Si A est une bigèbre bidendriforme alors A est généré librement par $T\text{Prim}(A)$ en tant qu'algèbre dendriforme.

Séries

n	1	2	3	4	5	6	7	8
\mathbf{WQSym}_n	1	3	13	75	541	4 683	47 293	545 835
$T\text{Prim}_n$	1	1	4	28	240	2 384	26 832	337 168

Bigèbre bidendriforme

Définition

- Raffinement de l'associativité et la coassociativité
 - 3 et 3 équations
- Raffinement de la relation de Hopf
 - 4 équations

Théorème [Foissy]

Si A est une bigèbre bidendriforme alors A est généré librement par $T\text{Prim}(A)$ en tant qu'algèbre dendriforme.

Corollaire

WQSym est auto-duale.

Définitions

Élément primitif

P est un élément primitif $\iff \tilde{\Delta}(P) = 0$

Ex : $\mathbb{R}_{1213} - \mathbb{R}_{2321}$

Définitions

Élément primitif

P est un élément primitif $\iff \tilde{\Delta}(P) = 0$

Ex : $\mathbb{R}_{1213} - \mathbb{R}_{2321}$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{1213}) = \Delta_{\succ}(\mathbb{R}_{1213}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_1$$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{2321}) = \Delta_{\prec}(\mathbb{R}_{2321}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_1$$

Définitions

Élément primitif

P est un élément primitif $\iff \tilde{\Delta}(P) = 0$

Ex : $\mathbb{R}_{1213} - \mathbb{R}_{2321}$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{1213}) = \Delta_{\succ}(\mathbb{R}_{1213}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_1$$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{2321}) = \Delta_{\prec}(\mathbb{R}_{2321}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_1$$

Élément totalement primitif

P est un élément totalement primitif $\iff \Delta_{\prec}(P) = \Delta_{\succ}(P) = 0$

Ex : $\mathbb{R}_{12443} - \mathbb{R}_{21443} - \mathbb{R}_{23441} + \mathbb{R}_{32441}$

Définitions

Élément primitif

P est un élément primitif $\iff \tilde{\Delta}(P) = 0$

Ex : $\mathbb{R}_{1213} - \mathbb{R}_{2321}$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{1213}) = \Delta_{\succ}(\mathbb{R}_{1213}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_1$$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{2321}) = \Delta_{\prec}(\mathbb{R}_{2321}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_1$$

Élément totalement primitif

P est une élément totalement primitif $\iff \Delta_{\prec}(P) = \Delta_{\succ}(P) = 0$

Ex : $\mathbb{R}_{12443} - \mathbb{R}_{21443} - \mathbb{R}_{23441} + \mathbb{R}_{32441}$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{12443}) = \mathbb{R}_{1233} \otimes \mathbb{R}_1 \quad \mathbb{R}_{12} \otimes \mathbb{R}_{221} + \mathbb{R}_1 \otimes \mathbb{R}_{1332}$$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{21443}) = \mathbb{R}_{2133} \otimes \mathbb{R}_1 \quad \mathbb{R}_{21} \otimes \mathbb{R}_{221} + \mathbb{R}_1 \otimes \mathbb{R}_{1332}$$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{23441}) = \mathbb{R}_{1233} \otimes \mathbb{R}_1 \quad \mathbb{R}_{12} \otimes \mathbb{R}_{221} + \mathbb{R}_1 \otimes \mathbb{R}_{2331}$$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{32441}) = \mathbb{R}_{2133} \otimes \mathbb{R}_1 \quad \mathbb{R}_{21} \otimes \mathbb{R}_{221} + \mathbb{R}_1 \otimes \mathbb{R}_{2331}$$

Mon but

Isomorphisme bidendriforme explicite entre **WQSym** et sa duale

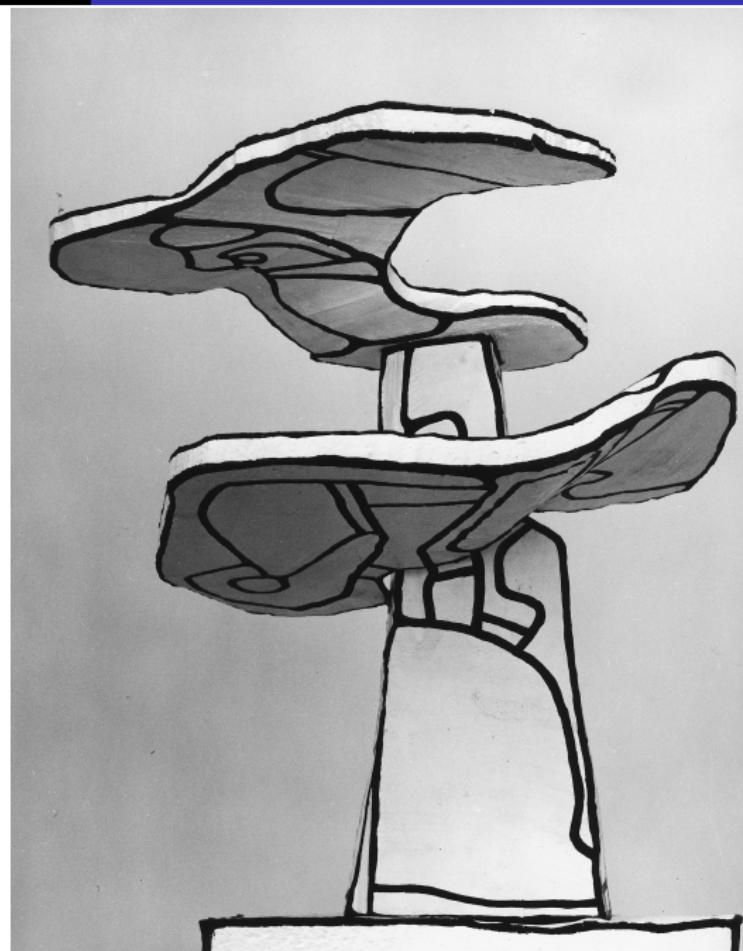
Mon but

Isomorphisme bidendriforme explicite entre **WQSym** et sa duale
 \Updownarrow
Isomorphisme explicite entre $T\text{Prim}(\mathbf{WQSym})$ et le dual

Mon but

Isomorphisme bidendrifforme explicite entre **WQSym** et sa duale
 \Updownarrow
Isomorphisme explicite entre $T\text{Prim}(\mathbf{WQSym})$ et le dual

Construction de deux bases de totalement primitif
(dans **WQSym** et **WQSym** *)



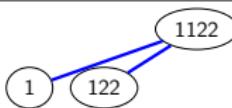
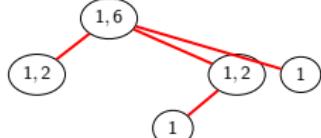
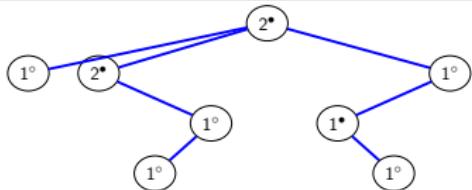
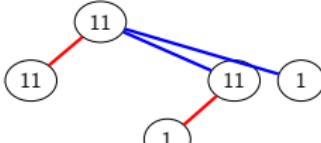
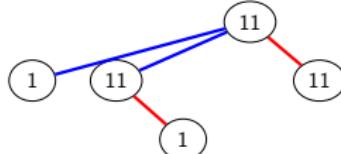
Jean Dubuffet, Arbre biplan (version I)

août 1968, époxy peint au polyuréthane (1ère épreuve), 72 x 61 x 48 cm,

coll. Fondation Dubuffet/© A.D.A.G.P. Paris

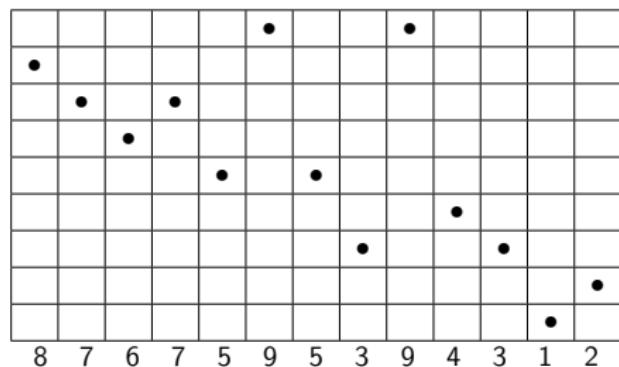
Forêts biplanes, représentation de décompositions

44523315

	Squelettes	
	Arbres tassés	
	Arbres bicolores	

Squelette rouge de 8767595394312

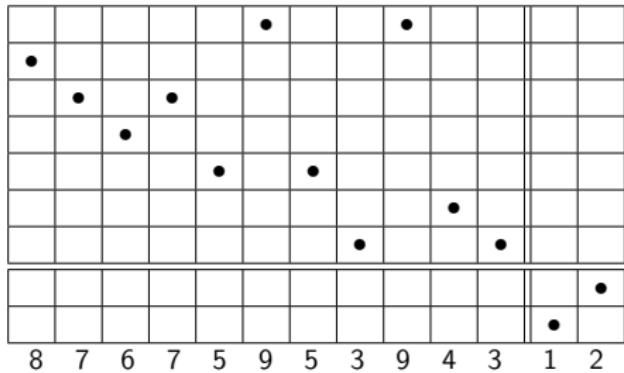
$F_{R\text{ske}}(8767595394312)$



Squelette rouge de 8767595394312

$F_{R\text{ske}}(8767595394312)$

Factorisation en descentes globales

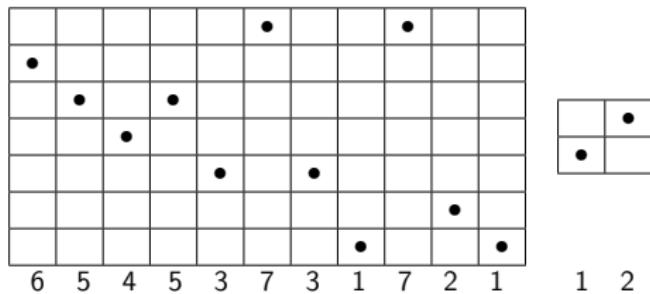


Squelette rouge de 8767595394312

$F_{Rske}(8767595394312) =$

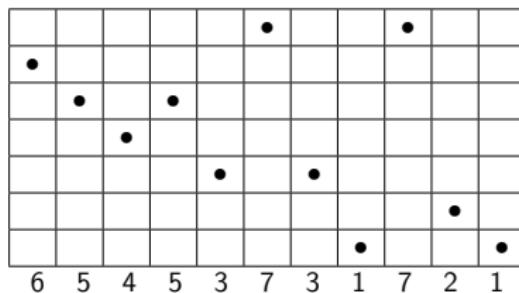
$T_{Rske}(65453731721) T_{Rske}(12)$

Factorisation en descentes globales
+ tassemment



Squelette rouge de 8767595394312

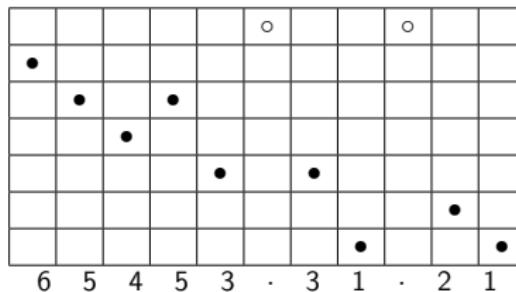
$F_{Rske}(8767595394312) =$
 $T_{Rske}(65453731721) T_{Rske}(12)$



Squelette rouge de 8767595394312

 $F_{R\text{ske}}(8767595394312) =$

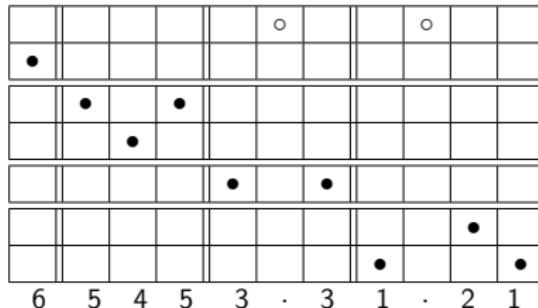
Retrait des lettres de valeur max

 $T_{R\text{ske}}(65453731721) T_{R\text{ske}}(12)$ 

Squelette rouge de 8767595394312

 $F_{\text{Rske}}(8767595394312) =$
 $T_{\text{Rske}}(65453731721) T_{\text{Rske}}(12)$

Factorisation en descentes globales

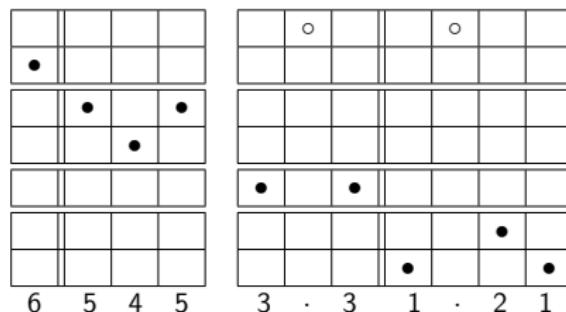


Squelette rouge de 8767595394312

$F_{Rske}(8767595394312) =$

$T_{Rske}(65453731721) T_{Rske}(12)$

Distinction de deux groupes de facteurs



Squelette rouge de 8767595394312

$$F_{Rske}(8767595394312) =$$

$$T_{Rske}(65453731721) T_{Rske}(12)$$

Remise des lettres de valeur max +
tassemment

•				
	•			•
			•	

3 2 1 2

•				•
•		•		
			•	
				•

3 4 3 1 4 2 1

Squelette rouge de 8767595394312

$$F_{Rske}(8767595394312) =$$

$$T_{Rske}(65453731721) T_{Rske}(12) =$$

$$F_{ske}(3212)$$

3431421

$$T_{Rske}(12)$$

•				
	•			•
		•		
			•	

3 2 1 2

3431421 est
Irréductible rouge

	•			•	
•		•			•
			•		
				•	
					•

3 4 3 1 4 2 1

Irréductible rouge

Un mot tassé w est **rouge irréductible** si il n'est pas décomposable par cet algorithme.

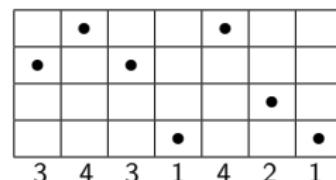
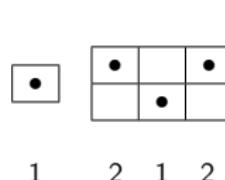
Squelette rouge de 8767595394312

$F_{Rske}(8767595394312) =$ On boucle

$T_{Rske}(65453731721) T_{Rske}(12) =$

$T_{ske}(1)$ $T_{ske}(212)$ $T_{ske}(3431421)$

$T_{Rske}(12)$

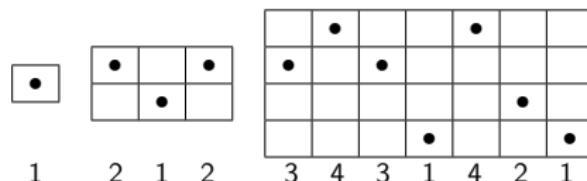


Irréductible rouge

Un mot tassé w est **rouge irréductible** si il n'est pas décomposable par cet algorithme.

Squelette rouge de 8767595394312

$$F_{R\text{ske}}(8767595394312) = ((1/212)\blacktriangleright 3431421)/(1\blacktriangleright 1)$$



Irréductible rouge

Un mot tassé w est **rouge irréductible** si il n'est pas décomposable par cet algorithme.

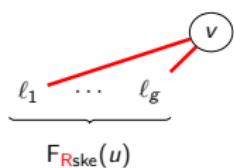
$$\forall n, RougeIrréductible_n = TPrim_n.$$

Le début de la base \mathbb{P}

$$\mathbb{P}_{\textcircled{1}} := \mathbb{R}_1,$$

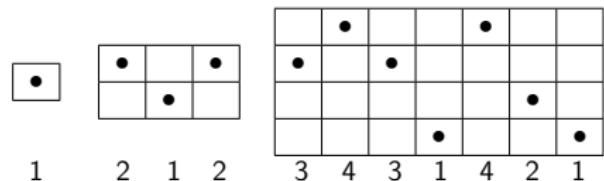
$$\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_k} := (\dots (\mathbb{P}_{t_k} \prec \dots) \prec \mathbb{P}_{t_2}) \prec \mathbb{P}_{t_1},$$

$$\mathbb{P} := \langle \mathbb{P}_{\ell_1}, \mathbb{P}_{\ell_2}, \dots, \mathbb{P}_{\ell_g}; \mathbb{P}_{T(w)} \rangle.$$



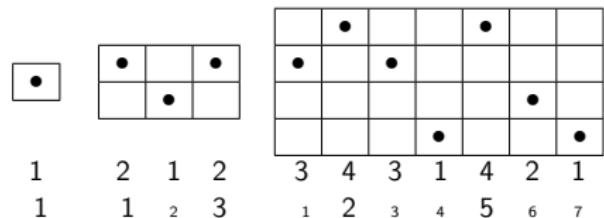
Forêt rouge de 8767595394312

La partie droite!

 $F_R(8767595394312) =$ 

Forêt rouge de 8767595394312

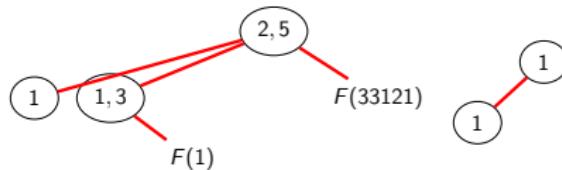
Positions des max

 $F_R(8767595394312) =$ 

Forêt rouge de 8767595394312

Fils droits

$$F_R(8767595394312) =$$



Forest components:

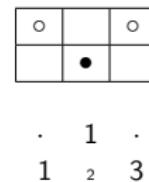
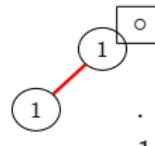
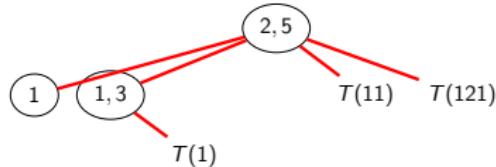
○	○	○	○	○	○	○
●		●			●	
.	.	1	.		.	
1	1	2	3			

3	.	3	1	.	2	1
1	2	3	4	5	6	7

Forêt rouge de 8767595394312

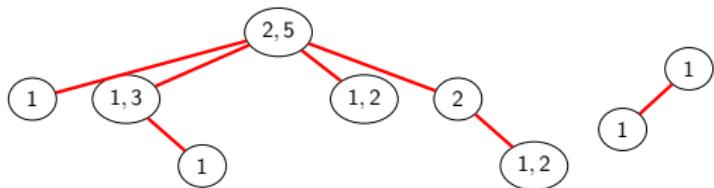
On reboucle

$$F_R(8767595394312) =$$



	o				o		
•		•					
3	.	3	1	.	2	1	
1	2	3	4	5	6	7	

Forêt rouge de 8767595394312

 $F_R(8767595394312) =$ 

La base \mathbb{P}

$$\mathbb{P}_{\textcircled{1}} := \mathbb{R}_1,$$

$$\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_k} := (\dots (\mathbb{P}_{t_k} \prec \dots) \prec \mathbb{P}_{t_2}) \prec \mathbb{P}_{t_1},$$

$$\mathbb{P} := \langle \mathbb{P}_{\ell_1}, \mathbb{P}_{\ell_2}, \dots, \mathbb{P}_{\ell_g}; \mathbb{P}_{T(w)} \rangle,$$

A diagram showing a single node labeled v at the top, connected by red lines to g separate trees. The first tree is labeled ℓ_1 , followed by ellipses, and the g th tree is labeled ℓ_g .

$$\mathbb{P}_I := \Phi_I(\mathbb{P}_{r_1, \dots, r_d}).$$

A diagram showing a single node labeled I at the top, connected by red lines to d separate trees. The first tree is labeled r_1 , followed by ellipses, and the d th tree is labeled r_d .

La base \mathbb{P}

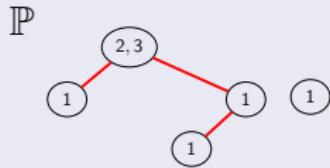
$$\mathbb{P}_{\textcircled{1}} := \mathbb{R}_1,$$

$$\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_k} := (\dots (\mathbb{P}_{t_k} \prec \dots) \prec \mathbb{P}_{t_2}) \prec \mathbb{P}_{t_1},$$

$$\mathbb{P} := \langle \mathbb{P}_{\ell_1}, \mathbb{P}_{\ell_2}, \dots, \mathbb{P}_{\ell_g}; \mathbb{P}_{T(w)} \rangle,$$

$$\mathbb{P}_{\textcircled{I}} := \Phi_I(\mathbb{P}_{r_1, \dots, r_d}).$$

Exemple



$$= \mathbb{R}_{235541} - \mathbb{R}_{245531} - \mathbb{R}_{244531} - \mathbb{R}_{245431} - \\ \mathbb{R}_{254431} + \mathbb{R}_{325541} - \mathbb{R}_{425531} - \mathbb{R}_{524431} + \\ \mathbb{R}_{352541} - \mathbb{R}_{452531} + \mathbb{R}_{355241} - \mathbb{R}_{455231} + \\ \mathbb{R}_{344521} + \mathbb{R}_{345421} + \mathbb{R}_{354421} + \mathbb{R}_{534421}$$

La base \mathbb{P}

$$\mathbb{P}_{\textcircled{1}} := \mathbb{R}_1,$$

$$\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_k} := (\dots (\mathbb{P}_{t_k} \prec \dots) \prec \mathbb{P}_{t_2}) \prec \mathbb{P}_{t_1},$$

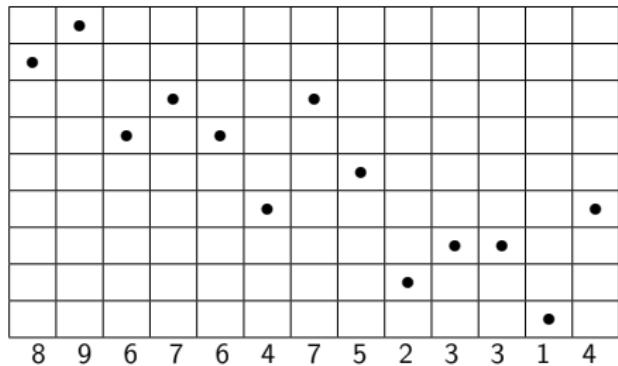
$$\mathbb{P} := \langle \mathbb{P}_{\ell_1}, \mathbb{P}_{\ell_2}, \dots, \mathbb{P}_{\ell_g}; \mathbb{P}_{T(w)} \rangle,$$

$$\mathbb{P} := \Phi_I(\mathbb{P}_{r_1, \dots, r_d}).$$

Théorème [M.]

- $(\mathbb{P}_f)_{f \in \mathfrak{F}_{\mathbb{R}^n}}$ est une base de \mathbf{WQSym}_n^* ,
- $(\mathbb{P}_t)_{t \in \mathfrak{T}_{\mathbb{R}^n}}$ est une base de Prim_n^* ,
- $(\mathbb{P}_t)_{t \in \mathfrak{N}_{\mathbb{R}^n}}$ est une base de TPrim_n^* .

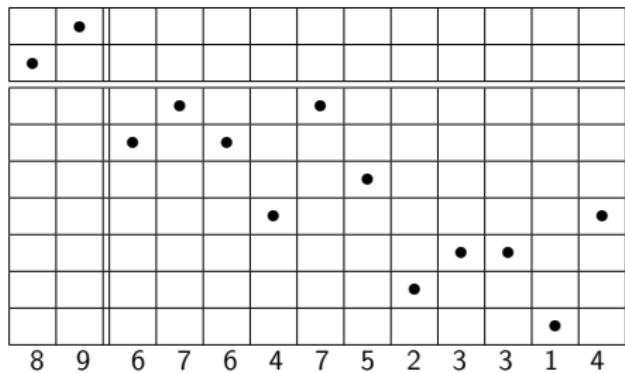
Squelette bleu de 8967647523314

 $F_{\text{Bske}}(8967647523314)$ 

Squelette bleu de 8967647523314

 $F_{\text{Bsk}}(8967647523314)$

Factorisation en descentes globales

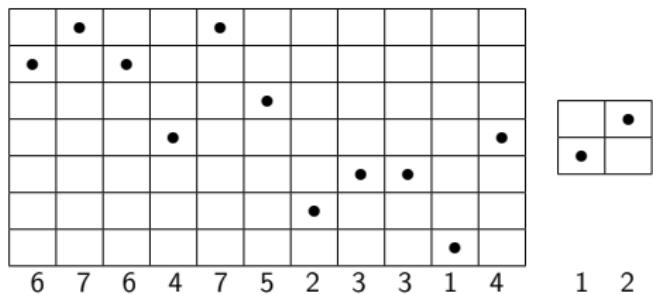


Squelette bleu de 8967647523314

$F_{Bske}(8967647523314) =$

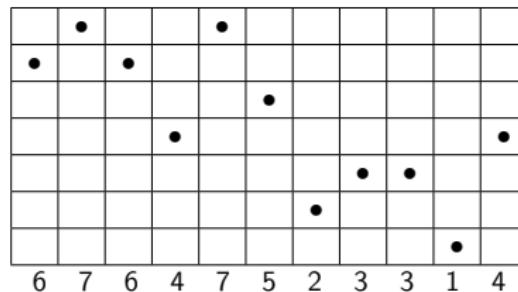
$T_{Bske}(67647523314) T_{Bske}(12)$

Factorisation en descentes globales
+ tassement + échange



Squelette bleu de 8967647523314

$$\begin{aligned} F_{Bske}(8967647523314) = \\ T_{Bske}(67647523314) \, T_{Bske}(12) \end{aligned}$$

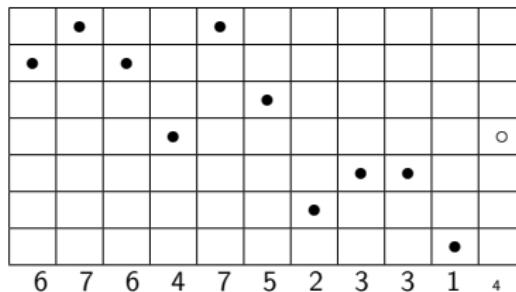


Squelette bleu de 8967647523314

$$F_{Bske}(8967647523314) =$$

$$T_{Bske}(67647523314) T_{Bske}(12)$$

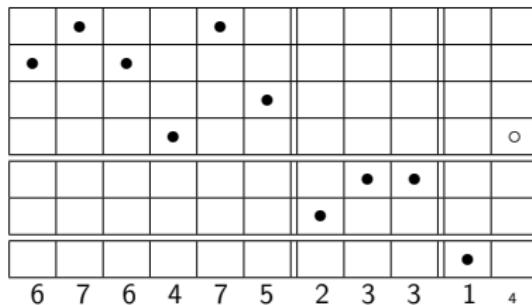
Retrait de la dernière lettre



Squelette bleu de 8967647523314

 $F_{\text{Bske}}(8967647523314) =$ $T_{\text{Bske}}(67647523314) T_{\text{Bske}}(12)$

Factorisation en descentes globales

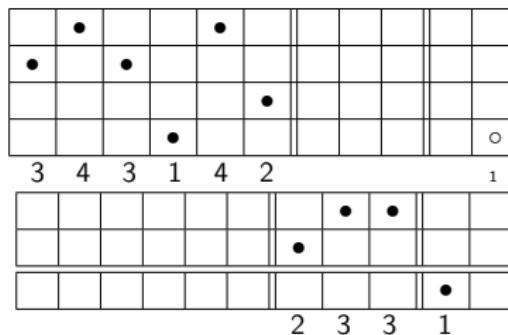


Squelette bleu de 8967647523314

$$F_{Bske}(8967647523314) =$$

$$T_{Bske}(67647523314) T_{Bske}(12)$$

Distinction de deux groupes de facteurs



Squelette bleu de 8967647523314

$$F_{Bske}(8967647523314) =$$

$$T_{Bske}(67647523314) T_{Bske}(12) =$$

$$F_{ske}^*(2331) \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad 3431421$$

$$T_{Bske}(12)$$

		•	•		
•			•		
				•	

2 3 3 1

3431421 est
Irréductible bleu

	•			•	
•		•			
				•	
					•
3	4	3	1	4	2

3 4 3 1 4 2 1

Irréductible bleu

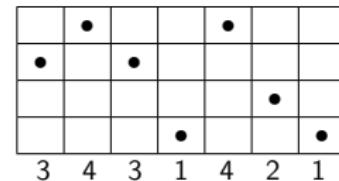
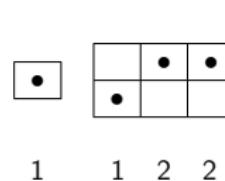
Un mot tassé w est **bleu irréductible** si il n'est pas décomposable par cet algorithme.

Squelette bleu de 8967647523314

$F_{Bske}(8967647523314) =$ On boucle

$T_{Bske}(67647523314) T_{Bske}(12) =$

$$\begin{array}{c} 3431421 \\ \text{---} \\ T_{ske}^*(1) \quad T_{ske}^*(122) \end{array} \quad T_{Bske}(12)$$



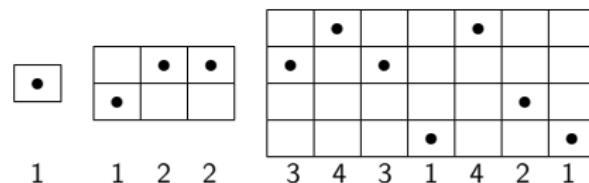
Irréductible bleu

Un mot tassé w est **bleu irréductible** si il n'est pas décomposable par cet algorithme.

Squelette bleu de 8967647523314

$$F_{B\text{ske}}(8967647523314) =$$

$$((1/122)\blacktriangle 3431421)/(1\blacktriangle 1)$$

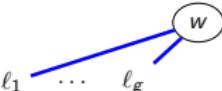


Irréductible bleu

Un mot tassé w est **bleu irréductible** si il n'est pas décomposable par cet algorithme.

$$\forall n, BleuIrréductible_n = RougeIrréductible_n = TPrim_n.$$

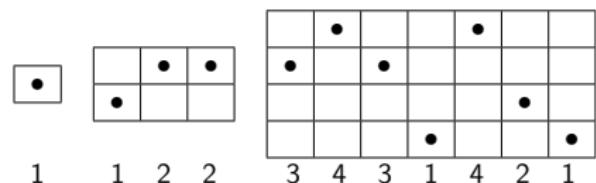
Le début de la base \mathbb{O}

$$\begin{aligned}\mathbb{O}_{\textcircled{1}} &:= \mathbb{Q}_1, \\ \mathbb{O}_{t_1, \dots, t_k} &:= (\dots (\mathbb{O}_{t_k} \prec \dots) \prec \mathbb{O}_{t_2}) \prec \mathbb{O}_{t_1}, \\ \mathbb{O} &\quad := \langle \mathbb{O}_{\ell_1}, \mathbb{O}_{\ell_2}, \dots, \mathbb{O}_{\ell_g}; \mathbb{O}_{T^*(w)} \rangle.\end{aligned}$$


Forêt bleue de 8967647523314

La partie droite!

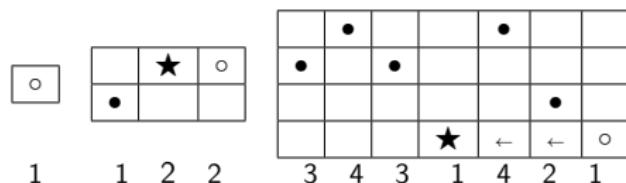
$$F_B(8967647523314) =$$



Forêt bleue de 8967647523314

 $F_{\mathbb{B}}(8967647523314) =$ 

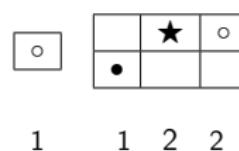
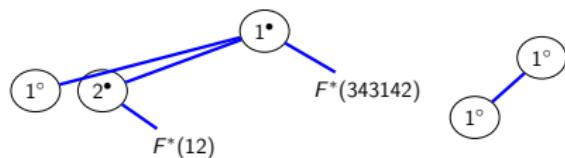
La dernière lettre est-elle présente dans le reste du mot ?



Forêt bleue de 8967647523314

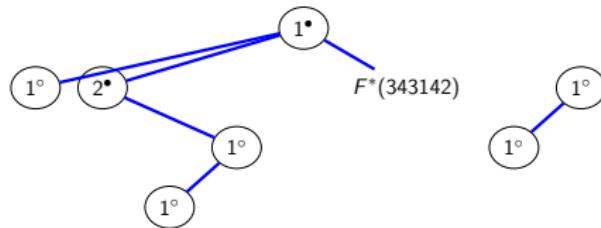
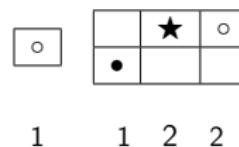
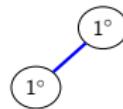
Fils droits

$$F_{\mathbb{B}}(8967647523314) =$$



3	4	3	1	4	2	1
3	4	3	1	4	2	1
3	4	3	1	4	2	1
3	4	3	1	4	2	1

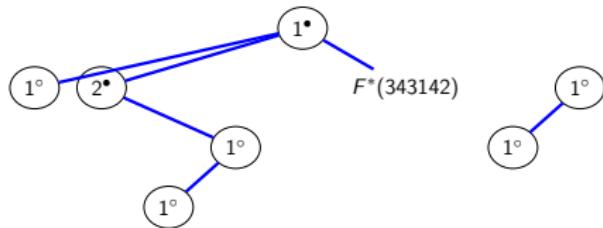
Forêt bleue de 8967647523314

 $F_B(8967647523314) =$  $F^*(343142)$ 

3	4	3	1	4	2	1	○

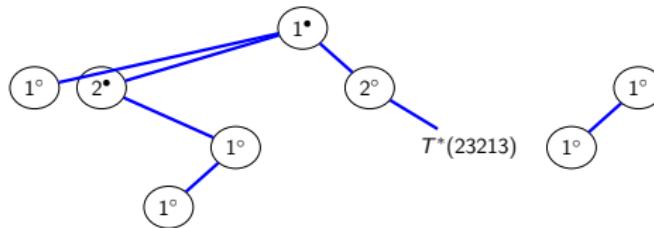
Below the table are the numbers 3, 4, 3, 1, 4, 2, 1.

Forêt bleue de 8967647523314

 $F_B(8967647523314) =$ 

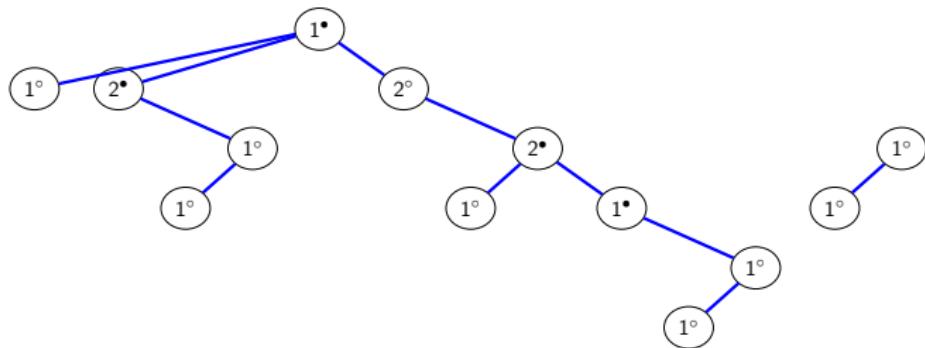
		•				•	
•			•				
3	4	3	1	4	2		

Forêt bleue de 8967647523314

 $F_B(8967647523314) =$  $T^*(23213)$

		•				•	
•			•				
X	←	←	←	←	←	○	
3	4	3	1	4	2		

Forêt bleue de 8967647523314

 $F_B(8967647523314) =$ 

La base \mathbb{O}

$$\mathbb{O}_{\bigcirc_1} := \mathbb{Q}_1,$$

$$\mathbb{O}_{t_1, \dots, t_k} := (\dots (\mathbb{O}_{t_k} \prec \dots) \prec \mathbb{O}_{t_2}) \prec \mathbb{O}_{t_1},$$

$$\mathbb{O} := \langle \mathbb{O}_{\ell_1}, \mathbb{O}_{\ell_2}, \dots, \mathbb{O}_{\ell_g}; \mathbb{O}_{T^*(w)} \rangle,$$

A diagram showing a node labeled w at the top right, connected by two blue arrows pointing towards it from below. The left arrow is labeled ℓ_1 and the right arrow is labeled ℓ_g .

$$\mathbb{O}_{i^\alpha} := \Psi_i^\alpha(\mathbb{O}_r).$$

A diagram showing a node labeled i^α at the top right, connected by a single blue arrow pointing downwards to a node labeled r at the bottom right.

La base \mathbb{O}

$$\begin{aligned} \mathbb{O}_{\circlearrowleft_1} &:= \mathbb{Q}_1, \\ \mathbb{O}_{t_1, \dots, t_k} &:= (\dots (\mathbb{O}_{t_k} \prec \dots) \prec \mathbb{O}_{t_2}) \prec \mathbb{O}_{t_1}, \\ \mathbb{O} &\quad := \langle \mathbb{O}_{\ell_1}, \mathbb{O}_{\ell_2}, \dots, \mathbb{O}_{\ell_g}; \mathbb{O}_{T^*(w)} \rangle, \\ &\quad \text{with } w \text{ at the top, } \ell_1, \dots, \ell_g \text{ below it, and } T^*(w) \text{ below } \ell_g. \\ \mathbb{O}_{i^\alpha} &:= \Psi_i^\alpha(\mathbb{O}_r). \end{aligned}$$

Exemple

$$\begin{aligned} \mathbb{O} &= \mathbb{Q}_{531442} + \mathbb{Q}_{521443} + \mathbb{Q}_{512443} - \\ &\quad \mathbb{Q}_{534142} - \mathbb{Q}_{524143} - \mathbb{Q}_{514243} - \\ &\quad \mathbb{Q}_{514432} - \mathbb{Q}_{524431} - \mathbb{Q}_{514423} + \\ &\quad \mathbb{Q}_{541432} + \mathbb{Q}_{542431} + \mathbb{Q}_{541423} \end{aligned}$$

La base \mathbb{O}

$$\mathbb{O}_{\bigcirc_1} := \mathbb{Q}_1,$$

$$\mathbb{O}_{t_1, \dots, t_k} := (\dots (\mathbb{O}_{t_k} \prec \dots) \prec \mathbb{O}_{t_2}) \prec \mathbb{O}_{t_1},$$

$$\mathbb{O} \quad \begin{array}{c} w \\ \swarrow \quad \searrow \\ \ell_1 \quad \dots \quad \ell_g \end{array} \quad := \langle \mathbb{O}_{\ell_1}, \mathbb{O}_{\ell_2}, \dots, \mathbb{O}_{\ell_g}; \mathbb{O}_{T^*(w)} \rangle,$$

$$\mathbb{O}_{\bigcirc_{i^\alpha}} := \Psi_i^\alpha(\mathbb{O}_r).$$

Théorème [M.]

- $(\mathbb{O}_f)_{f \in \mathfrak{F}_{B_n}}$ est une base de \mathbf{WQSym}_n ,
- $(\mathbb{O}_t)_{t \in \mathfrak{T}_{B_n}}$ est une base de Prim_n ,
- $(\mathbb{O}_t)_{t \in \mathfrak{N}_{B_n}}$ est une base de TPrim_n .

Théorèmes [M.]

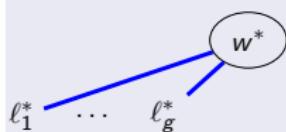
Théorème [M.]

- $(\mathbb{O}_f)_{f \in \mathfrak{F}_{B_n}}$ base de \mathbf{WQSym}_n ,
- $(\mathbb{O}_t)_{t \in \mathfrak{T}_{B_n}}$ base de Prim_n ,
- $(\mathbb{O}_t)_{t \in \mathfrak{N}_{B_n}}$ base de TPrim_n .

Théorème [M.]

- $(\mathbb{P}_f)_{f \in \mathfrak{F}_{R_n}}$ base de \mathbf{WQSym}_n^* ,
- $(\mathbb{P}_t)_{t \in \mathfrak{T}_{R_n}}$ base de Prim_n^* ,
- $(\mathbb{P}_t)_{t \in \mathfrak{N}_{R_n}}$ base de TPrim_n^* .

Rigidité

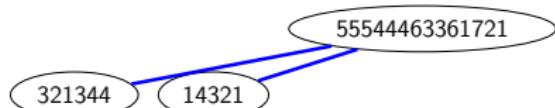


\forall bijection entre les mots irréductibles bleus et rouges,
recoloration des squelettes



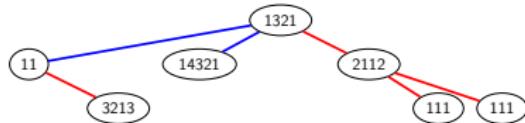
Forêts bicolores à travers un exemple

$T_{\text{Bske}}(DDDCCCEBBE9FA587653213449) =$



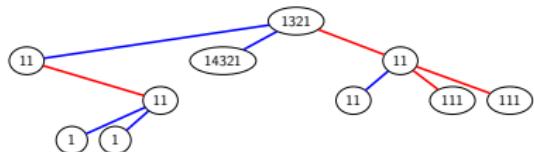
Forêts bicolores à travers un exemple

$T_{BR}(DDDCCCEBBE9FA587653213449)$

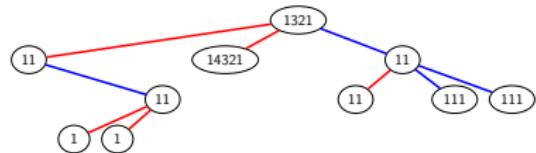
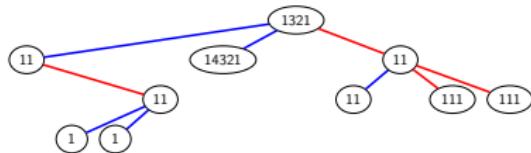


Forêts bicolores à travers un exemple

$T_{\text{BR}}(DDDCCCEBBE9FA587653213449) =$

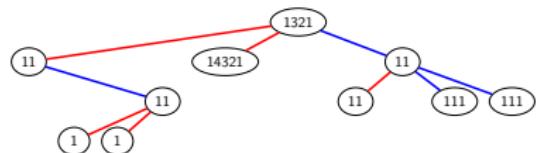
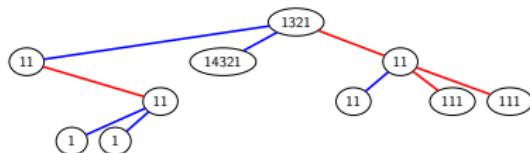


Forêts bicolores à travers un exemple

 $T_{\text{BR}}(DDDCCCEBBE9FA587653213449) =$ 

Forêts bicolores à travers un exemple

$$\text{T}_{\text{BR}}(DDDCCCEBBE9FA587653213449) = \text{T}_{\text{RB}}(DCBDDE7A9875F633422211145) =$$



Théorèmes [M.]

Théorème [M.]

- $(\mathbb{O}_f)_{f \in \mathfrak{F}_{B_n}}$ base de \mathbf{WQSym}_n ,
- $(\mathbb{O}_t)_{t \in \mathfrak{T}_{B_n}}$ base de Prim_n ,
- $(\mathbb{O}_t)_{t \in \mathfrak{N}_{B_n}}$ base de TPrim_n .

Théorème [M.]

- $(\mathbb{P}_f)_{f \in \mathfrak{F}_{R_n}}$ base de \mathbf{WQSym}_n^* ,
- $(\mathbb{P}_t)_{t \in \mathfrak{T}_{R_n}}$ base de Prim_n^* ,
- $(\mathbb{P}_t)_{t \in \mathfrak{N}_{R_n}}$ base de TPrim_n^* .

Bijection [M.]

Involution grâce aux forêts bicolores.

Isomorphisme bidendriforme entre \mathbf{WQSym} et \mathbf{WQSym}^* .