

# Relations d'équivalence, quotients, premières propriétés des groupes.

## 1 Exercice 1.

1. Donner un isomorphisme  $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^1$ , où  $\mathbb{S}^1$  est le cercle unité de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est le groupe quotient de  $\mathbb{R}$  par son sous-groupe distingué  $\mathbb{Z}$ .

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et soit  $f : E \rightarrow F$  une application.

2. a) Montrer que la relation binaire sur  $E$  définie par

$$x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

est une relation d'équivalence.

- b) On pose  $X := E/\sim$ . Soit  $\pi : E \rightarrow X$  l'application canonique. Montrer qu'il existe une unique application  $\bar{f} : X \rightarrow F$  telle que  $f = \bar{f} \circ \pi$ .
- c) Montrer que  $\bar{f}$  est une bijection sur son image.

1. On commence par considérer l'application

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\longrightarrow u^{-1}(\mathbb{S}^1) \\ x\mathbb{Z} &\longmapsto e^{2\pi i x}, \end{aligned}$$

où  $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$  est l'isomorphisme canonique de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{C}$ . Montrons trois propriétés.

- ▷ C'est bien défini. En effet, si  $k \in \mathbb{Z}$ , alors  $e^{2i\pi(x+k)} = e^{2i\pi x}$  par la  $2\pi$ -périodicité de  $\cos$  et  $\sin$ .
- ▷ C'est bien un morphisme. En effet, si  $x\mathbb{Z}, y\mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , alors on a

$$\begin{aligned} g(x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}) &= g((x + y)\mathbb{Z}) = \exp(2i\pi(x + y)) \\ &= \exp(2i\pi x) \cdot \exp(2i\pi y) \\ &= g(x\mathbb{Z}) \cdot g(y\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

- ▷ C'est une bijection. En effet, l'application réciproque est l'application  $u^{-1}(\mathbb{S}^1) \ni z \mapsto (\arg z)\mathbb{Z}$ .

On en conclut en posant l'isomorphisme  $f := u \circ g : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^1$ .

**2. a)** On a trois propriétés à vérifier.

- ▷ Comme  $f(x) = f(x)$ , on a  $x \sim x$  quel que soit  $x \in E$ .
- ▷ Si  $x \sim y$ , alors  $f(x) = f(y)$  et donc  $f(y) = f(x)$  et on en déduit  $y \sim x$ .
- ▷ Si  $x \sim y$  et  $y \sim z$ , alors  $f(x) = f(y) = f(z)$ , et on a donc  $x \sim z$ .

**b)** La fonction  $f$  est constante sur chaque classe d'équivalence de  $E$  par  $\sim$ . On procède par analyse-synthèse.

- ▷ *Analyse.* Si  $\bar{f} : X \rightarrow F$  existe, alors  $\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$  quel que soit  $x \in E$ , où  $\bar{x}$  est la classe d'équivalence de  $x$ . L'application  $\bar{f}$  est donc unique, car déterminée uniquement par les valeurs de  $f$  sur les classes d'équivalences de  $x$ .
- ▷ *Synthèse.* On pose  $\bar{f}(\bar{x}) := f(x)$ , qui est bien définie car  $f$  est constante sur les classes d'équivalences de  $\sim$ .

**c)** Montrons que  $\bar{f} : X \rightarrow \text{im } \bar{f}$  est injective et surjective.

- ▷ Soient  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  dans  $X$  tels que  $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{y})$ . Alors, on a  $f(x) = f(y)$  et donc  $x \sim y$  d'où  $\bar{x} = \bar{y}$ .
- ▷ On a, par définition,  $\text{im } \bar{f} = \bar{f}(X)$ .

D'où,  $\bar{f}$  est une bijection sur son image.

## 2 Exercice 2. *Parties génératrices*

1. Soit  $X$  une partie non vide d'un groupe  $G$ . Montrer que  $\langle X \rangle$ , le sous-groupe de  $G$  engendré par  $X$ , est exactement l'ensemble des produits finis d'éléments de  $X \cup X^{-1}$ , où  $X^{-1}$  est l'ensemble défini par  $X^{-1} := \{x^{-1} \mid x \in X\}$ .
2. Montrer que le groupe  $(\mathbb{Q}, +)$  n'admet pas de partie génératrice finie.
3. Montrer que  $(\mathbb{Q}^\times, \times) = \langle -1, p \in \mathbb{P} \rangle$ , où  $\mathbb{P}$  est l'ensemble des nombres premiers.

1. Soit  $H$  l'ensemble des produits finis d'éléments de  $X \cup X^{-1}$ .

▷ L'ensemble  $H$  contient  $X$ . De plus,  $H$  est un groupe. En effet, on a  $H \neq \emptyset$  car  $e = xx^{-1} \in H$  où  $x \in X$ . Puis, pour deux produits  $x = x_1 \cdots x_n \in H$  et  $y = y_1 \cdots y_m \in H$  (où les  $x_i$  et les  $y_j$  sont des éléments de  $X \cup X^{-1}$ ) on a

$$xy^{-1} = x_1 \cdots x_n y_m^{-1} \cdots y_1^{-1},$$

qui est un produit fini d'éléments de  $X \cup X^{-1}$ , c'est donc un élément de  $H$ . On en conclut que  $H$  est un sous-groupe de  $G$  contenant  $X$ . D'où  $H \geq \langle X \rangle$ .

▷ Soit  $K$  un sous-groupe de  $G$  contenant  $X$ . D'une part, on sait que  $X \cup X^{-1} \subseteq K$ . D'autre part, si  $x = x_1 \cdots x_n$  où l'on a  $x_i \in X \cup X^{-1} \subseteq K$ , alors  $x \in K$  car  $K$  est un groupe. On en déduit que  $H \leq K$ .

Ainsi,  $H$  est le plus petit sous-groupe de  $G$  contenant  $X$ , il est donc égal à  $\langle X \rangle$ .

2. Supposons, par l'absurde, que  $(\mathbb{Q}, +) = \langle \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_n}{q_n} \rangle$ . On pose  $Q := \prod_{i=1}^n q_i$ , puis on considère  $\frac{1}{Q+1} \in \mathbb{Q}$ .

Montrons que l'on peut écrire tout élément de  $\langle \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n} \rangle$  sous la forme  $\frac{p}{Q}$ . En effet, par la question 1, on considère

$$x := \sum_{i \in I} \varepsilon_i \frac{p_i}{q_i} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_i \in \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad I \text{ fini},$$

un élément quelconque du sous-groupe engendré. Et, en mettant au même dénominateur, on obtient  $p' / \prod_{i \in I} q_i = x$ . On obtient donc bien

$$x = \frac{p' \times \prod_{i \notin I} p_i}{Q},$$

où le produit au numérateur contient un nombre fini de termes.

Or,  $\frac{1}{Q+1} \in \mathbb{Q}$  ne peut pas être écrit sous la forme  $p/Q$  car  $Q+1$  et  $Q$  sont premiers entre eux. C'est donc absurde ! On en conclut que  $(\mathbb{Q}, +)$  n'admet pas de partie génératrice finie.

3. Notons  $E := \langle -1, p \in \mathbb{P} \rangle$ . Soit  $\frac{a}{b}$  un rationnel strictement positif. On suppose  $a$  et  $b$  positifs. On décompose  $a$  et  $b$  en produit de nombre premiers :

$$a = \prod_{i \in I} p_i \quad \text{et} \quad b = \prod_{j \in J} p_j.$$

On a donc  $a \in E$  et  $b \in E$ . On en conclut que  $\frac{a}{b} \in E$ .

Si  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^\times$  est un rationnel tel que  $a, b < 0$ , on a  $\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|} \in E$  d'après ce qui précède.

Si  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^\times$  est un rationnel négatif, alors on a  $\left| \frac{a}{b} \right| \in E$ , mais on a donc également  $\frac{a}{b} = (-1) \times \left| \frac{a}{b} \right| \in E$ .

On en conclut que  $\mathbb{Q}^\times \subseteq E$  et on a égalité car  $E \subseteq \mathbb{Q}^\times$  par définition de  $E$  comme sous-groupe de  $\mathbb{Q}^\times$ .

### 3 Exercice 3. *Ordre des éléments d'un groupe*

Soient  $g$  et  $h$  deux éléments d'un groupe  $G$ .

1. a) Montrer que  $g$  est d'ordre fini si et seulement s'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $g^n = e$ .  
 b) Montrer que si  $g$  est d'ordre fini, alors son ordre est le plus petit entier  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $g^n = e$ . Montrer, de plus, que pour  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $g^m = e$  si et seulement si l'ordre de  $g$  divise  $m$ .
2. Montrer que les éléments  $g$ ,  $g^{-1}$  et  $hgh^{-1}$  ont même ordre.

3. Montrer que  $gh$  et  $hg$  ont même ordre.
4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Exprimer l'ordre de  $g^n$  en fonction de celui de  $g$ .
5. On suppose que  $g$  et  $h$  commutent et sont d'ordre fini  $m$  et  $n$  respectivement.
  - a) Exprimer l'ordre de  $gh$  lorsque  $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle = \{e\}$ .
  - b) Même question lorsque  $m$  et  $n$  sont premiers entre eux.
  - c) (Plus difficile) On prend  $m$  et  $n$  quelconques. Soient  $a := \min\{\ell \in \mathbb{N}^* \mid g^\ell \in \langle h \rangle\}$  et  $b \in \mathbb{N}$  tel que  $g^a = h^b$ . Démontrer que l'ordre de  $gh$  est  $an/\text{pgcd}(n, (a+b))$ .
6. En considérant

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

montrer que le produit de deux éléments d'ordre fini ne l'est pas forcément.

## 4 Exercice 4.

Soit  $G$  un groupe.

1. On suppose que tout élément  $g$  de  $G$  est d'ordre au plus 2. Montrer que  $G$  est commutatif.
2. Montrer que  $G$  est commutatif si et seulement si l'application  $g \mapsto g^{-1}$  est un morphisme de groupes.
1. Pour tout  $g \in G$ , on a  $g^2 = e$ . Ainsi, pour tout  $g \in G$ , on a  $g$  est son propre inverse. Ceci permet de calculer

$$gh = g^{-1}h = g^{-1}h^{-1} = (hg)^{-1} = hg,$$

d'où  $G$  est commutatif.

2. On note  $\phi : g \mapsto g^{-1}$ , et on procède par équivalence.

$$\begin{aligned} G \text{ est commutatif} &\iff \forall g, h \in G, \quad gh = hg \\ &\iff \forall g, h \in G, \quad (gh)^{-1} = (hg)^{-1} \\ &\iff \forall g, h \in G, \quad (gh)^{-1} = g^{-1}h^{-1} \\ &\iff \forall g, h \in G, \quad \phi(gh) = \phi(g)\phi(h) \\ &\iff \phi \text{ est un morphisme.} \end{aligned}$$

## 5 Exercice 5.

Soit  $\phi : G_1 \rightarrow G_2$  un morphisme de groupes, et soit  $g \in G_1$  d'ordre fini. Montrer que  $\phi(g)$  est d'ordre fini et que son ordre divise l'ordre de  $g$ .

On utilise habilement l'exercice 3 : pour tout  $h \in G$ ,  $h^m = e$  si et seulement si l'ordre de  $h$  divise  $m$ . Soit  $n$  l'ordre de  $g$  (qui est fini car  $G_1$  d'ordre fini). Ainsi,

$$(\phi(g))^n = \phi(g^n) = \phi(e_1) = e_2.$$

On en déduit donc que  $\phi(g)$  est d'ordre fini et qu'il divise  $n = \text{ord } g$ .

## 6 Exercice 6.

Soient  $G_1$  et  $G_2$  des groupes, et  $\phi : G_1 \rightarrow G_2$  un morphisme de groupes.

1. Soient  $H_1$  (resp.  $H_2$ ) un sous-groupe de  $G_1$  (resp.  $G_2$ ). Montrer que  $\phi(H_1)$  (resp.  $\phi^{-1}(H_2)$ ) est un sous-groupe de  $G_2$  (resp.  $G_1$ ).
2. Montrer que  $H_2$  est un sous-groupe distingué de  $G_2$ , alors  $\phi^{-1}(H_2)$  est un sous-groupe distingué de  $G_1$ .
3. Montrer que si  $\phi$  est surjective, l'image d'un sous-groupe distingué de  $G_1$  par  $\phi$  est un sous-groupe distingué de  $G_2$ .
4. Donner un exemple d'un morphisme de groupes  $\phi : G_1 \rightarrow G_2$  et de sous-groupe distingué  $H_1 \triangleleft G_1$  tel que  $\phi(H_1)$  n'est pas distingué dans  $G_2$ .

1. Remarquons que  $e_2 \in \phi(H_1) \neq \emptyset$  et que  $e_1 \in \phi^{-1}(H_2) \neq \emptyset$  car on a  $\phi(e_1) = e_2$ . Pour  $a, b \in \phi(H_1)$ , on sait qu'il existe  $x, y \in H_1$  tels que  $\phi(x) = a$  et  $\phi(y) = b$ . Alors,

$$ab^{-1} = \phi(x) \phi(y)^{-1} = \underbrace{\phi(xy^{-1})}_{\in H_1} \in \phi(H_1),$$

d'où  $\phi(H_1)$  est un sous-groupe de  $G_2$ . Pour  $a, b \in \phi^{-1}(H_2)$ , on sait que  $\phi(a), \phi(b) \in H_2$ . Alors, on a

$$\phi(ab^{-1}) = \underbrace{\phi(a)}_{\in H_2} \underbrace{\phi(b)^{-1}}_{\in H_2} \in H_2,$$

– 6/14 –

d'où  $ab^{-1} \in \phi^{-1}(H_2)$  et donc  $\phi(H_1)$  est un sous-groupe de  $G_2$ .

2. Supposons  $H_2 \triangleleft G_2$  et montrons que  $\phi^{-1}(H_2) \triangleleft G_2$ . Soit un élément  $g \in G_1$  quelconque, et soit  $h \in \phi^{-1}(H_2)$ . Alors,

$$\phi(ghg^{-1}) = \phi(g) \phi(h) \phi(g)^{-1} \in H_2,$$

car  $\phi(h) \in H_2$  et que  $H_2 \triangleleft G_2$ . Ainsi,  $ghg^{-1} \in \phi^{-1}(H_2)$ . On a donc  $g \phi^{-1}(H_2) g^{-1} \subseteq \phi^{-1}(H_2)$ , quel que soit  $g \in G_1$ . On en déduit que  $\phi^{-1}(H_2)$  est distingué dans  $G_1$ .

3. Supposons  $\phi$  surjective, on a donc l'égalité  $\phi(G_1) = G_2$ . Supposons de plus que  $H_1 \triangleleft G_1$ . Montrons que  $\phi(H_1)$  est un sous-groupe distingué de  $G_2$ . Soit  $g \in G_2 = \phi(G_1)$  quelconque, et soit un élément  $h \in \phi(H_1)$ . Il existe donc  $x \in G_1$  et  $y \in H_1$  deux éléments tels que  $\phi(y) = h$  et  $\phi(x) = g$ . Ainsi

$$ghg^{-1} = \phi(x) \phi(y) \phi(x)^{-1} = \phi(xyx^{-1}) \in \phi(H_1)$$

car  $H_1$  distingué dans  $G_1$  et donc  $xyx^{-1} \in H_1$ . Ainsi  $\phi(H_1) \triangleleft G_2$ .

4. On considère le morphisme

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}, +) &\longrightarrow (\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot) \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et le sous-groupe distingué  $\mathbb{R} \triangleleft \mathbb{R}$ . On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{f(x)} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M^{-1} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \notin f(\mathbb{R}).$$

Ainsi,  $f(\mathbb{R}) \not\triangleleft \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ .

## 7 Exercice 7.

Soit  $G$  un groupe et soient  $H, K$  deux sous-groupes de  $G$ . Montrer que  $H \cup K$  est un sous-groupe de  $G$  si et seulement si on a  $H \subseteq K$  ou  $K \subseteq H$ .

On procède par double implications.

- ▷ «  $\implies$  ». Supposons que  $H \cup K$  soit un sous-groupe de  $G$ . Par l'absurde, supposons que  $H \not\subseteq K$  et  $K \not\subseteq H$ . Il existe donc deux éléments  $h \in H \setminus K$  et  $k \in K \setminus H$ . Considérons  $hk \in H \cup K$ .
- Si  $hk \in H$ , alors  $h^{-1}(hk) \in H$  et donc  $k \in H$ , *absurde!*
  - Si  $hk \in K$ , alors  $(hk)k^{-1} \in K$  et donc  $h \in K$ , *absurde!*

On en déduit que  $H \subseteq K$  ou  $K \subseteq H$ .

- ▷ «  $\impliedby$  ». Sans perte de généralité, supposons  $H \subseteq K$ . Ainsi, on a  $H \cup K = K$  qui est un sous-groupe de  $G$ .

## 8 Exercice 8. Classes à gauche et classes à droite

Soit  $H$  un sous-groupe d'un groupe  $G$ . Montrer que l'on a une bijection canonique  $G/H \rightarrow H \backslash G$ .

On note  $S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$  pour un sous-ensemble  $S$  de  $G$ . Alors nous avons l'égalité  $(aH)^{-1} = Ha^{-1}$  et  $(Ha)^{-1} = a^{-1}H$ . En effet,

$$\begin{aligned}
 (aH)^{-1} &= \{ah \mid h \in H\}^{-1} & (Ha)^{-1} &= \{ha \mid h \in H\}^{-1} \\
 &= \{(ah)^{-1} \mid h \in H\} & &= \{(ha)^{-1} \mid h \in H\} \\
 &= \{h^{-1}a^{-1} \mid h \in H\} & &= \{a^{-1}h^{-1} \mid h \in H\} \\
 &= \{ha^{-1} \mid h \in H\} & &= \{a^{-1}h \mid h \in H\} \\
 &= Ha^{-1} & &= a^{-1}H.
 \end{aligned}$$

Il existe donc une bijection canonique

$$\begin{aligned}
 f : G/H &\longrightarrow H \backslash G \\
 aH &\longmapsto (aH)^{-1} = Ha^{-1}.
 \end{aligned}$$

## 9 Exercice 9. Normalisateur

Soit  $H \leq G$  un sous-groupe d'un groupe  $G$ . On dit que  $x$  normalise si  $xHx^{-1} = H$ . On note  $N_G(H)$  l'ensemble des éléments de  $G$  qui normalisent  $H$ . C'est le normalisateur de  $H$  dans  $G$ .



1. Montrer que  $N_G(H)$  est le plus grand sous-groupe de  $G$  contenant  $H$  et dans lequel  $H$  est distingué.
2. En déduire que  $H$  est distingué dans  $G$  si et seulement si on a l'égalité  $G = N_G(H)$ .

1. Commençons par montrer que  $N_G(H)$  est un sous-groupe de  $G$  contenant  $H$ .

- ▷ L'élément neutre normalise  $H$ , car  $eHe^{-1} = H$ . D'où, le normalisateur de  $H$  est non vide.
- ▷ Soient  $x$  et  $y$  deux éléments qui normalisent  $H$ . Alors,  $xy$  normalise  $H$  :

$$(xy)H(xy)^{-1} = xyHy^{-1}x^{-1} = xHx^{-1} = H.$$

- ▷ Soit  $x \in G$  qui normalise  $H$ . Alors  $x^{-1}$  normalise  $H$  :

$$x^{-1}Hx = H \iff Hx = xH \iff H = xHx^{-1},$$

et cette dernière condition est vérifiée car  $x$  normalise  $H$ .

- ▷ Soit  $h \in H$ . Alors  $h$  normalise  $H$ . En effet,

$$hHh^{-1} = Hh^{-1} = H,$$

car  $h^{-1} \in H$  et puis car  $h \in H$ .

On en conclut que  $N_G(H)$  est un sous-groupe de  $G$  contenant  $H$ .

Par définition de  $N_G(H)$ , on a que  $H \triangleleft N_G(H)$  : quel que soit  $x$  qui normalise  $H$ , on a (par définition)  $xHx^{-1} = H$ .

Il ne reste plus qu'à montrer que tout sous-groupe  $N \supseteq H$  tel que  $H \triangleleft N$  vérifie  $N \subseteq N_G(H)$ . Soit  $N$  un tel sous-groupe, et un élément  $x \in N$ . Ainsi  $xHx^{-1} = H$ , d'où  $x$  normalise  $H$ . On a donc bien l'inclusion  $N \subseteq N_G(H)$ .

Ceci démontre bien que  $N_G(H)$  est le plus grand sous-groupe de  $G$  contenant  $H$  et dans lequel  $H$  y est distingué.

2. D'une part, si  $H$  est distingué dans  $G$ , alors le plus grand sous-groupe de  $G$  contenant  $H$  et dans lequel  $H$  est distingué est  $G$ .

D'autre part, si  $G = N_G(H)$ , alors tout élément  $x \in G$  vérifie l'égalité  $xHx^{-1} = H$  et donc  $H \triangleleft G$ .

# 10 Exercice 10. Construction de $\mathbb{Q}$

Soit  $E := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ . On définit  $\sim$  sur  $E$  par  $(a, b) \sim (a', b')$  dès lors que  $ab' = a'b$ .

1. Montrer que  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $E$ . Si  $(a, b) \in E$ , on note  $\frac{a}{b}$  son image dans  $E/\sim$ .
2. Munir  $E/\sim$  d'une structure de corps telle que  $\mathbb{Z}$  s'injecte dans le corps  $E/\sim$ .
3. Similairement, pour un corps  $\mathbb{k}$ , construire  $\mathbb{k}(X)$  à partir de l'ensemble  $\mathbb{k}[X]$ .
4. Construire  $\mathbb{Z}$  à partir de  $\mathbb{N}$ .

1. On a trois propriétés à vérifier.

- ▷ Si  $(a, b) \in E$ , alors  $ab = ab$  donc  $(a, b) \sim (a, b)$ .
- ▷ Si  $(a, b) \sim (a', b')$ , alors  $ab' = a'b$  et donc  $(a', b') \sim (a, b)$ .
- ▷ Si  $(a, b) \sim (a', b')$  et  $(a', b') \sim (a'', b'')$ , alors

$$a'ab'b'' = a'a'bb'' = a'ba'b'' = a'ba''b',$$

et donc  $a'b'(ab'' - a''b) = 0$ . Par anneau intègre, on a une disjonction de cas :

- si  $a' = 0$ , alors  $a = a'' = 0$ ;
- si  $b' = 0$ , alors **absurde** car  $b' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ;
- si  $ab'' - a''b = 0$ , alors on a  $ab'' = a''b$ .

Dans les deux cas, on obtient bien  $(a, b) \sim (a'', b'')$ .

2. On munit  $E/\sim$  de deux opérations «  $\oplus$  » et «  $\otimes$  ».

- ▷ On pose l'opération  $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} := \frac{ad+bc}{bd}$  qui est bien définie car, si l'on a  $(a, b) \sim (a', b')$ , alors

$$\begin{aligned} (ad + bc, bd) \sim (a'd + b'c, b'd) &\iff (ad + bc)b'd = (a'd + b'c)bd \\ &\iff ab'd^2 = a'bd^2, \end{aligned}$$

ce qui est vrai car  $(a, b) \sim (a', b')$ . On peut procéder symétriquement pour  $(c', d') \sim (c, d)$ .

- ▷ On pose l'opération  $\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}$  qui est bien définie car, si l'on a  $(a, b) \sim (a', b')$ , alors

$$(ac, bd) \sim (a'c, b'd) \iff acb'd = a'cbd,$$

ce qui est vrai car  $(a, b) \sim (a', b')$ . On peut procéder symétriquement pour  $(c', d') \sim (c, d)$ .

Montrons que  $(E/\sim, \oplus, \otimes)$  est un corps.

- ▷ La loi  $\oplus$  est associative : on a

$$\frac{a}{b} \oplus \left( \frac{c}{d} \oplus \frac{e}{f} \right) = \left( \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} \right) \oplus \frac{e}{f} = \frac{adf+cbf+ebd}{bdf},$$

par associativité de  $+$ .

- ▷ La loi  $\oplus$  est commutative par commutativité de  $+$ .  
 ▷ La loi  $\oplus$  possède un élément neutre  $\frac{0}{1} \in E/\sim$ .  
 ▷ Tout élément  $\frac{a}{b}$  possède un symétrique  $(\frac{-a}{b})$  pour  $\oplus$  par rapport à  $\frac{0}{1}$ .  
 ▷ La loi  $\otimes$  est associative : on a

$$\frac{a}{b} \otimes \left( \frac{c}{d} \otimes \frac{e}{f} \right) = \left( \frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} \right) \otimes \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf},$$

par associativité de  $\times$ .

- ▷ La loi  $\otimes$  est distributive par rapport à  $\oplus$ , par distributivité de  $\times$  par rapport à  $+$ .  
 ▷ La loi  $\otimes$  possède un élément neutre  $\frac{1}{1} \in E/\sim$  pour  $\otimes$ .  
 ▷ Tout élément non nul  $\frac{a}{b}$  possède un inverse  $\frac{b}{a}$  par rapport à  $\frac{1}{1}$ .

On en conclut que  $(E/\sim, \oplus, \otimes)$  est un corps.

Finalement, on considère l'injection

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\hookrightarrow E/\sim \\ k &\longmapsto \frac{k}{1}. \end{aligned}$$

C'est bien une injection car, si  $\frac{k}{1} = \frac{k'}{1}$ , alors  $k \times 1 = k' \times 1$  et donc  $k = k'$ . On a, de plus, que  $f$  est un morphisme de groupes  $(\mathbb{Z}, +) \rightarrow (E/\sim, \oplus)$  :

$$\begin{aligned} f(k) \oplus f(k') &= \frac{k}{1} \oplus \frac{k'}{1} = \frac{k+k'}{1} = f(k+k'). \\ &\quad - \text{ 11/14 } - \end{aligned}$$

3. On pose  $F := \mathbb{k}[X] \times (\mathbb{k}[X] \setminus \{0_{\mathbb{k}[X]}\})$ , et la relation

$$(P, Q) \sim (P', Q') \iff PQ' = P'Q.$$

Cette relation est une relation d'équivalences (comme pour la question précédente, et car  $\mathbb{k}$  est un anneau intègre). On pose ensuite  $\mathbb{k}(X) := F/\sim$ . Comme dans la question précédente, on peut donner une structure de corps avec les mêmes définitions (en remplaçant les entiers par des polynômes de  $\mathbb{k}$ ). Les propriétés découlent toutes du fait que  $(\mathbb{k}, +, \times)$  est un corps.

4. On pose  $Z := \mathbb{N}^2/\sim$ , où la relation d'équivalence  $\sim$  est définie par

$$(a, b) \sim (a', b') \iff a + b' = b + a'.$$

## 11 Exercice 11.

Soit  $E := \mathbb{C}[X]$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{C}$  et  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme de degré  $d \in \mathbb{N}^*$ .

1. Montrer que l'ensemble  $(P) := \{QP \mid Q \in \mathbb{C}[X]\}$  est un sous- $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de  $\mathbb{C}[X]$ .
2. Déterminer un isomorphisme entre  $\mathbb{C}[X]/(P)$  et le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}_{d-1}[X]$  des polynômes de degrés inférieurs à  $d - 1$  de  $\mathbb{C}[X]$ .
3. Montrer que la multiplication dans  $\mathbb{C}[X]$  induit une structure de  $\mathbb{C}$ -algèbre sur  $\mathbb{C}[X]/(P)$ .

## 12 Exercice 12.

Soit  $G$  un groupe et  $H$  un sous-groupe strict de  $G$ . Montrer que l'on a l'égalité  $\langle G \setminus H \rangle = G$ .

## 13 Exercice 13.

Soit  $G$  un groupe fini. Montrer que  $G$  contient un élément d'ordre 2 si et seulement si son cardinal est pair. Montrer de plus que, dans ce cas là, il en contient un nombre impair.

## 14 Exercice 14.

Soit  $G$  un groupe et  $\sim$  une relation d'équivalence sur  $G$ . On suppose que  $G/\sim$  est un groupe, et que la projection canonique  $\pi : G \rightarrow G/\sim$  est un morphisme de groupes.

Montrer qu'il existe un sous-groupe distingué  $H \triangleleft G$  tel que pour tous éléments  $x, y \in G$ ,  $x \sim y$  si et seulement si  $xy^{-1} \in H$ .

## 15 Exercice 15.

Soit  $G$  un groupe et  $S_G$  l'ensemble des sous-groupes de  $G$ .

1. Démontrer que si  $G$  est fini, alors  $S_G$  est fini.
2. Supposons  $S_G$  fini. Démontrer que tous les éléments de  $G$  sont d'ordre fini, en déduire que  $G$  est fini.
3. On ne suppose plus que  $S_G$  est fini. Si tous les éléments de  $G$  sont d'ordre fini, est-ce que  $G$  est fini ?

# Table des matières

<b>Relations d'équivalence, quotients, premières propriétés des groupes.</b>		<b>1</b>
1	Exercice 1. . . . .	1
2	Exercice 2. <i>Parties génératrices</i> . . . . .	3
3	Exercice 3. <i>Ordre des éléments d'un groupe</i> . . . . .	4
4	Exercice 4. . . . .	5
5	Exercice 5. . . . .	6
6	Exercice 6. . . . .	6
7	Exercice 7. . . . .	7
8	Exercice 8. <i>Classes à gauche et classes à droite</i> . . . .	8
9	Exercice 9. <i>Normalisateur</i> . . . . .	8
10	Exercice 10. <i>Construction de <math>\mathbb{Q}</math></i> . . . . .	10
11	Exercice 11. . . . .	12
12	Exercice 12. . . . .	12
13	Exercice 13. . . . .	12
14	Exercice 14. . . . .	13
15	Exercice 15. . . . .	13