

Exercice 1. Théorie des graphes.

- Q1. pas de boucles : $\forall x \neg R(x, x)$
 non-orienté : $\forall x \forall y R(x, y) \leftrightarrow R(y, x)$.
 (l'implication simple suffit).

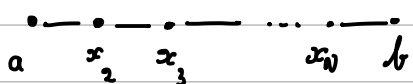
D'où $\mathcal{K}(\text{Graphes non-orientés simples}) = \{ \forall x \neg R(x, x), \forall x \forall y R(x, y) \leftrightarrow R(y, x) \}$.

- Q2. On pose $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$ qui est une théorie sur $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$.

Q3. $\varphi_n = \underbrace{\forall x_1 \dots \forall x_{n-1}}_{\text{pour } n \text{ fixé}} (\neg (R(a, x_1) \wedge R(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge R(x_{n-1}, b)))$

- Q4. Oui. On considère $G = (V, E)$ décrit ci-dessous.

Soit $N = \max \{ n_1, \dots, n_k \} + 1$.



Il est connexe, simple, non-orienté et non-vide.

Et, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, il n'y a pas de chemins de longueur n_i entre a et b dans G .

- Q5. Soit $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{A}$ une théorie des graphes connexes.

On pose $\mathcal{T}' := \mathcal{T} \cup \{ \varphi_n \mid n \in \mathbb{N}^* \}$.

Toute partie finie de \mathcal{T}' est satisfiable.

Par compacité, on a que \mathcal{T} est satisfiable. Absurde car seul un graphe vide satisfait \mathcal{T} .

Exercice 2. Langage sans fonction.

Q1. Par récurrence sur n , montrez que :

$\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y_1 \dots \exists y_k A[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k]$
est un théorème ssi elle est satisfaite dans toute interprétation de card°
au plus $n+k$.

• Pour $n=0$, $\overbrace{\exists y_1 \dots \exists y_k A[y_1, \dots, y_k]}^{\varphi}$ est un théorème ssi

$$\forall M \text{ modèle, } \forall c, \quad M, c \models \varphi$$

Si on a un modèle de card° $> m$, on peut le décomposer en modèles
de card° $\leq k$ par dénombrement.
D'où l'équivalence.

•

Q2. Dans $\mathcal{L} = \{c_1, \dots, c_m, f, =\}$,

on considère $A = "f(y_1, y_2) = f(y_2, y_1) \wedge \neg(y_1 = y_2) \wedge \bigwedge_{i=3}^{k-1} (y_i = y_{i+1})"$.

Dans le modèle

$$\mathcal{M}: \{0, 1\}, \quad f_{\mathcal{M}} = \text{xor}, \quad c_i = 0$$

la formule A est fausse.

Exercice 3. Densité.

Q1. On a $(\mathbb{Q}, <)$ et $(\mathbb{R}, <)$ qui sont non-isomorphes.

Q2

Soit $\varphi := \forall x, \exists y \quad x(x, y)$.

Dans $(\mathbb{R}, <)$, la formule φ est vérifiée
Dans $([0, 1], <)$ la formule φ ne l'est pas.

D'où \mathcal{T} n'est pas complète.

Q3. Soit un modèle \mathcal{M} .

Soient $x, y \in |\mathcal{M}|$ tels que $x < y$ (par A_2).

Construisons par récurrence des éléments de \mathcal{M} .

- on commence avec x, y
- par A_4 , et comme $x < y$, il existe z_1 tq $x < z_1 < y$
- par A_4 , $x < z_2$ w $x < w < z_2$

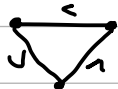
Si $w \in \{x, y, z_1\}$, alors par A_2 et A_3 on a une absurdité.

D'où \mathcal{T} n'admet pas de modèle fini.

Q4. $\mathcal{T}_1: (\{1\}, <)$

$\mathcal{T}_2: (\{1\}, \leq)$

$\mathcal{T}_3:$



$\mathcal{T}_4: (\{0, 1\}, <)$

Exercice 4. Modèle infini.

On pose $\varphi_k = \exists x_1 \dots \exists x_k \neg(x_1 = x_2) \wedge \dots \wedge \neg(x_{k-1} = x_k)$.

Toute sous-théorie finie A de $T' = T \cup \{\varphi_k \mid k \in \mathbb{N}^+\}$ a un modèle
(de card $> \max\{k \in \mathbb{N} \mid \varphi_k \in A\} \in \mathbb{N}$ avec $\max \emptyset = 0$).

Par compacité, T' admet un modèle. S'il est fini de cardinal k , absurde car $\varphi_k \in T'$. Il admet donc un modèle infini \mathcal{M}_∞ .

La théorie T admet donc un modèle infini \mathcal{M}_∞ .