Idéaux et anneaux noethériens

1 Exercice 1.

1. *Se répéter dix fois : « Un idéal n'est pas un sous-anneau et l'image d'un idéal par un morphisme d'anneau n'est pas nécessairement un idéal » (et trouver des exemples).*
2. *Montrer que l'image d'un idéal par un morphisme d'anneaux surjectif est un idéal.*

1. L'idéal $I = 2\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-anneau car $1 \notin I$. On considère le morphisme d'anneau

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ x &\longmapsto x, \end{aligned}$$

   et on a $f(n\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$ qui n'est pas un idéal de $\mathbb{Q}$ (car $\mathbb{Q}$ est un corps, donc n'a pour idéaux que $\mathbb{Q}$ et $\{0\}$).
2. Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux surjectif, et I un idéal de A.
   - ▷ Soient $x_1, x_2 \in f(I)$. Soient $y_1, y_2 \in I$ tels que $x_1 = f(y_1)$ et $x_2 = f(y_2)$. D'où, $x_1 + x_2 = f(y_1 + y_2) \in f(I)$ car $y_1 + y_2 \in I$.
   - ▷ Soit $x \in f(I)$ et $b \in B$. Il existe $y \in I$ tel que $f(y) = x$. Par surjectivité, il existe $a \in A$ tel que $b = f(a)$. Ainsi, $bx = f(ay) \in f(I)$, car $ay \in I$.

2 Exercice 2. *Terminologie*

Soit A un anneau et soient a, b deux éléments de A.

1. *Montrer que a est inversible si et seulement si $(a) = A$.*
2. *Montrer que a divise b si et seulement si $(b) \subseteq (a)$.*
3. *On suppose que A est intègre.*
   a) *Montrer que $a \in A$ est premier si et seulement si (a) est un idéal premier.*
   b) *Montrer que a est irréductible dans A si et seulement si (a) est maximal parmi les idéaux principaux de A. En déduire que, si tout idéal de A est principal, alors a est irréductible si et seulement si (a) est maximal.*
   c) *Donner un exemple d'anneau A et d'élément irréductible $a \in A$ tel que (a) n'est pas maximal parmi les idéaux de A.*

1. Montrons que $a \in A^\times \iff (a) = A$. On a la chaîne d'équivalences :
$$(a) = A \iff 1 \in (a) \iff \exists b \in A, ab = 1 \iff a \in A^\times.$$
2. Montrons que $a \mid b \iff (b) \subseteq (a)$. D'une part, on a
$$a \mid b \iff \exists c \in A, b = ac \underset{(\star)}{\implies} (b) \subseteq (a).$$
Et d'autre part, on a bien l'implication réciproque de $(\star)$, car si $(b) \subseteq (a)$ alors $b \in (a)$ et donc il existe $c \in A$ tel que $b = ac$.
3. a) On a :
$$\begin{aligned} a \text{ premier } &\iff [\forall b, c \in A, a \mid bc \implies a \mid b \text{ ou } a \mid c] \\ &\iff [\forall b, c \in A, (bc) \subseteq (a) \implies (b) \subseteq (a) \text{ ou } (c) \subseteq (a)] \\ &\iff (a) \text{ est un idéal premier.} \end{aligned}$$
   b) ▷ Si (a) est maximal parmi les idéaux principaux, et si $a = bc$ alors $b \mid a$, et donc $(a) \subseteq (b)$.
      – Soit $(b) = A$ et donc $b \in A^\times$.
      – Soit $(b) = (a)$ alors, il existe $d \in A$ tel que $b = ad$. D'où, $b = bcd$ et, car A intègre, $cd = 1$ d'où on a que $c \in A^\times$.

▷ Réciproquement, on a

$$\begin{aligned}(a) \subseteq (b) &\implies b \mid a\\ &\implies \exists c \in A, a = bc\\ &\implies \exists (b,c) \in A^\times \times A \cup A \times A^\times, a = bc\\ &\implies (b) = A \text{ ou } (b) = (a).\end{aligned}$$

c) On considère $A = \mathbb{Z}[X]$ et $a = 2$ irréductible. Alors, $(2) \subsetneq (2, X) \neq \mathbb{Z}[X]$ et $(X) \subsetneq (2, X) \neq \mathbb{Z}[X]$.

3 Exercice 3. *Quotienteries*

1. On a, pour $a, b \in A$:

$$\bar{a}\bar{b} = \bar{0} \in A/I \iff ab \in I.$$

D'où, si I premier, alors $\bar{a} = \bar{0}$ ou $\bar{b} = \bar{0}$. Réciproquement, si $ab \in I$ alors $\bar{a} = \bar{0}$ ou $\bar{b} = \bar{0}$, et donc $a \in I$ ou $b \in I$.

Ensuite, on a pour $a \in A$,

$$\bar{a} \in (A/I)^\times \iff (a) + I = A.$$

Ainsi, si I est maximal, et si $\bar{a} \in (A/I) \setminus \{0\}$, alors $a \notin I$ et $(a) + I$ contient strictement I, d'où $(a) + I = A$ et $\bar{a} \in (A/I)^\times$. Réciproquement, soit $I \subsetneq J \subseteq A$, et s'il existe $x \in J \setminus I$, alors $xnar \in (A/I) \setminus \{0\}$ et donc il existe $y \in A$ tel que $\bar{x}\bar{y} = \bar{1}$ et donc $A = (x) + I \subseteq J$ et donc $J = A$.

2. Soit B un anneau et $f : A \to B$ un morphisme d'anneau tel que $I \subseteq \ker f$. Montrons qu'il existe un unique morphisme $\bar{f} : A/I \to B$ tel que $f = \bar{f} \circ \pi$.

▷ *Unicité.* Si $\bar{f} : A/I \to B$ est tel que $\bar{f} \circ \pi = f$. Alors, parce que π est surjectif, on a que $\forall x \in A/I, \exists a \in A, x = \pi(a)$, et donc $\bar{f}(x) = f(a)$.

▷ *Existence.* On pose

$$\begin{aligned}\bar{f} : A/I &\longrightarrow B\\ \bar{x} &\longmapsto f(x).\end{aligned}$$

- C'est bien défini car si $\pi(a) = \pi(b)$ alors $a - b \in I \subseteq \ker f$ et donc $f(a) = f(b)$.
- C'est bien un morphisme :
  - $\bar{f}(\bar{1}) = f(1) = 1$;
  - $\bar{f}(\bar{a} + \bar{b}) = \bar{f}(\overline{a+b}) = f(a+b) = f(a) + f(b) = \bar{f}(\bar{a}) + \bar{f}(\bar{b})$;
  - $\bar{f}(\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{f}(\overline{a \times b}) = f(a \times b) = f(a) \times f(b) = \bar{f}(\bar{a}) \times \bar{f}(\bar{b})$.

3. Soit $f : A \to B$, alors il existe un unique morphisme $\bar{f} : A/\ker f \to B$ tel que $f = \bar{f} \circ \pi$. Par construction $\operatorname{im} \bar{f} = \operatorname{im} f$ et donc $\bar{f} : A/\ker f \to \operatorname{im} f$ est surjectif. Montrons que $\bar{f}$ est injective. Si $\bar{f}(\bar{x}) = 0$ alors $f(x) = 0$ et donc $x \in \ker f$ d'où on a $\bar{x} = \bar{0} \in A/\ker f$. On en conclut :

$$A/\ker f \cong \operatorname{im} f.$$

4. Soient $I \subseteq J \subseteq A$ et on note $J/I = \pi_I(J)$. Alors, $(A/I)/(J/I) \cong A/J$. En effet, on pose

$$\begin{aligned} f : A/I &\longrightarrow A/J \\ a + I &\longmapsto a + J, \end{aligned}$$

qui est un morphisme d'anneaux bien défini.

Pour $a \in A$, $f(a + I) = a + J$ donc f est surjective.

Et,

$$\begin{aligned} \ker f &= \{\, a + I \in A/I \mid a + J = \bar{0} \in A/J \,\} \\ &= \{\, a + I \in A/I \mid a \in J \,\} \\ &= \pi_I(J) = J/I \end{aligned}$$

.

On en conclut, par le premier théorème d'isomorphisme que

$$(A/I)/(J/I) \cong A/J.$$

5. On considère la bijection croissante

$$\begin{aligned} \{I \subseteq J \lhd A\} &\longleftrightarrow \{\bar{K} \lhd A/I\} \\ J &\longmapsto \pi_I(J) \\ \pi^{-1}(\bar{K}) &\longleftarrow\!\shortmid \bar{K}. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que :

- ▷ pour $J \supseteq I$, $\pi^{-1}(\pi(J)) = J$;
- ▷ pour $\bar{K} \lhd A/I$, $\pi(\pi^{-1}(\bar{K})) = \bar{K}$;
- ▷ l'application est croissante.

Si $P \lhd A$ est premier et tel que $I \subseteq P$ alors, par le 3ème théorème d'isomorphisme, on a

$$(A/I)/\pi(P) = (A/I)/(P/I) \cong A/P,$$

et ce dernier est intègre et on conclut.

Réciproquement, si $\bar{P} \lhd A/I$ est premier, alors $\bar{P} = \pi(\pi^{-1}(\bar{P}))$ et donc $(A/I)/\bar{P} \cong A/\pi^{-1}(\bar{P})$ et le premier est intègre, donc on conclut.

6. On pose

$$\begin{aligned} f : A[X] &\longrightarrow (A/I)[X] \\ \sum a_i X^i &\longmapsto \sum \bar{a}_i X^i. \end{aligned}$$

On montre que $\operatorname{im} f = (A/I)[X]$ et que $\ker f = I\ A[X]$.

4 Exercice 4. *Division euclidienne par un polynôme unitaire*

5 Exercice 5. *Application : étude d'une courbe algébrique*

6 Exercice 6. *Lemme d'évitements des premiers*

7 Exercice 7. *Anneaux noethériens*

8 Exercice 8. *Existence et finitude des idéaux premiers minimaux*

Table des matières

Idéaux et anneaux noethériens **1**
1 Exercice 1. 1
2 Exercice 2. *Terminologie* 2
3 Exercice 3. *Quotienteries* 3
4 Exercice 4. *Division euclidienne par un polynôme unitaire* 6
5 Exercice 5. *Application : étude d'une courbe algébrique* 6
6 Exercice 6. *Lemme d'évitements des premiers* 6
7 Exercice 7. *Anneaux noethériens* 6
8 Exercice 8. *Existence et finitude des idéaux premiers minimaux* 6