# Le calcul propositionnel.

Le *calcul propositionnel*, c'est la « grammaire » de la logique. Dans ce chapitre, on s'intéressera à

1. la construction des formules (▷ la syntaxe) ;
2. la sémantique et les théorèmes de compacité (▷ la compacité sémantique).

## 1 Syntaxe.

**Définition 1.** Le *langage*, ou *alphabet*, est un ensemble d'éléments fini ou pas. Les éléments sont les *lettres*, et les suites finies sont les *mots*.

**Définition 2.** On choisit l'alphabet :

- ▷ $\mathscr{P} = \{x_0, x_1, \ldots\}$ des variables propositionnelles ;
- ▷ un ensemble de *connecteurs* ou *symboles logiques*, défini par $\{\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$, il n'y a pas $\exists$ et $\forall$ pour l'instant.
- ▷ les parenthèses $\{\texttt{(}, \texttt{)}\}$.

Les formules logiques sont des mots. On les fabriques avec des briques de base (les variables) et des opérations de construction : si $F_1$ et $F_2$ sont deux formules, alors $\neg F$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \to F_2)$ et $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ aussi.

**Définition 3 (« par le haut », « mathématique »).** L'ensemble $\mathscr{F}$ des formules du calcul propositionnel construit sur $\mathscr{P}$ est le plus petit ensemble contenant $\mathscr{P}$ et stable par les opérations de construction.

**Définition 4 (« par le bas », « informatique »).** L'ensemble $\mathscr{F}$ des formules logique du calcul propositionnel sur $\mathscr{P}$ est défini par

- ▷ $\mathscr{F}_0 = \mathscr{P}$ ;
- ▷ $\mathscr{F}_{n+1} = \mathscr{F}_n \cup \left\{ \begin{array}{c} \neg F_1 \\ (F_1 \vee F_2) \\ (F_1 \wedge F_2) \\ (F_1 \to F_2) \\ (F_1 \leftrightarrow F_2) \end{array} \middle| \; F_1, F_2 \in \mathscr{F} \right\}$

puis on pose $\mathscr{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_n$.

On peut montrer l'équivalence des deux définitions.

**Théorème 1 (Lecture unique).** Toute formule $G \in \mathscr{F}$ vérifie une et une seule de ces propriétés :

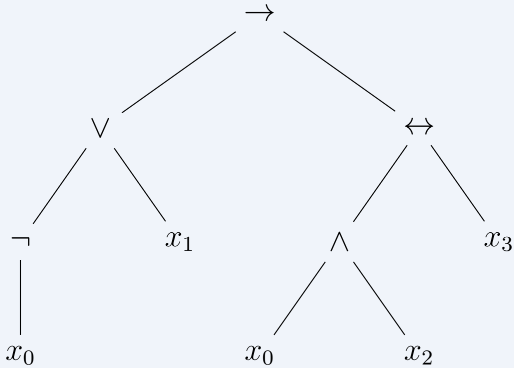
- ▷ $G \in \mathscr{P}$ ;
- ▷ il existe $F \in \mathscr{F}$ telle que $G = \neg F$ ;
- ▷ il existe $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ telle que $G = (F_1 \vee F_2)$ ;
- ▷ il existe $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ telle que $G = (F_1 \wedge F_2)$ ;
- ▷ il existe $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ telle que $G = (F_1 \to F_2)$ ;
- ▷ il existe $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ telle que $G = (F_1 \leftrightarrow F_2)$.

**Preuve.** En exercice. □

**Corollaire 1.** Il y a une bijection entre les formules et les arbres dont

- ▷ les feuilles sont étiquetés par des variables ;
- ▷ les nœuds internes sont étiquetés par des connecteurs ;
- ▷ ceux étiquetés par ¬ ont un fils, les autres deux.

**Exemple 1.** La formule $((\neg x_0 \vee x_1) \to ((x_0 \wedge x_2) \leftrightarrow x_3))$ correspond à l'arbre




## 2 Sémantique.

**Lemme 1.** Soit $\nu$ une fonction de $\mathscr{P}$ dans $\{0, 1\}$ appelé *valuation*. Alors $\nu$ s'étend de manière unique en une fonction $\bar{\nu}$ de $\mathscr{F}$ dans $\{0, 1\}$ telle que

- ▷ sur $\mathscr{P}$, $\nu = \bar{\nu}$ ;
- ▷ si $F, G \in \mathscr{F}$ sont des formules alors
  - – $\bar{\nu}(\neg F) = 1 - \bar{\nu}(F)$ ;
  - – $\bar{\nu}(F \vee G) = 1$ ssi $\bar{\nu}(F) = 1$ ou[1] $\bar{\nu}(G) = 1$ ;
  - – $\bar{\nu}(F \wedge G) = \bar{\nu}(F) \times \bar{\nu}(G)$ ;
  - – $\bar{\nu}(F \rightarrow G) = 1$ ssi $\bar{\nu}(G) = 1$ ou $\bar{\nu}(F) = 0$ ;
  - – $\bar{\nu}(F \leftrightarrow G) = 1$ ssi $\bar{\nu}(F) = \bar{\nu}(G)$.

Par abus de notations, on notera $\nu$ pour $\bar{\nu}$ par la suite.

**Preuve.** **Existence.** On définit en utilisant le lemme de lecture unique, et par induction sur $\mathscr{F}$ :

- ▷ $\bar{\nu}$ est définie sur $\mathscr{F}_0 = \mathscr{P}$ ;
- ▷ si $\bar{\nu}$ est définie sur $\mathscr{F}_n$ alors pour $F \in \mathscr{F}_{n+1}$, on a la disjonction de cas
  - – si $F = \neg G$ avec $G \in \mathscr{F}_n$, et on définit $\bar{\nu}(F) =$

1. C'est un « ou » inclusif : on peut avoir les deux (ce qui est très différent du « ou » exclusif dans la langue française).

$1 - \bar{\nu}(F_1)$ ;

– *etc* pour les autres cas.

**Unicité.** On montre que si $\lambda = \nu$ sur $\mathscr{P}$ alors $\bar{\lambda} = \bar{\nu}$ si $\bar{\lambda}$ et $\nu$ vérifient les égalités précédents.

□

**Exemple 2 (Table de vérité).** Pour la formule

$$F = ((x_1 \to x_2) \to (x_2 \to x_1)),$$

on construit la table

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $x_1 \to x_2$ | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $x_2 \to x_1$ | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $F$ | 1 | 0 | 1 | 1 |

**Définition 5.**

- ▷ Une formule $F$ est dite *satisfaite par une valuation* $\nu$ si $\nu(F) = 1$.
- ▷ Une *tautologie* est une formule satisfaite pour toutes les valuations.
- ▷ Un ensemble $\mathscr{E}$ de formules est *satisfiable* s'il existe une valuation qui satisfait toutes les formules de $\mathscr{E}$.
- ▷ Un ensemble $\mathscr{E}$ de formules est *finiment satisfiable* si tout sous-ensemble fini de $\mathscr{E}$ est satisfiable.
- ▷ Une formule $F est conséquence sémantique$ d'un ensemble de formules $\mathscr{E}$ si toute valuation qui satisfait $\mathscr{E}$ satisfait $F$.
- ▷ Un ensemble de formules $\mathscr{E}$ est *contradictoire* s'il n'est pas satisfiable.
- ▷ Un ensemble de formules $\mathscr{E}$ est *finiment contradictoire* s'il existe un sous-ensemble fini contradictoire de $\mathscr{E}$.

**Théorème 2 (compacité du calcul propositionnel).** On donne trois énoncés équivalents (équivalence des trois énoncés laissé en exercice) du théorème de compacité du calcul propositionnel.

**Version 1.** Un ensemble de formules $\mathscr{E}$ est satisfiable si et seulement s'il est finiment satisfiable.

**Version 2.** Un ensemble de formules $\mathscr{E}$ est contradictoire si et seulement s'il est finiment contradictoire.

**Version 3.** Pour tout ensemble $\mathscr{E}$ de formules du calcul propositionnel, et toute formule $F$, $F$ est conséquence sémantique de $\mathscr{E}$ si et seulement si $F$ est conséquence sémantique d'un sous-ensemble fini de $\mathscr{E}$.

**Preuve.** Dans le cas où $\mathscr{P} = \{x_0, x_1, \dots\}$ est au plus dénombrable (le cas non dénombrable sera traité après). On démontre le cas « difficile » de la version 1 (*i.e.* finiment satisfiable implique satisfiable). Soit $\mathscr{E}$ un ensemble de formules finiment satisfiable. On construit par récurrence une valuation $\nu$ qui satisfasse $\mathscr{E}$ par récurrence : on construit $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n, \dots$ tels que $\nu(x_0) = \varepsilon_0, \dots, \nu(x_n) = \varepsilon_n, \dots$

- ▷ Cas de base. On définit la valeur de $\varepsilon_n$ pour $x_0 \in \mathscr{P}$.
  1. soit, pour tout sous-ensemble fini $B$ de $\mathscr{E}$, il existe une valuation $\lambda$ qui satisfait $B$ avec $\lambda(x_0) = 0$ ;
  2. soit, il existe un sous-ensemble fini $B_0$ de $\mathscr{E}$, pour toute valuation $\lambda$ qui satisfait $B_0$, on a $\lambda(x_0) = 1$.

  Si on est dans le cas 1, on pose $\varepsilon_0 = 0$, et sinon (cas 2) on pose $\varepsilon_0 = 1$.
- ▷ Cas de récurrence. On montre, par récurrence sur $n$, la propriété suivante :

  > il existe une suite $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n$ (que l'on étend, la suite ne change pas en fonction de $n$) de booléens telle que, pour tout sous-ensemble fini $B$ de $\mathscr{E}$, il existe une valuation $\nu$ satisfaisant $B$ et telle que $\nu(x_0) = \varepsilon_0$, …, et $\nu(x_n) = \varepsilon_n$.

- Pour $n = 0$, soit on est dans le cas 1, et on prend $\varepsilon_0 = 0$ et on a la propriété ; soit on est dans le cas 2 ;, et on prend $B$ un sous-ensemble fini de $\mathscr{E}$, alors $B \cup B_0$ est un ensemble fini donc satisfiable par une valuation $\nu$. La valuation satisfait $B_0$ donc $\nu(x_0) = 1$ et $\nu$ satisfait $B$. On a donc la propriété au rang 0.
- Hérédité. Par hypothèse de récurrence, on a une suite $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n$.
  1. Soit, pour tout sous-ensemble fini $B$ de $\mathscr{E}$, il existe $\nu$ qui satisfait $B$ et telle que $\nu(x_0) = \varepsilon_0$, …, $\nu(x_n) = \varepsilon_n$, et $\nu(x_{n+1}) = 0$. On pose $\varepsilon_{n+1} = 0$.
  2. Soit il existe $B_{n+1}$ un sous-ensemble fini de $\mathscr{E}$ tel que, pour toute valuation $\nu$ telle que $\nu$ satisfait $B_{n+1}$ et $\nu(x_0) = \varepsilon_0, \ldots, \nu(x_n) = \varepsilon_n$, on a $\nu(x_{n+1}) = 1$ et on pose $\varepsilon_{n+1} = 1$.

  Montrons l'hérédité :
  1. vrai par définition ;
  2. soit $B$ un sous-ensemble fini de $\mathscr{E}$. On considère $B \cup B_{n+1}$, soit $\nu$ telle que $\nu(x_0) = \varepsilon_0$, …, $\nu(x_n) = \varepsilon_n$. On a que $\nu$ satisfait $B_{n+1}$ donc $\nu(x_{n+1}) = 1 = \varepsilon_{n+1}$ et $\nu$ satisfait $B$.

On a donc la propriété pour tout $n$.

Finalement, soit $\delta$ une valuation telle que, pour tout $i$, $\delta(x_i) = \varepsilon_i$. Montrons que $\delta$ satisfait $\mathscr{E}$. Soit $F \in \mathscr{E}$. On sait que $F$ est un mot (fini), donc contient un ensemble fini de variables inclus dans $\{x_0, \ldots, x_n\}$. D'après la propriété par récurrence au rang $n$, il existe une valuation $\nu$ qui satisfait $F$ et telle que $\nu(x_0) = \varepsilon_0, \ldots, \nu(x_n) = \varepsilon_n$, et donc $\nu$ et $\delta$ coïncident sur les variables de $F$. Donc (lemme simple), elles coïncident sur toutes les formules qui n'utilisent que ces variables. Donc, $\delta(F) = 1$, et on en conclut que $\delta$ satisfait $\mathscr{E}$. □

Dans le cas non-dénombrable, on utilise le *lemme de Zorn*, un équivalent de l'*axiome du choix*.

**Définition 6.** Un ensemble ordonné $(X, \mathscr{R})$ est inductif si pour tout sous-ensemble $Y$ de $X$ totalement ordonné par $\mathscr{R}$ (*i.e.* une chaîne) admet un majorant dans $X$.

**Remarque 1.** On considère ici un majorant et non un plus grand élément (un maximum).

**Exemple 3.**
1. Dans le cas $(\mathscr{P}(X), \subseteq)$, le majorant est l'union des parties de la chaîne, il est donc inductif.
2. Dans le cas $(\mathbb{R}, \leq)$, il n'est pas inductif car $\mathbb{R}$ n'a pas de majorant dans $\mathbb{R}$.

**Lemme 2 (Lemme de Zorn).** Si $(X, \mathscr{R})$ est un ensemble ordonné inductif non-vide, il admet au moins un élément maximal.

**Remarque 2.** Un élément maximal n'est pas nécessairement le plus grand.

**Preuve.** Soit $\mathscr{E}$ un ensemble de formules finiment satisfiable, et $\mathscr{P}$ un ensemble de variables. On note $\mathscr{V}$ l'ensemble des valuations partielles prolongeables pour toute partie finie $\mathscr{C}$ de $\mathscr{E}$ en une valuation satisfaisant $\mathscr{C}$. C'est-à-dire :

$$\mathscr{V} := \left\{ \varphi \in \bigcup_{X \subseteq \mathscr{P}} \{0,1\}^X \;\middle|\; \forall \mathscr{C} \in \wp_{\mathrm{f}}(\mathscr{E}), \exists \delta \in \{0,1\}^{\mathscr{P}},\ \begin{matrix} \delta_{|\mathrm{dom}(\varphi)} = \varphi \\ \forall F \in \mathscr{C}, \delta(F) = 1 \end{matrix} \right\}.$$

L'ensemble $\mathscr{V}$ est non-vide car contient l'application vide de $\{0,1\}^{\emptyset}$ car $\mathscr{E}$ est finiment satisfiable. On défini la relation d'ordre $\preccurlyeq$ sur $\mathscr{V}$ par :

$$\varphi \preccurlyeq \psi \quad \text{ssi} \quad \psi \text{ prolonge } \varphi.$$

Montrons que $(\mathscr{V}, \preccurlyeq)$ est inductif. Soit $\mathscr{C}$ une chaîne de $\mathscr{V}$ et construisons un majorant de $\mathscr{C}$. Soit $\lambda$ la valuation partielle définie sur $\operatorname{dom} \lambda = \bigcup_{\varphi \in \mathscr{C}} \operatorname{dom} \varphi$, par : si $x_i \in \operatorname{dom} \lambda$ alors il existe $\varphi \in \mathscr{C}$ tel que $x_i \in \operatorname{dom} \varphi$ et on pose $\lambda(x_i) = \varphi(x_i)$.

La valuation $\lambda$ est définie de manière unique, *i.e.* ne dépend pas du choix de $\varphi$. En effet, si $\varphi \in \mathscr{C}$ et $\psi \in \mathscr{C}$, avec $x_i \in \operatorname{dom} \varphi \cap \operatorname{dom} \psi$, alors on a $\varphi \preccurlyeq \psi$ ou $\psi \preccurlyeq \varphi$, donc $\varphi(x_i) = \psi(x_i)$.

Autrement dit, $\lambda$ est la limite de $\mathscr{C}$. Montrons que $\lambda \in \mathscr{V}$. Soit $B$ une partie finie de $\mathscr{E}$. On cherche $\mu$ qui prolonge $\lambda$ et satisfait $B$. L'ensemble de formules $B$ est fini, donc utilise un ensemble fini de variables, dont un sous-ensemble fini $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\} \subseteq \operatorname{dom}(\lambda)$. Il existe $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ dans $\mathscr{C}$ telle que $x_{i_1} \in \operatorname{dom} \varphi_1, \dots, x_{i_n} \in \operatorname{dom} \varphi_n$. Comme $\mathscr{C}$ est une chaîne, donc soit $\varphi_0 = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \varphi_i$ et on a $\varphi_0 \in \mathscr{C}$. On a, de plus, $x_{i_1}, \dots, x_{i_n} \in \operatorname{dom}(\varphi_0)$. Soit $\varphi_0 \in \mathscr{V}$ prolongeable en $\psi_0$ qui satisfait $B$. On définit :

$$\begin{aligned} \mu : \mathscr{P} &\longrightarrow \{0,1\} \\ x \in \operatorname{dom} \lambda &\longmapsto \lambda(x) \\ x \in \operatorname{var} B &\longmapsto \psi_0(x) \\ \text{sinon} &\longmapsto 0. \end{aligned}$$

On vérifie que la définition est cohérente sur l'intersection car $\lambda$ et $\psi_0$ prolongent tous les deux $\varphi_0$ et donc $\lambda \in \mathscr{V}$ d'où $\mathscr{V}$ est inductif.

Suite la preuve plus tard. $\square$