Logique — TD n°5 — Hugo SALOU

## Exercice 1. Théorie des graphes.

Q1. pas de boucles : $\forall x \quad \neg R(x,x)$

non-orienté : $\forall x \, \forall y \quad R(x,y) \longleftrightarrow R(y,x)$.

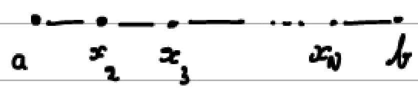
(l'implication simple suffit).

D'où $Th(\text{Graphes non-orientés simples}) = \{ \forall x \quad \neg R(x,x),$
$\forall x \forall y \quad R(x,y) \longleftrightarrow R(y,x) \}$.

Q2. On pose $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$ qui est une théorie sur $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$.

Q3. $\varphi_n = \overbrace{\forall x_1 \cdots \forall x_{n-1}}^{\text{pour } n \text{ fixé}} \neg (R(a, x_1) \wedge R(x_1, x_2) \wedge \cdots \wedge R(x_{n-1}, b))$

Q4. Oui. On considère $G = (V, E)$ décrit ci-dessous.
Soit $N = \max \{ n_1, \dots, n_k \} + 1$.



Il est connexe, simple, non-orienté et non-vide.

Et, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, il n'y a pas de chemins de long° $n_k$ entre $a$ et $b$ dans $G$.

Q5. Soit $\mathcal{T} \supseteq A$ une théorie des graphes connexes.

On pose $\mathcal{T}' := \mathcal{T} \cup \{ \varphi_n \mid n \in \mathbb{N}^* \}$.

Toute partie finie de $\mathcal{T}'$ est satisfiable.
Par compacité, on a que $\mathcal{T}$ est satisfiable. Absurde car seul un graphe vide satisfait $\mathcal{T}'$.

## Exercice 2. Langage sans fonction.

Q1. Par récurrence sur $n$, montrons que :

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y_1 \cdots \exists y_k \; A[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k]$$

est un théorème ssi elle est satisfaite dans toute interprétation de card° au plus $n+m$.

- Pour $n=0$, $\overbrace{\exists y_1 \cdots \exists y_k \; A[y_1, \dots, y_k]}^{\varphi}$ est un théorème ssi

$$\forall \mathcal{M} \text{ modèle}, \forall e, \quad \mathcal{M}, e \models \varphi$$

Si on a un modèle de card $> m$, on peut le décomposer en modèles de card $\leq k$ par dénombrement.
D'où l'équivalence.

-

Q2. Dans $\mathcal{L} = \{c_1, \dots, c_m, f, =\}$,

on considère $A =$ " $f(y_1, y_2) = f(y_2, y_1) \wedge \neg(y_1 = y_2) \wedge \bigwedge_{i=3}^{k-1} (y_i = y_{i+1})$ ".

Dans le modèle

$$\mathcal{M} : \{0,1\}, \quad f_{\mathcal{M}} = \text{xor}, \quad c_i = 0$$

la formule A est fausse.

## Exercice 3. Densité.

Q1. On a $(\mathbb{Q}, <)$ et $(\mathbb{R}, <)$ qui sont non-isomorphes.

Q2

Soit $\varphi := \forall x, \exists y \quad r(x,y)$.

Dans $(\mathbb{R}, <)$, la formule $\varphi$ est vérifiée
Dans $([0,1], <)$ la formule $\varphi$ ne l'est pas.

D'où $T$ n'est pas complète.

Q3. Soit un modèle $\mathcal{M}$.

Soient $x, y \in |\mathcal{M}|$ tels que $x < y$ (par $A_1$).

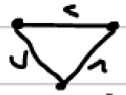
Construisons par récurrence des éléments de $\mathcal{M}$.

- on commence avec $x, y$
- par $A_4$, et comme $x < y$, il existe $z$ tq $x < z < y$
- par $A_4$, .......... $x < z$ ......... $w$ ..... $x < w < z$

Si $w \in \{x, y, z\}$, alors par $A_2$ et $A_3$ on a une absurdité.

D'où $T$ n'admet pas de modèle fini.

Q4. $T_1$ : $(\{1\}, <)$
$T_2$ : $(\{1\}, \leq)$
$T_3$ :



$T_4$ $(\{0,1\}, <)$

## Exercice 4. Modèle infini.

On pose $\varphi_k = \exists x_1 \dots \exists x_k \ \neg(x_1 = x_2) \wedge \dots \wedge \neg(x_{k-1} = x_k)$.

Toute sous-théorie finie $A$ de $T' := T \cup \{\varphi_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ a un modèle (de card $> \max\{k \in \mathbb{N} \mid \varphi_k \in A\} \in \mathbb{N}$ avec $\max \emptyset = 0$).

Par compacité, $T'$ admet un modèle. S'il est fini de cardinal $k$, absurde car $\varphi_k \in T'$. Il admet donc un modèle infini $\mathcal{M}_\infty$.

La théorie $T$ admet donc un modèle infini $\mathcal{M}_\infty$.

# TD n° 6

## Exercice 1. Contortionnisme.

Q1.

$$\mathrm{Th}(\text{Groupes abéliens sans torsion}) := \{ \forall x\ \exists y\ \ x+y = y+x = 0,\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ \ (x+y)+z = x+(y+z),\ \forall x\ \ x+0 = 0+x = x,\ \forall x\ \forall y\ \ x+y = y+x \} \cup \{ \forall x\ \neg(x=0) \to \neg(\underbrace{x+x+\cdots+x}_{n} = 0) \mid n \in \mathbb{N}^* \}$$

(où $(a=b=c) := a=b \wedge b=c$)

Q2. Supposons qu'il existe une théorie $\mathcal{T}$ des groupes abéliens avec torsion.

On considère :

$$\mathcal{T}' := \mathcal{T} \cup \{ \underbrace{\forall x\ \ x \neq 0 \to n \cdot x \neq 0}_{\varphi_n} \mid n \in \mathbb{N}^* \}$$

Toute partie finie $T \subseteq \mathcal{T}'$ est satisfiable.
En effet, soit $n = \max\{ n \in \mathbb{N}^* \mid \varphi_n \in T \} < +\infty$,
puis $G := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p > n$ et $p$ premier.

Par compacité, $\mathcal{T}'$ est satisfiable.
Absurde car il existe $x \in G$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $n \cdot x \neq 0$ et $x \neq 0$.

Q3. avec torsion $\neq$ sans torsion

## Exercice 2. Formules closes.

On a : $T_{\mathcal{M}} = \{ F \in \mathcal{F} \mid \mathcal{M} \models F \}$

Soit $F \in \mathfrak{F}$.

Si $\mathfrak{A} \vDash F$ alors $\dfrac{}{T_{\mathfrak{A}} \vDash F}\,\text{ax}$ car $F \in T_{\mathfrak{A}}$.

Si $\mathfrak{A} \nvDash F$ alors $\mathfrak{A} \vDash \neg F$ et $\dfrac{}{T_{\mathfrak{A}} \vdash \neg F}\,\text{ax}$ car $\neg F \in T_{\mathfrak{A}}$.

De plus, si $T_{\mathfrak{A}} \vdash \bot$ alors, par correction, $\mathfrak{A} \vDash \bot$ absurde.
car $\mathfrak{A}$ modèle de $T_{\mathfrak{A}}$.

## Exercice 3.

Q1 Pour $n=0$, on a : $P_0 \vdash S0 \neq 0$ par $A_1$.

Pour $n>0$, on a :

par hyp de récurrence

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A_3}\,\text{ax}}{\Gamma \vdash \forall y\; S^{n+1}0 = Sy \to S^n 0 = y}\,\forall_e}{\Gamma \vdash S^{n+1}0 = S^n 0 \to S^n 0 = S^{n-1}0}\,\forall_e \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash S^{n+1}0 = S^n 0}\,\text{ax}}{\Gamma := P_0, S^{n+1}0 = S^n 0 \vdash S^n 0 = S^{n-1} 0}\,\to_e \qquad \dfrac{P_0 \vdash S^n 0 \neq S^{n-1}0}{P_0, S^{n+1}0 = S^n 0 \vdash S^n 0 \neq S^{n-1}0}\,\text{aff}}{\dfrac{P_0, S^{n+1}0 = S^n 0 \vdash \bot}{P_0 \vdash S^{n+1}0 \neq S^n 0}}\,\neg_e \qquad (*)$$

Q2. $PA \vdash \forall x \quad Sx \neq 0$.

On a :

- $P_0 \vdash S0 \neq 0$
- et :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A_4}\,\text{ax}}{\Gamma \vdash S^2x = Sx \to Sx = x}\,\forall_e \times 2 \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash S^2 x = Sx}\,\text{ax}}{\Gamma \vdash Sx = x}\,\to_e \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash Sx \neq x}\,\text{ax}}{\Gamma := PA, Sx \neq x, S^2 x = Sx \vdash \bot}\,\neg_e}{\dfrac{PA, Sx \neq x \vdash S^2 x \neq Sx}{PA \vdash Sx \neq x \to S^2 x \neq Sx}\,\to_i}\,\neg_i$$

D'où, par schéma inductif, on a $\forall x,\ Sx \neq x$.

Q3. On pose $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ où $S\omega := \omega$ avec $\omega \times 0 := 0$.

$\omega \times x := \omega$

$\omega + x := \omega$

(& commutativité)

$(A_1) - (A_5)$ pas de pb avec $\omega$

$(A_6)$ ok par déf.

$(A_7)$ $0 \times \underbrace{S\omega}_{\omega} = (0 \times \omega) + 0 = 0$

$$\omega \times (Sy) = \underbrace{(\omega \times y)}_{= 0 \text{ ou } \omega} + \omega = \omega$$

D'où $\overline{\mathbb{N}} \models P_0$ et $\overline{\mathbb{N}} \not\models \forall x\ Sx \neq x$ car $S\omega = \omega$.

Exercice 4.

Q1. On applique le théorème de Löwenheim-Skolem pour obtenir un modèle de card $> \aleph_0$.

Q2. Soit, par l'absurde, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{M}$ un $\mathcal{L}$-isomorphisme.

$\varphi(0) = (0,0)$

$\varphi(1) = \varphi(S_{\mathbb{N}}0) = S_{\mathcal{M}}\varphi(0) = S_{\mathcal{M}}(0,0) = (0,1)$

$\varphi(2) = \varphi(S_{\mathbb{N}}1) = S_{\mathcal{M}}\varphi(1) = S_{\mathcal{M}}(0,1) = (0,2)$

$\varphi(3) = \varphi(S_{\mathbb{N}}2) = S_{\mathcal{M}}\varphi(2) = S_{\mathcal{M}}(0,2) = (0,3)$

Ainsi, $\operatorname{im} \varphi = \{0\} \times \mathbb{N} \neq |\mathcal{M}|$. Absurde.

On vérifie que $\mathcal{M}$ vérifie $(A_1) - (A_7)$.

Q3. Soit $F := \forall x \forall y\ x+y = y+x$.

On a $\mathbb{N} \models F$ mais $\mathcal{M} \not\models F$ car $(1,1) + (2,1) = (1,2)$

et $(2,1) + (1,1) = (2,2)$.

D'où $P_0$ n'est pas complète.

# Exercice 5. Ensembles définissables.

Q1. $F_{2\mathbb{N}}(x) := \exists y \quad x = y + y.$

Q2. $F_{\mathbb{P}}(x) := \forall y \; (\exists z \quad x = y \times z) \rightarrow (y = x \;\vee\; y = (S0))$

Q3. (a) $\forall x \quad F_E(x) \longrightarrow F_{E'}(x)$

(b) $F_E(x) \wedge \forall y < x \; \neg F_E(y)$ )) $G(x)$

(c) $(\exists x \quad F_E\, x) \wedge (\forall x \quad F_E(x) \rightarrow \exists y > x \quad F_E(y))$

Q4. $P_E(y) := (\exists x \leq y \quad F_E(x)) \longrightarrow \exists x \quad G(x) \wedge x \leq y$

Q5.

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P_0 \vdash A_4}\;\mathrm{ax}}{P_0 \vdash 0+0=0}}{P_0 \vdash \exists z \; 0 + z = 0}$$

(b) Long et se fait par induction sur $y$. (fait en cours)

(c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x+y=0}\;\mathrm{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash S(z+y) \neq 0}\;A_1}{\Gamma \vdash Sz + y \neq 0}\;A_5}{\Gamma \vdash x+y \neq 0}}{\Gamma := P_0, \dots, x+y=0,\; x = Sz \;\vdash \bot}\;\exists e}{P_0, \exists y \; x+y=0,\; x \neq 0,\; x = Sz \;\vdash \bot}\;A_2}{P_0, \exists y \; x+y=0,\; x \neq 0 \;\vdash \bot}\;\bot_c}{P_0, \exists y \quad x+y=0 \vdash x=0}$$

(d) On utilise le schéma inductif:

- $P_E(0)$ : $F_E(0) \longrightarrow \underbrace{F_E(0)}_{\text{hyp}} \wedge \underbrace{0 \leq 0}_{(a)} \wedge \underbrace{\forall y < 0 \; \neg F_E(0)}_{\neg(\underbrace{y + Sz}_{S(y+z) \text{ par } A_5} = 0) \rightarrow A_1}$

- $P_E(n) \longrightarrow P_E(n+1)$

$\exists y \leq n+1 \quad F_E(y)$ → si $y \leq n \rightarrow P_E(n)$ et $n \leq n+1$
→ sinon $y = n+1 \rightarrow G(n+1) \wedge n+1 \leq n+1.$

Le cas sinon, on était dans l'autre cas.

Q6. $(\exists x \ F_E(x)) \to \exists y \ G(y)$

Soit $x \in E$. Par Q5, $\exists z$, $G(z) \wedge z \leq x$.
D'où $G(y)$.

Q7.

# 1D 7

## Exercice 1. Modèles sans schéma d'induction

Q1. $A_1$ okay $A_2$ okay $A_3$ okay $A_4$ $f(x,*) = x$
$A_5$ okay $A_6$ $g(x,*) = *$ $A_7$ $f(g(x,y),x) = g(x,y)$

En effet :

$$(x,n) +_{\mathcal{R}} S_{\mathcal{R}}(y,m) = (x,n) +_{\mathcal{R}} (y, m+1)$$
$$= (f(x,y), n+m+1)$$
$$= S_{\mathcal{R}}(f(x,y), n+m)$$

$$(x,n) \times_{\mathcal{R}} S_{\mathcal{R}}(y,m) = (x,n) \times_{\mathcal{R}} (y, m+1)$$
$$= (g(x,y), nm+n)$$

$$((x,n) \times_{\mathcal{R}} (y,m)) +_{\mathcal{R}} (x,n)$$
$$= (g(x,y), nm) +_{\mathcal{R}} (x,n)$$
$$= (f(g(x,y),x), nm+n)$$

Q2. Commutativité : $f(x,y) = f(y,x)$ et $g(x,y) = g(y,x)$
Associativité : $f(f(x,y),z) = f(x, f(y,z))$
$g(g(x,y),z) = g(x, g(y,z))$

Q3. c.f. 1D6 exercice 4

Q4. $x \leq y ::= \exists z, x + z = y$

$$(x,n) \leq_{\mathcal{R}} (y,m) \Leftrightarrow \exists (z,p), (x,n) +_{\mathcal{R}} (z,p) = (y,m)$$
$$\Leftrightarrow \exists (z,p), (f(x,z), n+p) = (y,m)$$
$$\Leftarrow \exists z, f(x,z) = y$$

Q5. $f(x,y) = x \quad g(x,y) = y$

$$(*,0) + (x,n) = (f(*,x), n) = (*, n) \neq (x,n)$$

$$(*,0) \times (x,n) = (g(*,x), 0) = (x, 0) \neq (*,0).$$

Exercice 2. Equivalences.

Q1. Supposons avoir $T$ une théorie des relations d'équivalences ayant un nombre fini de classes.

Soit $\varphi_n := \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=i+1}^{n} \neg R(x_i, x_j)$.

Puis, $T' := T \cup \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Toute partie $A \subseteq_{finie} T'$ est satisfiable, par exemple $([\![1,n]\!], =)$, où $n = \max \{n' \in \mathbb{N} \mid \varphi_{n'} \in A\}$ fini.

D'où $T'$ satisfiable absurde.

Q2. Par l'absurde, soit $T$ une théorie des relations d'équivalences n'ayant que des classes finies.

Soit $\psi_n := \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i=1}^{n-1} R(x_i, x_{i+1}) \wedge \bigwedge_{i \neq j} \neg(x_i = x_j)$.

Soit $T' := T \cup \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Toute partie finie $A \subseteq_{finie} T'$ est satisfiable, par exemple $([\![1,n]\!], \sim)$, où $n := \max \{n \mid \psi_n \in A\}$ fini et $x \sim y \ \forall x, \forall y$.

D'où $T'$ satisfiable. Absurde.

Q3. On pose $T_= := \{\forall x \ R(x,x), \forall x \forall y \ R(x,y) \to R(y,x)$
$\forall x \forall y \forall z \ R(x,y) \to R(y,z) \to R(x,z)\}$
$\cup \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Q4. (a) Soit $T_1$ tel que $T \vdash T_1$ et $T_1 \vdash T$. Il existe donc $T' \subseteq T$ telle que l'on ait $T' \vdash T_1$ (car preuve de $T \vdash T_1$ finie).

On a : $T' \vdash T_1$ et $T_1 \vdash T$ d'où $T' \vdash T$.

(b) Non : sinon $T' \subseteq_{finie} T_{\equiv}$ donc $n := \min_{\varphi_n \in T'} n$

et $m := \min_{\psi_m \in T'} m$

On considère un ens ayant $< n$ classes toutes de cardinal $< m$. $\leadsto$ modèle $\mathcal{M}$.
D'où $T'$ admet $\mathcal{M}$ pour modèle. Absurde.

(c) oui en théorie, mais non, cela ne dépend pas.

Q5. Soient $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{N}, =, \text{divisibilité})$,
$\mathcal{M}_2 = (\mathbb{N}, =, n \sim m \Leftrightarrow \varphi(n) \approx \varphi(m))$

$\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{bij.}} \mathbb{N}^2$ où $(p,q) \approx (p',q') \Leftrightarrow p+q' = p'+q$.

Soit $\Psi : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ un $\mathcal{L}$-morphisme.

$n \mid m \Leftrightarrow \Psi(n) \approx \Psi(m)$ Absurde.