Algèbre 1.

Fiche de synthèse

Hugo Salou

I. Sous-groupes.

- Centre d'un groupe :

$$Z(G) := \{g \in G \mid \forall x \in G, gx = xg\}$$

  C'est un sous-groupe de G.

- Sous-groupe engendré par X :

$$\langle X \rangle := \bigcap_{X \subseteq H \preceq G} H.$$

  C'est un sous-groupe de G et il contient X.

- Index de H dans G :

$$\begin{aligned}[G : H] &:= \#\{aH \mid a \in G\} \\ &= \#\{Ha \mid a \in G\}\end{aligned}$$

  Pour $H = \{e\} =: 1$, on a $[G : 1] = |G|$.

- **Théorème de Lagrange** :

$$[G : 1] = [G : H] \cdot [H : 1]$$

  Mieux : si $H \succeq K$ alors

$$[G : K] = [G : H] \cdot [H : K]$$

- Sous-groupe distingué $N \lhd G$:

$$\forall g \in G, \quad gNg^{-1} = N$$

  Mieux : on n'a que l'inclusion $gNg^{-1} \subseteq N$ à démontrer quel que soit $g \in G$.

- Sous groupe simple S : avoir $X \lhd S$ implique alors $X = 1$ ou $X = G$.

- $$\text{distingué} \times \text{sous-groupe} = \text{sous-groupe}$$

- $$\text{distingué} \times \text{distingué} = \text{distingué}$$

- Sous-groupe distingué engendré par X :

$$\langle X \rangle_{\text{distingué}} := \Big\langle \bigcup_{g \in G} gXg^{-1} \Big\rangle.$$

  C'est un sous-groupe distingué de G et il contient X.

- $\ker u \lhd G$ où $u : G \to H$ est un morphisme. *Mieux* : c'est une équivalence

$$\text{noyau} \longleftrightarrow \text{sg. distingué}.$$

II. Quotient & isomorphisme.

- Quotient : si $N \lhd G$ alors

$$G/N := \{aN \mid a \in G\}$$

  est un groupe. On ajoute la *projection canonique* :

$$\begin{aligned}\pi : G &\longrightarrow G/N \\ g &\longmapsto gN\end{aligned}$$

  On a $\ker(\pi) = N$.

- **Factorisation d'un morp. par le quotient** : si $u : G \to G'$ et $u(N) = 1$ (*i.e.* $\ker u = 1$) alors il existe un unique $\bar{u} : G/N \to G'$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi"'] & G' \\ G/N \arrow[ur, "\bar{u}"] & \end{tikzcd}$$

- **Premier théorème d'isomorphisme**.

  « factorisation de morphismes »

$$G/(\ker u) \cong \operatorname{im} u$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "u"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & G' \\ G/(\ker u) \arrow[r, hook, two heads] & \operatorname{im} u \arrow[u, hook, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

- **Second théorème d'isomorphisme**.

  « théorème d'isomorphisme »

  Pour $H \preceq G$ et $N \lhd G$,

$$H/(H \cap N) \cong HN/N$$

- **Troisième théorème d'isomorphisme.**

  « quotient de quotient par quotient »

  Pour $H \lhd G$ et $N \lhd G$,

$$G/H \cong (G/N)/(H/N)$$

III. Actions de groupes.

- Action de groupe : $\alpha : G \to \operatorname{Bij}(X)$
- Orbite : $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\} \subseteq X$.

- Stabilisateur : $\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \preceq G$
  et $\mathrm{Stab}(g \cdot x) = g(\mathrm{Stab}\ x)g^{-1}$
- Points fixes de $g \in G$:

  $$\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\} \subseteq X$$

  et, l'ensemble des points fixes de l'action :

  $$X^G = \bigcap_{g \in G} \mathrm{Fix}(g)$$

On dit qu'une action est :
- *fidèle* si $\ker \alpha = \{\mathrm{id}\}$ *« la seule action qui fixe tout le monde est l'identité »* (en passant au quotient, on résout ce problème) ;
- *libre* si $\forall g \neq 1_G, \mathrm{Fix}(g) = \emptyset$;
- *transitive* s'il n'y a qu'une orbite :

  $$\forall x, y \in X, \exists g \in G, y = g \cdot x \ ;$$
- *simplement transitive* : libre et transitive (*i.e.* unicité de g au dessus).

Actions classiques de G sur G :
- *translation gauche* : $g \cdot x := gx$.
  $\to$ libre et transitive
- *conjugaison* : $g \cdot x := gxg^{-1}$.

Théorème de Caylay. Pour G un groupe d'ordre fini $n \in \mathbb{N}^*$, on a que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.
Idée : $G \hookrightarrow \mathfrak{S}_n$ et 1er théorème d'isomorphisme.

- Classe de conjugaison : $G \cdot x$ pour la conjugaison
- Centralisateur : $\mathrm{Stab}\ x$ pour la conjugaison

Normalisateur :

$$N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\} \lhd G$$

C'est le plus grand s.g.dist. contenant H.