Algèbre 1

Hugo SALOU

ENS DE LYON

9 avril 2025

Preuve. ▷ L'unicité à unique isomorphisme près est formelle (*c.f.* preuve des sommes/produits directs).

▷ On va démontrer l'existence, pour $n = 2$, et on procède par récurrence immédiate pour montrer pour tout n. On donne deux méthodes.

Méthode rapide

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E_1. Soit $(f_1, \ldots, f_m)$ une base de E_2. On considère $E_1 \otimes E_2$ le $\mathbb{k}$-espace vectoriel de base indexée par $\{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$ (c'est à dire $\mathbb{k}^n \times \mathbb{k}^m$). On notera $e_i \otimes f_j$ l'élément de la base correspondante à l'indice (i, j).

Remarquons que, plus abstraitement, on a considéré

$$\bigoplus_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]} \mathbb{k}(e_i \otimes e_j).$$

On définit alors l'application

$$\begin{aligned} \pi : E_1 \times E_2 &\longrightarrow E_1 \otimes E_2 \\ (e_i, f_j) &\longmapsto e_i \otimes f_j, \end{aligned}$$

étant étendue par linéarité.

Justifions que la propriété universelle voulue est satisfaite.

Soit $\phi : E_1 \times E_2 \to F$. On définit l'application linéaire

$$\begin{aligned} \bar{\phi} : E_1 \otimes E_2 &\longrightarrow F \\ e_i \otimes e_j &\longmapsto \bar{\phi}(e_i, e_j), \end{aligned}$$

étendue par linéarité.

Observation. $\phi = \bar{\phi} \circ \pi$.

. Clair.

L'unicité de $\bar{\phi}$ est claire, car elle doit prendre les valeurs $\big(\phi(e_i, f_j)\big)_{i,j}$ sur $(e_i \otimes e_j)_{i,j}$, qui est une base de $E_1 \otimes E_2$.

Méthode « M1 Maths »

On définit le produit tensoriel par un quotient de relation. C'est une construction qui sera utilisée notamment en M1 avec les modules.

On définit [1] :

$$E_1 \otimes E_2 := \frac{\bigoplus_{e\in E_1, f\in E_2} \Bbbk(e\otimes f)}{\langle(\lambda e + \lambda' e')\otimes(\mu f + \mu' f') = \lambda\mu e\otimes f + \lambda\mu' e\otimes f' + \lambda'\mu e'\otimes f + \lambda'\mu' e'\otimes f'\rangle}.$$

On définit alors

$$\begin{aligned}\pi : E_1 \times E_2 &\longrightarrow E_1 \otimes E_2\\ (e, f) &\longmapsto \overline{e \otimes f},\end{aligned}$$

qui est étendue par bilinéarité puis construction.

(Exercice) Le couple $(E_1 \otimes E_2, \pi)$ satisfait la propriété universelle recherchée.

$\square$

Définition 0.1. Soient $E_1, \dots, E_n$ des $\Bbbk$-espaces vectoriels. Pour $(e_1, \dots, e_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, on note

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n := \pi(e_1, \dots, e_n).$$

Terminologie. Les éléments de cette forme sont appelés *tenseurs simples* (ou *pures*). Un élément de $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ est appelé *tenseur*.

1. Cette définition n'a qu'un intérêt théorique : on pose l'espace comme ceci mais, pour pouvoir le calculer, cette définition n'est pas très utile.

Observation. Les tenseurs simples engendrent $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$.

. Clair avec les deux constructions données.

Attention ! Un tenseur quelconque n'est en général pas simple.

Pour bien insister sur le corollaire de la construction :

Corollaire 0.1. Soient $E_1, \ldots, E_n$ des $\mathbb{k}$-espaces vectoriels. Soit également $(e_{i_k})_{i_k \in I_k}$ une base de E_k pour $k \in [\![1, n]\!]$.

Alors, $(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n})_{(i_1,\ldots,i_n) \in I_1 \times \cdots \times I_n}$ est une base de $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$.

En particulier,

$$\dim(E_1 \otimes E_n) = \prod_{i=1}^{n} \dim(E_i).$$

Preuve. Cela par la construction donnée. $\square$

On a les règles de calculs suivantes :

1. $\lambda \cdot (e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) = (\lambda \cdot e_1) \otimes e_2 \otimes \cdots \otimes e_n = \cdots = e_1 \otimes \cdots \otimes e_{n-1} \otimes (\lambda \cdot e_n)$.
2. $(e_1 + e_1') \otimes e_2 \otimes \cdots \otimes e_n = e_1 \otimes \cdots \otimes e_n + e_1' \otimes \cdots \otimes e_n$,

$$\vdots$$

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_{n-1} \otimes (e_n + e_n') = e_1 \otimes \cdots \otimes e_n + e_1 \otimes \cdots \otimes e_n'.$$

Ceci est vrai par bilinéarité de π.

0.1 Morphismes et produits tensoriels.

Dans cette section, on traitera le cas $n = 2$.

On a le théorème suivant.

Théorème 0.1. Soient E, E', F, F' quatre $\mathbb{k}$-espaces vectoriels de dimension finie. Il y a un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(E, E') \otimes \mathrm{Hom}(F, F') &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(E \otimes F, E' \otimes F') \\ u \otimes v &\longmapsto \left| \begin{array}{ccc} E \otimes F & \to & E' \otimes F' \\ x \otimes y & \mapsto & u(x) \otimes u(y) \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Convention. Lorsqu'on écrit « $u \otimes v$ », on l'interprète comme étant un élément de $\mathrm{Hom}(E \otimes F, E' \otimes F')$.

Preuve. On considère le morphisme Φ défini par :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{Hom}(E, E') \times \mathrm{Hom}(F, F') &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(E \otimes F, E' \otimes F') \\ (u, v) &\longmapsto \left| \begin{array}{ccc} E \otimes F & \to & E' \otimes F' \\ x \otimes y & \mapsto & u(x) \otimes u(y) \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Observation. Φ est bien définie.

. Ceci découle du fait que

$$\begin{aligned} E \times F &\longrightarrow E' \otimes F' \\ (x, y) &\longmapsto E \times u(x) \otimes v(y) \end{aligned}$$

est bilinéaire, donc unicité de l'application linéaire $E \otimes F \to E' \otimes F'$ (propriété universelle).

Observation. L'application Φ est bilinéaire.

. Clair.

Ainsi Φ induit, par propriété universelle, l'application linéaire

$$\bar{\Phi} : \mathrm{Hom}(E, E') \otimes \mathrm{Hom}(F, F') \to \mathrm{Hom}(E \otimes F, E' \otimes F').$$

Observation. $\bar{\Phi}$ est surjective

. Il suffit de montrer que l'on peut atteindre les morphismes de la forme

$$\begin{aligned} e_i \otimes f_j &\longmapsto e'_k \otimes f'_\ell \\ e_r \otimes f_s &\longmapsto 0 \text{ si } (r,s) \neq (i,j) \end{aligned}$$

où $(e_i)_i$ est une base de E, $(f_j)_j$ est une base de F, $(e'_k)_k$ est une base de E' et $(f'_\ell)_\ell$ est une base de F'.

Et, pour ce faire, on définit

$$\begin{aligned} u : e_i &\longmapsto e'_k \\ e_r &\longmapsto 0 \text{ si } r \neq i \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} v : f_j &\longmapsto f'_j \\ f_s &\longmapsto 0 \text{ si } s \neq j. \end{aligned}$$

On conclut puisque

$$\dim(\operatorname{Hom}(E,E') \otimes \operatorname{Hom}(F,F')) = \dim(\operatorname{Hom}(E \otimes F, E' \otimes F')).$$

□

On a alors la règle de calculs étendue.

Proposition 0.1. Si $u : E \to E'$, $u' : E' \to E''$, $v : F \to F'$ et $v' : F' \to F''$ quatre applications linéaires, alors

$$(u' \otimes v') \circ (u \otimes v) = (u' \circ u) \otimes (v' \circ v).$$

Preuve. Il suffit d'observer que ces deux applications prennent même valeurs sur les tenseurs simples. On conclut car ceux-ci engendrent $E \otimes F$. □

Interprétation matricielle (du théorème précédent)

Soit $\mathscr{B}_E = (e_i)$ une base de E, $\mathscr{B}_F = (f_j)$ une base de F, $\mathscr{B}_{E'} = (e'_k)$ une base de E' et $\mathscr{B}_{F'} = (f'_\ell)$ une base de F'. Notons $A := \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(u)$ et $B := \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_{E'},\mathscr{B}_{F'}}(v)$. Notons aussi $\mathscr{B}_{E\otimes F} = (e_i \otimes f_j)$ base de $E \otimes F$ et $\mathscr{B}_{E'\otimes F'} = (e'_k \otimes f'_\ell)$ base de $E' \otimes F'$. Alors,

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_{E\otimes F},\mathscr{B}_{E'\otimes F'}} = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1,m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,m}B \end{pmatrix} \qquad (*).$$

On peut en déduire que (exercice) le corolaire suivant.

Corollaire 0.2. Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $v \in \mathscr{L}(F)$ alors

1. $\operatorname{Tr}(u \otimes v) = \operatorname{Tr}(u) \cdot \operatorname{Tr}(v)$;
2. $\det(u \otimes v) = (\det u)^{\dim F} \cdot (\det v)^{\dim E}$;

et si $u \in \mathscr{L}(E, E')$ et $v \in \mathscr{L}(F, F')$ alors

3. $\operatorname{rg}(u \otimes v) = (\operatorname{rg} u) \cdot (\operatorname{rg} v)$.

Preuve. On applique l'interprétation matricielle, et on applique les résultats usuels sur les matrices. □

Remarque 0.1. La formule $(*)$ permet de définir le produit tensoriel de matrices. On montrerait alors

1. $(A + A') \otimes B = A \otimes B + A' \otimes B$
2. $(AA') \otimes (BB') = (A \otimes B)(A' \otimes B')$ (par les règles de calculs)
3. $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$ (par l'interprétation terme à terme des morphismes).

0.2 Quelques isomorphismes canoniques et règles de calculs

0.2.1 Isomorphisme canonique.

Proposition 0.2. Soient E et F deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors, *canoniquement* on a $\mathrm{Hom}(E, F) \cong E^* \otimes F$.

Preuve. On considère

$$\begin{aligned} \phi : E^* \times F &\longrightarrow \mathrm{Hom}(E, F) \\ (\ell, y) &\longmapsto (x \mapsto \ell(x)\, y). \end{aligned}$$

Observation. ϕ est bilinéaire.

Elle induit donc $\bar{\phi} : E^* \otimes F \to \mathrm{Hom}(E, F)$.

La surjectivité se montre comme à la sections 3, et on conclut par égalité des dimensions. $\square$

0.2.2 Isomorphismes canoniques et règles de calculs.

Proposition 0.3. Si E, F sont deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels, alors

$$\begin{aligned} E \otimes F &\longrightarrow F \otimes E \\ e \otimes f &\longmapsto f \otimes e. \end{aligned}$$

Preuve. On pose

$$\begin{aligned} u : E \times F &\longrightarrow F \otimes E \\ (e, f) &\longmapsto f \otimes e, \end{aligned}$$

bilinéaire et il induit donc un morphisme

$$\bar{u} : E \otimes F \to F \otimes E.$$

On construit de même l'inverse. $\square$

Proposition 0.4. Si E_1, E_2, F sont trois $\Bbbk$-espaces vectoriels, alors il y a un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} u : (E_1 \oplus E_2) \otimes F &\longrightarrow (E_1 \otimes F) \oplus (E_2 \otimes F) \\ (x \oplus y) \otimes z &\longmapsto (x \otimes z) \oplus (y \otimes z). \end{aligned}$$

Preuve. On considère, pour $i \in \{1, 2\}$, l'application $p_i : E_1 \otimes E_2 \to E_i$ la projection canonique.

> **Observation.** $u = (p_1 \otimes \mathrm{id}_F, p_2 \otimes \mathrm{id}_F)$
>
> . Clair

On peut construire l'inverse. Soit, pour $i \in \{1, 2\}$, l'injection canonique

$$j_i : E_i \hookrightarrow E_1 \oplus E_2.$$

On considère alors, pour $i \in \{1, 2\}$,

$$j_i \otimes \mathrm{id}_F : E_i \otimes F \to (E_1 \oplus E_2) \otimes F.$$

Ainsi, $v = j_1 \oplus j_2$ est un inverse pour u. □

Proposition 0.5. Si E et F sont deux $\Bbbk$-espaces vectoriels de dimension fini, alors il existe un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \bar{\phi} : E^* \otimes F^* &\longrightarrow (E \otimes F)^* \\ \mu \otimes \nu &\longmapsto (x \otimes y \mapsto \mu(x) \cdot \nu(y)). \end{aligned}$$

Preuve.

1. L'application $\bar{\phi}$ est bien définie.
2. C'est bien un isomorphisme (on montre que c'est surjectif et égalité des dimensions).

□

Proposition 0.6. Si E, F et G sont trois $\Bbbk$-espaces vectoriels alors il y a un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned}(E \otimes F) \otimes G &\longrightarrow E \otimes (F \otimes G)\\ (x \otimes y) \otimes z &\longmapsto x \otimes (y \otimes z).\end{aligned}$$

Preuve. Exercice. $\square$

1 Représentation linéaires des groupes (finis, complexes).

1.1 Notions de base.

Dans cette section, on considère un corps $\Bbbk$ est un groupe G.

1.1.1 Définitions.

Définition 1.1. Une *représentation linéaire de G sur $\Bbbk$* est la donnée de

- ▷ V un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension finie ;
- ▷ $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ morphisme de groupes.

Autrement dit, c'est une action de G sur V par *automorphismes linéaires*.

Notation. On note (ρ, V), souvent abrégé en simplement V (ρ étant sous-entendu).

Terminologie.

- ▷ Le *degré* de (ρ, V) est la dimension de V.
- ▷ La représentation est *fidèle* si ρ est injectif.

1.1.2 Sous-représentation (et irréductibilité)

Définition 1.2. Si (ρ, V) une représentation linéaire de G alors un sous-espace vecotirel $W \subseteq V$ est une sous-représentation linéaire de V si W est stable par G, *i.e.*

$$\forall g \in G, g \cdot W \subseteq W.$$

Observation. La donnée de

$$\left(W, \begin{array}{ccc} G & \to & \mathrm{GL}(W) \\ g & \mapsto & \rho(g)_{|W} \end{array}\right)$$

est alors évidemment une représentation linéaire de G.

Exemple 1.1.

$$V^G := \{v \in V \mid \forall g \in G, g \cdot v = v\}$$

est une sous-représentation (qui est triviale).

Définition 1.3. On dit qu'une représentation linéaire (ρ, V) est *irréductible* si

- ▷ son degré est ≥ 1 ;
- ▷ et ses seuls sons-représentations sont $\{0\}$ et V, *i.e.* (ρ, V) n'admet pas de sous-représentations non triviales.

1.1.3 Morphismes de représentations.

Définition.

Définition 1.4. Soient (ρ, V) et (σ, W) deux représentations linéaires de G. Un *morphisme de représentation de V à W* est la donnée de

$$f : F \to W,$$

linéaire telle que

$$\forall g \in G, \forall v \in V, \qquad f(g \cdot v) = g \cdot f(v),$$

i.e.,

$$f(\rho(g)\,v) = \sigma(g)\,f(v).$$

Notation. On note $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ l'ensemble des morphismes de représentation linéaire. C'est un $\mathbb{k}$-espace vectoriel.

Terminologie. Les éléments de $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ sont appelés les *morphismes G-équivariants*.

Exercice 1.1. L'inclusion d'une sous-représentation est un morphisme de représentations.

Observation. Si $f \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ alors

- ▷ $\ker f$ est une sous-représentation de V ;
- ▷ $\operatorname{im} f$ est une sous-représentation de W.

. Si $v \in \ker f$, alors $f(g \cdot v) = g \cdot f(v) = 0$. Si $w \in f(v) \in \operatorname{im} f$ alors $g \cdot w = g \cdot f(v) = f(g \cdot v) \in \operatorname{im} f$.

Structure de représentation linéaire sur $\mathrm{Hom}(V, W)$

On fait agir G par conjugaison :

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{Hom}(V, W)) \\ g &\longmapsto (f \mapsto g \cdot f \cdot g^{-1}). \end{aligned}$$

Observation. Cela fait de $\mathrm{Hom}(V, W)$ une représentation linéaire de G.

On a alors la proposition suivante.

Proposition 1.1. $\mathrm{Hom}_G(V, W) = \mathrm{Hom}(V, W)^G$.

Preuve. C'est un jeu d'écriture :

$$\begin{aligned} f \in \operatorname{Hom}(V, W)^G &\iff g \cdot f \cdot g^{-1} = f \\ &\iff g \cdot f = f \cdot g \\ &\iff f \in \operatorname{Hom}_G(V, W). \end{aligned}$$

□