Révisions de Probabilités.

Fonction de répartition:
$F_X(t) := \mathbb{P}(X \leq t)$

Théorème : $X \sim Y \iff F_X = F_Y$

↳ croissante
↳ continue à droite
↳ $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$
↳ $\lim\limits_{+\infty} F_X = 1$

$\mathbb{E}[-]$ linéaire
et
$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$ <u>si</u> $X \perp\!\!\!\perp Y$

Borne de l'union:
$\mathbb{P}(\cup B_i) \leq \sum \mathbb{P}(B_i)$

Formule de transfert (cas continus)

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{\mathbb{R}} h(x)\, f_X(x)\, dx.$$

Moments & déviations

- Markov : $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathbb{E}[X]/a$
- Tchebychev: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \mathbb{V}\mathrm{ar}[X]/a^2$
- Loi faible des grands nombres :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mathbb{E}[X_i]\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_i]}{n\,\varepsilon^2}$$

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[X_i]$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

$$\sigma[X] = \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}[X]}$$

$$\mathrm{Cov}[X;Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])].$$
↳ 0 ssi $X \perp\!\!\!\perp Y$.

- Chernoff, formule rappelée
- Théorème central limite

$$\left(\frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[X+Y] = \mathbb{V}\mathrm{ar}[X] + \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y] + 2\,\mathrm{Cov}[X;Y]$$

Convergence :
- $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ "en probabilités" ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ "en loi/distribution" ssi $\forall t$, $F_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(t)$ whenever F is $\mathcal{C}^0$ at t
- $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ "presque sûrement" ssi $\mathbb{P}(\lim X_n = X) = 1$
ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon$ pour une oté d'indices$) = 0$

Graphes aléatoires
$\mathcal{G}_{n,p}$: on ajoute $e = xy$ avec proba p

Tricks : $\mathbb{P}(N=0) \leq \mathbb{P}(|N - \mathbb{E}[N]| \leq \mathbb{E}[N])$
puis Tchebychev

$\mathbb{E}[X] = \sum \mathbb{E}[\mathbb{1}_A]$

Borel – Cantelli
Si $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ converge alors $\mathbb{P}($une oté des $A_i) = 0$.