

TD n° 4

Exercice 1. Running Time.

Q1. Soit $X_n \sim \mathcal{U}(\{0, 1\}^n)$. On a: $\mathbb{E}[T(X_n)] \leq k \cdot n^2$ avec k fixé.

D'après l'inégalité de Markov:

$$P(T(X_n) \geq n^2 f(n)) \leq \frac{\mathbb{E}[T(X_n)]}{n^2 f(n)} = \frac{k}{f(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Q2. Notons $T_{\max} = \max_{\omega \in \Omega} T(\omega)$.

$$k n^2 \geq \mathbb{E}[T] = \sum_{\omega \in \Omega} T(\omega) \frac{1}{2^n} \geq T_{\max} \frac{1}{2^n}$$

D'où $T_{\max} \leq k \cdot n^2 \cdot 2^n$. On conclut que $T_{\max} = O(n^2 2^n)$.

Exercice 2. Coquilles dans un TD

Q1. Notons N le temps de relecture pour enlever les 4 coquilles.
et N_i pour la i -ième coquille.

$N_i \sim \mathcal{G}(1/3)$ et $N = \max(N_1, N_2, N_3, N_4)$.

$$\begin{aligned} P(N \leq n) &= \prod_{i=1}^4 P(N_i \leq n) \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{indépendance} \end{array} = \prod_{i=1}^4 \sum_{k=1}^n P(N_i = k) \\ &= \prod_{i=1}^4 \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3} \\ &= \prod_{i=1}^4 \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1/3} \\ &= \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^4 \end{aligned}$$

Avec $n = 10$, on a $P(N \leq 10) \approx 0,9$.

Q2. Le problème du collectionneur de vignettes, mais, à chaque étape, on peut corriger plusieurs requilles, alors qu'on ne peut avoir qu'un magnet.

Q3.. D'après Tchebychev,

$$P(10 \cdot n < X < 10 \cdot n) = 1 - P(|X - \mu| \geq n) \leq 1 - \frac{\sigma^2}{n^2}$$

On a bien le resultat demandé pour $n \geq 50$.

Exercice 3. Tester la pièce.

On lance n fois la pièce. Le nombre de "Pile's" est $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

$$\mathbb{E}[X] = n \cdot p \quad \text{Var}[X] = np(1-p)$$

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq n/10) \leq \frac{\text{Var}[X]}{(n/10)^2} = \frac{p(1-p)}{n/100} \leq \frac{25}{n}$$

Pour avoir une probabilité d'au moins 0,9, il faut

$$0,9 \leq 1 - 25/n \Leftrightarrow 25/n \leq 0,1 \Leftrightarrow n \geq 250$$

Exercice 4. Comparer Markov, Tchebychev et Chernoff.

$$X \sim \mathcal{B}(n, 1/6) \quad \mathbb{E}[X] = n/6 \quad \text{Var}[X] = 5n/36.$$

$$\text{Markov : } P(X \geq n/4) \leq \frac{n/6}{n/4} = \frac{4}{6}$$

$$\text{Tchebychev : } P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq n/12) \leq \frac{5n/36}{(n/12)^2} = \frac{144 \times 5}{36} \times \frac{1}{n} = 20/n$$

$$\text{Chernoff : } P(X \leq (1 - \frac{1}{2}) \mathbb{E}[X]) \leq \exp\left(-\frac{1/4}{5/12} \cdot \frac{n}{6}\right) = \exp\left(-\frac{n}{60}\right).$$

Exercice 5. Chernoff Bound Interval.

Q1. On a : $\mathbb{E}[e^{\lambda X}] = (1-p) + p e^{\lambda}$

$$= 1 - \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X] e^{\lambda}$$

Convexité de $\exp(\lambda \cdot)$

et croissance de $\mathbb{E}[\cdot]$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}[(1-X)e^0 + e^{\lambda} X] \\ &\geq \mathbb{E}[e^{\lambda X + (1-X) \cdot 0}] \geq \mathbb{E}[e^{\lambda X}] \end{aligned}$$

Q2. Pour $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq (1+\varepsilon)\mu) = \mathbb{P}(e^{\lambda X} \geq e^{\lambda \mu (1+\varepsilon)})$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda X}]}{e^{\lambda \mu (1+\varepsilon)}}$$

Par inégalité de Markov

De plus, $\mathbb{E}[e^{\lambda X}] = \mathbb{E}[e^{\lambda(X_1 + \dots + X_n)}]$

$$= \prod \mathbb{E}[e^{\lambda X_i}]$$

$$= e^{\sum p_i (e^{\lambda} - 1)}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{\lambda X_i}] &\leq (1-p_i) + p_i e^{\lambda} \\ &= 1 + p_i (e^{\lambda} - 1) \\ &\leq e^{p_i (e^{\lambda} - 1)} \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \mathbb{P}(X \geq (1+\varepsilon)\mu) \leq \frac{e^{\mu(e^{\lambda}-1)}}{e^{\lambda \mu (1+\varepsilon)}} \quad \text{où } \lambda = \ln(1+\varepsilon).$$

Exercice 6. Fonction génératrice

$$1) \quad G_X(\eta) = \mathbb{E}[\eta^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} \eta^n \mathbb{P}(X=n)$$

$$G'_X(\eta) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \eta^{n-1} \mathbb{P}(X=n) \Rightarrow \mathbb{E}[X] = G'_X(1)$$

$$G''_X(\eta) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \eta^{n-2} \mathbb{P}(X=n)$$

$$\text{Var}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$$

$$\begin{aligned} \text{Q2. } G_X(\lambda) &= \mathbb{E}[\lambda^X] = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \mathcal{C}(\lambda) \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \mathcal{C}(\lambda) \exp(\lambda \lambda) \end{aligned}$$

$$\text{Q3. } G_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = 1$$

$$\text{d'où } \mathcal{C}(\lambda) \exp(\lambda) = 1 \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{On en déduit } \mathcal{C}(\lambda) = \exp(-\lambda).$$

$$\text{Q4. } G_X(\lambda) = \exp(\lambda(\lambda - 1))$$

$$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 \\ &= \lambda^2 \cancel{e^{-\lambda}} \cancel{e^{\lambda}} \quad \lambda \quad - \lambda^2 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

$$\text{Q5. } X \sim \mathcal{B}(n, p).$$

$$G_X(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \mathbb{P}(X=k)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^n \lambda^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= (p\lambda + 1-p)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= G'_X(1) = n p (p+1-p)^{n-1} \\ &= n p \end{aligned}$$

$$\text{Var}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$$

$$\begin{aligned} &= n(n-1)p^2 + np - n^2 p^2 \\ &= p^2(n^2 - n - n^2) + np \\ &= np(1-p). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Q6. } G_S(z) &= \mathbb{E}[z^S] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}[z^S \mid N=n] \cdot \mathbb{P}(N=n) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[z^{X_1 + \dots + X_n}] \cdot \mathbb{P}(N=n) + \mathbb{P}(N=0) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[z^{X_1} \dots z^{X_n}] \cdot \mathbb{P}(N=n) + \mathbb{P}(N=0) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathbb{E}[z^{X_1}])^n \cdot \mathbb{P}(N=n) \\
 &= G_N(G_{X_1}(z))
 \end{aligned}$$

car les $(X_i)_{i \geq 0}$ sont i.i.d

Si $X_i \sim \mathcal{G}(q)$ et $N \sim \mathcal{G}(p)$,

$$\begin{aligned}
 G_N(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} z^n q (1-q)^{n-1} = zq \sum_{n=0}^{+\infty} (1-q)^n z^n \\
 &= zq / (1 - (1-q)z)
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 G_S(z) &= \frac{pzq}{(1 - (1-q)z)(1 - (1-p)(qz / (1 - (1-q)z)))} \\
 &= \frac{pzq}{1 - z + qz - qz + pqz} \\
 &= \frac{(pq)z}{1 - (1-pq)z}
 \end{aligned}$$

On peut en déduire que $S \sim \mathcal{G}(pq)$.

Exercice 7. Probabilités conditionnelles.

Q1. On pose $\Omega' = \Omega \setminus Y^{-1}(\{0\})$, puis

$$X: \mathbb{N}^* \longrightarrow \Omega'$$

$$P': \Omega' \longrightarrow [0, 1]$$

$$n \longmapsto Y(n).$$

$$\omega \longmapsto P(\omega) / P(Y \neq 0).$$

$$Q2. \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \text{Var}[X] \geq 0$$

$$\text{D'où } \mathbb{E}[X^2] \geq \mathbb{E}[X]^2.$$

$$Q3. \mathbb{E}[Y] = \sum_{y=0}^{+\infty} y P(Y=y) = \sum_{y=1}^{+\infty} y P(Y=y) \geq P(Y \geq 1) = P(Y \neq 0)$$

$$\frac{\mathbb{E}[Y]^2}{\mathbb{E}[Y]} = \frac{\mathbb{E}[X]^2 \cdot P(Y \neq 0)^2}{\mathbb{E}[X^2] \cdot P(Y \neq 0)} \leq P(Y \neq 0) \cdot 1$$

↑ par Q2.

Exercice 8. Bucket Sort.

Q1. Si on reçoit $x = \overline{b_k \dots b_0}^2$, on le met dans le bucket numéroté $\overline{b_k \dots b_{k-m}}^2$ (c'est un bitshift de $k-m$).

Q2. Soit $X \sim \mathcal{U}([0, 2^k - 1])$.
 $P(\text{On place } X \text{ dans leseau } i) = 1/n.$

D'où,

$$P(X_i = \ell) = \binom{n}{\ell} \left(\frac{1}{n}\right)^\ell \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-\ell}$$

C'est une loi binomiale $B(n, 1/n)$.

Q3. Notons T le temps de calcul du bucket sort.

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{i=0}^{2^k-1} \mathbb{E}[T_i] + \mathcal{O}(n)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T_i] &= \mathbb{E}[M X_i^2] = M (\text{Var}[X_i] + \mathbb{E}[X_i]^2) \\ &\leq M \left(n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{n^2}{n^2} \right) = M n \left[2 - \frac{1}{n} \right] \leq 2 M n \end{aligned}$$

D'où, $\mathbb{E}[T] = \mathcal{O}(n)$.

Fim du TD

Exercice 1. Algorithme probabiliste pour calculer la médiane.

Q1. la partie (a) est en $O(n)$,
 puis (b) en $O(n^{3/4} \log n) = O(n)$,
 puis (c) en $O(n)$ $\setminus O(n^{3/4})$
 puis (d) en $O(n)$
 et enfin (e) en $O(n^{3/4} \log n) = O(\log n)$.

D'où l'algorithme est en $O(n)$.

Q2. Erreur 1: On a $\mathbb{E}[Y_i] = \sum \mathbb{E}[Y_i] = n \cdot n^{-1/4} = n^{3/4}$

Par inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\text{Var}[X]}{a^2}.$$

Exercice 1. Black jack.

Loi faible des grands nombres:

Soit \bar{X} le nombre de parties de Blackjack gagnées.

$$P(|\bar{X} - 1/2| \geq 5\%) \leq \frac{\text{Var}[X]}{n(5\%)^2} \leq \frac{1}{n \cdot (5\%)^2}$$

Pour avoir $P(\text{il me triche pas}) \geq 10\%$ il suffit d'avoir $n \geq \frac{1}{(10\%)(5\%)^2} = 4000$

D'après Chernoff,

$$P(X \geq \frac{1}{2} + (5\%)) \leq \exp(-2(5\%)^2/n)$$

$$\exp(-2(5\%)^2/n) \leq 10\% \Leftrightarrow 2 \cdot (5\%)^2/n \leq \ln(10) \\ \Leftrightarrow n \geq \ln(10) / (2 \cdot (5\%)^2)$$

D'où $n \geq 461$. Beaucoup plus précis...

Exercice 2. Random Algorithm.

Algorithme B:

On lance $k(x)$ fois l'algorithme A sur l'entrée x .

On note (A_i) les résultats des exécutions de A.

On renvoie la réponse majoritaire

Si $x \notin L$, alors on a : $\mathbb{E}[X] \leq k/3$.

Si $x \in L$, alors on a : $\mathbb{E}[X] \geq 3k/4$.

Par inégalité de Chernoff, on a:

• si $x \notin L$, alors

$$P(B(x) = 1) = P(X \geq k/2) \leq \exp\left(-\frac{(k/2)^2}{2 \cdot \frac{1}{2}} \cdot \frac{k}{3}\right) = \exp\left(-\frac{k}{30}\right).$$

• si $x \in L$, alors

$$P(B(x) = 0) = P(X \leq k/2) \leq \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot 9} \times \frac{3k}{4}\right) = \exp(-k/24)$$

$$\Rightarrow k = 30|x| / \log_2 e$$

Exercice 3. Interrupteurs

Partie I.

Q1 On pose $Y := \mathbb{1}_{X \geq 1/4}$. On a:

$$1 = E[X] = E[XY] + \underbrace{E[X \mathbb{1}_{X \leq 1/4}]}_{\leq 1/4}$$

d'où

$$\sqrt{3 E[Y^2]} \geq E[XY] \geq \frac{3}{4}$$

$$\overset{''}{E[Y]} = P(X \geq 1/4)$$

$$\text{D'où } Y = 3/16.$$

$$\begin{aligned} \text{Q2. } E[Y^2] &= \text{Var}[Y] + E[Y]^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum \text{Var}[X_i] \quad \text{et } E[Y] = 0 \quad \text{car } E[X_i] = 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[Y^4] &= \frac{1}{n^2} E\left[\sum X_i X_j X_k X_l\right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum E[X_i X_j X_k X_l] \end{aligned}$$

$$\text{Cas 1: } i \neq j, k, l \quad \Rightarrow E[X_i X_j X_k X_l] = 0$$

$$\text{Cas 2: } i = k \neq j = l \Rightarrow \mathbb{E}[x_i x_j x_k x_l] = 1$$

$$\text{Cas 3: } i = j = k = l \Rightarrow \mathbb{E}[x_i x_j x_k x_l] = 1$$

$$\text{D'où } \mathbb{E}[Y^4] = \frac{1}{n^2} \left(n + \underbrace{3 \cdot n(n-1)}_{\substack{\text{choix de } i \\ \text{et choix du 2nd} \\ \text{indice}}} \right) = 3 - \frac{2}{n} \leq 3.$$

$$\begin{aligned} i &= j \neq k = l \\ i &= k \neq j = l \\ i &= l \neq j = k \end{aligned}$$

$$\overset{Q.1}{Y} \geq \mathbb{P}(Y^2 \geq 1/4) \xrightarrow{\text{passage à la racine}} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} |x_1 + \dots + x_n| \geq 1/2\right)$$

$$= \mathbb{P}(|x_1 + \dots + x_n| \geq \sqrt{n}/2) \leq \frac{\mathbb{E}[|x_1 + \dots + x_n|]}{\sqrt{n}/2}$$

$$\text{D'où, } \mathbb{E}[|x_1 + \dots + x_n|] \geq \frac{\gamma}{2} \cdot \sqrt{n}.$$

↑ Markov