

I. Savoir lire la définition.

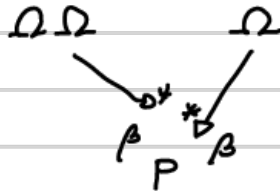
Ce sont des mesures de sécurité. Démon :

$$\begin{aligned} (\lambda y. x y) [y/y] &\neq_{\alpha} \lambda y. x y & \sim_{\Delta} \Delta x \neq y \\ (\lambda y. x y) [y/x] &\neq_{\alpha} \lambda y. y y & \sim_{\Delta} \Delta y \notin \mathcal{Vl}(N). \end{aligned}$$

II. Classes d'équivalence pour $=_{\beta}$.

Q2.1. $\Omega \Omega \rightarrow_{\beta} \Omega \Omega$ et $\Omega \rightarrow_{\beta} \Omega$.

Ainsi, si $\Omega \Omega =_{\beta} \Omega$ alors, par confluence, il existe M un λ -terme tel que



C'est absurde car on aurait $\Omega \Omega = P = \Omega$ ($\Omega \Omega \rightarrow_{\beta}^* P$ implique $P = \Omega \Omega$ car il n'y a que 2 redex).

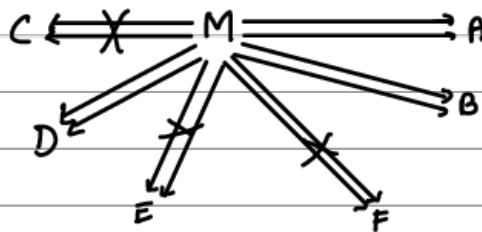
Q2.2. Soit N une forme normale avec $x \notin \mathcal{Vl}(N)$

On pose :

$$M = (\lambda x. N) \Omega.$$

III Propriété du diamant pour les réductions parallèles

Q3.1.



Par induction (3 cas)

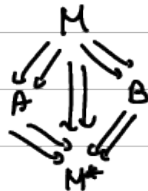
Q3.2. $x^* := x$

$(\lambda x. M)^* := \lambda x. (M^*)$

$(M N)^* := \begin{cases} P[N^*/x] & \text{si } M = \lambda x. P \\ M^* N^* & \text{sinon} \end{cases}$

Lemme : si $M \Rightarrow N$ alors $N \Rightarrow M^*$ (par induction sur M)

D'où



IV Normalisation faible et forte en λ -calcul pur.

Q4.1. Les propriétés (1), (2) et (3) restent vraies
La propriété (4) ne l'est pas:

on a

$M := (\lambda x. x) M' \longrightarrow M'$

mais

$$\begin{array}{ccc} (\lambda y. y) [M/y] & \not\rightarrow & (\lambda y. y) [M'/y] \\ \text{"} & & \text{"} \\ M & & M' \end{array}$$

Q4.2. Par induction sur $M \rightarrow M'$ (4 cas) :

* Bas $(\lambda x. M) N \rightarrow M[N/x]$. Supposons $x \in \mathcal{V}(M)$ et $N \in \mathcal{R}I$. (*)

Par induction sur M , il y a 3 cas :

• si $M = y$ alors

- si $y \neq x$ alors $M[N/x] = M \in \mathcal{R}I$.

- si $y = x$ alors $M[N/x] = N \in \mathcal{R}I$.

• si $M = P Q$ alors par hypothèse d'induction

on a : $P[N/x] \in \mathcal{R}I$ et $Q[N/x] \in \mathcal{R}I$

d'où $(P Q)[N/x] \in \mathcal{R}I$. par (ii)

• si $M = \lambda y. P$ avec $y \in \mathcal{V}(P)$ alors $M[N/x] \in \mathcal{R}I$ car $P[N/x] \in \mathcal{R}I$.

* Cas $MN \rightarrow M'N$ avec $M \rightarrow M'$. Par hypothèse d'induction $M' \in \lambda I$,
avec $M \in \lambda I, N \in \lambda I$.

D'où $M'N \in \lambda I$ par (ii).

* Cas $MN \rightarrow MN'$ avec $N \rightarrow N'$. Par hypothèse d'induction $N' \in \lambda I$,
avec $M \in \lambda I, N \in \lambda I$.

D'où $MN' \in \lambda I$ par (ii).

* Cas $\lambda x.M \rightarrow \lambda x.M'$ avec $M \rightarrow M'$ et $M \in \lambda I, (\lambda x.M) \in \lambda I, M' \in \lambda I$
Et, $vl(M') = vl(M)$ (preuve par induction) par hyp. d'ind^o
d'où $(\lambda x.M') \in \lambda I$ car $x \in vl(M')$.

Q4.3.