

TD n° 4

Exercice 1. Running Time.

Q1. Soit $X_m \sim U(30, 14^n)$. On a: $\mathbb{E}[T(X_m)] \leq k \cdot n^2$ avec k fixé.

D'après l'inégalité de Markov:

$$P(T(X_m) \geq n^2 f(n)) \leq \frac{\mathbb{E}[T(X_m)]}{n^2 f(n)} = \frac{k}{f(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Q2. Notons $T_{\max} = \max_{\omega \in \Omega} T(\omega)$.

$$k \cdot n^2 \geq \mathbb{E}[T] = \sum_{\omega \in \Omega} T(\omega) \cdot 1/2^n \geq T_{\max} \frac{1}{2^n}$$

D'où $T_{\max} \leq k \cdot n^2 2^n$. On conclut que $T_{\max} = O(n^2 2^n)$.

Exercice 2. Coquilles dans un TD

Q1. Notons N le temps de relecture pour enlever les 4 coquilles. et N_i pour la i -ème coquille.

$$N_i \sim \mathcal{G}(1/3) \quad \text{et} \quad N = \max(N_1, N_2, N_3, N_4).$$

$$\begin{aligned} P(N \leq n) &= \prod_{i=1}^4 P(N_i \leq n) = \prod_{i=1}^4 \sum_{k=1}^n P(N_i = k) \\ &\stackrel{\uparrow \text{indépendance}}{=} \prod_{i=1}^4 \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{1}{3} \\ &= \prod_{i=1}^4 \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1/3} \end{aligned}$$

$$= \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^4$$

Avec $n = 10$, on a $P(N \leq 10) \approx 0,9$.

Q2. Le problème du collectionneur de vignettes, mais, à chaque étapes on peut corriger plusieurs vignettes, alors qu'on ne peut avoir qu'un magnét.

Q3.. D'après Tchebychev,

$$P(10^{-n} < X < 10^{-n}) = 1 - P(|X - \mu| \geq n) \leq \frac{\sigma^2}{n^2}$$

On a bien le résultat demandé pour $n \geq 5$.

Exercice 3. Tester la pièce.

On lance n fois la pièce. Le nombre de "Pile"s est $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

$$\mathbb{E}[X] = n \cdot p \quad \text{Var}[X] = np(1-p)$$

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq n/10) \leq \frac{\text{Var}[X]}{(n/10)^2} = \frac{p(1-p)}{n/100} \leq \frac{25}{n}$$

Pour avoir une probabilité d'au moins 0,9, il faut

$$0,9 \leq 1 - 25/n \Leftrightarrow 25/n \leq 0,1 \Leftrightarrow n \geq 250$$

Exercice 4. Comparer Markov, Tchebychev et Chernooff.

$$X \sim \mathcal{B}(n, 1/6) \quad \mathbb{E}[X] = n/6 \quad \text{Var}[X] = 5n/36.$$

$$\text{Markov : } P(X \geq n/4) \leq \frac{n/6}{n/4} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Tchebychev : } P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq n/12) \leq \frac{5n/36}{(n/12)^2} = \frac{144 \times 5}{36} \times \frac{1}{n} = 20/n$$

$$\text{Chernoff : } P(X \leq (1 + \frac{1}{2}) \mathbb{E}[X]) \leq \exp\left(-\frac{1/4}{5/12} \frac{n}{6}\right) = \exp\left(-\frac{n}{60}\right).$$

Exercice 5. Chernoff Bound Interval.

Q1. On a : $\mathbb{E}_1[e^{\lambda Y}] = (1-p) + p e^\lambda$

$$= 1 - \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X] e^\lambda$$

Convexité de $\exp(\lambda -)$
et croissance de $\mathbb{E}[e^x]$

$$\hookrightarrow \mathbb{E}[e^{\lambda X} + (1-p)e^0] \geq \mathbb{E}[e^{\lambda X}]$$

Q2. Pour $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq (1+\varepsilon)\mu) = \mathbb{P}(e^{\lambda X} \geq e^{\lambda\mu(1+\varepsilon)})$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda X}]}{e^{\lambda\mu(1+\varepsilon)}} \quad \text{Par inégalité de Markov}$$

De plus, $\mathbb{E}[e^{\lambda X}] = \mathbb{E}[e^{\lambda(x_1 + \dots + x_m)}]$

$$= \prod \mathbb{E}[e^{\lambda x_i}]$$

$$= e^{\sum p_i(e^{\lambda} - 1)}$$

En effet,

$$\mathbb{E}[e^{\lambda x_i}] \leq (1-p_i) + p_i e^\lambda$$

$$= 1 + p_i(e^\lambda - 1)$$

$$\leq e^{p_i(e^\lambda - 1)}$$

Donc, $\mathbb{P}(X \geq (1+\varepsilon)\mu) \leq \frac{e^{\mu(e^\lambda - 1)}}{e^{\lambda\mu(1+\varepsilon)}}$ où $\lambda = \ln(1+\varepsilon)$.

Exercice 6. Fonction génératrice

1) $G_X(y) = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} y^n P(X=n)\right]$

$$G'_X(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n y^{n-1} P(X=n) \Rightarrow \mathbb{E}[X] = G'_X(1)$$

$$G''_X(y) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) y^{n-2} P(X=n)$$

$$\text{Var}[X] = G''_x(1) + G'_x(1) - (G'_x(1))^2$$

$$Q2. \quad G_x(y) = \mathbb{E}[y^X] = \sum_{k=0}^{+\infty} y^k \mathbb{P}(X=k) \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{\lambda} \exp(\lambda y)$$

$$Q3. \quad G_x(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = 1$$

$$\text{d'où } e^{\lambda} \exp(\lambda) = 1 \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}$$

On en déduit $e^{\lambda} = \exp(-\lambda)$.

$$Q4. \quad G_x(y) = \exp(\lambda(y-1))$$

$$\mathbb{E}[X] = G'_x(1) = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

$$\text{Var}[X] = G''_x(1) + G'_x(1) - (G'_x(1))^2$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} - \lambda - \lambda^2$$

$$= \lambda$$

$$Q5. \quad X \sim \mathcal{B}(n, p).$$

$$G_x(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} y^k \mathbb{P}(X=k)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^n y^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= (py + 1-p)^n \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[X] = G'_x(1) = np(p+1-p)^{n-1} = np$$

$$\text{Var}[X] = G''_x(1) + G'_x(1) - (G'_x(1))^2$$

$$\begin{aligned} &= n(n-1)p^2 + np - n^2 p^2 \\ &= p^2(n^2 - n - 1) + np \\ &= np(1-p). \end{aligned}$$

$$\text{Q6. } G_S(\gamma) = \mathbb{E}[\gamma^S] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}[\gamma^S \mid N=n] \cdot P(N=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[\gamma^{X_1 + \dots + X_n}] \cdot P(N=n) + P(N=0)$$

car les $(X_i)_{i \geq 0}$ sont indépendants

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[\gamma^{X_1} \cdots \gamma^{X_n}] \cdot P(N=n) + P(N=0)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathbb{E}[\gamma^{X_1}])^n \cdot P(N=n)$$

$$= G_N(G_{X_1}(\gamma))$$

Si $X_i \sim \mathcal{G}(q)$ et $N \sim \mathcal{G}(p)$,

$$G_N(\gamma) = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma^n q (1-q)^{n-1} = \gamma q \sum_{n=0}^{+\infty} (1-q)^n \gamma^n$$

$$= \gamma q / (1 - (1-q)\gamma)$$

D'où

$$G_S(\gamma) = \frac{pq\gamma}{(1 - (1-q)\gamma)(1 - (1-p)(q\gamma / 1 - (1-q)\gamma))}$$

$$= \frac{pq\gamma}{1 - \gamma + q\gamma - q\gamma + pq\gamma}$$

$$= \frac{(pq)\gamma}{1 - (1-pq)\gamma}$$

On peut en déduire que $S \sim \mathcal{G}(pq)$.

Exercice 7. Probabilités conditionnelles.

Q1. On pose $\Omega' = \Omega \cap Y^{-1}(\{0\})$, puis

$$X: \mathbb{N}^* \longrightarrow \Omega'$$

$$n \longmapsto Y(n).$$

$$P': \Omega' \longrightarrow [0, 1]$$

$$\omega \longmapsto P(\omega) / P(Y \neq 0).$$

Q2. $E[X^2] - E[X]^2 = \text{Var}[X] \geq 0$

D'où $E[X^2] \geq E[X]^2$.

Q3. $E[Y] = \sum_{y=0}^{+\infty} y P(Y=y) = \sum_{\substack{y=1 \\ \geq 1}}^{+\infty} y P(Y=y) \geq P(Y \geq 1) = P(Y \neq 0)$

$$\frac{E[Y]^2}{E[Y]} = \frac{E[X]^2 \cdot P(Y \neq 0)^2}{E[X^2] \cdot P(Y \neq 0)} \leq P(Y \neq 0) \cdot 1$$

\uparrow par Q2.

Exercice 8. Bucket Sort.

Q1. Si on regarde $x = \overline{b_k \dots b_0}^2$, on le met dans le bucket numéroté $\overline{b_k \dots b_{k-m}}^2$ (c'est un bitshift de $k-m$).

Q2. Soit $X \sim U([0, 2^k-1])$.
 $P(\text{On place } X \text{ dans le seau } i) = 1/n$.

D'où,

$$P(X_i = l) = \binom{n}{l} \left(\frac{1}{n}\right)^l \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-l}$$

C'est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/n)$.

Q3. Notons T le temps de calcul du bucket sort.

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{i=1}^{2^{k-2}} \mathbb{E}[T_i] + \mathcal{O}(n)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_i] &= \mathbb{E}[M X_i^2] = M (\text{Var}[X_i] + \mathbb{E}[X_i]^2) \\ &\leq M \left(n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{n^2}{n^2} \right) = M n \left[2 - \frac{1}{n} \right] \leq 2 M n\end{aligned}$$

D'où, $\mathbb{E}[T] = \mathcal{O}(n)$.

Fim du TD

TD n° 5

Exercice 1. Algorithme probabiliste pour calculer la médiane.

Q1. La partie (a) est en $O(n)$,
puis (b) en $O(n^{3/4} \log n) = O(n)$,
puis (c) en $O(n)$ puis (d) en $O(n)$
et enfin (e) en $O(n^{3/4} \log n) = O(\log n)$.

D'où l'algorithme est en $O(n)$.

Q2 Erreur 1: On a $\mathbb{E}[\text{cond } f] = \sum \mathbb{E}[y_i] = n \cdot n^{-1/4} = n^{3/4}$

Par inégalité de Bienaymé - Tchebychev appliquée à

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\text{Var}[X]}{a^2}.$$

Exercice 1. Black jack.

Loi faible des grands nombres:

Soit \bar{X} le nombre de parties de Blackjack gagnées.

$$\text{P}(|\bar{X} - 1/2| \geq 5\%) \leq \frac{\text{Var}[\bar{X}]}{n(5\%)^2} \leq \frac{1}{n \cdot (5\%)^2}$$

Pour avoir $\text{P}(\text{il me triche pas}) \geq 10\%$ il suffit d'avoir $n = \frac{1}{(10\%)(5\%)^2} = 4000$

D'après Chernoff,

$$\text{P}(X \geq \frac{1}{2} + (5\%)) \leq \exp(-2(5\%)^2/n)$$

$$\begin{aligned} \exp(-2(5\%)^2/n) &\leq 10\% \quad (\Rightarrow 2(5\%)^2/n \leq \ln(10)) \\ &\Rightarrow n \geq \ln(10) / (2 \cdot (5\%)^2) \end{aligned}$$

D'où $n \geq 461$. Beaucoup plus précis...

Exercice 2. Random Algorithm.

Algorithme B:

On lance $A(x)$ fois l'algorithme A sur l'entrée x .

On note (A_i) les résultats des executions de A .

On renvoie la réponse majoritaire

Si $x \notin L$, alors on a: $E[X] \leq k/3$.

Si $x \in L$, alors on a: $E[X] \geq 3k/4$.

Pour inégalité de Chernoff, on a:

- si $x \notin L$, alors

$$P(B(x) = 1) = P(X \geq k/2) \leq \exp\left(-\frac{(1/2)^2}{2+1} \cdot \frac{k}{3}\right) = \exp\left(-\frac{k}{30}\right).$$

- si $x \in L$, alors

$$P(B(x) = 0) = P(X \leq k/2) \leq \exp\left(-\frac{1}{2+1} \times \frac{3k}{4}\right) = \exp(-k/24)$$

$$\Rightarrow k = 30|x| / \log_2 e$$

Exercice 3. Interrupteurs

Partie I.

Q1 On pose $Y := \mathbb{1}_{x \geq 1/4}$. On a:

$$1 = \mathbb{E}[x] = \mathbb{E}[xy] + \underbrace{\mathbb{E}[x \mathbb{1}_{x \leq 1/4}]}_{\leq 1/4}$$

d'où

$$\sqrt{3 \mathbb{E}[y^2]} \geq \mathbb{E}[xy] \geq \frac{3}{4}$$

$$\mathbb{E}[y] = P(X \geq 1/4)$$

D'où $\mathbb{E}[y] = 3/16$.

$$\begin{aligned} Q2. \quad \mathbb{E}[y^2] &= \mathbb{V}_\text{on}[y] + \mathbb{E}[y]^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum \mathbb{V}_\text{on}[x_i] \quad \text{et } \mathbb{E}[y] = 0 \quad \text{car } \mathbb{E}[x_i] = 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[y^4] &= \frac{1}{n^2} \mathbb{E}\left[\sum x_i x_j x_k x_\ell\right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum \mathbb{E}[x_i x_j x_k x_\ell] \end{aligned}$$

$$\text{Cas 1: } i \neq j, k, l \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[x_i x_j x_k x_\ell] = 0$$

$$\text{Cas 2: } i=k \neq j=l \Rightarrow \mathbb{E}[x_i x_j x_k x_l] = 1$$

$$\text{Cas 3: } i=j=k=l \Rightarrow \mathbb{E}[x_i x_j x_k x_l] = 1$$

$$\text{D'où } \mathbb{E}[Y^4] = \frac{1}{n^4} \left(n + \underbrace{3 \cdot n(n-1)}_{\substack{i=j \neq k=l \\ i=k \neq j=l \\ i=l \neq j=k}} \right) = 3 - \frac{2}{n} \leq 3.$$

choix de i
 et choix du 2nd
 indice

$$\gamma \geq \mathbb{P}(Y^2 \geq 1/4) \stackrel{\text{passage à la racine}}{\downarrow} = \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} |X_1 + \dots + X_n| \geq 1/2\right)$$

$$= \mathbb{P}(|X_1 + \dots + X_n| \geq \sqrt{n}/2) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_1 + \dots + X_n|]}{\sqrt{n}/2}$$

$$\text{D'où, } \mathbb{E}[|X_1 + \dots + X_n|] \geq \frac{\gamma}{2} \cdot \sqrt{n}.$$

Markov

Exercice 1. Graphe aléatoire biparti.

Q1. $\# E = \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in \{n+1, \dots, 2n\}}} X_{ij}$ où les X_{ij} sont i.i.d. $\mathcal{B}(p)$
d'où $\# \sim \mathcal{B}(n^2, p)$.

$$\begin{aligned} Q2. \quad & P(i \text{ est un sommet isolé}) \\ &= P(\forall j, X_{ij} = 0) \\ &= \left(\prod_j X_{ij} \right) P(X_{ij} = 0) \\ &= (1-p)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\text{Nombre de sommets isolés}] &= \sum_i \mathbb{E}[\text{Sommet } i \text{ isolé}] \\ &= \sum_i (1-p)^n \\ &= 2n \cdot (1-p)^n \end{aligned}$$

Q3. (i)

$$\begin{aligned} P(H_{2n,p} \text{ a un sommet isolé}) &= P(\text{Nombre de sommets isolés} \geq 1) \\ &\leq \mathbb{E}[\text{Nombre de sommets isolés}] / 2 \\ &\leq 2n(1-p)^n \\ &\leq 2n e^{-np} \\ &\leq 2n(n)^{-c} \\ &\leq 2 \cdot n^{1-c} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} P(H_{2n,p} \text{ a un sommet isolé}) &= 1 - P(\text{pas de sommet isolé}) \\ &= 1 - P(N = 0) \\ &= 1 - P(\mathbb{E}[N] - N \geq \mathbb{E}[N]) \\ &= 1 - \frac{\text{Var}[N]}{(\mathbb{E}[N])^2} \\ &= 1 - \frac{\mathbb{E}[N^2] - \cancel{\mathbb{E}[N]^2}}{\mathbb{E}[N]^2} \\ &= 2 - \frac{\mathbb{E}[N^2]}{\mathbb{E}[N]^2} \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot \mathbb{E}[N^2] / 4n^2(1-p)^{2n}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N^2] &= \sum \mathbb{E}[i \text{ isolé}, j \text{ isolé}] \\ &= \sum_{i=j} \mathbb{E}[i \text{ isolé}] + \sum_{\substack{i,j \text{ même colonne} \\ i \neq j}} \mathbb{E}[i \text{ isolé}, j \text{ isolé}] + \sum_{\substack{i,j \text{ colonnes} \\ \text{différentes}}} \mathbb{E}[i \text{ isolé}, j \text{ isolé}] \\ &= 2n(1-p)^n + 2n(n-1)(1-p)^{2n} + 2n^2(1-p)^n(1-p)^{n-1} \\ &= 2n(1-p)^n \left(1 + (1-p)^{n-1} + n(1-p)^{n-2} \right)\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N^2] / \mathbb{E}[N]^2 &= \frac{1}{2n(1-p)^n} \left(1 + (1-p)^{n-1} + n(1-p)^{n-2} \right) \\ &= \frac{1}{2n(1-p)^n} + \frac{n-1}{2n} + \underbrace{\frac{1}{2(1-p)}}_{\frac{n}{2c \log n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{P}(H_{2n,p} \text{ a un sommet isolé}) \rightarrow 1$.

Q2i. $\mathbb{P}(H_n, \deg(v) \leq \frac{n}{2} + C\sqrt{n \log n})$

$$= 1 - \mathbb{P}(\bigcup_v \deg(v) \geq \frac{n}{2} + C\sqrt{n \log n})$$

$$\text{et } \mathbb{P}(\bigcup_v \deg(v) \geq \frac{n}{2} + C\sqrt{n \log n}) \leq \sum_v \mathbb{P}(\deg(v) \geq \frac{n}{2} + C\sqrt{n \log n}) \text{ par borne de l'union.}$$

Or, $\deg(v) \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ d'où par Chernoff I,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\deg(v) \geq \frac{n}{2} + C\sqrt{n \log n}) &\leq \exp(-2C^2 n \log n / n) \\ &\leq n^{-2(C^2)}\end{aligned}$$

On pose $C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, et on a:

$$\sum_v \mathbb{P}(\deg(v) \geq \frac{n}{2} + C\sqrt{n \log n}) \leq \sum_v n^{-(C^2)} = 2n / n^{(C^2)} = 2n^{1-2C^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\text{D'où } \mathbb{P}\left(\forall w, \deg(w) \leq \frac{n}{2} + C\sqrt{n \log n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

Exercice 2 K_4 .

Q1. $\mathbb{E}[X] = \sum_{\{a,b,c,d\}} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{a,b,c,d\} \text{ forme une 4-clique de } G}]$
 $= \sum p^6 = \binom{n}{4} p^6$

Q2. $\mathbb{P}(X \neq 0) = \mathbb{P}(X \geq 1) \leq \mathbb{E}[X] \leq \binom{n}{4} p^6$

$$\leq \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} (\Theta(n^{-2/3}))^6$$

$$\leq \Theta(1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Q3. $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\mathbb{E}[X]-X \leq \mathbb{E}[X])$
 $\leq \text{Var}[X]/\mathbb{E}[X]^2$ pour inégalité de Tchebychev.

Q4. $\text{Var}\left[\sum X_i\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum X_i\right)^2\right] - \left(\sum \mathbb{E}[X_i]\right)^2$

$$= \sum \mathbb{E}[X_i X_i] + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[X_i X_j] - \sum (\mathbb{E}[X_i])^2 - \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[X_i] \mathbb{E}[X_j]$$

$$= \sum \mathbb{E}[X_i] + \sum_{i \neq j} (\mathbb{E}[X_i X_j] - \mathbb{E}[X_i] \mathbb{E}[X_j] - \mathbb{E}[X_i] \mathbb{E}[X_j])$$

$$- \sum (\mathbb{E}[X_i])^2$$

$$= \sum \mathbb{E}[X_i] + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])] - \sum (\mathbb{E}[X_i])^2$$

$$\leq \sum \mathbb{E}[X_i] + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])]$$

Q5. $\text{Var}\left[\sum \mathbb{1}_{\{a,b,c,d\} \text{ forme une clique}}\right] \leq \mathbb{E}[\text{Nb de 4-clique}]$
 $+ \sum_{C_1 \neq C_2} \mathbb{E}[(\mathbb{1}_{C_2 \text{ clique}} - \mathbb{E}[C_2 \text{ clique}]) (\mathbb{1}_{C_1 \text{ clique}} - \mathbb{E}[C_1 \text{ clique}])]$

$$\leq \binom{n}{4} p^6 + \sum_{C_1 \neq C_2} \mathbb{E} [(\mathbb{1}_{C_1 \text{ clique}} - p^6)(\mathbb{1}_{C_2 \text{ clique}} - p^6)]$$

$$\leq \binom{n}{4} p^6 + \sum_{\substack{\text{un sommet} \\ \text{entre } C_1 \neq C_2}} 0 + \sum_{\substack{\text{deux sommets} \\ \text{entre } C_1 \neq C_2}} p^{11}(1-p) + \sum_{\substack{\text{trois sommets} \\ \text{entre } C_1 \neq C_2}} p^9(1-p^3)$$



par indépendance



11 paires
de sommets avec

$$X_{u,v} = 1$$

(équivalent : une
arête partagée entre C_1
et C_2)



3 arêtes
partagées

$$\leq \binom{n}{4} p^6 + \binom{n}{6} p^{11}(1-p) + \binom{n}{5} p^9(1-p^3)$$

Exercice 1. Second théorème de Borel-Cantelli

Q1.

$$\bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k$$

Q2.

$$\begin{aligned} P(B_{k,l}) &= \prod_{n=k}^l (1 - P(A_n)) \leq \prod_{n=k}^l e^{-p_n} \\ &\leq \exp\left(-\sum_{n=k}^l p_n\right) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

can $\sum_{n=k}^l p_n = \sum_{n=0}^l p_n - \underbrace{\sum_{n=0}^{k-1} p_n}_{+ \infty} \xrightarrow{l \rightarrow \infty}$ simi

Q3. Gén a: $B_k = \bigcap_{l \in \mathbb{N}} B_{k,l}$, d'oùpar continuité décroissante, $B_k \supseteq B_{k+1}$,

$$\forall l, P(B_k) \leq P(B_{k,l}) \quad \text{d'où } P(B_k) \leq \lim_{l \rightarrow \infty} P(B_{k,l}) = 0$$

donc $P(B_k) = 0$

On en conclut:

$$P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} P(B_k) = 0.$$

Q4. $P(\text{une suite de } A_n \text{ se réalisent})$

$$= P\left(\bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k\right)$$

$$= 1 - P\left(\bigcup_n \bigcap_{k \geq n} \overline{A_k}\right) = 1 \quad \text{par Q3.}$$

Q5. $\mathbb{P}(\text{une a.té de } 1) = 1$ car $\sum \frac{1}{n}$ diverge

$\mathbb{P}(\text{une a.té de } 1) = 0$ par 1^{er} lemme de Borel-Cantelli

Gm n'a pas besoin de l'indépendance des B_k .

Exercice 2. Condition de convergence.

Q3. $X_n \xrightarrow{\text{ps}} X \sim \mathcal{B}(p) \Leftrightarrow \mathbb{P}(\lim_n X_n = X) = 1$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(\exists k, \forall n \geq k, X_n = X) = 1$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(\forall k, \exists n > k, X_n \neq X) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum (p_n p + (1-p_n)(1-p)) \text{ converge}$$

Q1. Gm a:

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers $X \sim \mathcal{B}(1-p)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(X_n=0) \rightarrow \mathbb{P}(X=0) \\ \mathbb{P}(X_n=1) \rightarrow \mathbb{P}(X=1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow p_n \rightarrow p \quad \text{car } \mathbb{P}(X_n=1) = 1 - \mathbb{P}(X_n=0) = p_n$$

D'où $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$

Q2. Gm suppose que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $X \sim \mathcal{B}(1-p)$.

Par Q1, on a: $p_n \rightarrow p$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|X_{n+1} - X_n| \leq |X_{n+1} - X| + |X_n - X|$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |X_n - X| \geq \varepsilon \Rightarrow |X_n - X| + \underbrace{|X_{n+1} - X|}_{> 0} \geq \varepsilon$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) &\leq \mathbb{P}(|X_{m+1} - X| + |X_n - X_m| \geq \varepsilon) \\ &\leq \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

Alors, avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X_n \neq X_{n+1}) = p_n(1-p_{n+1}) + p_{n+1}(1-p_n)$.

$$2p(1-p)$$

D'où $2p(1-p) = 0$ d'où $p = 0$.
et $p \leq \frac{1}{2}$

Réiproquement, si $p_n \rightarrow 0$ alors

$$\mathbb{P}(|X_n - 1| \geq \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon > 1 \\ p_n & \text{sinon} \\ 0 & \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \end{cases}$$

Q3. Gm a:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\lim X_n = 1) &= 1 - \mathbb{P}(\forall k, \exists n \geq k, X_n = 0) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} (X_n = 0)) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 1 &\iff \mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} (X_n = 0)) = 0 \\ &\iff \sum p_n \text{ converge} \end{aligned}$$

En effet, $\xleftarrow{(*)}$ par Borell Cantelli

$\xrightarrow{(*)}$ par ex 1.

Exercice 3. Convergence.

Q1. $\mathbb{P}(|X_n - 5| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}[X_n]}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \varepsilon^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Nrai

Q2. Par le théorème central limite,

$$P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} - \mathbb{E}[x_i] \right) \leq x\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Phi(x)$$

d'où il suffit de poser

$$C(n, x) := \left(\frac{3x}{\sqrt{n}} + 4 \right)n = 3\sqrt{n}x + 4n$$

Q3. On pose $y_n \sim \mathcal{B}(1/\sqrt{n})$

- $P(Y_n = 1) = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{P} 0$ donc $Y_n \xrightarrow{P} 0$
- $y_n \xrightarrow{\text{P.S.}} 0$ car $1 - Y_n \xrightarrow{\text{P.S.}} 1$ car $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.
- $\frac{y_n}{n} \xrightarrow{\text{P.S.}} 0$ car $\left(\frac{y_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.

1D 09

Exercice 1. Coloriage

Q1. On calcule

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\text{Nombre de triangles}] &= \sum_{\substack{a,b,c \\ \text{distincts}}} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{a,b,c \text{ triangle}\}}\right] \\
 &= \sum_{\substack{a,b,c \\ \text{distincts}}} \mathbb{P}(\{a,b,c \text{ triangle}\}) \\
 &= \sum_{\substack{a,b,c \\ \text{distincts}}} p^3 \\
 &= \binom{n}{3} p^3
 \end{aligned}$$

Puis, par Markov,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\text{Nombre de triangles} \geq n/2) &\leq \binom{n}{3} p^3 / (n/2) \\
 &\leq \frac{(n-1)(n-2)}{3} n^{3\varepsilon-3} \\
 &\sim \frac{1}{3} n^{3\varepsilon-1} \xrightarrow{\text{car } \varepsilon < \frac{1}{3}} 0
 \end{aligned}$$

Q2. Si on a un k -coloriage de G , au moins une des couleurs a un cardinal $\geq n/k$.

Cette partie de taille $\geq n/k$ forme un ensemble indépendant.

D'où $\alpha(G) \geq n/k$ et par suite $\alpha(G) \geq n/\chi(G)$.

Q3.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\alpha(G) \geq a) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{X \subseteq G \\ |X|=a}} \text{"X est un indépendant"}\right) \\
 &\leq \sum_{\substack{X \subseteq G \\ |X|=a}} \mathbb{P}(X \text{ est un indépendant})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{X \in \mathcal{P}_a^G(G)} (1-p)^a \\
&\leq \binom{n}{a} (1-p)^a \\
&\leq n^a (1-p)^a \\
&\leq n^a \exp(3n^{e-1} \cdot n^{1-e} \cdot \ln n) \\
&\leq n^a \underbrace{n^{3n^{1-e} \ln n + 3}}_{\longrightarrow 0} \\
&\downarrow
\end{aligned}$$

D'où $P(\alpha(G) < a) \longrightarrow 1$

Il existe donc n, G tels que $\#V(G) = n$ et G a $\leq \frac{n}{2}$ triangles et $\alpha(G) < a$.

En effet, la probabilité de ces deux événements tend vers 1.

QdH. Gm a $\alpha(G) = \alpha(G')$, d'où

$$\chi(G') \geq \frac{n/2}{\alpha(G')} > \frac{n/2}{3n^{1-e} \ln n} = \frac{n^e}{6 \ln n}$$

Exercice 2. Un c'est bien, deux c'est mieux.

Gm considère une distribution uniforme sur les couples d'étudiant-es (avec remise). Soient $u, v \in [1, 200]$.

Gm note U_i (resp. V_i) l'événement "l'étudiant-e u a bien répondu à la question i ".

$$P(\overline{U}_i) \leq 2/5, \quad P(\overline{V}_i | \overline{U}_i) \leq 79/199, \quad P(\overline{U}_i \cap \overline{V}_i) \leq \frac{4}{25}.$$

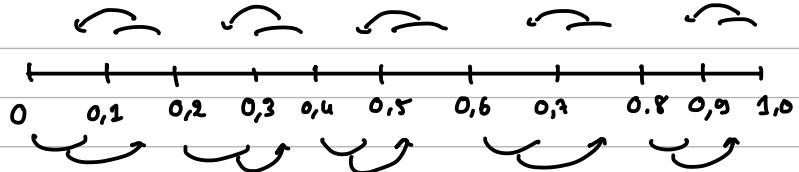
Par union, $P(\text{il existe } i, \overline{U}_i \cap \overline{V}_i) \leq 6 \cdot 4/25 = 24/25 < 1$.

D'où il existe deux étudiants qui réussissent à eux deux.

Exercice 3. Union d'intervalles

Soit $X \sim \mathcal{U}(0,1)$. On pose $Y = \begin{cases} X + 0,1 & \text{si } \lfloor 10X \rfloor \text{ pair} \\ X - 0,1 & \text{sinon} \end{cases}$

On a que $Y \sim \mathcal{U}(0,1)$ et $|X - Y| = 0,1$.



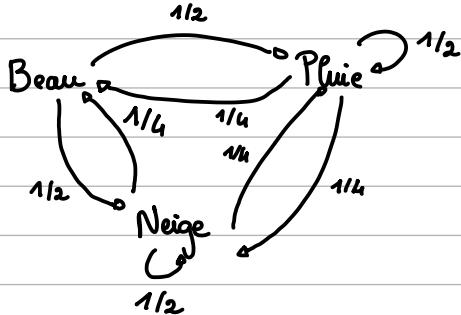
$$\mathbb{P}(X \notin S \text{ ou } Y \notin S) \leq 2(1 - \text{longueur}(S)) < 1$$

Exercice 4. Un problème complexe.

$$\begin{aligned} |P(z)|^2 &= (z^2 + az + b)(\overline{z^2 + az + b}) \\ &= |z|^4 + |z|^2(\overline{az} + a\bar{z}) + |\bar{a}z|^2 + b\bar{z}^2 + \bar{b}z^2 + \dots \end{aligned}$$

Exercice 3. Météo

Q1.

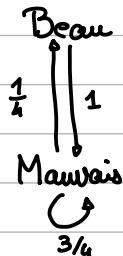


$$Q := \begin{pmatrix} B & P & N \\ 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

B P N

Q2. On calcule $(100)Q^2 = (\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8})$. Il est donc plus probable qu'il ne fasse pas beau (équitable pluie/neige).

Q3.



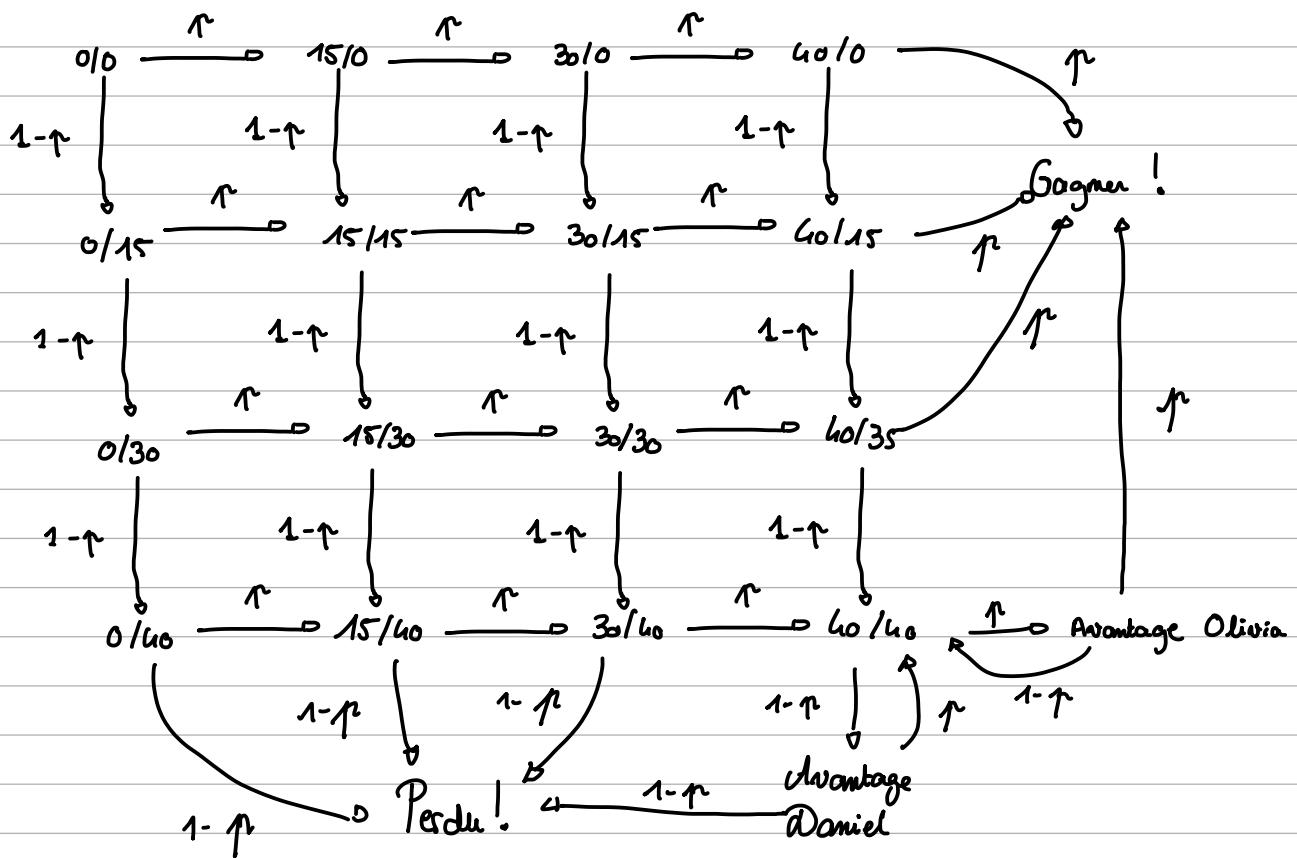
Matrice :

$$Q' := \begin{pmatrix} B & M \\ 0 & 1/4 \\ -1 & 3/4 \end{pmatrix}$$

B M

Exercice 4. Tennis

Q1.



Exercice 5. Marche aléatoire sur \mathbb{Z} biaisé.

Q1. Nom : $P(0, 2) = 0$.

Q2. Traitons $P(\cdot, \cdot)$ comme une matrice.

Montrons que $\sum_{n \in \mathbb{N}} P^n(i, i)$ est finie pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Or, $P^n(i, j) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ où $k = (n + j - i) / 2$
 D'où $k = \# \text{pas à droite pour } i \rightarrow j$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} P^n(i, i) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \text{ pair}}} \binom{n}{n/2} p^{n/2} (1-p)^{n/2}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } \binom{n}{n/2} p^{n/2} (1-p)^{n/2} &\sim \frac{\sqrt{2\pi n}}{\pi n} \times \frac{1}{2^n} p^{n/2} (1-p)^{n/2} \\ &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} \cdot \left(\frac{1-p}{2}\right)^{n/2} < \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

D'où $\sum_{n \in \mathbb{N}} P^n(i, i)$ converge pour tout i . D'où, par Borel-Cantelli, si $p \neq 1/2$, l'état i n'est pas transients pour tout i .