

Le λ -calcul pur.

Le λ -calcul a trois domaines proches :

- ▷ la *calculabilité*, avec l'équivalence entre machines de Turing et λ -expression (vue en FDI) ;
- ▷ la *programmation fonctionnelle* (vue en **Théorie de la Programmation** [Chapitre 6] avec le petit langage FUN) ;
- ▷ la *théorie de la démonstration* (vue dans la suite de ce cours).

On se donne un ensemble infini \mathcal{V} de variables notées x, y, z, \dots . Les *termes* (du λ -calcul) ou λ -termes sont définis par la grammaire

$$M, N, \dots ::= \lambda x. M \mid M N \mid x.$$

La construction $\lambda x. M$ s'appelle l' *abstraction* ou λ -*abstraction*. Elle était notée $\text{fun } x \rightarrow M$ en cours de théorie de la programmation.

Notation. ▷ On notera $M N P$ pour $(M N) P$.

- ▷ On notera $\lambda xyz. M$ pour $\lambda x. \lambda y. \lambda z. M$ (il n'y a pas lieu de mettre des parenthèses ici, vu qu'il n'y a pas d'ambiguïtés).
- ▷ On notera $\lambda x. M N$ pour $\lambda x. (M N)$. **Attention**, c'est différent de $(\lambda x. M) N$.

1 Liaison et α -conversion.

Remarque 1 (Liaison). Le « λ » est un lieur. Dans $\lambda y. x y$, la variable y est *liée* mais pas x (la variable x libre). On note $\mathcal{V}\ell(M)$ l'ensemble des variables libres de M , définie par induction sur M (il y a 3 cas).

Remarque 2 (α -conversion).

On note $=_\alpha$ la relation d' α -conversion. C'est une relation binaire sur les λ -termes fondée sur l'idée de renommage des abstractions *en évitant la capture de variables libres* :

$$\lambda x. x y =_\alpha \lambda t. x t \neq_\alpha \lambda x. x x.$$

Ainsi $\lambda x. M =_\alpha \lambda z. M'$ où M' est obtenu en remplaçant x par z *là où il apparaît libre* et *à condition que $z \notin \mathcal{V}\ell(M)$* . Ceci, on peut le faire partout.

Lemme 1. La relation $=_\alpha$ est une relation d'équivalence. Si $M =_\alpha N$ alors $\mathcal{V}\ell(M) = \mathcal{V}\ell(N)$.

Par convention, on peut identifier les termes modulo $=_\alpha$. On pourra donc toujours dire

« considérons $\lambda x. M$ où $x \notin E [\dots]$ »

avec E un ensemble *fini* de variables.

Ceci veut dire qu'on notera

$$M = N \text{ pour signifier que } M =_\alpha N.$$

2 La β -réduction.

Définition 1 (β -réduction). On définit la relation de β -réduction sur les λ -termes, notée \rightarrow_β ou \rightarrow , définie par les règles d'inférences :

$$\frac{}{(\lambda x. M) N \rightarrow_\beta M[N/x]} \quad \frac{M \rightarrow_\beta M' \quad \lambda x. M \rightarrow_\beta \lambda x. M'}{(\lambda x. M) N \rightarrow_\beta M' N} \quad \frac{M \rightarrow_\beta M' \quad N \rightarrow_\beta N'}{M N \rightarrow_\beta M' N'}$$

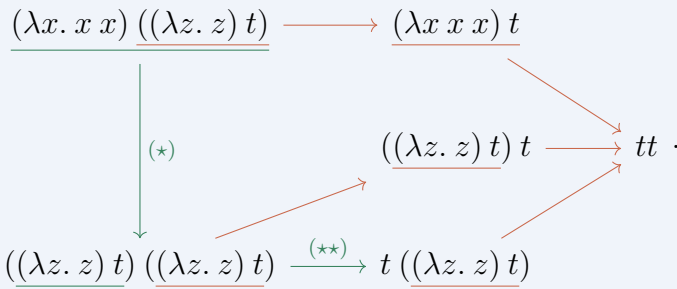
où $M[N/x]$ est la substitution de x par N dans M (on le définit ci-après).

Définition 2. Un terme de la forme $(\lambda x. M) N$ est appelé un *redex* (pour *reducible expression*) ou β -redex. Un terme M est une *forme normale* s'il n'existe pas de N tel que $M \rightarrow_\beta N$.

Remarque 3. La relation \rightarrow_β n'est pas terminante :

$$\Omega := (\lambda x. x x) (\lambda y. y y) \rightarrow_\beta (\lambda y. y y) (\lambda y. y y) =_\alpha \Omega.$$

Exemple 1.



Un pas de β -réduction peut :

- ▷ dupliquer un terme (c.f. (\star)) ;
- ▷ laisser un redex inchangé (c.f. $(\star\star)$) ;
- ▷ faire disparaître un redex (qui n'est pas celui que l'on contracte) :

$$(\lambda x. u) ((\lambda z. z) t) \rightarrow_\beta u ;$$

- ▷ créer de nouveaux redex :

$$(\lambda x. x y) (\lambda z. z) \rightarrow_\beta (\lambda z. z) y.$$

3 Substitutions.

Exemple 2. Le terme $\lambda xy. x$ c'est une « fonction fabriquant des fonctions constantes » au sens où

$$(\lambda xy. x)M \rightarrow_\beta \lambda y. M,$$

à condition que $y \notin \mathcal{V}\ell(M)$. On doit cependant α -renommer pour éviter la capture :

$$\begin{array}{c} (\lambda xy. x) (\lambda t. y) \not\rightarrow_\beta \lambda y. (\lambda t. y) \\ \parallel \\ (\lambda xy'. x) (\lambda t. y) \rightarrow_\beta \lambda y'. (\lambda t. y). \end{array}$$

Définition 3. On procède par induction, il y a trois cas :

- ▷ $y[N/x] := \begin{cases} N & \text{si } y = x \\ y & \text{si } y \neq x \end{cases}$
- ▷ $(M_1 M_2)[N/x] := (M_1[N/x]) (M_2[N/x])$
- ▷ $(\lambda y. M)[N/x] := \lambda y. (M[N/x])$ **à condition que** $y \notin \mathcal{V}\ell(N)$ **et** $y \neq x$.

Lemme 2 (Gymnastique des substitutions). Pour $y \notin \mathcal{V}\ell(R)$,

$$(P[Q/y])[R/x] = (P[R/x])[Q[R/x]/y].$$

Lemme 3. Si $M \rightarrow_\beta M'$ alors $\mathcal{V}\ell(M') \subseteq \mathcal{V}\ell(M)$.

4 Comparaison λ -calcul et FUN.

En λ -calcul, on a une règle

$$\frac{M \rightarrow_\beta M'}{\lambda x. M \rightarrow_\beta \lambda x. M'}.$$

Cette règle n'existe pas en FUN (ni en **fouine**) car on traite les fonctions comme des valeurs. Et, en FUN, les trois règles suivantes sont

mutuellement exclusives :

$$\frac{}{(\lambda x. M) N \rightarrow_{\beta} M[N/x]} \quad \frac{M \rightarrow_{\beta} M'}{M N \rightarrow_{\beta} M' N} \quad \frac{N \rightarrow_{\beta} N'}{M N \rightarrow_{\beta} M N'}$$

car on attend que N soit une **valeur** avant de substituer.

En FUN (comme en **fouine**), pour l'exemple 1, on se limite à n'utiliser que les flèches rouges.

La relation \rightarrow_{β} est donc « plus riche » que \rightarrow_{FUN} . En FUN, on a une *stratégie de réduction* : on a au plus un redex qui peut être contracté. On n'a pas de notion de valeur en λ -calcul pur. Le « *résultat d'un calcul* » est une forme normale.

5 Exercice : les booléens.

On définit

$$\mathbf{T} := \lambda xy. x \quad \mathbf{F} := \lambda xy. y.$$

Ainsi, pour tout M (si $y \notin \mathcal{V}\ell(M)$),

$$\mathbf{T} M \rightarrow \lambda y. M \quad \mathbf{F} M \rightarrow \lambda y. y =: \mathbf{I}.$$

La construction **if** b **then** M **else** N se traduit en $b M N$.

Le « non » booléen peut se définir par :

- ▷ **not** := $\lambda b. b \mathbf{F} \mathbf{T} = \lambda b. b (\lambda xy. y) (\lambda tu. t)$;
- ▷ **not'** := $\lambda b. \lambda xy. byx$.

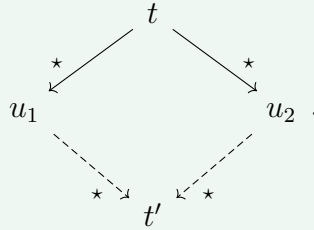
La première version est plus abstraite, la seconde est « plus électricien ». On a deux formes normales **différentes**.

De même, on peut définir le « et » booléen :

- ▷ **and** := $\lambda b_1. \lambda b_2. b_1 (b_2 \mathbf{T} \mathbf{F}) \mathbf{F}$;
- ▷ **and'** := $\lambda b_1. \lambda b_2. \lambda xy. b_1 (b_2 x y) y$.

6 Confluence de la β -réduction.

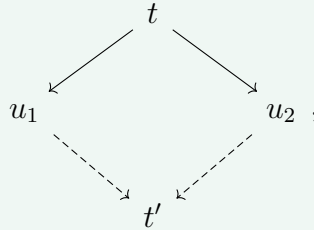
Définition 4 (Rappel, c.f. **Théorie de la Programmation** [Chapitre 10]). On dit que \rightarrow est *confluente* en $t \in A$ si, dès que $t \rightarrow^* u_1$ et $t \rightarrow^* u_2$ il existe t' tel que $u_1 \rightarrow^* t'$ et $u_2 \rightarrow^* t'$.



Les flèches en pointillés représentent l'existence.

On dit que \rightarrow est *confluente* si \rightarrow est confluente en tout $a \in A$.

La propriété du diamant correspond au diagramme ci-dessous :



c'est-à-dire si $t \rightarrow u_1$ et $t \rightarrow u_2$ alors il existe t' tel que $u_1 \rightarrow t'$ et $u_2 \rightarrow t'$.

La confluence pour \rightarrow , c'est la propriété du diamant pour \rightarrow^* . On sait déjà que la β -réduction n'a pas la propriété du diamant (certains chemins de l'exécution sont plus longs), mais on va montrer qu'elle est confluente.

Définition 5. On définit la relation de *réduction parallèle*, notée \Rightarrow , par les règles d'inférences suivantes :

$$\begin{array}{c}
\frac{}{x \Rightarrow x} \quad \frac{M \Rightarrow M'}{\lambda x. M \Rightarrow \lambda x. M'} \\
\frac{M \Rightarrow M' \quad N \Rightarrow N'}{M N \Rightarrow M' N'} \quad \frac{M \Rightarrow M' \quad N \Rightarrow N'}{(\lambda x. M) N \Rightarrow M'[N'/x]}
\end{array}$$

Lemme 4. La relation \Rightarrow est réflexive.

Lemme 5. Si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ alors $\mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{S}^*$. De plus, $(\mathcal{R}^*)^* = \mathcal{R}^*$.

Lemme 6. Les relations \rightarrow^* et \Rightarrow^* coïncident.

Preuve. \triangleright On a $\rightarrow^* \subseteq \Rightarrow^*$ car cela découle de $\rightarrow \subseteq \Rightarrow$ par induction sur \rightarrow en utilisant la réflexivité de \Rightarrow .

- \triangleright On a $\Rightarrow^* \subseteq \rightarrow^*$ car cela découle de $\Rightarrow \subseteq \rightarrow^*$. En effet, on montre que pour tout M, M' si $M \Rightarrow M'$ alors $M \rightarrow^* M'$, par induction sur \Rightarrow . Il y a 4 cas.
- Pour $x \Rightarrow x$, c'est immédiat.
 - Pour l'abstraction, on suppose $M \Rightarrow M'$ alors par induction $M \rightarrow^* M'$, et donc $\lambda x. M \rightarrow^* \lambda x. M'$ par induction sur $M \rightarrow^* M'$.
 - Pour l'application, c'est plus simple que pour la précédente.
 - Pour la substitution, supposons $M \Rightarrow M'$ et $N \Rightarrow N'$. On déduit par hypothèse d'induction $M \rightarrow^* M'$ et $N \rightarrow^* N'$. Et, par induction sur $M \rightarrow^* M'$, on peut montrer que $(\lambda x. M) N \rightarrow^* (\lambda x. M') N$. Puis, par induction sur $N \rightarrow^* N'$, on montre $(\lambda x. M') N \rightarrow^* (\lambda x. M') N'$. Enfin, par la règle de β -réduction, on a $(\lambda x. M') N' \rightarrow M'[N'/x]$. On rassemble tout pour

obtenir :

$$(\lambda x. M) N \rightarrow^* M'[N'/x].$$

□

On est donc ramené à montrer que \Rightarrow^* a la propriété du diamant. Or \Rightarrow a la propriété du diamant, ce que l'on va montrer en TD.

Lemme 7. Si $M \Rightarrow M'$ alors $N \Rightarrow N'$ implique $M[N/x] \Rightarrow M'[N'/x]$.

Preuve. Par induction sur $M \Rightarrow M'$, il y a 4 cas. On ne traite que le cas de la 4ème règle. On suppose donc $M = (\lambda y. P) Q$ avec $y \notin \mathcal{V}\ell(N)$ et $y \neq x$. On suppose aussi $P \Rightarrow P'$, $Q \Rightarrow Q'$ et $M' = P'[Q'/y]$. On suppose de plus $N \Rightarrow N'$. Par hypothèse d'induction, on a $P[N/x] \Rightarrow P'[N'/x]$ et $Q[N/x] \Rightarrow Q'[N'/x]$. On applique la 4ème règle d'inférence définissant \Rightarrow pour déduire

$$\begin{aligned} & \underbrace{(\lambda y. (P[N/x]))}_{\parallel} (Q[N/x]) \Rightarrow (P'[N'/x])[Q'[N'/x]/y] = (P'[Q'/y])[N'/x] \\ & \quad \parallel \\ & (\lambda y. P)[N/x] \\ & \quad \text{car } x \neq y \end{aligned}$$

par le lemme de gymnastique des substitutions et car $y \notin \mathcal{V}\ell(N') \subseteq \mathcal{V}\ell(N)$ et car $N \rightarrow^* N'$. □

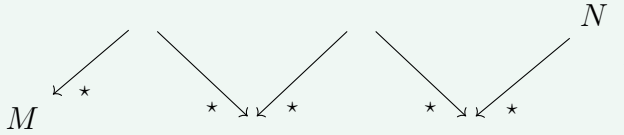
Proposition 1. La relation \Rightarrow a la propriété du diamant.

Preuve. Vu en TD. □

Corollaire 1. On a la confluence de \rightarrow_β .

Définition 6. La β -équivalence, ou β -convertibilité est la plus petite relation d'équivalence contenant \rightarrow_β . On la note $=_\beta$.

Si l'on a



alors $M =_{\beta} N$.

Proposition 2. Tout λ -terme est β -équivalent à au plus une forme normale.

Preuve. Si $M =_{\beta} N$ et M, N sont des formes normales, alors par confluence il existe P tel que $M \rightarrow^* P$ et $N \rightarrow^* P$. On a donc que $M = N = P$. \square

Remarque 4 (Conséquences). \triangleright Deux normales distinctes (au sens de $=_{\alpha}$) ne sont pas β -convertibles.

- \triangleright Si on a un λ -terme qui diverge et qui a une forme normale, par exemple $(\lambda x. y) \Omega$, alors on peut toujours « revenir » sur la forme normale.