

Exercice 1. Théorie des graphes.

- Q1. pas de boucles : $\forall x \rightarrow R(x, x)$
 non-orienté : $\forall x \forall y \quad R(x, y) \leftrightarrow R(y, x)$.
 (l'implication simple suffit).

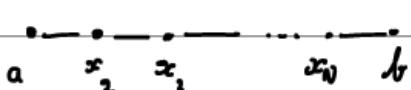
D'où $\mathcal{L}(\text{Graphes non-orientés simples}) = \{ \forall x \rightarrow R(x, x), \forall x \forall y \quad R(x, y) \leftrightarrow R(y, x) \}$.

- Q2. On pose $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$ qui est une théorie sur $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$.
 pour n fixé

$$\varphi_n = \underbrace{\forall x_1 \dots \forall x_{n-1}}_{\text{pour } n \text{ fixé}} \neg(R(a, x_1) \wedge R(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge R(x_{n-1}, b))$$

- Q3. Oui. On considère $G = (V, E)$ dit ci-dessous.

$$\text{Soit } N = \max \{n_1, \dots, n_k\} + 1.$$



Il est connexe, simple, non-orienté et non-vide.

Et, pour tout $i \in \{1, k\}$, il n'y a pas de chemins de longueur n_k entre a et b dans G .

- Q4. Soit $\mathcal{T} \supseteq A$ une théorie des graphes connexes.

$$\text{On pose } \mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Toute partie finie de \mathcal{T}' est satisfiable.
 Par compactité, on a que \mathcal{T}' est satisfiable. Absurde car seul un graphe vide satisfait \mathcal{T}' .

Exercice 2. Langage sans fonction.

Q1. Par récurrence sur n , montre que :

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y_1 \dots \exists y_k A[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k]$$

est un théorème ssi elle est satisfait dans toute interprétation de card $\leq n+m$.

• Pour $n=0$, $\underbrace{\exists y_1 \dots \exists y_k}_{\varphi} A[y_1, \dots, y_k]$ est un théorème ssi

$$\forall M \text{ modèle}, \forall e, M, e \models \varphi$$

Si on a un modèle de card $> m$, on peut le décomposer en modèles de card $\leq k$ par dénombrement.

D'où l'équivalence.

•

Q2. Dans $\mathcal{L} = \{c_1, \dots, c_m, f_1, =\}$,

on considère $A = "f(y_1, y_2) = f(y_2, y_1) \wedge \neg(y_1 = y_2) \wedge \bigwedge_{i=3}^{k-1} (y_i = y_{i+1})"$.

Dans le modèle

$$M: \{0, 1\}, f_M = \text{id}_M, c_i = 0$$

la formule A est fausse.

Exercice 3. Densité.

Q1. On a (\mathbb{Q}, \leq) et (\mathbb{R}, \leq) qui sont non-isomorphes.

Q2.

Soit $\varphi := \forall x, \exists y \quad r(x, y)$.

Dans (\mathbb{R}, \leq) , la formule φ est vérifiée

Dans $[0, 1], \leq$ la formule φ ne l'est pas.

D'où \mathcal{T} n'est pas complète.

Q3. Soit un modèle \mathcal{M} .

Soient $x, y \in M$ tels que $x < y$ (par A_2).

Construisons par récurrence des éléments de M .

- on commence avec x, y
- par A_4 , et comme $x < y$, il existe z tq $x < z < y$
- par A_{24} , $x < z$ w $x < w < z$

Si $w \in \{x, y, z\}$, alors par A_2 et A_3 on a une absurdité.

D'où \mathcal{T} n'admet pas de modèle fini.

Q4. $\mathcal{T}_1 : (\{1\}, \leq)$

$\mathcal{T}_2 : (\{1, 2\}, \leq)$

$\mathcal{T}_3 :$



$\mathcal{T}_4 : (\{0, 1, 2\}, \leq)$

Exercice 4. Modèle infini.

On pose $\Phi_k = \exists x_1 \dots \exists x_k \neg (x_1 = x_2) \wedge \dots \wedge \neg (x_{k-1} = x_k)$.

Toute sous-théorie finie A de $T' := T \cup \{\Phi_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ a un modèle (de card $\geq \max \{\aleph_0, \max \{k \in \mathbb{N} \mid \Phi_k \in A\}\}$ avec $\max \emptyset = 0$).

Pour compacité, T' admet un modèle. Si il est fini de cardinal k , absurdum car $\Phi_k \in T'$. Il admet donc un modèle infini \mathcal{M}_∞ .

La théorie T admet donc un modèle infini \mathcal{M}_∞ .

TP n° 6

Exercice 1. Générationnisme.

Q1.

$\text{Th}(\text{Groupes abéliens sans torsion}) := \{$

$$\forall x \exists y \quad x + y = y + x = 0,$$

$$\forall x \forall y \forall z \quad (x + y) + z = x + (y + z),$$

$$\forall x \quad x + 0 = 0 + x = x,$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \forall y \quad x + y = y + x \\ \exists \underbrace{\{ \forall x \exists (x = 0) - \underbrace{\{x + x + \dots + x = 0\}}_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}}_m \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ou } (a = b = c) := \\ a = b \wedge b = c \end{array} \right)$$

Q2. Supposons qu'il existe une théorie T des groupes abéliens avec torsion.

On considère :

$$T' := T \cup \left\{ \underbrace{\forall x \quad x \neq 0 \rightarrow \underbrace{n \cdot x \neq 0}_0}_{\varphi_n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Toute partie finie $T \subseteq T'$ est satisfiable.

En effet, soit $n = \max \{m \in \mathbb{N}^* \mid \varphi_m \in T\} < +\infty$,

puis $b := 2/p^2$ avec $p > n$ et p premier.

Par compacté, T' est satisfiable.

Absurde car il existe $a \in b$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $n \cdot a \neq 0$ et $a \neq 0$.

Q3. avec torsion \neq sans torsion

Exercice 2. Formules closes.

On a : $T_{\text{gl}} = \{F \in \mathfrak{F} \mid \mathcal{G} \models F\}$

Soit $F \in \mathbb{F}$.

Si $\mathcal{O} \models F$ alors $\frac{}{\mathcal{T}_{\mathcal{O}} \models F} \text{ ax } \text{ car } F \in T_{\mathcal{O}}$.

Si $\mathcal{O} \not\models F$ alors $\mathcal{O} \models \neg F$ et $\frac{}{\mathcal{T}_{\mathcal{O}} \vdash \neg F} \text{ ax } \text{ car } \neg F \in T_{\mathcal{O}}$.

De plus, si $T_{\mathcal{O}} \vdash \perp$ alors, par correction, $\mathcal{O} \models \perp$ absurde.
car \mathcal{O} modèle de $T_{\mathcal{O}}$.

Exercice 3.

Q1 Pour $n=0$, on a : $P_0 + S0 \neq 0$ par A₁.

Pour $n > 0$, on a :

$$\frac{\Gamma \vdash A_3 \text{ ax}}{\Gamma \vdash \forall y S^m 0 = S^m y \rightarrow S^m 0 = y \text{ ve}} \quad \text{par hyp de récurrence}$$
$$\frac{\Gamma \vdash S^{m+1} 0 = S^m 0 \rightarrow S^m 0 = S^{m-1} 0}{\Gamma \vdash S^{m+1} 0 = S^m 0 \text{ ve}} \quad \frac{\Gamma \vdash S^{m+1} 0 = S^m 0}{P_0 \vdash S^m 0 \neq S^{m-1} 0 \text{ aff}} \quad (*)$$
$$\Gamma := P_0, S^{m+1} 0 = S^m 0 + S^m 0 = S^{m-1} 0 \quad P_0, S^{m+1} 0 = S^m 0 + S^m 0 \neq S^{m-1} 0$$
$$\frac{P_0, S^{m+1} 0 = S^m 0 + \perp}{P_0 \vdash S^{m+1} 0 \neq S^m 0}$$

Q2. $PA + \forall x Sx \neq 0$.

On a :

- $P_0 + S0 \neq 0$
- et:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash A_4 \text{ ax}}{\Gamma \vdash S^2 x = Sx \rightarrow Sx = x \text{ ve}} \frac{\Gamma \vdash S^2 x = Sx \text{ ax}}{\Gamma \vdash Sx = x \text{ ve}}}{\Gamma \vdash Sx = x}}{\Gamma := PA, Sx \neq x, S^2 x = Sx \vdash \perp \text{ ve}} \quad \frac{\frac{\Gamma \vdash Sx \neq x \text{ ax}}{\Gamma \vdash Sx \neq x \text{ ve}}}{PA \vdash Sx \neq x \rightarrow S^2 x \neq Sx \text{ ve}}$$

D'où, par schéma induitif, on a $\forall x, Sx \neq x$.

Q2.3. On pose $\bar{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ où $S\omega := \omega$ avec $\omega \times 0 := 0$.
 $\omega \times \omega := \omega$

(A₁) - (A₅) pas de pb avec ω

(A₆) ok par déf.

$$(A_7) 0 \times \underbrace{S\omega}_{\omega} = (0 \times \omega) + 0 = 0$$

$$\omega \times (Sg) = \underbrace{(\omega \times g)}_{= 0 \text{ ou } \omega} + \omega = \omega$$

D'où $\bar{\mathbb{N}} \models P_0$ et $\bar{\mathbb{N}} \not\models \forall x Sx \neq x$
car $S\omega = \omega$.

Exercice 4.

Q1. On applique le théorème de Löwenheim-Skolem pour obtenir un modèle de $\text{card} > \aleph_0$.

Q2. Soit, par l'absurde, $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow M$ un \mathcal{L} -isomorphisme.

$$\varphi(0) = (0,0)$$

$$\varphi(1) = \varphi(S_N 0) = S_M \varphi(0) = S_M (0,0) = (0,1)$$

$$\varphi(2) = \varphi(S_N 1) = S_M \varphi(1) = S_M (0,1) = (0,2)$$

$$\varphi(3) = \varphi(S_N 2) = S_M \varphi(2) = S_M (0,2) = (0,3)$$

Ainsi, $\text{im } \varphi = \{0^3 \times \mathbb{N} \neq |\mathcal{O}|\}$. Absurde.

On vérifie que \mathcal{M} vérifie $(A_1) - (A_7)$.

Q3. Soit $F := \forall x \vee y x+y = y+x$.

On a $\mathbb{N} \models F$ mais $M \not\models F$ car $(1,1) + (2,1) = (1,2)$
et $(2,1) + (1,1) = (2,2)$.

D'où P_0 n'est pas complète.

Exercice 5. Ensembles définissables.

Q1. $F_{2\mathbb{N}}(x) := \exists y \quad x = y + y.$

Q2. $F_{PP}(x) := \forall y \quad (\exists z \quad x = y \times z) \rightarrow (y = x \vee y = 1)$

Q3. (a) $\forall x \quad F_E(x) \rightarrow F_{E^1}(x)$

(b) $F_E(x) \wedge \forall y < x \neg F_E(y) \quad \text{)} \quad G(x)$

(c) $(\exists x \quad F_E(x)) \wedge (\forall x \quad F_E(x) \rightarrow \exists y > x \quad F_E(y))$

Q4. $P_E(y) := (\exists x \leq y \quad F_E(x)) \rightarrow \exists x \quad G(x) \wedge x \leq y$

Q5.

$$\begin{array}{c} (a) \quad \frac{\overline{P_0 \vdash A_4} \alpha}{\overline{P_0 \vdash 0+0=0}} \\ \hline P_0 \vdash \exists y \quad 0+y=0 \end{array}$$

(b) Long et se fait par induction sur y . (fait en cours)

(c)

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma \vdash S(y+z)=0 \quad A_1}{\Gamma \vdash S(y+z) \neq 0 \quad A_2} \\ \hline \frac{\Gamma \vdash x+y=0 \quad \Gamma \vdash x+y \neq 0}{\Gamma \vdash x=y=0} \end{array}$$

$\Gamma := P_0, \dots, x+y=0, x=Sy \vdash \perp$

$\frac{\Gamma \vdash x+y=0, x \neq 0, x=Sy \vdash \perp}{P_0, \exists y \quad x+y=0, x \neq 0 \vdash \perp} \quad \exists e$

$\frac{P_0, \exists y \quad x+y=0, x \neq 0 \vdash \perp}{P_0, \exists y \quad x+y=0 \vdash x=0} \quad \perp_c$

(d) On utilise le schéma inductif:

$$\bullet P_E(0) : F_E(0) \rightarrow \underbrace{F_E(0) \wedge 0 \leq 0}_{\text{hyp}} \wedge \underbrace{\forall y < 0 \neg F_E(y)}_{\text{hyp}} \quad \frac{\neg(y+Sy=0) \rightarrow A_2}{S(y+y) \text{ pm } A_3}$$

$\bullet P_E(n) \rightarrow P_E(n+s)$

$$\exists y \leq n+s \quad F_E(y) \xrightarrow{\text{D'après } y \leq n \rightarrow P_E(n) \text{ et } n \leq n+s} \neg(y+n+s=n+s) \rightarrow G(n+s) \wedge n+s \leq n+s.$$

Le cas similaire était dans l'autre cao.

Q6. $(\exists x \ F_E(x)) \rightarrow \exists y \ G(y)$

Soit $x \in E$. Par Q5, $\exists y, G(y) \wedge y \leq x$.
D'où $G(y)$.

Q7.

TD 7

Exercice 1. Modèles sans schéma d'induction

Q1. A₁ okay A₂ okay A₃ okay A₄ $f(x, *) = x$
 A₅ okay A₆ $g(x, *) = *$ A₇ $g(g(x, y), x) = g(x, y)$

En effet:

$$\begin{aligned} (x, n) +_{\mathcal{O}_1} S_{\mathcal{O}_1}(y, m) &= (x, n) +_{\mathcal{O}_1} (y, m+1) \\ &= (f(x, y), n+m+1) \\ &= S_{\mathcal{O}_1}(f(x, y), n+m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x, n) \times_{\mathcal{O}_1} S_{\mathcal{O}_1}(y, m) &= (x, n) \times_{\mathcal{O}_1} (y, m+1) \\ &= (g(x, y), nm+n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((x, n) \times_{\mathcal{O}_1} (y, m)) +_{\mathcal{O}_1} (x, n) &= \\ &= (g(x, y), nm) +_{\mathcal{O}_1} (x, n) \\ &= (f(g(x, y), x), nm+n) \end{aligned}$$

Q2. Commutativité: $f(x, y) = f(y, x)$ et $g(x, y) = g(y, x)$

Associativité: $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$
 $g(g(x, y), z) = g(x, g(y, z))$

Q3. c.f. TD6 exercice 4

Q4. $x \leq y := \exists \gamma_1. x + \gamma_1 = y$

$$\begin{aligned} (x, n) \leq_{\mathcal{O}_1} (y, m) &\Leftrightarrow \exists (\gamma_1, p), (x, n) +_{\mathcal{O}_1} (\gamma_1, p) = (y, m) \\ &\Leftrightarrow \exists (\gamma_1, p), (f(x, \gamma_1), n+p) = (y, m) \\ &\Leftrightarrow \exists \gamma_1, f(x, \gamma_1) = y \end{aligned}$$

$$Q5. \quad f(x, y) = x \quad g(x, y) = y$$

$$(\ast, 0) + (x, n) = (f(\ast, x), n) = (\ast, n) \neq (x, n)$$

$$(\ast, 0) \times (x, n) = (g(\ast, x), 0) = (x, 0) \neq (\ast, 0).$$

Exercice 2. Équivalences.

Q1. Supposons avoir T une théorie des relations d'équivalences ayant un nombre fini de classes.

$$\text{Soit } \Psi_n := \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i=1}^n \bigwedge_{j=i+1}^n \neg R(x_i, x_j).$$

$$\text{Puis, } T' := T \cup \{\Psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Toute partie $A \subseteq$ finie T' est satisfiable, par exemple $([1, n], =)$, où $n = \max \{n \in \mathbb{N} \mid \Psi_n \in A\}$ fini.

D'où T' satisfiable absurde.

Q2. Par l'absurde, soit T une théorie des relations d'équivalences n'ayant que des classes finies.

$$\text{Soit } \Psi_n := \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i=1}^{n-1} R(x_i, x_{i+1}) \wedge \bigwedge_{i \neq j} \neg (x_i = x_j).$$

$$\text{Soit } T' := T \cup \{\Psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Toute partie finie $A \subseteq$ finie T' est satisfiable, par exemple $([1, n], \sim)$, où $n := \max \{n \mid \Psi_n \in A\}$ fini et $x \sim y \vee x, \forall y$.

D'où T' satisfiable. Absurde.

$$\begin{aligned} Q3. \quad \text{On pose } T := & \{ \forall x \ R(x, x), \forall x \forall y \ R(x, y) \rightarrow R(y, x) \\ & \forall x \forall y \forall z \ R(x, y) \rightarrow R(y, z) \rightarrow R(x, z) \} \\ & \cup \{\Psi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\Psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Q24. (a) Soit T_1 tel que $\overset{\text{et } T_3 \vdash T}{T \vdash T_1}$. Il existe donc $T' \subseteq T$ telle que l'on ait $T' \vdash T_1$ (car preuve de $T \vdash T_1$ fermée).

On a: $T' \vdash T_1$ et $T_1 \vdash T$ d'où $T' \vdash T$.

(b) Pren: si bien $T' \subseteq_{\text{finie}} T \models$ donc $n = \min_{\Phi_m \in T'} m$

$$\text{et } m := \min_{\Phi_m \in T'} m$$

On considère un ensemble ayant $< n$ classes toutes de cardinal $< m$. \rightsquigarrow modèle \mathcal{M} .

D'où T' admet \mathcal{M} pour modèle. Absurde.

(c) oui en théorie, mais non, cela ne dépend pas.

Q25. Soient $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{N}, =, \text{divisibilité})$,

$\mathcal{M}_2 = (\mathbb{N}, =, n \sim m \Leftrightarrow \Phi(n) \approx \Phi(m))$

$$\Phi: \mathbb{N} \xrightarrow{\text{bij.}} \mathbb{N}^2 \quad \text{où } (p, q) \approx (p', q') \Leftrightarrow p+q' = p'+q.$$

Soit $\Psi: \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ un α -morphisme.

$$n \mid m \Leftrightarrow \Psi(n) \approx \Psi(m) \quad \text{Absurde.}$$

TD n° 8

Exercice 1. Des entiers pas comme les autres

La théorie PA des entiers de Peano vérifie :

- $\text{card } R \geq \text{card } \mathbb{N}$;
- $\text{card } R \geq \aleph_0$;
- PA a un modèle infini \mathbb{N} .

D'où par Löwenheim-Skolem, PA a un modèle de $\text{card} = \text{card } R$, non isomorphe à \mathbb{N} .

Exercice 2. De nouveaux axiomes

\leq est une rel^o d'ordre (réflexivité par (iv), symétrie par (ii), transitivité par (vi))

qui admet un minimum (i)

δ est une fonction injective sans points fixes qui vérifie

$$y \leq_n x \text{ et } y \leq_n \delta(x) \iff y = x \text{ ou } y = \delta(x)$$

Q1. La structure $(\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}}, \text{succ})$ est un modèle de \mathbb{N} .

On pose $(\{0,1\} \times \mathbb{N}, \preceq, \delta)$ où \preceq est l'ordre lexicographique sur $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned} \delta : \{0,1\} \times \mathbb{N} &\rightarrow \{0,1\} \times \mathbb{N} \\ (x,y) &\mapsto (x, y+1) \end{aligned}$$

Q2. La théorie \mathcal{T} n'est pas complète : la formule

$$\exists x \exists y \quad x \neq y \wedge \forall u \quad (x \neq s u) \wedge (y \neq s u)$$

est vraie dans $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ mais pas dans \mathbb{N} .

Exercice 3 . Arithmétique non standard.

Q1. Reflexivité : $\mathcal{M} \models a + \underline{0} = a + \underline{0}$ d'où $a \sim a$ Va

Symétrie : si $\mathcal{M} \models a + \underline{n} = b + \underline{m}$ ($a \sim b$)

alors $\mathcal{M} \models b + \underline{m} = a + \underline{n}$ d'où $b \sim a$.

Transitivité : si $\mathcal{M} \models a + \underline{n} = b + \underline{m}$ ($a \sim b$)

et $\mathcal{M} \models b + \underline{p} = c + \underline{q}$ ($b \sim c$)

alors

si $m \geq p$ alors

$$\mathcal{M} \models a + \underline{n} = c + \underline{(q + m - p)}$$

sinon

$$\mathcal{M} \models a + \underline{(n + p - m)} = c + q$$

Q2. Soient n, m, p, q tels que

$$\mathcal{M} \models a + \underline{n} = a' + \underline{m} \quad \text{et} \quad \mathcal{M} \models b + \underline{p} = b' + \underline{q}.$$

D'où, $\mathcal{M} \models a + b + \underline{n + p} = a' + b' + \underline{m + q}$

(par commutativité de $+$ sur \mathcal{M} modifiée de PA)

Et donc $\mathcal{M} \models (a + b) + \underline{n + p} = (a' + b') + \underline{m + q}$.

Q3. Réflexivité : $A \leq A$ car $A \neq \emptyset$ d'où $A \ni a$ vérifie $\mathcal{M} \models a \leq a$.

Transitivité :

si $A \leq B$ et $B \leq C$ il existe a, b, b', c tels que

$$\mathcal{M} \models a \leq b \text{ et } \mathcal{M} \models b \leq c$$

alors $b \sim b'$ d'où $b + \underline{m} = b' + \underline{m}$

Si $n \leq m$ alors on pose $b^* = b + \underline{(m - n)}$ $\sim b$

$$\text{et } \mathcal{M} \models a \leq b^* \text{ et } \mathcal{M} \models b^* \leq c$$

sinon $b^* = b + \underline{(n + m)}$ $\sim b$

$$\text{et } \mathcal{M} \models a \leq b^* \text{ et } \mathcal{M} \models b^* \leq c$$

Gm en conduit $\mathcal{M} \models a \leq c$.

Antisymétrie :

Si $A \leq B$ et $B \leq A$ alors

il existe a, a', b, b'

tels que

$$\mathcal{M} \models a \leq b \text{ et } \mathcal{M} \not\models b' \leq a'$$

Comme $b \sim b'$ et $a \sim a'$, on a : $\begin{cases} b + \underline{n} = b' + \underline{m} \\ a + \underline{p} = a' + q \end{cases}$

D'où il existe u, v tels que

$$\mathcal{M} \models a + u = b \text{ et } \mathcal{M} \models b' + v = a'$$

ainsi,

$$a + u + \underline{n} + v = b + \underline{n} + v = b' + \underline{m} + v = a' + \underline{m}$$

$$\text{d'où } a + u + v \sim a' \text{ donc } u + v \sim 0$$

donc u, v sont standards

$$\text{d'où } a + u = b \Rightarrow a \sim b$$

$$\text{d'où } A = B.$$

Totalité : la relation $\leq_{\mathcal{M}}$ est totale :

Par schéma inductif, montrons pour tout x ,

$$\forall y \quad x \leq y \vee y \leq x$$

- $0 \leq y$.

- Si $y \leq x$ alors $y + k = x$ et $y \leq Sx$

sinon, alors $y \geq x$ donc $y = k + x$

si $k = 0 \Rightarrow y \leq Sx$

si $k \neq 0 \Rightarrow y \geq Sx$

La totalité de \leq découle de celle de $\leq_{\mathcal{M}}$.

TD n° 9

Exercice 1. La marge est trop petite pour faire une blague.

Q1. $\Psi := \exists x \exists y \exists z \quad x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0 \wedge \exists t \quad t > 2 \wedge \exists u \exists v \exists w \quad E(u, x, t) \wedge E(v, y, t) \wedge E(w, z, t) \wedge u + v = wz$

Q2. $E(n, m, p) := \exists a \exists b \quad B(n, p, a, b) \wedge B(50, 0, a, b) \wedge \forall i \quad i \in p \rightarrow \exists q \rightarrow B(q, i, a, b) \rightarrow B(q \times m, S_i, a, b)$

Q3. C'est déjà fait

Q4. Si $P_0 \models \Psi$ et si le théorème est faux dans \mathbb{N} alors on aurait $\mathbb{N} \models \perp$ absurde!

Exercice 2. Ordres denses sans extrémité

Q1. $T := \{ \forall x \neg(x < x), \forall x \forall y \forall z \quad x < y \rightarrow y < z \rightarrow x < z, \forall x \forall y \quad x = y \vee x < y \vee y < x, \forall x \forall y \quad x < y \rightarrow \exists z \quad x < z \wedge z < y \wedge \forall x \exists y \exists z \quad y < x \wedge x < z \}$

Q2. Fait en partie

Q3. Soit $f \in J$ et soient $(a, b) \in M \times N$. On pose $A := \text{Dom}(f)$ et $B := \text{Image}(f)$.

On pose $a' := \min \{m \in M \mid \forall x \in A \quad m =_M x\}$,
et $b' := \min \{n \in N \mid \forall y \in B \quad n =_N y\}$.

(1) Si $a \in A$ alors c'est bon avec $g := f$.

Si $a \notin A$ alors

$$\begin{aligned} g : A \cup \{a\} &\longrightarrow B \cup \{b'\} \\ a &\longmapsto b' \end{aligned}$$

$$A \ni x \longmapsto f(x).$$

qui est bien croissante.

(2) Si $b \in B$ alors $b := f$.

Simons la fonction

$$h : A \cup \{a'\} \rightarrow B \cup \{b'\}$$

$$a' \longmapsto b$$

$$A \ni x \longmapsto f(x),$$

qui est bien croissante.

Q.4. Comme M et N dénombrables, alors soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux énumérations de M et N respectivement.

Construisons par récurrence $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que f_n est un \mathcal{d} -isomorphisme et $\text{Dom}(f_n) = \{a_1, \dots, a_n\}$ $\text{Image}(f_n) = \{b_1, \dots, b_n\}$.

Pour $n=0$, on pose $f_0 : \emptyset \rightarrow \emptyset$ un \mathcal{d} -isomorphisme.

Pour n , on pose g obtenu par ajout de a_n au domaine de f_{n-1} (Q3) et f_{n+1} par ajout de b_n à l'image de g (Q3).

Ceci reste bien un \mathcal{d} -isomorphisme par injectivité & égalité de cardinal.

On pose $f := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, c'est bien un \mathcal{d} -isomorphisme entre M et N .
D'où M et N isomorphes.

Q.5. On : (\mathbb{R}, \leq) et (\mathbb{Q}, \leq) sont des modèles de T non isomorphes.

Q.6. Soit F close. Supposons $T \models F$ et $T \not\models \neg F$ donc $T \cup \{F\}$ et $T \cup \{\neg F\}$ ont des modèles.

Les deux théories ont chacun un modèle dénombrable M et N .

D'où M et N modèles de T dénombrables donc isomorphes par Q.4.

D'où $M \models F$ et $N \models F$ absurde car $M \models F$ et $N \models \neg F$.

D'où F complète.

Exercice 3. Prédicats

Soit F close.

Q1. " \Rightarrow " vrai par correction.

" \Leftarrow " Supposons F vraie dans toute interprétation de card $\leq 2^n$.

On construit la relation d'équivalence \sim sur les interprétations de L .

$$\mathcal{M} \sim \mathcal{N} \text{ ssi } \forall i \forall x (\mathcal{M} \models P_i(x) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models P_i(x))$$

Il y a au plus 2^n classes d'équivalences pour \sim car 2 valeurs possibles pour chaque prédicat.

D'où si \mathcal{M} est une L -interprétation alors elle est équivalente à un modèle de card $\leq n$, nommé \mathcal{N} .

Et, par construction $\mathcal{M} \models F$ ssi $\mathcal{N} \models F$ et par hyp. $\mathcal{N} \models F$.

D'où $\mathcal{M} \models F$.

D'où F théorème.

Q2. On pose $F := \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \forall y x_1 = y \vee x_2 = y \vee x_3 = y$.

Vraie dans les L -interprétations de card 1 mais n'est pas un théorème (faux dans les L -interprétations de card > 3).

I. Codage des formules

Exercice 1. Codage des formules.

Q1. La fonction $\alpha_3 : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ est une bijection.

Par induction sur F , on construit $\# \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$ la réciproque.

Q2. Les fonctions $\beta_1^3, \beta_2^3, \beta_3^3$ sont récursives primitives.

Notons F la fonction indicatrice de Form. Montrons F primitive rec.

Par déf^o par cas / récursion on a:

- si $\beta_3^3(x) = 0$ alors $F(x) := \prod_{\text{Term}} (\beta_3^2(x)) \times \prod_{\text{Term}} (\beta_3^2(x))$
- si $\beta_3^3(x) = 1$ et $\beta_3^2(x) = 0$ alors $F(x) := F(\beta_3^2(x))$
- si $\beta_3^3(x) \in \{2, 3, 4, 5\}$ alors $F(x) := F(\beta_3^2(x)) \times F(\beta_3^2(x))$
- si $\beta_3^3(x) \in \{6, 7\}$ alors $F(x) := F(\beta_3^2(x))$
- sinon $F(x) := 0$.

Exercice 2. Opérations sur les formules.

Notons $\Theta_1, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ les fonctions indicatrices de $\Theta_1, \Phi_1, \dots, \Phi_4$.

1) Par déf^o par cas: $\Theta_1(x, n)$

- si $\beta_3^3(x) = 0$ et $\beta_3^2(x) = n+1$ alors $F(x) := 1$
- si $\beta_3^3(x) = 1$ alors $F(x) := F(\beta_3^2(x))$
- si $\beta_3^3(x) \in \{2, 3\}$ alors $F(x) := F(\beta_3^2(x)) \times F(\beta_3^2(x))$
- sinon $F(x) := 0$

- 2)
- si $\beta_3^3(x) = 0$ alors $F(x) := \Theta_0(\beta_3^2(x)) \times \Theta_0(\beta_3^2(x))$
 - si $\beta_3^3(x) = 1$ alors $F(x) := F(\beta_3^2(x))$
 - si $\beta_3^3(x) \in \{2, 3, 4, 5\}$ alors $F(x) := F(\beta_3^2(x)) \text{ ou } F(\beta_3^2(x))$
 - si $\beta_3^3(x) \in \{6, 7\}$ alors $F(x) := F(\beta_3^2(x))$
 - sinon $F(x) := 0$

- 3) \rightarrow si $\beta_3^3(x) = 0$ alors $F(x) := \theta_0(\beta_3^1(x)) \times \theta_0(\beta_3^2(x))$
 \rightarrow si $\beta_3^3(x) = 1$ alors $F(x) := F[\beta_3^{-1}(x)]$
 \rightarrow si $\beta_3^3(x) \in \{2, 3, 4, 5\}$ alors $F(x) := F(\beta_3^1(x)) \text{ ou } F(\beta_3^2(x))$
 \rightarrow si $\beta_3^3(x) \in \{6, 7\} \wedge \beta_3^2(x) \neq n$ alors $F(x) := F(\beta_3^2(x))$
 \rightarrow sinon $F(x) := 0$

- 4) \rightarrow si $\beta_3^3(x) = 0$ alors $F(x) := \theta_1(\beta_3^1(x)) \times \theta_1(\beta_3^2(x))$
 \rightarrow si $\beta_3^3(x) = 1$ alors $F(x) := F[\beta_3^{-1}(x)]$
 \rightarrow si $\beta_3^3(x) \in \{2, 3, 4, 5\}$ alors $F(x) := F(\beta_3^1(x)) \text{ ou } F(\beta_3^2(x))$
 \rightarrow si $\beta_3^3(x) \in \{6, 7\} \wedge \beta_3^2(x) \neq n$ alors $F(x) := F(\beta_3^2(x))$
 \rightarrow sinon $F(x) := 0$

- 5) \rightarrow si $\beta_3^3(x) = \{6, 7\}$ alors $F(x) := \varphi_2(\beta_3^1(x), \beta_3^2(x))$
 \rightarrow sinon $F(x) := 0$

II. Encore un peu de théorie des modèles.

Exercice 3. Théorie infinie.

Q1. On pose $\mathcal{C}_m := \exists x_1 \dots \exists x_m \quad \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j$
 Puis $T_m := \{\varphi_k \mid k \leq n\}$.

Pour tout n , $T_n \not\models T_{n+1}$ et $\mathcal{J}_n := [1, n]$

Vérifie $\mathcal{J}_n \models T_n$ mais $\mathcal{J}_n \not\models T_{n+1}$.

Q2. Par compacité, on a que toute partie finie $T' \subseteq T$ est non-contadictoire. En effet, soit $n := \min \{m \in \mathbb{N} \mid T' \subseteq T_m\}$ et $\mathcal{J}_n \models T'$. D'où T non-contadictoire.

Q3. Par l'absurde soit T' finie sur \mathcal{J} telle que
 $\mathcal{J} \models T \Leftrightarrow \mathcal{J} \models T'$

Mais $T \models \Lambda T'$ et donc $T \vdash \Lambda T'$ (par complétude)

d'où il existe $A \subseteq_{\text{finie}} T$ telle que $A \vdash \Lambda T'$.

D'où, il existe $n \in \mathbb{N}$, $T_n \vdash \Lambda T'$.

D'où $\mathcal{M}_n \models \Lambda T$ et donc $\mathcal{M}_n \models T$ et en particulier $\mathcal{M}_n \models T_{\max}$.
Absurde.

Q4. avec $R = \emptyset$ et $L' = \{0, S\}$, on peut donner les 3 premiers axiomes de Peano.

Exercice 1. Sans fonction.

Q1. On transforme $R'(f(x_1, \dots, x_n), t_1, \dots, t_m)$

en $\exists \bar{y} R(x_1, \dots, x_n, \bar{y}) \wedge R'(\bar{y}, t_1, \dots, t_m)$
pour toute relation R' dans L et où y est fraîche.

Pour toute interprétation \mathcal{M} sur L_S ,

on considère \mathcal{M}' défini comme \mathcal{M} sans $f_{\mathcal{M}}$ avec $R_{\mathcal{M}'}$

et où $R_{\mathcal{M}'} = \{ (t_1, \dots, t_m, f(t_1, \dots, t_m)) \mid t_1, \dots, t_m \in \mathcal{M} \}$.

On a bien

$\mathcal{M}, e \models R'(f(x_1, \dots, x_n), t_1, \dots, t_m)$

$\Leftrightarrow (\text{Val}_e(f(x_1, \dots, x_n)), \text{Val}_e(t_1), \dots, \text{Val}_e(t_m)) \in R'_{\mathcal{M}}$

$\Leftrightarrow (f_{\mathcal{M}}(\text{Val}_e(x_1) \dots \text{Val}_e(x_n)), \text{Val}_e(t_1), \dots, \text{Val}_e(t_m)) \in R'_{\mathcal{M}}$

\Leftrightarrow il existe y tq $y = f_{\mathcal{M}}(\text{Val}_e(x_1), \dots, \text{Val}_e(x_n))$

et $(y, \text{Val}_e(t_1), \dots, \text{Val}_e(t_m)) \in R'_{\mathcal{M}}$

\Leftrightarrow il existe y tq $R_{\mathcal{M}'}(\text{Val}_e(x_1), \dots, \text{Val}_e(x_n), y)$

et $(y, \text{Val}_e(t_1), \dots, \text{Val}_e(t_m)) \in R'_{\mathcal{M}'}$

\Leftrightarrow il existe y tq $R_{\mathcal{M}'}(\text{Val}_e(x_1), \dots, \text{Val}_e(x_n), \text{Val}_e(\bar{y}))$

et $(y, \text{Val}_e(t_1), \dots, \text{Val}_e(t_m)) \in R'_{\mathcal{M}'}$

car y
fraîche

où $e' := e[\bar{y} \mapsto y]$

$\hookrightarrow \mathcal{M}', e \models \exists \bar{y} R(x_1, \dots, x_n, y) \wedge R'(\bar{y}, t_1, \dots, t_m)$

Q2. Pas nécessairement, par exemple la relation \prec n'est pas déterministe.

Exercice 5. Théorie des corps.

Q1. Tcorps := ?

$$\forall x \forall y \forall z \quad x + (y + z) = (x + y) + z,$$

$$\forall x \forall y \quad x + y = y + x,$$

$$\forall x \quad x + 0 = x,$$

$$\forall x \exists y \quad x + y = 0,$$

$$\forall x \forall y \forall z \quad x \times (y \times z) = (x \times y) \times z,$$

$$\forall x \forall y \forall z \quad x \times (y + z) = x \times y + x \times z,$$

$$\forall x \quad x \times 1 = 1 \times x = x,$$

$$\forall x \quad x \neq 0 \rightarrow \exists y \quad y \times x = x \times y = 1$$

}

où $a = b = c$ représente $a = b \wedge b = c$.

Q2. ... bah c'est bien ig ...

Q3. Soit T une théorie des corps de caractéristique non-nulle.
Considérons

$$\varphi_n := \underbrace{(1 + \dots + 1)}_n = 0$$

Soit $T' := T \cup \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

La théorie T' est finièrement satisfiable. En effet, si $T' \subseteq_{\text{fin}} T'$ alors soit $n = \text{pgcd} \{k \in \mathbb{N} \mid \varphi_k \in T'\} \in \mathbb{N}$.

Il existe un corps de caractéristique n (il suffit de décomposer $n = p_1 \times \dots \times p_g$ et $\mathbb{F}_{p_1} \times \dots \times \mathbb{F}_{p_g}$).

D'où T' satisfiable. Absurde !

Q4. Compose $T_{\text{corps}} \cup \{ \underbrace{1 + \dots + 1}_n \neq 0 \mid n \in \mathbb{N} \}$.

Q5. Non !