TD n° 1

I. Savoir lire la définition.

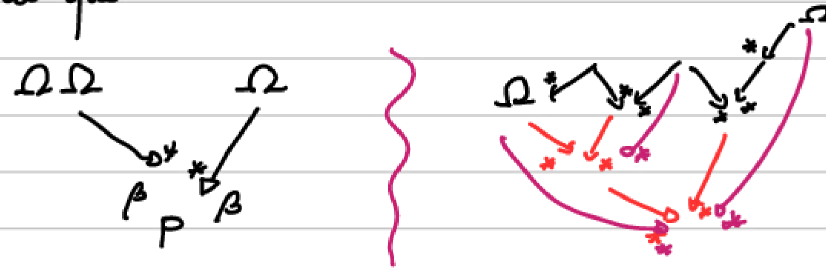
Ce sont des mesures de sécurité. Sinon :

$$(\lambda y.\ x\ y)[z/y] \neq_\alpha \lambda y.\ x\ z \qquad \rightsquigarrow \Delta\ x \neq y$$
$$(\lambda y.\ x\ y)[y/x] \neq_\alpha \lambda y.\ y\ y \qquad \rightsquigarrow \Delta\ y \notin VL(N).$$

II. Classes d'équivalence pour $=_\beta$.

Q2.1. $\Omega\Omega \to_\beta \Omega\Omega$ et $\Omega \to_\beta \Omega$.

Ainsi, si $\Omega\Omega =_\beta \Omega$ alors, par confluence, il existe M un λ-terme tel que



⟶ on utilise plusieurs fois la confluence avec les termes intermédiaires

C'est absurde car on aurait $\Omega\Omega = P = \Omega$ ($\Omega\Omega \to_\beta^* P$ implique $P = \Omega\Omega$ car il n'y a que 1 redex).

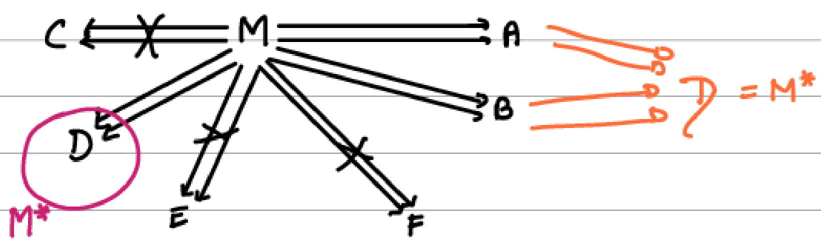
Q2.2. Soit N une forme normale avec $x \notin VL(N)$

On pose :

$$M = (\lambda x.\ N)\ \Omega.$$

III Propriété du diamant pour les réductions parallèles

Q3.1.



Par induction (3 cas)

Q 3. 2. $x^* := x$

$(\lambda x. M)^* := \lambda x.(M^*)$

$(M\ N)^* := \begin{cases} P^*[N^*/x] & \text{si } M = \lambda x.\, P \\ M^*\ N^* & \text{sinon} \end{cases}$

Lemme : si $M \Rrightarrow N$ alors $N \Rrightarrow M^*$ (par induction sur M)

D'où

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow] & \\ A \arrow[dr, Rightarrow] & & B \arrow[dl, Rightarrow] \\ & M^* & \end{tikzcd}$$

On a donc la propriété du diamant pour $\Rrightarrow$ donc la confluence de $\to_\beta$.

IV Normalisation faible et forte en λ-calcul pur.

Q4. 1. Les propriétés (1), (2) et (3) restent vraies

La propriété (4) ne l'est pas :

on a

$M := (\lambda x. x)\, M' \to M'$

mais

$$\underset{M\ M}{\underset{\|}{(y\ y)[M/y]}} \not\to \underset{M'\ M'}{\underset{\|}{(y\ y)[M'/y]}}$$

Q4. 2. Par induction sur $M \to M'$ (4 cas) :

* Cas $(\lambda x.\ M)\, N \to M[N/x]$. Supposons $x \in \mathcal{N}\ell(M)$ et $N \in \lambda I$. (*)

Par induction sur M, il y a 3 cas :

- si $M = y$ alors
  - si $y \neq x$ alors $M[N/x] = M \in \lambda I$.
  - si $y = x$ alors $M[N/x] = N \in \lambda I$.
- si $M = P\ Q$ alors par hypothèse d'induction on a : $P[N/x] \in \lambda I$ et $Q[N/x] \in \lambda I$ d'où $(P\ Q)[N/x] \in \lambda I$. par (ii)
- si $M = \lambda y.\, P$ avec $y \in \mathcal{N}\ell(P)$ alors $M[N/x] \in \lambda I$ car $P[N/x] \in \lambda I$.

* Cas $M N \to M' N$ avec $M \to M'$. Par hypothèse d'induction $M' \in \lambda I$.
  avec $M \in \lambda I$, $N \in \lambda I$.
  D'où $M' N \in \lambda I$ par (ii).
* Cas $M N \to M N'$ avec $N \to N'$. Par hypothèse d'induction $N' \in \lambda I$.
  avec $M \in \lambda I$, $N \in \lambda I$.
  D'où $M N' \in \lambda I$ par (ii).

* Cas $\lambda x. M \to \lambda x. M'$ avec $M \to M'$ et $M \in \lambda I, (\lambda x. M) \in \lambda I$, $M' \in \lambda I$ par hyp. d'ind^o
  Et, $vl(M') = vl(M)$ (preuve par induction)
  d'où $(\lambda x. M') \in \lambda I$ car $x \in vl(M')$.

Q4.3. Supposons avoir une divergence issue de $(\lambda x. M) N$.

On a trois cas :

avec au moins un pas car $x \in vl(M_i)$

- soit $N \uparrow$ donc $N_i \to N_{i+1}$ avec $N_0 = N$ d'où $M[N_i/x] \to^{*} M[N_{i+1}/x]$ et donc $M[N/x] \uparrow$
- soit $M \uparrow$ donc $M_i \to M_{i+1}$ avec $M_0 = M$ d'où $M_i[N/x] \to M_{i+1}[N/x]$ et donc $M[N/x] \uparrow$
- soit $M[N/x] \uparrow$

Dans tous les cas, $M[N/x] \uparrow$

Q4.4. Non : $(\lambda x. y)\, \Omega \uparrow$ mais $y[\Omega/x] = y \cancel{\uparrow}$

car $\in \lambda I$ à toute étape

Q4.5. Mon instinct me dit non, mais vu qu'on ne peut pas faire "disparaître" une divergence, j'ai envie de dire oui.

Si on a une divergence, alors on ne peut pas l'éviter. Inversement, si on n'a pas de divergence, on ne peut pas aller dans une divergence.

En gros : tous les calculs dans λI sont utiles.

V Des λ-termes qui calculent : couples et prédécesseurs

Q5.1. On définit $\mathrm{succ} := \lambda u. \lambda f. \lambda x. f(u f x)$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{succ}\ \underline{n} = (\lambda u f x. f(u f x))(\lambda f x. f^n x) &\to_\beta \lambda f x. f((\lambda f x. f^n x) f x) \\
&\to_\beta \lambda f x. f((\lambda x. f^n x) x) \\
&\to_\beta \lambda f x. f(f^n x) = \lambda f x. f^{n+1} x = \underline{n+1}.
\end{aligned}
$$

D'où $\mathrm{succ}\ \underline{n} \to^{*} \underline{n+1}$

Q5.2. On pose $fst := \lambda c.\, c\, \mathbf{T}$ et $snd := \lambda c.\, c\, \mathbf{F}$.

$$\begin{aligned} fst\ (M,N) &= (\lambda c.c\,(\lambda x y.x))\,(\lambda f.\,(f M)N) \\ &\to_\beta (\lambda f.\,(f M)N)\,(\lambda x y.x) \\ &\to_\beta ((\lambda x y.x) M) N \\ &\to_\beta (\lambda y.M) N \\ &\to_\beta M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} snd\ (M,N) &= (\lambda c.c\,(\lambda x y.y))\,(\lambda f.\,(f M)N) \\ &\to_\beta (\lambda f.\,(f M)N)\,(\lambda x y.y) \\ &\to_\beta ((\lambda x y.y) M) N \\ &\to_\beta (\lambda y.y) N \\ &\to_\beta N \end{aligned}$$

Q5.3. On pose : $Next := \lambda c.\,(succ\,(fst\ c),\ fst\ c)$

$$\begin{aligned} Next\ (\underline{n},\underline{k}) &\to_\beta (succ\,(fst\,(\underline{n},\underline{k})),\ fst\,(\underline{n},\underline{k})) && \text{par Q5.2} \\ &\to_\beta^* (succ\ \underline{n},\ fst\,(\underline{n},\underline{k})) && \text{par Q5.1} \\ &\to_\beta^* (\underline{n+1},\ fst\,(\underline{n},\underline{k})) && \text{par Q5.2} \\ &\to_\beta^* (\underline{n+1},\ \underline{n}) \end{aligned}$$

Q5.4 On pose $pred := \lambda n.\, snd\,(n\ Next\ (\underline{0},\underline{0}))$.

VI Des λ-termes qui bouclent

Q6.1.
$$\begin{aligned} Y\,M &\to_\beta (\lambda x.\,M(x\,x))(\lambda x.\,M(x\,x)) \\ &\to_\beta M((\lambda x.\,M(x\,x))(\lambda x.\,M(x\,x))) \\ &\leftarrow_\beta M\,(Y\,M) \end{aligned}$$

D'où $M(YM) =_\beta YM$.

Q6.2. On pose :

$F := \lambda f.\,\lambda n.$ if $zero?(n)$ then $\underline{1}$
else $mult\ n\ (f\ (pred\ n))$

puis

$fact := YF$.

Q6.3. On pose $\gamma := \lambda f.\, f(f\,x)$ puis $\Gamma := \lambda x.\,\gamma\gamma$.

On a :   degré de foisonnement :

$\Gamma = \lambda x. \gamma\gamma$ — 2

$\to_\beta \lambda x. \gamma(\gamma x)$ — 3

$\to_\beta \lambda x. \gamma(x(x\ x))$ — 4

$\to_\beta \lambda x. (x(x\ x))((x(x\ x))\ x)$ — 7

Q 6.4. Dans l'exemple, on fait des β-réductions dans une abstraction. En forme, on ne peut pas faire ça.

TD n° 2

I. Typer des λ-termes

1.1. Une question de cours du 6 mars 2024.

Q1.1. $\underbrace{(\lambda f.\, f\,(f\, z))}_{(X \to X) \to (X \to X)}\ \underbrace{(\lambda x.\, \lambda y.\, x\ y)}_{(A\to B)\to(A\to B)}$ de taille 12 où $X = A\to B$

$\to_\beta (\lambda x.\lambda y.\ x\ y)((\lambda x.\lambda y.\ x\ y)\ z)$ de taille 13

1. 2. Entiers de Church

Q1.2. $\text{succ} := \lambda n.\ \lambda f\, x.\ f\,(n\, f\, x)$

$\text{add} := \lambda n.\ \lambda m.\ \lambda f x.\ n\, f\ (m\, f\, x)$

$\text{mult} := \lambda n.\ \lambda m.\ \lambda f.\ n\,(m\, f)$

Q1.3. $\vdash \text{succ} : \text{nat} \to \text{nat}$

↳ $n : \text{nat},\ f : X \to X,\ x : X \ \vdash\ f\,(n\ f\, x) : X$

↳ " $\vdash\ n\ f\ x : X$

$\vdash \text{add} : \text{nat} \to \text{nat} \to \text{nat}$

↳ $n : \text{nat},\ m : \text{nat},\ f : X \to X,\ x : X \ \vdash\ n\ f\ (m\ f\, x) : X$

↳ " $\vdash\ m\ f\ x : X$

$\vdash \text{mult} : \text{nat} \to \text{nat} \to \text{nat}$

↳ $n : \text{nat},\ m : \text{nat},\ f : X \to X \ \vdash\ n\ (m\ f) : X \to X$

↳ " $\vdash\ m\ f : X \to X$

II. Types somme

Q2.1. Termes : $M, N ::= \dots \mid g\,M \mid d\,N \mid$ "match M with $g\,x \to N \mid d\,y \to N'$"

Réductions :

$$\frac{M \to_\beta M'}{g\,M \to_\beta g\,M'} \qquad \frac{M \to_\beta M'}{d\,M \to_\beta d\,M'}$$

$$\frac{}{(\text{match } g\,M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N') \to_\beta N[M/x]}$$

$$\frac{}{(\text{match } d\,M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N') \to_\beta N'[M/y]}$$

$$\frac{M \to_\beta M'}{\text{match } M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N' \to_\beta \text{match } M' \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N'}$$

$$\frac{N \to_\beta N''}{\text{match } M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N' \to_\beta \text{match } M \text{ with } g\,x \to N'' \mid d\,y \to N'}$$

$$\frac{N' \to N'''}{\text{match } M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N' \to_\beta \text{match } M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N'''}$$

Types : $A, B ::= \dots \mid A+B$

Typage : $\dfrac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash g\,M : A+B}$ $\qquad$ $\dfrac{\Gamma \vdash M : B}{\Gamma \vdash d\,M : A+B}$

$$\frac{\Gamma \vdash M : B+C \qquad \Gamma, x : B \vdash N : A \qquad \Gamma, y : C \vdash N' : A}{\Gamma \vdash \text{match } M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N' : A}$$

III Normalisation faible

Q3.1. On a : M fortement normalisant $\Rightarrow M'$ fortement normalisant.
Réciproquement, supposons M' fortement normalisant.
Si M admet une divergence pour $\mapsto$ alors par déterminisme la divergence passe par M' et donc on a une divergence pour M'.
Absurde.

Q3.2 Non ! $M = \mathbf{F}\,\Omega \to_\beta \mathbf{F}\,\Omega$ avec $\Omega \to_\beta \Omega$

$\downarrow_\beta$

M' $\lambda y.y$ $\qquad$ M a une divergence alors que M' non.

Q3.3. Pour tout type A,
(CR1') si $M \in \mathcal{R}_A$ alors M termine pour $\mapsto$
(CR2') si $M \in \mathcal{R}_A$ et $M \mapsto M'$ alors $M' \in \mathcal{R}_A$.
(CR3') si $M \mapsto M' \Rightarrow M' \in \mathcal{R}_A$ alors $M \in \mathcal{R}_A$

Par induction sur A (2 cas) :

- si on a un type de base X
  (CR1') par définition
  (CR2') par définition & préservation du typage
  (CR3') par induction bien fondée sur $\mapsto$ car $\mapsto$ termine.
- si on a un type $A \to B$
  (CR1') On a $x \in \mathcal{R}_A$ pour x arbitraire.
  Or, $M\,x \in \mathcal{R}_B$ d'où $M\,x$ fortement normalisant.
  Si M diverge en $M = M_1 \mapsto M_2 \mapsto M_3 \dots$
  alors $M\,x \mapsto M_2\,x \dots$ absurde !

  (CR2') Soit $M \in \mathcal{R}_{A \to B}$ et $M \mapsto M'$. Montrons que $M' \in \mathcal{R}_{A\to B}$.
  Soit $N \in \mathcal{R}_A$. Montrons que $M'N \in \mathcal{R}_B$.
  Or, $M\,N \mapsto M'N$ d'où, par (CR2') pour B, $M'N \in \mathcal{R}_B$.
  On conclut $M' \in \mathcal{R}_{A\to B}$.

  (CR3') Supposons $M \mapsto M' \Rightarrow M' \in \mathcal{R}_{A\to B}$.
  Montrons $M \in \mathcal{R}_{A \to B}$.
  Par hyp d'induction bien fondée,
  si $N \mapsto N'$ alors $M N' \in \mathcal{R}_B$.
  Montrons $M N \in \mathcal{R}_B$.
  Par (CR3') pour B, alors montrons que
  $M\,N \mapsto P$ et $P \in \mathcal{R}_B$.
  On a 2 cas :
  - Soit $M = \lambda x.\,M_0$ et $P = M_0[N/x]$ donc ok
  - Soit $P = M'N$ alors par hyp $M' \in \mathcal{R}_{A\to B}$
    et donc $M'N \in \mathcal{R}_B$.

Q3.4.
$$\frac{}{(\lambda x.M)\,v \hookrightarrow M[v/x]} \qquad \frac{M \hookrightarrow M'}{M\,N \hookrightarrow M'N} \qquad \frac{N \hookrightarrow N'}{v\,N \hookrightarrow v\,N'}$$

Q3.5. • On a bien $\hookrightarrow \subseteq \to_\beta$.
- On a bien que $\hookrightarrow$ est déterministe.
- Si $M \hookrightarrow M'$ alors $M\,N \hookrightarrow M'N$ pour tout N.

On peut donc appliquer le théorème.

Q 3.6. On ne peut pas utiliser le théorème ci-avant car les formes normales pour $\hookrightarrow$ ne sont pas nécessairement des formes normales pour $\to_\beta$. Exemple : $(\lambda x. x)(y\ z) \not\hookrightarrow$

Q 3.7. Notre relation $\hookrightarrow$ n'est pas complète. Il faut ajouter d'autres règles pour qu'elle le devienne (et qu'elle reste déterministe).

On peut, par exemple, définir $\hookrightarrow$ par induction avec :

$$\frac{M \hookrightarrow M'}{M\,N \hookrightarrow M'\,N} \qquad \frac{M \not\to_\beta \quad N \hookrightarrow N'}{M\,N \hookrightarrow M\,N'}$$

$$\frac{M \hookrightarrow M'}{\lambda x. M \hookrightarrow \lambda x. M'} \qquad \frac{M \not\to_\beta \quad N \not\to_\beta}{(\lambda x.\ M)\ N \hookrightarrow M[N/x]}$$

où l'on définit $\not\to_\beta$ par induction :

$$\frac{}{x \not\to_\beta} \qquad \frac{M \not\to_\beta}{\lambda x.\ M \not\to_\beta} \qquad \frac{P \not\to_\beta}{x\ P \not\to_\beta}$$

$$\frac{(M\ N) \not\to_\beta \qquad P \not\to_\beta}{(M\,N)\ P \not\to_\beta}$$

La relation $\hookrightarrow$ ainsi définie vérifie

(1) $\hookrightarrow \subseteq \to_\beta$;

(2) $\hookrightarrow$ est déterministe ;

(3) si $M \hookrightarrow M'$ alors pour tout N, $M\,N \hookrightarrow M'\,N$;

(4) $NF(\hookrightarrow) = NF(\to_\beta)$.

D'où la normalisation faible du λ-calcul.

1D n° 3

I. Existence d'une preuve sans coupure.

Q1.1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A,B \vdash A}\,ax}{A,B \vdash B \Rightarrow A}\Rightarrow_i}{A,B \vdash A \Rightarrow B \Rightarrow A}\Rightarrow_i \quad \dfrac{}{A,B \vdash A}\,ax}{\dfrac{A,B \vdash B \Rightarrow A}{} \quad \dfrac{}{A,B \vdash B}\,ax}\Rightarrow_e$$

$$\dfrac{A,B \vdash B \Rightarrow A \qquad \dfrac{}{A,B \vdash B}\,ax}{A,B \vdash A}\Rightarrow_e$$

Q1.2. On considère le multiensemble des degrés des coupures.

Lorsque l'on réduit la coupure la plus profonde

$$\text{coupure } c \left\{ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\delta}{\Gamma, A \vdash B}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\Rightarrow_I \qquad \dfrac{\delta'}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash B}\Rightarrow_E \right. \qquad deg(c) > 1$$

où δ et δ' ne contiennent pas de coupures, on engendre éventuellement un nombre fini de coupures mais de degré $< deg(c)$.

$$deg(c') \leq max(|A|, |B|) < deg(c).$$

D'où, par terminaison de $<_{mul}$, il existe une preuve sans coupure.

Q3.1. Eliminer la conjonction fait décroître strictement la taille de l'arbre.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\delta}{\Gamma \vdash A} \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\wedge_i}{\Gamma \vdash A}\wedge_e^g \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\delta}{\Gamma \vdash A}$$

(et de même avec $\wedge_e^d$).

Il suffit de faire un ordre produit $<_{taille} \times <_{mul}$.

Autre sol° : $t(A \wedge B) = t(A) + t(B)$ et dans le multiensemble.

Q1.4. On a montré la normalisation faible pour la $\to_\beta$.

II. Curry-Howard : enrichir la logique.

II.1. Types produit

Q2.1. $A ::= X \mid A \multimap A' \mid A \wedge A'$

$$\dfrac{\begin{array}{c} M:A \\ \Gamma\vdash A\end{array} \qquad \begin{array}{c} N:A' \\ \Gamma\vdash A'\end{array}}{\begin{array}{c}\Gamma\vdash A\wedge B \\ (M,N):A\times A'\end{array}}\wedge i \qquad \dfrac{\begin{array}{c} M:A\times A' \\ \Gamma\vdash A\wedge A'\end{array}}{\begin{array}{c}\Gamma\vdash A \\ \pi_1 M:A\end{array}}\wedge e^g \qquad \dfrac{\begin{array}{c} M:A\times A' \\ \Gamma\vdash A\wedge A'\end{array}}{\begin{array}{c}\Gamma\vdash A' \\ \pi_2 M:A'\end{array}}\wedge e^d$$

Q2.2. C'est une preuve de A et une preuve de A', ce qui donne une preuve de $A\wedge A'$.

Q2.3/4 c.f. Q1.3.

II.2. Les autres connecteurs

Q2.5. $A ::= X \mid A \multimap A' \mid A\wedge A' \mid A\vee A' \mid \top \mid \bot$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\tilde\Gamma\vdash M:A+B \\ \Gamma\vdash A\vee B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\tilde\Gamma, x:A\vdash N:C \\ \Gamma, A\vdash C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\tilde\Gamma, y:B\vdash N':C \\ \Gamma, B\vdash C\end{array}}{\begin{array}{c}\Gamma\vdash C \\ \tilde\Gamma\vdash \mathrm{case}(M, x\mapsto N, y\mapsto N'):C\end{array}}\vee e \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\tilde\Gamma\vdash M:A \\ \Gamma\vdash A\end{array}}{\begin{array}{c}\Gamma\vdash A\vee B \\ \tilde\Gamma\vdash g M : A+B\end{array}} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\tilde\Gamma\vdash M':B \\ \Gamma\vdash B\end{array}}{\begin{array}{c}\Gamma\vdash A\vee B \\ \tilde\Gamma\vdash d M' : A+B\end{array}}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\tilde\Gamma\vdash M:\mathbf{0} \\ \Gamma\vdash \bot\end{array}}{\begin{array}{c}\Gamma\vdash A \\ \tilde\Gamma\vdash M:A\end{array}} \qquad \dfrac{}{\begin{array}{c}\Gamma\vdash \top \\ \tilde\Gamma\vdash *:\mathbf{1}\end{array}}$$

$M,N ::= \dots \mid * \mid gM \mid dM \mid \mathrm{case}(M, x\mapsto N, y\mapsto N')$

$A ::= \dots \mid A+B \mid \mathbf{1} \mid \mathbf{0}$

Coupures

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\delta}{\Gamma\vdash A}}{\Gamma\vdash A\vee B}\vee i^g \qquad \dfrac{\delta'}{\Gamma, A\vdash C} \qquad \dfrac{\delta''}{\Gamma, B\vdash C}}{\Gamma\vdash C}\vee e \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\delta'[\delta/A]}{\Gamma\vdash C}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\delta}{\Gamma\vdash B}}{\Gamma\vdash A\vee B}\vee i^d \qquad \dfrac{\delta'}{\Gamma, A\vdash C} \qquad \dfrac{\delta''}{\Gamma, B\vdash C}}{\Gamma\vdash C}\vee e \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\delta''[\delta/B]}{\Gamma\vdash C}$$

Pas de coupure avec $\top$ et $\bot$.

Q2.6.

$$\dfrac{\dfrac{\vec{\Gamma} \vdash N : A}{\Gamma \vdash A} \qquad \dfrac{\tilde{\Gamma} \vdash M : A \to 0}{\Gamma \vdash \neg A}}{\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\tilde{\Gamma} \vdash MN : 0}} \neg e \qquad \dfrac{\dfrac{\tilde{\Gamma}, x : A \vdash M : 0}{\Gamma, A \vdash \bot}}{\dfrac{\Gamma \vdash \neg A}{\tilde{\Gamma} \vdash (\lambda x. M) : A \to 0}} \neg i$$

On peut poser $\bot := \neg\top$.