Probabilités

TD n° 4

Hugo SACCU.

Exercice 1. Running Time.

Q1. Soit $X_n \sim \mathcal{U}(\{0,1\}^n)$. On a : $\mathbb{E}[T(X_n)] \leq k \cdot n^2$ avec k fixé.

D'après l'inégalité de Markov :

$$P(T(X_n) \geq n^2 f(n)) \leq \frac{\mathbb{E}[T(X_n)]}{n^2 f(n)} = \frac{k}{f(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Q2. Notons $T_{max} = \max_{\omega \in \Omega} T(\omega)$.

$$k n^2 \geq \mathbb{E}[T] = \sum_{\omega \in \Omega} T(\omega) \, 1/2^n \geq T_{max} \frac{1}{2^n}$$

D'où $T_{max} \leq k \cdot n^2 2^n$. On conclut que $T_{max} = O(n^2 2^n)$.

Exercice 2. Coquilles dans un TD

Q1. Notons N le temps de relecture pour enlever les 4 coquilles. et N_i pour la i-ème coquille.

$N_i \sim \mathcal{G}(1/3)$ et $N = \max(N_1, N_2, N_3, N_4)$.

$$\mathbb{P}(N \leq n) = \underbrace{\prod_{i=1}^{4} \mathbb{P}(N_i \leq n)}_{\text{indépendance}} = \prod_{i=1}^{4} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_i = k)$$

$$= \prod_{i=1}^{4} \sum \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{1}{3}$$

$$= \prod_{i=1}^{4} \cancel{\frac{1}{3}} \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1/3}$$

$$= \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^4$$

Avec $n = 10$, on a $\mathbb{P}(N \leq 10) \approx 0{,}9$.

Q2. Le problème du collectionneur de vignettes, mais, à chaque étape, on peut corriger plusieurs coquilles, alors qu'on ne peut avoir qu'un magnet.

Q3.. D'après Tchebychev,

$$\mathbb{P}(10\cdot n < X < 10+n) = 1 - \mathbb{P}(|X-\mu| \geq n) \leq 1-\frac{\sigma^2}{n^2}$$

On a bien le résultat demandé pour $n \geq 50$.

Exercice 3. Tester la pièce.

On lance n fois la pièce. Le nombre de "Pile"s est $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

$$\mathbb{E}[X] = n\cdot p \qquad \mathrm{Var}[X] = np(1-p)$$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq n/10) \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{(n/10)^2} = \frac{p(1-p)}{n/100} \leq \frac{25}{n}$$

Pour avoir une probabilité d'au moins 0,9, il faut

$$0,9 \leq 1 - 25/n \iff 25/n \leq 0,1 \iff n \geq 250$$

Exercice 4. Comparer Markov, Tchebychev et Chernoff.

$$X \sim \mathcal{B}(n, 1/6) \qquad \mathbb{E}[X] = n/6 \qquad \mathrm{Var}[X] = 5n/36.$$

Markov : $\mathbb{P}(X \geq n/4) \leq \dfrac{n/6}{n/4} = \dfrac{4}{6}$

Tchebychev : $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \leq n/12) \leq \dfrac{5n/36}{(n/12)^2} = \dfrac{144 \times 5}{36} \times \dfrac{1}{n} = 20/n$

Chernoff : $\mathbb{P}(X \leq (1+\frac{1}{2})\mathbb{E}[X]) \leq \exp\left(-\dfrac{1/4}{5/2}\,\dfrac{n}{6}\right) = \exp(-\frac{n}{60})$.

Exercice 5. Chernoff Bound Interval.

Q1. On a : $\mathbb{E}[e^{\lambda Y}] = (1-p) + p e^{\lambda}$

$= 1 - \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X] e^{\lambda}$

Convexité de $\exp(\lambda -)$ et croissance de $\mathbb{E}[-]$

$= \mathbb{E}[(1-X)e^{0} + e^{\lambda} X]$

$\geq \mathbb{E}[e^{\lambda X + (1-X)\cdot 0}] \geq \mathbb{E}[e^{\lambda X}]$

Q2. Pour $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq (1+\varepsilon)\mu) = \mathbb{P}(e^{\lambda X} \geq e^{\lambda\mu(1+\varepsilon)})$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda X}]}{e^{\lambda\mu(1+\varepsilon)}}$$

Par inégalité de Markov

De plus, $\mathbb{E}[e^{\lambda X}] = \mathbb{E}[e^{\lambda(X_1 + \dots + X_n)}]$

$$= \prod \mathbb{E}[e^{\lambda X_i}]$$

$$= e^{\sum p_i(e^{\lambda}-1)}$$

En effet,

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X_i}] \leq (1-p_i) + p_i e^{\lambda}$$

$$= 1 + p_i(e^{\lambda}-1)$$

$$\leq e^{p_i(e^{\lambda}-1)}$$

D'où, $\mathbb{P}(X \geq (1+\varepsilon)\mu) \leq \dfrac{e^{\mu(e^{\lambda}-1)}}{e^{\lambda\mu(1+\varepsilon)}}$ où $\lambda = \ln(1+\varepsilon)$.

Exercice 6. Fonction génératrice

1) $G_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \, \mathbb{P}(X=n)$

$$G'_X(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \, z^{n-1} \, \mathbb{P}(X=n) \implies \mathbb{E}[X] = G'_X(1)$$

$$G''_X(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) z^{n-2} \, \mathbb{P}(X=n)$$

$$\mathrm{Var}[X] = G''_X(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$$

Q2. $G_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \, \mathscr{C}(\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}$

$$= \mathscr{C}(\lambda) \exp(\lambda z)$$

Q3. $G_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = 1$

d'où $\mathscr{C}(\lambda)\exp(\lambda) = 1$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

On en déduit $\mathscr{C}(\lambda) = \exp(-\lambda)$.

Q4. $G_X(z) = \exp(\lambda(z-1))$

$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$

$\mathrm{Var}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$

$= \lambda^2 \cancel{e^{-\lambda} e^{\lambda}} \quad \lambda \quad - \lambda^2$

$= \lambda$

Q5. $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

$G_X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \, \mathbb{P}(X=k)$

$= \sum_{k=0}^{n} z^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$= (pz + 1 - p)^n$

$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = np(p+1-p)^{n-1}$

$= np$

$\mathrm{Var}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$

$= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2$

$= p^2(\cancel{n^2} - n - \cancel{n^2}) + np$

$= np(1-p)$.

Q6. $G_S(z) = \mathbb{E}[z^S] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}[z^S \mid N=n] \cdot \mathbb{P}(N=n)$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[z^{X_1+\dots+X_n}] \cdot \mathbb{P}(N=n) + \mathbb{P}(N=0)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[z^{X_1} \times \dots \times z^{X_n}] \cdot \mathbb{P}(N=n) + \mathbb{P}(N=0)$$

car les $(X_i)_{i \geq 0}$ sont iid

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mathbb{E}[z^{X_1}]\right)^n \cdot \mathbb{P}(N=n)$$

$$= G_N(G_{X_1}(z))$$

Si $X_i \sim \mathcal{G}(q)$ et $N \sim \mathcal{G}(p)$,

$$G_N(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n q (1-q)^{n-1} = zq \sum_{n=0}^{+\infty} (1-q)^n z^n$$

$$= zq / (1-(1-q)z)$$

D'où

$$G_S(z) = \frac{pzq}{(1-(1-q)z)\left(1-(1-p)(qz/1-(1-q)z)\right)}$$

$$= \frac{pzq}{1 - z + \cancel{qz} - \cancel{qz} + pqz}$$

$$= \frac{(pq)z}{1-(1-pq)z}$$

On peut en déduire que $S \sim \mathcal{G}(pq)$.

Exercice 7. Probabilités conditionnelles.

Q1. On pose $\Omega' = \Omega \setminus Y^{-1}(\{0\})$, puis

$$X : \mathbb{N}^* \longrightarrow \Omega' \qquad\qquad \mathbb{P}' : \Omega' \longrightarrow [0,1]$$
$$n \longmapsto Y(n). \qquad\qquad \omega \longmapsto \mathbb{P}(\omega) / \mathbb{P}(Y \neq 0).$$

Q2. $\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathrm{Var}[X] \geq 0$

D'où $\mathbb{E}[X^2] \geq \mathbb{E}[X]^2$.

Q3. $$\mathbb{E}[Y] = \sum_{y=0}^{+\infty} y\, \mathbb{P}(Y=y) = \sum_{y=1}^{+\infty} \underbrace{y}_{\geq 1} \mathbb{P}(Y=y) \geq \mathbb{P}(Y \geq 1) = \mathbb{P}(Y \neq 0)$$

$$\frac{\mathbb{E}[Y]^2}{\mathbb{E}[Y^2]} = \frac{\mathbb{E}[X]^2 \cdot \mathbb{P}(Y\neq 0)^{\cancel{2}}}{\mathbb{E}[X^2] \cdot \cancel{\mathbb{P}(Y\neq 0)}} \underset{\text{par Q2.}}{\leq} \mathbb{P}(Y\neq 0) \cdot \times 1$$

Exercice 8. Bucket Sort.

Q1. Si on reçoit $x = \overline{b_k \dots b_0}^2$, on le met dans le bucket numéroté $\overline{b_k \dots b_{k-m}}^2$ (c'est un bitshift de $k-m$).

Q2. Soit $X \sim \mathcal{U}(⟦0, 2^k - 1⟧)$.
$\mathbb{P}(\text{On place } X \text{ dans le seau } i) = 1/n$.

D'où,

$$\mathbb{P}(X_i = \ell) = \binom{n}{\ell} \left(\frac{1}{n}\right)^\ell \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-\ell}$$

C'est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/n)$.

Q3. Notons T le temps de calcul du bucketsort.

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{i=0}^{2^{k-1}} \mathbb{E}[T_i] \quad + \mathcal{O}(n)$$

$$\mathbb{E}[T_i] = \mathbb{E}[M X_i^2] = M(\mathrm{Var}[X_i] + \mathbb{E}[X_i]^2)$$
$$\leq M\left(n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{n^2}{n^2}\right) = M n\left[2 - 1/n\right] \leq 2Mn$$

D'où, $\mathbb{E}[T] = \mathcal{O}(n)$.

Fim du TD

TD n° 5

Exercice 1. Algorithme probabiliste pour calculer la médiane.

Q1. La partie (a) est en $O(n)$,

puis (b) en $O(n^{3/4} \underbrace{\log n}_{O(n^{1/4})}) = O(n)$,

puis (c) en $O(n)$

puis (d) en $O(n)$

et enfin (e) en $O(n^{3/4} \log n) = O(\log n)$.

D'où l'algorithme est en $O(n)$.

Q2 Erreur 1 : On a $\mathbb{E}[\text{card } F] = \sum \mathbb{E}[Y_i] = n \cdot n^{-1/4} = n^{3/4}$

Par inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\text{Var}[X]}{a^2}.$$

TD n° 6

Exercice 1. Black jack.

Bof ...

Loi faible des grands nombres :

Soit $\bar{X}$ le nombre de parties de Blackjack gagnées.

$$\mathbb{P}(|\bar{X} - 1/2| \geq 5\%) \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{n(5\%)^2} \leq \frac{1}{n \cdot (5\%)^2}$$

Pour avoir $\mathbb{P}(\text{il ne triche pas}) \geq 10\%$ il suffit d'avoir $n \geq \frac{1}{(10\%)(5\%)^2} = 4000$

D'après Chernoff,

$$\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{2} + (5\%)) \leq \exp(-2(5\%)^2/n)$$

$$\exp(-2(5\%)^2/n) \leq 10\% \iff 2 \cdot (5\%)^2/n \leq \ln(10)$$
$$\iff n \geq \ln(10) / (2 \cdot (5\%)^2)$$

D'où $n \geq 461$. Beaucoup plus précis ...

Exercice 2. Random Algorithm.

Algorithme $\mathcal{B}$:

- On lance $k(x)$ fois l'algorithme $\mathcal{A}$ sur l'entrée x. On note (A_i) les résultats des exécutions de $\mathcal{A}$.
- On renvoie la réponse majoritaire

Si $x \notin L$, alors on a : $\mathbb{E}[X] \leq k/3$.
Si $x \in L$, alors on a : $\mathbb{E}[X] \geq 3k/4$.

Par inégalité de Chernoff, on a:

- si $x \notin L$, alors

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}(x) = 1) = \mathbb{P}(X \geq k/2) \leq \exp\left(-\frac{(1/2)^2}{2+\frac{1}{2}} \cdot \frac{k}{3}\right) = \exp\left(-\frac{k}{30}\right).$$

- si $x \in L$, alors

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}(x) = 0) = \mathbb{P}(X \leq k/2) \leq \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot 9} \times \frac{3k}{4}\right) = \exp(-k/24)$$

$$\Rightarrow k = 30\,|x| \,/\, \log_2 e$$

Exercice 3. Intercupteurs

Partie I.

Q1 On pose $Y := \mathbb{1}_{X \geq 1/4}$. On a:

$$1 = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[XY] + \underbrace{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{X \leq 1/4}]}_{\leq 1/4}$$

d'où

$$\sqrt{3\, \underbrace{\mathbb{E}[Y^2]}_{= \mathbb{E}[Y] = \mathbb{P}(X \geq 1/4)}} \geq \mathbb{E}[XY] \geq \frac{3}{4}$$

D'où $\gamma = 3/16$.

Q2. $\mathbb{E}[Y^2] = \mathrm{Var}[Y] + \mathbb{E}[Y]^2$

$= \frac{1}{n} \sum \mathrm{Var}[X_i]$ et $\mathbb{E}[Y] = 0$ car $\mathbb{E}[X_i] = 0$

$= 1$

$$\mathbb{E}[Y^4] = \frac{1}{n^2}\, \mathbb{E}\left[\sum X_i X_j X_k X_l\right]$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum \mathbb{E}[X_i X_j X_k X_l]$$

Cas 1: $i \neq j, k, l$ $\Rightarrow \mathbb{E}[X_i X_j X_k X_l] = 0$

Cas 2 : $i = k \neq j = l \implies \mathbb{E}[X_i X_j X_k X_l] = 1$

Cas 3 : $i = j = k = l \implies \mathbb{E}[X_i X_j X_k X_l] = 1$

D'où $\mathbb{E}[Y^4] = \frac{1}{n^2}\Big(n + \underbrace{3}_{\substack{i=j\neq k=l \\ i=k\neq j=l \\ i=l\neq j=k}} \cdot \underbrace{n(n-1)}_{\text{choix de } i \text{ et choix du } 2^{nd} \text{ indice}}\Big) = 3 - \frac{2}{n} \leq 3.$

$$\gamma \overset{Q1}{\geq} \mathbb{P}(Y^2 \geq 1/4) \overset{\text{passage à la racine}}{=} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}|X_1 + \cdots + X_n| \geq 1/2\right)$$

$$= \mathbb{P}(|X_1 + \cdots + X_n| \geq \sqrt{n}/2) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_1 + \cdots + X_n|]}{\sqrt{n}/2}$$

Markov

D'où, $\mathbb{E}[|X_1 + \cdots + X_n|] \geq \frac{\gamma}{2} \cdot \sqrt{n}.$

TD n° 7

Exercice 1. Graphe aléatoire biparti.

Q1 $\#E = \sum_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![n+1,2n]\!]}} X_{ij}$ où les X_{ij} sont i.i.d. $\mathcal{B}(p)$

d'où $\# \sim \mathcal{B}(n^2, p)$.

Q2. $\mathbb{P}(i$ est un sommet isolé$)$

$$= \mathbb{P}(\forall j,\ X_{ij} = 0)$$
$$= \left(\prod_{j} X_{ij}\ \mathbb{P}(X_{ij} = 0)\right)$$
$$= (1-p)^n$$

$$\mathbb{E}[\text{Nombre de sommets isolés}] = \sum_i \mathbb{E}[\text{Sommet } i \text{ isolé}]$$
$$= \sum (1-p)^n$$
$$= 2n \cdot (1-p)^n$$

Q3. (i)

$$\mathbb{P}(H_{2n,p} \text{ a un sommet isolé}) = \mathbb{P}(\text{Nombre de sommets isolés} \geq 1)$$
$$\leq \mathbb{E}[\text{Nombre de sommets isolés}] / 1$$
$$\leq 2n(1-p)^n$$
$$\leq 2n e^{-np}$$
$$\leq 2n (n)^{-c}$$
$$\leq 2 \cdot n^{1-c} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(ii)

$$\mathbb{P}(H_{2n,p} \text{ a un sommet isolé})$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\text{pas de sommet isolé})$$
$$= 1 - \mathbb{P}(N = 0)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\mathbb{E}[N] - N \geq \mathbb{E}[N])$$
$$= 1 - \mathrm{Var}[N] / (\mathbb{E}[N])^2$$
$$= 1 - \frac{\mathbb{E}[N^2] - \cancel{\mathbb{E}[N]^2}}{\mathbb{E}[N]^2}$$
$$= 2 - \mathbb{E}[N^2] / \mathbb{E}[N]^2$$

$$= 2 - \mathbb{E}[N^2] / 4n^2(1-p)^{2n}$$

$$\mathbb{E}[N^2] = \sum \mathbb{E}[i \text{ isolé}, j \text{ isolé}]$$

$$= \sum_{i=j} \mathbb{E}[i \text{ isolé}] + \sum_{\substack{i,j \text{ même colonne} \\ i \neq j}} \mathbb{E}[i \text{ isolé}, j \text{ isolé}] + \sum_{\substack{i,j \text{ colonnes} \\ \text{différentes}}} \mathbb{E}[i \text{ isolé}, j \text{ isolé}]$$

$$= 2n(1-p)^n + 2n(n-1)(1-p)^{2n} + 2n^2(1-p)^n(1-p)^{n-1}$$

$$= 2n(1-p)^n \left(1 + (1-p)^n(n-1) + n(1-p)^{n-1}\right)$$

D'où

$$\mathbb{E}[N^2]/\mathbb{E}[N]^2 = \frac{1}{2n(1-p)^n}\left(1 + (1-p)^n(n-1) + n(1-p)^{n-1}\right)$$

$$= \underset{\downarrow \, 0}{\frac{1}{2n(1-p)^n}} + \underset{\downarrow \, 1/2}{\frac{n-1}{2n}} + \frac{1}{\underbrace{2(1-p)}_{\frac{n}{2c\log n}}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

D'où $\mathbb{P}(H_{2n,p}$ a un sommet isolé$) \longrightarrow 1$.

Q4. $\mathbb{P}(\forall v, \deg(v) \leq \frac{n}{2} + C\sqrt{n\log n})$

$$= 1 - \mathbb{P}(\bigcup_v \deg(v) \geq \frac{n}{2} + C\sqrt{n\log n})$$

et $\mathbb{P}(\bigcup_v \deg(v) \geq \frac{n}{2} + C\sqrt{n\log n}) \leq \sum_v \mathbb{P}(\deg(v) \geq \frac{n}{2} + C\sqrt{n\log n})$ par borne de l'union.

Or, $\deg(v) \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ d'où par Chernoff I,

$$\mathbb{P}(\deg(v) \geq \frac{n}{2} + C\sqrt{n\log n}) \leq \exp(-2C^2 n\log n / n)$$

$$\leq n^{-2(C^2)}$$

On pose $C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, et on a :

$$\sum_v \mathbb{P}(\deg(v) \geq \frac{n}{2} + C\sqrt{n\log n}) \leq \sum n^{-(C^2)} = 2n / n^{(C^2)} = 2\, n^{1-2C^2}$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

D'où $\quad \mathbb{P}\left(\forall v,\ \deg(v) \leq \frac{n}{2} + C\sqrt{n\log n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Exercice 2 $\quad K_4$.

Q1. $\mathbb{E}[X] = \sum_{\{a,b,c,d\}} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{a,b,c,d\} \text{ forme une 4 clique de } G}\right]$

$= \sum p^6 = \binom{n}{4} p^6$

Q2. $\mathbb{P}(X \neq 0) = \mathbb{P}(X \geq 1) \leq \mathbb{E}[X] \leq \binom{n}{4} p^6$

$\leq \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \left(o(n^{-2/3})\right)^6$

$\leq o(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Q3. $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\mathbb{E}[X] - X \leq \mathbb{E}[X])$
$\leq \mathrm{Var}[X]/\mathbb{E}[X]^2$ par inégalité de Tchebychev.

Q4. $\mathrm{Var}\left[\sum X_i\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum X_i\right)^2 - \left(\sum \mathbb{E}[X_i]\right)^2\right]$

$= \sum \mathbb{E}[X_i X_i] + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}[X_i X_j] - \sum (\mathbb{E}[X_i])^2 - \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]$

$= \sum \mathbb{E}[X_i] + \sum_{i\neq j} \left(\mathbb{E}[X_i X_j] - 2\,\mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]\right)$
$- \sum (\mathbb{E}[X_i])^2$

$= \sum \mathbb{E}[X_i] + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])] - \sum (\mathbb{E}[X_i])^2$

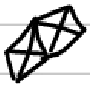
$\leq \sum \mathbb{E}[X_i] + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])]$

Q5. $\mathrm{Var}\left[\sum \mathbb{1}_{\{a,b,c,d\} \text{ forme une clique}}\right] \leq \mathbb{E}[\text{Nb de 4-clique}]$
$+ \sum_{C_1 \neq C_2} \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{1}_{C_1 \text{ clique}} - \mathbb{E}[C_1 \text{ clique}]\right)\left(\mathbb{1}_{C_2 \text{ clique}} - \mathbb{E}[C_2 \text{ clique}]\right)\right]$

$$\leq \binom{n}{4} p^6 + \sum_{C_1 \neq C_2} \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{1}_{C_1 \text{ clique}} - p^6\right)\left(\mathbb{1}_{C_2 \text{ clique}} - p^6\right)\right]$$

$$\leq \binom{n}{4} p^6 + \sum_{\substack{\text{un sommet} \\ \text{entre } C_1 \neq C_2}} 0 + \sum_{\substack{\text{deux sommets} \\ \text{entre } C_1 \neq C_2}} p^{11}(1-p) + \sum_{\substack{\text{trois sommets} \\ \text{entre } C_1 \neq C_2}} p^9(1-p^3)$$

par indépendance



11 paires de sommets avec $X_{u,v} = 1$ (équivalent : une arête partagée entre C_1 et C_2)

3 arêtes partagées

$$\leq \binom{n}{4} p^6 + \binom{n}{6} p^{11}(1-p) + \binom{n}{5} p^9(1-p^3)$$

TD n° 8

Exercice 1. Second théorème de Borell Cantelli

Q1. $\bigcap_{n} \bigcup_{k \geq n} A_k$

Q2.
$$\mathbb{P}(B_{k,\ell}) = \prod_{n=k}^{\ell} (1 - \mathbb{P}(A_n)) \leq \prod_{n=k}^{\ell} e^{-p_n}$$
$$\leq \exp\left(-\sum_{n=k}^{\ell} p_n\right) \xrightarrow[\ell \to +\infty]{} 0$$
car
$$\sum_{n=k}^{\ell} p_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\ell} p_n}_{\xrightarrow[\ell \to +\infty]{} +\infty} - \underbrace{\sum_{n=0}^{k-1} p_n}_{\text{fini}}$$

Q3 On a : $B_k = \bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} B_{k,\ell}$, d'où

par continuité décroissante, $B_k \supseteq B_{k+1}$,

$\forall \ell$, $\mathbb{P}(B_k) \leq \mathbb{P}(B_{k,\ell})$ d'où $\mathbb{P}(B_k) \leq \lim_{\ell \to \infty} \mathbb{P}(B_{k,\ell}) = 0$

donc $\mathbb{P}(B_k) = 0$

On en conclut :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(B_k) = 0.$$

Q4. $\mathbb{P}$(une ∞té de A_n se réalisent)
$$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n} \bigcup_{k \geq n} A_k\right)$$
$$= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n} \bigcap_{k \geq n} \overline{A_k}\right) = 1 \quad \text{par Q3.}$$

Q5. $\mathbb{P}(\text{une} \infty\text{té de } 1) \overset{Q4}{=} 1$ car $\sum \frac{1}{n}$ diverge

$\mathbb{P}(\text{une} \infty\text{té de } 11) = 0$ par 1er lemme de Borell Cantelli

On n'a pas besoin de l'indépendance des B_k.

Exercice 2. Condition de convergence.

Q3. $X_n \xrightarrow{ps} X \sim \mathcal{B}(p) \Leftrightarrow \mathbb{P}(\lim_n X_n = X) = 1$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(\exists k, \forall n \geq k, X_n = X) = 1$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(\forall k, \exists n \geq k, X_n \neq X) = 0$

$\Leftrightarrow \sum \left(p_n p + (1-p_n)(1-p) \right)$ converge

Q1. On a:

$$(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge en loi vers } X \sim \mathcal{B}(1-p) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(X_n=0) \longrightarrow \mathbb{P}(X=0) \\ \mathbb{P}(X_n=1) \longrightarrow \mathbb{P}(X=1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow p_n \to p$ car $\mathbb{P}(X_n=1) = 1 - \mathbb{P}(X_n=0) = p_n$

D'où $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$

Q2. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $X \sim \mathcal{B}(1-p)$.
Par Q1, on a: $p_n \to p$.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|X_{n+1} - X_n| \leq |X_{n+1} - X| + |X_n - X|$$

et

$\forall \varepsilon > 0, \quad |X_n - X| \geq \varepsilon \Rightarrow |X_n - X| + \underbrace{|X_{n+1} - X|}_{\geq 0} \geq \varepsilon$

d'où

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_{n+1} - X| + |X_n - X| \geq \varepsilon)$$
$$\leq \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi, avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X_n \neq X_{n+1}) = p_n(1-p_{n+1}) + p_{n+1}(1-p_n)$.

$$\downarrow$$
$$2p(1-p)$$

D'où $2p(1-p) = 0$ et $p \leq \frac{1}{2}$ d'où $p = 0$.

Réciproquement, si $p_n \to 0$ alors

$$\mathbb{P}(|X_n - 1| \geq \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon > 1 \\ p_n & \text{sinon} \end{cases}$$
$$\downarrow n \to +\infty$$
$$0$$

Q3. On a :

$$\mathbb{P}(\lim X_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(\forall k, \exists n \geq k, X_n = 0)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} (X_n = 0))$$

D'où

$$X_n \xrightarrow{p.s.} 1 \iff \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} (X_n = 0)) = 0$$
$$\underset{(*)}{\iff} \sum p_n \text{ converge}$$

En effet, $\overset{(*)}{\Leftarrow}$ par Borell Cantelli

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ par ex 1.

Exercice 3. Convergence.

Q1. $\mathbb{P}(|X_n - 5| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\mathrm{Var}[X_n]}{\varepsilon^2} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}\,\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Vrai

Q2. Par le théorème central limite,

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n} - \mathbb{E}_i[X_i]\right) \leq x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi(x)$$

d'où il suffit de poser

$$C(n,x) := \left(\frac{3x}{\sqrt{n}} + 4\right)n = 3\sqrt{n}\,x + 4n$$

Q3. On pose $Y_n \sim \mathcal{B}(1/\sqrt{n})$

- $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$ donc $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$
- $Y_n \overset{p.s.}{\not\to} 0$ car $1 - Y_n \overset{p.s.}{\not\to} 1$ car $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.
- $\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{p.s.} 0$ car $\left|\frac{Y_n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$.

Exercice 4. Théorème de Mycielski

Q1.

$$\mathbb{P}(G \text{ a } \tfrac{n}{2} \text{ triangles}) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n/2} \text{triangle dans } G\Big)$$

$$\leq \sum_{n/2} \mathbb{P}(\text{triangle dans } G)$$

$$\leq (n/2)\cdot p^3 = \frac{1}{2}\, n^{3\varepsilon-2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

car $3\varepsilon - 2 < 0$ car $\varepsilon < \frac{2}{3}$.

Q2.