Hugo SALOU
Dept. Informatique

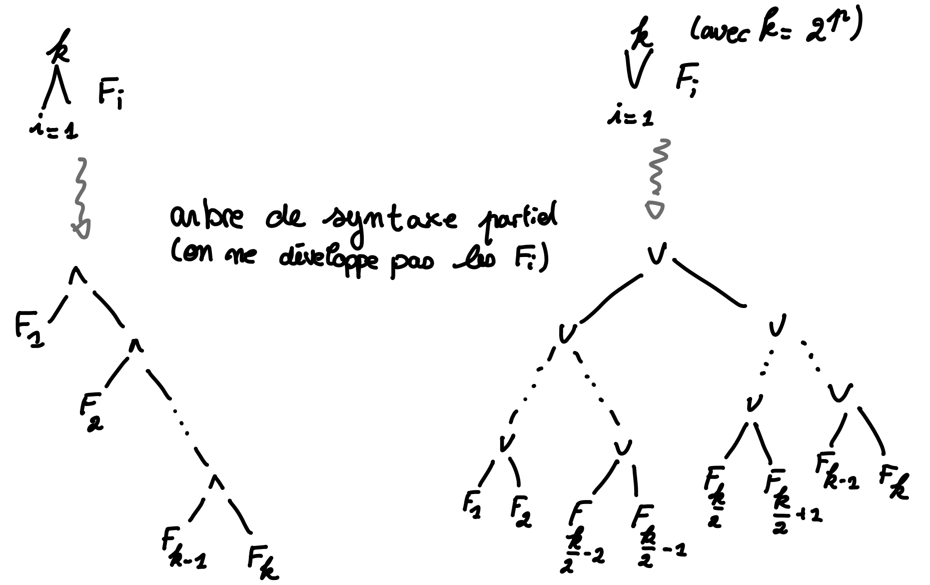
Devoir Maison n° 1
Logique

Exercice 1. Complétude du calcul propositionnel.

Avant de commencer, fixons quelques conventions. Les opérateurs $\wedge$ et $\vee$ sont fondamentalement binaires. L'opérateur n-aire $\bigwedge$ est défini par :

$$\bigwedge_{i=1}^{k} F_i := F_1 \wedge (F_2 \wedge (\dots (F_{k-1} \wedge F_k)\dots)).$$

L'opérateur 2^n-aire $\bigvee$ est défini de telle sorte que l'arbre de syntaxe (partiel) soit binaire complet.



$\Rightarrow$ peigne binaire $\qquad\qquad$ $\Rightarrow$ complet binaire.

La convention pour $\bigvee$ peut sembler trop restrictive mais on ne l'utilise qu'en "résultat intermédiaire" ; il n'y a pas de $\bigvee$ dans l'énoncé du théorème de complétude.

On ajoute également une règle dérivable, t.e. :

$$\frac{}{\Gamma \vdash F \vee \neg F}\ \text{t.e.}$$

On peut le faire car il suffirait de remplacer une utilisation de cette règle par le morceau d'arbre ci-dessous :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F,\neg(F\vee\neg F)\vdash F}\,ax}{F,\neg(F\vee\neg F)\vdash F\vee\neg F}\,\vee_i^g \qquad \dfrac{}{F,\neg(F\vee\neg F)\vdash\neg(F\vee\neg F)}\,ax}{F,\neg(F\vee\neg F)\vdash\bot}\,\neg e}{\neg(F\vee\neg F)\vdash\neg F}\,\neg i}{\neg(F\vee\neg F)\vdash F\vee\neg F}\,\vee_i^d \qquad \dfrac{}{\neg(F\vee\neg F)\vdash\neg(F\vee\neg F)}\,ax}{\neg(F\vee\neg F)\vdash\bot}\,\neg e}{\vdash F\vee\neg F}\,\bot_c}{\Gamma\vdash F\vee\neg F.}\,aff$$

On ajoute aussi une famille de règles correspondant à l'une des lois de De Morgan mais avec un " $\bigvee$. " On peut le faire car, par la suite, on n'utilisera qu'un nombre fini de règles.

$$\dfrac{\Gamma\vdash(\bigvee E)\wedge F}{\Gamma\vdash\bigvee\{H\wedge F \mid H\in E\}}\,dm_n \qquad \text{où } \#E = 2^n$$

Construisons la dérivation de dm_n par récurrence sur n.

- Pour $n=1$, on note $E=\{A,B\}$, et on a :

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash(A\vee B)\wedge F}{\Gamma\vdash A\vee B}\,\wedge_e^g \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma,A\vdash A}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash(A\vee B)\wedge F}{\Gamma,A\vdash(A\vee B)\wedge F}\,aff}{\Gamma,A\vdash F}\,\wedge_e^d}{\Gamma,A\vdash A\wedge F}\,\wedge_i}{\Gamma,A\vdash(A\wedge F)\vee(B\wedge F)}\,\vee_i^g \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma,B\vdash B}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash(A\vee B)\wedge F}{\Gamma,B\vdash(A\vee B)\wedge F}\,aff}{\Gamma,B\vdash F}\,\wedge_e^d}{\Gamma,B\vdash B\wedge F}\,\wedge_i}{\Gamma,A\vdash(A\wedge F)\vee(B\wedge F)}\,\vee_i^d}{\Gamma\vdash(A\wedge F)\vee(B\wedge F)}\,\vee_e$$

- Pour $n>1$, on écrit $E =: E_1 \sqcup E_2$, et on a :

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash(\bigvee E_1\vee E_2)\wedge F}{\Gamma\vdash\bigvee E_1\vee\bigvee E_2}\,\wedge^g \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma,\bigvee E_1\vdash\bigvee E_1}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash(\bigvee E_1\vee\bigvee E_2)\wedge F}{\Gamma\vdash F}\,\wedge_i^d}{\Gamma,E_1\vdash F}\,aff}{\Gamma,\bigvee E_1\vdash(\bigvee E_1)\wedge F}\,\wedge_i}{\Gamma,\bigvee E_1\vdash\bigvee\{H\wedge F\mid H\in E_1\}}\,dm_{n-1}}{\Gamma,\bigvee E_1\vdash\bigvee\{H\wedge F\mid H\in E_1\}\vee\bigvee\{H\wedge F\mid H\in E_2\}}\,\vee_i^g \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma,\bigvee E_2\vdash\bigvee E_2}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash(\bigvee E_1\vee\bigvee E_2)\wedge F}{\Gamma\vdash F}\,\wedge_i^d}{\Gamma,E_2\vdash F}\,aff}{\Gamma,\bigvee E_2\vdash(\bigvee E_2)\wedge F}\,\wedge_i}{\Gamma,\bigvee E_2\vdash\bigvee\{H\wedge F\mid H\in E_2\}}\,dm_{n-1}}{\Gamma,\bigvee E_2\vdash\bigvee\{H\wedge F\mid H\in E_1\}\vee\bigvee\{H\wedge F\mid H\in E_2\}}\,\vee_i^d}{\Gamma\vdash\bigvee\{H\wedge F\mid H\in E_1\}\vee\bigvee\{H\wedge F\mid H\in E_2\}}\,\vee_e$$

Par la suite, on omettera l'indice n dans dm_n.

Q1. Par récurrence sur n, montrons $\vdash \bigvee\{\varphi(v) \mid v \in \{0,1\}^{\{X_1, \dots, X_n\}}\}$.

- Pour $n=1$, on a :

$$\dfrac{}{\vdash X_1 \vee \neg X_1}\,\mathrm{te}$$

- Pour $n>1$, on note $\mathcal{V}' := \mathcal{V} \setminus \{X_n\}$, et on a :

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash X_n \vee \neg X_n}\,\mathrm{te} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{par hyp. de récurrence}\\ \vdash \bigvee\{\varphi(v) \mid v \text{ val° sur } \mathcal{V}'\}\end{array}}{X_n \vdash \bigvee\{\varphi(v) \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}'}\}}\,\mathrm{aff} \quad \dfrac{}{X_n \vdash X_n}\,\mathrm{ax}}{X_n \vdash (\bigvee\{\varphi(v) \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}'}\}) \wedge X_n}\,\wedge_i}{X_n \vdash \bigvee\{\varphi(v) \wedge X_n \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}'}\}}\,\mathrm{dm}}{X_n \vdash \bigvee\{\varphi(v) \wedge X_n \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}'}\} \vee \bigvee\{\varphi(v) \wedge \neg X_n \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}'}\}}\,\vee_i^g \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{par hyp. de récurrence}\\ \vdash \bigvee\{\varphi(v) \mid v \text{ val° sur } \mathcal{V}'\}\end{array}}{\neg X_n \vdash \bigvee\{\varphi(v) \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}'}\}}\,\mathrm{aff} \quad \dfrac{}{\neg X_n \vdash \neg X_n}\,\mathrm{ax}}{\neg X_n \vdash (\bigvee\{\varphi(v) \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}'}\}) \wedge \neg X_n}\,\wedge_i}{\neg X_n \vdash \bigvee\{\varphi(v) \wedge \neg X_n \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}'}\}}\,\mathrm{dm}}{\neg X_n \vdash \bigvee\{\varphi(v) \wedge X_n \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}'}\} \vee \bigvee\{\varphi(v) \wedge \neg X_n \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}'}\}}\,\vee_i^d}{\vdash \bigvee\{\varphi(v) \wedge X_n \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}'}\} \vee \bigvee\{\varphi(v) \wedge \neg X_n \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}'}\}}\,\vee_e$$

Q2. On procède par induction sur $F \in \mathcal{F}$, pour montrer que :

$\forall v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}}$,
- si $v(F) = 1$ alors $\varphi(v) \vdash F$
- si $v(F) = 0$ alors $\varphi(v) \vdash \neg F$.

On a 5 cas.

- Cas 1 : $F = G \wedge H$. Soit v une valuation.

  → Si $v(F) = 1$, alors $v(G) = v(H) = 1$ et donc $\varphi(v) \vdash G$ et $\varphi(v) \vdash H$. Et, on a :

$$\dfrac{\varphi(v) \vdash G \quad \varphi(v) \vdash H}{\varphi(v) \vdash G \wedge H}\,\wedge_i$$

  → Si $v(G) = 0$, alors $\varphi(v) \vdash \neg G$ et on a :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{G \wedge H, \varphi(v) \vdash G \wedge H}\,\mathrm{ax}}{G \wedge H, \varphi(v) \vdash G}\,\wedge_e^g \quad \dfrac{\varphi(v) \vdash \neg G}{G \wedge H, \varphi(v) \vdash \neg G}\,\mathrm{aff}}{G \wedge H, \varphi(v) \vdash \bot}\,\neg_e}{\varphi(v) \vdash \neg(G \wedge H)}\,\neg_i$$

  → Si $v(H) = 0$, alors $\varphi(v) \vdash \neg H$ et on a :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{G \wedge H, \varphi(v) \vdash G \wedge H}\,\mathrm{ax}}{G \wedge H, \varphi(v) \vdash H}\,\wedge_e^d \quad \dfrac{\varphi(v) \vdash \neg H}{G \wedge H, \varphi(v) \vdash \neg H}\,\mathrm{aff}}{G \wedge H, \varphi(v) \vdash \bot}\,\neg_e}{\varphi(v) \vdash \neg(G \wedge H)}\,\neg_i$$

- Cas 2 : $F = G \to H$. Soit v une valuation sur V.

  → si $v(G) = 0$, alors $\varphi(v) \vdash \neg G$ et on a :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi(v), G \vdash G}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\varphi(v) \vdash \neg G}{\varphi(v), G \vdash \neg G}\,\text{aff}}{\dfrac{\varphi(v), G \vdash \bot}{\varphi(v), G \vdash H}\,\bot_i}}{\varphi(v) \vdash G \to H}$$

  → Si $v(H) = 1$, alors $\varphi(v) \vdash H$ et on a :

$$\dfrac{\dfrac{\varphi(v) \vdash H}{\varphi(v), G \vdash H}\,\text{aff}}{\varphi(v) \vdash G \to H}\,\to_i$$

  → Si $v(G) = 1$ et $v(H) = 0$, alors

  $\varphi(v) \vdash G$ et $\varphi(v) \vdash \neg H$.

  Et, on a :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi(v), G \to H \vdash G \to H}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\varphi(v) \vdash G}{\varphi(v), G \to H \vdash G}\,\text{aff}}{\varphi(v), G \to H \vdash H}\,\to_e \qquad \dfrac{\varphi(v) \vdash \neg H}{\varphi(v), G \to H \vdash \neg H}\,\text{aff}}{\varphi(v), G \to H \vdash \bot}\,\neg_e}{\varphi(v) \vdash \neg(G \to H)}\,\neg_i$$

- Cas 3 : $F = \neg G$. Soit v une valuation.

  → Si $v(F) = 1$ alors $v(G) = 0$ et donc $\varphi(v) \vdash \underbrace{\neg G}_{F}$.

  → Si $v(F) = 0$ alors $\varphi(v) \vdash G$ et on a :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi(v) \vdash G}{\varphi(v), \neg G \vdash G}\,\text{aff} \qquad \dfrac{}{\varphi(v), \neg G \vdash \neg G}\,\text{ax}}{\varphi(v), \neg G \vdash \bot}\,\neg_e}{\varphi(v) \vdash \underbrace{\neg\neg G}_{F}}\,\neg_i$$

- Cas 4 : $F = G \vee H$. Soit v une valuation.

  → Si $v(G) = 1$ alors $\varphi(v) \vdash G$, et on a :

$$\dfrac{\varphi(v) \vdash G}{\varphi(v) \vdash G \vee H}\,\vee_i^g$$

  → Si $v(H) = 1$ alors $\varphi(v) \vdash H$ et on a :

$$\dfrac{\varphi(v) \vdash H}{\varphi(v) \vdash G \vee H}$$

  → Si $v(G) = 0$ et $v(H) = 0$

  alors $\varphi(v) \vdash \neg G$ et $\varphi(v) \vdash \neg H$. Et, on a :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi(v), G \vee H \vdash G \vee H}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\varphi(v), G\vee H, G \vdash G}\,\text{ax} \quad \dfrac{\varphi(v) \vdash \neg G}{\varphi(v), G \vee H, G \vdash \neg G}\,\text{aff}}{\varphi(v), G \vee H, G \vdash \bot}\,\neg_e \qquad \dfrac{\dfrac{}{\varphi(v), G\vee H, H \vdash H}\,\text{ax} \quad \dfrac{\varphi(v) \vdash \neg H}{\varphi(v), G \vee H, H \vdash \neg H}\,\text{aff}}{\varphi(v), G \vee H, H \vdash \bot}\,\neg_e}{\varphi(v), G \vee H \vdash \bot}\,\vee_e}{\varphi(v) \vdash \neg(G \vee H)}\,\neg_i$$

- Cas 5 : $F = X_i$ avec $i \in [\![1, n]\!]$. Soit v une valuation.

  On a :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\bigwedge_{j=1}^{n} \varepsilon_j X_j \vdash \bigwedge_{j=1}^{n} \varepsilon_j X_j}\,\text{ax}}{\vdots}\,\wedge_e^d}{\bigwedge_{j=1}^{n} \varepsilon_j X_j \vdash \bigwedge_{j=i-1}^{n} \varepsilon_j X_j}\,\wedge_e^d}{\bigwedge_{j=1}^{n} \varepsilon_j X_j \vdash \varepsilon_i X_i \wedge \bigwedge_{j=i}^{n} \varepsilon_j X_j}\,\wedge_e^d}{\bigwedge_{j=1}^{n} \varepsilon_j X_j \vdash \varepsilon_i X_i .}\,\wedge_e^g
$$

On utilise $i-1$ fois la règle $\wedge_e^d$

Ceci conclut l'induction.

Q3.

Montrons, par induction sur l'arbre de syntaxe (partiel) de $\bigvee\{\varphi(v) \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}}\}$, que

$$\bigvee\{\varphi(v) \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}}\} \vdash F.$$

- Cas de base :

Par Q2, comme $v_1(F) = v_2(F) = 1$

$$
\dfrac{\dfrac{}{\varphi(v_1)\vee\varphi(v_2) \vdash \varphi(v_1)\vee\varphi(v_2)}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\varphi(v_1) \vdash F}{\varphi(v_1)\vee\varphi(v_2), \varphi(v_1) \vdash F}\,\text{aff} \qquad \dfrac{\varphi(v_2) \vdash F}{\varphi(v_1)\vee\varphi(v_2), \varphi(v_2) \vdash F}\,\text{aff}}{\varphi(v_1)\vee\varphi(v_2) \vdash F}
$$

- Cas inductif :

Par hypothèse d'induction

$$
\dfrac{\dfrac{}{\bigvee E_1 \vee \bigvee E_2 \vdash \bigvee E_1 \vee \bigvee E_2}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\bigvee E_1 \vdash F}{\bigvee E_1 \vee \bigvee E_2, \bigvee E_1 \vdash F}\,\text{aff} \qquad \dfrac{\bigvee E_2 \vdash F}{\bigvee E_1 \vee \bigvee E_2, \bigvee E_2 \vdash F}\,\text{aff}}{\bigvee E_1 \vee \bigvee E_2 \vdash F}\,\vee_e
$$

Q4.

Soit F une formule telle que $\vDash F$, i.e. une tautologie. On a :

par Q3. par Q1.

$$
\dfrac{\dfrac{\bigvee\{\varphi(v) \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}}\} \vdash F}{\vdash \bigvee\{\varphi(v) \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}}\} \to F}\,\to_i \qquad \vdash \bigvee\{\varphi(v) \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}}\}}{\vdash F}\,\to_e
$$

Ceci conclut l'exercice 1.

Exercice 2. Tuiles de Wang.

Soit Tuiles l'ensemble fini des tuiles considérées.
Soit $(p_{x,y,t})_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2,\, t\in \text{Tuiles}}$ une famille de variables propositionnelles.

Pour $x,y\in\mathbb{Z}^2$, on construit les formules :

- $A_{x,y} := \bigvee_{t\in\text{Tuiles}} \Big(\overbrace{p_{x,y,t}}^{1} \wedge \overbrace{N_{x,y,t} \wedge S_{x,y,t} \wedge E_{x,y,t} \wedge W_{x,y,t}}^{2} \wedge \overbrace{\bigwedge_{t'\neq t} \neg p_{x,y,t'}}^{3} \Big)$
- $N_{x,y,t} := \bigvee_{\substack{t'\in\text{Tuiles}\\ \mathcal{N}(t)=\mathcal{S}(t')}} p_{x,y+1,t'}$ • $S_{x,y,t} := \bigvee_{\substack{t'\in\text{Tuiles}\\ \mathcal{S}(t)=\mathcal{N}(t')}} p_{x,y-1,t'}$
- $W_{x,y,t} := \bigvee_{\substack{t'\in\text{Tuiles}\\ \mathcal{W}(t)=\mathcal{E}(t')}} p_{x-1,y,t'}$ • $E_{x,y,t} := \bigvee_{\substack{t'\in\text{Tuiles}\\ \mathcal{E}(t)=\mathcal{W}(t')}} p_{x+1,y,t'}$

où l'on note, pour $t=(N,W,S,E)\in\text{Tuiles}$,
- $\mathcal{N}(t) := N$
- $\mathcal{W}(t) := W$
- $\mathcal{S}(t) := S$
- $\mathcal{E}(t) := E$

On pose $\mathcal{P} := \{ p_{x,y,t} \mid x,y\in\mathbb{Z},\, t\in\text{Tuiles} \}$.

On numérote les tuiles : $\text{Tuiles} = \{ t_i \mid i\in [\![1,n]\!] \}$ avec $n = \#\text{Tuiles}$.

On pose $\mathcal{A} := \{ A_{x,y} \mid x,y\in\mathbb{Z}^2 \}$; c'est un ensemble de formules finies.

Par le théorème de compacité, on a :

$\mathcal{A}$ satisfiable ssi $\mathcal{A}$ finiment satisfiable.

Et, par construction, on a que $\mathcal{A}$ satisfiable ssi Tuiles pave le plan.
En effet, le pavage associé est :

$q : \mathbb{Z}^2 \to \text{Tuiles}$

$x,y \mapsto$ l'unique t tel que $v(p_{x,y,t}) = 1$

où v est la valuation.

$\left.\begin{array}{l} \to \text{existence par } 1 \\ \to \text{unicité par } 3 \\ \to \text{respecte la condition de pavage par } 2 \end{array}\right\} (*)$

Réciproquement, si $q : \mathbb{Z}^2 \to \text{Tuiles}$ est un pavage, on construit :

$$\begin{aligned} v : \mathcal{P} &\to \{0,1\} \\ p_{x,y,t} &\mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } q(x,y) = t \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

La valuation v, ainsi construite, satisfait $\mathcal{A}$.

De plus, on a que $\mathcal{A}$ est finiement satisfiable ssi toute partie finie du plan peut être pavée par Tuiles.

En effet, si $\mathcal{A}' \subseteq_{finie} \mathcal{A}$ alors on peut paver

$$P := \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid A_{x,y} \in \mathcal{A}'\} \subseteq_{finie} \mathbb{Z}^2 \qquad (**)$$

avec

$$\begin{aligned} q : P &\to \text{Tuiles} \\ (x,y) &\mapsto \text{l'unique } t \in \text{Tuiles telle que } v(p_{x,y,t}) = 1. \end{aligned}$$

comme pour $(*)$

où v est la valuation.

Réciproquement, si Tuiles pave $P \subseteq_{finie} \mathbb{Z}^2$ alors la valuation

$$\begin{aligned} v : \mathcal{P} &\to \{0,1\} \\ p_{x,y,t} &\mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } (x,y) \notin P \\ 1 \text{ si } (x,y) \in P \text{ et } q(x,y) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

satisfait

$$\{A_{x,y} \mid (x,y) \in P\} \subseteq_{finie} \mathcal{A} \qquad (***)$$

où q est le pavage considéré.

Finalement, on a que toutes les parties finies de $\mathcal{A}$ sont

(pour un certain P)

de la forme (***) et toutes les parties finies de $\mathbb{Z}^2$ sont de la forme (**).

(pour un certain ct')

En conclusion : un ensemble fini de tuiles pave le plan ssi il pave toute partie finie du plan.

Ceci conclut l'exercice 2.