Probabilités

TD n° 4

Hugo SACCU.

Exercice 1. Running Time.

Q1. Soit $X_n \sim \mathcal{U}(\{0,1\}^n)$. On a : $\mathbb{E}[T(X_n)] \leq k \cdot n^2$ avec k fixé.

D'après l'inégalité de Markov :
$$P(T(X_n) \geq n^2 f(n)) \leq \frac{\mathbb{E}[T(X_n)]}{n^2 f(n)} = \frac{k}{f(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Q2. Notons $T_{max} = \max_{\omega \in \Omega} T(\omega)$.

$$k n^2 \geq \mathbb{E}[T] = \sum_{\omega \in \Omega} T(\omega) \, 1/2^n \geq T_{max} \frac{1}{2^n}$$

D'où $T_{max} \leq k \cdot n^2 2^n$. On conclut que $T_{max} = O(n^2 2^n)$.

Exercice 2. Coquilles dans un TD

Q1. Notons N le temps de relecture pour enlever les 4 coquilles. et N_i pour la i-ème coquille.

$N_i \sim \mathcal{G}(1/3)$ et $N = \max(N_1, N_2, N_3, N_4)$.

$$\mathbb{P}(N \leq n) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indépendance}}}{\prod_{i=1}^{4} \mathbb{P}(N_i \leq n)} = \prod_{i=1}^{4} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_i = k)$$

$$= \prod_{i=1}^{4} \sum \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{1}{3}$$

$$= \prod_{i=1}^{4} \cancel{\frac{1}{3}} \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1/3}$$

$$= \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^4$$

Avec $n = 10$, on a $\mathbb{P}(N \leq 10) \approx 0,9$.

Q2. Le problème du collectionneur de vignettes, mais, à chaque étape, on peut corriger plusieurs coquilles, alors qu'on ne peut avoir qu'un magnet.

Q3.. D'après Tchebychev,

$$\mathbb{P}(10-n < X < 10+n) = 1 - \mathbb{P}(|X-\mu| \geq n) \leq 1-\frac{\sigma^2}{n^2}$$

On a bien le résultat demandé pour $n \geq 5$.

Exercice 3. Tester la pièce.

On lance n fois la pièce. Le nombre de "Pile"s est $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

$$\mathbb{E}[X] = n \cdot p \qquad Var[X] = np(1-p)$$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq n/10) \leq \frac{Var[X]}{(n/10)^2} = \frac{p(1-p)}{n/100} \leq \frac{25}{n}$$

Pour avoir une probabilité d'au moins 0,9, il faut

$$0,9 \leq 1 - 25/n \iff 25/n \leq 0,1 \iff n \geq 250$$

Exercice 4. Comparer Markov, Tchebychev et Chernoff.

$$X \sim \mathcal{B}(n, 1/6) \qquad \mathbb{E}[X] = n/6 \qquad Var[X] = 5n/36.$$

Markov : $\mathbb{P}(X \geq n/4) \leq \frac{n/6}{n/4} = \frac{4}{6}$

Tchebychev : $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \leq n/12) \leq \frac{5n/36}{(n/12)^2} = \frac{144 \times 5}{36} \times \frac{1}{n} = 20/n$

Chernoff : $\mathbb{P}(X \leq (1+\frac{1}{2})\mathbb{E}[X]) \leq \exp\left(-\frac{1/4}{5/2}\frac{n}{6}\right) = \exp(-\frac{n}{60})$.

Exercice 5. Chernoff Bound Interval.

Q1. On a : $\mathbb{E}[e^{\lambda Y}] = (1-p) + p e^{\lambda}$

$= 1 - \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X] e^{\lambda}$

Convexité de $\exp(\lambda -)$ et croissance de $\mathbb{E}[-]$

$= \mathbb{E}[(1-X)e^{0} + e^{\lambda}X]$

$\geq \mathbb{E}[e^{\lambda X + (1-X)\cdot 0}] \geq \mathbb{E}[e^{\lambda X}]$

Q2. Pour $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq (1+\varepsilon)\mu) = \mathbb{P}(e^{\lambda X} \geq e^{\lambda\mu(1+\varepsilon)})$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda X}]}{e^{\lambda\mu(1+\varepsilon)}}$$

Par inégalité de Markov

De plus, $\mathbb{E}[e^{\lambda X}] = \mathbb{E}[e^{\lambda(X_1 + \dots + X_n)}]$

$$= \prod \mathbb{E}[e^{\lambda X_i}]$$

$$= e^{\sum p_i(e^{\lambda}-1)}$$

En effet,

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X_i}] \leq (1-p_i) + p_i e^{\lambda}$$

$$= 1 + p_i(e^{\lambda}-1)$$

$$\leq e^{p_i(e^{\lambda}-1)}$$

D'où, $\mathbb{P}(X \geq (1+\varepsilon)\mu) \leq \dfrac{e^{\mu(e^{\lambda}-1)}}{e^{\lambda\mu(1+\varepsilon)}}$ où $\lambda = \ln(1+\varepsilon)$.

Exercice 6. Fonction génératrice

1) $G_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \, \mathbb{P}(X=n)$

$$G'_X(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \, z^{n-1} \, \mathbb{P}(X=n) \implies \mathbb{E}[X] = G'_X(1)$$

$$G''_X(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) z^{n-2} \, \mathbb{P}(X=n)$$

$$\mathrm{Var}[X] = G''_X(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$$

Q2. $G_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \, \mathscr{C}(\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}$

$$= \mathscr{C}(\lambda) \exp(\lambda z)$$

Q3. $G_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = 1$

d'où $\mathscr{C}(\lambda)\exp(\lambda) = 1$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

On en déduit $\mathscr{C}(\lambda) = \exp(-\lambda)$.

Q4. $G_X(z) = \exp(\lambda(z-1))$

$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = \lambda e^{-\lambda} . e^{\lambda} = \lambda$

$$\mathrm{Var}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$$
$$= \lambda^2 \cancel{e^{-\lambda} e^{\lambda}} \quad \lambda \quad - \lambda^2$$
$$= \lambda$$

Q5. $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \, \mathbb{P}(X=k)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} z^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$= (pz + 1 - p)^n$$

$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = np(p+1-p)^{n-1}$
$= np$

$\mathrm{Var}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$

$= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2$
$= p^2(\cancel{n^2} - n - \cancel{n^2}) + np$
$= np(1-p)$.

Q6. $G_S(z) = \mathbb{E}[z^S] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}[z^S \mid N=n] \cdot \mathbb{P}(N=n)$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[z^{X_1+\dots+X_n}] \cdot \mathbb{P}(N=n) + \mathbb{P}(N=0)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[z^{X_1} \times \dots \times z^{X_n}] \cdot \mathbb{P}(N=n) + \mathbb{P}(N=0)$$

car les $(X_i)_{i\geq 0}$ sont iid

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mathbb{E}[z^{X_1}]\right)^n \cdot \mathbb{P}(N=n)$$

$$= G_N(G_{X_1}(z))$$

Si $X_i \sim \mathcal{G}(q)$ et $N \sim \mathcal{G}(p)$,

$$G_N(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n\, q\,(1-q)^{n-1} = zq \sum_{n=0}^{+\infty} (1-q)^n z^n$$

$$= zq / (1-(1-q)z)$$

D'où

$$G_S(z) = \frac{pzq}{(1-(1-q)z)\left(1-(1-p)(qz/1-(1-q)z)\right)}$$

$$= \frac{pzq}{1 - z + \cancel{qz} - \cancel{qz} + pqz}$$

$$= \frac{(pq)z}{1-(1-pq)z}$$

On peut en déduire que $S \sim \mathcal{G}(pq)$.

Exercice 7. Probabilités conditionnelles.

Q1. On pose $\Omega' = \Omega \setminus Y^{-1}(\{0\})$, puis

$$X : \mathbb{N}^* \longrightarrow \Omega' \qquad \mathbb{P}' : \Omega' \longrightarrow [0,1]$$
$$n \longmapsto Y(n). \qquad \omega \longmapsto \mathbb{P}(\omega) / \mathbb{P}(Y \neq 0).$$

Q2. $\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathrm{Var}[X] \geq 0$

D'où $\mathbb{E}[X^2] \geq \mathbb{E}[X]^2$.

Q3. $\mathbb{E}[Y] = \sum_{y=0}^{+\infty} y \, P(Y=y) = \sum_{y=1}^{+\infty} \underbrace{y}_{\geq 1} \mathbb{P}(Y=y) \geq \mathbb{P}(Y \geq 1) = \mathbb{P}(Y \neq 0)$

$$\frac{\mathbb{E}[Y]^2}{\mathbb{E}[Y^2]} = \frac{\mathbb{E}[X]^2 \cdot \mathbb{P}(Y \neq 0)^{\cancel{2}}}{\mathbb{E}[X^2] \cdot \cancel{\mathbb{P}(Y \neq 0)}} \leq \mathbb{P}(Y \neq 0) \cdot \times 1$$

par Q2.

Exercice 8. Bucket Sort.

Q1. Si on reçoit $x = \overline{b_k \dots b_0}^2$, on le met dans le bucket numéroté $\overline{b_k \dots b_{k-m}}^2$ (c'est un bitshift de $k-m$).

Q2. Soit $X \sim \mathcal{U}([\![0, 2^k - 1]\!])$.
$\mathbb{P}$(On place X dans le seau i) $= 1/n$.

D'où,

$$\mathbb{P}(X_i = \ell) = \binom{n}{\ell} \left(\frac{1}{n}\right)^\ell \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-\ell}$$

C'est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/n)$.

Q3. Notons T le temps de calcul du bucketsort.

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{i=0}^{2^{k}-1} \mathbb{E}[T_i] \quad + \mathcal{O}(n)$$

$$\mathbb{E}[T_i] = \mathbb{E}[M X_i^2] = M(\mathrm{Var}[X_i] + \mathbb{E}[X_i]^2)$$
$$\leq M\left(n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{n^2}{n^2}\right) = M\,n\left[2 - 1/n\right] \leq 2Mn$$

D'où, $\mathbb{E}[T] = \mathcal{O}(n)$.

Fin du TD

TD n° 5

Exercice 1. Algorithme probabiliste pour calculer la médiane.

Q1. La partie (a) est en $O(n)$,
puis (b) en $O(n^{3/4} \underbrace{\log n}) = O(n)$,
puis (c) en $O(n)$ $\setminus O(n^{3/4})$
puis (d) en $O(n)$
et enfin (e) en $O(n^{3/4} \log n) = O(\log n)$.

D'où l'algorithme est en $O(n)$.

Q2. Erreur 1 : On a $\mathbb{E}[\text{card } F] = \sum \mathbb{E}[Y_i] = n \cdot n^{-1/4} = n^{3/4}$

Par inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\text{Var}[X]}{a^2}.$$

TD n° 6

Exercice 1. Black jack.

Loi faible des grands nombres :

Bof ...

Soit $\bar{X}$ le nombre de parties de Blackjack gagnées.

$$\mathbb{P}(|\bar{X} - 1/2| \geq 5\%) \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{n(5\%)^2} \leq \frac{1}{n\cdot(5\%)^2}$$

Pour avoir $\mathbb{P}(\text{il ne triche pas}) \geq 10\%$ il suffit d'avoir $n \geq \frac{1}{(10\%)(5\%)^2} = 4000$

D'après Chernoff,

$$\mathbb{P}(X \geq \tfrac{1}{2} + (5\%)) \leq \exp(-2(5\%)^2/n)$$

$$\exp(-2(5\%)^2/n) \leq 10\% \iff 2\cdot(5\%)^2/n \leq \ln(10)$$
$$\iff n \geq \ln(10)/(2\cdot(5\%)^2)$$

D'où $n \geq 461$. Beaucoup plus précis ...

Exercice 2. Random Algorithm.

Algorithme $\mathcal{B}$:

On lance $k(x)$ fois l'algorithme $\mathcal{A}$ sur l'entrée x. On note (A_i) les résultats des exécutions de $\mathcal{A}$.

On renvoie la réponse majoritaire

Si $x \notin L$, alors on a : $\mathbb{E}[X] \leq k/3$.
Si $x \in L$, alors on a : $\mathbb{E}[X] \geq 3k/4$.

Par inégalité de Chernoff, on a:

- si $x \notin L$, alors

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}(x) = 1) = \mathbb{P}(X \geq k/2) \leq \exp\left(-\frac{(1/2)^2}{2+\frac{1}{2}} \cdot \frac{k}{3}\right) = \exp\left(-\frac{k}{30}\right).$$

- si $x \in L$, alors

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}(x) = 0) = \mathbb{P}(X \leq k/2) \leq \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot 9} \times \frac{3k}{4}\right) = \exp(-k/24)$$

$$\Rightarrow k = 30|x| / \log_2 e$$

Exercice 3. Intercepteurs

Partie I.

Q1 On pose $Y := \mathbb{1}_{X \geq 1/4}$. On a:

$$1 = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[XY] + \underbrace{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{X \leq 1/4}]}_{\leq 1/4}$$

d'où

$$\sqrt{3\,\underbrace{\mathbb{E}[Y^2]}_{= \mathbb{E}[Y] = \mathbb{P}(X \geq 1/4)}} \geq \mathbb{E}[XY] \geq \frac{3}{4}$$

D'où $\gamma = 3/16$.

Q2.
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y^2] &= \mathrm{Var}[Y] + \mathbb{E}[Y]^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum \mathrm{Var}[X_i] \qquad \text{et } \mathbb{E}[Y] = 0 \quad \text{car } \mathbb{E}[X_i] = 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y^4] &= \frac{1}{n^2}\,\mathbb{E}\left[\sum X_i X_j X_k X_l\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum \mathbb{E}[X_i X_j X_k X_l]\end{aligned}$$

Cas 1: $i \neq j, k, l$ $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[X_i X_j X_k X_l] = 0$

Cas 2 : $i = k \neq j = l \implies \mathbb{E}[X_i X_j X_k X_l] = 1$

Cas 3 : $i = j = k = l \implies \mathbb{E}[X_i X_j X_k X_l] = 1$

D'où $\mathbb{E}[Y^4] = \frac{1}{n^2}\Big(n + \underset{\substack{i=j\neq k=l \\ i=k\neq j=l \\ i=l\neq j=k}}{3} \cdot \underbrace{n(n-1)}_{\substack{\text{choix de } i \\ \text{et choix du } 2^{nd} \\ \text{indice}}}\Big) = 3 - \frac{2}{n} \leq 3.$

$\underset{\text{Q1}}{\gamma} \geq \mathbb{P}(Y^2 \geq 1/4) \overset{\text{passage à la racine}}{=} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}|X_1 + \cdots + X_n| \geq 1/2\right)$

$= \mathbb{P}(|X_1 + \cdots + X_n| \geq \sqrt{n}/2) \underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[|X_1 + \cdots + X_n|]}{\sqrt{n}/2}$

D'où, $\mathbb{E}[|X_1 + \cdots + X_n|] \geq \frac{\gamma}{2} \cdot \sqrt{n}.$

TD n° 7

Exercice 1. Graphe aléatoire biparti.

Q1 $\#E = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ j \in [\![n+1, 2n]\!]}} X_{ij}$ où les X_{ij} sont i.i.d. $\mathcal{B}(p)$

d'où $\# \sim \mathcal{B}(n^2, p)$.

Q2. $\mathbb{P}(i \text{ est un sommet isolé})$

$= \mathbb{P}(\forall j, X_{ij} = 0)$

$= \left(\prod_{j} X_{ij} \ \mathbb{P}(X_{ij} = 0) \right)$

$= (1-p)^n$

$\mathbb{E}[\text{Nombre de sommets isolés}] = \sum_i \mathbb{E}[\text{Sommet } i \text{ isolé}]$

$= \sum (1-p)^n$

$= 2n \cdot (1-p)^n$

Q3. (i)

$\mathbb{P}(H_{2n,p} \text{ a un sommet isolé}) = \mathbb{P}(\text{Nombre de sommets isolés} \geq 1)$

$\leq \mathbb{E}[\text{Nombre de sommets isolés}] / 1$

$\leq 2n(1-p)^n$

$\leq 2n e^{-np}$

$\leq 2n (n)^{-c}$

$\leq 2 \cdot n^{1-c} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

(ii)

$\mathbb{P}(H_{2n,p} \text{ a un sommet isolé})$

$= 1 - \mathbb{P}(\text{pas de sommet isolé})$

$= 1 - \mathbb{P}(N = 0)$

$= 1 - \mathbb{P}(\mathbb{E}[N] - N \geq \mathbb{E}[N])$

$= 1 - \mathrm{Var}[N] / (\mathbb{E}[N])^2$

$= 1 - \frac{\mathbb{E}[N^2] - \cancel{\mathbb{E}[N]^2}}{\mathbb{E}[N]^2}$

$= 2 - \mathbb{E}[N^2] / \mathbb{E}[N]^2$

$$= 2 - \mathbb{E}[N^2] / 4n^2 (1-p)^{2n}$$

$$\mathbb{E}[N^2] = \sum \mathbb{E}[i \text{ isolé}, j \text{ isolé}]$$

$$= \sum_{i=j} \mathbb{E}[i \text{ isolé}] + \sum_{\substack{i,j \text{ même colonne} \\ i \neq j}} \mathbb{E}[i \text{ isolé}, j \text{ isolé}] + \sum_{\substack{i,j \text{ colonnes} \\ \text{différentes}}} \mathbb{E}[i \text{ isolé}, j \text{ isolé}]$$

$$= 2n(1-p)^n + 2n(n-1)(1-p)^{2n} + 2n^2(1-p)^n(1-p)^{n-1}$$

$$= 2n(1-p)^n \left(1 + (1-p)^n (n-1) + n (1-p)^{n-1}\right)$$

D'où

$$\mathbb{E}[N^2] / \mathbb{E}[N]^2 = \frac{1}{2n(1-p)^n} \left(1 + (1-p)^n (n-1) + n(1-p)^{n-1}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2n(1-p)^n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{n-1}{2n}}_{\to 1/2} + \frac{1}{\underbrace{2(1-p)}_{\frac{n}{2c\log n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

D'où $\mathbb{P}(H_{2n,p}$ a un sommet isolé$) \longrightarrow 1$.

Q4. $\mathbb{P}(\forall v, \deg(v) \leq \frac{n}{2} + C\sqrt{n\log n})$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_v \deg(v) \geq \frac{n}{2} + C\sqrt{n\log n}\right)$$

et $\mathbb{P}\left(\bigcup_v \deg(v) \geq \frac{n}{2} + C\sqrt{n\log n}\right) \leq \sum_v \mathbb{P}\left(\deg(v) \geq \frac{n}{2} + C\sqrt{n\log n}\right)$ par borne de l'union.

Or, $\deg(v) \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ d'où par Chernoff I,

$$\mathbb{P}\left(\deg(v) \geq \frac{n}{2} + C\sqrt{n\log n}\right) \leq \exp(-2C^2 n \log n / n)$$

$$\leq n^{-2(C^2)}$$

On pose $C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, et on a :

$$\sum_v \mathbb{P}\left(\deg(v) \geq \frac{n}{2} + C\sqrt{n\log n}\right) \leq \sum n^{-(C^2)} = 2n / n^{(C^2)} = 2\, n^{1-2C^2}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

D'où $\quad \mathbb{P}\left(\forall v,\ \deg(v) \leq \frac{n}{2} + C\sqrt{n\log n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Exercice 2 $\quad K_4$.

Q1. $\mathbb{E}[X] = \sum_{\{a,b,c,d\}} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{a,b,c,d\} \text{ forme une 4 clique de } G}]$

$= \sum p^6 = \binom{n}{4} p^6$

Q2. $\mathbb{P}(X \neq 0) = \mathbb{P}(X \geq 1) \leq \mathbb{E}[X] \leq \binom{n}{4} p^6$

$\leq \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\left(o(n^{-2/3})\right)^6$

$\leq o(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Q3. $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\mathbb{E}[X] - X \leq \mathbb{E}[X])$
$\leq \mathrm{Var}[X]/\mathbb{E}[X]^2$ par inégalité de Tchebychev.

Q4. $\mathrm{Var}\left[\sum X_i\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum X_i\right)^2 - \left(\sum \mathbb{E}[X_i]\right)^2\right]$

$= \sum \mathbb{E}[X_iX_i] + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}[X_iX_j] - \sum (\mathbb{E}[X_i])^2 - \sum_{i\neq j} \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]$

$= \sum \mathbb{E}[X_i] + \sum_{i\neq j}\left(\mathbb{E}[X_iX_j] - 2\,\mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]\right)$

$- \sum (\mathbb{E}[X_i])^2$

$= \sum \mathbb{E}[X_i] + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])] - \sum (\mathbb{E}[X_i])^2$

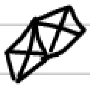
$\leq \sum \mathbb{E}[X_i] + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])]$

Q5. $\mathrm{Var}\left[\sum \mathbb{1}_{\{a,b,c,d\} \text{ forme une clique}}\right] \leq \mathbb{E}[\text{Nb de 4-clique}]$
$+ \sum_{C_1\neq C_2} \mathbb{E}\left[(\mathbb{1}_{C_1 \text{ clique}} - \mathbb{E}[C_1 \text{ clique}])(\mathbb{1}_{C_2 \text{ clique}} - \mathbb{E}[C_2 \text{ clique}])\right]$

$$\leq \binom{n}{4} p^6 + \sum_{C_1 \neq C_2} \mathbb{E}[(\mathbb{1}_{C_1 \text{ clique}} - p^6)(\mathbb{1}_{C_2 \text{ clique}} - p^6)]$$

$$\leq \binom{n}{4} p^6 + \sum_{\substack{\text{un sommet} \\ \text{entre } C_1 \neq C_2}} 0 + \sum_{\substack{\text{deux sommets} \\ \text{entre } C_1 \neq C_2}} p^{11}(1-p) + \sum_{\substack{\text{trois sommets} \\ \text{entre } C_1 \neq C_2}} p^9(1-p^3)$$

par indépendance



11 paires de sommets avec $X_{u,v} = 1$ (équivalent : une arête partagée entre C_1 et C_2)

3 arêtes partagées

$$\leq \binom{n}{4} p^6 + \binom{n}{6} p^{11}(1-p) + \binom{n}{5} p^9 (1-p^3)$$

TD n° 8

Exercice 1. Second théorème de Borel Cantelli

Q1. $\bigcap_{n} \bigcup_{k \geq n} A_k$

Q2.
$$\mathbb{P}(B_{k,\ell}) = \prod_{n=k}^{\ell} (1 - \mathbb{P}(A_n)) \leq \prod_{n=k}^{\ell} e^{-p_n}$$
$$\leq \exp\left(-\sum_{n=k}^{\ell} p_n\right) \xrightarrow[\ell \to +\infty]{} 0$$

car $\sum_{n=k}^{\ell} p_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\ell} p_n}_{\xrightarrow[\ell \to +\infty]{} +\infty} - \underbrace{\sum_{n=0}^{k-1} p_n}_{\text{fini}}$

Q3 On a : $B_k = \bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} B_{k,\ell}$, d'où

par continuité décroissante, $B_k \supseteq B_{k+1}$,

$\forall \ell, \ \mathbb{P}(B_k) \leq \mathbb{P}(B_{k,\ell})$ d'où $\mathbb{P}(B_k) \leq \lim_{\ell \to \infty} \mathbb{P}(B_{k,\ell}) = 0$

donc $\mathbb{P}(B_k) = 0$

On en conclut :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(B_k) = 0.$$

Q4. $\mathbb{P}$(une infinité de A_n se réalisent)
$$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n} \bigcup_{k \geq n} A_k\right)$$
$$= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n} \bigcap_{k \geq n} \overline{A_k}\right) = 1 \quad \text{par Q3.}$$

Q5. $\mathbb{P}(\text{une } \infty \text{té de } 1) \overset{Q4}{=} 1$ car $\sum \frac{1}{n}$ diverge

$\mathbb{P}(\text{une } \infty \text{té de } 11) = 0$ par 1er lemme de Borell Cantelli

On n'a pas besoin de l'indépendance des B_k.

Exercice 2. Condition de convergence.

Q3. $X_n \xrightarrow{ps} X \sim \mathcal{B}(p) \Leftrightarrow \mathbb{P}(\lim_n X_n = X) = 1$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(\exists k, \forall n \geq k, X_n = X) = 1$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(\forall k, \exists n \geq k, X_n \neq X) = 0$

$\Leftrightarrow \sum \left(p_n p + (1-p_n)(1-p) \right)$ converge

Q1. On a:

$$(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge en loi vers } X \sim \mathcal{B}(1-p) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(X_n = 0) \longrightarrow \mathbb{P}(X=0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \longrightarrow \mathbb{P}(X=1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow p_n \to p$ car $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = p_n$

D'où $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Longleftrightarrow p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$

Q2. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $X \sim \mathcal{B}(1-p)$.
Par Q1, on a: $p_n \to p$.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$|X_{n+1} - X_n| \leq |X_{n+1} - X| + |X_n - X|$$
et
$\forall \varepsilon > 0$, $\quad |X_n - X| \geq \varepsilon \Longrightarrow |X_n - X| + \underbrace{|X_{n+1} - X|}_{\geq 0} \geq \varepsilon$

d'où

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_{n+1} - X| + |X_n - X| \geq \varepsilon)$$
$$\leq \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Ainsi, avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X_n \neq X_{n+1}) = p_n(1 - p_{n+1}) + p_{n+1}(1 - p_n)$.

$$\downarrow$$

$$2p(1-p)$$

D'où $2p(1-p) = 0$ et $p \leq \frac{1}{2}$ d'où $p = 0$.

Réciproquement, si $p_n \to 0$ alors

$$\mathbb{P}(|X_n - 1| \geq \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon > 1 \\ p_n & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\downarrow n \to +\infty$$

$$0$$

Q3. On a :

$$\mathbb{P}(\lim X_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(\forall k, \exists n \geq k, X_n = 0)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\limsup_{n \to \infty} (X_n = 0))$$

D'où

$$X_n \xrightarrow{p.s.} 1 \iff \mathbb{P}(\limsup_{n \to \infty} (X_n = 0)) = 0$$
$$\underset{(*)}{\iff} \sum p_n \text{ converge}$$

En effet, $\overset{(*)}{\Longleftarrow}$ par Borell Cantelli

$\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ par ex 1.

Exercice 3. Convergence.

Q1. $\mathbb{P}(|X_n - 5| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\mathrm{Var}[X_n]}{\varepsilon^2} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}\,\varepsilon^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Vrai

Q2. Par le théorème central limite,

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n} - \mathbb{E}_1[X_i]\right) \leq x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi(x)$$

d'où il suffit de poser

$$C(n,x) := \left(\frac{3x}{\sqrt{n}} + 4\right)n = 3\sqrt{n}\,x + 4n$$

Q3. On pose $Y_n \sim \mathcal{B}(1/\sqrt{n})$

- $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$ donc $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$
- $Y_n \overset{P.S.}{\not\to} 0$ car $1 - Y_n \overset{P.S}{\not\to} 1$ car $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.
- $\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{P.S.} 0$ car $\left|\frac{Y_n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$.

TD 09

Exercice 1. Coloriage

Q1. On calcule

$$\mathbb{E}[\text{Nombre de triangles}] = \sum_{\substack{a,b,c\\ \text{distincts}}} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{a,b,c\} \text{ triangle}}]$$
$$= \sum_{\substack{a,b,c\\ \text{distincts}}} \mathbb{P}(\{a,b,c\} \text{ triangle})$$
$$= \sum_{\substack{a,b,c\\ \text{distincts}}} p^3$$
$$= \binom{n}{3} p^3$$

Puis, par Markov,

$$\mathbb{P}(\text{Nombre de triangles} \geq n/2) \leq \binom{n}{3} p^3 / (n/2)$$
$$\leq \frac{(n-1)(n-2)}{3} n^{3\varepsilon - 3}$$
$$\sim \frac{1}{3} n^{3\varepsilon - 1} \longrightarrow 0$$

car $\varepsilon < \frac{1}{3}$

Q2. Si on a un k-coloriage de G, au moins une des couleur a un cardinal $\geq n/k$.

Cette partie de taille $\geq n/k$ forme un ensemble indépendant.

D'où $\alpha(G) \geq n/k$ et par suite $\alpha(G) \geq n/\chi(G)$.

Q3.
$$\mathbb{P}(\alpha(G) \geq a) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\substack{X \subseteq G\\ |X|=a}} \text{"X est un indépendant"}\Big)$$
$$\leq \sum_{\substack{X \subseteq G\\ |X|=a}} \mathbb{P}(X \text{ est un indépendant})$$

$$\leq \sum_{X \in \mathcal{P}_a(G)} (1-p)^{a}$$

$$\leq \binom{n}{a} (1-p)^a$$

$$\leq n^a (1-p)^a$$

$$\leq n^a \exp(3 n^{\varepsilon - 1} . n^{1-\varepsilon} . \ln n)$$

$$\leq n^a \, n^3$$

$$\leq n^{\underbrace{3n^{1-\varepsilon} \ln n + 3}_{\to -\infty}} \longrightarrow 0$$

D'où $\mathbb{P}(\alpha(G) < a) \longrightarrow 1$

Il existe donc n, G tels que $\#V(G) = n$ et G a $\leq \frac{n}{2}$ triangles et $\alpha(G) < a$.

En effet, la probabilité de ces deux événements tend vers 1.

Q4. On a $\alpha(G) = \alpha(G')$, d'où

$$\chi(G') \geq \frac{n/2}{\alpha(G')} > \frac{n/2}{3n^{1-\varepsilon} \ln n} = \frac{n^\varepsilon}{6 \ln n}$$

Exercice 2. Un c'est bien, deux c'est mieux.

On considère une distribution uniforme sur les couples d'étudiant·es (avec remise). Soient $u, v \in [\![1, 200]\!]$.

On note U_i (resp. V_i) l'événement "l'étudiant·e u a bien répondu à la question i."

$\mathbb{P}(\overline{U_i}) \leq 2/5$, $\mathbb{P}(\overline{V_i} \mid \overline{U_i}) \leq 79/199$, $\mathbb{P}(\overline{U_i} \cap \overline{V_i}) \leq \frac{4}{25}$.

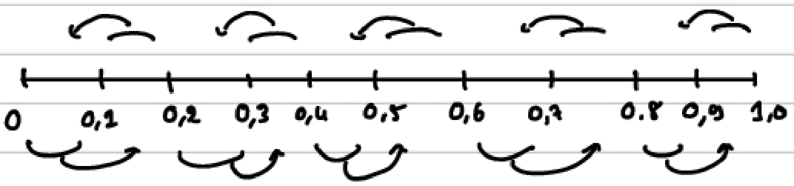
Par union, $\mathbb{P}(\text{il existe } i,\ \overline{U_i} \cap \overline{V_i}) \leq 6 \cdot 4/25 = 24/25 < 1$.

D'où il existe deux étudiants qui réussissent à eux deux.

Exercice 3. Union d'intervalles

Soit $X \sim \mathcal{U}(0,1)$. On pose $Y = \begin{cases} X + 0,1 & \text{si } \lfloor 10X \rfloor \text{ pair} \\ X - 0,1 & \text{sinon} \end{cases}$.

On a que $Y \sim \mathcal{U}(0,1)$ et $|X - Y| = 0,1$.



$\mathbb{P}(X \notin S \text{ ou } Y \notin S) \leq 2(1 - \text{longueur}(S)) < 1$

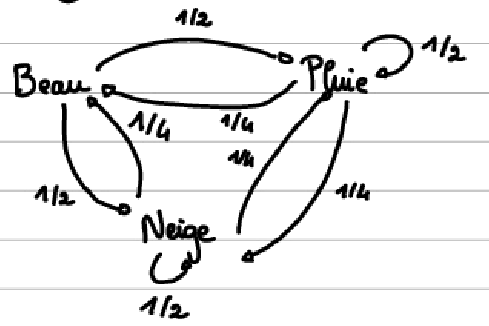
Exercice 4. Un problème complexe.

$$|P(z)|^2 = (z^2 + az + b)\overline{(z^2 + az + b)}$$
$$= |z|^4 + |z|^2(\overline{az} + az) + |az|^2 + b\bar{z}^2 + \bar{b}z^2 + \cdots$$

TD n° 10

Exercice 3. Metro

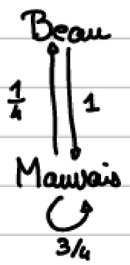
Q1.



$$Q := \begin{array}{c|c} \begin{matrix} B & P & N \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} B \\ P \\ N \end{matrix} \end{array}$$

Q2. On calcule $(1\ 0\ 0)Q^2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right)$. Il est donc plus probable qu'il ne fasse pas beau (équiprobable pluie/neige).

Q3.

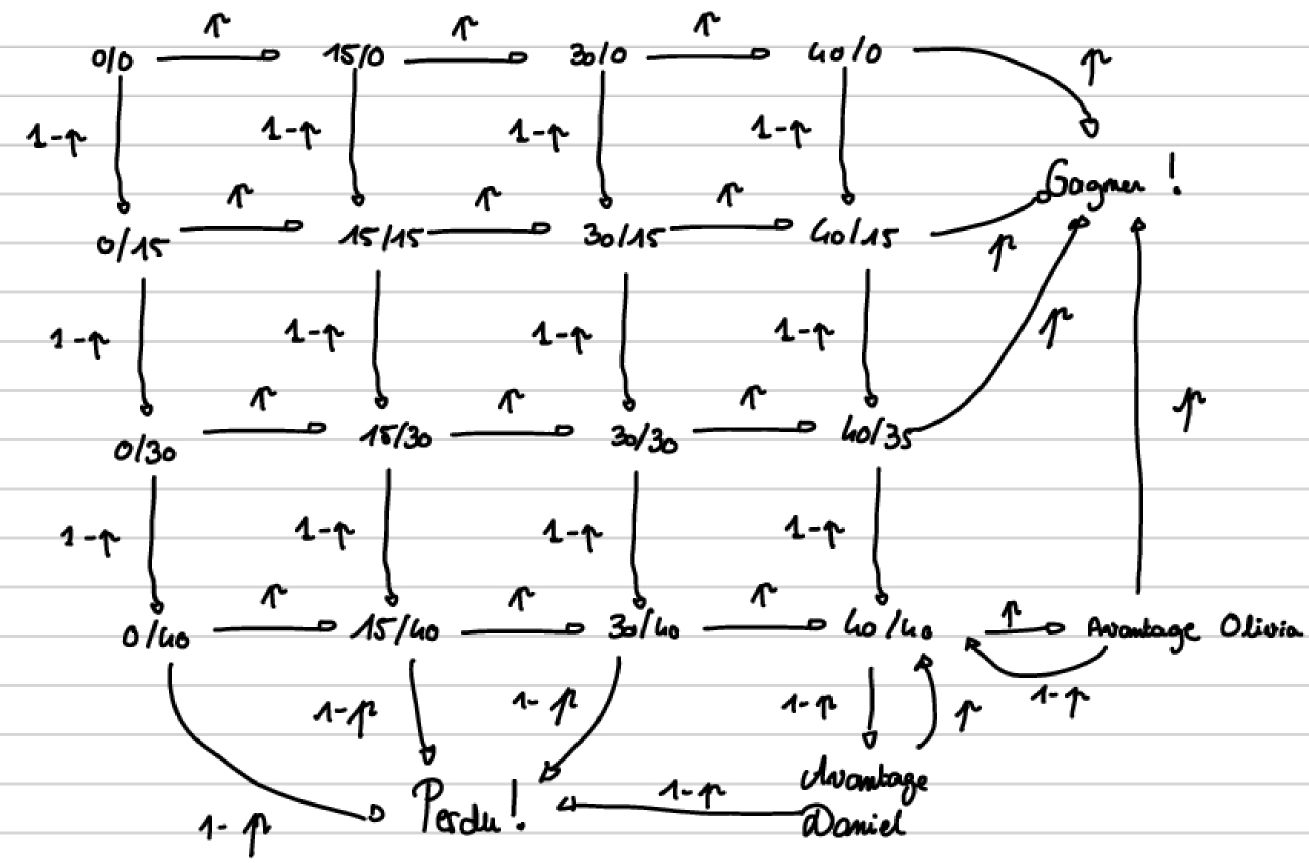


Matrice :

$$Q' := \begin{array}{c|c} \begin{matrix} B & M \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & 3/4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} B \\ M \end{matrix} \end{array}$$

Exercice 4. Tennis

Q1.



Exercice 5. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ biaisée.

Q1. Non : $P(0, 2) = 0$.

Q2. Traitons $P(\cdot,\cdot)$ comme une matrice.

Montrons que $\sum_{n \in \mathbb{N}} P^n(i,i)$ est finie pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Or, $P^n(i,j) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ où $k = (n+j-i)/2$

$k = \#$ pas à droite pour $i \to j$

D'où

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} P^n(i,i) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \text{ pair}}} \binom{n}{n/2} p^{n/2} (1-p)^{n/2}$$

Or, $\binom{n}{n/2} p^{n/2}(1-p)^{n/2} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}}{\pi n} \times \frac{1}{2^n} p^{n/2}(1-p)^{n/2}$

$$\sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^{n/2} \cdot \left(\frac{1-p}{2}\right)^{n/2} < \left(\frac{p}{2}\right)^n$$

D'où $\sum_{n \in \mathbb{N}} P^n(i,i)$ converge pour tout i. D'où, par Borel Cantelli, si $p \neq 1/2$ l'état i n'est pas transcient pour tout i.