1 Introduction.

Étant donnée une formule logique φ, comment montrer qu'elle est tautologique (*i.e.* toujours vraie) ? Comment montrer $\models \varphi$?

1. On *brute force* toutes les combinaisons possibles des variables, c'est-à-dire on teste les $2^{|\text{vars}\,\varphi|}$ valuations et on vérifie que l'on ait $v(\varphi) = \textsc{Vrai}$ pour toute valuation v. C'est l'équivalent de construire une table de vérité pour φ.
2. On calcule $v(\varphi)$ de manière symbolique et on essaie de simplifier les termes. Ceci implique de savoir factoriser/développer de manière astucieuse.
3. On réalise un raisonnement plus mathématique avec des « montrons », des « supposons », *etc.*

La déduction naturelle, et les preuves formelles, c'est ce dernier point.

Voici un exemple de raisonnement formel pour montrer

$$\varphi := \big((p \to q) \land (q \to r)\big) \to (p \to r).$$

Exemple 1. Montrons $\big((p \to q) \land (q \to r)\big) \to (p \to r)$.

$\hookrightarrow$ Supposons $(p \to q) \land (q \to r)$, et montrons $p \to r$.

- $\hookrightarrow$ Supposons p, et montrons r.
  - $\hookrightarrow$ Montrons q.
    - $\hookrightarrow$ Montrons p. C'est vrai par hypothèse.
    - $\hookrightarrow$ Montrons $p \to q$. C'est vrai par hypothèse.
  - $\hookrightarrow$ Montrons $q \to r$. C'est vrai par hypothèse.

On voit une structure arborescente de la preuve : on a des cas, des sous-cas, des sous-sous-cas, *etc.* Seules deux types d'informations nous intéressent : les *hypothèses courantes* et l'*objectif de preuve*. Ces deux informations changent au cours de la preuve. Localement, on a supposé p, mais ce n'est pas le cas dans le cas général. Les hypothèses sont donc locales.

Définition 1. Un *séquent*, noté $\Gamma \vdash \varphi$, est la donnée d'un ensemble d'hypothèses Γ et d'un objectif de preuve φ.

L'ensemble Γ est généralement écrit sous forme de liste mais c'est bien un ensemble.

Avec une écriture en séquent, on obtient une preuve comme celle ci-dessous.

Exemple 2. $\vdash \big((p \to q) \land (q \to r)\big) \to (p \to r)$

$\hookrightarrow (p \to q) \land (q \to r) \vdash p \to r$

$\quad\hookrightarrow (p \to q) \land (q \to r), p \vdash r$

$\quad\quad\hookrightarrow (p \to q) \land (q \to r), p \vdash q$

$\quad\quad\quad\hookrightarrow (p \to q) \land (q \to r), p \vdash p$, hyp.

$\quad\quad\quad\hookrightarrow (p \to q) \land (q \to r), p \vdash p \to q$, hyp.

$\quad\quad\hookrightarrow (p \to q) \land (q \to r), p \vdash q \to r$, hyp.

Pour faire mieux « ressortir » la structure d'arbre, on peut l'écrire comme ci-dessous. L'arbre est à l'envers, avec la racine en bas (en dépit de ce que disent les biologistes).

On va d'abord définir formellement le « format » de l'arbre avant de montrer quelques exemples.

2 Définitions formelles.

Définition 2. Une *règle (de construction) de preuves* est de la forme

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \qquad \Gamma_2 \vdash \varphi_2 \qquad \cdots \qquad \Gamma_n \vdash \varphi_n}{\Gamma \vdash \varphi}\ \textsf{nom}\ .$$

Ce qu'il y a au dessus de la barre est appelé *prémisses*. Ce qu'il y a en dessous, c'est la *conclusion*.

On peut avoir $n = 0$, on l'écrira comme

$$\frac{}{\Gamma \vdash \varphi}\,\textsf{nom}\,.$$

On appelle cela une *règle de base.*

Un ensemble de règles de preuves est appelé *système de preuves.* La déduction naturelle est un exemple de système de preuves, mais ce n'est pas le seul, il en existe d'autre.

Les règles de constructions, ce sont les nœuds (internes et feuilles) de notre arbre de preuve. Les règles de base, ce sont les feuilles.

L'idée c'est que les $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ sont les prémisses d'une règle, mais chaque prémisse est conclusion d'une autre règle. En gros, on peut coller les règles entre-elles pour former un arbre de preuve.

Définition 3. Un *arbre de preuve* est un arbre étiqueté par des séquents, et dont le lien parent-enfants est fait par une règle du système de preuve.

Si $\Gamma \vdash \varphi$ est la racine d'un arbre de preuve, alors on dit qu'il est *prouvable.* (On pourra parfois le noter $\Gamma \vdash \varphi$ comme si c'était une propriété mathématique et non un coupe).

3 Déduction naturelle intuitionniste.

Le système de preuves classique est appelé la *déduction naturelle.* Il existe en réalité deux versions de ce système, la version *intuitionniste* et la version *classique* :

$$\text{déduction naturelle intuitionniste} \subsetneq \text{déduction naturelle classique.}$$

L'inclusion stricte ci-dessous a deux sens :

- les règles intuitionnistes sont strictement inclues dans les règles classiques ;
- les résultats prouvables en intuitionniste sont strictement inclus dans les résultats prouvables en classique.

Symbole	Règle(s) d'introduction	Règle(s) d'élimination
$\top$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top_{\mathsf{i}}$	
$\bot$		$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash G}\ \bot_{\mathsf{e}}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma, G \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg G}\ \neg_{\mathsf{i}}$	$\dfrac{\Gamma \vdash G \quad \Gamma \vdash \neg G}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg_{\mathsf{e}}$
$\rightarrow$	$\dfrac{\Gamma, G \vdash H}{\Gamma \vdash G \rightarrow H}\ \rightarrow_{\mathsf{i}}$	$\dfrac{\Gamma \vdash H \rightarrow G \quad \Gamma \vdash H}{\Gamma \vdash G}\ \rightarrow_{\mathsf{e}}$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash G \quad \Gamma \vdash H}{\Gamma \vdash G \wedge H}\ \wedge_{\mathsf{i}}$	$\dfrac{\Gamma \vdash G \wedge H}{\Gamma \vdash G}\ \wedge_{\mathsf{e}}^{\mathsf{g}} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash G \wedge H}{\Gamma \vdash H}\ \wedge_{\mathsf{e}}^{\mathsf{d}}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash G \vee H}\ \vee_{\mathsf{i}}^{\mathsf{g}} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash H}{\Gamma \vdash G \vee H}\ \vee_{\mathsf{i}}^{\mathsf{d}}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash G \quad \Gamma, B \vdash G}{\Gamma \vdash G}\ \vee_{\mathsf{e}}$

$$\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\ \mathsf{ax} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \varphi}\ \mathsf{aff}$$

Sur la page précédente se trouvent les règles de la déduction naturelle intuitionniste et classique. Les règles sont regroupées en trois types :

1. Introduction
2. Élimination
3. Autres

Voici, en français, ce qu'elles veulent dire.

- $\top_\mathsf{i}$ On peut toujours prouver « vrai ».
- $\bot_\mathsf{e}$ Si l'on sait que l'on peut montrer une absurdité, alors on peut oublier l'objectif de preuve et montrer cette absurdité.
- $\wedge_\mathsf{i}$ Pour montrer G *et* H, il suffit montrer G puis montrer H.
- $\wedge_\mathsf{e}^\mathsf{g}$ Si on peut montrer G *et* H, alors on peut montrer G
- $\wedge_\mathsf{e}^\mathsf{d}$ Si on peut montrer G *et* H, alors on peut montrer H.
- $\vee_\mathsf{i}^\mathsf{g}$ Si on veut montrer G *ou* H, alors il suffit de montrer G.
- $\vee_\mathsf{i}^\mathsf{d}$ Si on veut montrer G *ou* H, alors il suffit de montrer H.
- $\vee_\mathsf{e}$ C'est la disjonction de cas : si on veut montrer G, et qu'on sait qu'on a A *ou* B, alors on il suffit de montrer G dans le cas A puis de montrer G dans le cas B.
- $\rightarrow_\mathsf{i}$ Si on veut montrer G *implique* H, il suffit de supposer G, et de montrer H.
- $\rightarrow_\mathsf{e}$ Si on peut montrer H *implique* G et qu'on peut montrer H, alors on peut montrer G.
- $\neg_\mathsf{i}$ Pour montrer *non* G, il suffit de montrer qu'en supposant G, on a une absurdité.
- $\neg_\mathsf{e}$ Si on a montré G et *non* G, alors on a une absurdité.
- ax (axiome) Pour montrer φ, il suffit de l'avoir en hypothèse.
- aff (affaiblissement) Si on peut montrer φ avec certaines hypothèses, alors on peut le faire avec encore plus d'hypothèses, quitte à ne pas les utiliser.

Il est enfin temps de faire un arbre de preuve. En voici un :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p, \neg p \vdash p}\,\mathsf{ax} \qquad \dfrac{}{p, \neg p \vdash \neg p}\,\mathsf{ax}}{p, \neg p \vdash \bot}\,\neg_\mathsf{e}}{p \vdash \neg\neg p}\,\neg_\mathsf{i}}{\vdash p \rightarrow (\neg\neg p)}\,\rightarrow_\mathsf{i} \qquad .$$

Q1. Re-dérouler la démonstration ci-dessus pour vérifier qu'on a bien compris.

Q2. Construire l'arbre de preuve pour le séquent de l'exemple 1.

Q3. Au fur et à mesure, prouvez les séquents ci-dessous. C'est en faisant que l'on apprend. Si vous bloquez sur un, prévenez-moi et je vous donnerai des indications.

Quelques preuves simples pour commencer :

1. $\vdash p \to p$
2. $p, \neg p \vdash \bot$
3. $p, q \vdash p \land q$
4. $p \land q \vdash q \land p$
5. $p \lor q \vdash q \lor p$
6. $\vdash \neg(p \land \neg p)$

Preuves un peu plus poussées :

7. $p \lor (p \land q) \vdash p$
8. $p \land, r \land s \vdash p \land s$
9. $p, q \land r \vdash p \land q$
10. $p \lor q \vdash q \lor p$
11. $\neg\neg\neg p \vdash \neg p$

Les lois de De Morgan (sauf une) :

12. $\neg(p \lor q) \vdash \neg p \land \neg q$
13. $\neg p \land \neg q \vdash \neg(p \lor q)$
14. $\neg p \lor \neg q \vdash \neg(p \land q)$

Distributivité $\lor$ et $\land$:

15. $p \land (q \lor r) \vdash (p \land q) \lor (p \land r)$
16. $(p \land q) \lor (p \land r) \vdash p \land (q \lor r)$
17. $p \lor (q \land r) \vdash (p \lor q) \land (p \lor r)$
18. $(p \lor q) \land (p \lor r) \vdash p \lor (q \land r)$

Bonus :

19. $\neg p \vdash p \to q$
20. $\neg(p \to q) \vdash q \to p$
21. $(p \land q) \to r \vdash p \to (q \to r)$
22. $p \to (q \to r) \vdash (p \land q) \to r$

4 Logique classique.

Une fois que vous savez faire la plupart, on peut passer à la logique *classique*. En logique classique, on ajoute une des trois règles suivantes.

Tiers Exclu. On a toujours, soit F, soit *non* F.

$$\frac{}{\Gamma \vdash F \lor \neg F}\ \mathsf{te}$$

Absurde. Au lieu de montrer F, supposons *non* F et trouvons une contradiction.

$$\frac{\Gamma, \neg F \vdash \bot}{\Gamma \vdash F}\ \mathsf{abs}$$

On la note parfois raa.

Double *non*. Deux *non* s'annulent.

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg F}{\Gamma \vdash F}\ \neg\neg_{\mathsf{e}}$$

Q4. En utilisant ces règles, démontrer les séquents suivants :

23. $\neg p \to p \vdash p$
24. $p \to q \vdash \neg p \lor q$
25. $\neg p \lor q \vdash p \to q$
26. $p \to q \vdash \neg q \to \neg p$
27. $p \lor q, \neg q \lor r \vdash p \lor r$

Définition 4. Une règle

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \quad \Gamma_2 \vdash \varphi_2 \quad \cdots \quad \Gamma_n \vdash \varphi_n}{\Gamma \vdash \varphi}\,\textsf{règle}$$

est *dérivable* dans un système de preuve (la règle ci-dessus n'appartient pas au système de preuve, sinon cela ne sert à rien) si l'on peut dériver sa conclusion en supposant pouvoir dériver ses prémisses.

Deux règles r_1 et r_2 sont équivalentes dans un système S si on peut prouver r_2 dans $S \cup \{\mathsf{r}_1\}$ et si on peut prouver r_1 dans $S \cup \{\mathsf{r}_2\}$. On peut généraliser cette définition à l'équivalence entre n règles.

Exemple 3. La règle cut définie par

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\,\textsf{cut}$$

est dérivable en logique intuitionniste :

$$\frac{\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\,\to_{\mathsf{i}} \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\,\to_{\mathsf{e}}.$$

Q5. Quelle différence y a-t-il entre abs et $\neg_{\mathsf{i}}$?

Q6. Peut-on dériver aff depuis la déduction naturelle intuitionniste (sans aff bien sûr) ? Si oui, en intuitionniste aussi ?

Q7. Montrer que les règles te, abs et $\neg\neg_\mathsf{e}$ sont équivalentes. Par ordre de difficulté :

- ▷ $\neg\neg_\mathsf{e}$ à l'aide de abs
- ▷ abs à l'aide de $\neg\neg_\mathsf{e}$
- ▷ abs à l'aide de te
- ▷ $\neg\neg_\mathsf{e}$ à l'aide de te
- ▷ te à l'aide de $\neg\neg_\mathsf{e}$
- ▷ te à l'aide de abs

Lorsqu'on a une règle dérivable dans un certain système de preuve, on peut donc l'utiliser comme si de rien n'était : en effet, il suffira de remplacer son utilisation par le morceau d'arbre donné par la dérivation de la règle.

Q8. Réaliser une preuve avec cut et remplacer l'utilisation par le morceau d'arbre donné ci-avant.

5 Correction, complétude.

Définition 5. On dit qu'un système de preuves est *correct* si, pour toute formule F, si $\vdash F$ alors $\models F$. On dit qu'un système de preuves est *complet* si, pour toute formule F, si $\models F$ alors $\vdash F$.

Pour faire simple,

- ▷ dans un système correct, ce qui est prouvable est vrai ;
- ▷ dans un système complet, ce qui est vrai est prouvable.

Théorème 1.
- ▷ La déduction naturelle intuitionniste est incomplète mais correcte.
- ▷ La déduction naturelle classique est complète et correcte.

□

On se propose de prouver le théorème ci-dessus en exercice.

5.1 Preuve de la correction (exercice).

On montre par induction sur l'arbre de preuve de $\Gamma \vdash F$, pour montrer que $\Gamma \models F$.

Pour le cas de ax, si $F \in \Gamma$ alors toute valuation satisfaisant Γ satisfait les éléments de Γ, en particulier F.

Pour le cas de $\top_{\mathsf{i}}$, on a toujours $\Gamma \models \top$.

Pour le cas de $\wedge_{\mathsf{i}}$, si on a une valuation satisfaisant Γ, alors d'une part, on sait que cette valuation satisfait H par hypothèse d'induction (car $\Gamma \vdash H$), et aussi, cette valuation satisfait G par hypothèse d'induction. Or, cette valuation satisfait $G \wedge H$ ssi elle satisfait G et H (par définition). D'où $\Gamma \models G \wedge H$.

Q9. Faire de même pour quelques uns des autres cas d'introduction ($\to_{\mathsf{i}}$, $\vee_{\mathsf{i}}^{\mathsf{g}}$ par exemple).

Pour l'élimination, on peut regarder la règle $\to_{\mathsf{e}}$. Si on suppose avoir montré $\Gamma \vdash H \to G$ et $\Gamma \vdash H$, alors toute valuation satisfaisant Γ satisfait $H \to G$ et H, donc elle satisfait G.

Q10. Faire de même pour quelques uns des autres cas d'introduction ($\vee_{\mathsf{e}}$, $\wedge_{\mathsf{e}}^{\mathsf{d}}$ par exemple).

En admettant que tous autres les cas se passent bien, on a montré la correction de la logique intuitionniste.

Pour ce qui est de la logique classique, il reste à traiter les cas du tiers exclu, ou de la double négation, ou du raisonnement par l'absurde. Par exemple, on a toujours $\models F \vee \neg F$ avec te ou alors $\neg\neg F \models F$ avec $\neg\neg_{\mathsf{e}}$.

Q11. Conclure quant à la partie « correction » (intuitionniste/classique) du théorème.

5.2 Preuve de complétude (exercice).

On fixe $\mathscr{V} := \{x_1, \dots, x_n\}$ l'ensemble des variables propositionnelles. Pour une valuation v donnée, on construit la formule $\varphi(v)$ comme

$$\ell_1 \wedge (\ell_2 \wedge (\cdots (\ell_{n-1} \wedge \ell_n) \cdots)),$$

où $\ell_i := x_i$ si $v(x_i) = \textsc{Vrai}$ et $\ell_i := \neg x_i$ sinon.

La formule $\varphi(v)$ est satisfaite par une et une seule valuation, v.

On définit un ordre sur l'ensemble des valuations sur $\mathscr{V}$ induit en identifiant $\mathbb{B}^{\mathscr{V}}$ et $\{0,1\}^n$, où l'on utilise l'ordre lexicographique. On note ainsi $\mathbb{B}^{\mathscr{V}} := \{v_1, \dots, v_{2^n}\}$ dans l'ordre induit.

On note

$$\Phi(\mathscr{V}) := \varphi(v_1) \vee (\varphi(v_2) \vee (\cdots (\varphi(v_{2^n-1}) \vee \varphi(v_{2^n})) \cdots)).$$

On se place en logique classique.

Q12. Montrer que $\vdash \Phi(\mathscr{V})$. On pourra procéder par récurrence sur $|\mathscr{V}|$.

Q13. Démontrer que, pour tout valuation v et toute formule F à variables dans $\mathscr{V}$, si $v(F) = \textsc{Vrai}$, alors $\varphi(v) \vdash F$, et si $v(F) = \textsc{Faux}$, alors $\varphi(v) \models \neg F$.

Q14. Soit F une tautologie à valeurs sur $\mathscr{V}$. Montrer que $\Phi(\mathscr{V}) \models F$.

Q15. Conclure.

6 Équivalences de logiques (exercice).

On note **FLP** l'ensemble des formules de la logique propositionnelle (utilisant $\top$, $\bot$, $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$ et $\vee$).

On dit que deux ensembles $A, B \subseteq \textbf{FLP}$ sont équivalents si

- ▷ pour toute formule $\varphi \in A$, il existe $\psi \in B$ telle que pour tout Γ,

$$\Gamma \models \varphi \text{ ssi } \Gamma \models \psi.$$

- ▷ pour toute formule $\psi \in B$, il existe $\varphi \in A$ telle que pour tout Γ,

$$\Gamma \models \psi \text{ ssi } \Gamma \models \varphi.$$

On notera $\textbf{FLP}_{o_1,o_2,\ldots,o_n}$ où les o_i sont des opérateurs de **FLP** l'ensemble des formules de la logique propositionnelle n'utilisant que ces opérateurs.

Q16. Montrer que **FLP** est équivalente à $\textbf{FLP}_{\neg,\wedge}$.

Q17. Justifier que **FLP** n'est pas équivalente à $\textbf{FLP}_{\wedge,\vee,\rightarrow}$.

Indication.

Chercher un équivalent de la formule $\neg p$.

L'équivalence ci-avant est une équivalence *sémantique* (car $\models$). L'*équivalence syntaxique* est comme l'équivalence sémantique mais où l'on remplace $\models$ par $\vdash$.

Ceci dépend évidemment de la « version » de la déduction naturelle choisie : intuitionniste ou classique. Mais, vu ce le théorème de complétude/correction précédent pour la logique classique, il n'y a pas d'intérêt de différencier l'équivalence sémantique de l'équivalence syntaxique en logique classique.

Q18. La logique **FLP** est-elle syntaxiquement équivalente (en logique intuitionniste) à $\textbf{FLP}_{\neg,\vee}$?

Indication.

On pourra essayer de dériver le tiers-exclu depuis la formule équivalente à l'implication logique.