

Le λ -calcul simplement typé.

Dans ce chapitre, on va parler de *typage*. Ceci permet de « stratifier » les λ -termes. En effet, pour l’instant, tous les termes se ressemblent.

1 Définition du système de types.

Définition 1. On se donne un ensemble de *types de base*, notés X, Y, Z, \dots . Les types simples sont donnés par la grammaire suivante :

$$A, B, C ::= \mathbf{X} \mid A \rightarrow B.$$

Il n’y a donc que deux « types » de types : les types de base, et les types fonctions. Il n’y a donc pas de type `unit`, `bool`, `...`. En effet, ceci demanderait d’ajouter des constantes `()`, `true`, `false`, *etc* dans la grammaire du λ -calcul (et ceci demanderait ensuite d’ajouter des règles de typage supplémentaire). On verra en TD comment typer **T** et **F** comme défini au chapitre précédent.

Par convention, on notera $A \rightarrow B \rightarrow C$ pour $A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

Définition 2. On définit une *hypothèse de typage* comme un couple variable-type (x, A) noté $x : A$.

Définition 3. Un *environnement de typage*, noté $\Gamma, \Gamma', \text{etc}$ est un dictionnaire sur $(\mathcal{V}, \text{Types})$, *c.f.* cours de Théorie de la Programmation. On notera $\Gamma(x) = A$ lorsque Γ associe x à A . On définit

le *domaine* de Γ comme

$$\text{dom}(\Gamma) := \{x \mid \exists A, \Gamma(x) = A\}.$$

On note aussi $\Gamma, x : A$ l'extension de Γ avec $x : A$ si $x \notin \text{dom}(\Gamma)$.

Définition 4. On définit la *relation de typage*, notée $\Gamma \vdash M : A$ (« sous les hypothèses Γ , le λ -terme M a le type A ») par les règles d'inférences suivantes :

$$\begin{array}{c} \Gamma(x) = A \quad \frac{}{\Gamma \vdash x : A} \quad \frac{\Gamma \vdash M : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash M N : B} \\[2ex] \frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x. M : A \rightarrow B} \quad x \notin \text{dom}(\Gamma) \end{array}$$

Dans cette dernière règle, on peut toujours l'appliquer modulo α -conversion (il suffit d' α -renommer x dans $\lambda x. M$).

Exemple 1. On peut omettre le « \emptyset » avant « \vdash ».

$$\frac{\frac{f : X \rightarrow X, z : X \vdash f : X \rightarrow X}{f : X \rightarrow X, z : X \vdash f : X \rightarrow X} \quad \frac{\frac{f : X \rightarrow X, z : X \vdash f : X \rightarrow X \quad f : X \rightarrow X, z : X \vdash z : X}{f : X \rightarrow X, z : X \vdash f z : X}}{f : X \rightarrow X, z : X \vdash f(fz) : X} \quad \frac{f : X \rightarrow X, z : X \vdash f(fz) : X}{f : X \rightarrow X \vdash \lambda z. f(fz) : X \rightarrow X} \quad \frac{f : X \rightarrow X \vdash \lambda z. f(fz) : X \rightarrow X}{\vdash \lambda f. \lambda z. f(fz) : (X \rightarrow X) \rightarrow X \rightarrow X}$$

Exemple 2.

$$\frac{\frac{a, X, t : X \rightarrow Y \vdash t : X \rightarrow Y}{a, X, t : X \rightarrow Y \vdash t a : Y} \quad \frac{a, X, t : X \rightarrow Y \vdash t a : Y}{a : X \vdash \lambda t. t a : (X \rightarrow Y) \rightarrow Y} \quad .$$

2 Propriétés de la relation de typage.

Lemme 1 (Lemme administratif).

- ▷ Si $\Gamma \vdash M : A$ alors $\mathcal{V}\ell(M) \subseteq \text{dom}(\Gamma)$.
- ▷ *Renforcement* : si $\Gamma, x : B \vdash M : A$ et $x \notin \mathcal{V}\ell(M)$ alors $\Gamma \vdash M : A$.
- ▷ *Affaiblissement* : si $\Gamma \vdash M : A$ alors, pour tout B et tout $x \notin \text{dom}(\Gamma)$ alors $\Gamma, x : B \vdash A$.
- ▷ *Contraction* : si $\Gamma, x : B, y : B \vdash M : A$ alors $\Gamma, x : B \vdash M[x/y] : A$ □

Proposition 1 (Préservation du typage). Si $\Gamma \vdash M : A$ et $M \rightarrow_\beta M'$ alors $\Gamma \vdash M' : A$.

Preuve. On procède comme en [Théorie de la Programmation \[Chapitre 7\]](#) avec le lemme suivant.

Lemme 2. Si $\Gamma, x : A \vdash M : B$ et $\Gamma \vdash N : A$ alors $\Gamma \vdash M[N/x] : B$.

□

3 Normalisation forte.

Définition 5. Un λ -terme M est dit *fortement normalisant* ou *terminant* si toute suite de β -réductions issue de M conduit à une forme normale. Autrement dit, il n'y a pas de divergence issue de M .

Théorème 1. Si M est typage (il existe Γ, A tels que $\Gamma \vdash M : A$) alors M est fortement normalisant.

Remarque 1 (Quelques tentatives de preuves ratées.). ▷ Par induction sur M ? Non.

- ▷ Par induction sur la relation de typage $\Gamma \vdash M : A$? Non (le cas de l'application pose problème car deux cas de β -réductions).

Pour démontrer cela, on utilise une méthode historique : les *candidats de réductibilité*.

Définition 6 (Candidat de réductibilité). Soit A un type simple. On associe à A un ensemble de λ -termes, noté \mathcal{R}_A appelé *candidats de réductibilité* (ou simplement *candidats*) associé à A , défini par induction sur A de la manière suivante :

- ▷ $\mathcal{R}_X := \{M \mid M \text{ est fortement normalisant}\}$;
- ▷ $\mathcal{R}_{A \rightarrow B} := \{M \mid \forall N \in \mathcal{R}_A, M N \in \mathcal{R}_B\}$.

L'idée est la suivante :

$$\begin{array}{c} M \text{ typable} \\ \Gamma \vdash M : A \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad M \in \mathcal{R}_A \quad \rightsquigarrow \quad M \text{ fortement normalisant.}$$

Remarque 2 (Rappel sur le PIBF, c.f. Théorie de la Programmation [Chapitre 10]). Le principe d'induction bien fondé nous dit qu'une relation \mathcal{R} est terminante ssi pour tout prédicat \mathcal{P} sur E vérifie que si

$$\forall x \in E \left((\forall y, x \mathcal{R} y \implies \mathcal{P}(y)) \implies \mathcal{P}(x) \right)$$

alors $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$.

Proposition 2. Soit A un type simple. On a :

CR 1. Pour tout $M \in \mathcal{R}_A$, M est fortement normalisant.

CR 2. Pour tout $M \in \mathcal{R}_A$, si $M \rightarrow_\beta M'$ alors $M' \in \mathcal{R}_A$.

CR 3. Pour tout M neutre (c-à-d, M n'est pas une λ -abstraction), si $\forall M', M \rightarrow_\beta M' \implies M' \in \mathcal{R}_A$ alors $M \in \mathcal{R}_A$.

Preuve. On montre la conjonction de **CR 1**, **CR 2** et **CR 3** par induction sur A . Il y a deux cas.

▷ Cas X un type simple.

CR 1. C'est vrai par définition.

CR 2. Si M est fortement normalisant, et $M \rightarrow_\beta M'$ alors $M' \in \mathcal{R}_X$.

CR 3. Si M est neutre et si on a que « pour tout M' tel que $M \rightarrow_\beta M'$ alors $M' \in \mathcal{R}_X$ » alors c'est l'induction bien fondée pour \rightarrow_β sur \mathcal{R}_X .

▷ Cas $A \rightarrow B$ un type flèche.

CR 1. Soit $M \in \mathcal{R}_{A \rightarrow B}$. Supposons que M diverge :

$$M \rightarrow_\beta M_1 \rightarrow_\beta M_2 \rightarrow_\beta \cdots$$

On a observé que $x \in \mathcal{R}_A$ pour une variable x arbitraire (conséquence de **CR 3** pour A). Par définition de $\mathcal{R}_{A \rightarrow B}$, $M x \in \mathcal{R}_B$. Par **CR 1** pour B , on a que $M x$ est fortement normalisant. Or, $M x \rightarrow_\beta M_1 x$ car $M \rightarrow_\beta M_1$. On construit ainsi une divergence dans \mathcal{R}_B à partir de $M x$:

$$M x \rightarrow_\beta M_1 x \rightarrow_\beta M_2 x \rightarrow_\beta \cdots$$

C'est absurde car cela contredit que $M x$ fortement normalisant.

CR 2. Soit $M \in \mathcal{R}_{A \rightarrow B}$ et $M \rightarrow M'$. Montrons que $M' \in \mathcal{R}_{A \rightarrow B}$, *i.e.* pour tout $N \in \mathcal{R}_A$ alors $M' N \in \mathcal{R}_B$. Soit donc $N \in \mathcal{R}_A$. On sait que $M N \in \mathcal{R}_B$ (car $M \in \mathcal{R}_{A \rightarrow B}$). Et comme $M \rightarrow_\beta M'$ alors $M N \rightarrow_\beta M' N$ et, par **CR 2** pour B , on a $M' N \in \mathcal{R}_B$. On a donc montré $\forall N \in \mathcal{R}_{A \rightarrow B}, M' N \in \mathcal{R}_B$ autrement dit, $M' \in \mathcal{R}_{A \rightarrow B}$.

CR 3. Soit M neutre tel que $\forall M', M \rightarrow_\beta M' \implies M' \in \mathcal{R}_{A \rightarrow B}$. Montrons que $M \in \mathcal{R}_{A \rightarrow B}$. On sait que \rightarrow_β est

terminante sur \mathcal{R}_A (par **CR 1** pour A). On peut donc montrer que $\forall N \in \mathcal{R}_A, M N \in \mathcal{R}_B$ par induction bien fondée sur \rightarrow_β . On a les hypothèses suivantes :

- hypothèse 1 : pour tout M' tel que $M \rightarrow_\beta M'$ alors $M' \in \mathcal{R}_{A \rightarrow B}$;
- hypothèse d'induction bien fondée : pour tout N' tel que $N \rightarrow_\beta N'$ que $M N' \in \mathcal{R}_B$.

On veut montrer $M N \in \mathcal{R}_B$. On s'appuie sur **CR 3** pour B et cela nous ramène à montrer que, pour tout P tel que $M N \rightarrow_\beta P$ est $P \in \mathcal{R}_B$. On a trois cas possibles pour $M N \rightarrow_\beta P$.

- Si $M = \lambda x. M_0$ et $P = M_0[N/x]$ qui est exclu car M est neutre.
- Si $P = M' N$ alors par hypothèse 1 $M' \in \mathcal{R}_{A \rightarrow B}$ et donc $M' N \in \mathcal{R}_B$.
- Si $P = M N'$ alors, par par hypothèse d'induction bien fondée, $M N' \in \mathcal{R}_B$.

□

Lemme 3. Soit M tel que $\forall N \in \mathcal{R}_A, M[N/x] \in \mathcal{R}_B$. Alors $\lambda x. M \in \mathcal{R}_{A \rightarrow B}$.

Preuve. On procède comme pour **CR 3** pour $A \rightarrow B$. □

Lemme 4. Supposons $x_1 : A_1, \dots, x_k : A_k \vdash M : A$. Alors, pour tout N_1, \dots, N_k tel que $N_i \in \mathcal{R}_{A_i}$, on a

$$M[N_1 \dots N_k / x_1 \dots x_k] \in \mathcal{R}_A.$$

On note ici la *substitution simultanée* des x_i par des N_i dans M . C'est **n'est pas** la composition des substitutions.

Preuve. Par induction sur la relation de typage, il y a trois cas.

- ▷ Si on a utilisé la règle de l'axiome, c'est que M est une variable : $M = x_i$ et $A = A_i$. Soit $N_i \in \mathcal{R}_{A_i}$ alors $M[N_1 \cdots N_k/x_1 \cdots x_k] = N_i \in \mathcal{R}_A$.
- ▷ Si on a utilisé la règle de l'application, c'est que M est une application : $M = M_1 M_2$ et $M_1 : B \rightarrow A$ et $M_2 : B$. On a :

$$M[N_1 \cdots N_k/x_1 \cdots x_k] = M_1[N_1 \cdots N_k/x_1 \cdots x_k] M_2[N_1 \cdots N_k/x_1 \cdots x_k].$$

On conclut en appliquant les hypothèses d'inductions : $M_1[N_1 \cdots N_k/x_1 \cdots x_k] \in \mathcal{R}_{B \rightarrow A}$ et $M_2[N_1 \cdots N_k/x_1 \cdots x_k] \in \mathcal{R}_B$.

- ▷ Si on a utilisé la règle de l'abstraction, c'est que $M = \lambda y. M_0$ avec $y \notin \{x_1, \dots, x_k\} \cup \mathcal{V}\ell(N_1) \cup \dots \cup \mathcal{V}\ell(N_k)$. Supposons que $x_1 : A_1, \dots, x_k : A_k \vdash \lambda y. M_0 : A \rightarrow B$. Alors nécessairement $x_1 : A_1, \dots, x_k : A_k, y : A \vdash M_0 : B$. Par hypothèse d'induction, on a que pour tout $N_i \in \mathcal{R}_{A_i}$ on a

$$M_0[N_1 \cdots N_k/x_1 \cdots x_k][N/y] = M_0[N_1 \cdots N_k N/x_1 \cdots x_k y] \in \mathcal{R}_B.$$

Par le lemme précédent, on déduit que

$$(\lambda y. M_0)[N_1 \cdots N_k/x_1 \cdots x_k] = \lambda y. (M_0[N_1 \cdots N_k/x_1 \cdots x_k]) \in \mathcal{R}_{A \rightarrow B}.$$

□

Corollaire 1. Si $\Gamma \vdash M : A$ alors $M \in \mathcal{R}_A$.

4 Extension : le λ -calcul typé avec \times et 1.

En ajoutant les couples et *unit*, il faut modifier quatre points.

Syntaxe. $M, N ::= \lambda x. M \mid M N \mid x \mid (M, N) \mid \star \mid \pi_1 M \mid \pi_2 M$

β -réduction.

$$\frac{M \rightarrow_\beta M'}{(M, N) \rightarrow_\beta (M', N)} \quad \frac{N \rightarrow_\beta N'}{(M, N) \rightarrow_\beta (M, N')}$$

– 7/8 –

$$\overline{\pi_1 (M, N) \rightarrow_\beta M} \quad \overline{\pi_2 (M, N) \rightarrow_\beta N}.$$

Types.

$$A, B ::= X \mid A \rightarrow B \mid A \times B \mid \mathbf{1}$$

Typage.

$$\frac{}{\star : \mathbf{1}} \quad \frac{\Gamma \vdash M : A \quad \Gamma \vdash N : B}{\Gamma \vdash (M, N) : A \times B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P : M \times N}{\Gamma \vdash \pi_1 P : M} \quad \frac{\Gamma \vdash P : M \times N}{\Gamma \vdash \pi_2 P : N}.$$