

## TD n° 4

## Exercice 1. Running Time.

Q1. Soit  $X_m \sim U(30, 14^n)$ . On a:  $\mathbb{E}[T(X_m)] \leq k \cdot n^2$  avec  $k$  fixé.

D'après l'inégalité de Markov:

$$P(T(X_m) \geq n^2 f(n)) \leq \frac{\mathbb{E}[T(X_m)]}{n^2 f(n)} = \frac{k}{f(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Q2. Notons  $T_{\max} = \max_{\omega \in \Omega} T(\omega)$ .

$$k \cdot n^2 \geq \mathbb{E}[T] = \sum_{\omega \in \Omega} T(\omega) \cdot 1/2^n \geq T_{\max} \frac{1}{2^n}$$

D'où  $T_{\max} \leq k \cdot n^2 2^n$ . On conclut que  $T_{\max} = O(n^2 2^n)$ .

## Exercice 2. Coquilles dans un TD

Q1. Notons  $N$  le temps de relecture pour enlever les 4 coquilles. et  $N_i$  pour la  $i$ -ème coquille.

$$N_i \sim \mathcal{G}(1/3) \quad \text{et} \quad N = \max(N_1, N_2, N_3, N_4).$$

$$\begin{aligned} P(N \leq n) &= \prod_{i=1}^4 P(N_i \leq n) = \prod_{i=1}^4 \sum_{k=1}^n P(N_i = k) \\ &\stackrel{\uparrow \text{indépendance}}{=} \prod_{i=1}^4 \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{1}{3} \\ &= \prod_{i=1}^4 \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1/3} \end{aligned}$$

$$= \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^4$$

Avec  $n = 10$ , on a  $P(N \leq 10) \approx 0,9$ .

Q2. Le problème du collectionneur de vignettes, mais, à chaque étapes on peut corriger plusieurs vignettes, alors qu'on ne peut avoir qu'un magnét.

Q3.. D'après Tchebychev,

$$P(10^{-n} < X < 10^{-n}) = 1 - P(|X - \mu| \geq n) \leq \frac{\sigma^2}{n^2}$$

On a bien le résultat demandé pour  $n \geq 5$ .

Exercice 3. Tester la pièce.

On lance  $n$  fois la pièce. Le nombre de "Pile"s est  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ .

$$\mathbb{E}[X] = n \cdot p \quad \text{Var}[X] = np(1-p)$$

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq n/10) \leq \frac{\text{Var}[X]}{(n/10)^2} = \frac{p(1-p)}{n/100} \leq \frac{25}{n}$$

Pour avoir une probabilité d'au moins 0,9, il faut

$$0,9 \leq 1 - 25/n \Leftrightarrow 25/n \leq 0,1 \Leftrightarrow n \geq 250$$

Exercice 4. Comparer Markov, Tchebychev et Chernooff.

$$X \sim \mathcal{B}(n, 1/6) \quad \mathbb{E}[X] = n/6 \quad \text{Var}[X] = 5n/36.$$

$$\text{Markov : } P(X \geq n/4) \leq \frac{n/6}{n/4} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Tchebychev : } P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq n/12) \leq \frac{5n/36}{(n/12)^2} = \frac{144 \times 5}{36} \times \frac{1}{n} = 20/n$$

$$\text{Chernooff : } P(X \leq (1 + \frac{1}{2}) \mathbb{E}[X]) \leq \exp\left(-\frac{1/4}{5/12} \frac{n}{6}\right) = \exp\left(-\frac{n}{60}\right).$$

## Exercice 5. Chernoff Bound Interval.

Q1. On a :  $\mathbb{E}_1[e^{\lambda Y}] = (1-p) + p e^\lambda$

$$= 1 - \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X] e^\lambda$$

Convexité de  $\exp(\lambda -)$   
et croissance de  $\mathbb{E}[e^x]$

$$\hookrightarrow \mathbb{E}[e^{\lambda X} + (1-p)e^0] \geq \mathbb{E}[e^{\lambda X}]$$

Q2. Pour  $\lambda > 0$ ,

$$\mathbb{P}(X \geq (1+\varepsilon)\mu) = \mathbb{P}(e^{\lambda X} \geq e^{\lambda\mu(1+\varepsilon)})$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda X}]}{e^{\lambda\mu(1+\varepsilon)}} \quad \text{Par inégalité de Markov}$$

De plus,  $\mathbb{E}[e^{\lambda X}] = \mathbb{E}[e^{\lambda(x_1 + \dots + x_m)}]$

$$= \prod \mathbb{E}[e^{\lambda x_i}]$$

$$= e^{\sum p_i(e^{\lambda} - 1)}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{\lambda x_i}] &\leq (1-p_i) + p_i e^\lambda \\ &= 1 + p_i (e^\lambda - 1) \\ &\leq e^{p_i(e^\lambda - 1)} \end{aligned}$$

Donc,  $\mathbb{P}(X \geq (1+\varepsilon)\mu) \leq \frac{e^{\mu(e^\lambda - 1)}}{e^{\lambda\mu(1+\varepsilon)}}$  où  $\lambda = \ln(1+\varepsilon)$ .

## Exercice 6. Fonction génératrice

1)  $G_X(y) = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} y^n P(X=n)\right]$

$$G'_X(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n y^{n-1} P(X=n) \Rightarrow \mathbb{E}[X] = G'_X(1)$$

$$G''_X(y) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) y^{n-2} P(X=n)$$

$$\text{Var}[X] = G''_x(1) + G'_x(1) - (G'_x(1))^2$$

Q2.  $G_x(y) = \mathbb{E}[y^X] = \sum_{k=0}^{+\infty} y^k \mathbb{P}(X=k) \frac{\lambda^k}{k!}$

$$= e^{\lambda} \exp(\lambda y)$$

Q3.  $G_x(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = 1$

d'où  $e^{\lambda} \exp(\lambda) = 1$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$

On en déduit  $e^{\lambda} = \exp(-\lambda)$ .

Q4.  $G_x(y) = \exp(\lambda(y-1))$

$$\mathbb{E}[X] = G'_x(1) = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^\lambda = \lambda$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= G''_x(1) + G'_x(1) - (G'_x(1))^2 \\ &= \cancel{\lambda^2 e^{-\lambda}} \cancel{e^\lambda} \quad \lambda - \lambda^2 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

Q5.  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ .

$$G_x(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} y^k \mathbb{P}(X=k)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^n y^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= (py + 1-p)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= G'_x(1) = np(p+1-p)^{n-1} \\ &= np \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= G''_x(1) + G'_x(1) - (G'_x(1))^2 \\ &= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 \\ &= p^2(n^2 - n - 1) + np \\ &= np(1-p) \end{aligned}$$

$$\text{Q6. } G_S(\gamma) = \mathbb{E}[\gamma^S] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}[\gamma^S \mid N=n] \cdot P(N=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[\gamma^{X_1 + \dots + X_n}] \cdot P(N=n) + P(N=0)$$

car les  $(X_i)_{i \geq 0}$  sont indépendants

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[\gamma^{X_1} \cdots \gamma^{X_n}] \cdot P(N=n) + P(N=0)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathbb{E}[\gamma^{X_1}])^n \cdot P(N=n)$$

$$= G_N(G_{X_1}(\gamma))$$

Si  $X_i \sim \mathcal{G}(q)$  et  $N \sim \mathcal{G}(p)$ ,

$$G_N(\gamma) = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma^n q (1-q)^{n-1} = \gamma q \sum_{n=0}^{+\infty} (1-q)^n \gamma^n$$

$$= \gamma q / (1 - (1-q)\gamma)$$

D'où

$$G_S(\gamma) = \frac{pq\gamma}{(1 - (1-q)\gamma)(1 - (1-p)(q\gamma / 1 - (1-q)\gamma))}$$

$$= \frac{pq\gamma}{1 - \gamma + q\gamma - q\gamma + pq\gamma}$$

$$= \frac{(pq)\gamma}{1 - (1-pq)\gamma}$$

On peut en déduire que  $S \sim \mathcal{G}(pq)$ .

## Exercice 7. Probabilités conditionnelles.

Q1. On pose  $\Omega' = \Omega \cap Y^{-1}(\{0\})$ , puis

$$X: \mathbb{N}^* \longrightarrow \Omega'$$

$$n \longmapsto Y(n).$$

$$P': \Omega' \longrightarrow [0, 1]$$

$$\omega \longmapsto P(\omega) / P(Y \neq 0).$$

Q2.  $E[X^2] - E[X]^2 = \text{Var}[X] \geq 0$

D'où  $E[X^2] \geq E[X]^2$ .

Q3.  $E[Y] = \sum_{y=0}^{+\infty} y P(Y=y) = \sum_{\substack{y=1 \\ \geq 1}}^{+\infty} y P(Y=y) \geq P(Y \geq 1) = P(Y \neq 0)$

$$\frac{E[Y]^2}{E[Y]} = \frac{E[X]^2 \cdot P(Y \neq 0)^2}{E[X^2] \cdot P(Y \neq 0)} \leq P(Y \neq 0) \cdot 1$$

↑ par Q2.

## Exercice 8. Bucket Sort.

Q1. Si on regarde  $x = \overline{b_k \dots b_0}^2$ , on le met dans le bucket numéroté  $\overline{b_k \dots b_{k-m}}^2$  (c'est un bitshift de  $k-m$ ).

Q2. Soit  $X \sim U([0, 2^k-1])$ .  
 $P(\text{On place } X \text{ dans le seau } i) = 1/n$ .

D'où,

$$P(X_i = l) = \binom{n}{l} \left(\frac{1}{n}\right)^l \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-l}$$

C'est une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, 1/n)$ .

Q3. Notons  $T$  le temps de calcul du bucket sort.

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{i=1}^{2^{k-1}} \mathbb{E}[T_i] + O(n)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_i] &= \mathbb{E}[M X_i^2] = M (\text{Var}[X_i] + \mathbb{E}[X_i]^2) \\ &\leq M \left( n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{n^2}{n^2} \right) = M n \left[ 2 - \frac{1}{n} \right] \leq 2 M n\end{aligned}$$

D'où,  $\mathbb{E}[T] = O(n)$ .

Fim du TD

# TD n° 5

Exercice 1. Algorithme probabiliste pour calculer la médiane.

Q1. La partie (a) est en  $O(n)$ ,  
puis (b) en  $O(n^{3/4} \log n) = O(n)$ ,  
puis (c) en  $O(n)$  puis (d) en  $O(n)$   
et enfin (e) en  $O(n^{3/4} \log n) = O(\log n)$ .

D'où l'algorithme est en  $O(n)$ .

Q2 Erreur 1: On a  $\mathbb{E}[\text{cond } f] = \sum \mathbb{E}[y_i] = n \cdot n^{-1/4} = n^{3/4}$

Par inégalité de Bienaymé - Tchebychev appliquée à

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\text{Var}[X]}{a^2}.$$

## Exercice 1. Black jack.

Loi faible des grands nombres:

Soit  $\bar{X}$  le nombre de parties de Blackjack gagnées.

$$\text{P}(|\bar{X} - 1/2| \geq 5\%) \leq \frac{\text{Var}[\bar{X}]}{n(5\%)^2} \leq \frac{1}{n \cdot (5\%)^2}$$

Pour avoir  $\text{P}(\text{il me triche pas}) \geq 10\%$  il suffit d'avoir  $n = \frac{1}{(10\%)(5\%)^2} = 4000$

D'après Chernoff,

$$\text{P}(X \geq \frac{1}{2} + (5\%)) \leq \exp(-2(5\%)^2/n)$$

$$\begin{aligned} \exp(-2(5\%)^2/n) &\leq 10\% \quad (\Rightarrow 2(5\%)^2/n \leq \ln(10)) \\ &\Rightarrow n \geq \ln(10) / (2 \cdot (5\%)^2) \end{aligned}$$

D'où  $n \geq 461$ . Beaucoup plus précis...

## Exercice 2. Random Algorithm.

Algorithme B:

On lance  $A(x)$  fois l'algorithme  $A$  sur l'entrée  $x$ .

On note  $(A_i)$  les résultats des executions de  $A$ .

On renvoie la réponse majoritaire

Si  $x \notin L$ , alors on a:  $E[X] \leq k/3$ .

Si  $x \in L$ , alors on a:  $E[X] \geq 3k/4$ .

Pour inégalité de Chernoff, on a:

- si  $x \notin L$ , alors

$$P(B(x) = 1) = P(X \geq k/2) \leq \exp\left(-\frac{(1/2)^2}{2+1} \cdot \frac{k}{3}\right) = \exp\left(-\frac{k}{30}\right).$$

- si  $x \in L$ , alors

$$P(B(x) = 0) = P(X \leq k/2) \leq \exp\left(-\frac{1}{2+1} \times \frac{3k}{4}\right) = \exp(-k/24)$$

$$\Rightarrow k = 30|x| / \log_2 e$$

### Exercice 3. Interrupteurs

Partie I.

Q1 On pose  $Y := \mathbb{1}_{x \geq 1/4}$ . On a:

$$1 = \mathbb{E}[x] = \mathbb{E}[xy] + \underbrace{\mathbb{E}[x \mathbb{1}_{x \leq 1/4}]}_{\leq 1/4}$$

d'où

$$\sqrt{3 \mathbb{E}[y^2]} \geq \mathbb{E}[xy] \geq \frac{3}{4}$$

$$\mathbb{E}[y] = P(X \geq 1/4)$$

D'où  $\mathbb{E}[y] = 3/16$ .

$$\begin{aligned} Q2. \quad \mathbb{E}[y^2] &= \mathbb{V}_\text{on}[y] + \mathbb{E}[y]^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum \mathbb{V}_\text{on}[x_i] \quad \text{et } \mathbb{E}[y] = 0 \quad \text{car } \mathbb{E}[x_i] = 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[y^4] &= \frac{1}{n^2} \mathbb{E}\left[\sum x_i x_j x_k x_\ell\right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum \mathbb{E}[x_i x_j x_k x_\ell] \end{aligned}$$

$$\text{Cas 1: } i \neq j, k, l \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[x_i x_j x_k x_\ell] = 0$$

$$\text{Cas 2: } i=k \neq j=l \Rightarrow \mathbb{E}[x_i x_j x_k x_l] = 1$$

$$\text{Cas 3: } i=j=k=l \Rightarrow \mathbb{E}[x_i x_j x_k x_l] = 1$$

$$\text{D'où } \mathbb{E}[Y^4] = \frac{1}{n^4} \left( n + \underbrace{3 \cdot n(n-1)}_{\substack{i=j \neq k=l \\ i=k \neq j=l \\ i=l \neq j=k}} \right) = 3 - \frac{2}{n} \leq 3.$$

choix de i  
 et choix du 2<sup>nd</sup>  
 indice

$$\gamma \geq \mathbb{P}(Y^2 \geq 1/4) \stackrel{\text{passage à la racine}}{\downarrow} = \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} |X_1 + \dots + X_n| \geq 1/2\right)$$

$$= \mathbb{P}(|X_1 + \dots + X_n| \geq \sqrt{n}/2) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_1 + \dots + X_n|]}{\sqrt{n}/2}$$

$$\text{D'où, } \mathbb{E}[|X_1 + \dots + X_n|] \geq \frac{\gamma}{2} \cdot \sqrt{n}.$$

János