# TD n°1 Théorie des catégories

Hugo SALOU
Dept. Informatique



8 octobre 2024

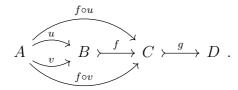
### Table des matières

Exercice 1.	3
Exercice 2.	4
Exercice 3.	5
Exercice 4.	6
Exercice 5.  5.A Stabilité de « plein » par isomorphisme	7 7 8 8
Exercice 6.	9
Exercice 7.	10
Exercice 8.	11
Exercice 9.	12
Exercice 10.	14
Exercice 11.	16

### Exercice 1.

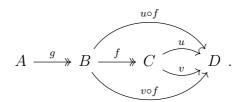
Montrer que la composition de deux monomorphismes est un monomorphisme. Énoncer et prouver l'énoncé dual.

Soit C une catégorie. Soient  $u, v: A \to B$  deux morphismes et soient  $f: B \to C$  et  $g: C \to D$  deux monomorphismes.



Supposons que  $g \circ f \circ u = g \circ f \circ v$ , alors (par associativité de  $\circ$  et monomorphisme g) on a  $f \circ u = f \circ v$ . Mais, par le monomorphisme f, on en déduit que u = v. Ceci montre que l'on  $g \circ f$  est un monomorphisme.

La propriété duale est que la composition de deux épimorphismes est un épimorphisme. Par dualité de la preuve précédente, on obtient le résultat.



### Exercice 2.

Soit  $F: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$  et  $G: \mathbf{D} \to \mathbf{E}$  deux foncteurs contravariants. Montrer que  $G \circ F: \mathbf{C} \to \mathbf{E}$  est covariant.

Soient u et v deux morphismes composables de  $\mathbb{C}$ . On calcule

$$G \circ F(u \circ v) = G(F(v) \circ F(u)) = G(F(u)) \circ G(F(v)).$$

On en déduit donc que le foncteur  $G \circ F$  est covariant.

### Exercice 3.

Montrer que si F est un foncteur fidèle et si F(f) est un monomorphisme alors f est un monomorphisme.

Soit  $F: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$  un foncteur fidèle. Soit de plus  $(f: B \to C) \in \mathbf{C}_1$  tel que F(f) soit un monomorphisme. Soient  $u, v: A \to B$  deux morphismes de  $\mathbf{C}$ .

$$A \xrightarrow{v} B \xrightarrow{f} C$$

$$F(u) \xrightarrow{F(v)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(C)$$

Supposons que  $F(u) \circ F(f) = F(v) \circ F(f)$ . On sait donc, par le monomorphisme F(f), que F(u) = F(v). Et par fidélité de F (injectivité pour les morphismes), on en déduit que u = v.

On en déduit que f est un monomorphisme.

$$A \xrightarrow{v} B \xrightarrow{f} C$$

$$F(A) \xrightarrow{F(v)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(C)$$

### Exercice 4.

Soient C et D deux catégories. Définir une catégorie [C, D] (aussi notée Fun(C, D)) telle que ses objets sont les foncteurs de C vers D, et ses morphismes sont les transformations naturelles entre ces foncteurs.

On définit la catégorie [C, D] par

- ▶ ses objets sont les foncteurs de C vers D;
- ▷ ses morphismes sont les transformations naturelles entre foncteurs;
- $\triangleright$  sa loi de composition est, pour  $\eta$  et  $\varepsilon$  deux transformations naturelles,  $(\varepsilon \circ \eta)_A = \varepsilon_A \circ \eta_A$  quel que soit  $A \in ob(\mathbf{C})$ .

Nous devons montrer que l'opération  $\circ_{[\mathbf{C},\mathbf{D}]}$  est associative et unitaire. Mais, ces propriétés découlent clairement de l'associativité et de l'unitarité de la loi  $\circ_{\mathbf{C}}$ .

### Exercice 5.

Soient  $F,G: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$  deux foncteurs. On suppose que F et G sont isomorphes (il existe un isomorphisme naturel entre F et G). Montrer que F est plein, ou fidèle, ou quasi-inversible si, et seulement si, G l'est.

On procède en trois temps. Pour chaque propriété, on ne démontre qu'une implication mais, vue la symétrie des propriétés (et car l'inverse d'un isomorphisme est un isomorphisme), ceci démontre l'équivalence.

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)$$

$$\downarrow^{\eta_A} \qquad \downarrow^{\eta_B}$$

$$G(A) \xrightarrow{G(f)} G(B)$$

$$(5.1)$$

On note ici  $\eta_A: F(A) \rightsquigarrow G(A)$  lorsque  $\eta_A$  est un isomorphisme de F(A) à G(A).

### 5.A Stabilité de « plein » par isomorphisme.

Supposons F plein.

Soit  $\alpha: A \to B$  un morphisme de **D**. Par surjectivité, il existe un morphisme f tel que  $F(f) = \alpha$ . On pose  $g = \eta_A^{-1} \circ f \circ \eta_B$  de telle sorte que l'on ait  $Gg = \alpha$  (c.f. diagramme commutatif 5.1).

D'où, G est plein.

Hugo Salou – L3 ENS LYON Théorie des catégories **5.B Stabilité de « fidèle » par isomorphisme.** 

Supposons F fidèle.

Soient  $f, g: A \to B$  dans **C** tels que G(f) = G(g) (on notera l'hypothèse  $(\star)$ ). Montrons que f = g.

On calcule

$$\eta_B \circ F(g) =_{(5.1)} G(g) \circ \eta_A =_{(\star)} G(f) \circ \eta_B =_{(5.1)} \eta_B \circ F(f).$$

D'où, F(g) = F(f) car  $\eta_A$  et  $\eta_B$  sont des isomorphismes donc des monomorphismes. On en déduit que f = g, car F est supposé fidèle.

On en déduit que G est fidèle.

## 5.C Stabilité de « quasi-inversible » par isomorphisme.

Supposons F quasi-inversible. Par le théorème de caractérisation des équivalences, on sait que F est pleinement fidèle et essentiellement surjective. Pour montrer que G est quasi-inversible, il suffit de montrer que :

- $\triangleright$  G est plein (prouvé en 5.A);
- $\triangleright$  G est fidèle (prouvé en 5.B);
- $\triangleright$  G est essentiellement surjectif.

Il ne reste que le dernier point à démontrer. Soit Y un objet de  $\mathbf{D}$ , montrons qu'il existe  $X \in \text{ob}(\mathbf{C})$  tel que G(X) et Y sont isomorphes dans  $\mathbf{D}$ . On sait qu'il existe  $X \in \text{ob}(\mathbf{C})$  tel que G(X) et Y sont isomorphes; soit un tel X.

$$Y \xrightarrow{} F(X) \xrightarrow{\eta_X} G(X)$$
.

Ainsi, par composition d'isomorphismes, on sait que Y et G(X) sont isomorphes.

On en conclut que G est quasi-inversible.

### Exercice 6.

Soit  $\mathbb{C}$  une catégorie possédant un objet final  $\mathbb{F}$ . Montrer que tout morphisme  $f: \mathbb{F} \to X$  est un monomorphisme. Énoncer et prouver l'énoncé dual.

Comme  $\mathbb{F}$  est final, on sait donc que  $\# \operatorname{Hom}(X, \mathbb{F}) = 1$  quel que soit l'objet  $X \in \operatorname{ob}(\mathbf{C})$ . Soit  $f : \mathbb{F} \to Z$  et soient  $u, v : X \to \mathbb{F}$  des morphismes quelconques. Supposons que  $f \circ u = f \circ v$ .

$$X \xrightarrow{v} \mathbb{F} \xrightarrow{f} Z .$$

Comme  $u,v\in \operatorname{Hom}(X,\mathbb{F})$  de cardinal 1, on en déduit que u=v.

D'où f est un monomorphisme.

$$X \xrightarrow{v} \mathbb{F} \rightarrowtail Z$$
.

L'énoncé dual est : tout morphisme  $g:X\to\mathbb{I}$  est un épimorphisme, où  $\mathbb{I}$  est un objet initial de  $\mathbf{C}$ . Pour le démontrer, il suffit de procéder par dualité : le dual d'un objet initial est un objet final et le dual d'un épimorphisme est un monomorphisme.

$$X \xrightarrow{g} \mathbb{I} \xrightarrow{v} Z$$
.

### Exercice 7.

Soit  $\mathbf{Ens_f}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Ens}$  dont les objets sont des ensembles finis. On définit une sous-catérorie pleine  $\mathbf{C}$  de  $\mathbf{Ens_f}$  dont les objets sont les sous-ensembles de  $\mathbb{N}$  de la forme  $[1,n] = \{1,\ldots,n\}$ . Prouver que le foncteur d'inclusion de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{Ens_f}$  est une équivalence, de sorte que  $\mathbf{C}$  soit un squelette de  $\mathbf{Ens_f}$ .

Soit

$$F: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Ens_f}$$

$$A \longmapsto A$$

$$(u: A \to B) \longmapsto (u: A \to B)$$

le foncteur d'inclusion de  ${\bf C}$  dans  ${\bf Ens_f}$ . On applique le critère d'équivalence. Pour cela, il suffit de montrer que F est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

 $\triangleright$  Le foncteur F est pleinement fidèle. En effet, l'application

$$\operatorname{id}_{\operatorname{Hom}(A,B)} : \operatorname{Hom}(A,B) \longrightarrow \operatorname{Hom}(F(A),F(B)) = \operatorname{Hom}(A,B)$$
  
$$f \longmapsto f$$

est trivialement injective et surjective.

▷ Le foncteur F est essentiellement surjectif. En effet, soit un ensemble fini  $Y \in \text{ob}(\mathbf{Ens_f})$ . On pose la partie  $X = \llbracket 1, n \rrbracket$  de  $\mathbb{N}$  où n = #Y (qui existe car Y fini). On conclut par

$$F(X) = [1, \#Y] \cong Y.$$

On en déduit que F définit une équivalence.

Pour justifier que **C** est un squelette, il suffit de remarquer que l'on a  $[1, n] \cong S$  si, et seulement si n = #S où  $S \in \text{ob}(\mathbf{Ens_f})$ .

### Exercice 8.

Montrer que Ens n'est pas équivalente à Ens<sup>op</sup>.

Par l'absurde, supposons les deux catégories équivalentes.

Soit  $F: \mathbf{Ens} \to \mathbf{Ens}^\mathrm{op}$  un foncteur d'équivalence et soit Y un ensemble fini non-vide.

#### Remarquons que

- $\triangleright$  il existe une unique fonction de l'ensemble vide  $\emptyset$  vers un autre ensemble quelconque Y;
- $\triangleright$  il n'existe aucune fonction de Y vers  $\emptyset$ .

Par équivalence et car un isomorphisme conserve le cardinal,

$$\#\operatorname{Hom}_{\mathbf{Ens}}(\emptyset, Y) = \#\operatorname{Hom}_{\mathbf{Ens}^{\operatorname{op}}}(\emptyset, Y) = \#\operatorname{Hom}_{\mathbf{Ens}}(Y, \emptyset).$$

Mais, ceci est absurde :  $\#\operatorname{Hom}_{\mathbf{Ens}}(\emptyset, Y) = 1$  et  $\#\operatorname{Hom}_{\mathbf{Ens}}(Y, \emptyset) = 0$  (car Y supposé non vide).

### Exercice 9.

- 1. Montrer que l'application qui, à un groupe G associe son centre, et à un morphisme sa restriction au centre, n'est pas un foncteur.
- **2.** Construire un foncteur  $\operatorname{Grp} \to \operatorname{Ab}$  envoyant un groupe G sur son « abélianisé »  $G^{\operatorname{ab}} = G/D(G)$  où

$$D(G) = \langle ghg^{-1}h^{-1} \mid g, h \in G \rangle.$$

1. On procède par l'absurde. On considère l'application

$$\varphi: \operatorname{GL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \operatorname{GL}_3(\mathbb{R})$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or, on sait que le centre de  $GL_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices de la forme  $\lambda \mathbf{I}_n$  où  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Ainsi, l'application  $\varphi|_{Z(GL_2(\mathbb{R}))}$  n'est **pas** à valeur dans  $Z(GL_3(\mathbb{R}))$ .

Par exemple, la matrice  $\mathbf{A} = 2\mathbf{I}_2$  est dans le centre de  $GL_2(\mathbb{R})$  mais la matrice

$$oldsymbol{B} = egin{pmatrix} oldsymbol{A} & oldsymbol{0}_{2 imes 1} \ oldsymbol{0}_{1 imes 2} & oldsymbol{I}_1 \end{pmatrix}$$

n'y est pas.

2. On pose l'application

$$\Psi: \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

$$G \longmapsto G^{\mathrm{ab}} = G/D(G)$$

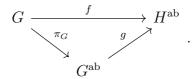
$$(u: G \to H) \longmapsto (\Psi(u): G^{\mathrm{ab}} \to H^{\mathrm{ab}}).$$

$$- 12/18 -$$

Hugo Salou – L3 ens lyon

Théorie des catégories

Justifions de la construction de  $\Phi(u)$ . On note  $\pi_G: G \to G^{ab}$  et  $\pi_H: H \to H^{ab}$  les projections canoniques sur  $G^{ab}$  et  $H^{ab}$  respectivement. On pose  $f = \pi_H \circ u: G \to H^{ab}$ . Et, on factorise le morphisme f par D(G):



Ceci peut être effectué car :

- $\triangleright$  on a  $D(G) \triangleleft G$ ;
- $\triangleright$  on a  $D(G) \subseteq \ker f$  car, pour  $g, h \in G$ , on a

$$u(g h g^{-1} h^{-1}) = u(g) u(h) u(g)^{-1} u(h)^{-1} \in D(H),$$

d'où  $\ker f = \ker(\pi_H \circ u) \supseteq D(G)$ .

Il ne reste que deux points à vérifier :

- u  $\Psi(\mathrm{id}_G) = \mathrm{id}_{G^{\mathrm{ab}}}$ , ce qui découle clairement de la définition de  $\Psi$  pour les morphismes.
- $\quad \quad \triangleright \ \Psi(u \circ v) = \Psi(u) \circ \Psi(v), \ \text{où} \ v : G \to H \ \text{et} \ u : H \to K.$

$$G \xrightarrow{v} H \xrightarrow{u} K$$

$$\downarrow^{\pi_G} \qquad \downarrow^{\pi_H} \qquad \downarrow^{\pi_K}$$

$$\Psi(G) \xrightarrow{\Psi(v)} \Psi(H) \xrightarrow{\Psi(y)} \Psi(K)$$

Pour démontrer l'égalité souhaitée, il suffit de remarquer que

$$\begin{split} (\Psi(v) \circ \Psi(u))(g \ D(G)) &= \Psi(v)(\Psi(u)(g \ D(G))) \\ &= \Psi(v)(u(g) \ D(H)) = v(u(g)) \ D(K), \end{split}$$

car l'égalité  $\Psi(u)(g D(G)) = u(g) D(H)$  est vérifiée (et de même pour v).

### Exercice 10.

Soit G un groupe. On considère la catégorie (encore notée G) où le seul objet est  $\bullet$ , et où  $\text{Hom}(\bullet, \bullet) = G$ . Plus précisément, les morphismes sont indexés par G, et si  $g,h: \bullet \to \bullet$  sont deux morphismes, leur composé est  $g \circ h = gh: \bullet \to \bullet$ . Soient G et H deux groupes vus comme des catégories.

- 1. Décrire les foncteurs de G vers H.
- **2.** Soit S et T deux foncteurs  $G \to H$ . Montrer qu'il existe une transformation naturelle  $S \Rightarrow T$  si, et seulement si, S et T sont conjugués (i.e. il existe  $h \in H$  tel que, pour tout  $g \in G$ , on ait  $T(g) = h S(g) h^{-1}$ ).
- 1. Les foncteurs F de G vers H vérifient :

$$ightharpoonup F(1_G) = 1_H;$$

$$\triangleright F(gh) = F(g \circ h) = F(g) \circ F(h) = F(g) F(h);$$

$$\triangleright F(q^{-1}) = (F(q))^{-1}$$
, en effet :

$$F(g^{-1}) \circ F(g) = F(g^{-1}g) = F(1_G) = F(gg^{-1}) = F(g) \circ F(g^{-1}).$$

Ce sont donc les homomorphismes de groupes de G vers H.

2. On procède par équivalence.

On a une transformation naturelle  $\varphi: S \Rightarrow T$  si, et seulement si le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\bullet & \xrightarrow{S(g)} & \bullet \\
\downarrow \varphi_{\bullet} & & \downarrow \varphi_{\bullet} \\
\bullet & \xrightarrow{T(g)} & \bullet
\end{array}$$

commute, ce qui est vrai si, et seulement si  $\varphi_{\bullet} \circ T(g) = S(g) \circ \varphi_{\bullet}$ . Et, par définition de la catégorie G et que  $\varphi_{\bullet}$  est un morphisme

Hugo Salou – L3 Ens lyon Théorie des catégories de la catégorie G, il existe donc  $h \in G$  tel que  $\varphi_{\bullet} = h$ . Ceci termine l'équivalence :

$$\varphi: S \Rightarrow T \iff h T(g) = S(g) h \iff T(g) = h S(g) h^{-1}.$$

### Exercice 11.

Soient A et B deux ensembles, leur ensemble des parties peuvent être minis de l'ordre partiel  $\subseteq$ . On peut alors considérer leur catégorie posétale, toujours notées  $\wp(A)$  et  $\wp(B)$ .

- 1. Représenter sous forme d'un graphe la catégorie  $\wp(\{1,2,3\})$  (faire un dessin avec des points et des flèches).
- **2.** Soit  $f: A \to B$  une application. Montrer que l'image directe et l'image réciproque définies ci-dessous définissent des foncteurs entre ces catégories :

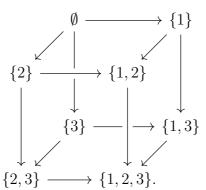
$$\begin{split} f:\wp(A) &\longrightarrow \wp(B) & f^{-1}:\wp(B) \longrightarrow \wp(A) \\ S &\longmapsto \{f(a) \mid a \in S\} & S &\longmapsto \{a \in A \mid f(a) \in S\}. \end{split}$$

(N'oubliez pas de définir l'action de f et  $f^{-1}$  sur les morphismes de ces catégories!)

- 3. Conclure que l'ensemble des parties ℘ peut être vu comme un foncteur covariant Ens → Cat, ou un foncteur contravariant Ens → Cat en fonction de l'action sur les morphismes choisie.
- 1. On dessine le graphe (simplifié par la transitivité et réflexivité

Théorie des catégories

Hugo Salou – L3 ens lyon de  $\subseteq$ ):



- 2. Procédons en deux temps. On se rappelle que l'on considère une catégorie *posétale*.
  - ▷ On définit

$$f: \mathbf{Ens} \longrightarrow \mathbf{Ens}$$
  
 $A \longmapsto f(A)$   
 $(u: A \to B) \longmapsto (f(u): f(A) \to f(B)).$ 

Montrons que c'est un foncteur covariant.

- On a  $f(id_A) = id_{f(A)}$  car  $Hom(A, A) = \{u_{A,A} = id_A\}$  et  $Hom(f(A), f(A)) = \{u_{f(A), f(A)} = id_{f(A)}\}.$
- Si on a  $a:X\to Y$  et  $b:Y\to Z$ , alors on a l'égalité  $f(b\circ a)=f(b)\circ f(a)$ . En effet, en langage ensembliste, on a  $X\subseteq Y\subseteq Z$  et on doit montrer que

$$f(X) \subseteq f(Y) \subseteq f(Z)$$
,

ce qui est vrai par croissance (pour  $\subseteq$ ) de l'image directe.

On en conclut que f est un foncteur covariant.

▷ On définit

$$f^{-1}: \mathbf{Ens} \longrightarrow \mathbf{Ens}$$
  
 $A \longmapsto f^{-1}(A)$   
 $(u: A \to B) \longmapsto (f^{-1}(u): f^{-1}(A) \to f^{-1}(B)).$ 

Montrons que c'est un foncteur covariant.

Théorie des catégories

Hugo Salou – 
$$L3$$
 ENS LYON  
– On a  $f^{-1}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{f^{-1}(A)}$  car

$$\operatorname{Hom}(A, A) = \{u_{A,A} = \operatorname{id}_A\}$$

et

$$\operatorname{Hom}(f^{-1}(A), f^{-1}(A)) = \{u_{f^{-1}(A), f^{-1}(A)} = \operatorname{id}_{f^{-1}(A)}\}.$$

– Si on a  $a: X \to Y$  et  $b: Y \to Z$ , alors on a l'égalité  $f^{-1}(b \circ a) = f^{-1}(b) \circ f^{-1}(a)$ . En effet, en langage ensembliste, on a  $X \subseteq Y \subseteq Z$  et on doit montrer que

$$f^{-1}(X) \subseteq f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Z),$$

ce qui est vrai par croissance (pour  $\subseteq$ ) de l'image réciproque.

On en conclut que  $f^{-1}$  est un foncteur covariant.

3. On pose le foncteur

$$\wp : \mathbf{Ens} \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

$$A \longmapsto \wp(A)$$

$$(u : A \to B) \longmapsto ?$$

- Avec  $? = (\wp(u) : \wp(A) \to \wp(B))$  défini comme l'image directe, on définit un foncteur  $\wp$  covariant.
- Avec  $? = (\wp(u) : \wp(B) \to \wp(A))$  défini comme l'image réciproque, on définit un foncteur  $\wp$  contravariant.