

La théorie des ensembles.

On se place dans la logique du 1er ordre avec $\mathcal{L} = \{\in, =\}$. On se place dans un univers \mathcal{U} non vide, le modèle, dont les éléments sont appelés des *ensembles*.

Il faudra faire la différence entre les ensembles « naïfs » (les ensembles habituels), et les ensembles « formels » (les éléments de \mathcal{U}).

On a le paradoxe de Russel. On peut l'écrire

« On a un barbier qui rase tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes. Qui rase le barbier ? ».

Si \mathcal{U} est l'ensemble de tous les ensembles, alors

$$a := \{ x \in \mathcal{U} \mid x \notin x \}$$

vérifie $a \in a \iff a \notin a$, **paradoxe**. Pour éviter ce paradoxe, on choisit donc de ne pas faire \mathcal{U} un ensemble.

1 Les axiomes de la théorie de Zermelo-Fraenkel.

ZF 1. *Axiome d'extensionnalité* : deux ensembles sont égaux ssi ils ont les mêmes éléments

$$\forall x \forall y \left(\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y \right).$$

- *Axiome de la paire*¹ : il existe une paire $\{x, y\}$ pour tout élément x et y

$$\forall x \forall y \exists z \forall t \left(t \in z \leftrightarrow (t = x \vee t = y) \right).$$

[continué plus tard...]

1. On verra plus tard que cet axiome est une conséquence des autres (de [ZF 3](#) et [ZF 4](#)).

Remarque 1. Cela nous donne l'existence du *singleton* $\{x\}$ si x est un ensemble. En effet, il suffit de faire la paire $\{x, x\}$ avec l'Axiome de la paire.

Définition 1. Si a et b sont des ensembles, alors (a, b) est l'ensemble $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Ainsi, (a, a) est l'ensemble $\{\{a\}\}$.

Lemme 1. Pour tous ensembles a, b, a', b' , on a $(a, b) = (a', b')$ ssi $a = a'$ et $b = b'$.

Preuve. En exercice. □

Définition 2. On peut construire des 3-uplets (a_1, a_2, a_3) avec $(a_1, (a_2, a_3))$, et ainsi de suite pour les n -uplets.

Notation. On utilise les raccourcis

- ▷ $t = \{a\}$ pour $\forall x (x \in t \leftrightarrow x = a)$;
- ▷ $t = \{a, b\}$ pour $\forall x (x \in t \leftrightarrow (x = a \vee x = b))$;
- ▷ $t \subseteq a$ pour $\forall x (x \in t \rightarrow x \in a)$.

ZF3. *Axiome des parties* : l'ensemble des parties $\wp(a)$ existe pour tout ensemble a

$$\forall a \exists b \forall t (t \in b \leftrightarrow t \subseteq a).$$

ZF2. *Axiome de la réunion* : l'ensemble $y = \bigcup_{z \in x} z$ existe

$$\forall x \exists y \forall t (t \in y \leftrightarrow \exists z (t \in z \wedge z \in x)).$$

Remarque 2. Comment faire $a \cup b$? La paire $x = \{a, b\}$ existe par l'Axiome de la paire, et $\bigcup_{z \in x} z = a \cup b$ est un ensemble par ZF2.

ZF4'. *Schéma de compréhension* : pour toute formule $\varphi(y, v_1, \dots, v_n)$, on a l'ensemble $x = \{y \in v_{n+1} \mid \varphi(y, v_1, \dots, v_n)\}$

$$\forall v_1 \dots \forall v_n \exists x \forall y \left(y \in x \leftrightarrow (y \in v_{n+1} \wedge \varphi(y, v_1, \dots, v_n)) \right).$$

Remarque 3. Peut-on faire le paradoxe de Russel ? On ne peut pas faire $a := \{z \in \mathcal{U} \mid z \notin z\}$ car \mathcal{U} n'est pas un ensemble ! Et, on ne peut pas avoir de paradoxe avec $b := \{z \in E \mid z \notin z\}$, car on a l'ajout de la condition $b \in E$.

Définition 3. Une *relation fonctionnelle* en w_0 est une formule $\varphi(w_1, w_2, a_1, \dots, a_n)$ à paramètres (où les a_i sont dans \mathcal{U}) telle que

$$\mathcal{U} \models \forall w_0 \forall w_1 \forall w_2 (\varphi(w_0, w_1, a_1, \dots, a_n) \wedge \varphi(w_0, w_2, a_1, \dots, a_n) \rightarrow w_1 = w_2).$$

En termes naïfs, c'est une fonction partielle. On garde le terme *fonction* quand le domaine et la collection d'arrivée sont des *ensembles*, autrement dit, des éléments de \mathcal{U} .

ZF 4. *Schéma de substitution/de remplacement* : « la collection des images par une relation fonctionnelle des éléments d'un ensemble est aussi un ensemble ». Pour tout n -uplet \bar{a} , si la formule à paramètres $\varphi(w_0, w_1, \bar{a})$ définit une relation fonctionnelle $f_{\bar{a}}$ en w_0 et si a_0 est un ensemble alors la collection des images par $f_{\bar{a}}$ des éléments de a_0 est un ensemble nommé a_{n+1}

$$\begin{aligned} & \forall a_0 \dots \forall a_n \\ & (\forall w_0 \forall w_1 \forall w_2 (\varphi(w_0, w_1, a_1, \dots, a_n) \wedge \varphi(w_0, w_2, a_1, \dots, a_n)) \rightarrow w_1 = w_2) \\ & \quad \downarrow \\ & \exists a_{n+1} \forall a_{n+2} (a_{n+2} \in a_{n+1} \leftrightarrow \exists w_0 w_0 \in a_0 \wedge \varphi(w_0, a_{n+2}, v_1, \dots, v_n)). \end{aligned}$$

Théorème 1. Si ZF 1, ZF 2, ZF 3 et ZF 4 sont vrais dans \mathcal{U} , il existe (dans \mathcal{U}) un et un seul ensemble sans élément, que l'on notera \emptyset .

Preuve. ▷ *Unicité* par ZF 1.

- ▷ *Existence.* On procède par compréhension : l'univers \mathcal{U} est non vide, donc a un élément x . On considère la formule $\varphi(w_0, w_1) := \perp$ qui est une relation fonctionnelle. Par ZF 4 (avec la formule φ et l'ensemble $a_0 := x$) un ensemble a_{n+1} qui est vide.

□

Proposition 1. Si ZF 1, ZF 2, ZF 3 et ZF 4 sont vrais dans \mathcal{U} , alors l'Axiome de la paire est vrai dans \mathcal{U} .

Preuve. On a \emptyset dans \mathcal{U} et également $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$ et $\wp(\wp(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ par ZF 3.

Étant donné deux ensemble a et b , on veut montrer que $\{a, b\}$ est un ensemble avec ZF 4

$$\varphi(w_0, w_1, a, b) := (w_0 = \emptyset \wedge w_1 = a) \vee (w_0 = \{\emptyset\} \wedge w_1 = b),$$

où

- ▷ $w_0 = \emptyset$ est un raccourci pour $\forall z (z \notin w_0)$;
- ▷ $w_0 = \{\emptyset\}$ est un raccourci pour $\forall z (z \in w_0 \leftrightarrow (\forall t t \notin z))$.

Ces notations sont compatibles avec celles données précédemment.

Comme φ est bien une relation fonctionnelle et $\{a, b\}$ est l'image de $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. □

Proposition 2. Si ZF 1, ZF 2, ZF 3 et ZF 4 sont vrais dans \mathcal{U} , alors ZF 4' est vrai dans \mathcal{U} .

Preuve. On a la formule $\varphi(y, v_1, \dots, v_n)$ et on veut montrer que

$$\mathcal{U} \models \forall v_1 \cdots \forall v_{n+1} \exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow (y \in v_{n+1} \wedge \varphi(y, v_1, v_n))).$$

On considère la formule $\psi(w_0, w_1, \bar{v}) := w_0 = w_1 \wedge \varphi(w_0, \bar{v})$, qui est bien une relation fonctionnelle en w_0 . La collection

$$\{y \in v_{n+1} \mid \varphi(y, v_1, \dots, v_n)\}$$

est l'image de v_{n+1} par ψ par ZF 4. □

Remarque 4. La réciproque du théorème précédent est fausse ! Les axiomes ZF 4 et ZF 4' ne sont pas équivalents. On le verra en TD (probablement).

Proposition 3. Le produit ensembliste de deux ensembles est un ensemble.

Preuve. Soient v_1 et v_2 deux ensembles. On considère

$$X := v_1 \times v_2 = \{(x, y) \mid x \in v_1 \text{ et } y \in v_2\} \text{ (en naïf) .}$$

La notation (x, y) correspond à l'ensemble $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \wp(\wp(v_1 \cup v_2))$.

On applique ZF 4' dans l'ensemble ambiant $\wp(\wp(v_1 \cup v_2))$, on définit le produit comme la compréhension à l'aide de la formule

$$\varphi(z, v_1, v_2) := \exists x \exists y (z = \{\{x\}, \{x, y\}\} \wedge x \in v_1 \wedge y \in v_2).$$

C'est bien un élément de \mathcal{U} . □

Définition 4. Une *fonction* (sous-entendu *totale*) d'un ensemble a dans un ensemble b est un sous-ensemble de $a \times b$ qui vérifie la

propriété

$$\varphi(f, a, b) := \left(\begin{array}{c} f \subseteq a \times b \\ \wedge \\ \forall x \forall y \forall y' (x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \rightarrow y = y' \\ \wedge \\ \forall x x \in a \rightarrow \exists y y \in b \wedge (x, y) \in f \end{array} \right).$$

On identifie ainsi f et son graphe.

Une *fonction partielle* d'un ensemble a dans un ensemble b est un sous-ensemble de $a \times b$ qui vérifie la propriété

$$\varphi(f, a, b) := \left(\begin{array}{c} f \subseteq a \times b \\ \wedge \\ \forall x \forall y \forall y' (x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \rightarrow y = y' \end{array} \right).$$

On note b^a la collection des fonctions partielles de a dans b .

Proposition 4. La collection b^a est un ensemble, *i.e.* si a et b sont dans \mathcal{U} alors b^a aussi.

Preuve. En exercice. □

Remarque 5 (Réunion indexée). Soit a une famille d'ensemble indexée par l'ensemble I , *i.e.* a est une fonction de domaine I . Si $i \in I$, on note a_i pour $a(i)$.

Proposition 5. Si I est un ensemble et a est une fonction de domaine I , alors $\bigcup_{i \in I} a_i$ est un ensemble. Autrement dit, si dans \mathcal{U} , ZF1, ZF2, ZF3, ZF4 sont vraies, et que I et a sont dans \mathcal{U} , et a est une fonction, alors la collection définie naïvement par $\bigcup_{i \in I} a_i$ appartient à \mathcal{U} .

Preuve. On pose $b := \{a_i \mid i \in I\}$. C'est bien un ensemble car b

est l'ensemble des images des éléments de I par a . On peut écrire a comme relation fonctionnelle :

$$\varphi(w_0, w_1, a) := (w_0, w_1) \in a.$$

On a donc que b est un ensemble avec [ZF 4](#).

Et, $\bigcup_{i \in I} a_i = \bigcup_{z \in b} z$ donc on conclut par [ZF 2](#). □

Proposition 6 (Propriété d'intersection). Si I est un ensemble non vide et a est une fonction de domaine I alors $\bigcap_{i \in I} a_i$ est un ensemble.

Preuve. On pose $c := \bigcup_{i \in I} a_i$ qui est un ensemble par [ZF 2](#). On considère

$$\varphi(x, a, I) := \forall i \, i \in I \rightarrow x \in a_i.$$

Par compréhension ([ZF 4'](#)) on construit l'ensemble

$$\bigcap_{i \in I} a_i := \{x \in c \mid \varphi(x, a, I)\}.$$

□

Proposition 7. Si I est un ensemble et a une fonction de domaine i alors $\prod_{i \in I} a_i$ est un ensemble.

Preuve. La collection $\prod_{i \in I} a_i$ est l'ensemble des fonctions de I dans $\bigcup_{i \in I} a_i$ telles que $f(i) \in a_i$ pour tout i . □

ZF 5 *Axiome de l'infini* : il existe un ensemble ayant une infinité d'élément

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)).$$

On encode les entiers avec des ensembles :

$$\triangleright 0 \rightsquigarrow \emptyset$$

$$\triangleright 1 \rightsquigarrow \{\emptyset\}$$

- ▷ $2 \rightsquigarrow \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- ▷ \vdots
- ▷ $n + 1 \rightsquigarrow n \cup \{n\}$
- ▷ \vdots

Ainsi, on a bien $n = \{0, 1, \dots, n - 1\}$.

Remarque 6. Si on retire $\emptyset \in x$, on peut avoir $x = \emptyset$ qui satisfait la version modifiée de ZF5.

Cependant, sans retirer $\emptyset \in x$, on peut quand même avoir un ensemble fini s'il existe un ensemble fini y tel que $y \in y$. Ceci est impossible avec l'axiome de bonne fondation.

Remarque 7. Les français sont les seuls à considérer que l'axiome de bonne fondation ne fait pas partie de la théorie de ZF.

2 Ordinaux et induction transfinie.

Théorème 2 (Cantor). 1. Soient A et B deux ensembles et supposons qu'il existe des injections $A \rightarrow B$ et $B \rightarrow A$ alors il existe une bijection $A \rightarrow B$.
2. Il n'existe pas de surjection de $A \rightarrow \wp(A)$.

Preuve. En TD. □

Définition 5. Deux ensembles sont *équipotents* s'il existe une bijection entre-eux.

Définition 6. Soit A un ensemble. Un *ordre (partiel, strict)* sur A est une relation binaire $<$ (donnée par un sous-ensemble de $A \times A$) telle que

1. *transitivité* : $\forall x \forall y \forall z \ x < y \rightarrow y < z \rightarrow x < z$;

2. *anti-réflexif* : $\forall x, x \not\prec x$.

Notation. On note $x \leq y$ pour $x < y$ ou $x = y$.

Exemple 1. L'ordre \subsetneq sur $\wp(\mathbb{N})$ est partiel. Les ordres $<_{\mathbb{N}}$, $<_{\mathbb{R}}$, $<_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ sont totaux.

Définition 7. Soit $(A, <)$ ordonné. Soient $a, a' \in A$ et $B \subseteq A$. On dit que

- ▷ a est un plus petit élément de B si $a \in B$ et pour tout $b \in B$ et si $b \neq a$ alors $b > a$;
- ▷ a est un élément minimal de B si $a \in B$ et pour tout $b \in B$, $b \not\prec a$;
- ▷ a est un minorant de B si pour tout $b \in B$, $a \leq b$;
- ▷ de la même manière, on définit plus grand élément, élément maximal, majorant ;
- ▷ a est une borne inférieure de B si a est un plus grand élément de l'exemple des minorants de B ;
- ▷ a et a' sont incomparables si $a \neq a'$ et $a \not\prec a'$ et $a' \not\prec a$;
- ▷ un ordre est bien fondé si toute partie non vide de A a un élément minimal ;
- ▷ un bon ordre est un ordre total bien fondé.

Proposition 8. Un ordre total est bien fondé ssi il n'existe pas de suite infinie décroissante.

Preuve. En exercice. □

Exemple 2. ▷ L'ordre $<$ sur \mathbb{N} est bien fondé.

- ▷ L'ordre $<$ sur \mathbb{Z} n'est pas bien fondé.
- ▷ L'ordre \subsetneq sur $\wp_{\text{finies}}(\mathbb{N})$ est bien fondé.
- ▷ L'ordre \subsetneq sur $\wp(\mathbb{N})$ n'est pas bien fondé.

Définition 8. ▷ Deux ensembles ordonnés sont *isomorphes* s'il existe une bijection préservant l'ordre de l'un vers l'autre. On note $A \simeq B$.

- ▷ Soit X totalement ordonné. Un sous-ensemble $J \subseteq X$ est un *segment initial* si pour tous $a, b \in X$ avec $a < b$ alors $b \in J$ implique $a \in J$.
- ▷ Un ensemble X est *transitif* si pour tout $x \in X$ et $y \in x$ alors $y \in X$.
- ▷ Un ensemble X est un *ordinal* s'il est transitif et que \in définit un bon ordre sur X .
- ▷ On note \mathbb{O} la *classe des ordinaux*, et on note indifféremment les relations \in et $<$.

Exemple 3. Les entiers de Von Neumann sont des ordinaux.

Proposition 9. Soient α et β des ordinaux. On a les propriétés suivantes :

1. \emptyset est un ordinal ;
2. si $\alpha \neq \emptyset$ alors $\emptyset \in \alpha$;
3. $\alpha \notin \alpha$;
4. si $x \in \alpha$ alors $x = \{y \in \alpha \mid y < x\}$.
5. si $x \in \alpha$ alors x est un ordinal (on a l'abus de notation $x \in \mathbb{O}$) ;
6. $\beta \leq \alpha$ ssi $\beta = \alpha$ ou $\beta \in \alpha$;
7. $x = \alpha \cup \{\alpha\}$ est un ordinal noté $\alpha + 1$.

Preuve. 1. C'est vrai.

2. La relation \in est un bon-ordre sur α , soit β le plus petit élément. Si $\beta \neq \emptyset$ alors il contient au moins un élément γ d'où $\gamma < \beta$ et $\gamma \in \alpha$ (par transitivité), *absurde* car β minimal.
3. Le reste sera vu en TD ou en exercice.



Proposition 10. \triangleright Si α et β sont des ordinaux et que l'on a $\alpha \leq \beta \leq \alpha + 1$ alors $\beta = \alpha$ ou $\beta = \alpha + 1$.

\triangleright Si X est un ensemble non vide d'ordinaux alors $\bigcap_{\alpha \in X} \alpha$ est le plus petit élément de X .



Définition 9. Soit β un ordinal.

- \triangleright S'il existe α tel que $\beta = \alpha + 1$ alors on dit que β est un ordinal successeur ;
- \triangleright Sinon, c'est un ordinal limite.

Exemple 4. Quelques ordinaux limites :

$$\begin{array}{cccc} \omega & \omega \cdot 2 & \omega \cdot 3 & \omega \cdot \omega \\ & & & \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}} \end{array}$$

$$\omega^2 + \omega \quad \omega^\omega \quad \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}$$

Lemme 2. Soit X un ensemble d'ordinaux. Le plus petit élément de X est $\bigcap_{\alpha \in X} \alpha$.

Théorème 3. Si α et β sont des ordinaux alors une et une seule de ces propriétés est vérifiée :

$$\alpha = \beta \qquad \alpha \in \beta \qquad \alpha \ni \beta.$$

Preuve. Soit $X = \{\alpha, \beta\}$, on sait que $\alpha \cap \beta$ est le plus petit élément de X .

- \triangleright Si $\alpha \cap \beta = \alpha$ alors $\alpha \subseteq \beta$ donc $\alpha = \beta$ ou $\alpha \in \beta$.
- \triangleright Si $\alpha \cap \beta = \beta$ alors $\beta \subseteq \alpha$ donc $\alpha = \beta$ ou $\alpha \ni \beta$.



Proposition 11. Soit X un ensemble d'ordinaux. Alors l'ensemble $b := \bigcup_{\alpha \in X} \alpha$ est un ordinal. On le note $b = \sup_{\alpha \in X} \alpha$. De plus si $\gamma \in b$ alors il existe un certain $\alpha \in X$ tel que $\gamma \in \alpha$.

Preuve. En exercice. □

Proposition 12. Soit λ un ordinal non vide. On a :

$$\overbrace{\lambda \text{ est limite}}^{(1)} \iff \overbrace{\lambda = \bigcup_{\alpha \in \lambda} \alpha}^{(2)}.$$

Preuve. 1. Par contraposée, si λ n'est pas limite, c'est donc un successeur d'un certain ordinal β et donc $\lambda = \beta \cup \{\beta\}$. On a

$$\bigcup_{\alpha \in \lambda} \alpha = \beta \cup \bigcup_{\alpha \in \beta} \alpha = \beta \neq \lambda.$$

2. Soit λ limite. Montrons qu'il n'a pas de plus grand élément β . Sinon, $\lambda = \beta \cup \{\beta\}$. Donc, pour tout $\alpha \in \lambda$ il existe un certain $\gamma \in \lambda$ tel que $\alpha < \gamma$, i.e. $\alpha \in \gamma$. On en conclut que $\lambda = \bigcup_{\gamma \in \lambda} \gamma$. □

Théorème 4 (Induction transfinie). Soit \mathcal{P} une propriété sur les ordinaux. On suppose que :

- ▷ \emptyset satisfait \mathcal{P} ;
- ▷ pour tout ordinal α tel que, pour tout $\beta < \alpha$ satisfait \mathcal{P} , alors α satisfait \mathcal{P} :

$$\forall \alpha, (\forall \beta < \alpha, \mathcal{P}(\beta)) \implies \mathcal{P}(\alpha) ;$$

alors tous les ordinaux satisfont \mathcal{P} .

Preuve. Par l'absurde, soit α ne satisfaisant pas \mathcal{P} . Soit β le plus

petit ordinal de $\alpha \cup \{\alpha\}$ ne satisfaisant pas \mathcal{P} . Tous les ordinaux plus petit que β satisfont \mathcal{P} , d'où $\mathcal{P}(\beta)$, **absurde**. On en conclut que α n'existe pas. \square

Remarque 8. En pratique on décompose :

- ▷ on montre pour \emptyset ;
- ▷ on montre pour α successeur ;
- ▷ on montre pour α limite.

Définition 10. Un ordinal α est *fini* si $\alpha = \emptyset$ ou si α et sous ses éléments sont des successeurs.

Proposition 13. L'ensemble des ordinaux finis ω est un ordinal. C'est le plus petit ordinal limite.

Preuve. En exercice. \square

Lemme 3. Soit $f : \alpha \rightarrow \alpha'$ une fonction strictement croissante entre deux ordinaux α et α' . Alors $f(\beta) \geq \beta$ pour tout $\beta \in \alpha$. De plus, on a $\alpha' \geq \alpha$. Aussi si f est un isomorphisme alors $\alpha = \alpha'$ et f est l'identité.

Preuve. ▷ Soit β_0 le plus petit élément tel que $f(\beta_0) < \beta_0$.

Comme f strictement croissante, on a $f(f(\beta_0)) < f(\beta_0) < \beta_0$ absurde car β_0 est le plus petit.

- ▷ Soit $\beta \in \alpha$. On a $f(\beta) \in \alpha'$ et $\beta \leq f(\beta)$ donc $\beta \in \alpha'$, donc $\beta \in \alpha'$, d'où $\alpha \subseteq \alpha'$ et donc $\alpha \leq \alpha'$.
- ▷ Si f est un isomorphisme alors f^{-1} est strictement croissante. On applique le point précédent à f^{-1} , d'où $\alpha = \alpha'$.
- ▷ Montrons que f est l'identité. On sait que, pour tout $\beta \in \alpha$, on a $f|_\beta$ strictement croissante de β dans $f(\beta)$ et bijective, d'où $\beta = f(\beta)$ par le point précédent. D'où f est l'identité.

\square

Théorème 5. Tout ensemble bien ordonné est isomorphe à un ordinal. Cet ordinal ainsi que l'isomorphisme sont uniques.

Preuve. Cette preuve ressemble à une induction sans en être une. On aura le droit d'en faire quand on aura le théorème.

Si l'isomorphisme existe, il est unique grâce au lemme précédent. En effet, s'il y en a deux f et g alors $f \circ g^{-1}$ est un isomorphisme entre deux ordinaux égaux, donc c'est l'identité.

Notons $\mathcal{P}(x)$ la propriété « il existe un ordinal α_x et un isomorphisme $f_x : S_{\leq x} \rightarrow \alpha_x$ » où $S_{\leq x} := \{y \in X \mid y \leq x\}$. Pour montrer $\mathcal{P}(x)$ pour tout $x \in X$, on pose

$$Y := \{x \in X \mid \mathcal{P}(x) \text{ est vraie}\}.$$

et on montre $Y = X$.

Supposons $Y \neq X$ et soit $a = \min(X \setminus Y)$.

- ▷ Si Y a un plus grand élément b , alors il existe un isomorphisme $f_b : S_{\leq b} \rightarrow \alpha_b$ (car $\mathcal{P}(b)$). Or, $S_{\leq a} = S_{\leq b} \cup \{a\}$ (il faudrait montrer que Y est un segment initial de X). Et, on construit $f_a : S_{\leq a} \rightarrow \alpha_b \cup \{\alpha\}_b$ qui est un isomorphisme, donc $a \in Y$, **absurde**.
- ▷ Si Y n'a pas de plus grand élément, on considère $\alpha := \bigcup_{x \in Y} \alpha_x$ un ordinal. Pour tout $x < \alpha$ il existe un isomorphisme de $S_{\leq x}$ dans α_x . Si on prend $x < y < \alpha$ alors $(f_y)_{|S_{\leq x}}$ est un isomorphisme et, par unicité, on a donc que f_y prolonge f_x . On peut définir un isomorphisme $f_{\leq \alpha}$ comme limite des f_x pour $x < \alpha$. C'est un isomorphisme de $S_{< \alpha}$ dans $\beta := \bigcup_{x < \alpha} \alpha_x$. On peut prolonger f en $f_X : S_{\leq \alpha} \rightarrow \beta + 1$ où $\alpha \mapsto \beta$, d'où $\alpha \leq Y$, **absurde**.

□

Lemme 4 (Définition récursive transfinie des fonctions). Soient

- ▷ α un ordinal ;

- ▷ S une collection ;
- ▷ \mathcal{F} la collection des applications définies sur les ordinaux $\beta \leq \alpha$ et prenant leur valeurs dans S ;
- ▷ F une relation fonctionnelle de domaine \mathcal{F} à valeur dans S .

Alors il existe une fonction f dans \mathcal{F} (et une unique définie sur α) telle que :

$$(\star) \quad \text{pour tout } \beta < \alpha \quad f(\beta) = F(f|_\beta).$$

Preuve. Unicité. Soient f et g satisfaisant (\star) . Montrons $\mathcal{P}(\beta)$: « si $\beta < \alpha$ alors $f(\beta) = g(\beta)$ » par induction transfinie.

- ▷ On a directement $\mathcal{P}(\emptyset)$ car il y a une unique fonction de $\emptyset \rightarrow \emptyset$.
- ▷ Supposons que $f(\gamma) = g(\gamma)$ pour tout $\gamma < \beta$. Alors $f|_\beta = g|_\beta$ et donc par (\star) on a $f(\beta) = g(\beta)$.

Existence. Soit τ l'ensemble des ordinaux $\gamma \in \alpha$ tels qu'il existe $f_\gamma \in \mathcal{F}$ définie sur γ et vérifiant (\star) . Alors τ est un segment initial de α donc un ordinal. Par unicité si $\gamma < \gamma'$ alors $f_{\gamma'}$ prolonge f_γ . On définit f_τ par $f_\tau(\gamma) := F(f_\gamma)$ si $\gamma < \tau$.

- ▷ Si $\tau \in \alpha$ alors f_τ prolonge tous les f_γ et donc $\tau \in \tau$, **impossible**.
- ▷ D'où $\tau = \alpha$.

□

Exercice 1. Généraliser la preuve ci-dessus en remplaçant α par la classe de tous les ordinaux \mathfrak{O} (et remplacer \mathcal{F} par autre chose).

Proposition 14. 1. La classe \mathfrak{O} n'est pas un ensemble.

2. Il n'existe pas de relation fonctionnelle bijective entre \mathfrak{O} et un ensemble a .

Preuve. 1. En effet, supposons \mathfrak{O} un ensemble. On a que \mathfrak{O} est transitif et \in y définit un ordre total, donc \mathfrak{O} est un ordinal.

- D'où $\mathcal{O} \in \mathcal{O}$ ce qui est impossible pour un ordinal.
 2. Sinon \mathcal{O} serait un ensemble.

□

3 Axiome de choix et variantes équivalentes.

Les axiomes du choix sont exprimable au premier ordre !

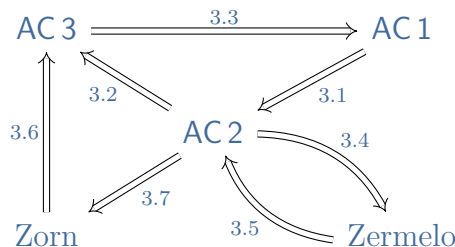
- AC 1.** Le produit d'une famille d'ensembles non vides est non vide.
- AC 2.** Pour tout ensemble a non vide, il existe une fonction de $\mathcal{P}(a)$ dans a tel que si $x \subseteq a$ est non vide alors $f(x) \in x$. (C'est une fonction de choix.)
- AC 3.** Si a est un ensemble dont tous les éléments sont non vides et deux à deux disjoints alors il existe un ensemble c tel que, pour tout $x \in a$, $x \cap c$ a exactement un élément.

(Lemme de) Zorn. Tout ensemble non vide partiellement ordonné et inductif admet un élément maximal.

On rappelle qu'un ensemble partiellement ordonné X est inductif si $X \neq \emptyset$ et si tout sous-ensemble $Y \subseteq X$ totalement ordonné admet un majorant dans X .

(Lemme de) Zermelo. Tout ensemble non vide peut être muni d'un bon ordre (*i.e.* un ordre total où toute partie non vide a un plus petit élément).

En supposant les axiomes **ZF 1**, ..., **ZF 5**, on va montrer les implications suivantes :



3.1 AC 1 implique AC 2.

On rappelle que l'ensemble $\prod_{i \in I} a_i$ est l'ensemble de fonctions f de la forme $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} a_i$ tel que $f(i) \in a_i$ pour tout i .

Soit a non vide. On considère $\prod_{\emptyset \neq x \subseteq a} x$ qui est non vide par AC 1. Soit f un de ces éléments. On a, pour tout $\emptyset \neq x \subseteq a$, que $f(x) \in x$ donc f est une fonction de choix.

3.2 AC 2 implique AC 3.

Soit a un ensemble dont les éléments sont non vides et deux à deux disjoints. On considère $b = \bigcup_{x \in a} x$ qui est un ensemble. Par AC 2, on a une fonction de choix f sur $\wp(b)$. On prend $c = \{f(x) \mid x \in a\}$. Comme les x sont disjoints, on obtient la propriété recherchée.

3.3 AC 3 implique AC 1.

Soit $X = \prod_{i \in I} a_i$ un produit d'ensemble non vides. On considère $A := \{\{i\} \times a_i \mid i \in I\}$. Par AC 3, il existe c tel que, pour tout $x \in A$, $x \cap c$ a exactement un élément. D'où, c peut s'écrire

$$c = \{(i, d_i) \mid i \in I \text{ et } d_i \in a_i\}.$$

On a donc $c \in \prod_{i \in I} a_i$ (c'est le graphe d'une fonction) et donc $\prod_{i \in I} a_i \neq \emptyset$.

3.4 AC 2 implique Zermelo.

Soit a un ensemble non vide.

Remarque 9 (Idée). L'idée est qu'on utilise $f : \mathcal{P}(a) \rightarrow a$ une fonction de choix pour définir l'ordre. On peut imaginer définir $x \leq y$ ssi $f(\{x, y\}) = x$ (on traite donc f comme la fonction minimum), mais on n'a pas la transitivité. Il faut être plus futé.

On va construire en partant du plus petit une bijection entre a et un ordinal.

- ▷ $h(0) := f(a)$
- ▷ $h(1) := f(a \setminus \{h(0)\})$
- ▷ $h(2) := f(a \setminus \{h(0), h(1)\})$
- ▷ \vdots
- ▷ $h(\omega) = f(a \setminus \{h(0), h(1), \dots\})$
- ▷ \vdots

On s'arrête quand $a \setminus \{h(0), h(1), \dots\}$ est vide.

Soit $\theta \notin a$ (pour « détecter » quand l'ensemble $a \setminus \{h(0), \dots\}$ est vide). Il existe car a est un ensemble donc pas l'univers tout entier.

On définit

$$F(\alpha) := \begin{cases} f(a \setminus \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}) & \text{si } a \setminus \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\} \neq \emptyset \\ \theta & \text{sinon} \end{cases}.$$

D'après le dernier lemme de la section précédente, on peut construire l'application F ainsi et elle est unique.

S'il n'existe pas d'ordinal α tel que $F(\alpha) = \theta$ alors F est une injection de \mathbb{O} dans a . **Absurde**. Il existe donc α tel que $F(\alpha) = \theta$.

Le sous-ensemble $\{\beta \in \alpha \mid F(\beta) = \theta\}$ a un plus petit élément β . Montrons que $F|_{\beta}$ est une bijection de β dans α .

- ▷ D'une part, on sait que c'est une injection.
- ▷ D'autre part, $F(\beta) = \theta$ implique $\{F(\gamma) \mid \gamma < \beta\} = a$ donc $F|_{\beta}$ est une surjection.

On définit le bon ordre $x \prec y$ ssi $F^{-1}(x) < F^{-1}(y)$.

3.5 Zermelo implique AC2.

Soit a non vide. Il existe un bon-ordre $<$ sur a . Soit $\emptyset \neq x \subseteq a$. On définit $f(x) = \min x$, c'est bien une fonction de choix.

3.6 Zorn implique AC 3.

Soit a un ensemble dont les éléments sont disjoints et non vides. On pose :

$$b := \bigcup_{x \in a} x \quad \text{et} \quad X := \{c \subseteq b \mid \forall x \in a, |c \cap x| \leq 1\}.$$

Montrons que l'ensemble (X, \subseteq) est inductif.

Soit $Y \subseteq X$ est totalement ordonné. Montrons que Y a un majorant dans X . On pose $z = \bigcup_{y \in Y} y$ qui majore Y . On a bien $z \in X$ (on ne duplique pas les éléments). On en conclut que X est inductif. Soit d un élément maximal de X (il existe par Zorn).

- ▷ S'il existe $x \in a$ tel que $x \cap d = \emptyset$ alors prenons $u \in x$ et posons $d_1 := d \cup \{u\}$. D'où $d_1 \in X$ et $d \subsetneq d_1$ donc d non maximal, **absurde**.
- ▷ Pour tout $x \in a$, on a $|d \cap x| = 1$, d'où d est l'ensemble recherché (appelé c dans AC 3).

3.7 AC 2 implique Zorn.

Soit a un ensemble inductif.

Remarque 10 (Idée). On construit une chaîne dans a (*i.e.* un ensemble totalement ordonné) de taille maximale (c'est ici qu'on utilise la fonction de choix de AC 2). Elle a un majorant car a est inductif. Ce majorant va être l'élément maximal.

Soit $f : \wp(a) \rightarrow a$ une fonction de choix donnée par AC 2. Si $x \subseteq a$ on appelle majorant strict de x un $y \in a$ tel que $z < y$ pour tout $z \in x$.

Remarque 11 (Idée – suite). ▷ On part de \emptyset : tout élément de a a un majorant strict de \emptyset en choisissant $a_1 = f(a)$.

▷ Soit X_1 l'ensemble des majorants de $\{a_1\}$. On pose $a_2 := f(X_1)$.

- ▷ Soit X_2 l'ensemble des majorants de $\{a_1, a_2\}$. On pose $a_3 := f(X_2)$.

Formellement, soit $C := \{x \subseteq a \mid x \text{ a un majorant strict dans } a\}$. On a $\emptyset \in C$. On définit

$$\begin{aligned} m : C &\longrightarrow a \\ x &\longmapsto f(\{y \in a \mid y \text{ est un majorant strict de } x \text{ dans } a\}). \end{aligned}$$

On définit par induction la chaîne maximale (dernier lemme de la section précédente). Soit $\theta \notin a$. On définit :

$$F(\alpha) := \begin{cases} m(\{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}) & \text{si } \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\} \in C \\ \theta & \text{sinon} \end{cases}.$$

La fonction F n'est pas une injection de \mathbb{O} dans a donc il existe un ordinal α tel que $F(\alpha) = \theta$. Comme $\alpha + 1$ est un ordinal, l'ensemble $\{\beta \in \alpha + 1 \mid F(\beta) = \theta\}$ a un plus petit élément α_0 . D'où l'ensemble $\{F(\beta) \mid \beta < \alpha_0\}$ n'a pas de majorant strict mais a un majorant M car a inductif. Et, a n'a pas d'élément plus grand que a . Ainsi M est maximal dans a .

3.8 Indépendance de ZF et de l'axiome du choix.

On a les deux théorèmes suivants (que l'on admet).

Théorème 6 (Gödel, 1938). S'il est cohérent, ZF ne réfute pas l'axiome du choix.

Théorème 7 (Cohen, 1963). S'il est cohérent, ZF ne montre pas l'axiome du choix.

Ainsi l'axiome du choix est indépendant de ZF. Cependant, il existe des versions plus faibles : axiome du choix dépendant (ACD), axiome du choix dénombrable (AC_ω).