Probabilités

Hugo SACCU.

# TD n° 4

## Exercice 1. Running Time.

**Q1.** Soit $X_n \sim \mathcal{U}(\{0,1\}^n)$. On a : $\mathbb{E}[T(X_n)] \leq k \cdot n^2$ avec $k$ fixé.

D'après l'inégalité de Markov :

$$P(T(X_n) \geq n^2 f(n)) \leq \frac{\mathbb{E}[T(X_n)]}{n^2 f(n)} = \frac{k}{f(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

**Q2.** Notons $T_{max} = \max\limits_{\omega \in \Omega} T(\omega)$.

$$k n^2 \geq \mathbb{E}[T] = \sum_{\omega \in \Omega} T(\omega) \, 1/2^n \geq T_{max} \frac{1}{2^n}$$

D'où $T_{max} \leq k \cdot n^2 \, 2^n$. On conclut que $T_{max} = O(n^2 2^n)$.

## Exercice 2. Coquilles dans un TD

**Q1.** Notons $N$ le temps de relecture pour enlever les 4 coquilles. et $N_i$ pour la $i$ème coquille.

$N_i \sim \mathcal{G}(1/3)$ et $N = \max(N_1, N_2, N_3, N_4)$.

$$\mathbb{P}(N \leq n) = \underbrace{\prod_{i=1}^{4} \mathbb{P}(N_i \leq n)}_{\text{indépendance}} = \prod_{i=1}^{4} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_i = k)$$

$$= \prod_{i=1}^{4} \sum \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{1}{3}$$

$$= \prod_{i=1}^{4} \cancel{\frac{1}{3}} \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1/3}$$

$$= \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^4$$

Avec $n = 10$, on a $\mathbb{P}(N \leq 10) \approx 0,9$.

Q2. Le problème du collectionneur de vignettes, mais, à chaque étape, on peut corriger plusieurs coquilles, alors qu'on ne peut avoir qu'un magnet.

Q3.. D'après Tchebychev,

$$\mathbb{P}(10-n < X < 10+n) = 1 - \mathbb{P}(|X-\mu| \geq n) \leq 1 - \frac{\sigma^2}{n^2}$$

On a bien le resultat demandé pour $n \geq 5$.

## Exercice 3. Tester la pièce.

On lance $n$ fois la pièce. Le nombre de "Pile"s est $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

$$\mathbb{E}[X] = n \cdot p \qquad Var[X] = np(1-p)$$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq n/10) \leq \frac{Var[X]}{(n/10)^2} = \frac{p(1-p)}{n/100} \leq \frac{25}{n}$$

Pour avoir une probabilité d'au moins 0,9, il faut

$$0,9 \leq 1 - 25/n \iff 25/n \leq 0,1 \iff n \geq 250$$

## Exercice 4. Comparer Markov, Tchebychev et Chernoff.

$X \sim \mathcal{B}(n, 1/6)$ $\qquad \mathbb{E}[X] = n/6 \qquad Var[X] = 5n/36.$

Markov : $\mathbb{P}(X \geq n/4) \leq \frac{n/6}{n/4} = \frac{4}{6}$

Tchebychev : $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \leq n/12) \leq \frac{5n/36}{(n/12)^2} = \frac{144 \times 5}{36} \times \frac{1}{n} = 20/n$

Chernoff : $\mathbb{P}(X \leq (1+\frac{1}{2})\mathbb{E}[X]) \leq \exp\left(-\frac{1/4}{5/2}\frac{n}{6}\right) = \exp(-\frac{n}{60}).$

## Exercice 5. Chernoff Bound Interval.

Q1. On a : $\mathbb{E}[e^{\lambda X}] = (1-p) + p e^{\lambda}$

$= 1 - \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X] e^{\lambda}$

Convexité de $\exp(\lambda -)$ et croissance de $\mathbb{E}[-]$ $\hookrightarrow$ $= \mathbb{E}[(1-X)e^{0} + e^{\lambda} X]$

$\geq \mathbb{E}[e^{\lambda X + (1-X)\cdot 0}] \geq \mathbb{E}[e^{\lambda X}]$

Q2. Pour $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq (1+\varepsilon)\mu) = \mathbb{P}(e^{\lambda X} \geq e^{\lambda\mu(1+\varepsilon)})$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda X}]}{e^{\lambda\mu(1+\varepsilon)}}$$

Par inégalité de Markov

De plus, $\mathbb{E}[e^{\lambda X}] = \mathbb{E}[e^{\lambda(X_1 + \dots + X_n)}]$

$$= \prod \mathbb{E}[e^{\lambda X_i}]$$

$$= e^{\sum p_i (e^{\lambda} - 1)}$$

En effet,

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X_i}] \leq (1-p_i) + p_i e^{\lambda}$$
$$= 1 + p_i (e^{\lambda} - 1)$$
$$\leq e^{p_i (e^{\lambda} - 1)}$$

D'où, $\mathbb{P}(X \geq (1+\varepsilon)\mu) \leq \dfrac{e^{\mu(e^{\lambda}-1)}}{e^{\lambda\mu(1+\varepsilon)}}$ où $\lambda = \ln(1+\varepsilon)$.

## Exercice 6. Fonction génératrice

1) $G_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \, \mathbb{P}(X = n)$

$$G'_X(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1} \, \mathbb{P}(X = n) \implies \mathbb{E}[X] = G'_X(1)$$

$$G''_X(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) z^{n-2} \, \mathbb{P}(X = n)$$

$$\mathrm{Var}[X] = G''_X(1) + G_X'(1) - \left(G_X'(1)\right)^2$$

Q2. $G_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \mathcal{C}(\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}$

$$= \mathcal{C}(\lambda) \exp(\lambda z)$$

Q3. $G_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = 1$

d'où $\mathcal{C}(\lambda) \exp(\lambda) = 1$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

On en déduit $\mathcal{C}(\lambda) = \exp(-\lambda)$.

Q4. $G_X(z) = \exp(\lambda(z-1))$

$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$

$\mathrm{Var}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$

$= \lambda^2 \cancel{e^{-\lambda} e^{\lambda}} \quad \lambda \quad - \lambda^2$

$= \lambda$

Q5. $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

$G_X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \, \mathbb{P}(X=k)$

$= \sum_{k=0}^{n} z^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$= (pz + 1 - p)^n$

$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = np(p+1-p)^{n-1}$
$= np$

$\mathrm{Var}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$

$= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2$
$= p^2(\cancel{n^2} - n - \cancel{n^2}) + np$
$= np(1-p)$.

Q6. $G_S(z) = \mathbb{E}[z^S] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}[z^S \mid N=n] \cdot \mathbb{P}(N=n)$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[z^{X_1+\cdots+X_n}] \cdot \mathbb{P}(N=n) + \mathbb{P}(N=0)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[z^{X_1} \times \cdots \times z^{X_n}] \cdot \mathbb{P}(N=n) + \mathbb{P}(N=0)$$

car les $(X_i)_{i \geq 0}$ sont iid

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mathbb{E}[z^{X_1}]\right)^n \cdot \mathbb{P}(N=n)$$

$$= G_N(G_{X_1}(z))$$

Si $X_i \sim \mathcal{G}(q)$ et $N \sim \mathcal{G}(p)$,

$$G_N(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \, q \, (1-q)^{n-1} = zq \sum_{n=0}^{+\infty} (1-q)^n z^n$$

$$= zq / (1-(1-q)z)$$

D'où

$$G_S(z) = \frac{pzq}{(1-(1-q)z)\left(1-(1-p)(qz/1-(1-q)z)\right)}$$

$$= \frac{pzq}{1 - z + \cancel{qz} - \cancel{qz} + pqz}$$

$$= \frac{(pq)z}{1-(1-pq)z}$$

On peut en déduire que $S \sim \mathcal{G}(pq)$.

## Exercice 7. Probabilités conditionnelles.

Q1. On pose $\Omega' = \Omega \setminus Y^{-1}(\{0\})$, puis

$$X : \mathbb{N}^* \longrightarrow \Omega' \qquad \mathbb{P}' : \Omega' \longrightarrow [0,1]$$
$$n \longmapsto Y(n). \qquad \omega \longmapsto \mathbb{P}(\omega) / \mathbb{P}(Y \neq 0).$$

Q2. $\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathrm{Var}[X] \geq 0$

D'où $\mathbb{E}[X^2] \geq \mathbb{E}[X]^2$.

Q3. $\mathbb{E}[Y] = \sum_{y=0}^{+\infty} y \; \mathbb{P}(Y=y) = \sum_{y=1}^{+\infty} \underbrace{y}_{\geq 1} \mathbb{P}(Y=y) \geq \mathbb{P}(Y \geq 1) = \mathbb{P}(Y \neq 0)$

$$\frac{\mathbb{E}[Y]^2}{\mathbb{E}[Y^2]} = \frac{\mathbb{E}[X]^2 \cdot \mathbb{P}(Y\neq 0)^{\cancel{2}}}{\mathbb{E}[X^2] \cdot \cancel{\mathbb{P}(Y \neq 0)}} \leq \mathbb{P}(Y \neq 0) \cdot \times 1$$

par Q2.

## Exercice 8. Bucket Sort.

Q1. Si on reçoit $x = \overline{b_k \dots b_0}^2$, on le met dans le bucket numéroté $\overline{b_k \dots b_{k-m}}^2$ (c'est un bitshift de $k-m$).

Q2. Soit $X \sim \mathcal{U}([\![0, 2^k - 1]\!])$.
$\mathbb{P}$(On place $X$ dans le seau $i$) $= 1/n$.

D'où,

$$\mathbb{P}(X_i = \ell) = \binom{n}{\ell} \left(\frac{1}{n}\right)^{\ell} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-\ell}$$

C'est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/n)$.

Q3. Notons $T$ le temps de calcul du bucketsort.

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{i=0}^{2^{k-1}} \mathbb{E}[T_i] + O(n)$$

$$\mathbb{E}[T_i] = \mathbb{E}[M X_i^2] = M\left(\mathrm{Var}[X_i] + \mathbb{E}[X_i]^2\right)$$
$$\leq M\left(n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{n^2}{n^2}\right) = M n\left[2 - 1/n\right] \leq 2Mn$$

D'où, $\mathbb{E}[T] = O(n)$.

Fim du TD

# TD n° 5

## Exercice 1. Algorithme probabiliste pour calculer la médiane.

Q1. La partie (a) est en $\mathcal{O}(n)$,
puis (b) en $\mathcal{O}(n^{3/4} \underbrace{\log n}_{\mathcal{O}(n^{1/4})}) = \mathcal{O}(n)$,
puis (c) en $\mathcal{O}(n)$
puis (d) en $\mathcal{O}(n)$
et enfin (e) en $\mathcal{O}(n^{3/4} \log n) = \mathcal{O}(\log n)$.

D'où l'algorithme est en $\mathcal{O}(n)$.

Q2 Erreur 1 : On a $\mathbb{E}[\text{card } F] = \sum \mathbb{E}[Y_i] = n \cdot n^{-1/4} = n^{3/4}$

Par inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\text{Var}[X]}{a^2}.$$

# TD n° 6

## Exercice 1. Black jack.

Bof ...

Loi faible des grands nombres :

Soit $\bar{X}$ le nombre de parties de Blackjack gagnées.

$$\mathbb{P}(|\bar{X} - 1/2| \geq 5\%) \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{n(5\%)^2} \leq \frac{1}{n \cdot (5\%)^2}$$

Pour avoir $\mathbb{P}(\text{il ne triche pas}) \geq 10\%$ il suffit d'avoir $n \geq \frac{1}{(10\%)(5\%)^2} = 4000$

D'après Chernoff,

$$\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{2} + (5\%)) \leq \exp(-2(5\%)^2/n)$$

$$\exp(-2(5\%)^2/n) \leq 10\% \iff 2 \cdot (5\%)^2/n \leq \ln(10)$$
$$\iff n \geq \ln(10) / (2 \cdot (5\%)^2)$$

D'où $n \geq 461$. Beaucoup plus précis ...

## Exercice 2. Random Algorithm.

Algorithme $\mathcal{B}$ :

On lance $k(x)$ fois l'algorithme $\mathcal{A}$ sur l'entrée $x$. On note $(A_i)$ les resultats des executions de $\mathcal{A}$.

On renvoie la réponse majoritaire

Si $x \notin L$, alors on a : $\mathbb{E}[X] \leq k/3$.
Si $x \in L$, alors on a : $\mathbb{E}[X] \geq 3k/4$.

Par inégalité de Chernoff, on a:

- si $x \notin L$, alors

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}(x) = 1) = \mathbb{P}(X \geq k/2) \leq \exp\left(-\frac{(1/2)^2}{2+\frac{1}{2}} \cdot \frac{k}{3}\right) = \exp\left(-\frac{k}{30}\right).$$

- si $x \in L$, alors

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}(x) = 0) = \mathbb{P}(X \leq k/2) \leq \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot 9} \times \frac{3k}{4}\right) = \exp(-k/24)$$

$$\Rightarrow k = 30\,|x| \,/\, \log_2 e$$

## Exercice 3. Intercrupteurs

Partie I.

Q1 On pose $Y := \mathbb{1}_{X \geq 1/4}$. On a:

$$1 = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[XY] + \underbrace{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{X \leq 1/4}]}_{\leq 1/4}$$

d'où

$$\sqrt{3\, \underbrace{\mathbb{E}[Y^2]}_{= \mathbb{E}[Y] = \mathbb{P}(X \geq 1/4)}} \geq \mathbb{E}[XY] \geq \frac{3}{4}$$

D'où $\gamma = 3/16$.

Q2. $\mathbb{E}[Y^2] = \mathrm{Var}[Y] + \mathbb{E}[Y]^2$

$= \frac{1}{n}\sum \mathrm{Var}[X_i]$ et $\mathbb{E}[Y] = 0$ car $\mathbb{E}[X_i] = 0$

$= 1$

$$\mathbb{E}[Y^4] = \frac{1}{n^2}\, \mathbb{E}\left[\sum X_i X_j X_k X_\ell\right]$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum \mathbb{E}[X_i X_j X_k X_\ell]$$

Cas 1: $i \neq j, k, \ell$ $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[X_i X_j X_k X_\ell] = 0$

Cas 2 : $i = k \neq j = l \implies \mathbb{E}[X_i X_j X_k X_l] = 1$

Cas 3 : $i = j = k = l \implies \mathbb{E}[X_i X_j X_k X_l] = 1$

D'où $\mathbb{E}[Y^4] = \frac{1}{n^2}\Big(n + \underbrace{3}_{\substack{i=j\neq k=l \\ i=k\neq j=l \\ i=l\neq j=k}} \cdot \underbrace{n(n-1)}_{\text{choix de } i \text{ et choix du } 2^{nd} \text{ indice}}\Big) = 3 - \frac{2}{n} \leq 3.$

$$\gamma \overset{Q1}{\geq} \mathbb{P}(Y^2 \geq 1/4) \overset{\text{passage à la racine}}{=} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}|X_1 + \cdots + X_n| \geq 1/2\right)$$

$$= \mathbb{P}(|X_1 + \cdots + X_n| \geq \sqrt{n}/2) \overset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[|X_1 + \cdots + X_n|]}{\sqrt{n}/2}$$

D'où, $\mathbb{E}[|X_1 + \cdots + X_n|] \geq \frac{\gamma}{2} \cdot \sqrt{n}$.

# TD n° 7

## Exercice 1. Graphe aléatoire biparti.

Q1 $\#E = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ j \in [\![n+1, 2n]\!]}} X_{ij}$ où les $X_{ij}$ sont i.i.d. $\mathcal{B}(p)$

d'où $\# \sim \mathcal{B}(n^2, p)$.

Q2. $\mathbb{P}(i$ est un sommet isolé$)$

$= \mathbb{P}(\forall j, X_{ij} = 0)$

$= \left(\prod_j X_{ij} \ \mathbb{P}(X_{ij} = 0)\right)$

$= (1-p)^n$

$\mathbb{E}[\text{Nombre de sommets isolés}] = \sum_i \mathbb{E}[\text{Sommet } i \text{ isolé}]$

$= \sum (1-p)^n$

$= 2n \cdot (1-p)^n$

Q3. (i)

$\mathbb{P}(H_{2n,p}$ a un sommet isolé$) = \mathbb{P}(\text{Nombre de sommets isolés} \geq 1)$

$\leq \mathbb{E}[\text{Nombre de sommets isolés}] / 1$

$\leq 2n(1-p)^n$

$\leq 2n e^{-np}$

$\leq 2n (n)^{-c}$

$\leq 2 \cdot n^{1-c} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

(ii)

$\mathbb{P}(H_{2n,p}$ a un sommet isolé$)$

$= 1 - \mathbb{P}(\text{pas de sommet isolé})$

$= 1 - \mathbb{P}(N = 0)$

$= 1 - \mathbb{P}(\mathbb{E}[N] - N \geq \mathbb{E}[N])$

$= 1 - \text{Var}[N] / (\mathbb{E}[N])^2$

$= 1 - \dfrac{\mathbb{E}[N^2] - \cancel{\mathbb{E}[N]^2}}{\mathbb{E}[N]^2}$

$= 2 - \mathbb{E}[N^2] / \mathbb{E}[N]^2$

$$= 2 \cdot \mathbb{E}[N^2] \,/\, 4n^2(1-p)^{2n}$$

$$\mathbb{E}[N^2] = \sum \mathbb{E}[i \text{ isolé}, j \text{ isolé}]$$

$$= \sum_{i=j} \mathbb{E}[i \text{ isolé}] + \sum_{\substack{i,j \text{ même colonne} \\ i \neq j}} \mathbb{E}[i \text{ isolé}, j \text{ isolé}] + \sum_{\substack{i,j \text{ colonnes} \\ \text{différentes}}} \mathbb{E}[i \text{ isolé}, j \text{ isolé}]$$

$$= 2n(1-p)^n + 2n(n-1)(1-p)^{2n} + 2n^2(1-p)^n(1-p)^{n-1}$$

$$= 2n(1-p)^n\left(1 + (1-p)^n(n-1) + n\,(1-p)^{n-1}\right)$$

D'où

$$\mathbb{E}[N^2]/\mathbb{E}[N]^2 = \frac{1}{2n(1-p)^n}\left(1 + (1-p)^n(n-1) + n(1-p)^{n-1}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2n(1-p)^n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{n-1}{2n}}_{\to 1/2} + \underbrace{\frac{1}{2(1-p)}}_{\frac{n}{2c\log n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

D'où $\mathbb{P}(H_{2n,p}$ a un sommet isolé$) \longrightarrow 1$.

Q4. $\mathbb{P}\left(\forall v,\ \deg(v) \leq \frac{n}{2} + C\sqrt{n\log n}\right)$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_v \deg(v) \geq \frac{n}{2} + C\sqrt{n\log n}\right)$$

et $\mathbb{P}\left(\bigcup_v \deg(v) \geq \frac{n}{2} + C\sqrt{n\log n}\right) \leq \sum_v \mathbb{P}\left(\deg(v) \geq \frac{n}{2} + C\sqrt{n\log n}\right)$ par borne de l'union.

Or, $\deg(v) \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ d'où par Chernoff I,

$$\mathbb{P}\left(\deg(v) \geq \frac{n}{2} + C\sqrt{n\log n}\right) \leq \exp(-2C^2\, n\log n\,/n)$$

$$\leq n^{-2(C^2)}$$

On pose $C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, et on a :

$$\sum_v \mathbb{P}\left(\deg(v) \geq \frac{n}{2} + C\sqrt{n\log n}\right) \leq \sum n^{-(C^2)} = 2n/n^{(C^2)} = \underbrace{2\, n^{1-2C^2}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

D'où $\mathbb{P}\left(\forall v,\ \deg(v) \leq \frac{n}{2} + C\sqrt{n\log n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

## Exercice 2 $K_4$.

Q1. $\mathbb{E}[X] = \sum_{\{a,b,c,d\}} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{a,b,c,d\} \text{ forme une 4 clique de } G}]$

$= \sum p^6 = \binom{n}{4} p^6$

Q2. $\mathbb{P}(X \neq 0) = \mathbb{P}(X \geq 1) \leq \mathbb{E}[X] \leq \binom{n}{4} p^6$

$\leq \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\left(o\left(n^{-2/3}\right)\right)^6$

$\leq o(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Q3. $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\mathbb{E}[X] - X \leq \mathbb{E}[X])$
$\leq \mathrm{Var}[X] / \mathbb{E}[X]^2$ par inégalité de Tchebychev.

Q4. $\mathrm{Var}\left[\sum X_i\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum X_i\right)^2\right] - \left(\sum \mathbb{E}[X_i]\right)^2]$

$= \sum \mathbb{E}[X_i X_i] + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}[X_i X_j] - \sum (\mathbb{E}[X_i])^2 - \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]$

$= \sum \mathbb{E}[X_i] + \sum_{i\neq j} \left(\mathbb{E}[X_i X_j] - 2\,\mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]\right)$

$- \sum (\mathbb{E}[X_i])^2$

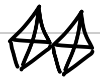
$= \sum \mathbb{E}[X_i] + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])] - \sum (\mathbb{E}[X_i])^2$

$\leq \sum \mathbb{E}[X_i] + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])]$

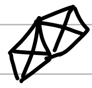
Q5. $\mathrm{Var}\left[\sum \mathbb{1}_{\{a,b,c,d\} \text{ forme une clique}}\right] \leq \mathbb{E}[\text{Nb de 4-clique}]$
$+ \sum_{C_1 \neq C_2} \mathbb{E}[(\mathbb{1}_{C_1 \text{ clique}} - \mathbb{E}[C_1 \text{ clique}])(\mathbb{1}_{C_2 \text{ clique}} - \mathbb{E}[C_2 \text{ clique}])]$

$$\leq \binom{n}{4} p^6 + \sum_{C_1 \neq C_2} \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{1}_{C_1 \text{ clique}} - p^6\right)\left(\mathbb{1}_{C_2 \text{ clique}} - p^6\right)\right]$$

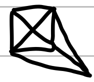
$$\leq \binom{n}{4} p^6 + \sum_{\substack{\text{un sommet} \\ \text{entre } C_1 \neq C_2}} 0 + \sum_{\substack{\text{deux sommets} \\ \text{entre } C_1 \neq C_2}} p^{11}(1-p) + \sum_{\substack{\text{trois sommets} \\ \text{entre } C_1 \neq C_2}} p^9(1-p^3)$$



par indépendance



11 paires de sommets avec $X_{u,v} = 1$ (équivalent : une arête partagée entre $C_1$ et $C_2$)



3 arêtes partagées

$$\leq \binom{n}{4} p^6 + \binom{n}{6} p^{11}(1-p) + \binom{n}{5} p^9 (1-p^3)$$