

Logique

*Basé sur le cours de Natacha PORTIER
Notes prises par Hugo SALOU*



14 février 2025

Table des matières

1	Le calcul propositionnel.	4
1.1	Syntaxe.	4
1.2	Sémantique.	6
2	La logique du premier ordre.	12
2.1	Les termes.	12
2.2	Les formules.	15
2.3	Les démonstrations en déduction naturelle.	18
2.4	La sémantique.	20
2.5	Théorème de complétude de Gödel.	31
2.5.1	Preuve du théorème de correction.	33
2.5.2	Compacité.	35

Introduction.

Dans ce cours, on s'intéressera à quatre thèmes :

- ▷ la théorie des modèles (▷ les « vraies » mathématiques) ;
- ▷ la théorie de la démonstration (▷ les preuves) ;
- ▷ la théorie des ensembles (▷ les objets) ;
- ▷ les théorèmes de Gödel (▷ les limites).

On ne s'intéressera pas à la calculabilité, car déjà vu en cours de FDI. Ce cours peut être utile à ceux préparant l'agrégation d'informatique.

1 Le calcul propositionnel.

Le *calcul propositionnel*, c'est la « grammaire » de la logique. Dans ce chapitre, on s'intéressera à

1. la construction des formules (\triangleright la syntaxe) ;
2. la sémantique et les théorèmes de compacité (\triangleright la compacité sémantique).

1.1 Syntaxe.

Définition 1.1. Le *langage*, ou *alphabet*, est un ensemble d'éléments fini ou pas. Les éléments sont les *lettres*, et les suites finies sont les *mots*.

Définition 1.2. On choisit l'alphabet :

- $\triangleright \mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots\}$ des variables propositionnelles ;
- \triangleright un ensemble de *connecteurs* ou *symboles logiques*, défini par $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, il n'y a pas \exists et \forall pour l'instant.
- \triangleright les parenthèses $\{(,)\}$.

Les formules logiques sont des mots. On les fabrique avec des briques de base (les variables) et des opérations de construction : si F_1 et F_2 sont deux formules, alors $\neg F$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \rightarrow F_2)$ et $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ aussi.

Définition 1.3 (« par le haut », « mathématique »). L'ensemble \mathcal{F} des formules du calcul propositionnel construit sur \mathcal{P} est le plus petit ensemble contenant \mathcal{P} et stable par les opérations de construction.

Définition 1.4 (« par le bas », « informatique »). L'ensemble \mathcal{F} des formules logiques du calcul propositionnel sur \mathcal{P} est défini par

$$\triangleright \mathcal{F}_0 = \mathcal{P};$$

$$\triangleright \mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \left\{ \begin{array}{c} \neg F_1 \\ (F_1 \vee F_2) \\ (F_1 \wedge F_2) \\ (F_1 \rightarrow F_2) \\ (F_1 \leftrightarrow F_2) \end{array} \middle| F_1, F_2 \in \mathcal{F} \right\}$$

puis on pose $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.

On peut montrer l'équivalence des deux définitions.

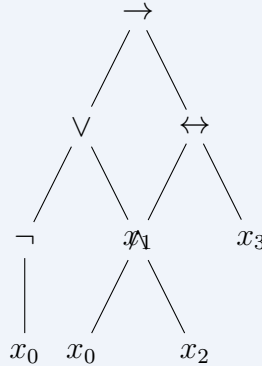
Théorème 1.1 (Lecture unique). Toute formule $G \in \mathcal{F}$ vérifie une et une seule de ces propriétés :

- $\triangleright G \in \mathcal{P}$;
- \triangleright il existe $F \in \mathcal{F}$ telle que $G = \neg F$;
- \triangleright il existe $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ telle que $G = (F_1 \vee F_2)$;
- \triangleright il existe $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ telle que $G = (F_1 \wedge F_2)$;
- \triangleright il existe $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ telle que $G = (F_1 \rightarrow F_2)$;
- \triangleright il existe $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ telle que $G = (F_1 \leftrightarrow F_2)$.

Preuve. En exercice. □

Corollaire 1.1. Il y a une bijection entre les formules et les arbres dont

- \triangleright les feuilles sont étiquetées par des variables ;
- \triangleright les nœuds internes sont étiquetés par des connecteurs ;
- \triangleright ceux étiquetés par \neg ont un fils, les autres deux.

**Exemple 1.1.**

1.2 Sémantique.

Lemme 1.1. Soit ν une fonction de \mathcal{P} dans $\{0, 1\}$ appelé *valuation*. Alors ν s'étend de manière unique en une fonction $\bar{\nu}$ de \mathcal{F} dans $\{0, 1\}$ telle que

- ▷ sur \mathcal{P} , $\nu = \bar{\nu}$;
- ▷ si $F, G \in \mathcal{F}$ sont des formules alors
 - $\bar{\nu}(\neg F) = 1 - \bar{\nu}(F)$;
 - $\bar{\nu}(F \vee G) = 1$ ssi $\bar{\nu}(F) = 1$ ou ¹ $\bar{\nu}(G) = 1$;
 - $\bar{\nu}(F \wedge G) = \bar{\nu}(F) \times \bar{\nu}(G)$;
 - $\bar{\nu}(F \rightarrow G) = 1$ ssi $\bar{\nu}(G) = 1$ ou $\bar{\nu}(F) = 0$;
 - $\bar{\nu}(F \leftrightarrow G) = 1$ ssi $\bar{\nu}(F) = \bar{\nu}(G)$.

Par abus de notations, on notera ν pour $\bar{\nu}$ par la suite.

Preuve. Existence. On définit en utilisant le lemme de lecture unique, et par induction sur \mathcal{F} :

- ▷ $\bar{\nu}$ est définie sur $\mathcal{F}_0 = \mathcal{P}$;
- ▷ si $\bar{\nu}$ est définie sur \mathcal{F}_n alors pour $F \in \mathcal{F}_{n+1}$, on a la

1. C'est un « ou » inclusif : on peut avoir les deux (ce qui est très différent du « ou » exclusif dans la langue française).

disjonction de cas

- si $F = \neg G$ avec $G \in \mathcal{F}_n$, et on définit $\bar{\nu}(F) = 1 - \bar{\nu}(F_1)$;
- *etc* pour les autres cas.

Unicité. On montre que si $\lambda = \nu$ sur \mathcal{P} alors $\bar{\lambda} = \bar{\nu}$ si $\bar{\lambda}$ et ν vérifient les égalités précédents.

□

Exemple 1.2 (Table de vérité). Pour la formule

$$F = ((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1)),$$

on construit la table

x_1	0	0	1	1
x_2	0	1	0	1
$x_1 \rightarrow x_2$	1	1	0	1
$x_2 \rightarrow x_1$	1	0	1	1
F	1	0	1	1

Définition 1.5. ▷ Une formule F est dite *satisfaite par une valuation* ν si $\nu(F) = 1$.

- ▷ Une *tautologie* est une formule satisfaite pour toutes les valuations.
- ▷ Un ensemble \mathcal{E} de formules est *satisfiable* s'il existe une valuation qui satisfait toutes les formules de \mathcal{E} .
- ▷ Un ensemble \mathcal{E} de formules est *finiment satisfiable* si tout sous-ensemble fini de \mathcal{E} est satisfiable.
- ▷ Une formule F est *conséquence sémantique* d'un ensemble de formules \mathcal{E} si toute valuation qui satisfait \mathcal{E} satisfait F .
- ▷ Un ensemble de formules \mathcal{E} est *contradictoire* s'il n'est pas satisfiable.
- ▷ Un ensemble de formules \mathcal{E} est *finiment contradictoire* s'il

existe un sous-ensemble fini contradictoire de \mathcal{E} .

Théorème 1.2 (compacité du calcul propositionnel). On donne trois énoncés équivalents (équivalence des trois énoncés laissé en exercice) du théorème de compacité du calcul propositionnel.

Version 1. Un ensemble de formules \mathcal{E} est satisfiable si et seulement s'il est finiment satisfiable.

Version 2. Un ensemble de formules \mathcal{E} est contradictoire si et seulement s'il est finiment contradictoire.

Version 3. Pour tout ensemble \mathcal{E} de formules du calcul propositionnel, et toute formule F , F est conséquence sémantique de \mathcal{E} si et seulement si F est conséquence sémantique d'un sous-ensemble fini de \mathcal{E} .

Preuve. Dans le cas où $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots\}$ est au plus dénombrable (le cas non dénombrable sera traité après). On démontre le cas « difficile » de la version 1 (*i.e.* finiment satisfiable implique satisfiable). Soit \mathcal{E} un ensemble de formules finiment satisfiable. On construit par récurrence une valuation ν qui satisfasse \mathcal{E} par récurrence : on construit $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n, \dots$ tels que $\nu(x_0) = \varepsilon_0, \dots, \nu(x_n) = \varepsilon_n, \dots$

▷ Cas de base. On définit la valeur de ε_n pour $x_0 \in \mathcal{P}$.

1. soit, pour tout sous-ensemble fini B de \mathcal{E} , il existe une valuation λ qui satisfait B avec $\lambda(x_0) = 0$;
2. soit, il existe un sous-ensemble fini B_0 de \mathcal{E} , pour toute valuation λ qui satisfait B_0 , on a $\lambda(x_0) = 1$.

Si on est dans le cas 1, on pose $\varepsilon_0 = 0$, et sinon (cas 2) on pose $\varepsilon_0 = 1$.

▷ Cas de récurrence. On montre, par récurrence sur n , la propriété suivante :

il existe une suite $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n$ (que l'on étend, la suite ne change pas en fonction de n) de booléens telle que, pour tout sous-ensemble fini B de \mathcal{E} , il

existe une valuation ν satisfaisant B et telle que $\nu(x_0) = \varepsilon_0, \dots$, et $\nu(x_n) = \varepsilon_n$.

- Pour $n = 0$, soit on est dans le cas 1, et on prend $\varepsilon_0 = 0$ et on a la propriété ; soit on est dans le cas 2 ;, et on prend B un sous-ensemble fini de \mathfrak{E} , alors $B \cup B_0$ est un ensemble fini donc satisfiable par une valuation ν . La valuation satisfait B_0 donc $\nu(x_0) = 1$ et ν satisfait B . On a donc la propriété au rang 0.
- Hérédité. Par hypothèse de récurrence, on a une suite $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n$.
 1. Soit, pour tout sous-ensemble fini B de \mathfrak{E} , il existe ν qui satisfait B et telle que $\nu(x_0) = \varepsilon_0, \dots, \nu(x_n) = \varepsilon_n$, et $\nu(x_{n+1}) = 0$. On pose $\varepsilon_{n+1} = 0$.
 2. Soit il existe B_{n+1} un sous-ensemble fini de \mathfrak{E} tel que, pour toute valuation ν telle que ν satisfait B_{n+1} et $\nu(x_0) = \varepsilon_0, \dots, \nu(x_n) = \varepsilon_n$, on a $\nu(x_{n+1}) = 1$ et on pose $\varepsilon_{n+1} = 1$.

Montrons l'hérédité :

1. vrai par définition ;
2. soit B un sous-ensemble fini de \mathfrak{E} . On considère $B \cup B_{n+1}$, soit ν telle que $\nu(x_0) = \varepsilon_0, \dots, \nu(x_n) = \varepsilon_n$. On a que ν satisfait B_{n+1} donc $\nu(x_{n+1}) = 1 = \varepsilon_{n+1}$ et ν satisfait B .

On a donc la propriété pour tout n .

Finalement, soit δ une valuation telle que, pour tout i , $\delta(x_i) = \varepsilon_i$. Montrons que δ satisfait \mathfrak{E} . Soit $F \in \mathfrak{E}$. On sait que F est un mot (fini), donc contient un ensemble fini de variables inclus dans $\{x_0, \dots, x_n\}$. D'après la propriété par récurrence au rang n , il existe une valuation ν qui satisfait F et telle que $\nu(x_0) = \varepsilon_0, \dots, \nu(x_n) = \varepsilon_n$, et donc ν et δ coïncident sur les variables de F . Donc (lemme simple), elles coïncident sur toutes les formules qui n'utilisent que ces variables. Donc, $\delta(F) = 1$, et on en conclut que δ satisfait \mathfrak{E} . \square

Dans le cas non-dénombrable, on utilise le *lemme de Zorn*, un équivalent de l'*axiome du choix*.

Définition 1.6. Un ensemble ordonné (X, \mathcal{R}) est inductif si pour tout sous-ensemble Y de X totalement ordonné par \mathcal{R} (*i.e.* une chaîne) admet un majorant dans X .

Remarque 1.1. On considère ici un majorant et non un plus grand élément (un maximum).

Exemple 1.3. 1. Dans le cas $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, le majorant est l'union des parties de la chaîne, il est donc inductif.
2. Dans le cas (\mathbb{R}, \leq) , il n'est pas inductif car \mathbb{R} n'a pas de majorant dans \mathbb{R} .

Lemme 1.2 (Lemme de Zorn). Si (X, \mathcal{R}) est un ensemble ordonné inductif non-vide, il admet au moins un élément maximal.

Remarque 1.2. Un élément maximal n'est pas nécessairement le plus grand.

Preuve. Soit \mathcal{E} un ensemble de formules finiment satisfiable, et \mathcal{P} un ensemble de variables. On note \mathcal{V} l'ensemble des valuations partielles prolongeables pour toute partie finie \mathcal{C} de \mathcal{E} en une valuation satisfaisant \mathcal{C} . C'est-à-dire :

$$\mathcal{V} := \left\{ \varphi \in \bigcup_{X \subseteq \mathcal{P}} \{0, 1\}^X \mid \forall \mathcal{C} \in \wp_f(\mathcal{E}), \exists \delta \in \{0, 1\}^{\mathcal{P}}, \begin{array}{l} \delta|_{\text{dom}(\varphi)} = \varphi \\ \forall F \in \mathcal{C}, \delta(F) = 1 \end{array} \right\}.$$

L'ensemble \mathcal{V} est non-vide car contient l'application vide de $\{0, 1\}^{\emptyset}$ car \mathcal{E} est finiment satisfiable. On défini la relation

d'ordre \preceq sur \mathcal{V} par :

$$\varphi \preceq \psi \quad \text{ssi} \quad \psi \text{ prolonge } \varphi.$$

Montrons que (\mathcal{V}, \preceq) est inductif. Soit \mathcal{C} une chaîne de \mathcal{V} et construisons un majorant de \mathcal{C} . Soit λ la valuation partielle définie sur $\text{dom } \lambda = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{C}} \text{dom } \varphi$, par : si $x_i \in \text{dom } \lambda$ alors il existe $\varphi \in \mathcal{C}$ tel que $x_i \in \text{dom } \varphi$ et on pose $\lambda(x_i) = \varphi(x_i)$.

La valuation λ est définie de manière unique, *i.e.* ne dépend pas du choix de φ . En effet, si $\varphi \in \mathcal{C}$ et $\psi \in \mathcal{C}$, avec $x_i \in \text{dom } \varphi \cap \text{dom } \psi$, alors on a $\varphi \preceq \psi$ ou $\psi \preceq \varphi$, donc $\varphi(x_i) = \psi(x_i)$.

Autrement dit, λ est la limite de \mathcal{C} . Montrons que $\lambda \in \mathcal{V}$. Soit B une partie finie de \mathcal{E} . On cherche μ qui prolonge λ et satisfait B . L'ensemble de formules B est fini, donc utilise un ensemble fini de variables, dont un sous-ensemble fini $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\} \subseteq \text{dom}(\lambda)$. Il existe $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ dans \mathcal{C} telle que $x_{i_1} \in \text{dom } \varphi_1, \dots, x_{i_n} \in \text{dom } \varphi_n$. Comme \mathcal{C} est une chaîne, donc soit $\varphi_0 = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \varphi_i$ et on a $\varphi_0 \in \mathcal{C}$. On a, de plus, $x_{i_1}, \dots, x_{i_n} \in \text{dom}(\varphi_0)$. Soit $\varphi_0 \in \mathcal{V}$ prolongeable en ψ_0 qui satisfait B . On définit :

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{P} &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x \in \text{dom } \lambda &\longmapsto \lambda(x) \\ x \in \text{var } B &\longmapsto \psi_0(x) \\ \text{sinon} &\longmapsto 0. \end{aligned}$$

On vérifie que la définition est cohérente sur l'intersection car λ et ψ_0 prolongent tous les deux φ_0 et donc $\lambda \in \mathcal{V}$ d'où \mathcal{V} est inductif.

Suite la preuve plus tard. □

2 La logique du premier ordre.

2.1 Les termes.

On commence par définir les *termes*, qui correspondent à des objets mathématiques. Tandis que les formules relient des termes et correspondent plus à des énoncés mathématiques.

Définition 2.1. Le langage \mathcal{L} (du premier ordre) est la donnée d'une famille (pas nécessairement finie) de symboles de trois sortes :

- ▷ les symboles de *constantes*, notées c ;
- ▷ les symboles de *fonctions*, avec un entier associé, leur *arité*, notées $f(x_1, \dots, x_n)$ où n est l'arité ;
- ▷ les symboles de *relations*, avec leur arité, notées R , appelés *prédicats*.

Les trois ensembles sont disjoints.

Remarque 2.1. ▷ Les constantes peuvent être vues comme des fonctions d'arité 0.

- ▷ On aura toujours dans les relations : « $=$ » d'arité 2, et « \perp » d'arité 0.
- ▷ On a toujours un ensemble de variables \mathcal{V} .

Exemple 2.1. Le langage \mathcal{L}_g de la théorie des groupes est défini par :

- ▷ une constante : c ,

- ▷ deux fonctions : f_1 d'arité 2 et f_2 d'arité 1 ;
- ▷ la relation $=$.

Ces symboles sont notés usuellement $e, *, \square^{-1}$ ou bien $0, +, -$.

Exemple 2.2. Le langage \mathcal{L}_{co} des corps ordonnés est défini par :

- ▷ deux constantes 0 et 1,
- ▷ quatre fonctions $+, \times, -$ et \square^{-1} ,
- ▷ deux relations $=$ et \leq .

Exemple 2.3. Le langage \mathcal{L}_{ens} de la théorie des ensembles est défini par :

- ▷ une constante \emptyset ,
- ▷ trois fonctions \cap, \cup et \square^c ,
- ▷ trois relations $=, \in$ et \subseteq .

Définition 2.2. Par le haut. L'ensemble \mathcal{T} des termes sur le langage \mathcal{L} est le plus petit ensemble de mots sur $\mathcal{L} \cup \mathcal{V} \cup \{ (,), , \}$ tel

- ▷ qu'il contienne \mathcal{V} et les constantes ;
- ▷ qui est stable par application des fonctions, c'est-à-dire que pour des termes t_1, \dots, t_n et un symbole de fonction f d'arité n , alors $f(t_1, \dots, t_n)$ est un terme. ¹

Par le bas. On pose

$$\mathcal{T}_0 = \mathcal{V} \cup \{c \mid c \text{ est un symbole de constante de } \mathcal{L}\},$$

puis

$$\mathcal{T}_{k+1} = \mathcal{T}_k \cup \left\{ f(t_1, \dots, t_n) \mid \begin{array}{l} f \text{ fonction d'arité } n \\ t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_k \end{array} \right\},$$

et enfin

$$\mathcal{T} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n.$$

Remarque 2.2. Dans la définition des termes, on n'utilise les relations.

Exemple 2.4. ▷ Dans \mathcal{L}_g , $*(x, \square^{-1}(y), e)$ est un terme, qu'on écrira plus simplement en $(x * y^{-1}) * e$.

▷ Dans \mathcal{L}_{co} , $(x + x) + (-0)^{-1}$ est un terme.

▷ Dans \mathcal{L}_{ens} , $(\emptyset^c \cup \emptyset) \cap (x \cup y)^c$ est un terme.

Définition 2.3. Si t et u sont des termes et x est une variable, alors $t[x : u]$ est le mot dans lequel les lettres de x ont été remplacées par le mot u . Le mot $t[x : u]$ est un terme (preuve en exercice).

Exemple 2.5. Avec $t = (x * y^{-1}) * e$ et $u = x * e$, alors on a

$$t[x : u] = ((x * e) * y^{-1}) * e.$$

Définition 2.4. ▷ Un terme *clos* est un terme sans variable (par exemple $(0 + 0)^{-1}$).

▷ La *hauteur* d'un terme est le plus petit k tel que $t \in \mathcal{T}_k$.

Exercice 2.1. ▷ Énoncer et prouver le lemme de lecture unique pour les termes.

▷ Énoncer et prouver un lemme de bijection entre les termes et un ensemble d'arbres étiquetés.

1. Attention : le « ... » n'est pas un terme mais juste une manière d'écrire qu'on place les termes à côté des autres.

2.2 Les formules.

Définition 2.5. ▷ Les formules sont des mots sur l'alphabet

$$\mathcal{L} \cup \mathcal{V} \cup \{ (,), ., \exists, \forall, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow \}.$$

- ▷ Une *formule atomique* est une formule de la forme $R(t_1, \dots, t_n)$ où R est un symbole de relation d'arité n et t_1, \dots, t_n des termes.
- ▷ L'ensemble des *formules* \mathcal{F} du langage \mathcal{L} est défini par
 - on pose \mathcal{F}_0 l'ensemble des formules atomiques ;
 - on pose $\mathcal{F}_{k+1} = \mathcal{F}_k \cup \left\{ \begin{array}{c} (\neg F) \\ (F \rightarrow G) \\ (F \vee G) \\ (F \wedge G) \\ \exists x F \\ \exists x G \end{array} \middle| \begin{array}{c} F, G \in \mathcal{F}_k \\ x \in \mathcal{V} \end{array} \right\} ;$
 - et on pose enfin $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.

Exercice 2.2. La définition ci-dessus est « par le bas ». Donner une définition par le haut de l'ensemble \mathcal{F} .

Exemple 2.6. ▷ Dans \mathcal{L}_g , un des axiomes de la théorie des groupes s'écrit

$$\forall x \exists x (x * y = e \wedge y * x = e).$$

- ▷ Dans \mathcal{L}_{co} , l'énoncé « le corps est de caractéristique 3 » s'écrit

$$\forall x (x + (x + x) = 0).$$

- ▷ Dans \mathcal{L}_{ens} , la loi de De Morgan s'écrit

$$\forall x \forall y (x^c \cup y^c = (x \cap y)^c).$$

Exercice 2.3. ▷ Donner et montrer le lemme de lecture unique.
 ▷ Énoncer et donner un lemme d'écriture en arbre.

Remarque 2.3 (Conventions d'écriture.). On note :

- ▷ $x \leq y$ au lieu de $\leq(x, y)$;
- ▷ $\exists x \geq 0 (F)$ au lieu de $\exists x (x \geq 0 \wedge F)$;
- ▷ $\forall x \geq 0 (F)$ au lieu de $\forall x (x \geq 0 \rightarrow F)$;
- ▷ $A \leftrightarrow B$ au lieu de $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$;
- ▷ $t \neq u$ au lieu de $\neg(t = u)$.

On enlève les parenthèses avec les conventions de priorité

0. les symboles de relations (le plus prioritaire) ;
1. les symboles \neg, \exists, \forall ;
2. les symboles \wedge et \vee ;
3. le symbole \rightarrow (le moins prioritaire).

Exemple 2.7. Ainsi, $\forall x A \wedge B \rightarrow \neg C \vee D$ s'écrit

$$(((\forall x A) \wedge B) \rightarrow ((\neg C) \vee D)).$$

Remarque 2.4. Le calcul propositionnel est un cas particulier de la logique du premier ordre où l'on ne manipule que des relations d'arité 0 (pas besoin des fonctions et des variables) : les « variables » du calcul propositionnel sont des formules atomiques ; et on n'a pas de relation « = ».

Remarque 2.5. On ne peut pas exprimer *a priori* :

- ▷ des quantifications sur en ensemble² ;
- ▷ « $\exists n \exists x_1 \dots \exists x_n$ » une formule qui dépend d'un paramètre ;
- ▷ le principe de récurrence : si on a $\mathcal{P}(0)$ pour une propriété \mathcal{P} et que si $\mathcal{P}(n) \rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ alors on a $\mathcal{P}(n)$ pour tout n .

Quelques définitions techniques qui permettent de manipuler les formules.

Définition 2.6. L'ensemble des sous-formules de F , noté $S(F)$ est défini par induction :

- ▷ si F est atomique, alors on définit $S(F) = \{F\}$;
- ▷ si $F = F_1 \oplus F_2$ (avec \oplus qui est \vee , \rightarrow ou \wedge) alors on définit $S(F) = S(F_1) \cup S(F_2) \cup \{F\}$;
- ▷ si $F = \neg F_1$, ou $F = Qx F_1$ avec $Q \in \{\forall, \exists\}$, alors on définit $S(F) = S(F_1) \cup \{F\}$.

C'est l'ensemble des formules que l'on voit comme des sous-arbres de l'arbre équivalent à la formule F .

Définition 2.7. ▷ La *taille* d'une formule, est le nombre de connecteurs (\neg , \vee , \wedge , \rightarrow), et de quantificateurs (\forall , \exists).

- ▷ La racine de l'arbre est
 - rien si la formule est atomique ;
 - « \oplus » si $F = F_1 \oplus F_2$ avec \oplus un connecteur (binaire ou unaire) ;
 - « Q » si $F = Qx F_1$ avec Q un quantificateur.

Définition 2.8. ▷ Une *occurrence* d'une variable est un endroit où la variable apparaît dans la formule (*i.e.* une feuille étiquetée par cette variable).

- ▷ Une occurrence d'une variable est *liée* si elle se trouve dans une sous-formule dont l'opérateur principal est un quantificateur appelé à cette variable (*i.e.* un $\forall x F'$ ou un $\exists x F'$).
- ▷ Une occurrence d'une variable est *libre* quand elle n'est pas liée.
- ▷ Une variable est libre si elle a au moins une occurrence libre, sinon elle est liée.

Remarque 2.6. On note $F(x_1, \dots, x_n)$ pour dire que les variables libres de F sont parmi $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Définition 2.9. Une formule est *close* si elle n'a pas de variables libres.

Définition 2.10 (Substitution). On note $F[x := t]$ la formule obtenue en remplaçant toutes les occurrences libres de x par t , après renommage éventuel des occurrences des variables liées de F qui apparaissent dans t .

Définition 2.11 (Renommage). On donne une définition informelle et incomplète ici. On dit que les formules F et G sont α -équivalentes si elles sont syntaxiquement identiques à un renommage près des occurrences liées des variables.

Exemple 2.8. On pose

$$F(x, z) := \forall y (x * y = y * z) \wedge \forall x (x * x = 1),$$

et alors

- ▷ $F(z, z) = F[x := z] = \forall y (z * y = y * z) \wedge \forall x (x * x = 1)$;
- ▷ $F(y^{-1}, x) = F[x := y^{-1}] = \forall u (y^{-1} * u = u * z) \wedge \forall x (x * x = 1)$.

On a procédé à un renommage de y à u .

2.3 Les démonstrations en déduction naturelle.

Définition 2.12. Un *séquent* est un couple noté $\Gamma \vdash F$ (où \vdash se lit « montre » ou « thèse ») tel que Γ est un ensemble fini de formules appelé *contexte* (i.e. l'ensemble des hypothèses), la formule F est la *conséquence* du séquent.

Remarque 2.7. Les formules ne sont pas nécessairement closes. Et on note souvent Γ comme une liste.

Définition 2.13. On dit que $\Gamma \vdash F$ est *prouvable*, *démontrable* ou *dérivable*, s'il peut être obtenu par une suite finie de règles (c.f. ci-après). On dit qu'une formule F est *prouvable* si $\emptyset \vdash F$ l'est.

Définition 2.14 (Règles de la démonstration). Une règle s'écrit

$$\frac{\text{prémisses : des séquents}}{\text{conclusion : un séquent}} \text{ nom de la règle } .$$

Axiome.

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A} \text{ ax}$$

Affaiblissement.

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A} \text{ aff}$$

Implication.

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i \quad \frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_e^3$$

Conjonction.

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \vee_e^g \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \vee_e^d$$

Disjonction.

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^g \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^d$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \vee_e^4 .$$

Négation.

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \neg_i \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \perp} \neg_e$$

Absurdité classique.

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \perp_e$$

(En logique intuitionniste, on retire l'hypothèse $\neg A$ dans la prémisse.)

Quantificateur universel.

$$\frac{\text{si } x \text{ n'est pas libre dans les formules de } \Gamma \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A} \forall_i$$

$$\frac{\text{quitte à renommer les variables liées de } A \text{ qui apparaissent dans } t \quad \Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A[x := t]} \forall_e$$

Quantificateur existentiel.

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x A} \exists_i$$

$$\frac{\text{avec } x \text{ ni libre dans } C \text{ ou dans les formules de } \Gamma \quad \Gamma \vdash \exists x A \quad \Gamma, A \vdash C}{\Gamma \vdash C} \exists_e$$

2.4 La sémantique.

Définition 2.15. Soit \mathcal{L} un langage de la sémantique du premier ordre. On appelle *interprétation* (ou *modèle*, ou *structure*) du langage \mathcal{L} l'ensemble \mathcal{M} des données suivantes :

- ▷ un ensemble non vide, noté $|\mathcal{M}|$, appelé *domaine* ou *ensemble de base* de \mathcal{M} ;

3. Aussi appelée *modus ponens*

4. C'est un raisonnement par cas

- ▷ pour chaque symbole c de constante, un élément $c_{\mathcal{M}}$ de $|\mathcal{M}|$;
- ▷ pour chaque symbole f de fonction n -aire, une fonction $f_{\mathcal{M}} : |\mathcal{M}|^n \rightarrow |\mathcal{M}|$;
- ▷ pour chaque symbole R de relation n -aire (sauf pour l'égalité « = »), un sous-ensemble $R_{\mathcal{M}}$ de $|\mathcal{M}|^n$.

Remarque 2.8. ▷ La relation « = » est toujours interprétée par la vraie égalité :

$$\{(a, a) \mid a \in |\mathcal{M}|\}.$$

- ▷ On note, par abus de notation, \mathcal{M} pour $|\mathcal{M}|$.
- ▷ Par convention, $|\mathcal{M}|^0 = \{\emptyset\}$.

Exemple 2.9. Avec $\mathcal{L}_{\text{corps}} = \{0, 1, +, \times, -, \square^{-1}\}$, on peut choisir

- ▷ $|\mathcal{M}| = \mathbb{R}$ avec $0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}}, +_{\mathbb{R}}, \times_{\mathbb{R}}, -_{\mathbb{R}}$ et $\square_{\mathbb{R}}^{-1}$;
- ▷ ou $|\mathcal{M}| = \mathbb{R}$ avec $2_{\mathbb{R}}, 2_{\mathbb{R}}, -_{\mathbb{R}}, +_{\mathbb{R}}, \text{etc.}$

Définissons la *vérité*.

Définition 2.16. Soit \mathcal{M} une interprétation de \mathcal{L} .

- ▷ Un *environnement* est une fonction de l'ensemble des variables dans $|\mathcal{M}|$.
- ▷ Si e est un environnement et $a \in |\mathcal{M}|$, on note $e[x := a]$ l'environnement e' tel que $e'(x) = a$ et pour $y \neq x$, $e(y) = e'(y)$.
- ▷ La *valeur* d'un terme t dans l'environnement e , noté $\text{Val}_{\mathcal{M}}(t, e)$, est définie par induction sur l'ensemble des termes de la façon suivante :
 - $\text{Val}_{\mathcal{M}}(c, e) = c_{\mathcal{M}}$ si c est une constante ;
 - $\text{Val}_{\mathcal{M}}(x, e) = e(x)$ si x est une variable ;
 - $\text{Val}_{\mathcal{M}}(f(t_1, \dots, t_n), e) = f_{\mathcal{M}}(\text{Val}_{\mathcal{M}}(t_1, e), \dots, \text{Val}_{\mathcal{M}}(t_n, e))$.

Remarque 2.9. La valeur est $\mathcal{Val}_{\mathcal{M}}(t, e)$ est un élément de $|\mathcal{M}|$.

Exemple 2.10. Dans $\mathcal{L}_{\text{arith}} = \{0, 1, +, \times\}$, avec le modèle

$$\mathcal{M} : \mathbb{N}, 0_{\mathbb{N}}, 1_{\mathbb{N}}, +_{\mathbb{N}}, \times_{\mathbb{N}},$$

et l'environnement

$$e : \quad x_1 \mapsto 2_{\mathbb{N}} \quad x_2 \mapsto 0_{\mathbb{N}} \quad x_3 \mapsto 3_{\mathbb{N}},$$

alors la valeur du terme $t := (1 \times x_1) + (x_2 \times x_3) + x_2$ est $2_{\mathbb{N}} = (1 \times 2) + (0 \times 3) + 0$.

Lemme 2.1. La valeur $\mathcal{Val}_{\mathcal{M}}(t, e)$ ne dépend que de la valeur de e sur les variables de t . \square

Notation. \triangleright Lorsque cela est possible, on oublie \mathcal{M} et e dans la notation, et on note $\mathcal{Val}(t)$.

- \triangleright À la place de $\mathcal{Val}_{\mathcal{M}}(t, e)$ quand x_1, \dots, x_n sont les variables de t et $e(x_1) = a_1, \dots, e(x_n) = a_n$, on note $t[a_1, \dots, a_n]$ ou aussi $t[x_1 := a_1, \dots, x_n := a_n]$. C'est un *terme à paramètre*, mais attention ce n'est **ni un terme, ni une substitution**.

Définition 2.17. Soit \mathcal{M} une interprétation d'un langage \mathcal{L} . La *valeur* d'une formule F de \mathcal{L} dans l'environnement e est un élément de $\{0, 1\}$ noté $\mathcal{Val}_{\mathcal{M}}(F, e)$ et définie par induction sur l'ensemble des formules par

- $\triangleright \mathcal{Val}_{\mathcal{M}}(R(t_1, \dots, t_n), e) = 1$ ssi $(\mathcal{Val}_{\mathcal{M}}(t_1, e), \dots, \mathcal{Val}_{\mathcal{M}}(t_n, e)) \in R_{\mathcal{M}}$;
- $\triangleright \mathcal{Val}_{\mathcal{M}}(\perp, e) = 0$;
- $\triangleright \mathcal{Val}_{\mathcal{M}}(\neg F, e) = 1 - \mathcal{Val}_{\mathcal{M}}(F, e)$;
- $\triangleright \mathcal{Val}_{\mathcal{M}}(F \wedge G, e) = 1$ ssi $\mathcal{Val}_{\mathcal{M}}(F, e) = 1$ et $\mathcal{Val}_{\mathcal{M}}(G, e) = 1$;
- $\triangleright \mathcal{Val}_{\mathcal{M}}(F \vee G, e) = 1$ ssi $\mathcal{Val}_{\mathcal{M}}(F, e) = 1$ ou $\mathcal{Val}_{\mathcal{M}}(G, e) = 1$;
- $\triangleright \mathcal{Val}_{\mathcal{M}}(F \rightarrow G, e) = 1$ ssi $\mathcal{Val}_{\mathcal{M}}(F, e) = 0$ ou $\mathcal{Val}_{\mathcal{M}}(G, e) = 1$;
- $\triangleright \mathcal{Val}_{\mathcal{M}}(\forall x F, e) = 1$ ssi pour tout $a \in |\mathcal{M}|$, $\mathcal{Val}_{\mathcal{M}}(F, e[x := a]) = 1$;

▷ $\mathcal{V}al_{\mathcal{M}}(\exists x F, e) = 1$ ssi il existe $a \in |\mathcal{M}|$, $\mathcal{V}al_{\mathcal{M}}(F, e[x := a]) = 1$.

Remarque 2.10. ▷ On se débrouille pour que les connecteurs aient leur sens courant, les « mathématiques naïves ».

- ▷ Dans le cas du calcul propositionnel, si R est d'arité 0, *i.e.* une variable propositionnelle, comme $|\mathcal{M}|^0 = \{\emptyset\}$ alors on a deux possibilités :
- ou bien $R = \emptyset$, et alors on convient que $\mathcal{V}al_{\mathcal{M}}(R, e) = 0$;
 - ou bien $R = \{\emptyset\}$, et alors on convient que $\mathcal{V}al_{\mathcal{M}}(R, e) = 1$.

Remarque 2.11. On verra plus tard qu'on peut construire les entiers avec

- ▷ $0 : \emptyset$,
- ▷ $1 : \{\emptyset\}$,
- ▷ $2 : \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
- ▷ \vdots
- ▷ $n + 1 : n \cup \{n\}$,
- ▷ \vdots

Notation. À la place de $\mathcal{V}al_{\mathcal{M}}(F, e) = 1$, on notera $\mathcal{M}, e \models F$ ou bien $\mathcal{M} \models F$. On dit que \mathcal{M} *satisfait* F , que \mathcal{M} est un *modèle* de F (dans l'environnement e), que F est vraie dans \mathcal{M} .

Lemme 2.2. La valeur $\mathcal{V}al_{\mathcal{M}}(F, e)$ ne dépend que de la valeur de e sur les variables libres de F .

Preuve. En exercice. □

Corollaire 2.1. Si F est close, alors $\mathcal{V}al_{\mathcal{M}}(F, e)$ ne dépend pas de e et on note $\mathcal{M} \models F$ ou $\mathcal{M} \not\models F$.

Remarque 2.12. Dans le cas des formules closes, on doit passer un environnement à cause de \forall et \exists .

Notation. On note $F[a_1, \dots, a_n]$ pour $\mathcal{Val}_{\mathcal{M}}(F, e)$ avec $e(x_1) = a_1, \dots, e(x_n) = a_n$. C'est une *formule à paramètres*, mais ce n'est **pas une formule**.

Exemple 2.11. Dans $\mathcal{L} = \{S\}$ où S est une relation binaire, on considère deux modèles :

- ▷ $\mathcal{N} : |\mathcal{N}| = \mathbb{N}$ avec $S_{\mathcal{N}} = \{(x, y) \mid x < y\}$,
- ▷ $\mathcal{R} : |\mathcal{R}| = \mathbb{R}$ avec $S_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \mid x < y\}$;

et deux formules

- ▷ $F = \forall x \forall y (S x y \rightarrow \exists z (S x z \wedge S z y))$,
- ▷ $G = \exists x \forall y (x = y \vee S x y)$;

alors on a

$$\mathcal{N} \not\models F \quad \mathcal{R} \models F \quad \mathcal{N} \models G \quad \mathcal{R} \not\models G.$$

En effet, la formule F représente le fait d'être un ordre dense, et G d'avoir un plus petit élément.

Définition 2.18. Dans un langage \mathcal{L} , une formule F est un *théorème (logique)* si pour toute structure \mathcal{M} et tout environnement e , on a $\mathcal{M}, e \models F$.

Exemple 2.12. Quelques théorèmes simples : $\forall x \neg \perp$, et $\forall x x = x$ et même $x = x$ car on ne demande pas que la formule soit clause.

Dans $\mathcal{L}_g = \{e, *, \square^{-1}\}$, on considère deux formules

- ▷ $F = \forall x \forall y \forall z ((x * (y * z) = (x * y) * z) \wedge x * e = e * x = x \wedge \exists t (x * t = e \wedge t * x = e))$;
- ▷ et $G = \forall e' = \forall e' (\forall x (x * e' = e' * x = x) \rightarrow e = e')$.

Aucun des deux n'est un théorème (il n'est vrai que dans les groupes pour F (c'est même la définition de groupe) et dans les monoïdes pour G (unicité du neutre)), mais $F \rightarrow G$ est un théorème logique.

Définition 2.19. Soient \mathcal{L} et \mathcal{L}' deux langages. On dit que \mathcal{L}' *enrichit* \mathcal{L} ou que \mathcal{L} est une *restriction* de \mathcal{L}' si $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$.

Dans ce cas, si \mathcal{M} est une interprétation de \mathcal{L} , et si \mathcal{M}' est une interprétation de \mathcal{L}' alors on dit que \mathcal{M}' est un *enrichissement* de \mathcal{M} ou que \mathcal{M} est une *restriction* de \mathcal{M}' ssi $|\mathcal{M}| = |\mathcal{M}'|$ et chaque symbole de \mathcal{L} a la même interprétation dans \mathcal{M} et \mathcal{M}' , i.e. du point de vue de \mathcal{L} , \mathcal{M} et \mathcal{M}' sont les mêmes.

Exemple 2.13. Avec $\mathcal{L} = \{e, *\}$ et $\mathcal{L}' = \{e, *, \square^{-1}\}$ alors \mathcal{L}' est une extension de \mathcal{L} . On considère

- ▷ $\mathcal{M} : \quad |\mathcal{M}| = \mathbb{Z} \quad e_{\mathcal{M}} = 0_{\mathbb{Z}} \quad *_{\mathcal{M}} = +_{\mathbb{Z}};$
- ▷ $\mathcal{M}' : \quad |\mathcal{M}'| = \mathbb{Z} \quad e_{\mathcal{M}'} = 0_{\mathbb{Z}} \quad *_{\mathcal{M}'} = +_{\mathbb{Z}} \quad \square_{\mathcal{M}'}^{-1} = \text{id}_{\mathbb{Z}},$

et alors \mathcal{M}' est une extension de \mathcal{M} .

Proposition 2.1. Si \mathcal{M} une interprétation de \mathcal{L} est un enrichissement de \mathcal{M}' , une interprétation de \mathcal{L}' , alors pour tout environnement e ,

1. si t est un terme de \mathcal{L} , alors $\text{Val}_{\mathcal{M}}(t, e) = \text{Val}_{\mathcal{M}'}(t, e);$
2. si F est une formule de \mathcal{L} alors $\text{Val}_{\mathcal{M}}(F, e) = \text{Val}_{\mathcal{M}'}(F, e).$

Preuve. En exercice. □

Corollaire 2.2. La vérité d'une formule dans une interprétation ne dépend que de la restriction de cette interprétation au langage de la formule. □

Définition 2.20. Deux formules F et G sont *équivalentes* si $F \leftrightarrow G$ est un théorème logique.

Proposition 2.2. Toute formule est équivalente à une formule n'utilisant que les connecteurs logiques \neg , \vee et \exists . \square

Définition 2.21. Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux interprétations de \mathcal{L} .

1. Un \mathcal{L} -morphisme de \mathcal{M} est une fonction $\varphi : |\mathcal{M}| \rightarrow |\mathcal{N}|$ telle que

- ▷ pour chaque symbole de constante c , on a $\varphi(c_{\mathcal{M}}) = c_{\mathcal{N}}$;
- ▷ pour chaque symbole f de fonction n -aire, on a

$$\varphi(f_{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n)) = f_{\mathcal{N}}(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) ;$$

- ▷ pour chaque symbole R de relation n -aire (autre que « = »), on a

$$(a_1, \dots, a_n) \in R_{\mathcal{M}} \text{ ssi } (\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) \in R_{\mathcal{N}}.$$

- ▷ Un \mathcal{L} -isomorphisme est un \mathcal{L} -morphisme bijectif.
- ▷ Si \mathcal{M} et \mathcal{N} sont *isomorphes* s'il existe un \mathcal{L} -isomorphisme de \mathcal{M} à \mathcal{N} .

Remarque 2.13. 1. On ne dit rien sur « = » car si on impose la même condition que pour les autres relations alors nécessairement φ est injectif.

2. La notion dépend du langage \mathcal{L} .

3. Lorsqu'on a deux structures isomorphes, on les confonds, ce sont les mêmes, c'est un renommage.

Exemple 2.14. Avec $\mathcal{L}_{\text{ann}} = \{0, +, \times, -\}$ et $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_{\text{ann}} \cup \{1\}$, et les deux modèles $\mathcal{M} : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathcal{N} = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, on considère la

fonction définie (on néglige les cas inintéressants) par $\varphi(\bar{n}) = \overline{4n}$.

Est-ce que φ est un morphisme de \mathcal{M} dans \mathcal{N} ? Oui... et non... Dans \mathcal{L} c'est le cas, mais pas dans \mathcal{L}' car $\varphi(1) = 4$.

Exemple 2.15. Dans $\mathcal{L} = \{c, f, R\}$ avec f une fonction binaire, et R une relation binaire, on considère

- ▷ $\mathcal{M} : \mathbb{R}, 0, +, \leq ;$
- ▷ $\mathcal{N} :]0, +\infty[, 1, \times, \leq .$

Existe-t-il un morphisme de \mathcal{M} dans \mathcal{N} ? Oui, il suffit de poser le morphisme $\varphi : x \mapsto e^x$.

Proposition 2.3. La composée de deux morphismes (*resp.* isomorphisme) est un morphisme (*resp.* un isomorphisme). \square

Notation. Si φ est un morphisme de \mathcal{M} dans \mathcal{N} et e un environnement de \mathcal{M} , alors on note $\varphi(e)$ pour $\varphi \circ e$. C'est un environnement de \mathcal{N} .

Lemme 2.3. Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux interprétations de \mathcal{L} , et φ un morphisme de \mathcal{M} dans \mathcal{N} . Alors pour tout terme t et environnement e , on a

$$\varphi(\text{Val}_{\mathcal{M}}(t, e)) = \text{Val}_{\mathcal{N}}(t, \varphi(e)).$$

\square

Lemme 2.4. Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux interprétations de \mathcal{L} , et φ un morphisme *injectif* de \mathcal{M} dans \mathcal{N} . Alors pour toute formule atomique F et environnement e , on a

$$\mathcal{M}, e \models F \text{ ssi } \mathcal{N}, \varphi(e) \models F$$

Lemme 2.5. Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux interprétations de \mathcal{L} , et φ un *isomorphisme*⁵ de \mathcal{M} dans \mathcal{N} . Alors pour toute formule F et

environnement e , on a

$$\mathcal{M}, e \models F \text{ ssi } \mathcal{N}, \varphi(e) \models F$$

Corollaire 2.3. Deux interprétations isomorphismes satisfont les mêmes formules closes.

Exercice 2.4. Les groupes $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont-ils isomorphes ? Non. En effet, les deux formules

- ▷ $\exists x (x \neq e \wedge x * x \neq e \wedge x * (x * x) \neq e \wedge x * (x * (x * x)) = e)$,
- ▷ $\forall x (x * x) = e$

ne sont pas vraies dans les deux (pour la première, elle est vraie dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ mais pas dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ et pour la seconde, c'est l'inverse).

Remarque 2.14. La réciproque du corollaire est *fausse* : deux interprétations qui satisfont les mêmes formules closes ne sont pas nécessairement isomorphes. Par exemple, avec $\mathcal{L} = \{\leq\}$, les interprétations \mathbb{R} et \mathbb{Q} satisfont les mêmes formules closes, mais ne sont pas isomorphes.

Définition 2.22. Soit \mathcal{L} un langage, \mathcal{M} et \mathcal{N} deux interprétations de \mathcal{L} . On dit que \mathcal{N} est une *extension* de \mathcal{M} (ou \mathcal{M} est une *sous-interprétation* de \mathcal{N}) si les conditions suivantes sont satisfaites :

- ▷ $|\mathcal{M}| \subseteq |\mathcal{N}|$;
- ▷ pour tout symbole de constante c , on a $c_{\mathcal{M}} = c_{\mathcal{N}}$;
- ▷ pour tout symbole de fonction n -aire f , on a $f_{\mathcal{M}} = f_{\mathcal{N}}|_{|\mathcal{M}|^n}$ (donc en particulier $f_{\mathcal{N}}(|\mathcal{M}|^n) \subseteq |\mathcal{M}|$) ;
- ▷ pour tout symbole de relation n -aire R , on a $R_{\mathcal{M}} = R_{\mathcal{N}} \cap |\mathcal{M}|^n$.

5. On utilise ici la *surjectivité* pour le « \exists ».

Proposition 2.4. Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux interprétations de \mathcal{L} . Alors \mathcal{M} est isomorphe à une sous-interprétation \mathcal{M}' de \mathcal{N} si et seulement si, il existe un morphisme injectif de \mathcal{M} dans \mathcal{N} .

Exemple 2.16 (Construction de \mathbb{Z} à partir de \mathbb{N}). On pose la relation $(p, q) \sim (p', q')$ si $p + q' = p' + q$. C'est une relation d'équivalence sur \mathbb{N}^2 . On pose $\mathbb{Z} := \mathbb{N}^2 / \sim$ (il y a un isomorphisme $\mathbb{N}^2 / \sim \rightarrow \mathbb{Z}$ par $(p, q) \mapsto p - q$). Est-ce qu'on a $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}^2 / \sim$? D'un point de vue ensembliste, non. Mais, généralement, l'inclusion signifie avoir un morphisme injectif de \mathbb{N} dans \mathbb{N}^2 / \sim .

Définition 2.23. Une *théorie* est un ensemble (fini ou pas) de formules closes. Les éléments de la théorie sont appelés *axiomes*.

Exemple 2.17. La *théorie des groupes* est

$$T_{\text{groupe}} := \left\{ \begin{aligned} &\forall x (x * e = e * x = x), \\ &\forall x (x * x^{-1} = e \wedge x^{-1} * x = e), \\ &\forall x \forall y \forall z (x * (y * z) = (x * y) * z) \end{aligned} \right\}$$

dans le langage \mathcal{L}_g .

Exemple 2.18. La *théorie des ensembles infinis* est

$$T_{\text{ens infinis}} := \left\{ \begin{aligned} &\exists x (x = x), \\ &\exists x \exists y (x \neq y), \\ &\exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x) \\ &\dots \end{aligned} \right\}$$

dans le langage \mathcal{L}_{ens} .

Définition 2.24 (Sémantique). ▷ Une interprétation \mathcal{M} *satisfait* T (ou \mathcal{M} est un *modèle* de T), noté $\mathcal{M} \models T$, si \mathcal{M} satisfait toutes les formules de T .

- ▷ Une théorie T est *contradictoire* s'il n'existe pas de modèle de T . Sinon, on dit qu'elle est *non-contradictoire*, ou *satisfiable*, ou *satisfaisable*.

Exemple 2.19. Les deux théories précédentes, T_{groupes} et $T_{\text{ens infinis}}$, sont non-contradictaires.

Définition 2.25 (Syntaxique). Soit T une théorie.

- ▷ Soit A une formule. On note $T \vdash A$ s'il existe un sous-ensemble fini T' tel que $T' \subseteq T$ et $T' \vdash A$.
- ▷ On dit que T est *consistante* si $T \not\vdash \perp$, sinon T est *inconsistante*.
- ▷ On dit que T est *complète* (« *axiome-complète* ») si T est consistante et, pour toute formule $F \in \mathcal{F}$, on a $T \vdash F$ ou on a $T \vdash \neg F$.

Exemple 2.20. La théorie des groupes n'est pas complète : par exemple,

$$F := \forall x \forall y (x * y = y * x)$$

est parfois vraie, parfois fausse, cela dépend du groupe considéré.

Exemple 2.21. La théorie

$$T = \text{Th}(\mathbb{N}) := \{\text{les formules } F \text{ vraies dans } \mathbb{N}\}$$

est complète mais pas pratique.

De par le théorème d'*incomplétude de Gödel* (c'est un sens différent du « complet » défini avant), on montre qu'on ne peut pas avoir de *joli* ensemble d'axiomes pour \mathbb{N} .

Proposition 2.5. Soit T une théorie complète.

1. Soit A une formule close. On a $T \vdash \neg A$ ssi $T \not\vdash A$.
2. Soient A et B des formules closes. On a $T \vdash A \vee B$ ssi $T \vdash A$ ou $T \vdash B$.

Preuve. \triangleright Si $T \vdash \neg A$ et $T \vdash A$, alors il existe $T', T'' \subseteq_{\text{fini}} T$ tels que $T' \vdash \neg A$ et $T'' \vdash A$. On a donc $T' \cup T'' \vdash \perp$ par :

$$\frac{\frac{T' \vdash \neg A}{T' \cup T'' \vdash \neg A} \text{ aff} \quad \frac{T'' \vdash A}{T' \cup T'' \vdash A} \text{ aff}}{T' \cup T'' \vdash \perp} \neg_e$$

On en conclut que $T \vdash \perp$, absurde car T supposée complète donc consistante. On a donc $T \vdash \neg A$ implique $T \not\vdash A$.

Réciproquement, si $T \not\vdash A$ et $T \not\vdash \neg A$, alors c'est impossible car T est complète. On a donc $T \not\vdash A$ implique $T \vdash \neg A$.

- \triangleright Si $T \vdash A$ ou $T \vdash B$, alors par la règle \vee_i^g ou \vee_i^d , on montre que $T \vdash A \vee B$.

Réciproquement, si $T \vdash A \vee B$ et $T \not\vdash A$ et $T \not\vdash B$ alors, par 1, on a $T \vdash \neg A$ et $T \vdash \neg B$. On montre ainsi (en exercice) que $T \vdash \neg(A \vee B)$ d'où $T \vdash \perp$ par \neg_e . C'est impossible car T est complète donc consistante, d'où $T \vdash A \vee B$ implique $T \vdash A$ ou $T \vdash B$.

□

2.5 Théorème de complétude de Gödel.

Théorème 2.1 (Complétude de Gödel (à double sens)).

Version 1. Soit T une théorie et F une formule close. On a $T \vdash F$ ssi $T \models F$.

Version 2. Une théorie T est consistante (syntaxe) ssi elle est non-contradictoire (sémantique).

Remarque 2.15. La version 1 se décompose en deux théorèmes :

- ▷ le théorème de *correction* (ce que l'on prouve est vrai)

$$T \vdash F \implies T \models F ;$$

- ▷ le *théorème de complétude* (ce qui est vrai est prouvable)

$$T \models F \implies T \vdash F.$$

Pour la version 2, on peut aussi la décomposer en deux théorèmes⁶ :

- ▷ la *correction*, T non-contradictoire implique T consistante ;
- ▷ la *complétude*, T consistante implique T non-contradictoire.

Par contraposée, on a aussi qu'une théorie contradictoire est inconsistante.

Proposition 2.6. Les deux versions du théorème de correction sont équivalentes.

Preuve. ▷ D'une part, on montre (par contraposée) « non V2 implique non V1 ». Soit T non-contradictoire et inconsistante. Il existe un modèle \mathcal{M} tel que $\mathcal{M} \models T$ et $T \vdash \perp$. Or, par définition, $\mathcal{M} \not\models \perp$ donc $T \not\models \perp$.

▷ D'autre part, on montre « V2 implique V1 ». Soit T et F tels que $T \vdash F$. Ainsi, $T \cup \neg F \vdash \perp$, d'où $T \cup \{\neg F\}$ est inconsistante, et d'où, par la version 2 de la correction, on a que $T \cup \{\neg F\}$ contradictoire, donc on n'a pas de modèle. On a alors que, tous les modèles de T sont des modèles de F , autrement dit $T \models F$.

□

6. On a une négation dans ce théorème, donc ce n'est pas syntaxe implique sémantique pour la correction, mais non sémantique implique non syntaxe.

Proposition 2.7. Les deux versions du théorème de complétude (sens unique) sont équivalentes.

Preuve. \triangleright Soit T contradictoire. Elle n'a pas de modèle. Ainsi, on a $T \models \perp$ d'où $T \vdash \perp$ par la version 1, elle est donc inconsistante.

\triangleright Soit $T \models F$. Considérons $T \cup \{\neg F\}$: cette théorie n'a pas de modèle, donc est contradictoire, donc est inconsistante, et on a donc que $T \cup \{\neg F\} \vdash \perp$ d'où $T \vdash F$ par \perp_e .

□

Remarque 2.16 (Attention !). On utilise « \models » dans deux sens.

- \triangleright Dans le sens *modèle* \models *formule*, on dit qu'une formule est vraie dans un modèle, c'est le sens des mathématiques classiques.
- \triangleright Dans le sens *théorie* \models *formule*, on dit qu'une formule est vraie dans tous les modèles de la théorie, c'est un sens des mathématiques plus inhabituel.

2.5.1 Preuve du théorème de correction.

Exercice 2.5. Montrer que le lemme ci-dessous implique la version 1 de la correction.

Lemme 2.6. Soient T une théorie, \mathcal{M} un modèle et F une formule close. Si $\mathcal{M} \models T$ et $T \vdash F$ alors $\mathcal{M} \models F$.

Preuve. Comme d'habitude, pour montrer quelque chose sur les formules closes, on commence par les formules et même les termes. On commence par montrer que la substitution dans les termes a un sens sémantique.

Lemme 2.7. Soient t et u des termes et e un environnement. Soient $v := t[x := u]$ et $e' := e[x := \mathcal{V}al(u, e)]$. Alors, $\mathcal{V}al(v, e) = \mathcal{V}al(t, e')$.

Preuve. En exercice. \square

Lemme 2.8. Soit A une formule, t un terme, et e un environnement. Si $e' := e[x := \mathcal{V}al(t, e)]$ alors $\mathcal{M}, e \models A[x := t]$ ssi $\mathcal{M}, e' \models A$.

Preuve. En exercice. \square

On termine la preuve en montrant la proposition ci-dessous. \square

Montrons cette proposition plus forte que le lemme.

Proposition 2.8. Soient Γ un ensemble de formules et A une formule. Soit \mathcal{M} une interprétation et soit e un environnement. Si $\mathcal{M}, e \models \Gamma$, et $\Gamma \vdash A$ alors $\mathcal{M}, e \models A$.

Preuve. Par induction sur la preuve de $\Gamma \vdash A$, on montre la proposition précédente.

- ▷ Cas inductif \rightarrow_i . On sait que A est de la forme $B \rightarrow C$, et on montre que de $\Gamma, B \vdash C$ on montre $\Gamma \vdash B \rightarrow C$. Soient \mathcal{M} et e tels que $\mathcal{M}, e \models \Gamma$. Montrons que $\mathcal{M}, e \models B \rightarrow C$. Il faut donc montrer que si $\mathcal{M}, e \models B$ alors $\mathcal{M}, e \models C$. Si $\mathcal{M}, e \models B$ alors $\mathcal{M}, e \models \Gamma \cup \{B\}$. Or, comme $\Gamma, B \vdash C$ alors par hypothèse d'induction, on a que $\mathcal{M}, e \models C$.
- ▷ Cas inductif \forall_e . Si A est de la forme $B[x := t]$, alors de $\Gamma \vdash \forall x B$, on en déduit que $\Gamma \vdash B[x := t]$. Soit $\mathcal{M}, e \models \Gamma$ et $a := \mathcal{V}al(t, e)$. Par hypothèse de récurrence, on a que $\mathcal{M}, e \models \forall x B$ donc $\mathcal{M}, e[x := a] \models B$ et d'après le lemme précédent, on a que $\mathcal{M}, e \models B[x := t]$.
- ▷ Les autres cas inductifs sont laissés en exercices.

- ▷ Cas de base **ax**. Si $A \in \Gamma$ et $\mathcal{M}, e \models \Gamma$ alors $\mathcal{M}, e \models A$.
- ▷ Cas de base $=_i$. On a, pour tout \mathcal{M}, e que $\mathcal{M}, e \models t = t$. □

Cette proposition permet de conclure la preuve du lemme précédent.

2.5.2 Compacité.

Théorème 2.2 (Compacité (sémantique)). Une théorie T est contradictoire ssi elle est finiment contradictoire, *i.e.* il existe $T' \subseteq_{\text{fini}} T$ telle que T' est contradictoire.

Preuve. Soit T contradictoire. On utilise le théorème de complétude. Ainsi T est inconsistante. Il existe donc $T' \subseteq_{\text{fini}} T$ avec T' inconsistante par le théorème de compacité syntaxique ci-dessous (qui est trivialement vrai). On applique de nouveau le théorème de complétude pour en déduire que T' est contradictoire. □

Théorème 2.3 (Compacité (syntaxique)). Une théorie T est inconsistante ssi elle est finiment inconsistante.

Preuve. Ceci est évident car une preuve est nécessairement finie. □

