Le calcul propositionnel.

Le *calcul propositionnel*, c'est la « grammaire » de la logique. Dans ce chapitre, on s'intéressera à

1. la construction des formules (▷ la syntaxe) ;
2. la sémantique et les théorèmes de compacité (▷ la compacité sémantique).

1 Syntaxe.

Définition 1. Le *langage*, ou *alphabet*, est un ensemble d'éléments fini ou pas. Les éléments sont les *lettres*, et les suites finies sont les *mots*.

Remarque 1. On choisit l'alphabet :

- ▷ $\mathscr{P} = \{x_0, x_1, \dots\}$ des variables propositionnelles ;
- ▷ un ensemble de *connecteurs* ou *symboles logiques*, défini par $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, il n'y a pas $\exists$ et $\forall$ pour l'instant.
- ▷ les parenthèses $\{\texttt{(},\texttt{)}\}$.

Les formules logiques sont des mots. On les fabrique avec des briques de base (les variables) et des opérations de construction : si F_1 et F_2 sont deux formules, alors $\neg F$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \rightarrow F_2)$ et $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ aussi.

On donne deux définitions des formules et on pourra montrer qu'elles sont équivalentes.

Définition 2 (« par le haut », « mathématique »). L'ensemble $\mathscr{F}$ des formules du calcul propositionnel construit sur $\mathscr{P}$ est le plus petit ensemble contenant $\mathscr{P}$ et stable par les opérations de construction.

Définition 3 (« par le bas », « informatique »). L'ensemble $\mathscr{F}$ des formules logiques du calcul propositionnel sur $\mathscr{P}$ est défini par

- ▷ $\mathscr{F}_0 = \mathscr{P}$;
- ▷ $\mathscr{F}_{n+1} = \mathscr{F}_n \cup \left\{ \begin{array}{c} \neg F_1 \\ (F_1 \vee F_2) \\ (F_1 \wedge F_2) \\ (F_1 \to F_2) \\ (F_1 \leftrightarrow F_2) \end{array} \;\middle|\; F_1, F_2 \in \mathscr{F}_n \right\}$

puis on pose $\mathscr{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n$.

Théorème 1 (Lecture unique). Toute formule $G \in \mathscr{F}$ vérifie une et une seule de ces propriétés :

- ▷ $G \in \mathscr{P}$;
- ▷ il existe $F \in \mathscr{F}$ telle que $G = \neg F$;
- ▷ il existe $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ telle que $G = (F_1 \vee F_2)$;
- ▷ il existe $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ telle que $G = (F_1 \wedge F_2)$;
- ▷ il existe $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ telle que $G = (F_1 \to F_2)$;
- ▷ il existe $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ telle que $G = (F_1 \leftrightarrow F_2)$;

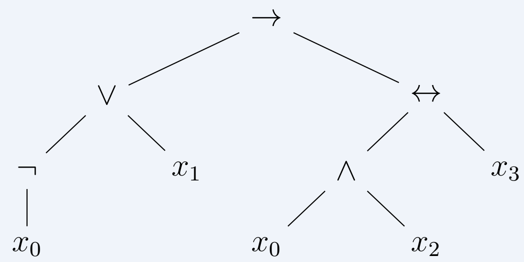
et ces sous-formules sont uniques.

Preuve. En exercice. □

Corollaire 1. Il y a une bijection entre les formules et les arbres dont

- ▷ les feuilles sont étiquetées par des variables ;
- ▷ les nœuds internes sont étiquetés par des connecteurs ;
- ▷ ceux étiquetés par $\neg$ ont un fils, les autres deux.

Exemple 1. La formule $((\neg x_0 \vee x_1) \to ((x_0 \wedge x_2) \leftrightarrow x_3))$ correspond à l'arbre



2 Sémantique.

Lemme 1. Soit ν une fonction de $\mathscr{P}$ dans $\{0,1\}$ appelée *valuation*. Alors ν s'étend de manière unique en une fonction $\bar{\nu}$ de $\mathscr{F}$ dans $\{0,1\}$ telle que

- ▷ sur $\mathscr{P}$, $\nu = \bar{\nu}$;
- ▷ si $F, G \in \mathscr{F}$ sont des formules alors
  - – $\bar{\nu}(\neg F) = 1 - \bar{\nu}(F)$;
  - – $\bar{\nu}(F \vee G) = \max(\bar{\nu}(F), \bar{\nu}(G))$;
  - – $\bar{\nu}(F \wedge G) = \bar{\nu}(F) \times \bar{\nu}(G)$;
  - – $\bar{\nu}(F \to G) = 1$ ssi $\bar{\nu}(F) \le \bar{\nu}(G)$;
  - – $\bar{\nu}(F \leftrightarrow G) = 1$ ssi $\bar{\nu}(F) = \bar{\nu}(G)$.

Par abus de notations, on notera ν pour $\bar{\nu}$ par la suite.

Preuve (Idée de preuve). **Existence.** On définit en utilisant le lemme de lecture unique, et par induction sur $\mathscr{F}$:

- ▷ $\bar{\nu}$ est définie sur $\mathscr{F}_0 = \mathscr{P}$;
- ▷ si $\bar{\nu}$ est définie sur $\mathscr{F}_n$ alors pour $F \in \mathscr{F}_{n+1}$, on a la disjonction de cas
  - – si $F = \neg G$ avec $G \in \mathscr{F}_n$, et on définit $\bar{\nu}(F) = 1 - \bar{\nu}(F_1)$;
  - – *etc* pour les autres cas.

Unicité. On peut montrer que si $\bar{\nu}$ et $\bar{\nu}'$ sont deux extensions de ν, alors $\bar{\nu}$ et $\bar{\nu}'$ coïncident sur $\mathcal{F}_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce que l'on prouve par récurrence sur n.

□

Exemple 2 (Table de vérité). Pour la formule

$$F = ((x_1 \to x_2) \to (x_2 \to x_1)),$$

on construit la table

x_1	0	0	1	1
x_2	0	1	0	1
$x_1 \to x_2$	1	1	0	1
$x_2 \to x_1$	1	0	1	1
F	1	0	1	1

Définition 4.
- ▷ Une formule F est dite *satisfaite par une valuation* ν si $\nu(F) = 1$.
- ▷ Une *tautologie* est une formule satisfaite pour toutes les valuations.
- ▷ Un ensemble $\mathscr{E}$ de formules est *satisfiable* s'il existe une valuation qui satisfait toutes les formules de $\mathscr{E}$.
- ▷ Un ensemble $\mathscr{E}$ de formules est *finiment satisfiable* si tout sous-ensemble fini de $\mathscr{E}$ est satisfiable.
- ▷ Une formule F est *conséquence sémantique* d'un ensemble de formules $\mathscr{E}$ si toute valuation qui satisfait $\mathscr{E}$ satisfait F.
- ▷ Un ensemble de formules $\mathscr{E}$ est *contradictoire* s'il n'est pas satisfiable.
- ▷ Un ensemble de formules $\mathscr{E}$ est *finiment contradictoire* s'il existe un sous-ensemble fini contradictoire de $\mathscr{E}$.

Théorème 2 (compacité du calcul propositionnel). On donne trois énoncés équivalents (équivalence des trois énoncés laissée en exercice) du théorème de compacité du calcul propositionnel.

Version 1. Un ensemble de formules $\mathscr{E}$ est satisfiable si et seulement s'il est finiment satisfiable.

Version 2. Un ensemble de formules $\mathscr{E}$ est contradictoire si et seulement s'il est finiment contradictoire.

Version 3. Pour tout ensemble $\mathscr{E}$ de formules du calcul propositionnel, et toute formule F, F est conséquence sémantique de $\mathscr{E}$ si et seulement si F est conséquence sémantique d'un sous-ensemble fini de $\mathscr{E}$.

Preuve. Supposons que $\mathscr{P}$ soit dénombrable. Le cas non-dénombrable sera traité après.

« $\implies$ ». Si ν satisfait toute formule de $\mathscr{E}$, alors tout sous-ensemble fini de $\mathscr{E}$ est satisfiable en utilisant la valuation ν.

« $\impliedby$ ». Supposons $\mathscr{E}$ finiment satisfiable. Comme $\mathscr{P}$ est supposé dénombrable, notons $\mathscr{P} = \{x_1, x_2, \ldots\}$. On cherche une valuation ν qui satisfait toute formule de $\mathscr{E}$, et on va définir la suite des $\varepsilon_n = \nu(x_n)$ par récurrence.

1. On construit par récurrence une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ qui satisfait, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   > « pour toute partie finie B de $\mathscr{E}$, il existe une valuation λ satisfaisant B et telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda(x_i) = \varepsilon_i$ ».

   On note cette propriété $\mathscr{R}_n$.

   - Pour $n = 0$, la propriété $\mathscr{R}_0$

     > « pour toute partie finie B de $\mathscr{E}$, il existe une valuation λ satisfaisant B »,

     est vraie car $\mathscr{E}$ est supposé finiment satisfiable.

- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ soient construits et qu'ils satisfont $\mathcal{R}_n$. On a la disjonction de cas suivants :
  - Si pour toute partie finie B de $\mathscr{E}$, il existe une valuation λ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda(x_i) = \varepsilon_i$ et que $\lambda(x_{i+1}) = 0$, alors posons $\varepsilon_{n+1} := 0$ et on a immédiatement $\mathcal{R}_{n+1}$.
  - S'il existe une partie A de $\mathscr{E}$, telle que $(\star)$ toute valuation λ satisfaisant A et telle que $\lambda(x_i) = \varepsilon_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ vérifie $\lambda(x_{n+1}) = 1$. On pose donc $\varepsilon_{n+1} := 1$.

    Montrons la propriété $\mathcal{R}_{n+1}$. Considérons une partie finie B de $\mathscr{E}$. Par $\mathcal{R}_n$, il existe une valuation η qui satisfait $A \cup B$, sous-ensemble fini de $\mathscr{E}$, et qui vérifie $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\eta(x_i) = \varepsilon_i$. En particulier η satisfait A, ce qui implique par $(\star)$, que $\eta(x_{n+1}) = 1 = \varepsilon_{n+1}$. Et comme η satisfait B, on vérifie bien $\mathcal{R}_{n+1}$.

2. Posons $\nu : x_i \mapsto \varepsilon_i$. On va montrer que ν satisfait $\mathscr{E}$ en utilisant les deux lemmes suivants.

Lemme 2. Pour toute formule F, il existe un entier $k_F \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{vars} F \subseteq \{x_1, \ldots, x_{k_F}\}$.

Lemme 3. Si λ et ν coïncident sur $\operatorname{vars} F$ alors $\lambda(F) = \nu(F)$.

Considérons $F \in \mathscr{E}$. Par $\mathcal{R}_{k_F}$ avec $\{F\}$ sous-ensemble fini de $\mathscr{E}$, il existe une valuation λ satisfaisant F et telle que pour tout $i \in [\![1, k_F]\!]$, on ait $\lambda(x_i) = \varepsilon_i$. Autrement dit, λ coïncide avec ν sur les k_F premières variables, donc sur les variables de F. On en conclut que $\lambda(F) = \nu(F) = 1$.

□

Dans le cas non-dénombrable, on utilise le *lemme de Zorn*, un équivalent de l'*axiome du choix*.

Définition 5. Un ensemble ordonné $(X, \mathscr{R})$ est inductif si pour tout sous-ensemble Y de X totalement ordonné par $\mathscr{R}$ (*i.e.* une chaîne) admet un majorant dans X.

Remarque 2. On considère ici un majorant et non un plus grand élément (un maximum).

Exemple 3.
1. Dans le cas $(\mathscr{P}(X), \subseteq)$, le majorant est l'union des parties de la chaîne, il est donc inductif.
2. Dans le cas $(\mathbb{R}, \leq)$, il n'est pas inductif car $\mathbb{R}$ n'a pas de majorant dans $\mathbb{R}$.

Lemme 4 (Lemme de Zorn). Si $(X, \mathscr{R})$ est un ensemble ordonné inductif non-vide, il admet au moins un élément maximal.

Remarque 3. Un élément maximal n'est pas nécessairement le plus grand.

Preuve (Cas non-dénombrable pour le théorème 2). Soit $\mathscr{E}$ un ensemble de formules finiment satisfiable, et $\mathscr{P}$ un ensemble de variables. On note $\mathscr{V}$ l'ensemble des valuations partielles prolongeables pour toute partie finie $\mathscr{C}$ de $\mathscr{E}$ en une valuation satisfaisant $\mathscr{C}$. C'est-à-dire :

$$\mathscr{V} := \left\{ \varphi \in \bigcup_{X \subseteq \mathscr{P}} \{0,1\}^X \;\middle|\; \forall \mathscr{C} \in \wp_{\mathrm{f}}(\mathscr{E}), \exists \delta \in \{0,1\}^{\mathscr{P}},\; \begin{array}{l} \delta_{|\operatorname{dom}\varphi} = \varphi \\ \forall F \in \mathscr{C}, \delta(F) = 1 \end{array} \right\}.$$

L'ensemble $\mathscr{V}$ est non-vide car contient l'application vide de $\{0,1\}^\emptyset$ car $\mathscr{E}$ est finiment satisfiable. On définit la relation d'ordre $\preccurlyeq$ sur $\mathscr{V}$ par :

$$\varphi \preccurlyeq \psi \quad \text{ssi} \quad \psi \text{ prolonge } \varphi.$$

Montrons que $(\mathscr{V}, \preccurlyeq)$ est inductif. Soit $\mathscr{C}$ une chaîne de $\mathscr{V}$ et construisons un majorant de $\mathscr{C}$. Soit λ la valuation partielle définie sur $\operatorname{dom} \lambda = \bigcup_{\varphi \in \mathscr{C}} \operatorname{dom} \varphi$, par : si $x_i \in \operatorname{dom} \lambda$ alors il existe $\varphi \in \mathscr{C}$ tel que $x_i \in \operatorname{dom} \varphi$ et on pose $\lambda(x_i) = \varphi(x_i)$.

La valuation λ est définie de manière unique, *i.e.* ne dépend pas du choix de φ. En effet, si $\varphi \in \mathscr{C}$ et $\psi \in \mathscr{C}$, avec $x_i \in \operatorname{dom} \varphi \cap \operatorname{dom} \psi$, alors on a $\varphi \preccurlyeq \psi$ ou $\psi \preccurlyeq \varphi$, donc $\varphi(x_i) = \psi(x_i)$.

Autrement dit, λ est un majorant de $\mathscr{C}$.

Montrons que $\lambda \in \mathscr{V}$. Soit B une partie finie de $\mathscr{E}$. On cherche μ qui prolonge λ et satisfait B. L'ensemble de formules B est fini, donc utilise un ensemble fini de variables, dont un sous-ensemble fini $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\} \subseteq \operatorname{dom}(\lambda)$. Il existe $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ dans $\mathscr{C}$ telle que $x_{i_1} \in \operatorname{dom} \varphi_1, \ldots, x_{i_n} \in \operatorname{dom} \varphi_n$. Comme $\mathscr{C}$ est une chaîne, donc soit $\varphi_0 = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \varphi_i$ et on a $\varphi_0 \in \mathscr{C}$. On a, de plus, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n} \in \operatorname{dom} \varphi_0$. Soit $\varphi_0 \in \mathscr{V}$ prolongeable en ψ_0 qui satisfait B. On définit :

$$\begin{aligned} \mu : \mathscr{P} &\longrightarrow \{0,1\} \\ x \in \operatorname{dom} \lambda &\longmapsto \lambda(x) \\ x \in \operatorname{var} B &\longmapsto \psi_0(x) \\ \text{sinon} &\longmapsto 0. \end{aligned}$$

On vérifie que la définition est cohérente sur l'intersection car λ et ψ_0 prolongent tous les deux φ_0 et donc $\lambda \in \mathscr{V}$ d'où $\mathscr{V}$ est inductif.

Soit γ un élément maximal de $\mathscr{V}$. Pour montrer le théorème, il suffit de montrer que $\operatorname{dom} \gamma = \mathscr{P}$. Si $\operatorname{dom} \gamma \neq \mathscr{P}$, soit $x \notin \operatorname{dom} \gamma$.

Montrons que γ n'est pas maximal en définissant $\gamma' \in \mathscr{V}$ qui vérifie $\gamma \prec \gamma'$. On prend $\operatorname{dom} \gamma' = \operatorname{dom} \gamma \cup \{x\}$.

- Si, pour toute partie finie B de $\mathscr{E}$, il existe une valuation δ qui prolonge γ et qui satisfait B telle que $\delta(x) = 0$, alors on pose $\gamma'(x) = 0$.
- Sinon, on pose $\gamma'(x) = 1$.

Montrons que $\gamma' \in \mathscr{V}$. Soit B un ensemble fini de formules de $\mathscr{E}$.

- Si $\gamma'(x) = 0$ alors il existe une valuation δ prolongeant γ et satisfaisant B telle que $\delta(x) = 0$, et donc δ prolonge γ'.
- Si $\gamma'(x) = 1$ alors il existe une partie finie B_0 de $\mathscr{E}$ telle que toute valuation δ prolongeant γ et satisfaisant B_0 vérifie que $\delta(x) = 1$. On choisit une valuation qui prolonge γ et satisfait $B \cup B_0$; elle prolonge γ'.

On a donc une contradiction avec la maximalité de γ. On en conclut que $\operatorname{dom} \gamma = \mathscr{P}$, ce qui termine la preuve du théorème. $\square$