TD n° 1

I. Savoir lire la définition.

Ce sont des mesures de sécurité. Sinon :

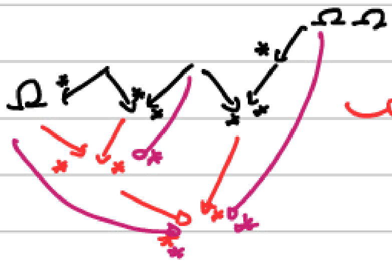
$$(\lambda y.\ x\ y)[z/y] \neq_\alpha \lambda y.\ x\ z \qquad \rightsquigarrow \Delta\ x \neq y$$
$$(\lambda y.\ x\ y)\ [y/x] \neq_\alpha \lambda y.\ y\ y \qquad \rightsquigarrow \Delta\ y \notin \mathcal{VL}(N).$$

II. Classes d'équivalence pour $=_\beta$.

Q2.1. $\Omega\,\Omega \to_\beta \Omega\,\Omega$ et $\Omega \to_\beta \Omega$.

Ainsi, si $\Omega\Omega =_\beta \Omega$ alors, par confluence, il existe M un λ-terme tel que

$$\Omega\Omega \to^*_\beta P \ {}^*_\beta\!\leftarrow \Omega$$



↪ on utilise plusieurs fois la confluence avec les termes intermédiaires

C'est absurde car on aurait $\Omega\Omega = P = \Omega$ ($\Omega\Omega \to^*_\beta P$ implique $P = \Omega\Omega$ car il n'y a que 1 redex).

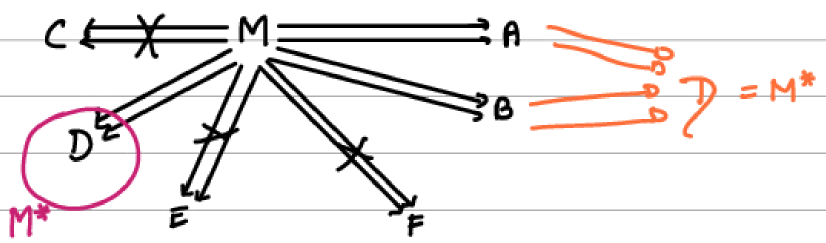
Q2.2. Soit N une forme normale avec $x \notin \mathcal{VL}(N)$

On pose :

$$M = (\lambda x.\ N)\ \Omega.$$

III Propriété du diamant pour les réductions parallèles

Q3.1.



Par induction (3 cas)

Q 3. 2. $x^* := x$

$(\lambda x.\, M)^* := \lambda x.(M^*)$

$(M\ N)^* := \begin{cases} P^*[N^*/x] & \text{si } M = \lambda x.\, P \\ M^*\ N^* & \text{sinon} \end{cases}$

Lemme : si $M \Rrightarrow N$ alors $N \Rrightarrow M^*$ (par induction sur M)

D'où

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow] & \\ A \arrow[dr, Rightarrow] & & B \arrow[dl, Rightarrow] \\ & M^* & \end{tikzcd}$$

On a donc la propriété du diamant pour $\Rrightarrow$ donc la confluence de $\to_\beta$.

IV Normalisation faible et forte en λ-calcul pur.

Q4. 1. Les propriétés (1), (2) et (3) restent vraies
La propriété (4) ne l'est pas :
on a
$$M := (\lambda x.\, x)\, M' \longrightarrow M'$$
mais
$$\underbrace{(y\ y)[M/y]}_{=\, M\ M} \not\longrightarrow \underbrace{(y\ y)[M'/y]}_{=\, M'\ M'}$$

Q4. 2. Par induction sur $M \to M'$ (4 cas) :

* Cas $(\lambda x.\, M)\, N \longrightarrow M[N/x]$. Supposons $x \in \mathcal{N}\ell(M)$ et $N \in \lambda I$. (*)
Par induction sur M, il y a 3 cas :
   - si $M = y$ alors
      - si $y \neq x$ alors $M[N/x] = M \in \lambda I$.
      - si $y = x$ alors $M[N/x] = N \in \lambda I$.
   - si $M = P\ Q$ alors par hypothèse d'induction
   on a : $P[N/x] \in \lambda I$ et $Q[N/x] \in \lambda I$
   d'où $(P\ Q)[N/x] \in \lambda I$. par (ii)
   - si $M = \lambda y.\, P$ avec $y \in \mathcal{N}\ell(P)$ alors $M[N/x] \in \lambda I$ car $P[N/x] \in \lambda I$.

* Cas $M N \to M' N$ avec $M \to M'$. Par hypothèse d'induction $M' \in \lambda I$.
avec $M \in \lambda I$, $N \in \lambda I$.
D'où $M' N \in \lambda I$ par (ii).

* Cas $M N \to M N'$ avec $N \to N'$. Par hypothèse d'induction $N' \in \lambda I$.
avec $M \in \lambda I$, $N \in \lambda I$.
D'où $M N' \in \lambda I$ par (ii).

* Cas $\lambda x. M \to \lambda x. M'$ avec $M \to M'$ et $M \in \lambda I$, $(\lambda x. M) \in \lambda I$, $M' \in \lambda I$ par hyp. d'ind°
Et, $vl(M') = vl(M)$ (preuve par induction)
d'où $(\lambda x. M') \in \lambda I$ car $x \in vl(M')$.

Q4.3. Supposons avoir une divergence issue de $(\lambda x. M) N$.

On a trois cas :

- soit $N \uparrow$ donc $N_i \to N_{i+1}$ avec $N_0 = N$ d'où $M[N_i/x] \to^* M[N_{i+1}/x]$ avec au moins un pas car $x \in vl(M_i)$ et donc $M[N/x] \uparrow$
- soit $M \uparrow$ donc $M_i \to M_{i+1}$ avec $M_0 = M$ d'où $M_i[N/x] \to M_{i+1}[N/x]$ et donc $M[N/x] \uparrow$
- soit $M[N/x] \uparrow$

Dans tous les cas, $M[N/x] \uparrow$

Q4.4. Non : $(\lambda x. y)\, \Omega \uparrow$ mais $y[\Omega/x] = y \cancel{\uparrow}$

car $\in \lambda I$ à toute étape

Q4.5. Mon instinct me dit non, mais vu qu'on ne peut pas faire "disparaître" une divergence, j'ai envie de dire oui.

Si on a une divergence, alors on ne peut pas l'éviter. Inversement, si on n'a pas de divergence, on ne peut pas aller dans une divergence.

En gros : tous les calculs dans λI sont utiles.

V Des λ-termes qui calculent : couples et prédécesseurs

Q5.1. On définit $succ := \lambda u. \lambda f. \lambda x. f(u f x)$.

$$succ\ \underline{n} = (\lambda u f x. f(u f x))(\lambda f x. f^n x) \to_\beta \lambda f x. f((\lambda f x. f^n x) f x)$$
$$\to_\beta \lambda f x. f((\lambda x. f^n x)\, x)$$
$$\to_\beta \lambda f x. f(f^n x) = \lambda f x. f^{n+1} x = \underline{n+1}.$$

D'où $succ\ \underline{n} \to^* \underline{n+1}$

Q5.2. On pose $\mathrm{fst} := \lambda c.\, c\,\mathbf{T}$ et $\mathrm{snd} := \lambda c.\, c\,\mathbf{F}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{fst}\ (M,N) &= (\lambda c. c\, (\lambda x y. x))\, (\lambda f. (f M) N)\\ &\to_\beta (\lambda f. (f M) N)\, (\lambda x y. x)\\ &\to_\beta ((\lambda x y. x) M) N\\ &\to_\beta (\lambda y. M) N\\ &\to_\beta M\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{snd}\ (M,N) &= (\lambda c. c\, (\lambda x y. y))\, (\lambda f. (f M) N)\\ &\to_\beta (\lambda f. (f M) N)\, (\lambda x y. y)\\ &\to_\beta ((\lambda x y. y) M) N\\ &\to_\beta (\lambda y. y) N\\ &\to_\beta N\end{aligned}$$

Q5.3. On pose : $\mathrm{Next} := \lambda c.\, (\mathrm{succ}\,(\mathrm{fst}\ c),\ \mathrm{fst}\ c)$

$$\begin{aligned}\mathrm{Next}\ (\underline{n}, \underline{k}) &\to_\beta (\mathrm{succ}\ (\mathrm{fst}\ (\underline{n}, \underline{k})),\ \mathrm{fst}\ (\underline{n}, \underline{k})) && \text{par Q5.2}\\ &\to_\beta^* (\mathrm{succ}\ \underline{n},\ \mathrm{fst}\ (\underline{n}, \underline{k})) && \text{par Q5.1}\\ &\to_\beta^* (\underline{n+1},\ \mathrm{fst}\ (\underline{n}, \underline{k})) && \text{par Q5.2}\\ &\to_\beta^* (\underline{n+1},\ \underline{n})\end{aligned}$$

Q5.4 On pose $\mathrm{pred} := \lambda n.\, \mathrm{snd}\ (n\ \mathrm{Next}\ (\underline{0}, \underline{0}))$.

VI Des λ-termes qui bouclent

Q6.1.
$$\begin{aligned}Y\ M &\to_\beta (\lambda x.\, M (x\, x))\, (\lambda x.\, M (x\, x))\\ &\to_\beta M ((\lambda x.\, M (x\, x))\, (\lambda x.\, M (x\, x)))\\ &\leftarrow_\beta M\ (Y\ M)\end{aligned}$$

D'où $M (Y M) =_\beta Y M$.

Q6.2. On pose :

$F := \lambda f.\, \lambda n.$ if zero?(n) then $\underline{1}$
else mult n $(f\ (\mathrm{pred}\ n))$

puis

$\mathrm{fact} := Y F$.

Q6.3. On pose $\gamma := \lambda f.\, f (f\, x)$ puis $\Gamma := \lambda x.\, \gamma\, \gamma$.

On a : degré de foisonnement :

$\Gamma = \lambda x.\, \gamma \gamma$ $\quad 2$

$\to_\beta \lambda x.\, \gamma(\gamma x)$ $\quad 3$

$\to_\beta \lambda x.\, \gamma(x(x\ x))$ $\quad 4$

$\to_\beta \lambda x.\, (x(x\ x))((x(x\ x))\ x)$ $\quad 7$

Q6.4. Dans l'exemple, on fait des β-réductions dans une abstraction. En faible, on ne peut pas faire ça.

TD n° 2

I. Typer des λ-termes

1.1. Une question de cours du 6 mars 2024.

Q1.1. $\underbrace{(\lambda f.\, f(f\, z))}_{}^{(X \to X) \to (X \to X)}\ \underbrace{(\lambda x.\, \lambda y.\, x\ y)}_{}^{(A \to B) \to (A \to B)}$ où $X = A \to B$ de taille 12

$\to_\beta (\lambda x. \lambda y.\, x\ y)((\lambda x. \lambda y.\, x\ y)\ z)$ de taille 13

1.2. Entiers de Church

Q1.2. $\text{succ} := \lambda n.\, \lambda f x.\, f(n\, f\, x)$

$\text{add} := \lambda n.\, \lambda m.\, \lambda f x.\, n\, f\, (m\, f\, x)$

$\text{mult} := \lambda n.\, \lambda m.\, \lambda f.\, n\, (m\, f)$

Q1.3. $\vdash \text{succ} : \text{nat} \to \text{nat}$

$\quad \hookrightarrow n : \text{nat},\ f : X \to X,\ x : X \vdash f\,(n\, f\, x) : X$

$\quad \hookrightarrow$ " $\vdash n\, f\, x : X$

$\vdash \text{add} : \text{nat} \to \text{nat} \to \text{nat}$

$\quad \hookrightarrow n : \text{nat},\ m : \text{nat},\ f : X \to X,\ x : X \vdash n\, f\,(m\, f\, x) : X$

$\quad \hookrightarrow$ " $\vdash m\, f\, x : X$

$\vdash \text{mult} : \text{nat} \to \text{nat} \to \text{nat}$

$\quad \hookrightarrow n : \text{nat},\ m : \text{nat},\ f : X \to X \vdash n\,(m\, f) : X \to X$

$\quad \hookrightarrow$ " $\vdash m\, f : X \to X$

II. Types somme

Q2.1. Termes : $M, N ::= \dots \mid g\, M \mid d\, N \mid$ "match M with $g\, x \to N \mid d\, y \to N'$"

Réductions :

$$\frac{M \to_\beta M'}{g\, M \to_\beta g\, M'} \qquad \frac{M \to_\beta M'}{d\, M \to_\beta d\, M'}$$

$$\frac{}{(\text{match } g\, M \text{ with } g\, x \to N \mid d\, y \to N') \to_\beta N[M/x]}$$

$$\dfrac{}{(\text{match } d\,M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N') \to_\beta N'[M/y]}$$

$$\dfrac{M \to_\beta M'}{\text{match } M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N' \to_\beta \text{match } M' \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N'}$$

$$\dfrac{N \to_\beta N''}{\text{match } M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N' \to_\beta \text{match } M \text{ with } g\,x \to N'' \mid d\,y \to N'}$$

$$\dfrac{N' \to N'''}{\text{match } M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N' \to_\beta \text{match } M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N'''}$$

Types : $A, B ::= \dots \mid A+B$

Typage : $\dfrac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash g\,M : A+B}$ $\qquad \dfrac{\Gamma \vdash M : B}{\Gamma \vdash d\,M : A+B}$

$$\dfrac{\Gamma \vdash M : B+C \qquad \Gamma, x : B \vdash N : A \qquad \Gamma, y : C \vdash N' : A}{\Gamma \vdash \text{match } M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N' : A}$$

III Normalisation faible

Q3.1. On a : M fortement normalisant $\Rightarrow$ M' fortement normalisant.
Réciproquement, supposons M' fortement normalisant.
Si M admet une divergence pour $\mapsto$ alors par déterminisme la divergence passe par M' et donc on a une divergence pour M'.
Absurde.

Q3.2 Non ! $M = \mathbf{F}\,\Omega \to_\beta \mathbf{F}\,\Omega$ avec $\Omega \to_\beta \Omega$

$\downarrow_\beta$

M' $\lambda y.y$ $\qquad$ M a une divergence alors que M' non.

Q3.3. Pour tout type A,
(CR1') si $M \in \mathcal{R}_A$ alors M termine pour $\mapsto$
(CR2') si $M \in \mathcal{R}_A$ et $M \mapsto M'$ alors $M' \in \mathcal{R}_A$.
(CR3') si $M \mapsto M' \Rightarrow M' \in \mathcal{R}_A$ alors $M \in \mathcal{R}_A$

Par induction sur A (2 cas) :

- si on a un type de base X
  - (CR1') par définition
  - (CR2') par définition & préservation du typage
  - (CR3') par induction bien fondée sur $\mapsto$ car $\mapsto$ termine.
- si on a un type $A \to B$
  - (CR1') On a $x \in \mathcal{R}_A$ pour x arbitraire.
    Or, $M\,x \in \mathcal{R}_B$ d'où $M\,x$ fortement normalisant.
    Si M diverge en $M = M_1 \mapsto M_2 \mapsto M_3 \dots$
    alors $M x \mapsto M_2 x \dots$ absurde !

  - (CR2') Soit $M \in \mathcal{R}_{A \to B}$ et $M \mapsto M'$. Montrons que $M' \in \mathcal{R}_{A \to B}$.
    Soit $N \in \mathcal{R}_A$. Montrons que $M'N \in \mathcal{R}_B$.
    Or, $M N \mapsto M' N$ d'où, par (CR2') pour B, $M'N \in \mathcal{R}_B$.
    On conclut $M' \in \mathcal{R}_{A \to B}$.

  - (CR3') Supposons $M \mapsto M' \Rightarrow M' \in \mathcal{R}_{A \to B}$.
    Montrons $M \in \mathcal{R}_{A \to B}$.
    Par hyp d'induction bien fondée,
    si $N \mapsto N'$ alors $M N' \in \mathcal{R}_B$.
    Montrons $M N \in \mathcal{R}_B$.
    Par (CR3') pour B, alors montrons que
    $M N \mapsto P$ et $P \in \mathcal{R}_B$.
    On a 2 cas :
    - Soit $M = \lambda x. M_0$ et $P = M_0[N/x]$ donc ok
    - Soit $P = M'N$ alors par hyp $M' \in \mathcal{R}_{A \to B}$
      et donc $M'N \in \mathcal{R}_B$.

Q3.4.
$$\frac{}{(\lambda x. M)\, v \hookrightarrow M[v/x]} \qquad \frac{M \hookrightarrow M'}{M N \hookrightarrow M' N} \qquad \frac{N \hookrightarrow N'}{v\, N \hookrightarrow v\, N'}$$

Q3.5.
- On a bien $\hookrightarrow \subseteq \to_\beta$.
- On a bien que $\hookrightarrow$ est déterministe.
- Si $M \hookrightarrow M'$ alors $M N \hookrightarrow M' N$ pour tout N.

On peut donc appliquer le théorème.

Q 3.6. On ne peut pas utiliser le théorème ci-avant car les formes normales pour $\hookrightarrow$ ne sont pas nécessairement des formes normales pour $\to_\beta$. Exemple : $(\lambda x.\, x)\,(y\; z) \not\hookrightarrow$

Q 3.7. Notre relation $\hookrightarrow$ n'est pas complète. Il faut ajouter d'autres règles pour qu'elle le devienne (et qu'elle reste déterministe).

On peut, par exemple, définir $\hookrightarrow$ par induction avec :

$$\frac{M \hookrightarrow M'}{M\,N \hookrightarrow M'\,N} \qquad \frac{M \not\to_\beta \quad N \hookrightarrow N'}{M\,N \hookrightarrow M\,N'}$$

$$\frac{M \hookrightarrow M'}{\lambda x.\, M \hookrightarrow \lambda x.\, M'} \qquad \frac{M \not\to_\beta \quad N \not\to_\beta}{(\lambda x.\; M)\; N \hookrightarrow M[N/x]}$$

où l'on définit $\not\to_\beta$ par induction :

$$\frac{}{x \not\to_\beta} \qquad \frac{M \not\to_\beta}{\lambda x.\, M \not\to_\beta} \qquad \frac{P \not\to_\beta}{x\;\, P \not\to_\beta}$$

$$\frac{(M\;N) \not\to_\beta \qquad P \not\to_\beta}{(M\,N)\; P \not\to_\beta}$$

La relation $\hookrightarrow$ ainsi définie vérifie

(1) $\hookrightarrow \;\subseteq\; \to_\beta$;
(2) $\hookrightarrow$ est déterministe ;
(3) si $M \hookrightarrow M'$ alors pour tout N, $M\;N \hookrightarrow M'\,N$;
(4) $NF(\hookrightarrow) = NF(\to_\beta)$.

D'où la normalisation faible du λ-calcul.