Logique — TD n° 5 — Hugo SALOU

Exercice 1. Théorie des graphes.

Q1. pas de boucles : $\forall x \quad \neg R(x,x)$

non-orienté : $\forall x \, \forall y \quad R(x,y) \longleftrightarrow R(y,x)$.

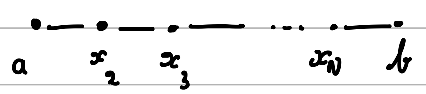
(l'implication simple suffit).

D'où $\mathrm{Th}(\text{Graphes non-orientés simples}) = \{ \forall x \quad \neg R(x,x),$
$\forall x \forall y \quad R(x,y) \longleftrightarrow R(y,x) \}$.

Q2. On pose $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$ qui est une théorie sur $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$.

Q3. $\varphi_n = \underbrace{\forall x_1 \cdots \forall x_{n-1}}_{\text{pour } n \text{ fixé}} \neg (R(a, x_1) \wedge R(x_1, x_2) \wedge \cdots \wedge R(x_{n-1}, b))$

Q4. Oui. On considère $G = (V, E)$ décrit ci-dessous.
Soit $N = \max \{ n_1, \ldots, n_k \} + 1$.



Il est connexe, simple, non-orienté et non-vide.

Et, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, il n'y a pas de chemins de long$^{\circ}$ n_k entre a et b dans G.

Q5. Soit $\mathcal{T} \supseteq A$ une théorie des graphes connexes.

On pose $\mathcal{T}' := \mathcal{T} \cup \{ \varphi_n \mid n \in \mathbb{N}^* \}$.

Toute partie finie de $\mathcal{T}'$ est satisfiable.
Par compacité, on a que $\mathcal{T}$ est satisfiable. Absurde car seul un graphe vide satisfait $\mathcal{T}'$.

Exercice 2. Langage sans fonction.

Q1. Par récurrence sur n, montrons que :

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y_1 \cdots \exists y_k \; A[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k]$$

est un théorème ssi elle est satisfaite dans toute interprétation de card° au plus $n+m$.

- Pour $n=0$, $\overbrace{\exists y_1 \cdots \exists y_k \; A[y_1, \dots, y_k]}^{\varphi}$ est un théorème ssi

$$\forall \mathcal{M} \text{ modèle}, \forall e, \quad \mathcal{M}, e \models \varphi$$

Si on a un modèle de card $> m$, on peut le décomposer en modèles de card $\leq k$ par dénombrement.
D'où l'équivalence.

-

Q2. Dans $\mathcal{L} = \{c_1, \dots, c_m, f, =\}$,

on considère $A =$ " $f(y_1, y_2) = f(y_2, y_1) \wedge \neg(y_1 = y_2) \wedge \bigwedge_{i=3}^{k-1} (y_i = y_{i+1})$ ".

Dans le modèle

$$\mathcal{M} : \{0,1\}, \quad f_{\mathcal{M}} = \text{xor}, \quad c_i = 0$$

la formule A est fausse.

Exercice 3. Densité.

Q1. On a $(\mathbb{Q}, <)$ et $(\mathbb{R}, <)$ qui sont non-isomorphes.

Q2.

Soit $\varphi := \forall x, \exists y \quad r(x,y)$.

Dans $(\mathbb{R}, <)$, la formule φ est vérifiée
Dans $([0,1], <)$ la formule φ ne l'est pas.

D'où T n'est pas complète.

Q3. Soit un modèle $\mathcal{M}$.

Soient $x, y \in |\mathcal{M}|$ tels que $x < y$ (par A_1).

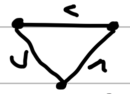
Construisons par récurrence des éléments de $\mathcal{M}$.

- on commence avec x, y
- par A_4, et comme $x < y$, il existe z tq $x < z < y$
- par A_4, ... $x < z$ .... w ..... $x < w < z$

Si $w \in \{x, y, z\}$, alors par A_2 et A_3 on a une absurdité.

D'où T n'admet pas de modèle fini.

Q4. $T_1 : (\{1\}, <)$
$T_2 : (\{1\}, \leq)$
$T_3 :$



$T_4 \ (\{0, 1\}, <)$

Exercice 4. Modèle infini.

On pose $\varphi_k = \exists x_1 \dots \exists x_k \neg(x_1 = x_2) \wedge \dots \wedge \neg(x_{k-1} = x_k)$.

Toute sous-théorie finie A de $T' := T \cup \{\varphi_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ a un modèle (de card $>$ $\max\{k \in \mathbb{N} \mid \varphi_k \in A\} \in \mathbb{N}$ avec $\max \varnothing = 0$).

Par compacité, T' admet un modèle. S'il est fini de cardinal k, absurde car $\varphi_k \in T'$. Il admet donc un modèle infini $\mathcal{M}_\infty$.

La théorie T admet donc un modèle infini $\mathcal{M}_\infty$.

TD n° 6

Exercice 1. Contortionnisme.

Q1.

$$\mathrm{Th}(\text{Groupes abéliens sans torsion}) := \{$$
$$\forall x\ \exists y\quad x+y = y+x = 0,$$
$$\forall x\ \forall y\ \forall z\quad (x+y)+z = x+(y+z),$$
$$\forall x\quad x+0 = 0+x = x,$$
$$\forall x\ \forall y\quad x+y = y+x$$
$$\} \cup \{\forall x\ \neg(x=0) \to \neg(\underbrace{x+x+\dots+x}_{n}=0) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

(où $(a=b=c) := a=b \wedge b=c$)

Q2. Supposons qu'il existe une théorie $\mathcal{T}$ des groupes abéliens avec torsion.

On considère :

$$\mathcal{T}' := \mathcal{T} \cup \{\underbrace{\forall x\ \ x\neq 0 \to n\cdot x \neq 0}_{\varphi_n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

Toute partie finie $T \subseteq \mathcal{T}'$ est satisfiable.
En effet, soit $n = \max\{n\in\mathbb{N}^* \mid \varphi_n \in T\} < +\infty$,
puis $G := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p > n$ et p premier.

Par compacité, $\mathcal{T}'$ est satisfiable.
Absurde car il existe $x\in G$ et $n\in\mathbb{N}^*$, $n\cdot x \neq 0$ et $x \neq 0$.

Q3. avec torsion $\neq$ sans torsion

Exercice 2. Formules closes.

On a : $\mathcal{T}_{\mathcal{M}} = \{F \in \mathcal{F} \mid \mathcal{M} \models F\}$

Soit $F \in \mathcal{F}$.

Si $\mathcal{A} \models F$ alors $\dfrac{}{T_{\mathcal{A}} \vdash F}\,ax$ car $F \in T_{\mathcal{A}}$.

Si $\mathcal{A} \not\models F$ alors $\mathcal{A} \models \neg F$ et $\dfrac{}{T_{\mathcal{A}} \vdash \neg F}\,ax$ car $\neg F \in T_{\mathcal{A}}$.

De plus, si $T_{\mathcal{A}} \vdash \bot$ alors, par correction, $\mathcal{A} \models \bot$ absurde.
car $\mathcal{A}$ modèle de $T_{\mathcal{A}}$.

Exercice 3.

Q1 Pour $n=0$, on a : $P_0 \vdash S0 \neq 0$ par A_1.

Pour $n>0$, on a :

par hyp de récurrence

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{\Gamma \vdash A_3}\,ax
}{\Gamma \vdash \forall y\ S^{n+1}0 = Sy \to S^n 0 = y}\,\forall e
}{\Gamma \vdash S^{n+1}0 = S S^{n-1} 0 \to S^n 0 = S^{n-1}0}\,\forall e
\qquad
\dfrac{}{\Gamma \vdash S^{n+1}0 = S^n 0}\,ax
}{\Gamma := P_0, S^{n+1}0 = S^n 0 \vdash S^n 0 = S^{n-1}0}\,\to e
\qquad
\dfrac{P_0 \vdash S^n 0 \neq S^{n-1}0}{P_0, S^{n+1}0 = S^n 0 \vdash S^n 0 \neq S^{n-1}0}\,aff
}{
\dfrac{P_0, S^{n+1}0 = S^n 0 \vdash \bot}{P_0 \vdash S^{n+1}0 \neq S^n 0}
}\,\neg e
$$

$(*)$

Q2. $PA \vdash \forall x\ Sx \neq 0$.

On a :

- $P_0 \vdash S0 \neq 0$
- et :

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{\Gamma \vdash A_4}\,ax
}{\Gamma \vdash S^2x = Sx \to Sx = x}\,\forall e \times 2
\qquad
\dfrac{}{\Gamma \vdash S^2 x = Sx}\,ax
}{\Gamma \vdash Sx = x}\,\to e
\qquad
\dfrac{}{\Gamma \vdash Sx \neq x}\,ax
}{\Gamma := PA, Sx \neq x, S^2x = Sx \vdash \bot}\,\neg e
}{PA, Sx \neq x \vdash S^2 x \neq Sx}\,\neg i
}{PA \vdash Sx \neq x \to S^2x \neq Sx}\,\to i
$$

D'où, par schéma inductif, on a $\forall x,\ Sx \neq x$.

Q3. On pose $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ où $S\omega := \omega$ avec $\omega \times 0 := 0$.

$\omega \times x := \omega$

$\omega + x := \omega$

(& commutativité)

$(A_1) - (A_5)$ pas de pb avec ω

(A_6) ok par déf.

(A_7) $0 \times \underbrace{S\omega}_{\omega} = (0 \times \omega) + 0 = 0$

$\omega \times (Sy) = \underbrace{(\omega \times y)}_{= 0 \text{ ou } \omega} + \omega = \omega$

D'où $\overline{\mathbb{N}} \models P_0$ et $\overline{\mathbb{N}} \not\models \forall x\ Sx \neq x$ car $S\omega = \omega$.

Exercice 4.

Q1. On applique le théorème de Löwenheim-Skolem pour obtenir un modèle de card $> \aleph_0$.

Q 2. Soit, par l'absurde, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{M}$ un $\mathcal{L}$-isomorphisme.

$\varphi(0) = (0,0)$

$\varphi(1) = \varphi(S_{\mathbb{N}} 0) = S_{\mathcal{M}} \varphi(0) = S_{\mathcal{M}}(0,0) = (0,1)$

$\varphi(2) = \varphi(S_{\mathbb{N}} 1) = S_{\mathcal{M}} \varphi(1) = S_{\mathcal{M}}(0,1) = (0,2)$

$\varphi(3) = \varphi(S_{\mathbb{N}} 2) = S_{\mathcal{M}} \varphi(2) = S_{\mathcal{M}}(0,2) = (0,3)$

Ainsi, $\operatorname{im} \varphi = \{0\} \times \mathbb{N} \neq |\mathcal{M}|$. Absurde.

On vérifie que $\mathcal{M}$ vérifie $(A_1) - (A_7)$.

Q 3. Soit $F := \forall x\ \forall y\ \ x+y = y+x$.

On a $\mathbb{N} \models F$ mais $\mathcal{M} \not\models F$ car $(1,1) + (2,1) = (1,2)$

et $(2,1) + (1,1) = (2,2)$. $(1,2) \neq (2,2)$

D'où P_0 n'est pas complète.

Exercice 5. Ensembles définissables.

Q1. $F_{2\mathbb{N}}(x) := \exists y \quad x = y + y.$

Q2. $F_{\mathbb{P}}(x) := \forall y \ (\exists z \quad x = y \times z) \rightarrow (y = x \ \vee \ y = (S0))$

Q3. (a) $\forall x \quad F_E(x) \rightarrow F_{E'}(x)$

(b) $F_E(x) \wedge \forall y < x \ \neg F_E(y) \qquad)) \ G(x)$

(c) $(\exists x \quad F_E\, x) \wedge (\forall x \quad F_E(x) \rightarrow \exists y > x \quad F_E(y))$

Q4. $P_E(y) := (\exists x \leq y \quad F_E(x)) \rightarrow \exists x \quad G(x) \wedge x \leq y$

Q5.

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P_0 \quad \vdash A_4}\,ax}{P_0 \vdash \quad 0+0=0}}{P_0 \vdash \exists z \ 0 + z = 0}$$

(b) Long et se fait par induction sur y. (fait en cours)

(c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x+y=0}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash S(z+y) \neq 0}\,A_1}{\Gamma \vdash Sz + y \neq 0}\,A_5}{\Gamma \vdash x+y \neq 0}}{\Gamma := P_0, \dots, x+y=0, \ x = Sz \quad \vdash \bot}\,\exists e}{P_0, \exists y \ x+y=0, x\neq 0, x = Sz \quad \vdash \bot}\,A_2}{\dfrac{P_0, \exists y \ x+y=0, \ x \neq 0 \quad \vdash \quad \bot}{P_0, \exists y \quad x+y = 0 \vdash x = 0}\,\bot_c}$$

(d) On utilise le schéma inductif:

- $P_E(0)$: $F_E(0) \rightarrow \underbrace{F_E(0)}_{\text{hyp}} \wedge \underbrace{0 \leq 0}_{(a)} \wedge \underbrace{\forall y < 0 \ \neg F_E(0)}_{\neg(\underbrace{y + Sz}_{S(y+z) \text{ par } A_5} = 0) \rightarrow A_1}$

- $P_E(n) \rightarrow P_E(n+1)$

$\exists y \leq n+1 \quad F_E(y)$ → si $y \leq n \rightarrow P_E(n)$ et $n \leq n+1$
→ sinon $y = n+1 \rightarrow G(n+1) \wedge n+1 \leq n+1.$

Co car sinon, on était dans l'autre cas.

Q6. $(\exists x \ F_E(x)) \to \exists y \ G(y)$

Soit $x \in E$. Par Q5, $\exists z,\ G(z) \wedge z \leq x$.
D'où $G(y)$.

Q7.

1D 7

Exercice 1. Modèles sans schéma d'induction

Q1. A_1 okay A_2 okay A_3 okay A_4 $f(x,*)=x$
A_5 okay A_6 $g(x,*)=*$ A_7 $f(g(x,y),x)=g(x,y)$

En effet :

$$\begin{aligned}(x,n)+_{\mathcal{O}} S_{\mathcal{O}}(y,m) &= (x,n)+_{\mathcal{O}}(y,m+1)\\ &= (f(x,y),\ n+m+1)\\ &= S_{\mathcal{O}}(f(x,y),\ n+m)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x,n)\times_{\mathcal{O}} S_{\mathcal{O}}(y,m) &= (x,n)\times_{\mathcal{O}}(y,m+1)\\ &= (g(x,y),\ nm+n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&((x,n)\times_{\mathcal{O}}(y,m))+_{\mathcal{O}}(x,n)\\ &\quad= (g(x,y),\ nm)+_{\mathcal{O}}(x,n)\\ &\quad= (f(g(x,y),x),\ nm+n)\end{aligned}$$

Q2. Commutativité : $f(x,y)=f(y,x)$ et $g(x,y)=g(y,x)$
Associativité : $f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z))$
$g(g(x,y),z)=g(x,g(y,z))$

Q3. c.f. 1D6 exercice 4

Q4. $x\leq y :: \exists z,\ x+z=y$

$$\begin{aligned}(x,n)\leq_{\mathcal{O}}(y,m) &\Leftrightarrow \exists (z,p),\quad (x,n)+_{\mathcal{O}}(z,p)=(y,m)\\ &\Leftrightarrow \exists (z,p),\ (f(x,z),\ n+p)=(y,m)\\ &\Leftrightarrow \exists z,\ f(x,z)=y\end{aligned}$$

Q5. $f(x, y) = x \qquad g(x,y) = y$

$$(*, 0) + (x,n) = (f(*,x), n) = (*, n) \neq (x,n)$$

$$(*, 0) \times (x, n) = (g(*, x), 0) = (x, 0) \neq (*, 0).$$

Exercice 2. Equivalences.

Q1. Supposons avoir T une théorie des relations d'équivalences ayant un nombre fini de classes.

$$\text{Soit } \varphi_n := \exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=i+1}^{n} \neg R(x_i, x_j).$$

Puis, $T' := T \cup \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Toute partie $A \subseteq_{finie} T'$ est satisfiable, par exemple $([\![1, n]\!], =)$, où $n = \max \{n' \in \mathbb{N} \mid \varphi_{n'} \in A\}$ fini.

D'où T' satisfiable absurde.

Q2. Par l'absurde, soit T une théorie des relations d'équivalences n'ayant que des classes finies.

$$\text{Soit } \psi_n := \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i=1}^{n-1} R(x_i, x_{i+1}) \wedge \bigwedge_{i \neq j} \neg(x_i = x_j).$$

Soit $T' := T \cup \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Toute partie finie $A \subseteq_{finie} T'$ est satisfiable, par exemple $([\![1, n]\!], \sim)$, où $n := \max \{n \mid \psi_n \in A\}$ fini et $x \sim y \ \forall x, \forall y$.

D'où T' satisfiable. Absurde.

Q3. On pose $T_{=} := \{\forall x \ R(x,x),\ \forall x \forall y \ R(x,y) \to R(y,x)$
$\forall x \forall y \forall z \ R(x,y) \to R(y,z) \to R(x,z)\}$
$\cup \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Q4. (a) Soit T_1 tel que $T \vdash T_1$ et $T_1 \vdash T$. Il existe donc $T' \subseteq T$ telle que l'on ait $T' \vdash T_1$ (car preuve de $T \vdash T_1$ finie).

On a : $T' \vdash T_1$ et $T_1 \vdash T$ d'où $T' \vdash T$.

(b) Non : sinon $T' \subseteq_{\text{finie}} T_{\equiv}$ donc $n := \min\limits_{\varphi_n \in T'} n$

et $m := \min\limits_{\psi_m \in T'} m$

On considère un ens ayant $< n$ classes toutes de cardinal $< m$. $\leadsto$ modèle $\mathcal{M}$.
D'où T' admet $\mathcal{M}$ pour modèle. Absurde.

(c) oui en théorie, mais non, cela ne dépend pas.

Q5. Soient $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{N}, =, \text{divisibilité})$,
$\mathcal{M}_2 = (\mathbb{N}, =, n \sim m \Leftrightarrow \varphi(n) \approx \varphi(m))$

$\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{bij.}} \mathbb{N}^2$ où $(p,q) \approx (p',q') \Leftrightarrow p+q' = p'+q$.

Soit $\psi : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ un $\mathcal{L}$-morphisme.

$n \mid m \Leftrightarrow \psi(n) \approx \psi(m)$ Absurde.

TD n° 8

Exercice 1. Des entiers pas commes les autres

La théorie PA des entiers de Peano vérifie :

- $\operatorname{card} \mathbb{R} \geqslant \operatorname{card} \mathcal{L}$;
- $\operatorname{card} \mathbb{R} \geqslant \aleph_0$;
- PA a un modèle infini $\mathbb{N}$.

D'où par Löwenheim-Skolem, PA a un modèle de $\operatorname{card} = \operatorname{card} \mathbb{R}$, non isomorphe à $\mathbb{N}$.

Exercice 2. De nouveaux axiomes

r est une rel° d'ordre (reflexivité par (iv), symmétrie par (v), transitivité par (vi))
qui admet un minimum (i)

s est une fonction injective sans points fixes qui vérifie

$$y \leq_r x \text{ et } y \leq_r s(x) \Longleftrightarrow y = x \text{ ou } y = s(x)$$

Q1. La structure $(\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}}, succ)$ est un modèle de $\mathbb{N}$.

On pose $(\{0,1\} \times \mathbb{N}, \leq, s)$ où $\leq$ est l'ordre lexicographique sur $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ et

$$s : \{0,1\} \times \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\} \times \mathbb{N}$$
$$(x,y) \longmapsto (x, y+1)$$

Q2. La théorie T n'est pas complète : la formule

$$\exists x \; \exists y \quad x \neq y \; \wedge \; \forall u \; (x \neq S u) \wedge (y \neq S u)$$

est vraie dans $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ mais pas dans $\mathbb{N}$.

Exercice 3. Arithmétique non standard.

Q1. Reflexivité : $\mathcal{N} \models a + \underline{0} = a + \underline{0}$ d'où $a \sim a$ $\forall a$

Symmétric : si $\mathcal{N} \models a + \underline{n} = b + \underline{m}$ $(a \sim b)$

alors $\mathcal{N} \models b + \underline{m} = a + \underline{n}$ d'où $b \sim a$.

Transitivité : si $\mathcal{N} \models a + \underline{n} = b + \underline{m}$ $(a \sim b)$

et $\mathcal{N} \models b + \underline{p} = c + \underline{q}$ $(b \sim c)$

alors

si $m \geq p$ alors

$$\mathcal{N} \models a + \underline{n} = c + \underline{(q + m - p)}$$

sinon

$$\mathcal{N} \models a + \underline{(n + p - m)} = c + \underline{q}$$

Q2. Soient n, m, p, q tels que

$\mathcal{N} \models a + \underline{n} = a' + \underline{m}$ et $\mathcal{N} \models b + \underline{p} = b' + \underline{q}$.

D'où, $\mathcal{N} \models a + b + \underline{n} + \underline{p} = a' + b' + \underline{m} + \underline{q}$

(par commutativité de $+_{\mathcal{N}}$ car $\mathcal{N}$ modèle de PA)

et donc $\mathcal{N} \models (a+b) + \underline{n+p} = (a'+b') + \underline{m+q}$.

Q3. Réflexivité: $A \lesssim A$ car $A \neq \emptyset$ d'où $A \ni a$ vérifie $\mathcal{N} \models a \leq a$.

Transitivité:

si $A \lesssim B$ et $B \lesssim C$ il existe a, b, b', c tels que

$\mathcal{N} \models a \leq b$ et $\mathcal{N} \models b' \leq c$

alors $b \sim b'$ d'où $b + \underline{n} = b' + \underline{m}$

Si $n \leq m$ alors on pose $b^* = b + \underline{(m-n)} \sim b$

et $\mathcal{N} \models a \leq b^*$ et $\mathcal{N} \models b^* \leq c$

Sinon $b^* = b + \underline{(n+m)} \sim b$

et $\mathcal{N} \models a \leq b^*$ et $\mathcal{N} \models b^* \leq c$

On en conclut $\mathcal{N} \models a \leq c$.

Antisymmétrie :

si $A \precsim B$ et $B \precsim A$ alors
il existe a, a', b, b'
tels que
$$\mathcal{M} \models a \leq b \quad \text{et} \quad \mathcal{M} \models b' \leq a'$$

Comme $b \sim b'$ et $a \sim a'$, on a : $\begin{cases} b + \underline{n} = b' + \underline{m} \\ a + \underline{p} = a' + \underline{q} \end{cases}$

D'où il existe u, v tels que
$$\mathcal{M} \models a + u = b \quad \text{et} \quad \mathcal{M} \models b' + v = a'$$

ainsi,

$$a + u + \underline{n} + v = b + \underline{n} + v = b' + \underline{m} + v = a' + \underline{m}$$

d'où $a + u + v \sim a'$ donc $u + v \sim 0$
donc u, v sont standards
d'où $a + u = b \Rightarrow a \sim b$
d'où $A = B$.

Totalité : la relation $\leq_{\mathcal{M}}$ est totale :

Par schéma inductif, montrons pour tout x,

$$\forall y \quad x \leq y \vee y \leq x$$

- $0 \leq y$.
- Si $y \leq x$ alors $y + k = x$ et $y \leq Sx$

sinon, alors $y \geq x$ donc $y = k + x$
si $k = 0 \Rightarrow y \leq Sx$
si $k = Sl \Rightarrow y \geq Sx$

La totalité de $\precsim$ découle de celle de $\leq_{\mathcal{M}}$.

TD n° 9

Exercice 1. La marge est trop petite pour faire une blague.

Q1. $\varphi := \exists x \exists y \exists z \quad x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0 \wedge \exists t \quad t > 2 \wedge$
$\exists u \exists v \exists w \quad E(u, x, t) \wedge E(v, y, t) \wedge E(w, z, t)$
$\wedge \quad u + v = w$

Q2. $E(n, m, p) := \exists a \exists b \quad B(n, p, a, b) \wedge B(S0, 0, a, b)$
$\wedge \forall i \quad i < p \to \exists q \to B(q, i, a, b) \to B(q \times m, Si, a, b)$

Q3. C'est déjà fait

Q4. Si $P_0 \nvdash \varphi$ et si le théorème est faux dans $\mathbb{N}$ alors on aurait $\mathbb{N} \models \bot$ <u>absurde!</u>

Exercice 2. Ordres denses sans extrémités

Q1. $T := \{ \forall x \neg (x < x), \forall x \forall y \forall z \quad x < y \to y < z \to x < z,$
$\forall x \forall y \quad x = y \vee x < y \vee y < x, \forall x \forall y \quad x < y \to$
$\exists z \quad x < z \wedge z < y \wedge \forall x \exists y \exists z \quad y < x \wedge x < z \}$

Q2. Fait en partiel

Q3. Soit $f \in \mathcal{I}$ et soient $(a, b) \in M \times N$. On pose $A := \mathrm{Dom}(f)$ et $B := \mathrm{Image}(f)$.

On pose $a' := \min \{ m \in M \mid \forall x \in A \quad m \geq_M x \}$,
et $b' := \min \{ n \in N \mid \forall y \in B \quad n \geq_N y \}$.

(1) Si $a \in A$ alors c'est bon avec $g := f$.
Si $a \notin A$ alors

$$g : A \sqcup \{a\} \to B \sqcup \{b'\}$$
$$a \mapsto b'$$
$$A \ni x \mapsto f(x).$$

qui est bien croissante.

(2) Si $b \in B$ alors $h := f$.

Sinon, la fonction

$$h : A \sqcup \{a'\} \longrightarrow B \sqcup \{b\}$$
$$a' \longmapsto b$$
$$A \ni x \longmapsto f(x),$$

qui est bien croissante.

Q4. Comme M et N dénombrables, alors soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux énumérations de M et N respectivement.

Construisons par récurrence $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que f_n est un $\mathcal{L}$-isomorphisme et $\mathrm{Dom}(f_n) \supseteq \{a_1, \dots, a_n\}$ $\mathrm{Image}(f_n) \supseteq \{b_1, \dots, b_n\}$.

Pour $n=0$, on pose $f_0 : \emptyset \longrightarrow \emptyset$ un $\mathcal{L}$-isomorphisme.

Pour n, on pose g obtenu par ajout de a_n au domaine de f_n (Q3) et f_{n+1} par ajout de b_n à l'image de g (Q3).

Ceci reste bien un $\mathcal{L}$-isomorphisme par injectivité & égalité de cardinal.

On pose $f := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, c'est bien un $\mathcal{L}$-isomorphisme entre M et N.
D'où M et N isomorphes.

Q5. Non : $(\mathbb{R}, <)$ et $(\mathbb{Q}, <)$ sont des modèles de T non isomorphes.

Q6. Soit F close. Supposons $T \nvDash F$ et $T \nvDash \neg F$ donc $T \cup \{F\}$ et $T \cup \{\neg F\}$ ont des modèles.
Les deux théories ont chacun un modèle dénombrable M et N.
D'où M et N modèles de T dénombrables donc isomorphes par Q4.
D'où $M \models F$ ssi $N \models F$ absurde car $M \models F$ et $N \models \neg F$.
D'où F complète.

Exercice 3. Prédicats

Soit F close.

Q1. "$\Rightarrow$" vrai par correction.

"$\Leftarrow$" Supposons F vraie dans toute interprétation de card $\leq 2^n$.

On construit la relation d'équivalence $\sim$ sur les interprétations de $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{M} \sim \mathcal{N} \text{ ssi } \forall i \ \forall x \quad (\mathcal{M} \models P_i(x) \iff \mathcal{N} \models P_i(x))$$

Il y a au plus 2^n classes d'équivalences pour $\sim$ car 2 valeurs possibles pour chaque prédicat.

D'où si $\mathcal{M}$ est une $\mathcal{L}$-interprétation alors elle est équivalente à un modèle de card $\leq n$, nommé $\mathcal{N}$.

Et, par construction $\mathcal{M} \models F$ ssi $\mathcal{N} \models F$ et par hyp. $\mathcal{N} \models F$.

D'où $\mathcal{M} \models F$.

D'où F théorème.

Q2. On pose $F := \exists x_1 \ \exists x_2 \ \exists x_3 \ \forall y \quad x_1 = y \vee x_2 = y \vee x_3 = y$.

Vraie dans les $\mathcal{L}'$-interprétations de card 1 mais n'est pas un théorème (faux dans les $\mathcal{L}$-interprétations de card >3).

TD n° 10

I. Codage des formules

Exercice 1. Codage des formules.

Q1. La fonction $\alpha_3 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ est une bijection.
Par induction sur F, on construit $\# \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ la réciproque.

Q2. Les fonctions $\beta^3_1, \beta^3_2, \beta^3_3$ sont récursives primitives.
Notons F la fonction indicatrice de Form. Montrons F primitive réc.
Par déf° par cas / récursion on a :

si $\beta^3_3(x) = 0$ alors $F(x) := \mathbb{1}_{Term}(\beta^1_3(x)) \times \mathbb{1}_{Term}(\beta^2_3(x))$
si $\beta^3_3(x) = 1$ et $\beta^2_3(x) = 0$ alors $F(x) := F(\beta^1_3(x))$
si $\beta^3_3(x) \in \{2,3,4,5\}$ alors $F(x) := F(\beta^1_3(x)) \times F(\beta^2_3(x))$
si $\beta^3_3(x) \in \{6,7\}$ alors $F(x) := F(\beta^1_3(x))$
sinon $F(x) := 0$.

Exercice 2. Operations sur les formules.

Notons $\theta_1, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ les fonctions indicatrices de $\Theta_1, \Phi_1, \dots, \Phi_4$.

1) Par déf° par cas : sur (x, n)

- si $\beta^3_3(x) = 0$ et $\beta^1_3(x) = n+1$ alors $F(x) := 1$
- si $\beta^3_3(x) = 1$ alors $F(x) := F(\beta^1(x_3))$
- si $\beta^3_3(x) \in \{2,3\}$ alors $F(x) := F(\beta^1_3(x)) \times F(\beta^2_3(x))$
- simon $F(x) := 0$

2)
- si $\beta^3_3(x) = 0$ alors $F(x) := \theta_0(\beta^1_3(x)) \times \theta_0(\beta^2_3(x))$
- si $\beta^3_3(x) = 1$ alors $F(x) := F(\beta^1_3(x))$
- si $\beta^3_3(x) \in \{2,3,4,5\}$ alors $F(x) := F(\beta^1_3(x))$ ou $F(\beta^2_3(x))$
- si $\beta^3_3(x) \in \{6,7\}$ alors $F(x) := F(\beta^1_3(x))$
- sinon $F(x) := 0$

3) → si $\beta_3^3(x) = 0$ alors $F(x) := \theta_0(\beta_3^1(x)) \times \theta_0(\beta_3^2(x))$
→ si $\beta_3^3(x) = 1$ alors $F(x) := F(\beta_3^1(x))$
→ si $\beta_3^3(x) \in \{2,3,4,5\}$ alors $F(x) := F(\beta_3^1(x))$ ou $F(\beta_3^2(x))$
→ si $\beta_3^3(x) \in \{6,7\}$ et $\beta_3^2(x) \neq n$ alors $F(x) := F(\beta_3^1(x))$
→ sinon $F(x) := 0$

4) → si $\beta_3^3(x) = 0$ alors $F(x) := \theta_1(\beta_3^1(x)) \times \theta_1(\beta_3^2(x))$
→ si $\beta_3^3(x) = 1$ alors $F(x) := F(\beta_3^1(x))$
→ si $\beta_3^3(x) \in \{2,3,4,5\}$ alors $F(x) := F(\beta_3^1(x))$ ou $F(\beta_3^2(x))$
→ si $\beta_3^3(x) \in \{6,7\}$ et $\beta_3^2(x) \neq n$ alors $F(x) := F(\beta_3^1(x))$
→ sinon $F(x) := 0$

5) → si $\beta_3^3(x) = \{6,7\}$ alors $F(x) := \varphi_2(\beta_3^1(x), \beta_3^2(x))$
→ sinon $F(x) := 0$

II. Encore un peu de théorie des modèles.

Exercice 3. Théorie infinie.

Q1. On pose $\varphi_n := \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j$
Puis $T_n := \{\varphi_k \mid k \leq n\}$.

Pour tout n, $T_n \subsetneq T_{n+1}$ et $\mathcal{M}_n := [\![1, n]\!]$

vérifie $\mathcal{M}_n \models T_n$ mais $\mathcal{M}_n \not\models T_{n+1}$.

Q2. Par compacité, on a que toute partie finie $T' \subseteq T$ est non-contradictoire. En effet, soit $n := \min\{n \in \mathbb{N} \mid T' \subseteq T_n\}$ et $\mathcal{M}_n \models T'$.
D'où T non-contradictoire

Q3. Par l'absurde soit T' finie sur $\mathcal{L}$ telle que
$\mathcal{M} \models T \iff \mathcal{M} \models T'$

Alors $T \models \bigwedge T'$ et donc $T \vdash \bigwedge T'$ (par complétude)
d'où il existe $A \subseteq_{\text{finie}} T$ telle que $A \vdash \bigwedge T'$.
D'où, il existe $n \in \mathbb{N}$, $T_n \vdash \bigwedge T'$.
D'où $\mathcal{M}_n \models \bigwedge T'$ et donc $\mathcal{M}_n \models T$ et en particulier $\mathcal{M}_n \models T_{n+1}$
Absurde.

Q4. Avec $\mathcal{L} = \emptyset$ et $\mathcal{L}' = \{0, S\}$, on peut donner les 3 premiers axiomes de Peano.

Exercice 4. Sans fonction.

Q1. On transforme $R'(f(x_1, \dots, x_n), t_1, \dots, t_n)$
en $\exists \bar{y}\ R(x_1, \dots, x_n, \bar{y}) \wedge R'(\bar{y}, t_1, \dots, t_n)$
pour toute relation R' dans $\mathcal{L}$ et où y est fraîche.

Pour toute interprétation $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{L}_1$,
on considère $\mathcal{M}'$ défini comme $\mathcal{M}$ sans $f_{\mathcal{M}}$ avec $R_{\mathcal{M}'}$

et où $R_{\mathcal{M}'} = \{(t_1, \dots, t_n, f_{\mathcal{M}}(t_1, \dots, t_n)) \mid t_1, \dots, t_n \in \mathcal{M}\}$.

On a bien

$$\mathcal{M}, e \models R'(f(x_1, \dots, x_n), t_1, \dots, t_n)$$

$$\iff (Val_e(f(x_1, \dots, x_n)), Val_e(t_1), \dots, Val_e(t_n)) \in R'_{\mathcal{M}}$$

$$\iff (f_{\mathcal{M}}(Val_e(x_1) \dots Val_e(x_n)), Val_e(t_1), \dots, Val_e(t_n)) \in R'_{\mathcal{M}}$$

$\iff$ il existe y tq $y = f_{\mathcal{M}}(Val_e(x_1), \dots, Val_e(x_n))$

et $(y, Val_e(t_1), \dots, Val_e(t_m)) \in R'_{\mathcal{M}}$

$\iff$ il existe y tq $R_{\mathcal{M}'}(Val_e(x_1), \dots, Val_e(x_n), y)$
et $(y, Val_e(t_1), \dots, Val_e(t_m)) \in R'_{\mathcal{M}'}$

$\iff$ il existe y tq $R_{\mathcal{M}'}(Val_{e'}(x_1), \dots, Val_{e'}(x_n), Val_{e'}(\bar{y}))$
et $(y, Val_{e'}(t_1), \dots, Val_{e'}(t_m)) \in R'_{\mathcal{M}'}$

car $\bar{y}$ fraîche

où $e' := e[\bar{y} \mapsto y]$

$\iff \mathcal{M}', e \models \exists \bar{y}\ R(x_1, \dots, x_n, y) \wedge R'(\bar{y}, t_1, \dots, t_m)$

Q2. Pas nécessairement, par exemple la relation $<$ n'est pas déterministe.

Exercice 5. Théorie des corps.

Q1. $T_{corps} := \{$

$\forall x\ \forall y\ \forall z \quad x + (y + z) = (x + y) + z,$

$\forall x\ \forall y \quad x + y = y + x,$

$\forall x \quad x + 0 = x,$

$\forall x\ \exists y \quad x + y = 0,$

$\forall x\ \forall y\ \forall z \quad x \times (y \times z) = (x \times y) \times z,$

$\forall x\ \forall y\ \forall z \quad x \times (y + z) = x \times y + x \times z,$

$\forall x \quad x \times 1 = 1 \times x = x,$

$\forall x \quad x \neq 0 \rightarrow \exists y\ y \times x = x \times y = 1$

$\}$

où $a = b = c$ représente $a = b \wedge b = c$.

Q2. ... bah c'est bien ig ...

Q3. Soit T une théorie des corps de caractéristique non-nulle. Considérons

$$\varphi_n := (\underbrace{1 + \dots + 1}_{n} = 0)$$

Soit $T' := T \cup \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

La théorie T' est finiement satisfiable. En effet, si $T^* \subseteq_{finie} T'$ alors soit $n = \text{pgcd}\, \{k \in \mathbb{N} \mid \varphi_k \in T^*\} \in \mathbb{N}$.

Il existe un corps de caractéristique n (il suffit de décomposer $n = p_1 \times \dots \times p_q$ et $\mathbb{F}_{p_1} \times \dots \times \mathbb{F}_{p_q}$).

D'où T' satisfiable. Absurde !

Q4. On pose $T_{corps} \cup \{ \overbrace{1 + \dots + 1}^{n} \neq 0 \mid n \in \mathbb{N} \}$.

Q5. Non !