Projet fonctionnel

Basé sur le cours de Daniel Hirschkoff
Notes prises par Hugo Salou

ENS DE LYON

19 mars 2025

Table des matières

1 Le λ-calcul pur. 4
1.1 Liaison et α-conversion. 4
1.2 La β-réduction. 5
1.3 Substitutions. 6
1.4 Comparaison λ-calcul et FUN. 7
1.5 Exercice : les booléens. 8
1.6 Confluence de la β-réduction. 8

2 Le λ-calcul simplement typé. 13
2.1 Définition du système de types. 13
2.2 Propriétés de la relation de typage. 14
2.3 Normalisation forte. 15
2.4 Extension : le λ-calcul typé avec $\times$ et $\mathbf{1}$. 19

Introduction.

Le cours se décompose en deux parties :

- une partie *pratique* ($\sim 2/3$ du cours) avec de la programmation OCaml en binôme (fouine, puis pieuvre) ;
- une partie *théorique* : avec du λ-calcul, typage et lien avec la logique.

Ce document contiendra les notes de cours pour la partie théorique. D'autres documents pour la partie projet sont en ligne sur mon site (transformation CPS, et optimisations associées à la β-réduction).

Parfois, des références aux chapitres du cours de théorie de la programmation seront fait, ce sont des liens cliquables qui mènent vers le PDF du chapitre en question, par exemple :

Théorie de la Programmation [Chapitre 0].

1 Le λ-calcul pur.

Le λ-calcul a trois domaines proches :

- ▷ la *calculabilité*, avec l'équivalence entre machines de Turing et λ-expression (vue en FDI) ;
- ▷ la *programmation fonctionnelle* (vue en **Théorie de la Programmation** [Chapitre 6] avec le petit langage FUN) ;
- ▷ la *théorie de la démonstration* (vue dans la suite de ce cours).

On se donne un ensemble infini $\mathcal{V}$ de variables notées $x, y, z, \ldots$ Les *termes* (du λ-calcul) ou λ-termes sont définis par la grammaire

$$M, N, \ldots ::= \lambda x.\, M \mid M\ N \mid x.$$

La construction $\lambda x.\, M$ s'appelle l' *abstraction* ou λ-*abstraction*. Elle était notée $\texttt{fun}\, x \to M$ en cours de théorie de la programmation.

Notation.
- ▷ On notera $M\ N\ P$ pour $(M\ N)\ P$.
- ▷ On notera $\lambda xyz.M$ pour $\lambda x.\lambda y.\lambda z M$ (il n'y a pas lieu de mettre des parenthèses ici, vu qu'il n'y a pas d'ambigüités).
- ▷ On notera $\lambda x.\, M\ N$ pour $\lambda x.\, (M\ N)$. ***Attention***, c'est différent de $(\lambda x.\, M)\ N$.

1.1 Liaison et α-conversion.

Remarque 1.1 (Liaison). Le « λ » est un lieur. Dans $\lambda y.\, x\ y$, la variable y est *liée* mais pas x (la variable x libre). On note $\mathcal{VL}(M)$ l'ensemble des variables libres de M, définie par induction sur M (il y a *3* cas).

Remarque 1.2 (α-conversion).
On note $=_\alpha$ la relation d' *α-conversion*. C'est une relation binaire sur les λ-termes fondée sur l'idée de renommage des abstractions ***en évitant la capture de variables libres*** :

$$\lambda x.\, x\, y =_\alpha \lambda t.\, x\, t \neq_\alpha \lambda x.x\, x.$$

Ainsi $\lambda x.\, M =_\alpha \lambda z.\, M'$ où M' est obtenu en remplaçant x par z ***là où il apparaît libre*** et ***à condition que*** $z \notin \mathcal{V}\ell(M)$. Ceci, on peut le faire partout.

Lemme 1.1. La relation $=_\alpha$ est une relation d'équivalence. Si $M =_\alpha N$ alors $\mathcal{V}\ell(M) = \mathcal{V}\ell(N)$.

Par convention, on peut identifier les termes modulo $=_\alpha$. On pourra donc toujours dire

« considérons $\lambda x.\, M$ où $x \notin E$ [...] »

avec E un ensemble ***fini*** de variables.

Ceci veut dire qu'on notera

$$M = N \text{ pour signifier que } M =_\alpha N.$$

1.2 La β-réduction.

Définition 1.1 (β-réduction). On définit la relation de β-réduction sur les λ-termes, notée $\to_\beta$ ou $\to$, définie par les règles d'inférences :

$$\frac{}{(\lambda x.\, M)\, N \to_\beta M[N/x]} \qquad \frac{M \to_\beta M'}{\lambda x.\, M \to_\beta \lambda x.\, M'}$$

$$\frac{M \to_\beta M'}{M\, N \to_\beta M'\, N} \qquad \frac{N \to_\beta N'}{M\, N \to_\beta M\, N'}$$

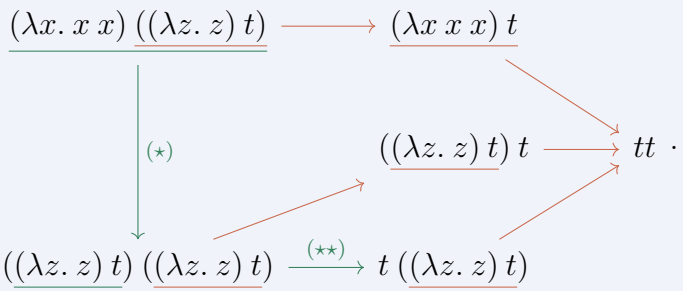
où $M[^N/_x]$ est la substitution de x par N dans M (on le défini ci-après).

Définition 1.2. Un terme de la forme $(\lambda x.\, M)\ N$ est appelé un *redex* (pour *reducible expression*) ou *β-redex*. Un terme M est une *forme normale* s'il n'existe pas de N tel que $M \to_\beta N$.

Remarque 1.3. La relation $\to_\beta$ n'est pas terminante :

$$\Omega := (\lambda x.\, x\ x)\ (\lambda y.\, y\ y) \to_\beta (\lambda y.\, y\ y)\ (\lambda y.\, y\ y) =_\alpha \Omega.$$

Exemple 1.1.



Un pas de β-réduction peut :

- ▷ dupliquer un terme (*c.f.* $(\star)$) ;
- ▷ laisser un redex inchangé (*c.f.* $(\star\star)$) ;
- ▷ faire disparaitre un redex (qui n'est pas celui que l'on contracte) :

$$(\lambda x.\, u)((\lambda z.\, z)\ t)\ \to_\beta u\ ;$$

- ▷ créer de nouveaux redex :

$$(\lambda x.\, x\ y)\ (\lambda z.\, z) \to_\beta (\lambda z.\, z)\ y.$$

1.3 Substitutions.

Exemple 1.2. Le terme $\lambda xy.x$ c'est une « fonction fabriquant des fonctions constantes » au sens où

$$(\lambda xy.\ x)M \to_\beta \lambda y.\ M,$$

à condition que $y \notin \mathcal{V}\ell(M)$. On doit cependant α-renommer pour éviter la capture :

$$\begin{array}{c}(\lambda xy.x)\ (\lambda t.\ y) \not\to_\beta \lambda y.\ (\lambda t.\ y)\\ \wr\ \|\\ (\lambda xy'.x)\ (\lambda t.\ y) \to_\beta \lambda y'.\ (\lambda t.\ y).\end{array}$$

Définition 1.3. On procède par induction, il y a trois cas :

- $y[N/x] := \begin{cases} N & \text{si } y = x \\ y & \text{si } y \neq x \end{cases}$
- $(M_1\ M_2)[N/x] := (M_1[N/x])\ (M_2[N/x])$
- $(\lambda y.\ M)[N/x] := \lambda y.\ (M[N/x])$ ***à condition que*** $y \notin \mathcal{V}\ell(N)$ ***et*** $y \neq x$.

Lemme 1.2 (Gymnastique des substitutions)**.** Pour $y \notin \mathcal{V}\ell(R)$,

$$(P[Q/y])[R/x] = (P[R/x])[Q[R/x]/y].$$

Lemme 1.3. Si $M \to_\beta M'$ alors $\mathcal{V}\ell(M') \subseteq \mathcal{V}\ell(M)$.

1.4 Comparaison λ-calcul et FUN.

En λ-calcul, on a une règle

$$\frac{M \to_\beta M'}{\lambda x.\ M \to_\beta \lambda x.\ M'.}$$

Cette règle n'existe pas en FUN (ni en fouine) car on traite les fonctions comme des valeurs. Et, en FUN, les trois règles suivantes sont

mutuellement exclusives :

$$\frac{}{(\lambda x.\, M)\; N \to_\beta M[^N/_x]} \qquad \frac{M \to_\beta M'}{M\; N \to_\beta M'\; N} \qquad \frac{N \to_\beta N'}{M\; N \to_\beta M\; N'}$$

car on attend que N soit une ***valeur*** avant de substituer.

En FUN (comme en fouine), pour l'exemple 1.1, on se limite à n'utiliser que les flèches rouges.

La relation $\to_\beta$ est donc « plus riche » que $\to_{\mathsf{FUN}}$. En FUN, on a une *stratégie de réduction* : on a au plus un redex qui peut être contracté. On n'a pas de notion de valeur en λ-calcul pur. Le « *résultat d'un calcul* » est une forme normale.

1.5 Exercice : les booléens.

On définit

$$\mathbf{T} := \lambda xy.\, x \qquad \mathbf{F} := \lambda xy.\, y.$$

Ainsi, pour tout M (si $y \notin \mathcal{V}\ell(M)$),

$$\mathbf{T}\; M \to \lambda y.\, M \qquad \mathbf{F}\; M \to \lambda y.\, y =: \mathbf{I}.$$

La construction `if` b `then` M `else` N se traduit en $b\; M\; N$.

Le « non » booléen peut se définir par :

- ▷ $\mathbf{not} := \lambda b.\, b\; \mathbf{F}\; \mathbf{T} = \lambda b.\, b\; (\lambda xy.\, y)\; (\lambda tu.\, t)$;
- ▷ $\mathbf{not}' := \lambda b.\, \lambda xy.\, byx$.

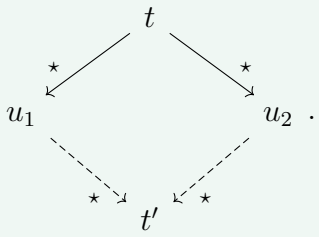
La première version est plus abstraite, la seconde est « plus électricien ». On a deux formes normales ***différentes***.

De même, on peut définir le « et » booléen :

- ▷ $\mathbf{and} := \lambda b_1.\, \lambda b_2.\, b_1\; (b_2\; \mathbf{T}\; \mathbf{F})\; \mathbf{F}$;
- ▷ $\mathbf{and}' := \lambda b_1.\, \lambda b_2.\, \lambda xy.\, b_1\; (b_2\; x\; y)\; y$.

1.6 Confluence de la β-réduction.

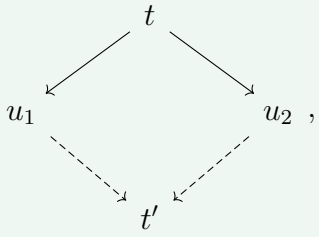
Définition 1.4 (Rappel, *c.f.* **Théorie de la Programmation** [Chapitre 10])**.** On dit que $\to$ est *confluente* en $t \in A$ si, dès que $t \to^\star u_1$ et $t \to^\star u_2$ il existe t' tel que $u_1 \to^\star t'$ et $u_2 \to^\star t'$.



Les flèches en pointillés représentent l'existence.

On dit que $\to$ est *confluente* si $\to$ est confluente en tout $a \in A$.

La propriété du diamant correspond au diagramme ci-dessous :



c'est-à-dire si $t \to u_1$ et $t \to u_2$ alors il existe t' tel que $u_1 \to t'$ et $u_2 \to t'$.

La confluence pour $\to$, c'est la propriété du diamant pour $\to^\star$. On sait déjà que la β-réduction n'a pas la propriété du diamant (certains chemins de l'exécution sont plus longs), mais on va montrer qu'elle est confluente.

Définition 1.5. On définit la relation de *réduction parallèle*, notée $\rightrightarrows$, par les règles d'inférences suivantes :

$$\frac{}{x \rightrightarrows x} \qquad \frac{M \rightrightarrows M'}{\lambda x.\, M \rightrightarrows \lambda x.\, M'}$$

$$\frac{M \rightrightarrows M' \quad N \rightrightarrows N'}{M\ N \rightrightarrows M'\ N'} \qquad \frac{M \rightrightarrows M' \quad N \rightrightarrows N'}{(\lambda x.\, M)\ N \rightrightarrows M'[N'/x]}$$

Lemme 1.4. La relation $\rightrightarrows$ est réflexive.

Lemme 1.5. Si $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{S}$ alors $\mathscr{R}^\star \subseteq \mathscr{S}^\star$. De plus, $(\mathscr{R}^\star)^\star = \mathscr{R}^\star$.

Lemme 1.6. Les relations $\to^\star$ et $\rightrightarrows^\star$ coïncident.

Preuve.
- ▷ On a $\to^\star \subseteq \rightrightarrows^\star$ car cela découle de $\to \subseteq \rightrightarrows$ par induction sur $\to$ en utilisant la réflexivité de $\rightrightarrows$.
- ▷ On a $\rightrightarrows^\star \subseteq \to^\star$ car cela découle de $\rightrightarrows \subseteq \to^\star$. En effet, on montre que pour tout M, M' si $M \rightrightarrows M'$ alors $M \to^\star M'$, par induction sur $\rightrightarrows$. Il y a 4 cas.
  - Pour $x \rightrightarrows x$, c'est immédiat.
  - Pour l'abstraction, on suppose $M \rightrightarrows M'$ alors par induction $M \to^\star M'$, et donc $\lambda x.\, M \to^\star \lambda x.\, M'$ par induction sur $M \to^\star M'$.
  - Pour l'application, c'est plus simple que pour la précédente.
  - Pour la substitution, supposons $M \rightrightarrows M'$ et $N \rightrightarrows N$. On déduit par hypothèse d'induction $M \to^\star M'$ et $N \to^\star N'$. Et, par induction sur $M \to^\star M'$, on peut montrer que $(\lambda x.\, M)\ NN \to^\star (\lambda x.\, M')\ N$. Puis, par induction sur $N \to^\star N'$, on montre $(\lambda x.\, M')\ N \to^\star (\lambda x.\, M')\ N'$. Enfin, par la règle de β-réduction, on a $(\lambda x.\, M')N' \to M'[N'/x]$. On rassemble tout pour

obtenir :

$$(\lambda x.\, M)\, N \to^\star M'[N'/x].$$

□

On est donc ramené à montrer que $\rightrightarrows^\star$ a la propriété du diamant. Or $\rightrightarrows$ a la propriété du diamant, ce que l'on va montrer en TD.

Lemme 1.7. Si $M \rightrightarrows M'$ alors $N \rightrightarrows N'$ implique $M[N/x] \rightrightarrows M'[N'/x]$.

Preuve. Par induction sur $M \rightrightarrows M'$, il y a 4 cas. On ne traite que le cas de la 4ème règle. On suppose donc $M = (\lambda y.\, P)\, Q$ avec $y \notin \mathcal{V}\ell(N)$ et $y \neq x$. On suppose aussi $P \rightrightarrows P'$, $Q \rightrightarrows Q'$ et $M' = P'[Q'/y]$. On suppose de plus $N \rightrightarrows N'$. Par hypothèse d'induction, on a $P[N/x] \rightrightarrows P'[N'/x]$ et $Q[N/x] \rightrightarrows Q'[N'/x]$. On applique la 4ème règle d'inférence définissant $\rightrightarrows$ pour déduire

$$\underbrace{(\lambda y.\, (P[N/x]))}_{\substack{\| \\ (\lambda y.\, P)[N/x] \\ \text{car } x \neq y}}(Q[N/x]) \rightrightarrows (P'[N'/x])[Q'[N'/x]/y] = (P'[Q'/y])[N'/x]$$

par le lemme de gymnastique des substitutions et car $y \notin \mathcal{V}\ell(N') \subseteq \mathcal{V}\ell(N)$ et car $N \to^\star N'$. □

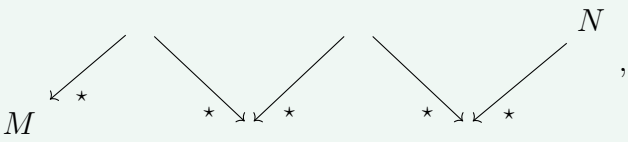
Proposition 1.1. La relation $\rightrightarrows$ a la propriété du diamant.

Preuve. Vu en TD. □

Corollaire 1.1. On a la confluence de $\to_\beta$.

Définition 1.6. La *β-équivalence*, ou *β-convertibilité* est la plus petite relation d'équivalence contenant $\to_\beta$. On la note $=_\beta$.

Si l'on a



alors $M =_\beta N$.

Proposition 1.2. Tout λ-terme est β-équivalent à au plus une forme normale.

Preuve. Si $M =_\beta N$ et M, N sont des formes normales, alors par confluence il existe P tel que $M \to^\star P$ et $N \to^\star P$. On a donc que $M = N = P$. □

Remarque 1.4 (Conséquences).
- ▷ Deux normales distinctes (au sens de $=_\alpha$) ne sont pas β-convertibles.
- ▷ Si on a un λ-terme qui diverge et qui a une forme normale, par exemple $(\lambda x.\ y)\ \Omega$, alors on peut toujours « revenir » sur la forme normale.

2 Le λ-calcul simplement typé.

Dans ce chapitre, on va parler de *typage*. Ceci permet de « stratifier » les λ-termes. En effet, pour l'instant, tous les termes se ressemblent.

2.1 Définition du système de types.

Définition 2.1. On se donne un ensemble de *types de base*, notés X, Y, Z, ... Les types simples sont donnés par la grammaire suivante :

$$A, B, C ::= \boldsymbol{X} \mid A \to B.$$

Il n'y a donc que deux « types » de types : les types de base, et les types fonctions. Il n'y a donc pas de type `unit`, `bool`, ... En effet, ceci demanderai d'ajouter des constantes `()`, `true`, `false`, *etc* dans la grammaire du λ-calcul (et ceci demanderai ensuite d'ajouter des règles de typage supplémentaire). On verra en TD comment typer **T** et **F** comme défini au chapitre précédent.

Par convention, on notera $A \to B \to C$ pour $A \to (B \to C)$.

Définition 2.2. On définit une *hypothèse de typage* comme un couple variable-type (x, A) noté $x : A$.

Définition 2.3. Un *environment de typage*, noté Γ, Γ', *etc* est un dictionnaire sur $(\mathcal{V}, \mathsf{Types})$, *c.f.* cours de Théorie de la Programmation. On notera $\Gamma(x) = A$ lorsque Γ associe x à A. On définit

le *domaine* de Γ comme

$$\mathrm{dom}(\Gamma) := \{x \mid \exists A,\ \Gamma(x) = A\}.$$

On note aussi $\Gamma, x : A$ l'extension de Γ avec $x : A$ si $x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$.

Définition 2.4. On définit la *relation de typage*, notée $\Gamma \vdash M : A$ (« sous les hypothèses Γ, le λ-terme M a le type A ») par les règles d'inférences suivantes :

$$\Gamma(x) = A \ \frac{}{\Gamma \vdash x : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \to B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash M\ N : B}$$

$$x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)\ \frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x.\ M : A \to B}$$

Dans cette dernière règle, on peut toujours l'appliquer modulo α-conversion (il suffit d'α-renommer x dans $\lambda x.\ M$).

Exemple 2.1. On peut omettre le « $\emptyset$ » avant « $\vdash$ ».

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}, z : \boldsymbol{X} \vdash f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}} \quad \dfrac{\dfrac{}{f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}, z : \boldsymbol{X} \vdash f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}} \quad \dfrac{}{f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}, z : \boldsymbol{X} \vdash z : \boldsymbol{X}}}{f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}, z : \boldsymbol{X} \vdash f\ z : \boldsymbol{X}}}{f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}, z : \boldsymbol{X} \vdash f\ (f\ z) : \boldsymbol{X}}}{f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X} \vdash \lambda z.\ f\ (f\ z) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}}}{\vdash \lambda f.\ \lambda z.\ f\ (f\ z) : (\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}}$$

Exemple 2.2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{a, X, t : X \to Y \vdash t : X \to Y} \quad \dfrac{}{a, X, t : X \to Y \vdash a : X}}{a, X, t : X \to Y \vdash t\ a : Y}}{a : X \vdash \lambda t.\ t\ a : (X \to Y) \to Y}\ .$$

2.2 Propriétés de la relation de typage.

Lemme 2.1 (Lemme administratif)**.**

- ▷ Si $\Gamma \vdash M : A$ alors $\mathcal{V}\ell(M) \subseteq \mathrm{dom}(\Gamma)$.
- ▷ *Renforcement* : si $\Gamma, x : B \vdash M : A$ et $x \notin \mathcal{V}\ell(M)$ alors $\Gamma \vdash M : A$.
- ▷ *Affaiblissement* : si $\Gamma \vdash M : A$ alors, pour tout B et tout $x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$ alors $\Gamma, x : B \vdash A$.
- ▷ *Contraction* : si $\Gamma, x : B, y : B \vdash M : A$ alors $\Gamma, x : B \vdash M[x/y] : A$ □

Proposition 2.1 (Préservation du typage)**.** Si $\Gamma \vdash M : A$ et $M \to_\beta M'$ alors $\Gamma \vdash M' : A$.

Preuve. On procède comme en **Théorie de la Programmation** [Chapitre 7] avec le lemme suivant.

Lemme 2.2. Si $\Gamma, x : A \vdash M : B$ et $\Gamma \vdash N : A$ alors $\Gamma \vdash M[N/x] : B$.

□

2.3 Normalisation forte.

Définition 2.5. Un λ-terme M est dit *fortement normalisant* ou *terminant* si toute suite de β-réductions issue de M conduit à une forme normale. Autrement dit, il n'y a pas de divergence issue de M.

Théorème 2.1. Si M est typage (il existe Γ, A tels que $\Gamma \vdash M : A$) alors M est fortement normalisant.

Remarque 2.1 (Quelques tentatives de preuves ratées.)**.** ▷ Par induction sur M ? Non.

- ▷ Par induction sur la relation de typage $\Gamma \vdash M : A$? Non (le cas de l'application pose problème car deux cas de β-réductions).

Pour démontrer cela, on utilise une méthode historique : les *candidats de réductibilité*.

Définition 2.6 (Candidat de réductibilité)**.** Soit A un type simple. On associe à A un ensemble de λ-termes, noté $\mathscr{R}_A$ appelé *candidats de réductibilité* (ou simplement *candidats*) associé à A, défini par induction sur A de la manière suivante :

- ▷ $\mathscr{R}_{\boldsymbol{X}} := \{M \mid M \text{ est fortement normalisant}\}$;
- ▷ $\mathscr{R}_{A\to B} := \{M \mid \forall N \in \mathscr{R}_A, M\ N \in \mathscr{R}_B\}$.

L'idée est la suivante :

$$\begin{array}{c} M \text{ typable} \\ \Gamma \vdash M : A \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad M \in \mathscr{R}_A \quad \rightsquigarrow \quad M \text{ fortement normalisant.}$$

Remarque 2.2 (Rappel sur le PIBF, *c.f.* **Théorie de la Programmation** [Chapitre 10])**.** Le principe d'induction bien fondé nous dit qu'une relation $\mathscr{R}$ est terminante ssi pour tout prédicat $\mathscr{P}$ sur E vérifie que si

$$\forall x \in E \left((\forall y, x \mathscr{R}\ y \implies \mathscr{P}(y)) \implies \mathscr{P}(x) \right)$$

alors $\forall x \in E, \mathscr{P}(x)$.

Proposition 2.2. Soit A un type simple. On a :

CR 1. Pour tout $M \in \mathscr{R}_A$, M est fortement normalisant.

CR 2. Pour tout $M \in \mathscr{R}_A$, si $M \to_\beta M'$ alors $M' \in \mathscr{R}_A$.

CR 3. Pour tout M *neutre* (c-à-d, M n'est pas une λ-abstraction), si $\forall M', M \to_\beta M' \implies M' \in \mathscr{R}_A$ alors $M \in \mathscr{R}_A$.

Preuve. On montre la conjonction de **CR 1**, **CR 2** et **CR 3** par induction sur A. Il y a deux cas.

- Cas $\boldsymbol{X}$ un type simple.

  CR 1. C'est vrai par définition.

  CR 2. Si M est fortement normalisant, et $M \to_\beta M'$ alors $M' \in \mathscr{R}_{\boldsymbol{X}}$.

  CR 3. Si M est neutre et si on a que « pour tout M' tel que $M \to_\beta M'$ alors $M' \in \mathscr{R}_{\boldsymbol{X}}$ » alors c'est l'induction bien fondée pour $\to_\beta$ sur $\mathscr{R}_{\boldsymbol{X}}$.

- Cas $A \to B$ un type flèche.

  CR 1. Soit $M \in \mathscr{R}_{A\to B}$. Supposons que M diverge :

  $$M \to_\beta M_1 \to_\beta M_2 \to_\beta \cdots .$$

  On a observé que $x \in \mathscr{R}_A$ pour une variable x arbitraire (conséquence de **CR 3** pour A). Par définition de $\mathscr{R}_{A\to B}$, $M\,x \in \mathscr{R}_B$. Par **CR 1** pour B, on a que $M\,x$ est fortement normalisant. Or, $M\,x \to_\beta M_1\,x$ car $M \to_\beta M_1$. On construit ainsi une divergence dans $\mathscr{R}_B$ à partir de $M\,x$:

  $$M\,x \to_\beta M_1\,x \to_\beta M_2\,x \to_\beta \cdots .$$

  C'est absurde car cela contredit que $M\,x$ fortement normalisant.

  CR 2. Soit $M \in \mathscr{R}_{A\to B}$ et $M \to M'$. Montrons que $M' \in \mathscr{R}_{A\to B}$, *i.e.* pour tout $N \in \mathscr{R}_A$ alors $M'\,N \in \mathscr{R}_B$. Soit donc $N \in \mathscr{R}_A$. On sait que $M\,N \in \mathscr{R}_B$ (car $M \in \mathscr{R}_{A\to B}$). Et comme $M \to_\beta M'$ alors $M\,N \to_\beta M'\,N$ et, par **CR 2** pour B, on a $M'\,N \in \mathscr{R}_B$. On a donc montré $\forall N \in \mathscr{R}_{A\to B}, M'N \in \mathscr{R}_B$ autrement dit, $M' \in \mathscr{R}_{A\to B}$.

  CR 3. Soit M neutre tel que $\forall M', M \to_\beta M' \implies M' \in \mathscr{R}_{A\to B}$. Montrons que $M \in \mathscr{R}_{A\to B}$. On sait que $\to_\beta$ est

terminante sur $\mathscr{R}_A$ (par **CR 1** pour A). On peut donc montrer que $\forall N \in \mathscr{R}_A$, $M\,N \in \mathscr{R}_B$ par induction bien fondée sur $\to_\beta$. On a les hypothèses suivantes :

- hypothèse 1 : pour tout M' tel que $M \to_\beta M'$ alors $M' \in \mathscr{R}_{A\to B}$;
- hypothèse d'induction bien fondée : pour tout N' tel que $N \to_\beta N'$ que $M\,N' \in \mathscr{R}_B$.

On veut montrer $M\,N \in \mathscr{R}_B$. On s'appuie sur **CR 3** pour B et cela nous ramène à montrer que, pour tout P tel que $M\,N \to_\beta P$ est $P \in \mathscr{R}_B$. On a trois cas possibles pour $M\,N \to_\beta P$.

- Si $M = \lambda x.\, M_0$ et $P = M_0[{}^N/_x]$ qui est exclu car M est neutre.
- Si $P = M'\,N$ alors par hypothèse 1 $M' \in \mathscr{R}_{A\to B}$ et donc $M'\,N \in \mathscr{R}_B$.
- Si $P = M\,N'$ alors, par par hypothèse d'induction bien fondée, $M\,N' \in \mathscr{R}_B$.

□

Lemme 2.3. Soit M tel que $\forall N \in \mathscr{R}_A, M[{}^N/_x] \in \mathscr{R}_B$. Alors $\lambda x.\, M \in \mathscr{R}_{A\to B}$.

Preuve. On procède comme pour **CR 3** pour $A \to B$. □

Lemme 2.4. Supposons $x_1 : A_1, \dots, x_k : A_k \vdash M : A$. Alors, pour tout $N_1, \dots, N_k$ tel que $N_i \in \mathscr{R}_{A_i}$, on a

$$M[{}^{N_1\ \cdots\ N_k}/_{x_1\ \cdots\ x_k}] \in \mathscr{R}_A.$$

On note ici la *substitution simultanée* des x_i par des N_i dans M. C'est ***n'est pas*** la composition des substitutions.

Preuve. Par induction sur la relation de typage, il y a trois cas.

- ▷ Si on a utilisé la règle de l'axiome, c'est que M est une variable : $M = x_i$ et $A = A_i$. Soit $N_i \in \mathscr{R}_{A_i}$ alors $M[{}^{N_1\ \cdots\ N_k}/_{x_1\ \cdots\ x_k}] = N_i \in \mathscr{R}_A$.
- ▷ Si on a utilisé la règle de l'application, c'est que M est une application : $M = M_1\, M_2$ et $M_1 : B \to A$ et $M_2 : B$. On a :

  $$M[{}^{N_1\ \cdots\ N_k}/_{x_1\ \cdots\ x_k}] = M_1[{}^{N_1\ \cdots\ N_k}/_{x_1\ \cdots\ x_k}]M_2[{}^{N_1\ \cdots\ N_k}/_{x_1\ \cdots\ x_k}].$$

  On conclut en appliquant les hypothèses d'inductions : $M_1[{}^{N_1\ \cdots\ N_k}/_{x_1\ \cdots\ x_k}] \in \mathscr{R}_{B\to A}$ et $M_2[{}^{N_1\ \cdots\ N_k}/_{x_1\ \cdots\ x_k}] : \mathscr{R}_B$.
- ▷ Si on a utilisé la règle de l'abstraction, c'est que $M = \lambda y.M_0$ avec $y \notin \{x_1, \ldots, x_k\} \cup \mathscr{V}\ell(N_1) \cup \cdots \cup \mathscr{V}\ell(N_k)$. Supposons que $x_1 : A_1, \ldots, x_k : A_k \vdash \lambda y.\ M_0 : A \to B$. Alors nécessairement $x_1 : A_1, \ldots, x_k : A_k, y : A \vdash M_0 : B$. Par hypothèse d'induction, on a que pour tout $N_i \in \mathscr{R}_{A_i}$ on a

  $$M_0[{}^{N_1\ \cdots\ N_k}/_{x_1\ \cdots\ x_k}][{}^{N}/_{y}] = M_0[{}^{N_1\ \cdots\ N_k\ N}/_{x_1\ \cdots\ x_k\ y}] \in \mathscr{R}_B.$$

  Par le lemme précédent, on déduit que

  $$(\lambda y.M_0)[{}^{N_1\ \cdots\ N_k}/_{x_1\ \cdots\ x_k}] = \lambda y.(M_0[{}^{N_1\ \cdots\ N_k}/_{x_1\ \cdots\ x_k}]) \in \mathscr{R}_{A\to B}.$$

□

Corollaire 2.1. Si $\Gamma \vdash M : A$ alors $M \in \mathscr{R}_A$.

2.4 Extension : le λ-calcul typé avec $\times$ et 1.

En ajoutant les couples et *unit*, il faut modifier quatre points.

Syntaxe. $M, N ::= \lambda x.\ M \mid M\ N \mid x \mid (M, N) \mid \star \mid \pi_1\ M \mid \pi_2\ M$

β-réduction.

$$\frac{M \to_\beta M'}{(M, N) \to_\beta (M', N)} \qquad \frac{N \to_\beta N'}{(M, N) \to_\beta (M, N')}$$

$$\frac{}{\pi_1\ (M, N) \to_\beta M} \quad \frac{}{\pi_2\ (M, N) \to_\beta N}.$$

Types.

$$A, B ::= X \mid A \to B \mid A \times B \mid \mathbf{1}$$

Typage.

$$\frac{}{\star : \mathbf{1}} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \qquad \Gamma \vdash N : B}{\Gamma \vdash (M, N) : A \times B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P : M \times N}{\Gamma \vdash \pi_1\ P : M} \qquad \frac{\Gamma \vdash P : M \times N}{\Gamma \vdash \pi_2\ P : N}\ .$$