

# TD n° 1

## I. Savoir lire la définition.

Ce sont des mesures de sécurité. Donc :

$$(\lambda y. x y) [y/x] \neq \lambda y. x y$$

$$(\lambda y. x y) [y/y] \neq \lambda y. y y$$

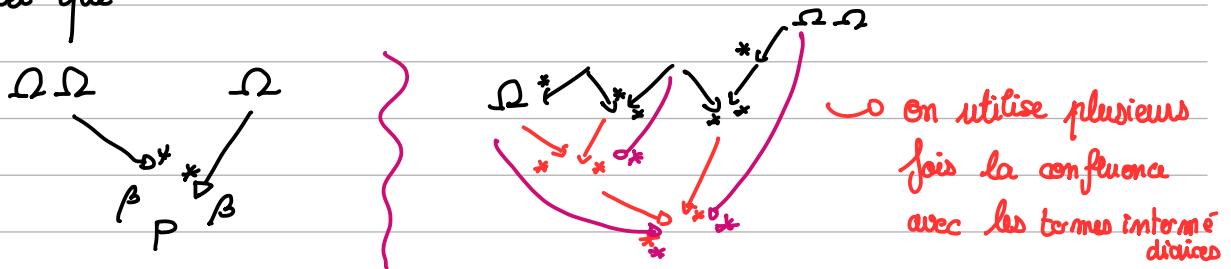
$$\text{mo } \Delta x \neq y$$

$$\text{mo } \Delta y \notin \text{cl}(N).$$

## II. Classes d'équivalence pour $=_\beta$ .

Q2.1.  $\Omega \Omega \xrightarrow{\beta} \Omega \Omega$  et  $\Omega \xrightarrow{\beta} \Omega$ .

Ainsi, si  $\Omega \Omega =_\beta \Omega$  alors, par confluence, il existe M un 2-terme tel que



C'est absurde car on aurait  $\Omega \Omega =_\beta P = \Omega$  ( $\Omega \Omega \xrightarrow{\beta} P$  implique  $P = \Omega \Omega$  car il n'y a que 2 redex).

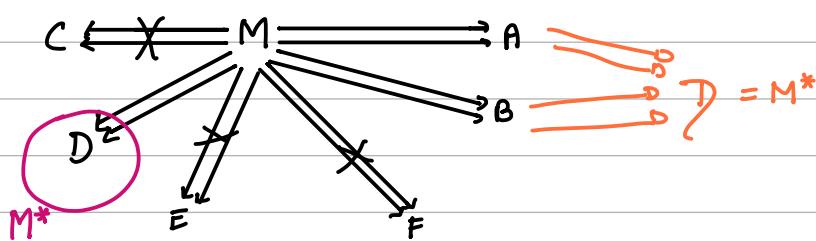
Q2.2. Soit N une forme normale avec  $x \notin V\ell(N)$

On pose :

$$M = (\lambda x. N) \Omega.$$

## III Propriété du diamant pour les réductions parallèles

### Q3.1.



Par induction (3 cas)

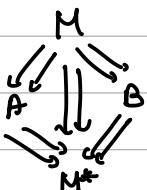
Q3.2.  $x^* := x$

$$(\lambda x. M)^* := \lambda x. (M^*)$$

$$(M N)^* := \begin{cases} P[N^*/x] & \text{si } M = \lambda x. P \\ M^* N^* & \text{sinon} \end{cases}$$

Lemme : si  $M \rightarrow N$  alors  $N \rightarrow M^*$  (par induction sur  $M$ )

D'où



On a donc la propriété du diamant  
 $\rightarrow_{\text{con}} \Rightarrow$  donc la confluence de  $\rightarrow_p$ .

#### IV Normalisation faible et forte en $\lambda$ -calcul pur.

Q4.1. Les propriétés (1), (2) et (3) restent vraies  
La propriété (4) ne l'est pas:

on a

$$M := (\lambda x. x) M' \rightarrow M'$$

mais

$$\begin{array}{ccc} (y y)[M/y] & \rightarrow & (y y)[M'/y] \\ \parallel & & \parallel \\ M & & M' n' \end{array}$$

Q4.2. Par induction sur  $M \rightarrow M'$  (4 cas) :

\* Cas  $(\lambda x. M) N \rightarrow M[N/x]$ . Supposons  $x \in \text{nf}(M)$  et  $N \in \mathcal{I}$ . (\*)

Par induction sur  $M$ , il y a 3 cas :

- si  $M = y$  alors

- si  $y \neq x$  alors  $M[N/x] = M \in \mathcal{I}$ .

- si  $y = x$  alors  $M[N/x] = N \in \mathcal{I}$ .

- si  $M = P Q$  alors par hypothèse d'induction

- on a :  $P[N/x] \in \mathcal{I}$  et  $Q[N/x] \in \mathcal{I}$

- d'où  $(P Q)[N/x] \in \mathcal{I}$ . par (ii)

- si  $M = \lambda y. P$  avec  $y \in \text{nf}(P)$  alors  $M[N/x] \in \mathcal{I}$  car  $P[N/x] \in \mathcal{I}$ .

\* Cas  $M N \rightarrow M' N$  avec  $M \rightarrow M'$ . Par hypothèse d'induction  $M' \in \lambda I$ .  
avec  $M \in \lambda I$ ,  $N \in \lambda I$ .

D'où  $M' N \in \lambda I$  par (ii).

\* Cas  $M N \rightarrow M N'$  avec  $N \rightarrow N'$ . Par hypothèse d'induction  $N' \in \lambda I$ .  
avec  $M \in \lambda I$ ,  $N \in \lambda I$ .

D'où  $M N' \in \lambda I$  par (ii).

\* Cas  $\lambda x. M \rightarrow \lambda x. M'$  avec  $M \rightarrow M'$  et  $M \in \lambda I$ ,  $(\lambda x. M) \in \lambda I$ ,  $M' \in \lambda I$   
Et,  $v\ell(M') = v\ell(M)$  (preuve par induction) par hyp. d'ind°  
d'où  $(\lambda x. M') \in \lambda I$  car  $x \in v\ell(M)$ .

Q4.3. Supposons avoir une divergence issue de  $(\lambda x. M) N$ .

On a trois cas :

- soit  $N \uparrow$  donc  $N_i \rightarrow N_{i+1}$  avec  $N_0 = N$  d'où  $M[N/x] \xrightarrow{*} M[N_{i+1}/x]$  et donc  $M[N/x] \uparrow$  avec au moins un pas  
car  $x \in v\ell(M_i)$
- soit  $M \uparrow$  donc  $M_i \rightarrow M_{i+1}$  avec  $M_0 = M$  d'où  $M_i[N/x] \xrightarrow{*} M_{i+1}[N/x]$  et donc  $M[N/x] \uparrow$
- soit  $M[N/x] \uparrow$

Dans tous les cas,  $M[N/x] \uparrow$

Q4.4. Non :  $(\lambda x. y) \Omega \uparrow$  mais  $y[\Omega/x] = y \neq$

can  $\in \lambda I$   
à toute étape

Q4.5. Mon instinct me dit non, mais vu qu'on ne peut pas faire "disparaître" une divergence, j'ai envie de dire oui.

Si on a une divergence, alors on ne peut pas l'éviter. Inversement, si on n'a pas de divergence, on ne peut pas aller dans une divergence.

En gros : tous les calculs dans  $\lambda I$  sont utiles.

## V Des 2-termes qui calculent : couples et prédecesseurs

Q5.1. On définit  $\text{succ} := \lambda u. \lambda f. \lambda x. f(u f x)$ .

$$\begin{aligned} \text{succ } n &= (\lambda u f x. f(u f x))(\lambda f x. f^n x) \xrightarrow{*} \lambda f x. f((\lambda f x. f^n x) f x) \\ &\xrightarrow{*} \lambda f x. f(\lambda x. f^n x x) \\ &\xrightarrow{*} \lambda f x. f(f^n x) = \lambda f x. f^{n+1} x = \underline{n+1}. \end{aligned}$$

D'où  $\text{succ } n \xrightarrow{*} \underline{n+1}$

Q5.2. On pose  $\text{fst} := \lambda c. c \top$  et  $\text{snd} := \lambda c. c \mathbf{F}$ .

$$\text{fst } (M, N) = (\lambda c. c (\lambda x. y. x)) (\lambda f. (f M) N)$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda f. (f M) N) (\lambda x. y. x)$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda x. y. x) M N$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda y. M) N$$

$$\xrightarrow{\beta} M$$

$$\text{snd } (M, N) = (\lambda c. c (\lambda x. y. y)) (\lambda f. (f M) N)$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda f. (f M) N) (\lambda x. y. y)$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda x. y. y) M N$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda y. y) N$$

$$\xrightarrow{\beta} N$$

Q5.3. On pose :  $\text{Next} := \lambda c. (\text{succ}(\text{fst } c), \text{fst } c)$

$$\text{Next } (\underline{m}, \underline{k}) \xrightarrow{\beta} (\text{succ } (\text{fst } (\underline{m}, \underline{k})), \text{fst } (\underline{m}, \underline{k})) \quad \text{par Q5.2}$$

$$\xrightarrow{\beta^*} (\text{succ } \underline{m}, \text{fst } (\underline{m}, \underline{k}))$$

$$\xrightarrow{\beta^*} (\underline{m+1}, \text{fst } (\underline{m}, \underline{k}))$$

$$\xrightarrow{\beta^*} (\underline{m+1}, \underline{m})$$

par Q5.1

par Q5.2

Q5.4. On pose  $\text{pred} := \lambda n. \text{snd } (\underline{n} \text{ Next } (\underline{0}, \underline{0}))$ .

## VII Des 2-termes qui bouclent

Q6.1.  $\forall M \xrightarrow{\beta} (\lambda x. M(x x)) (\lambda x. M(x x))$

$$\xrightarrow{\beta} M ((\lambda x. M(x x)) (\lambda x. M(x x)))$$

$$\xleftarrow{\beta} M (\forall M)$$

$$\text{D'où } M(\forall M) =_{\beta} \forall M.$$

Q6.2. On pose :

$$F := \lambda f. \lambda n. \text{if zero?}(n) \text{ then } \underline{1}$$

$$\text{else mult } n \text{ } (f(\text{pred } n))$$

puis

$$\text{fact} := \forall F.$$

Q6.3. On pose  $\Upsilon := \lambda f. f(f x)$  puis  $\Gamma := \lambda x. \Upsilon \Upsilon$ .

Gm a:

$$\Gamma = \lambda x. \gamma \gamma$$

degré de scissionnement:

2

$$\rightarrow_{\beta} \lambda x. \gamma (\Gamma_x)$$

3

$$\rightarrow_{\beta} \lambda x. \gamma (x(x x))$$

4

$$\rightarrow_{\beta} \lambda x. (x(x x))(x(x x)) \infty$$

7

Q6.1. Dans l'exemple, on fait des  $\beta$ -réductions dans une abstraction.  
En revanche, on ne peut pas faire ça.

# TD n° 2

## I. Types des 2-termes

1.1. Une question de cours du 6 mars 2024.

$$(x \rightarrow x) \rightarrow (x \rightarrow x) \quad (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad \text{où } X = A \rightarrow B$$

Q1.1.  $(\lambda f. f(f z)) (\lambda x. \lambda y. x y)$  de taille 12  
 $\xrightarrow{\beta} (\lambda x. \lambda y. x y) ((\lambda x. \lambda y. x y) z)$  de taille 13

## 1.2. Entiers de Church

Q1.2.  $\text{succ} := \lambda n. \lambda f x. f(n f x)$

$$\text{add} := \lambda n. \lambda m. \lambda f x. n f (m f x)$$

$$\text{mult} := \lambda n. \lambda m. \lambda f. n(m f)$$

Q1.3.  $\vdash \text{succ} : \text{nat} \rightarrow \text{nat}$

$$\begin{array}{c} \text{L} \circ n : \text{nat}, f : x \rightarrow x, x : x \quad \vdash f(n f x) : x \\ \text{L} \circ \quad \quad " \quad \quad \quad \quad \quad \vdash n f x : x \end{array}$$

$\vdash \text{add} : \text{nat} \rightarrow \text{nat} \rightarrow \text{nat}$

$$\begin{array}{c} \text{L} \circ n : \text{nat}, m : \text{nat}, f : x \rightarrow x, x : x \quad \vdash n f (m f x) : x \\ \text{L} \circ \quad \quad " \quad \quad \quad \quad \quad \vdash m f x : x \end{array}$$

$\vdash \text{mult} : \text{nat} \rightarrow \text{nat} \rightarrow \text{nat}$

$$\begin{array}{c} \text{L} \circ n : \text{nat}, m : \text{nat}, f : x \rightarrow x \quad \vdash n(m f) : x \rightarrow x \\ \text{L} \circ \quad \quad " \quad \quad \quad \quad \quad \vdash m f : x \rightarrow x \end{array}$$

## II. Types somme

Q2.1. Termes :  $M, N ::= \dots \mid g M \mid d N \mid \text{"match } M \text{ with } g x \rightarrow N \mid d y \rightarrow N \text{"}$   
 Réductions :

$$\frac{M \rightarrow_{\beta} M'}{g M \rightarrow_{\beta} g M'} \quad \frac{M \rightarrow_{\beta} M'}{d M \rightarrow_{\beta} d M'}$$

$$\overline{( \text{match } g M \text{ with } g x \rightarrow N \mid d y \rightarrow N ) \xrightarrow{\beta} N[M/x] }$$

$(\text{match } M \text{ with } g \approx \rightarrow N \mid d.y \rightarrow N') \xrightarrow{\beta} N'[M/y]$

$M \xrightarrow{\beta} M'$

$\text{match } M \text{ with } g \approx \rightarrow N \mid d.y \rightarrow N' \xrightarrow{\beta} \text{match } M \text{ with } g \approx \rightarrow N \mid d.y \rightarrow N'$   
 $N \xrightarrow{\beta} N''$

$\text{match } M \text{ with } g \approx \rightarrow N \mid d.y \rightarrow N' \xrightarrow{\beta} \text{match } M \text{ with } g \approx \rightarrow N' \mid d.y \rightarrow N'$   
 $N' \xrightarrow{\beta} N''$

$\text{match } M \text{ with } g \approx \rightarrow N \mid d.y \rightarrow N' \xrightarrow{\beta} \text{match } M \text{ with } g \approx \rightarrow N \mid d.y \rightarrow N''$

Types :  $A, B ::= \dots \mid A+B$

$$\text{Typeage : } \frac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash g M : A+B} \quad \frac{\Gamma \vdash M : B}{\Gamma \vdash d M : A+B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : B+C \quad \Gamma, x:C \vdash N : A}{\Gamma \vdash \text{match } M \text{ with } g \approx \rightarrow N \mid d.y \rightarrow N' : A}$$

### III Normalisation faible

Q3.1. On a :  $M$  fortement normalisant  $\Rightarrow M'$  fortement normalisent.

Réiproquement, supposons  $M'$  fortement normalisant.

Si  $M$  admet une divergence pour  $\rightarrow$  alors par déterminisme la divergence passe par  $M'$  et donc on a une divergence pour  $M'$ . Absurde.

Q3.2 Non !  $M = F_\Omega \xrightarrow{\beta} F_\Omega$  avec  $\Omega \xrightarrow{\beta} \omega$

$$M' \xrightarrow{\beta} y.y.y$$

$\downarrow \beta$

M a une divergence alors que  $M'$  non.

Q3.3. Pour tout type  $A$ ,

(CR1') si  $M \in R_A$  alors  $M$  termine pour  $\rightarrow$

(CR2') si  $M \in R_A$  et  $M \rightarrow M'$  alors  $M' \in R_A$ .

(CR3') si  $M \rightarrow M' \Rightarrow M' \in R_A$  alors  $M \in R_A$

Par induction sur A (2 cas) :

- Si on a un type de base X
  - (CR1') par définition
  - (CR2') par définition & préservation du type
  - (CR3') par induction bien fondée sur  $\vdash$  car  $\vdash$  terminé.
- Si on a un type  $A \rightarrow B$ 
  - (CR1'') Gm a  $x \in R_A$  pour  $x$  arbitraire.  
Or,  $M[x] \in R_B$  d'où  $M[x]$  fortement normalisant.  
Si  $M$  diverge en  $M = M_1 \vdash M_2 \vdash M_3 \dots$   
alors  $M[x] \vdash M_2[x] \vdash \dots$  absurde!

(CR2'') Soit  $M \in R_{A \rightarrow B}$  et  $M \vdash M'$ . Montrons que  $M' \in R_{A \rightarrow B}$ .  
Soit  $N \in R_A$ . Montrons que  $M'[N] \in R_B$ .  
Or,  $M[N] \vdash M'[N]$  d'où, par (CR2') pour B,  $M'[N] \in R_B$ .  
Gm conclut  $M' \in R_{A \rightarrow B}$ .

(CR3'') Supposons  $M \vdash M' \Rightarrow M' \in R_{A \rightarrow B}$ .

Montrons  $M \in R_{A \rightarrow B}$ .

Par hyp d'induction bien fondée,

si  $N \vdash N'$  alors  $M[N] \in R_B$ .

Montrons  $M[N] \in R_B$ .

Par (CR3') pour B, alors montrons que

$M[N] \vdash P$  et  $P \in R_B$ .

Gm a 2 cas :

- Soit  $M = \lambda z. M_0$  et  $P = M_0[N/z]$  donc ok
- Soit  $P = M'[N]$  alors par hyp  $M' \in R_{A \rightarrow B}$   
et donc  $M'[N] \in R_B$ .

Q3.4.

$$\frac{(2x. M) N \subset M[\forall x]}{M N \subset M' N} \quad \frac{M \hookrightarrow M'}{M N \subset M' N} \quad \frac{N \subset N'}{N N \subset N' N'}$$

Q3.5. • Gm a bien  $\subset \subseteq \rightarrow_p$ .

• Gm a bien que  $\subset$  est déterministe.

• Si  $M \subset M'$  alors  $M N \subset M' N$  pour tout N.

Gm peut donc appliquer le théorème.

Q 3.6. On ne peut pas utiliser le théorème ci-dessus car les formes normales pour  $\text{Co}$  ne sont pas nécessairement des formes normales pour  $\rightarrow_\beta$ . Exemple :  $(\lambda x. x)(y z)$  est

Q 3.7. Notez que la relation  $\text{Co}$  n'est pas complète. Il faut ajouter d'autres règles pour qu'elle le devienne (et qu'elle reste déterministe).