

Algèbre 1.

Fiche de synthèse

Hugo SALOU

I. Sous-groupes.

- Centre d'un groupe :

$$Z(G) := \{g \in G \mid \forall x \in G, gx = xg\}$$

C'est un sous-groupe de G .

- Sous-groupe engendré par X :

$$\langle X \rangle := \bigcap_{X \subseteq H \leq G} H.$$

C'est un sous-groupe de G et il contient X .

- Index de H dans G :

$$\begin{aligned} [G : H] &:= \#\{aH \mid a \in G\} \\ &= \#\{Ha \mid a \in G\} \end{aligned}$$

Pour $H = \{e\} =: 1$, on a $[G : 1] = |G|$.

- Théorème de Lagrange :**

$$[G : 1] = [G : H] \cdot [H : 1]$$

Mieux : si $H \succeq K$ alors

$$[G : K] = [G : H] \cdot [H : K]$$

- Sous-groupe distingué $N \triangleleft G$:

$$\forall g \in G, \quad gNg^{-1} = N$$

Mieux : on n'a que l'inclusion $gNg^{-1} \subseteq N$ à démontrer quel que soit $g \in G$.

- Sous groupe simple S : avoir $X \triangleleft S$ implique alors $X = 1$ ou $X = G$.

- distingué \times sous-groupe = sous-groupe

- distingué \times distingué = distingué

- Sous-groupe distingué engendré par X :

$$\langle X \rangle_{\text{distingué}} := \left\langle \bigcup_{g \in G} gXg^{-1} \right\rangle.$$

C'est un sous-groupe distingué de G et il contient X .

- $\ker u \triangleleft G$ où $u : G \rightarrow H$ est un morphisme.

Mieux : c'est une équivalence

$$\text{noyau} \longleftrightarrow \text{sg. distingué}.$$

II. Quotient & isomorphisme.

- Quotient : si $N \triangleleft G$ alors

$$G/N := \{aN \mid a \in G\}$$

est un groupe. On ajoute la *projection canonique* :

$$\begin{aligned} \pi : G &\longrightarrow G/N \\ g &\longmapsto gN \end{aligned}$$

On a $\ker(\pi) = N$.

- Factorisation d'un morphisme par le quotient :** si $u : G \rightarrow G'$ et $u(N) = 1$ (i.e. $\ker u = N$) alors il existe un unique $\bar{u} : G/N \rightarrow G'$.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{u} & G' \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{u} & \\ G/N & & \end{array}$$

- Premier théorème d'isomorphisme.**

« factorisation de morphismes »

$$G/(\ker u) \cong \text{im } u$$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{u} & G' \\ \pi \downarrow & & \uparrow \iota \\ G/(\ker u) & \xrightarrow{\quad} & \text{im } u \end{array}$$

- Second théorème d'isomorphisme.**

« théorème d'isomorphisme »

Pour $H \preceq G$ et $N \triangleleft G$,

$$H/(H \cap N) \cong HN/N$$

- Troisième théorème d'isomorphisme.**

« quotient de quotient par quotient »

Pour $H \triangleleft G$ et $N \triangleleft G$,

$$G/H \cong (G/N)/(H/N)$$

III. Actions de groupes.

- Action de groupe : $\alpha : G \rightarrow \text{Bij}(X)$
- Orbite : $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\} \subseteq X$.

- Stabilisateur : $\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \preceq G$
et $\text{Stab}(g \cdot x) = g(\text{Stab } x)g^{-1}$
- Points fixes de $g \in G$:

$$\text{Fix}(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\} \subseteq X$$

et, l'ensemble des points fixes de l'action :

$$X^G = \bigcap_{g \in G} \text{Fix}(g)$$

On dit qu'une action est :

- *fidèle* si $\ker \alpha = \{\text{id}\}$ « la seule action qui fixe tout le monde est l'identité » (en passant au quotient, on résout ce problème) ;
- *libre* si $\forall g \neq 1_G, \text{Fix}(g) = \emptyset$;
- *transitive* s'il n'y a qu'une orbite :

$$\forall x, y \in X, \exists g \in G, y = g \cdot x ;$$

- *simplement transitive* : libre et transitive (i.e. unicité de g au dessus).

Actions classiques de G sur G :

- *translation gauche* : $g \cdot x := gx$.
→ libre et transitive
- *conjugaison* : $g \cdot x := gxg^{-1}$.

Théorème de Cayley. Pour G un groupe d'ordre fini $n \in \mathbb{N}^*$, on a que G est isomorphe à un sous-groupe de \mathfrak{S}_n .

Idée : $G \hookrightarrow \mathfrak{S}_n$ et 1er théorème d'isomorphisme.

- Classe de conjugaison : $G \cdot x$ pour la conjugaison
- Centralisateur : $\text{Stab } x$ pour la conjugaison

Normalisateur :

$$N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\} \triangleleft G$$

C'est le plus grand s.g.dist. contenant H .