Logique — TD n° 5 — Hugo SALOU

Exercice 1. Théorie des graphes.

Q1. pas de boucles : $\forall x \quad \neg R(x,x)$

non-orienté : $\forall x \, \forall y \quad R(x,y) \longleftrightarrow R(y,x)$.

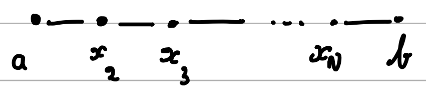
(l'implication simple suffit).

D'où $\mathrm{Th}(\text{Graphes non-orientés simples}) = \{ \forall x \quad \neg R(x,x),$
$\forall x \forall y \quad R(x,y) \longleftrightarrow R(y,x) \}$.

Q2. On pose $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$ qui est une théorie sur $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$.

Q3. $\varphi_n = \overbrace{\forall x_1 \dots \forall x_{n-1}}^{\text{pour } n \text{ fixé}} \neg(R(a, x_1) \wedge R(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge R(x_{n-1}, b))$

Q4. Oui. On considère $G = (V, E)$ décrit ci-dessous.
Soit $N = \max\{n_1, \dots, n_k\} + 1$.



Il est connexe, simple, non-orienté et non-vide.

Et, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, il n'y a pas de chemins de long° n_k entre a et b dans G.

Q5. Soit $\mathcal{T} \supseteq A$ une théorie des graphes connexes.

On pose $\mathcal{T}' := \mathcal{T} \cup \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Toute partie finie de $\mathcal{T}'$ est satisfiable.
Par compacité, on a que $\mathcal{T}$ est satisfiable. Absurde car seul un graphe vide satisfait $\mathcal{T}'$.

Exercice 2. Langage sans fonction.

Q1. Par récurrence sur n, montrons que :

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y_1 \cdots \exists y_k \; A[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k]$$

est un théorème ssi elle est satisfaite dans toute interprétation de card° au plus $n+m$.

- Pour $n=0$, $\overbrace{\exists y_1 \cdots \exists y_k \; A[y_1, \dots, y_k]}^{\varphi}$ est un théorème ssi

$$\forall \mathcal{M} \text{ modèle}, \forall e, \quad \mathcal{M}, e \models \varphi$$

Si on a un modèle de card $> m$, on peut le décomposer en modèles de card $\leq k$ par dénombrement.
D'où l'équivalence.

-

Q2. Dans $\mathcal{L} = \{c_1, \dots, c_m, f, =\}$,

on considère $A =$ " $f(y_1, y_2) = f(y_2, y_1) \wedge \neg(y_1 = y_2) \wedge \bigwedge_{i=3}^{k-1} (y_i = y_{i+1})$ ".

Dans le modèle

$$\mathcal{M} : \{0,1\}, \quad f_{\mathcal{M}} = \text{xor}, \quad c_i = 0$$

la formule A est fausse.

Exercice 3. Densité.

Q1. On a $(\mathbb{Q}, <)$ et $(\mathbb{R}, <)$ qui sont non-isomorphes.

Q2

Soit $\varphi := \forall x, \exists y \quad r(x,y)$.

Dans $(\mathbb{R}, <)$, la formule φ est vérifiée
Dans $([0,1], <)$ la formule φ ne l'est pas.

D'où T n'est pas complète.

Q3. Soit un modèle $\mathcal{M}$.

Soient $x, y \in |\mathcal{M}|$ tels que $x < y$ (par A_1).

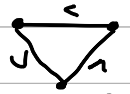
Construisons par récurrence des éléments de $\mathcal{M}$.

- on commence avec x, y
- par A_4, et comme $x < y$, il existe z tq $x < z < y$
- par A_4, ... $x < z$ .... w ..... $x < w < z$

Si $w \in \{x, y, z\}$, alors par A_2 et A_3 on a une absurdité.

D'où T n'admet pas de modèle fini.

Q4. T_1 : $(\{1\}, <)$
T_2 : $(\{1\}, \leq)$
T_3 :



T_4 $(\{0,1\}, <)$

Exercice 4. Modèle infini.

On pose $\varphi_k = \exists x_1 \dots \exists x_k \neg(x_1 = x_2) \wedge \dots \wedge \neg(x_{k-1} = x_k)$.

Toute sous-théorie finie A de $T' := T \cup \{\varphi_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ a un modèle (de card $>$ $\max\{k \in \mathbb{N} \mid \varphi_k \in A\} \in \mathbb{N}$ avec $\max \emptyset = 0$).

Par compacité, T' admet un modèle. S'il est fini de cardinal k, absurde car $\varphi_k \in T'$. Il admet donc un modèle infini $\mathcal{M}_\infty$.

La théorie T admet donc un modèle infini $\mathcal{M}_\infty$.

TD n° 6

Exercice 1. Contorsionnisme.

Q1.

$$\mathrm{Th}(\text{Groupes abéliens sans torsion}) := \left\{ \begin{array}{l} \forall x\ \exists y \quad x+y = y+x = 0, \\ \forall x\ \forall y\ \forall z \quad (x+y)+z = x+(y+z), \\ \forall x \quad x+0 = 0+x = x, \\ \forall x\ \forall y \quad x+y = y+x \end{array} \right\} \cup \left\{ \forall x\ \neg(x=0) \to \neg(\underbrace{x+x+\dots+x}_{n}=0) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

(où $(a=b=c) := a=b \wedge b=c$)

Q2. Supposons qu'il existe une théorie $\mathcal{T}$ des groupes abéliens avec torsion.

On considère :

$$\mathcal{T}' := \mathcal{T} \cup \{ \underbrace{\forall x \quad x \neq 0 \to n \cdot x \neq 0}_{\varphi_n} \mid n \in \mathbb{N}^* \}$$

Toute partie finie $T \subseteq \mathcal{T}'$ est satisfiable.
En effet, soit $n = \max\{n \in \mathbb{N}^* \mid \varphi_n \in T\} < +\infty$,
puis $G := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p > n$ et p premier.

Par compacité, $\mathcal{T}'$ est satisfiable.
Absurde car il existe $x \in G$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $n \cdot x \neq 0$ et $x \neq 0$.

Q3. avec torsion $\neq$ sans torsion

Exercice 2. Formules closes.

On a : $T_{\mathcal{M}} = \{ F \in \mathcal{F} \mid \mathcal{M} \models F \}$

Soit $F \in \mathcal{F}$.

Si $\mathcal{M} \models F$ alors $\dfrac{}{T_{\mathcal{M}} \models F}\,ax$ car $F \in T_{\mathcal{M}}$.

Si $\mathcal{M} \not\models F$ alors $\mathcal{M} \models \neg F$ et $\dfrac{}{T_{\mathcal{M}} \vdash \neg F}\,ax$ car $\neg F \in T_{\mathcal{M}}$.

De plus, si $T_{\mathcal{M}} \vdash \bot$ alors, par correction, $\mathcal{M} \models \bot$ absurde.
car $\mathcal{M}$ modèle de $T_{\mathcal{M}}$.

Exercice 3.

Q1 Pour $n=0$, on a : $P_0 \vdash S0 \neq 0$ par A_1.

Pour $n>0$, on a :

par hyp de récurrence

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash A_3$}
\RightLabel{$\forall_e$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \forall y\ S^{n+1}0 = Sy \to S^n0 = y$}
\RightLabel{$\forall_e$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash S^{n+1}0 = S^n0 \to S^n0 = S^{n-1}0$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash S^{n+1}0 = S^n0$}
\RightLabel{$\to_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma := P_0, S^{n+1}0 = S^n0 \vdash S^n0 = S^{n-1}0$}
\AxiomC{$P_0 \vdash S^n0 \neq S^{n-1}0$}
\RightLabel{aff}
\UnaryInfC{$P_0, S^{n+1}0 = S^n0 \vdash S^n0 \neq S^{n-1}0$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$P_0, S^{n+1}0 = S^n0 \vdash \bot$}
\UnaryInfC{$P_0 \vdash S^{n+1}0 \neq S^n0$}
\end{prooftree}
\quad (*)
$$

Q2. $PA \vdash \forall x \quad Sx \neq 0$.

On a :

- $P_0 \vdash S0 \neq 0$
- et :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash A_4$}
\RightLabel{$\forall_e \times 2$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash S^2x = Sx \to Sx = x$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash S^2x = Sx$}
\RightLabel{$\to_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash Sx = x$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash Sx \neq x$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma := PA, Sx \neq x, S^2x = Sx \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg_i$}
\UnaryInfC{$PA, Sx \neq x \vdash S^2x \neq Sx$}
\RightLabel{$\to_i$}
\UnaryInfC{$PA \vdash Sx \neq x \to S^2x \neq Sx$}
\end{prooftree}
$$

D'où, par schéma inductif, on a $\forall x,\ Sx \neq x$.

Q3. On pose $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ où $S\omega := \omega$ avec $\omega \times 0 := 0$.

$\omega \times x := \omega$

$\omega + x := \omega$

(& commutativité)

$(A_1) - (A_5)$ pas de pb avec ω

(A_6) ok par déf.

(A_7) $\quad 0 \times \underbrace{S\omega}_{\omega} = (0 \times \omega) + 0 = 0$

$$\omega \times (Sy) = \underbrace{(\omega \times y)}_{= 0 \text{ ou } \omega} + \omega = \omega$$

D'où $\overline{\mathbb{N}} \models P_0$ et $\overline{\mathbb{N}} \not\models \forall x\ Sx \neq x$ car $S\omega = \omega$.

Exercice 4.

Q1. On applique le théorème de Löwenheim-Skolem pour obtenir un modèle de card $> \aleph_0$.

Q2. Soit, par l'absurde, $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{M}$ un $\mathcal{L}$-isomorphisme.

$$\varphi(0) = (0,0)$$
$$\varphi(1) = \varphi(S_{\mathbb{N}} 0) = S_{\mathcal{M}} \varphi(0) = S_{\mathcal{M}}(0,0) = (0,1)$$
$$\varphi(2) = \varphi(S_{\mathbb{N}} 1) = S_{\mathcal{M}} \varphi(1) = S_{\mathcal{M}}(0,1) = (0,2)$$
$$\varphi(3) = \varphi(S_{\mathbb{N}} 2) = S_{\mathcal{M}} \varphi(2) = S_{\mathcal{M}}(0,2) = (0,3)$$

Ainsi, $\operatorname{im} \varphi = \{0\} \times \mathbb{N} \neq |\mathcal{M}|$. Absurde.

On vérifie que $\mathcal{M}$ vérifie $(A_1) - (A_7)$.

Q3. Soit $F := \forall x\ \forall y\quad x + y = y + x$.

On a $\mathbb{N} \models F$ mais $\mathcal{M} \not\models F$ car $(1,1) + (2,1) = (1,2)$

et $(2,1) + (1,1) = (2,2)$.

D'où P_0 n'est pas complète.

Exercice 5. Ensembles définissables.

Q1. $F_{2\mathbb{N}}(x) := \exists y \quad x = y + y$.

Q2. $F_{\mathbb{P}}(x) := \forall y \; (\exists z \quad x = y \times z) \to (y = x \;\lor\; y = (S0))$

Q3. (a) $\forall x \quad F_E(x) \to F_{E'}(x)$

(b) $F_E(x) \land \forall y < x \; \neg F_E(y)$ $\quad$)) $G(x)$

(c) $(\exists x \quad F_E\, x) \land (\forall x \quad F_E(x) \to \exists y > x \quad F_E(y))$

Q4. $P_E(y) := (\exists x \le y \quad F_E(x)) \to \exists x \quad G(x) \land x \le y$

Q5.

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P_0 \vdash A_4}\,\text{ax}}{P_0 \vdash 0+0=0}}{P_0 \vdash \exists z \; 0 + z = 0}$$

(b) Long et se fait par induction sur y. (fait en cours)

(c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x+y=0}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash S(z+y) \neq 0}\,A_1}{\Gamma \vdash Sz + y \neq 0}\,A_5}{\Gamma \vdash x+y \neq 0}}{\Gamma := P_0, \dots, x+y=0,\; x = Sz \;\vdash \bot}}{P_0, \exists y \;\; x+y=0,\; x \neq 0,\; x = Sz \;\vdash \bot}\,\exists e}{P_0, \exists y \;\; x+y=0,\; x\neq 0 \;\vdash \bot}\,A_2}{P_0, \exists y \quad x+y=0 \;\vdash\; x = 0}\,\bot_c$$

(d) On utilise le schéma inductif:

- $P_E(0)$: $F_E(0) \to \underbrace{F_E(0)}_{\text{hyp}} \land \underbrace{0 \le 0}_{(a)} \land \underbrace{\forall y < 0 \; \neg F_E(0)}_{\neg(\underbrace{y + Sz}_{S(y+z) \text{ par } A_5} = 0) \to A_1}$

- $P_E(n) \to P_E(n+1)$

$$\exists y \le n+1 \quad F_E(y) \begin{cases} \to \text{si } y \le n \to P_E(n) \text{ et } n \le n+1 \\ \to \text{sinon } y = n+1 \to G(n+1) \land n+1 \le n+1. \end{cases}$$

↳ car sinon, on était dans l'autre cas.

Q6. $(\exists x \ F_E(x)) \to \exists y \ G(y)$

Soit $x \in E$. Par Q5, $\exists z, G(z) \wedge z \leq x$.
D'où $G(y)$.

Q7.