

# TD n° 1

## I. Savoir lire la définition.

Ce sont des mesures de sécurité. Donc :

$$(\lambda y. x y) [y/x] \neq \lambda y. x y$$

$$(\lambda y. x y) [y/y] \neq \lambda y. y y$$

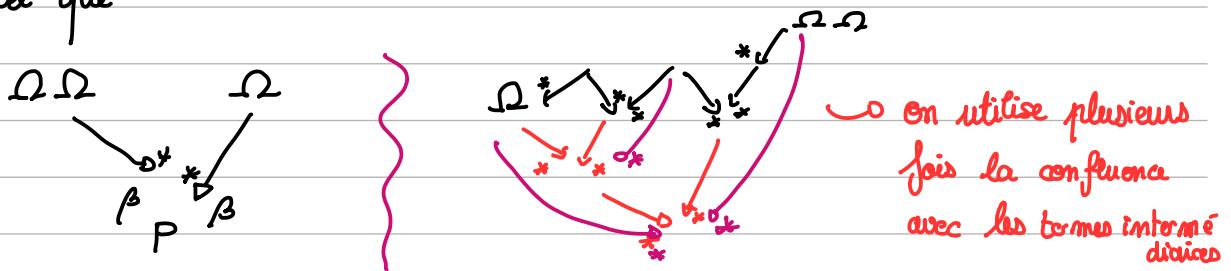
$$\text{mo } \Delta x \neq y$$

$$\text{mo } \Delta y \notin \text{cl}(N).$$

## II. Classes d'équivalence pour $=_\beta$ .

Q2.1.  $\Omega \Omega \xrightarrow{\beta} \Omega \Omega$  et  $\Omega \xrightarrow{\beta} \Omega$ .

Ainsi, si  $\Omega \Omega =_\beta \Omega$  alors, par confluence, il existe M un 2-terme tel que



C'est absurde car on aurait  $\Omega \Omega = P = \Omega$  ( $\Omega \Omega \xrightarrow{\beta} P$  implique  $P = \Omega \Omega$  car il n'y a que 2 redex).

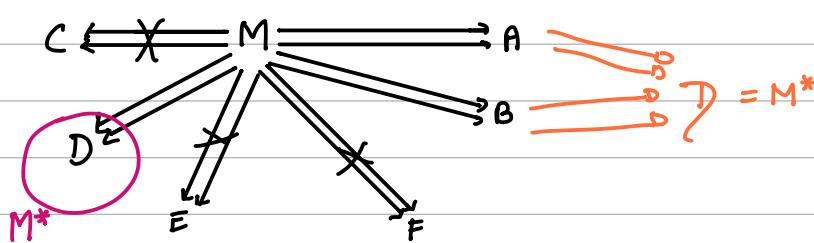
Q2.2. Soit N une forme normale avec  $x \notin V\ell(N)$

On pose :

$$M = (\lambda x. N) \Omega.$$

## III Propriété du diamant pour les réductions parallèles

### Q3.1.



Par induction (3 cas)

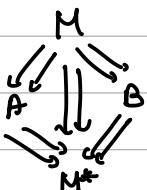
Q3.2.  $x^* := x$

$$(\lambda x. M)^* := \lambda x. (M^*)$$

$$(M N)^* := \begin{cases} P[N^*/x] & \text{si } M = \lambda x. P \\ M^* N^* & \text{sinon} \end{cases}$$

Lemme : si  $M \rightarrow N$  alors  $N \rightarrow M^*$  (par induction sur  $M$ )

D'où



On a donc la propriété du diamant  
 $\rightarrow_{\text{con}} \Rightarrow$  donc la confluence de  $\rightarrow_p$ .

#### IV Normalisation faible et forte en $\lambda$ -calcul pur.

Q4.1. Les propriétés (1), (2) et (3) restent vraies  
La propriété (4) ne l'est pas:

on a

$$M := (\lambda x. x) M' \rightarrow M'$$

mais

$$\begin{array}{ccc} (y y)[M/y] & \rightarrow & (y y)[M'/y] \\ \parallel & & \parallel \\ M & & M' n' \end{array}$$

Q4.2. Par induction sur  $M \rightarrow M'$  (4 cas) :

\* Cas  $(\lambda x. M) N \rightarrow M[N/x]$ . Supposons  $x \in \text{nf}(M)$  et  $N \in \mathcal{I}$ . (\*)

Par induction sur  $M$ , il y a 3 cas :

- si  $M = y$  alors

- si  $y \neq x$  alors  $M[N/x] = M \in \mathcal{I}$ .

- si  $y = x$  alors  $M[N/x] = N \in \mathcal{I}$ .

- si  $M = P Q$  alors par hypothèse d'induction

- on a :  $P[N/x] \in \mathcal{I}$  et  $Q[N/x] \in \mathcal{I}$

- d'où  $(P Q)[N/x] \in \mathcal{I}$ . par (ii)

- si  $M = \lambda y. P$  avec  $y \in \text{nf}(P)$  alors  $M[N/x] \in \mathcal{I}$  car  $P[N/x] \in \mathcal{I}$ .

\* Cas  $M N \rightarrow M' N$  avec  $M \rightarrow M'$ . Par hypothèse d'induction  $M' \in \lambda I$ .  
avec  $M \in \lambda I$ ,  $N \in \lambda I$ .

D'où  $M' N \in \lambda I$  par (ii).

\* Cas  $M N \rightarrow M N'$  avec  $N \rightarrow N'$ . Par hypothèse d'induction  $N' \in \lambda I$ .  
avec  $M \in \lambda I$ ,  $N \in \lambda I$ .

D'où  $M N' \in \lambda I$  par (ii).

\* Cas  $\lambda x. M \rightarrow \lambda x. M'$  avec  $M \rightarrow M'$  et  $M \in \lambda I$ ,  $(\lambda x. M) \in \lambda I$ ,  $M' \in \lambda I$   
Et,  $v\ell(M') = v\ell(M)$  (preuve par induction) par hyp. d'ind°  
d'où  $(\lambda x. M') \in \lambda I$  car  $x \in v\ell(M)$ .

Q4.3. Supposons avoir une divergence issue de  $(\lambda x. M) N$ .

On a trois cas :

- soit  $N \uparrow$  donc  $N_i \rightarrow N_{i+1}$  avec  $N_0 = N$  d'où  $M[N/x] \xrightarrow{*} M[N_{i+1}/x]$  et donc  $M[N/x] \uparrow$  avec au moins un pas  
car  $x \in v\ell(M)$
- soit  $M \uparrow$  donc  $M_i \rightarrow M_{i+1}$  avec  $M_0 = M$  d'où  $M_i[N/x] \xrightarrow{*} M_{i+1}[N/x]$  et donc  $M[N/x] \uparrow$
- soit  $M[N/x] \uparrow$

Dans tous les cas,  $M[N/x] \uparrow$

Q4.4. Non :  $(\lambda x. y) \Omega \uparrow$  mais  $y[\Omega/x] = y \neq$

can  $\in \lambda I$   
à toute étape

Q4.5. Mon instinct me dit non, mais vu qu'on ne peut pas faire "disparaître" une divergence, j'ai envie de dire oui.

Si on a une divergence, alors on ne peut pas l'éviter. Inversement, si on n'a pas de divergence, on ne peut pas aller dans une divergence.

En gros : tous les calculs dans  $\lambda I$  sont utiles.

## V Des 2-termes qui calculent : couples et prédecesseurs

Q5.1. On définit  $\text{succ} := \lambda u. \lambda f. \lambda x. f(u f x)$ .

$$\begin{aligned} \text{succ } n &= (\lambda u f x. f(u f x))(\lambda f x. f^n x) \xrightarrow{*} \lambda f x. f((\lambda f x. f^n x) f x) \\ &\xrightarrow{*} \lambda f x. f(\lambda x. f^n x x) \\ &\xrightarrow{*} \lambda f x. f(f^n x) = \lambda f x. f^{n+1} x = \underline{n+1}. \end{aligned}$$

D'où  $\text{succ } n \xrightarrow{*} \underline{n+1}$

Q5.2. On pose  $\text{fst} := \lambda c. c T$  et  $\text{snd} := \lambda c. c F$ .

$$\text{fst } (M, N) = (\lambda c. c (\lambda x. y. x)) (\lambda f. (f M) N)$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda f. (f M) N) (\lambda x. y. x)$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda x. y. x) M N$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda y. M) N$$

$$\xrightarrow{\beta} M$$

$$\text{snd } (M, N) = (\lambda c. c (\lambda x. y. y)) (\lambda f. (f M) N)$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda f. (f M) N) (\lambda x. y. y)$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda x. y. y) M N$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda y. y) N$$

$$\xrightarrow{\beta} N$$

Q5.3. On pose :  $\text{Next} := \lambda c. (\text{succ}(\text{fst } c), \text{fst } c)$

$$\text{Next } (\underline{m}, \underline{k}) \xrightarrow{\beta} (\text{succ } (\text{fst } (\underline{m}, \underline{k})), \text{fst } (\underline{m}, \underline{k})) \quad \text{par Q5.2}$$

$$\xrightarrow{\beta^*} (\text{succ } \underline{m}, \text{fst } (\underline{m}, \underline{k}))$$

$$\xrightarrow{\beta^*} (\underline{m+1}, \text{fst } (\underline{m}, \underline{k}))$$

$$\xrightarrow{\beta^*} (\underline{m+1}, \underline{m})$$

par Q5.1

par Q5.2

Q5.4. On pose  $\text{pred} := \lambda n. \text{snd } (\underline{n} \text{ Next } (\underline{0}, \underline{0}))$ .

## VII Des 2-termes qui bouclent

Q6.1.  $\forall M \xrightarrow{\beta} (\lambda x. M(x x)) (\lambda x. M(x x))$

$$\xrightarrow{\beta} M ((\lambda x. M(x x)) (\lambda x. M(x x)))$$

$$\xleftarrow{\beta} M (\forall M)$$

$$\text{D'où } M(\forall M) =_{\beta} \forall M.$$

Q6.2. On pose :

$$F := \lambda f. \lambda n. \text{if zero?}(n) \text{ then } 1$$

$$\text{else mult } n \text{ } (f (\text{pred } n))$$

puis

$$\text{fact} := \forall F.$$

Q6.3. On pose  $\Upsilon := \lambda f. f(f x)$  puis  $\Gamma := \lambda x. \Upsilon \Upsilon$ .

Gm a:

$$\Gamma = \lambda x. \gamma \gamma$$

degré de scissionnement:

2

$$\rightarrow_{\beta} \lambda x. \gamma (\Gamma_x)$$

3

$$\rightarrow_{\beta} \lambda x. \gamma (x(x x))$$

4

$$\rightarrow_{\beta} \lambda x. (x(x x))(x(x x)) \infty$$

7

Q6.1. Dans l'exemple, on fait des  $\beta$ -réductions dans une abstraction.  
En revanche, on ne peut pas faire ça.

# TD n° 2

## I. Types des 2-termes

1.1. Une question de cours du 6 mars 2024.

$$(x \rightarrow x) \rightarrow (x \rightarrow x) \quad (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad \text{où } X = A \rightarrow B$$

Q1.1.  $(\lambda f. f(f z)) (\lambda x. \lambda y. x y)$  de taille 12  
 $\xrightarrow{\beta} (\lambda x. \lambda y. x y) ((\lambda x. \lambda y. x y) z)$  de taille 13

## 1.2. Entiers de Church

Q1.2.  $\text{succ} := \lambda n. \lambda f x. f(n f x)$

$$\text{add} := \lambda n. \lambda m. \lambda f x. n f (m f x)$$

$$\text{mult} := \lambda n. \lambda m. \lambda f. n(m f)$$

Q1.3.  $\vdash \text{succ} : \text{nat} \rightarrow \text{nat}$

$$\begin{array}{c} \text{L} \circ n : \text{nat}, f : x \rightarrow x, x : x \quad \vdash f(n f x) : x \\ \text{L} \circ \quad \quad " \quad \quad \quad \quad \quad \vdash n f x : x \end{array}$$

$\vdash \text{add} : \text{nat} \rightarrow \text{nat} \rightarrow \text{nat}$

$$\begin{array}{c} \text{L} \circ n : \text{nat}, m : \text{nat}, f : x \rightarrow x, x : x \quad \vdash n f (m f x) : x \\ \text{L} \circ \quad \quad " \quad \quad \quad \quad \quad \vdash m f x : x \end{array}$$

$\vdash \text{mult} : \text{nat} \rightarrow \text{nat} \rightarrow \text{nat}$

$$\begin{array}{c} \text{L} \circ n : \text{nat}, m : \text{nat}, f : x \rightarrow x \quad \vdash n(m f) : x \rightarrow x \\ \text{L} \circ \quad \quad " \quad \quad \quad \quad \quad \vdash m f : x \rightarrow x \end{array}$$

## II. Types somme

Q2.1. Termes :  $M, N ::= \dots \mid g M \mid d N \mid \text{"match } M \text{ with } g x \rightarrow N \mid d y \rightarrow N \text{"}$   
 Réductions :

$$\frac{M \rightarrow_{\beta} M'}{g M \rightarrow_{\beta} g M'} \quad \frac{M \rightarrow_{\beta} M'}{d M \rightarrow_{\beta} d M'}$$

$$\overline{( \text{match } g M \text{ with } g x \rightarrow N \mid d y \rightarrow N ) \xrightarrow{\beta} N[M/x] }$$

$(\text{match } M \text{ with } g \approx \rightarrow N \mid d.y \rightarrow N') \xrightarrow{\beta} N'[M/y]$

$M \xrightarrow{\beta} M'$

$\text{match } M \text{ with } g \approx \rightarrow N \mid d.y \rightarrow N' \xrightarrow{\beta} \text{match } M \text{ with } g \approx \rightarrow N \mid d.y \rightarrow N'$   
 $N \xrightarrow{\beta} N''$

$\text{match } M \text{ with } g \approx \rightarrow N \mid d.y \rightarrow N' \xrightarrow{\beta} \text{match } M \text{ with } g \approx \rightarrow N' \mid d.y \rightarrow N'$   
 $N' \xrightarrow{\beta} N''$

$\text{match } M \text{ with } g \approx \rightarrow N \mid d.y \rightarrow N' \xrightarrow{\beta} \text{match } M \text{ with } g \approx \rightarrow N \mid d.y \rightarrow N''$

Types :  $A, B ::= \dots \mid A+B$

$$\text{Typeage : } \frac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash g M : A+B} \quad \frac{\Gamma \vdash M : B}{\Gamma \vdash d M : A+B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : B+C \quad \Gamma, x:C \vdash N : A}{\Gamma \vdash \text{match } M \text{ with } g \approx \rightarrow N \mid d.y \rightarrow N' : A}$$

### III Normalisation faible

Q3.1. On a :  $M$  fortement normalisant  $\Rightarrow M'$  fortement normalisent.

Réiproquement, supposons  $M'$  fortement normalisant.

Si  $M$  admet une divergence pour  $\rightarrow$  alors par déterminisme la divergence passe par  $M'$  et donc on a une divergence pour  $M'$ . Absurde.

Q3.2 Non !  $M = F_\Omega \xrightarrow{\beta} F_\Omega$  avec  $\Omega \xrightarrow{\beta} \omega$

$$M' \xrightarrow{\beta} y.y.y \quad M \text{ a une divergence alors que } M' \text{ non.}$$

Q3.3. Pour tout type  $A$ ,

(CR1') si  $M \in R_A$  alors  $M$  termine pour  $\rightarrow$

(CR2') si  $M \in R_A$  et  $M \rightarrow M'$  alors  $M' \in R_A$ .

(CR3') si  $M \rightarrow M' \Rightarrow M' \in R_A$  alors  $M \in R_A$

Par induction sur A (2 cas) :

- Si on a un type de base X
  - (CR1') par définition
  - (CR2') par définition & préservation du type
  - (CR3') par induction bien fondée sur  $\vdash$  car  $\vdash$  terminé.
- Si on a un type  $A \rightarrow B$ 
  - (CR1'') Gm a  $x \in R_A$  pour  $x$  arbitraire.  
Or,  $M[x] \in R_B$  d'où  $M[x]$  fortement normalisant.  
Si  $M$  diverge en  $M = M_1 \vdash M_2 \vdash M_3 \dots$   
alors  $M[x] \vdash M_2[x] \vdash \dots$  absurde!

(CR2'') Soit  $M \in R_{A \rightarrow B}$  et  $M \vdash M'$ . Montrons que  $M' \in R_{A \rightarrow B}$ .  
Soit  $N \in R_A$ . Montrons que  $M'[N] \in R_B$ .  
Or,  $M[N] \vdash M'[N]$  d'où, par (CR2') pour B,  $M'[N] \in R_B$ .  
Gm conclut  $M' \in R_{A \rightarrow B}$ .

(CR3'') Supposons  $M \vdash M' \Rightarrow M' \in R_{A \rightarrow B}$ .

Montrons  $M \in R_{A \rightarrow B}$ .

Par hyp d'induction bien fondée,

si  $N \vdash N'$  alors  $M[N] \in R_B$ .

Montrons  $M[N] \in R_B$ .

Par (CR3') pour B, alors montrons que

$M[N] \vdash P$  et  $P \in R_B$ .

Gm a 2 cas :

- Soit  $M = \lambda z. M_0$  et  $P = M_0[N/z]$  donc ok
- Soit  $P = M'[N]$  alors par hyp  $M' \in R_{A \rightarrow B}$   
et donc  $M'[N] \in R_B$ .

Q3.4.

$$\frac{}{(2x.M)N \vdash M[\forall x]}$$

$$\frac{M \hookrightarrow M'}{M[N] \hookrightarrow M'[N]}$$

$$\frac{N \hookrightarrow N'}{N[N] \hookrightarrow N[N']}$$

Q3.5. • Gm a bien  $\hookrightarrow \subseteq \rightarrow_\beta$ .

• Gm a bien que  $\hookrightarrow$  est déterministe.

• Si  $M \hookrightarrow M'$  alors  $M[N] \hookrightarrow M'[N]$  pour tout N.

Gm peut donc appliquer le théorème.

Q 3.6. On ne peut pas utiliser le théorème ci-dessus car les formes normales pour  $\rightarrow$  ne sont pas nécessairement des formes normales pour  $\rightarrow_\beta$ . Exemple :  $(\lambda x. x)(y z)$  c'est

Q 3.7. Cette relation  $\rightarrow$  n'est pas complète. Il faut ajouter d'autres règles pour qu'elle le devienne (et qu'elle reste déterministe).

On peut, par exemple, définir  $\rightarrow$  par induction avec :

$$\frac{M \rightarrow M'}{MN \rightarrow M'N}$$

$$\frac{M \rightarrow_p \quad N \rightarrow N'}{MN \rightarrow M'N'}$$

$$\frac{M \rightarrow M'}{\lambda x. M \rightarrow \lambda x. M'}$$

$$\frac{M \rightarrow_p \quad N \rightarrow_p}{(\lambda x. M) N \rightarrow M[x/x]}$$

où l'on définit  $\rightarrow_p$  par induction :

$$\frac{}{x \rightarrow_p}$$

$$\frac{M \rightarrow_p}{\lambda x. M \rightarrow_p}$$

$$\frac{P \rightarrow_p}{x P \rightarrow_p}$$

$$\frac{(M N) \rightarrow_p \quad P \rightarrow_p}{(M N) P \rightarrow_p}$$

La relation  $\rightarrow$  ainsi définie vérifie

- (1)  $\rightarrow \subseteq \rightarrow_\beta$  ;
- (2)  $\rightarrow$  est déterministe ;
- (3) si  $M \rightarrow M'$  alors pour tout  $N$ ,  $M N \rightarrow M' N$  ;
- (4)  $NF(\rightarrow) = NF(\rightarrow_\beta)$ .

D'où la normalisation faible du  $\lambda$ -calcul.

# 1D n° 3

I. Existence d'une preuve sans coupure.

Q1.1

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overline{AB \vdash A} \alpha x}{AB \vdash A \Rightarrow A} \Rightarrow_i \\
 \frac{\overline{AB \vdash B \Rightarrow A} \alpha x}{AB \vdash A \Rightarrow B \Rightarrow A} \Rightarrow_i \\
 \frac{\overline{AB \vdash A \Rightarrow B \Rightarrow A} \alpha x}{AB \vdash A} \Rightarrow_e \\
 \frac{\overline{AB \vdash B \Rightarrow A} \alpha x}{AB \vdash B \Rightarrow A} \Rightarrow_e \\
 \frac{\overline{AB \vdash B} \alpha x}{AB \vdash A} \Rightarrow_e
 \end{array}$$

Q1.2. On considère le multiensemble des degrés des coupures.

Lorsque l'on réduit la coupure la plus profonde

$$\text{coupure } c \left\{ \begin{array}{c} \frac{\delta}{\Gamma, A \vdash B} \Rightarrow_I \\ \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}{\Gamma \vdash B} \Rightarrow_E \end{array} \right. \quad \deg(c) > 1$$

où  $\delta$  et  $\delta'$  ne contiennent pas de coupures, on engendre éventuellement un nombre fini de coupures mais de degré  $< \deg(c)$ .

$$\deg(c') \leq \max(|A|, |B|) < \deg(c).$$

D'où, par terminaison de " $\leq$  mul", il existe une preuve sans coupure.

Q3.1. Éliminer la conjonction fait décroître strictement la taille de l'arbre.

$$\frac{\frac{\frac{\delta}{\Gamma \vdash A} \quad \frac{\delta}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_1}{\Gamma \vdash A} \wedge_2 \rightsquigarrow \frac{\delta}{\Gamma \vdash A}$$

(et de même avec  $\wedge_e$ ).

Il suffit de faire un ordre produit  $\leq \text{taille} \times \leq \text{mul}$ .

$$\text{Autre sol': } t(A \wedge B) = t(A) + t(B) \text{ et dans le multiensemble.}$$

Q1.4. On a montré la normalisation faible pour la  $\rightarrow_p$ .

## II. Curry-Howard : enrichir la logique.

### II.1. Types produit

Q2.1.  $A ::= X \mid A \rightarrow A' \mid A \wedge A'$

$$\frac{\begin{array}{c} M:A \\ \Gamma \vdash A \end{array}}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i \quad \frac{\begin{array}{c} M:A \times A' \\ \Gamma \vdash A \wedge A' \end{array}}{\begin{array}{c} \Gamma \vdash A \\ \pi_1 M:A \end{array}} \wedge^g \quad \frac{\begin{array}{c} M:A \times A' \\ \Gamma \vdash A \wedge A' \end{array}}{\begin{array}{c} \Gamma \vdash A' \\ \pi_2 M:A \end{array}} \wedge^d$$

Q2.2.  $\vec{C}$  est une preuve de  $A$  et une preuve de  $A'$ , ce qui donne une preuve de  $A \wedge A'$ .

Q2.3/4 c.f. Q1.3.

## II.2. Les autres connecteurs

Q2.5.  $A ::= X \mid A \rightarrow A' \mid A \wedge A' \mid A \vee A' \mid T \mid \perp$

$$\frac{\begin{array}{c} \tilde{\Gamma} \vdash M:A+B \\ \Gamma \vdash A \vee B \end{array}}{\Gamma \vdash C} \vee_e \quad \frac{\begin{array}{c} \tilde{\Gamma}, z:A \vdash N:C \\ \Gamma, A \vdash C \end{array}}{\Gamma, B \vdash C} \quad \frac{\begin{array}{c} \tilde{\Gamma} \vdash M:A \\ \Gamma \vdash A \end{array}}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad \frac{\begin{array}{c} \tilde{\Gamma} \vdash M':B \\ \Gamma \vdash B \end{array}}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

$$\tilde{\Gamma} \vdash \text{case}(M, x \mapsto N, y \mapsto N') : C \quad \frac{\begin{array}{c} \tilde{\Gamma} \vdash M : A+B \\ \Gamma \vdash A \end{array}}{\Gamma \vdash g_M : A+B} \quad \frac{\begin{array}{c} \tilde{\Gamma} \vdash d M' : A+B \\ \Gamma \vdash B \end{array}}{\Gamma \vdash d M' : A+B}$$

$$\frac{\begin{array}{c} \tilde{\Gamma} \vdash M : \bullet \\ \Gamma \vdash \perp \end{array}}{\Gamma \vdash A} \quad \frac{}{\Gamma \vdash T} \quad \frac{}{\tilde{\Gamma} \vdash \perp} \quad M, N ::= \dots \mid * \mid g M \mid d M \mid \text{case}(M, x \mapsto N, y \mapsto N') \quad A ::= \dots \mid A+B \mid \perp \mid \bullet$$

**Coupures**

$$\frac{\delta}{\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}} v_i^g \quad \frac{\delta'}{\frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, B \vdash C}} \quad \frac{\delta''}{\frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}} v_e \quad \text{et} \quad \frac{\delta'[\delta/A]}{\Gamma \vdash C}$$

$$\frac{\delta}{\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}} v_i^d \quad \frac{\delta'}{\frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, B \vdash C}} \quad \frac{\delta''}{\frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}} v_e \quad \text{et} \quad \frac{\delta''[\delta/B]}{\Gamma \vdash C}$$

Pas de coupure avec  $T$  et  $\perp$ .

Q2.6.

$$\tilde{\Gamma} \vdash N : A$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \perp} \text{ re}$$

$$\tilde{\Gamma} \vdash M : A \rightarrow \bullet$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \perp} \text{ re}$$

$$\tilde{\Gamma}, x : A \vdash M : \bullet$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \text{ ri}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \text{ ri}$$

$$\tilde{\Gamma} \vdash (\lambda x. M) : A \rightarrow \bullet$$

On peut poser  $\perp := \neg \top$ .

## TD n° 4

I. Recherche de preuve en déduction naturelle intuitionniste.

Q1.1. On peut prouver  $\Gamma \vdash B$ . On ajoute A à chaque contexte dans les ségments de la preuve de  $\Gamma \vdash B$ . Ceci ne change pas la validité de la preuve : le seul point potentiellement problématique est l'axiome mais on a l'implication

$$A \in \Gamma \implies A \in \Gamma, B$$

Q1.2. On a l'arbre de preuve partiel suivant :

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \vdash A \Rightarrow B \\ \hline \Gamma, A \vdash A \Rightarrow B \end{array}}{\Gamma, A \vdash B} \text{aff} \quad \frac{\Gamma, A \vdash A}{\Gamma, A \vdash A} \Rightarrow_E.$$

Q1.3. On peut démontrer, par induction que si

$$\Gamma, A, \Delta, A, \Gamma' \vdash B \text{ alors } \Gamma, A, \Delta, \Gamma' \vdash B.$$

Il y a 11 cas. Le seul cas intéressant est celui de l'axiome où l'on a l'implication

$$B \in \Gamma, A, \Delta, A, \Gamma' \implies B \in \Gamma, A, \Delta, \Gamma'$$

Ceci correspond à "mutualiser" les utilisations des variables libres ayant un même type.

lorsque l'on cherche à prouver  $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$  on a 2 possibilités

- ou bien on a directement  $(A \Rightarrow B) \in \Gamma$
- ou bien on tente en faisant une  $\Rightarrow_I$  (si  $A \in \Gamma$ , on n'a pas besoin de l'ajouter au contexte).

Q1.4. On peut tenter d'utiliser une règle d'élimination  $\Rightarrow_E$  mais on boucle très rapidement ...

$$\frac{\frac{x \Rightarrow x + x \Rightarrow x}{\text{Ax}}}{x \Rightarrow x + x} \quad x \Rightarrow x + x$$

Q1.5. Gm donne l'algorithme suivant :

- (1) Gm supprime les doublons dans  $\Gamma$
- (2) Si  $A \in \Gamma$  alors c'est okay
- (3) Si  $(B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow B_n \Rightarrow A) \in \Gamma$ , alors

on montre  $\Gamma \vdash B_1$

:

on montre  $\Gamma \vdash B_n$

on en conclut avec  $\Gamma \vdash A$

- (4) Si  $A = B \Rightarrow C$  alors

on tente de montrer  $\Gamma, B \vdash C$  si  $B \notin \Gamma$ .

- (5) Sinon on ne peut pas démontrer  $\Gamma \vdash A$ .

Gm peut ensuite éliminer les coupures

Q1.6. Gm tente de montrer que  $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow A$

Gm tente de montrer que  $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A$

Gm tente de montrer que  $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A \Rightarrow B$

Gm tente de montrer que  $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A, A \vdash B$

Gm ne peut plus avancer : en supposant que l'algo est correct, on ne peut pas prouver la loi de Peirce en intuitionniste.

## II. Typage dans le $\lambda$ -calcul polymorphe

Q2.1.1. Gm pose  $\text{Bool} := \forall X. X \rightarrow X \multimap X$

Q2.1.2.

Gm a bien and<sub>1</sub>: bool → bool → bool

$$\frac{\Gamma \vdash b_1 : \text{bool}}{\Gamma \vdash b_1 : X \rightarrow X \rightarrow X} \quad \frac{\Gamma \vdash b_2 : X \rightarrow X \rightarrow X \quad \Gamma \vdash x : X}{\Gamma \vdash b_2 x : X \rightarrow X} \quad \frac{\Gamma \vdash x : X}{\Gamma \vdash y : X}$$

$$\frac{\Gamma \vdash b_1 : X \rightarrow X \rightarrow X \quad \Gamma \vdash b_2 x : X \rightarrow X \quad \Gamma \vdash y : X}{\Gamma \vdash b_1 (b_2 x y) : X \rightarrow X \quad \Gamma \vdash y : X}$$

$$\underbrace{b_1 : \text{bool}, b_2 : \text{bool}, x : X, y : X}_{x \in \text{VLL}(\tilde{\Gamma})} \quad \underbrace{\Gamma}_{\Gamma} \quad \underbrace{b_1 (b_2 x y) y : X}_{\Gamma}$$

Gm a bien and<sub>2</sub>: bool → bool → bool

can T: bool F: bool

$$\frac{\Gamma \vdash b_2 : \text{bool}}{\Gamma \vdash b_2 : \text{bool} \rightarrow \text{bool} \rightarrow \text{bool}} \quad \vdots$$

$$\frac{\Gamma \vdash b_1 : \text{bool}}{\Gamma \vdash b_1 : \text{bool}} \quad \frac{\Gamma \vdash b_2 T : \text{bool} \rightarrow \text{bool} \quad \Gamma \vdash F : \text{bool}}{\Gamma \vdash b_2 T F : \text{bool}} \quad \vdots$$

$$\frac{\Gamma \vdash b_1 : \text{bool} \quad \Gamma \vdash b_2 T F : \text{bool}}{\Gamma \vdash b_1 (b_2 T F) : \text{bool} \rightarrow \text{bool}} \quad \frac{\Gamma \vdash F : \text{bool}}{\Gamma \vdash F : \text{bool}}$$

$$\underbrace{b_1 : \text{bool}, b_2 : \text{bool}}_{\Gamma} \quad \underbrace{b_1 (b_2 T F) F : \text{bool}}_{\vdots}$$

Gm a and<sub>3</sub>: bool → bool → bool

$$\frac{\Gamma \vdash b_1 : \text{bool}}{\Gamma \vdash b_1 : \text{bool} \rightarrow \text{bool} \rightarrow \text{bool}} \quad \frac{\Gamma \vdash b_2 : \text{bool}}{\Gamma \vdash b_2 : \text{bool} \rightarrow \text{bool}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash b_1 b_2 : \text{bool} \rightarrow \text{bool} \quad \Gamma \vdash b_1 : \text{bool}}{\Gamma \vdash b_1 b_2 b_1 : \text{bool}}$$

$$\underbrace{b_1 : \text{bool}, b_2 : \text{bool}}_{\Gamma} \quad \underbrace{b_1 b_2 b_1 : \text{bool}}_{\vdots}$$

Q2.2. On donne le typage

$$\delta := \lambda \gamma : \forall \alpha, \alpha \rightarrow \alpha. \quad \gamma \circ \gamma : (\forall \alpha, \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\forall \alpha, \alpha \rightarrow \alpha)$$

Q2.3. On peut faire

$$\delta : ((\forall \alpha, \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\forall \alpha, \alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\forall \alpha, \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\forall \alpha, \alpha \rightarrow \alpha)$$

Q2.4.1. On montre les deux propriétés :

- 1 {
- si  $\Gamma \vdash \lambda x. M : A$ , alors nécessairement  $A$  est un type flèche potentiellement imbriqué dans des généralisations (induct<sup>o</sup> sur la relation de typage), et on montre  $\Gamma \vdash \lambda x. M : B \rightarrow C$ .
  - Réciproquement, si  $\Gamma, x : B \vdash M : C$  alors en généralisant, on a:  
 $\Gamma \vdash \lambda x. M : \forall \vec{\alpha}, B \rightarrow C$
- Si  $\Gamma \vdash M N : \forall \vec{\alpha} A$ , alors nécessairement,  $\Gamma \vdash M : B \rightarrow C$  et  $\Gamma \vdash N : C$ . De plus, on a que  $C$  est nécessairement une généralisat<sup>o</sup> de  $A$ .  
D'où on a bien le résultat demandé.
- Réciproquement, il suffit de spécialiser pour avoir le résultat.

Q4.2.2. Si  $\vdash \Omega : \forall \vec{\alpha} A$  (potentiellement avec  $\vec{\alpha}$  vide)  
alors  $\vdash \delta : B \rightarrow C$  et  $\vdash \delta : C$   
absurde car on aurait

$$\delta : B \rightarrow (B \rightarrow (B \rightarrow \dots))) \dots$$

### III Principes classiques en déduction naturelle

Q3.1. En analysant les règles de la déduction naturelle, on montre qu'une preuve de  $X \vee \neg X$  demande d'exhiber si l'on veut prouver le membre gauche ou le droit.

Supposons que l'on ait prouvé  $X$ , alors par substitution de  $X$  par  $\perp$ , on a montré  $\perp$ . Absurde car  $\not\models \perp$ .

Réiproquement, si on a montré  $\neg X$  alors on substitue  $X$  avec  $T$ , on a l'arbre de preuve :

$$\frac{\text{par hyp.} \quad \overline{T \top} \quad T_i \quad \overbrace{T \neg T}}{\top \perp}$$

Absurde

D'où  $\not\models X \vee \neg X$ .

Q3.2. Supposons  $\vdash \neg X \vee \neg \neg X$ .

Si on a montré  $\neg X$ , alors, avec  $X \rightsquigarrow T$  on a  $\vdash \perp$  comme montré ci-dessus. Absurde

Si on a montré  $\neg \neg X$  alors, avec  $X \rightsquigarrow \perp$ , on a  $\vdash \perp$ :

$$\frac{\overline{\perp \vdash \perp} \quad \text{par hyp.} \quad \overbrace{\vdash \neg \neg \perp}}{\vdash \perp}$$

Q3.3. On a montré (pas en Prolog mais en logique) que la logique intuitionniste est correcte, hors  $\not\models \neg(X \vee \neg X)$  car  $\models X \vee \neg X$ .

Il est donc impossible d'avoir  $\vdash \neg(X \vee \neg X)$ .

# TD n° 5.

I. Quantification existentielle sur les types.

Q1.1.  $\langle \text{nat} \rightarrow \text{nat}; (\lambda x. x+1, \lambda f. f 0) \rangle \rightsquigarrow \exists \alpha. (\alpha * (\alpha \rightarrow \text{nat}))$

Q1.2.  $\exists \alpha. (\underbrace{\alpha \rightarrow \text{int} \rightarrow \alpha}_\text{fresh} * \underbrace{(\alpha \rightarrow (\text{int} + 1) * \alpha)}_\text{top} * \underbrace{(\alpha \rightarrow \text{bool})}_\text{isempty})$

Q1.3. 
$$\frac{\Gamma \vdash M : A [B/\alpha]}{\mathsf{M}(\langle B; M \rangle \text{ as } \exists \alpha. A) : \exists \alpha. A}$$

Q1.4. 
$$\frac{\alpha \text{ fraîche} \quad \Gamma \vdash M : \exists \alpha. A \quad \Gamma, x : A [\alpha/\alpha] \vdash N : B}{\Gamma \vdash \text{let } \langle \alpha; x \rangle = M \text{ in } N : B}$$

Q1.5. 
$$\frac{\text{let } \langle \alpha; x \rangle = (\langle B; M \rangle \text{ as } \exists \alpha. A) \text{ in } N \longrightarrow_\beta N [M/x, B/\alpha]}{} \quad$$

Q1.6. 
$$\frac{\alpha \text{ fraîche} \quad \frac{\Gamma \vdash \exists \alpha. A \quad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}}{\exists_E}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B [\alpha]}{\Gamma \vdash \exists \alpha. B} \exists_I$$

Q1.7.  $\exists \alpha. A \rightsquigarrow \forall \beta. (\forall \alpha. A \multimap \beta) \multimap \beta$ .

II. Fonctions récursives et terminaison, un 2-calcule avec niveaux.

Q2.1. Si la règle (2) était :

$$\frac{(\text{let}_\text{rec } f = e_1) e_2 \longrightarrow_\beta e_1 [\text{let}_\text{rec } f = e_1 / f] e_2}{}$$

et alors on ne procéderait jamais à la réduction du terme de droite.

Q2.2.

$$\begin{aligned}
 & (\text{letrec } \text{plus} = \lambda x. \lambda y. \text{match } x \text{ with } \{0 \Rightarrow y \mid S \Rightarrow \lambda x'. S(\text{plus } x' y) \}) (S0) (SS0) \\
 & \xrightarrow{\beta} (\lambda x. \lambda y. \text{match } x \text{ with } \{0 \Rightarrow y \mid S \Rightarrow \lambda x'. S(\text{plus } x' y) \}) (S0) (SS0) \\
 & \xrightarrow{\beta} (\lambda y. \text{match } S0 \text{ with } \{0 \Rightarrow y \mid S \Rightarrow \lambda x'. S(\text{plus } x' y) \}) (SS0) \\
 & \xrightarrow{\beta} (\lambda y. (\lambda x'. S(\text{plus } x' y))) 0 ) (SS0) \\
 & \xrightarrow{\beta} (\lambda y. (S(\text{plus } 0 y))) ) (SS0) \\
 & \xrightarrow{\beta} S(\text{plus } 0 (S(S0))) \\
 & \xrightarrow{\beta} S(S(S(0)))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{et } (\text{letrec } \text{plus} = \lambda x. \lambda y. \text{match } x \text{ with } \{0 \Rightarrow y \mid S \Rightarrow \lambda x'. S(\text{plus } x' y) \}) 0 (SS0) \\
 & \xrightarrow{\beta} (\lambda x. \lambda y. \text{match } x \text{ with } \{0 \Rightarrow y \mid S \Rightarrow \lambda x'. S(\text{plus } x' y) \}) 0 (SS0) \\
 & \xrightarrow{\beta} (\lambda y. \text{match } 0 \text{ with } \{0 \Rightarrow y \mid S \Rightarrow \lambda x'. S(\text{plus } x' y) \}) (SS0) \\
 & \xrightarrow{\beta} (\lambda y. y) (SS0) \\
 & \xrightarrow{\beta} SS0.
 \end{aligned}$$

Q2.3. letrec plus : Nat<sup>I</sup> → Nat → Nat =  $\lambda x : \text{Nat}^I. \lambda y : \text{Nat}. \text{match } x \text{ with}$

$$\begin{cases} 0 \Rightarrow y \\ S \Rightarrow \lambda x' : \text{Nat}^{\hat{I}}. S(\underbrace{\text{plus } x' y}_{\text{Nat}}) \end{cases}$$

Q2.3. La fonction e := (letrec f =  $\lambda x. f x$ ) n'est pas typable: Nat

$$\begin{aligned}
 \Gamma & \vdash e : \text{Nat}^I \rightarrow \sigma[\hat{I}/I] & \Gamma & \vdash x : \text{Nat}^{\hat{I}} \\
 \Gamma & \vdash f : \text{Nat}^I \rightarrow \sigma, x : \text{Nat}^{\hat{I}} \vdash f x : \sigma[\hat{I}/I] \\
 \Gamma & \vdash f : \text{Nat}^I \rightarrow \sigma \vdash \lambda x. f x : \text{Nat}^{\hat{I}} \rightarrow \sigma[\hat{I}/I] \\
 \vdash \text{letrec } f = \lambda x. f x : \text{Nat}^{\hat{I}} \rightarrow \sigma[\hat{I}/I]
 \end{aligned}$$

on ne peut pas faire ça car

$$\begin{aligned}
 f & : \text{Nat}^I \rightarrow \sigma, x : \text{Nat}^{\hat{I}} \vdash f : \text{Nat}^{\hat{I}} \rightarrow \sigma[\hat{I}/I] \\
 \text{seulement si } \text{Nat}^{\hat{I}} & \sqsubseteq \text{Nat}^I \text{ seulement si } \hat{I} \leq I.
 \end{aligned}$$

Q2.5. (1) C'est du  $\text{Nat}^I \rightarrow$  bdd  
(2)  $I \sqsubseteq \hat{I}$

