— Révisions de Logique —

Ce document contient des réponses pour les questions de cours pour le partiel/examen de Logique. Je m'excuse pour le format douteux du document.

I. | Cours I.

Question I.1.

Énoncer et prouver le lemme de lecture unique.

Énoncé. Toute formule $F \in \mathscr{F}$ vérifie une et une seule de ces propriétés :
(1) $F \in \mathscr{P}$;
(2) il existe G telle que $F = \neg G$;
(3) il existe G, H telles que $F = (G \wedge H)$;
(4) il existe G, H telles que $F = (G \vee H)$;
(5) il existe G, H telles que $F = (G \to H)$;
(6) il existe G, H telles que $F = (G \leftrightarrow H)$.

Preuve. On commence par montrer que les formules de $\mathscr{F}$ sont bien parenthésées. Ensuite, pour un mot $F \in \mathscr{F}$, on est dans un des cas suivants (uniquement un cas) :
- soit $|F| = 0$ absurde car $\varepsilon \notin \mathscr{F}$
- soit $|F| = 1$ alors nécessairement $F \in \mathscr{P}$, cas (1)
- soit $|F| \geqslant 2$ et F commence par $\neg$, alors soit G le mot F sans sa première lettre, par construction $G \in \mathscr{F}$ et donc on est dans le cas (2)
- soit $|F| \geqslant 2$ et F commence par (et termine par) alors, on retire ces deux lettres et on décompose ce mot en deux composantes bien parenthésées F et G séparées nécessairement par une lettre $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$.

Question I.2.

Montrer qu'il y a une bijection entre les formules du calcul propositionnel et les arbres tels que :
- les feuilles sont étiquetées par des variables ;
- les nœuds internes sont étiquetés par des connecteurs ;
- ceux étiquetés par $\neg$ ont un fils, les autres 2.

On construit la fonction par récurrence (forte) sur la taille de la formule considérée :
- on applique le lemme de lecture unique ;
- on applique l'hypothèse de récurrence aux 0/1/2 sous-formules ;
- on construit l'arbre actuel.

Question I.3.

Montrer que toute fonction $\nu : \mathscr{P} \to \{0,1\}$ peut s'étendre de manière unique en une fonction $\mu : \mathscr{F} \to \{0,1\}$ telle que :
- pour tout $p \in \mathscr{P}$, $\nu(p) = \mu(p)$;
- si $F, G \in \mathscr{F}$ alors
  - $\mu(\neg F) = 1 - \mu(F)$,
  - $\mu(F \vee G) = 1$ ssi $\mu(F) = 1$ ou $\mu(G) = 1$,
  - $\mu(F \wedge G) = 1$ ssi $\mu(F) = 1$ et $\mu(G) = 1$,
  - $\mu(F \to G) = 1$ ssi $\mu(F) = 0$ et $\mu(G) = 1$,
  - $\mu(F \leftrightarrow G) = 1$ ssi $\mu(F) = \mu(G)$.

Soit $\nu : \mathscr{P} \to \{0,1\}$ fixée. On montre l'existence et l'unicité de la définition de $\mu(F)$ par induction sur l'arbre de F. Ceci est possible par la bijection arbres étiquetés et formules.

- Pour une variable $p \in \mathscr{P}$, on a nécessairement $\mu(p) := \nu(p)$.
- Pour un nœud de label $\neg$, on a nécessairement $\mu(\neg F) := 1 - \mu(F)$.
- Pour un nœud de label $\wedge$, on a nécessairement $\mu(F \wedge G) := 1$ si on a $\mu(F) = \mu(G) = 1$ et on pose $\mu(F \wedge G) := 0$ sinon.
- De même pour les autres cas.

Question I.4.

Énoncer le théorème de compacité du calcul propositionnel.

Un ensemble de formules est satisfiable ssi toute sous-partie finie de cet ensemble est satisfiable.

Question I.5.

Prouver le théorème de compacité du calcul propositionnel dans le cas où l'ensemble des variables est au plus dénombrable.

Soit $\mathscr{E}$ un ensemble de formules du calcul propositionnel. Montrons que $\mathscr{E}$ est satisfiable ssi toute partie finie de E est satisfiable.

« $\Longrightarrow$ ». Si $\mathscr{E}$ est satisfiable, alors soit une certaine valuation satisfaisant $\mathscr{E}$. Cette valuation satisfait toute partie finie de $\mathscr{E}$.

« $\Longleftarrow$ ». Soit $\mathscr{P} = \{x_1, x_2, \dots\}$. On procède en deux étapes.

Étape 1. Par récurrence, on construit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui satisfait : pour toute partie finie F de $\mathscr{E}$, il existe une valuation ν satisfaisant F et qui vérifie $\forall i \leqslant n, \nu(x_i) = \varepsilon_i$.
- Au rang $n = 0$, on a directement que toute partie finie est satisfiable (sans contraintes).
- Au rang n, on a deux cas :
  (1) soit, pour toute partie finie F de $\mathscr{E}$, il existe ν satisfaisant $\nu(x_i) = \varepsilon_i$ pour tout $i \leqslant n$ et $\nu(x_{n+1}) = 0$, alors on pose $\varepsilon_{n+1} := 0$.
  (2) soit, il existe une partie finie F de $\mathscr{E}$ telle que toute valuation ν satisfaisant F avec $\nu(x_i) = \varepsilon_i$ pour tout $i \leqslant n$, et $\nu(x_{n+1}) = 1$. On pose alors $\varepsilon_{n+1} := 1$.

  Soit F' une partie finie de $\mathscr{E}$. Par hypothèse de récurrence, il existe une valuation ν satisfaisant le sous-ensemble fini $F' \cup F$ et telle que $\nu(x_i) = \varepsilon_i$ pour tout $i \leqslant n$. D'où, ν satisfait F et donc, $\nu(x_{n+1}) = 1 = \varepsilon_{n+1}$ par l'hypothèse de la disjonction de cas. Donc, ν satisfait F et donc on a la propriété au rang $n+1$.

Étape 2. On pose $\mu(x_i) := \varepsilon_i$. Montrons que μ satisfait $\mathscr{E}$. Pour tout $F \in \mathscr{E}$, on a $\mu(F) = 1$ car :
- on pose k tel que $\operatorname{vars}(F) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$;
- l'ensemble $\{F\}$ est fini, donc par la propriété au rang k, il existe ν coïncidant avec μ sur les k premières variables, donc sur les variables de F, et donc $\mu(F) = \nu(F) = 1$.

II. Cours II.

Question II.1.

Énoncer et prouver un lemme de lecture unique pour les termes de la logique du premier ordre dans un langage donné $\mathscr{L}$.

Énoncé. Tout terme $t \in \mathscr{T}$ vérifie une et une seule des propriétés ci-dessous :
- $t \in \mathscr{V}$;
- il existe un symbole de constante $c \in \mathscr{L}$ tel que $t = c$;
- il existe un symbole de fonction n-aire $f \in \mathscr{L}$ et n termes $t_1, \ldots, t_n$ tels que $t = f(t_1, \ldots, t_n)$

Preuve. On commence par montrer que tout terme est bien parenthésé. Ensuite, soit $t \in \mathscr{T}$. On a un des trois cas suivants :
- soit $|t| = 1$ et $t \in \mathscr{V}$, c'est une variable
- soit $|t| = 1$ et $t \in \mathscr{L}$, c'est un symbole de constante
- soit $|t| \geqslant 2$ et alors on a la première lettre de t qui est un symbole de fonction n-aire, on retire les deux premières lettres et la dernière et on décompose selon les virgules de « dernier niveau » (par rapport au parenthésage). Il y a nécessairement n termes, et chacun représente un terme.

Question II.2.

Énoncer et prouver un lemme de bijection entre certains arbres étiquetés et les termes de la logique du premier ordre dans un langage donné $\mathscr{L}$.

On construit la fonction par récurrence (forte) sur la taille du terme considéré :
- on applique le lemme de lecture unique ;
- on applique l'hypothèse de récurrence aux sous-formules ;
- on construit l'arbre actuel.

Question II.3.

Énoncer et prouver un lemme de lecture unique pour les formules de la logique du premier ordre dans un langage donné $\mathscr{L}$.

Énoncé. Toute formule $F \in \mathscr{F}$ vérifie une et une seule des propriétés ci-dessous :
- il existe un symbole de relation n-aire $R \in \mathscr{L}$ et n termes $t_1, \ldots, t_n$ tels que $F = R(t_1, \ldots, t_n)$;
- il existe G telle que $F = \neg G$
- il existe G et $x \in \mathscr{V}$ telles que $F = \forall x\, G$
- il existe G et $x \in \mathscr{V}$ telles que $F = \exists x\, G$
- il existe G, H telles que $F = (G \vee H)$
- il existe G, H telles que $F = (G \wedge H)$
- il existe G, H telles que $F = (G \to H)$

Preuve. On commence par montrer que toute formule est bien parenthésée. Ensuite, soit $F \in \mathscr{F}$. On a un des trois cas suivants :
- soit F commence par un symbole de relation, on peut lire de manière unique les termes entre les virgules du « dernier niveau » (par rapport au parenthésage)
- soit F commence par un $\forall$ ou $\exists$, la lettre suivante est $x \in \mathscr{V}$ et la suite est une formule
- soit F commence par une parenthèse ouvrante (et termine nécessairement par une parenthèse fermante) et alors on peut décomposer ce qu'il y a entre les parenthèses en deux formules séparées par $\wedge, \vee$ ou $\to$.

Question II.4.

Donner une preuve de

$$\vdash \neg A \leftrightarrow (A \to \bot)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg A, A \vdash \neg A}\,\mathsf{ax} \qquad \dfrac{}{\neg A, A \vdash A}\,\mathsf{ax}}{\neg A, A \vdash \bot}\,\neg_{\mathsf{e}}}{\neg A \vdash A \to \bot}\,\to_{\mathsf{i}}}{\vdash \neg A \to (A \to \bot)}\,\to_{\mathsf{i}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \to \bot, A \vdash A \to \bot}\,\mathsf{ax} \qquad \dfrac{}{A \to \bot, A \vdash A}\,\mathsf{ax}}{A \to \bot, A \vdash \bot}\,\to_{\mathsf{e}}}{A \to \bot \vdash \neg A}\,\neg_{\mathsf{i}}}{\vdash (A \to \bot) \to \neg A}\,\to_{\mathsf{i}}}{\vdash \neg A \leftrightarrow (A \to \bot)}\,\wedge_{\mathsf{i}}$$

III. Cours III.

Question III.1.

Montrer que, pour toute interprétation $\mathscr{M}$ sur le langage $\mathscr{L}$, tout environnement e et toute formule F, $\mathscr{V}a\ell_{\mathscr{M}}(F, e)$ ne dépend que de la valeur de e sur les variables libres de F.

On commence par montrer le résultat similaire sur les termes (qui se prouve de la même manière).

Par induction sur F, on montre le résultat.
- Si $F = R(t_1, \ldots, t_n)$ alors $\mathscr{V}a\ell_{\mathscr{M}}(F, e)$ ne dépend que de $(\mathscr{V}a\ell_{\mathscr{M}}(t_i, e))_{i \in [\![1,n]\!]}$ qui ne dépendent que des valeurs de e sur les variables libres des t_i, et donc $\mathscr{V}a\ell_{\mathscr{M}}(F, e)$ ne dépend que des valeurs de e sur les variables libres de F.
- Si $F = G \vee H$ alors on applique le résultat à G et H et comme $\mathscr{V}a\ell_{\mathscr{M}}(G, e)$ (*resp.* $\mathscr{V}a\ell_{\mathscr{M}}(H, e)$) ne dépend que des valeurs de e sur variables libres de G (*resp.* H) alors la valeur de F ne dépend que des valeurs de e sur les variables libres de F.
- Si $F = \forall x\, G$ alors on applique le résultat à G et comme $\mathscr{V}a\ell_{\mathscr{M}}(G, e[x := a])$ ne dépend que des valeurs de $e[x := a]$ sur variables libres de G alors la valeur de F ne dépend que des valeurs de e sur les variables libres de F.
- Les autres cas sont similaires.

Question III.2.

Montrer que pour toute interprétation $\mathscr{M}$ sur le langage $\mathscr{L}$, tout environnement e et toute formule close F, $\mathscr{V}a\ell_{\mathscr{M}}(F, e)$ ne dépend pas de e.

La valeur $\mathscr{V}a\ell_{\mathscr{M}}(F, e)$ ne dépend que des valeurs de e sur les variables libres de F. La formule F est close donc n'a pas de variables libres. D'où, la valeur de F ne dépend pas de e.

Question III.3.

Montrer la proposition suivante. Soient $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ deux langages, $\mathscr{M}$ (*resp.* $\mathscr{M}'$) une interprétation de $\mathscr{L}$ (resp $\mathscr{L}'$) et $\mathscr{M}'$ un enrichissement de $\mathscr{M}$, e un environnement, alors :
(1) si t est un terme de $\mathscr{L}$, $\mathscr{V}a\ell_{\mathscr{M}}(t, e) = \mathscr{V}a\ell_{\mathscr{M}'}(t, e)$;
(2) si F est une formule de $\mathscr{L}$, alors $(\mathscr{M}, e)$ satisfait F ssi $(\mathscr{M}', e)$ satisfait F.

(1) Par induction sur t, on montre le résultat demandé : l'interprétation des symboles dans $\mathscr{M}$ et dans $\mathscr{M}'$ est la même.
(2) Par induction sur F, on montre le résultat demandé : l'interprétation des symboles dans $\mathscr{M}$ et dans $\mathscr{M}'$ est la même.

Question III.4.

On dit que deux formules F et G du premier ordre sont équivalentes si $F \leftrightarrow G$ est un théorème, c'est à dire si $\vdash F \leftrightarrow G$. Montrer que toute formule est équivalente à une formule n'utilisant que les connecteurs logiques $\neg$, $\vee$ et $\exists$.

Idée de la preuve :
- on montre que $\vdash (F \to G) \leftrightarrow (\neg F \vee G)$
- on montre que $\vdash (F \wedge G) \leftrightarrow \neg(\neg F \vee \neg G)$
- on montre que $\vdash (\forall x\, F) \leftrightarrow \neg(\exists x\, \neg F)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\, F, \exists x\, \neg F \vdash \exists y\, \neg F[y]}\,\mathsf{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\, F, \exists x\, \neg F, \neg F[y] \vdash \forall x\, F}\,\mathsf{ax}}{\forall x\, F, \exists x\, \neg F, \neg F[y] \vdash F[y]}\,\forall_{\mathsf{e}}}{\forall x\, F, \exists x\, \neg F, \neg F[y] \vdash \bot}\,\neg_{\mathsf{e}}}{\forall x\, F, \exists x\, \neg F \vdash \bot}\,\exists_{\mathsf{e}}}{\forall x\, F \vdash \neg(\exists x\, \neg F)}\,\neg_{\mathsf{i}}}{\vdash (\forall x\, F) \to \neg(\exists x\, \neg F)}\,\to_{\mathsf{i}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\exists x\, \neg F), \neg F \vdash \neg(\exists x\, \neg F)}\,\mathsf{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg(\exists x\, \neg F), \neg F \vdash \neg F}\,\mathsf{ax}}{\neg(\exists x\, \neg F), \neg F \vdash \exists x\, \neg F}\,\exists_{\mathsf{i}}}{\neg(\exists x\, \neg F), \neg F \vdash \bot}\,\neg_{\mathsf{e}}}{\neg(\exists x\, \neg F) \vdash F}\,\bot_{\mathsf{c}}}{\neg(\exists x\, \neg F) \vdash \forall x\, F}\,\forall_{\mathsf{i}}}{\vdash \neg(\exists x\, \neg F) \to \forall x\, F}\,\to_{\mathsf{i}}$$

- on applique ces réécritures récursivement.

Question III.5.

Montrer que si $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ sont deux interprétations de $\mathscr{L}$ et φ un morphisme de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{N}$, alors pour tout terme t et tout environnement e dans $\mathscr{M}$ on a

$$\varphi(\mathscr{V}a\ell_{\mathscr{M}}(t, e)) = \mathscr{V}a\ell_{\mathscr{N}}(t, \varphi(e)).$$

Par induction sur t :
- si t est symbole de constante, alors sa valeur est $\varphi(c_{\mathscr{M}})$ d'une part et $c_{\mathscr{N}}$ de l'autre ;
- si t est variable, alors sa valeur est celle $\varphi(e(x))$ d'une part et $\varphi \circ e(x)$ de l'autre ;
- si t est l'application d'un une fonction n-aire $f(t_1, \ldots, t_n)$ alors on applique l'hypothèse d'induction sur tous les sous-termes et on conclut.

Question III.6.

Montrer que si $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ sont deux interprétations de $\mathscr{L}$ et φ un morphisme *injectif* de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{N}$, alors pour toue formule atomique F et tout environnement e dans $\mathscr{M}$ on a

$$\mathscr{M}, e \vDash F \quad \text{ssi} \quad \mathscr{N}, \varphi(e) \vDash F.$$

D'une part, si $\mathscr{M}, e \vDash R(t_1, \ldots, t_n)$ alors $R_{\mathscr{M}}(v_1, \ldots, v_n)$ où l'on note $v_i := \mathscr{V}a\ell_{\mathscr{M}}(t_i, e)$. D'où, par morphisme et le point précédent, on a que $R_{\mathscr{N}}(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n))$ et donc que $\mathscr{N}, \varphi(e) \vDash R(t_1, \ldots, t_n)$.

D'autre part part, si $\mathscr{N}, \varphi(e) \vDash R(t_1, \ldots, t_n)$ alors $R_{\mathscr{N}}(v_1', \ldots, v_n')$ où l'on note $v_i' := \mathscr{V}a\ell_{\mathscr{N}}(t_i, \varphi(e))$. D'où, par morphisme injectif et le point précédent, on a que $R_{\mathscr{N}}(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n))$ pour certains $(v_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et donc que $\mathscr{M}, e \vDash R(t_1, \ldots, t_n)$.

Question III.7.

Montrer que si $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ sont deux interprétations de $\mathscr{L}$ et φ un isomorphisme de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{N}$, alors pour toue formule F et tout environnement e dans $\mathscr{M}$ on a

$$\mathscr{M}, e \vDash F \quad \text{ssi} \quad \mathscr{N}, \varphi(e) \vDash F.$$

Par induction sur F.
- Pour les formules closes, c'est vrai par le point précédent.
- Pour le $\wedge$, le $\vee$ et le $\to$, on applique directement l'hypothèse d'induction à chaque point.
- Pour le $\forall$ et $\exists$, on a directement le résultat car $\varphi(|\mathscr{M}|) = |\mathscr{N}|$, donc le « pour tout » et le « il existe » dans la définition de la valeur se fait sur le même ensemble.

Question III.8.

Montrer que deux interprétations isomorphes satisfont les mêmes formules closes.

D'une part, on sait que l'interprétation d'une formule close ne dépend pas de l'environnement considéré. D'autre part, on considère le point précédent et on a $\mathscr{M} \vDash F$ ssi $\mathscr{N} \vDash F$.

IV. Cours IV.

Question IV.1.

Énoncer les deux versions vues en cours du théorème de complétude (au sens de règle-complétude) de Gödel de la logique du premier ordre. Indiquer quel est le sens « correction » et quel est le sens « complétude ».

Version 1. Soit T une théorie et F une formule close. On a $T \vdash F$ ssi $T \vDash F$.

Version 2. Une théorie T est consistante ssi elle est non-contradictoire.

Sens correction : « $\implies$ ». Sens complétude : « $\impliedby$ ».

Question IV.2.

Montrer que les deux versions sont équivalentes (montrer chaque version en utilisant l'autre).

Pour la partie correction.

D'une part, on montre non V2 implique non V1 (par contraposée). Soit T non-contradictoire et inconsistante. Il existe donc un modèle $\mathscr{M}$ tel que $\mathscr{M} \vDash T$ et $T \vdash \bot$. Or, par définition $\mathscr{M} \nvDash \bot$ et donc $T \nvDash \bot$.

D'autre part, on montre V2 implique V1. Soit T et F tels que $T \vdash F$. Ainsi, $T \cup \{\neg F\} \vdash \bot$ et donc $T \cup \{\neg F\}$ est consistante d'où (par hypothèse V2) $T \cup \{\neg F\}$ contradictoire, donc on n'a pas de modèle. On a alors que tous les modèles de T sont des modèles de F, autrement dit $T \vDash F$.

Pour la partie complétude.

D'une part, soit T contradictoire. Elle n'a pas de modèle. Ainsi $T \vDash \bot$ et donc $T \vdash \bot$ par V1, d'où l'inconsistance de T.

D'autre part, soit $T \vDash F$. La théorie $T \cup \{\neg F\}$ n'a pas de modèle, elle est donc contradictoire, donc inconsistante, donc $T \cup \{\neg F\} \vdash \bot$ d'où $T \vdash F$ par $\bot_{\mathsf{c}}$.

Question IV.3.

Énoncer le théorème de compacité (sémantique) de la logique du premier ordre

Une théorie est contradictoire ssi elle est finiment contradictoire, c'est-à-dire qu'il existe un sous-ensemble fini contradictoire.

Question IV.4.

Admettre le théorème de complétude et montrer le théorème de compacité de la logique du premier ordre (on énoncera les deux théorèmes en question).

Théorème de compacité sémantique. Une théorie est contradictoire ssi elle est finiment contradictoire, c'est-à-dire qu'il existe un sous-ensemble fini contradictoire.

Théorème de complétude. Une théorie est consistante ssi elle est non-contradictoire.

On se munit aussi du théorème suivant.

Théorème de compacité syntaxique. Une théorie est inconsistante ssi elle est finiment inconsistante.

Il est évident car toute preuve de $\bot$ est nécessairement finie, donc n'utilise qu'un sous-ensemble fini de la théorie.

Soit T contradictoire. Alors, T est inconsistante (complétude). Alors T est finiment inconsistante (compacité syntaxique). Donc T est finiment contradictoire (complétude encore).

V. Cours V.

Question V.1.

Donner la définition de théorie complète (au sens d'axiome-complète) en logique du premier ordre.

Une théorie T est *axiome-complète* si $T \nvdash \bot$ et pour tout formule F on a $T \vdash F$ ou $T \vdash \neg F$.

Question V.2.

Montrer sans utiliser le théorème de complétude (au sens de règle-complétude) : Si T est une théorie consistante (qui ne prouve pas l'absurde) dans un langage au plus dénombrable $\mathscr{L}$, alors il existe une théorie T' contenant T et complète.

Y a t-il une preuve plus simple en utilisant le théorème de complétude ?

Soit $T'_0 := T$. Au rang i,
- soit T'_i est complète et alors $T'_{i+1} := T'_i$.
- soit T'_i n'est pas complète, alors il existe une formule F (« la plus petite possible » obtenue à l'aide d'une énumération) telle que $T'_i \nvdash F$ et $T'_i \nvdash \neg F$, et on pose $T'_{i+1} := T'_i \cup \{F\}$.

La théorie $T' := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T'_i$ est complète.

Avec le théorème de complétude, on construit directement la théorie T' dans la construction du modèle Th de T.

VI. Cours VI.

Question VI.1.

Montrer que $\mathscr{P} \vdash \forall x\, \forall y\, x + y = y + x$.

On procède à l'aide du schéma inductif sur x : $F(x) := \forall y\, x + y = y + x$.

- Avec le schéma inductif sur x, on montre $\mathscr{P} \vdash \forall x\, 0 + x = x$: le cas $0 + 0 = 0$ se traite par A4 et le cas $0 + x = x \to 0 + (\boldsymbol{S}\, x) = \boldsymbol{S}\, x$ avec A5.
- Avec le schéma inductif sur y, on montre $\mathscr{P} \vdash \forall x\, \forall y\, \boldsymbol{S}(x + y) = (\boldsymbol{S}\, x) + y$.

Question VI.2.

Montrer que $\mathscr{P} \vdash \forall x\, \forall y\, x \times y = y \times x$.

Par double schéma inductif, comme la question précédente.

VII. Cours VII.

Question VII.1.

Énoncer le théorème de représentation.

Toute fonction récursive totale est représentable. Autrement dit : l'ensemble des fonctions représentables contient les projections, la fonction successeur, les fonctions constantes, et cet ensemble est stable par composition, récursion primitive et minimisation.

Question VII.2.

Étant données des formules $F_1, \ldots, F_p, G$ qui représentent des fonctions totales $f_1(x_1, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $f_p(x_1, \ldots, x_n)$, $g\big(x_1, \ldots, x_p\big)$ donner une formule qui représente la fonction composée $g\big(f_1, \ldots, f_p\big)$.

Soient $F_i(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ représentant f_i pour tout i et soit la formule $G\big(x_0, \ldots, x_p\big)$ représentant g. On pose

$$H(x_0, \ldots, x_n) := \exists y_0 \cdots \exists y_n \, G(x_0, y_1, \ldots, y_n) \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i(y_1, x_1, \ldots, x_n).$$

VIII. Cours VIII.

On pose :
- $\alpha_2(n, m) := (n + m)(n + m + 1)/2 + n$
- $\alpha_3(x, y, z) := \alpha_2(x, \alpha_2(y, z))$
- $\sharp 0 := \alpha_3(0, 0, 0)$
- $\sharp x_n := \alpha_3(n + 1, 0, 0)$
- $\sharp(\boldsymbol{S}\, t_1) := \alpha_3(\sharp t_1, 0, 1)$
- $\sharp(t_1 + t_2) := \alpha_3(\sharp t_1, \sharp t_2, 2)$
- $\sharp(t_1 \times t_2) := \alpha_3(\sharp t_1, \sharp t_2, 3)$.

Question VIII.1.

Montrer que l'ensemble des numéros de termes est un ensemble primitif récursif.

Il suffit de montrer que l'on peut décider si un entier x est un numéro de terme à l'aide de fonctions primitives récursives. On notera $T(x)$ la fonction indicatrice de $\{\sharp t \mid t \text{ est un terme de } \mathscr{L}_0\}$. Pour cela, on utilise un lemme de définition par cas et récursion.
- Si $\beta_3^3(x) = 0$ et $\beta_3^2(x) = 0$ alors $T(x) := 1$ (c'est soit zéro, soit une variable).
- Si $\beta_3^3(x) = 1$ et $\beta_3^2(x) = 0$ alors $T(x) := T(\beta_3^1(x))$ (c'est un successeur).
- Si $\beta_3^3(x) = 2$ ou 3 alors $T(x) := T(\beta_3^1(x)) \times T(\beta_3^2(x))$ (c'est un $\times$ ou $+$).
- Sinon, $T(x) := 0$.

Question VIII.2.

Montrer que l'ensemble des couples $(\sharp t, n)$ où t est un terme et x_n n'a pas d'occurrence dans t est récursif primitif.

On définit la fonction caractéristique de cet ensemble, noté $g_0(x, y)$. On utilise pour cela la définition par cas et récursion.

- Si $\beta_3^3(x) = \beta_3^2(x) = 0$ et $\beta_3^1(x) - 1 \neq y$ alors $g_0(x, y) := 1$.
- Si $\beta_3^3(x) = 1$ et $\beta_3^2(x) = 0$ alors $g_0(x, y) := g_0(\beta_3^2(x), y)$.
- Si $\beta_3^3(x) = 2$ ou 3 alors $g_0(x, y) := g_0(\beta_3^1(x), y) \times g_0(\beta_3^2(x), y)$.
- Sinon, $g_0(x, y) := 0$.

IX. Cours IX.

Question IX.1.

Montrer qu'une théorie T cohérente qui contient $\mathscr{P}_0$ est indécidable.

Par l'absurde, on procède par diagonalisation. Considérons l'ensemble

$$\theta := \{(m, n) \mid m = \sharp F(n) \text{ et } T \vdash F(\underline{n})\}.$$

Comme T décidable alors θ aussi. On pose l'ensemble récursif

$$B := \{n \in \mathbb{N} \mid (n, n) \notin \theta\}.$$

D'après le théorème de représentation, il existe une formule $G(x)$ représentant B :
- si $n \in B$ alors $\mathscr{P}_0 \vdash G(\underline{n})$ et donc $T \vdash G(\underline{n})$;
- si $n \notin B$ alors $\mathscr{P}_0 \vdash \neg G(\underline{n})$ et donc $T \vdash \neg G(\underline{n})$.

Soit $a = \sharp G(x)$. A-t-on $a \in B$?

- D'une part, si $a \in B$ alors $(a, a) \notin \theta$ et donc $T \nvdash G(\underline{a})$. Mais si $a \in B$ alors, par définition de G, on a $T \vdash G(\underline{a})$. ***Absurde !***
- D'autre part, si $a \notin B$ alors $(a, a) \in \theta$ et donc $T \vdash G(\underline{a})$. Mais si $a \notin B$ alors, par définition de G, on a $T \vdash \neg G(\underline{a})$, d'où T est non consistante. ***Absurde !***

On en conclut que T est indécidable.

Question IX.2.

Quel que soit un langage $\mathscr{L}$ contenant au moins deux constantes, un symbole de fonction unaire et deux symboles de fonctions binaires, l'ensemble des théorèmes logiques T sur $\mathscr{L}$ n'est pas récursif.

Quitte à renommer les symboles, considérons $\mathscr{L} \supseteq \mathscr{L}_0$. Soit G la conjonction des axiomes de Peano $\mathscr{P}_0$. Pour toute formule F, on a $\mathscr{P}_0 \vdash F$ ssi $T_0 \vdash (G \to F)$ où $T_0 \subseteq T$ est l'ensemble des théorèmes logiques sur $\mathscr{L}_0$. Si T_0 est récursif alors $\mathscr{P}_0$ est décidable. Et, si T est récursif alors T_0 l'est aussi. D'où on aurait que $\mathscr{P}_0$ décidable, ***absurde*** (par question précédente).

Question IX.3.

Énoncer et montrer le 1er théorème d'incomplétude de Gödel. En déduire que $\mathscr{P}$ n'est pas complète.

Énoncé. Soit T une théorie consistante contenant $\mathscr{P}_0$ et avec un ensemble d'axiomes récursifs. Alors T n'est pas complète.

Preuve. Une théorie avec un ensemble d'axiomes récursif et qui est complète, est décidable. Et c'est faux pour T par le théorème précédent.

En effet, pour F donné, il suffit d'énumérer les preuves jusqu'à avoir $T \vdash F$ ou $T \vdash \neg F$.

Corollaire. La théorie $\mathscr{P}$ est consistante, contient $\mathscr{P}_0$ et a un ensemble d'axiomes récursif, elle n'est donc pas complète.

X. Cours X.

Question X.1.

Montrer que dans tout modèle de ZF1–4, il existe un unique ensemble sans éléments.

Par ZF1, on a l'unicité de cet ensemble (les deux n'ont aucun éléments, ils sont donc égaux). Pour montrer l'existence, on considère un ensemble $x \in \mathscr{U}$ où $\mathscr{U}$ est le modèle que l'on considère (qui est nécessairement non vide par définition de modèle). On considère la formule $\varphi(w_0, w_1) := \bot$ qui est une relation fonctionnelle. Par ZF4 (avec φ et x) on obtient un ensemble qui est vide.

Question X.2.

Montrer que ZF1, 3 et 4 impliquent l'axiome de la paire.

On a $\emptyset$ et $\wp(\emptyset)$ sont dans $\mathscr{U}$ par la preuve précédente (et ZF3).

On considère deux ensembles a et b et on veut construire $\{a, b\}$. On utilise la formule

$$\varphi(w_0, w_1, a, b) := (w_0 = \emptyset \wedge w_1 = a) \vee (w_0 = \{\emptyset\} \wedge w_2 = b).$$

Comme φ est bien une relation fonctionnelle, alors $\{a, b\}$ est l'image de $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \wp(\{\emptyset\})$.

Question X.3.

Montrer que ZF4 implique ZF4′.

On a une formule $\varphi(y, \bar{v})$ et on veut montrer :

$$\mathscr{U} \vDash \forall \bar{v} \forall u \exists x \forall y \, (y \in x \leftrightarrow (y \in u \wedge \varphi(y, \bar{v}))).$$

On considère la formule $\psi(w_0, w_1, \bar{v}) := w_0 = w_1 \wedge \varphi(w_0, \bar{v})$ qui est bien une relation fonctionnelle en w_0. On applique ZF4 à l'ensemble ambiant u et la formule ψ.

Question X.4.

Dans tout modèle de ZF, le produit ensembliste de deux ensembles est un ensemble.

Avec ZF4, on considère

$$\varphi(z, v_1, v_2) := \exists x \exists y \, (z = \{\{x\}, \{x, y\}\} \wedge x \in v_1 \wedge y \in v_2)$$

que l'on construit dans l'ensemble ambiant $\wp(\wp(v_1 \cup v_2))$.

En effet, on code (x, y) comme l'ensemble $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Question X.5.

Montrer que dans tout modèle de ZF, si a et b sont des ensembles alors la collection b^a des fonctions de a dans b est un ensemble.

Avec quelques abus de notations, on utilise ZF4 avec la formule

$$\varphi(f, a, b) := \begin{pmatrix} f \subseteq a \times b \\ \wedge \\ \forall x \forall y \forall y' \, (x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \to y = y' \\ \wedge \\ \forall x \, x \in a \to \exists y \, y \in b \wedge (x, y) \in f \end{pmatrix}$$

dans l'ensemble ambiant $a \times b$.

Question X.6.

Montrer que dans tout modèle de ZF, si a est une famille d'ensembles indexée par l'ensemble I, alors l'union (*resp.* l'intersection, le produit des a_i pour $i \in I$ est un ensemble.

Union. On pose $b := \{a_i \mid i \in I\}$ qui est bien un ensemble car on peut écrire b avec ZF4, avec la relation fonctionnelle :

$$\varphi(w_0, w_1, a) := (w_0, w_1) \in a.$$

Puis, par ZF2, on a $\bigcup_{i \in I} a_i = \bigcup_{z \in b} z$ qui est bien un ensemble.

Intersection. On pose $c := \bigcup_{i \in I} a_i$ qui est un ensemble par la propriété précédente. On considère, par ZF4′, la formule

$$\varphi(x, a, I) := \forall i \, i \in I \to x \in a_i$$

dans l'ensemble ambiant c pour construit $\bigcap_{i \in I} a_i$.

Produit. La collection $\prod_{i \in I} a_i$ est l'ensemble des fonctions de I dans $\bigcup_{i \in I} a_i$ telles que $f(i) \in a_i$ pour tout i. On peut l'exprimer avec ZF4

$$\varphi(f, a, I) := f \text{ est une relation fonctionnelle} \wedge \forall i \, f(i) \in a_i$$

dans l'ensemble ambiant $I \times \bigcup_{i \in I} a_i$.

XI. Cours XI.

Question XI.1.

Montrer que $\mathbb{R}$ et $\wp(\mathbb{N})$ ne sont pas équipotents.

Avec la fonction arctan (et modulo une transformation affine), on a que $(0,1)$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents. Ensuite, on a que $(0,1)$ est en bijection avec les mots binaires infinis sur l'alphabet $\{\texttt{0},\texttt{1}\}$ (par écriture binaire, on peut négliger les cas des écritures binaires non-uniques car on n'en a qu'un nombre dénombrable). Et ce dernier ensemble est équipotent à $\wp(N)$ (on regarde les indices des $\texttt{1}$ pour construire une partie, et réciproquement).

Question XI.2.

Montrer qu'un ordinal λ est limite ssi $\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \alpha$.

« $\Longleftarrow$ ». Par contraposée, si λ n'est pas limite, c'est le successeur d'un certain ordinal β. D'où $\lambda = \beta \cup \{\beta\}$ et donc

$$\bigcup_{\alpha\in\lambda} \alpha = \beta \cup \bigcup_{\alpha\in\beta} \alpha = \beta \neq \lambda.$$

« $\Longrightarrow$ ». Soit λ. Montrons qu'il n'a pas de plus grand élément β. Sinon, on aurait $\lambda = \beta\cup\{\beta\}$. Ainsi, pour tout $\alpha \in \lambda$, il existe $\gamma \in \lambda$ tel que $\alpha < \gamma$, d'où $\lambda = \bigcup_{\gamma\in\lambda} \gamma$.

Question XI.3.

Montrer le théorème d'induction transfinie.

Si, par l'absurde, $\mathscr{P}$ n'était pas vraie pour un certain α, soit β le plus petit ordinal de $\alpha \cup \{\alpha\}$ qui ne satisfait pas $\mathscr{P}$. Tous les ordinaux plus petits satisfont $\mathscr{P}$, d'où $\mathscr{P}(\beta)$. On en conclut qu'un tel α n'existe pas.

Question XI.4.

Montrer que ω est l'ensemble des ordinaux finis et que c'est le plus petit ordinal limite.

(1) Les éléments de ω sont finis (par récurrence normale). Réciproquement, tout ordinal fini est soit $\emptyset$ soit successeur d'un ordinal fini. Par récurrence (normale), on a que les ordinaux finis sont des entiers. On en conclut que ω est l'ensemble des ordinaux finis.

(2) Si ω n'était pas limite, ce serait un ordinal fini (car tous ses éléments sont finis). D'où $\omega \in \omega$, qui est impossible.

(3) Tout élément plus petit appartient à ω et les éléments de ω sont les successeurs de finis et $\emptyset$. Il n'y a donc pas d'ordinal limite plus petit que ω.

Question XI.5.

Montrer que si f est strictement croissante entre α et α' alors
(1) pour tout $\beta\in\alpha$, on a $f(\beta) \geqslant \beta$;
(2) $\alpha' \geqslant \alpha$;
(3) si f est un isomorphisme alors $\alpha = \alpha'$ et f est l'identité.

(1) Soit β le plus petit ordinal tel que $f(\beta) < \beta$. Alors, on a $f(f(\beta)) < f(\beta) < \beta$ ce qui est absurde car β est choisi comme plus petit.

(2) Soit $\beta \in \alpha$. On a $f(\beta) \in \alpha'$ et $\beta \leqslant f(\beta)$ implique que $\beta \in \alpha'$, d'où $\alpha \subseteq \alpha'$ et donc $\alpha \leqslant \alpha'$.

(3) On procède en deux temps.
- La réciproque $f^{-1} : \alpha' \to \alpha$ est strictement croissante d'où, par le point précédent, $\alpha = \alpha'$.
- Pour tout $\beta \in \alpha$ on a que $f_{|\beta}$ est strictement croissante et bijective de β dans $f(\beta)$ d'où $\beta = f(\beta)$ par le point précédent.

XII. Cours XII.

Question XII.1.

Montrer que AC1 implique AC2.

Soit a non vide. On considère $\prod_{\emptyset \neq x \subseteq a} x$ qui est non vide par AC1. Soit f un de ces éléments, on a bien une fonction de choix. En effet, pour tout sous-ensemble x non vide de a, on a $f(x) \in x$.

Question XII.2.

Montrer que AC2 implique AC3.

Soit a un ensemble dont les éléments sont non vides et deux à deux disjoints. On considère $b = \bigcup_{x \in a} x$ qui est un ensemble. Par AC2, on a une fonction de choix f sur $\wp(b)$. On prend $c = \{f(x) \mid x \in a\}$ et on a bien la propriété recherchée (car les x sont disjoints).

Question XII.3.

Montrer que AC3 implique AC1.

Soit $X = \prod_{i \in I} a_i$ un produit d'ensembles non vides. On considère l'ensemble $A := \{\{i\} \times a_i \mid i \in I\}$. Par AC3, il existe c tel que, pour tout élément $x \in A$, $x \cap c$ a un seul élément. Ainsi,

$$c =: \{(i, d_i) \mid i \in I \text{ et } d_i \text{ fixé} \in a_i\}.$$

On a donc $c \in \prod_{i \in I} a_i$ (c'est le graphe d'une fonction) et donc cet ensemble est non vide.

Question XII.4.

Montrer que AC2 implique Zermelo.

Soit a un ensemble non vide. Soit $f : \wp(a) \to a$ la fonction de choix. Considérons $\theta \notin a$.

On définit par induction transfinie,

$$F(\alpha) := \begin{cases} f(a \setminus \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}) & \text{si } \ a \setminus \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\} \neq \emptyset \\ \theta & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il existe un ordinal α tel que $F(\alpha) = \theta$ (car sinon F est une injection de $\mathscr{O}$ dans a, ***absurde***). Le sous-ensemble $\{\beta \in \alpha \mid F(\beta) = \theta\}$ est non vide donc a un plus petit sous ensemble β. Montrons que $F_{|\beta} : \beta \to \alpha$ est une bijection.

(1) D'une part, c'est une injection par construction.
(2) D'autre part, on a $F(\beta) = \theta$ donc $\{F(\gamma) \mid \gamma < \beta\} = a$ et ainsi $F_{|\beta}$ est une surjection.

On conclut en définissant le bon ordre $x \prec y$ ssi $F^{-1}(x) < F^{-1}(y)$.

Question XII.5.

Montrer que Zermelo implique AC2.

Soit a non vide. Il admet un bon ordre. On choisit $f(x) := \min x$ pour le bon ordre donné, c'est bien une fonction de choix.

Question XII.6.

Montrer que AC2 implique Zorn.

Soit a un ensemble inductif. Soit $f : \wp(a) \to a$ une fonction de choix donnée par AC2. On définit $C := \{x \subseteq a \mid x \text{ a un majorant strict dans } a\}$, qui est non vide car $\emptyset \in C$. On définit $m(x) := f(\{y \in a \mid y \text{ est un majorant strict de } x \text{ dans } a\})$ sur C.

Soit $\theta \notin a$.

Puis, par induction transfinie, on définit :

$$F(\alpha) := \begin{cases} m(\{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}) & \text{si } \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\} \in C \\ \theta & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce n'est pas une injection de $\mathscr{O}$ dans a donc il existe un ordinal α tel que $F(\alpha) = \theta$. Comme $\alpha + 1$ est un ordinal, l'ensemble $\{\beta \in \alpha \cup \{\alpha\} \mid F(\beta) = \theta\}$ a un plus petit élément α_0. D'où l'ensemble $\{F(\beta) \mid \beta < \alpha_0\}$ n'a pas de majorant strict mais a un majorant M car a est inductif. Et, a n'a pas d'éléments plus grand que a, donc M est maximal dans a.

Question XII.7.

Montrer que Zorn implique AC3.

Soit a un ensemble dont les éléments sont dijsoints et non vides. On pose $b := \bigcup_{x \in a} x$ et $X := \{c \subseteq b \mid \forall x \in a, |c \cap x| \leqslant 1\}$.

Montrons que l'ensemble $(X, \subsetneq)$ est inductif. Soit $Y \subseteq X$ est totalement ordonné. Montrons que Y a un majorant dans X. On pose l'ensemble $z = \bigcup_{y \in Y} y$ qui majore Y. On a bien $z \in X$ (on en duplique pas d'éléments).

Comme X est bien inductif, il existe d un élément maximal de X (par Zorn).

S'il existe $x \in a$ tel que $x \cap d = \emptyset$ alors prenons $u \in x$ et posons ainsi $d_1 := d \cup \{u\}$ d'où $d_1 \in X$ et $d \subsetneq d_1$ qui implique d non maximal, ***absurde***.

D'où, pour tout $x \in a$, on a $|d \cap x| = 1$, ce qui montre bien AC3.

XIII. Cours XIII.

Question XIII.1.

Montrer qu'une théorie T élimine les quantificateurs ssi pour toute formule $\varphi(x, \bar{y})$ sans quantificateur, il existe $\psi(\bar{y})$ sans quantificateur telle que

$$T \vdash \forall \bar{y}\ (\exists x\ \varphi(x, \bar{y}) \leftrightarrow \psi(\bar{y})).$$

L'implication directe est un cas particulier. La réciproque, on montre que que c'est vrai pour une formule sous forme prénexe.

- On peut éliminer un « $\exists$ » le plus à l'intérieur.
- On peut éliminer un « $\forall$ » le plus à l'intérieur également car

$$\forall \bar{y}\ (\forall x \varphi(x, \bar{y}) \leftrightarrow \neg(\exists x \neg\varphi(x, \bar{y})).$$

En itérant « du plus intérieur au plus extérieur », on élimine les quantificateurs petit à petit, jusqu'à obtenir $\psi(\bar{y})$ sans quantificateurs.

XIV. Cours XIV.

Question XIV.1.

Montrer que si φ admet comme modèle un corps algébriquement clos de caractéristique arbitrairement grande, alors φ admet comme modèle un corps de caractéristique nulle.

On rappelle que :

$$\mathrm{ACF}_0 := \text{Axiomes corps} \cup \{\mathrm{Clos}_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \Big\{\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} \neq 0 \mid n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Soit $T := \mathrm{ACF}_0 \cup \{\varphi\}$. Montrons que T a un modèle. Pour cela, on montre que T est finement satisfiable.

Soit $T' \subseteq_{\text{finie}} T$ et soit n le plus grand entier tel que

$$\Big(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} \neq 0\Big) \in T'.$$

Soit $p > n$ un nombre premier tel que φ admet comme modèle un corps algébrique clos $\Bbbk$ de caractéristique p (qui existe par hypothèse). Ainsi, on a : $\Bbbk \vDash \varphi$ et $\Bbbk \vDash \mathrm{ACF}_p$. D'où $\Bbbk \vDash T'$.

Ainsi T est finiment satisfiable donc satisfiable. On en déduit que φ admet un modèle de caractéristique 0.