Logique — TD n° 5 — Hugo SALOU

Exercice 1. Théorie des graphes.

Q1. pas de boucles : $\forall x \quad \neg R(x,x)$

non-orienté : $\forall x \, \forall y \quad R(x,y) \longleftrightarrow R(y,x)$.

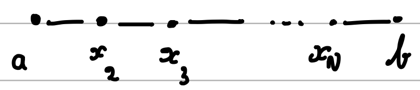
(l'implication simple suffit).

D'où $\mathrm{Th}(\text{Graphes non-orientés simples}) = \{ \forall x \quad \neg R(x,x),$
$\forall x \forall y \quad R(x,y) \longleftrightarrow R(y,x) \}$.

Q2. On pose $T' = T$ qui est une théorie sur $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$.

Q3. $\varphi_n = \overbrace{\forall x_1 \cdots \forall x_{n-1}}^{\text{pour } n \text{ fixé}} \neg (R(a, x_1) \wedge R(x_1, x_2) \wedge \cdots \wedge R(x_{n-1}, b))$

Q4. Oui. On considère $G = (V, E)$ décrit ci-dessous.
Soit $N = \max \{ n_1, \ldots, n_k \} + 1$.



Il est connexe, simple, non-orienté et non-vide.

Et, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, il n'y a pas de chemins de long° n_k entre a et b dans G.

Q5. Soit $T \supseteq A$ une théorie des graphes connexes.

On pose $T' := T \cup \{ \varphi_n \mid n \in \mathbb{N}^* \}$.

Toute partie finie de T' est satisfiable.
Par compacité, on a que T est satisfiable. Absurde car seul un graphe vide satisfait T'.

Exercice 2. Langage sans fonction.

Q1. Par récurrence sur n, montrons que :

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y_1 \cdots \exists y_k \; A[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k]$$

est un théorème ssi elle est satisfaite dans toute interprétation de card° au plus $n+m$.

- Pour $n=0$, $\overbrace{\exists y_1 \cdots \exists y_k \; A[y_1, \dots, y_k]}^{\varphi}$ est un théorème ssi

$$\forall \mathcal{M} \text{ modèle}, \forall e, \quad \mathcal{M}, e \models \varphi$$

Si on a un modèle de card $> m$, on peut le décomposer en modèles de card $\leq k$ par dénombrement.
D'où l'équivalence.

-

Q2. Dans $\mathcal{L} = \{c_1, \dots, c_m, f, =\}$,

on considère $A =$ " $f(y_1, y_2) = f(y_2, y_1) \wedge \neg(y_1 = y_2) \wedge \bigwedge_{i=3}^{k-1} (y_i = y_{i+1})$ ".

Dans le modèle

$\mathcal{M}: \{0,1\}$, $f_{\mathcal{M}} = \text{xor}$, $c_i = 0$

la formule A est fausse.

Exercice 3. Densité.

Q1. On a $(\mathbb{Q}, <)$ et $(\mathbb{R}, <)$ qui sont non-isomorphes.

Q2

Soit $\varphi := \forall x, \exists y \quad r(x,y)$.

Dans $(\mathbb{R},<)$, la formule φ est vérifiée
Dans $([0,1],<)$ la formule φ ne l'est pas.

D'où T n'est pas complète.

Q3. Soit un modèle $\mathcal{M}$.

Soient $x, y \in |\mathcal{M}|$ tels que $x < y$ (par A_2).

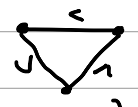
Construisons par récurrence des éléments de $\mathcal{M}$.

- on commence avec x, y
- par A_4, et comme $x < y$, il existe z tq $x < z < y$
- par A_4, ... $x < z$ .... w ..... $x < w < z$

Si $w \in \{x, y, z\}$, alors par A_2 et A_3 on a une absurdité.

D'où T n'admet pas de modèle fini.

Q4. T_1 : $(\{1\}, <)$
T_2 : $(\{1\}, \leq)$
T_3 :



T_4 $(\{0,1\}, <)$

Exercice 4. Modèle infini.

On pose $\varphi_k = \exists x_1 \dots \exists x_k \neg(x_1 = x_2) \wedge \dots \wedge \neg(x_{k-1} = x_k)$.

Toute sous-théorie finie A de $T' := T \cup \{\varphi_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ a un modèle (de card $>$ $\max\{k \in \mathbb{N} \mid \varphi_k \in A\} \in \mathbb{N}$ avec $\max \emptyset = 0$).

Par compacité, T' admet un modèle. S'il est fini de cardinal k, absurde car $\varphi_k \in T'$. Il admet donc un modèle infini $\mathcal{M}_\infty$.

La théorie T admet donc un modèle infini $\mathcal{M}_\infty$.