

Le calcul propositionnel.

Le *calcul propositionnel*, c'est la « grammaire » de la logique. Dans ce chapitre, on s'intéressera à

1. la construction des formules (\triangleright la syntaxe) ;
2. la sémantique et les théorèmes de compacité (\triangleright la compacité sémantique).

1 Syntaxe.

Définition 1. Le *langage*, ou *alphabet*, est un ensemble d'éléments fini ou pas. Les éléments sont les *lettres*, et les suites finies sont les *mots*.

Définition 2. On choisit l'alphabet :

- $\triangleright \mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots\}$ des variables propositionnelles ;
- \triangleright un ensemble de *connecteurs* ou *symboles logiques*, défini par $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, il n'y a pas \exists et \forall pour l'instant.
- \triangleright les parenthèses $\{(,)\}$.

Les formules logiques sont des mots. On les fabrique avec des briques de base (les variables) et des opérations de construction : si F_1 et F_2 sont deux formules, alors $\neg F$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \rightarrow F_2)$ et $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ aussi.

Définition 3 (« par le haut », « mathématique »). L'ensemble \mathcal{F} des formules du calcul propositionnel construit sur \mathcal{P} est le plus petit ensemble contenant \mathcal{P} et stable par les opérations de construction.

Définition 4 (« par le bas », « informatique »). L'ensemble \mathcal{F} des formules logiques du calcul propositionnel sur \mathcal{P} est défini par

$$\triangleright \mathcal{F}_0 = \mathcal{P};$$

$$\triangleright \mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \left\{ \begin{array}{c} \neg F_1 \\ (F_1 \vee F_2) \\ (F_1 \wedge F_2) \\ (F_1 \rightarrow F_2) \\ (F_1 \leftrightarrow F_2) \end{array} \middle| F_1, F_2 \in \mathcal{F}_n \right\}$$

puis on pose $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.

On peut montrer l'équivalence des deux définitions.

Théorème 1 (Lecture unique). Toute formule $G \in \mathcal{F}$ vérifie une et une seule de ces propriétés :

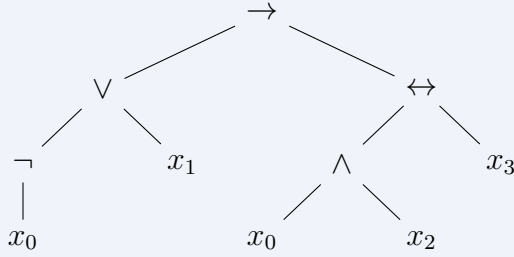
- $\triangleright G \in \mathcal{P}$;
- \triangleright il existe $F \in \mathcal{F}$ telle que $G = \neg F$;
- \triangleright il existe $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ telle que $G = (F_1 \vee F_2)$;
- \triangleright il existe $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ telle que $G = (F_1 \wedge F_2)$;
- \triangleright il existe $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ telle que $G = (F_1 \rightarrow F_2)$;
- \triangleright il existe $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ telle que $G = (F_1 \leftrightarrow F_2)$.

Preuve. En exercice. □

Corollaire 1. Il y a une bijection entre les formules et les arbres dont

- \triangleright les feuilles sont étiquetées par des variables ;
- \triangleright les nœuds internes sont étiquetés par des connecteurs ;
- \triangleright ceux étiquetés par \neg ont un fils, les autres deux.

Exemple 1. La formule $((\neg x_0 \vee x_1) \rightarrow ((x_0 \wedge x_2) \leftrightarrow x_3))$ correspond à l'arbre



2 Sémantique.

Lemme 1. Soit ν une fonction de \mathcal{P} dans $\{0, 1\}$ appelée *valuation*. Alors ν s'étend de manière unique en une fonction $\bar{\nu}$ de \mathcal{F} dans $\{0, 1\}$ telle que

- ▷ sur \mathcal{P} , $\nu = \bar{\nu}$;
- ▷ si $F, G \in \mathcal{F}$ sont des formules alors
 - $\bar{\nu}(\neg F) = 1 - \bar{\nu}(F)$;
 - $\bar{\nu}(F \vee G) = 1$ ssi $\bar{\nu}(F) = 1$ ou ¹ $\bar{\nu}(G) = 1$;
 - $\bar{\nu}(F \wedge G) = \bar{\nu}(F) \times \bar{\nu}(G)$;
 - $\bar{\nu}(F \rightarrow G) = 1$ ssi $\bar{\nu}(G) = 1$ ou $\bar{\nu}(F) = 0$;
 - $\bar{\nu}(F \leftrightarrow G) = 1$ ssi $\bar{\nu}(F) = \bar{\nu}(G)$.

Par abus de notations, on notera ν pour $\bar{\nu}$ par la suite.

Preuve. Existence. On définit en utilisant le lemme de lecture unique, et par induction sur \mathcal{F} :

- ▷ $\bar{\nu}$ est définie sur $\mathcal{F}_0 = \mathcal{P}$;
- ▷ si $\bar{\nu}$ est définie sur \mathcal{F}_n alors pour $F \in \mathcal{F}_{n+1}$, on a la disjonction de cas
 - si $F = \neg G$ avec $G \in \mathcal{F}_n$, et on définit $\bar{\nu}(F) = 1 - \bar{\nu}(F_1)$;
 - etc pour les autres cas.

Unicité. On montre que si $\lambda = \nu$ sur \mathcal{P} alors $\bar{\lambda} = \bar{\nu}$ si $\bar{\lambda}$ et $\bar{\nu}$

1. C'est un « ou » inclusif : on peut avoir les deux (ce qui est très différent du « ou » exclusif dans la langue française).

vérifient les égalités précédents.

□

Exemple 2 (Table de vérité). Pour la formule

$$F = ((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1)),$$

on construit la table

x_1	0	0	1	1
x_2	0	1	0	1
$x_1 \rightarrow x_2$	1	1	0	1
$x_2 \rightarrow x_1$	1	0	1	1
F	1	0	1	1

Définition 5. ▷ Une formule F est dite *satisfaite par une valuation* ν si $\nu(F) = 1$.

- ▷ Une *tautologie* est une formule satisfaite pour toutes les valuations.
- ▷ Un ensemble \mathcal{E} de formules est *satisfiable* s'il existe une valuation qui satisfait toutes les formules de \mathcal{E} .
- ▷ Un ensemble \mathcal{E} de formules est *finiment satisfiable* si tout sous-ensemble fini de \mathcal{E} est satisfiable.
- ▷ Une formule F est *conséquence sémantique* d'un ensemble de formules \mathcal{E} si toute valuation qui satisfait \mathcal{E} satisfait F .
- ▷ Un ensemble de formules \mathcal{E} est *contradictoire* s'il n'est pas satisfiable.
- ▷ Un ensemble de formules \mathcal{E} est *finiment contradictoire* s'il existe un sous-ensemble fini contradictoire de \mathcal{E} .

Théorème 2 (compacité du calcul propositionnel). On donne trois énoncés équivalents (équivalence des trois énoncés laissée en exercice) du théorème de compacité du calcul propositionnel.

Version 1. Un ensemble de formules \mathcal{E} est satisfiable si et seulement s'il est finiment satisfiable.

Version 2. Un ensemble de formules \mathcal{E} est contradictoire si et seulement s'il est finiment contradictoire.

Version 3. Pour tout ensemble \mathcal{E} de formules du calcul propositionnel, et toute formule F , F est conséquence sémantique de \mathcal{E} si et seulement si F est conséquence sémantique d'un sous-ensemble fini de \mathcal{E} .

Preuve. Dans le cas où $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots\}$ est au plus dénombrable (le cas non dénombrable sera traité après). On démontre le cas « difficile » de la version 1 (*i.e.* finiment satisfiable implique satisfiable). Soit \mathcal{E} un ensemble de formules finiment satisfiable. On construit par récurrence une valuation ν qui satisfasse \mathcal{E} par récurrence : on construit $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n, \dots$ tels que $\nu(x_0) = \varepsilon_0, \dots, \nu(x_n) = \varepsilon_n, \dots$

▷ Cas de base. On définit la valeur de ε_n pour $x_0 \in \mathcal{P}$.

1. soit, pour tout sous-ensemble fini B de \mathcal{E} , il existe une valuation λ qui satisfait B avec $\lambda(x_0) = 0$;
2. soit, il existe un sous-ensemble fini B_0 de \mathcal{E} , pour toute valuation λ qui satisfait B_0 , on a $\lambda(x_0) = 1$.

Si on est dans le cas 1, on pose $\varepsilon_0 = 0$, et sinon (cas 2) on pose $\varepsilon_0 = 1$.

▷ Cas de récurrence. On montre, par récurrence sur n , la propriété suivante :

il existe une suite $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n$ (que l'on étend, la suite ne change pas en fonction de n) de booléens telle que, pour tout sous-ensemble fini B de \mathcal{E} , il existe une valuation ν satisfaisant B et telle que $\nu(x_0) = \varepsilon_0, \dots$, et $\nu(x_n) = \varepsilon_n$.

- Pour $n = 0$, soit on est dans le cas 1, et on prend $\varepsilon_0 = 0$ et on a la propriété ; soit on est dans le cas 2 ;, et on prend B un sous-ensemble fini de \mathcal{E} , alors $B \cup B_0$ est

un ensemble fini donc satisfiable par une valuation ν . La valuation satisfait B_0 donc $\nu(x_0) = 1$ et ν satisfait B . On a donc la propriété au rang 0.

- Hérédité. Par hypothèse de récurrence, on a une suite $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n$.
 1. Soit, pour tout sous-ensemble fini B de \mathcal{E} , il existe ν qui satisfait B et telle que $\nu(x_0) = \varepsilon_0, \dots, \nu(x_n) = \varepsilon_n$, et $\nu(x_{n+1}) = 0$. On pose $\varepsilon_{n+1} = 0$.
 2. Soit il existe B_{n+1} un sous-ensemble fini de \mathcal{E} tel que, pour toute valuation ν telle que ν satisfait B_{n+1} et $\nu(x_0) = \varepsilon_0, \dots, \nu(x_n) = \varepsilon_n$, on a $\nu(x_{n+1}) = 1$ et on pose $\varepsilon_{n+1} = 1$.

Montrons l'hérédité :

1. vrai par définition ;
2. soit B un sous-ensemble fini de \mathcal{E} . On considère $B \cup B_{n+1}$, soit ν telle que $\nu(x_0) = \varepsilon_0, \dots, \nu(x_n) = \varepsilon_n$. On a que ν satisfait B_{n+1} donc $\nu(x_{n+1}) = 1 = \varepsilon_{n+1}$ et ν satisfait B .

On a donc la propriété pour tout n .

Finalement, soit δ une valuation telle que, pour tout i , $\delta(x_i) = \varepsilon_i$. Montrons que δ satisfait \mathcal{E} . Soit $F \in \mathcal{E}$. On sait que F est un mot (fini), donc contient un ensemble fini de variables inclus dans $\{x_0, \dots, x_n\}$. D'après la propriété par récurrence au rang n , il existe une valuation ν qui satisfait F et telle que $\nu(x_0) = \varepsilon_0, \dots, \nu(x_n) = \varepsilon_n$, et donc ν et δ coïncident sur les variables de F . Donc (lemme simple), elles coïncident sur toutes les formules qui n'utilisent que ces variables. Donc, $\delta(F) = 1$, et on en conclut que δ satisfait \mathcal{E} . \square

Dans le cas non-dénombrable, on utilise le *lemme de Zorn*, un équivalent de l'*axiome du choix*.

Définition 6. Un ensemble ordonné (X, \mathcal{R}) est inductif si pour

tout sous-ensemble Y de X totalement ordonné par \mathcal{R} (*i.e.* une chaîne) admet un majorant dans X .

Remarque 1. On considère ici un majorant et non un plus grand élément (un maximum).

Exemple 3. 1. Dans le cas $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, le majorant est l'union des parties de la chaîne, il est donc inductif.
2. Dans le cas (\mathbb{R}, \leq) , il n'est pas inductif car \mathbb{R} n'a pas de majorant dans \mathbb{R} .

Lemme 2 (Lemme de Zorn). Si (X, \mathcal{R}) est un ensemble ordonné inductif non-vidé, il admet au moins un élément maximal.

Remarque 2. Un élément maximal n'est pas nécessairement le plus grand.

Preuve. Soit \mathcal{E} un ensemble de formules finiment satisfiable, et \mathcal{P} un ensemble de variables. On note \mathcal{V} l'ensemble des valuations partielles prolongeables pour toute partie finie \mathcal{C} de \mathcal{E} en une valuation satisfaisant \mathcal{C} . C'est-à-dire :

$$\mathcal{V} := \left\{ \varphi \in \bigcup_{X \subseteq \mathcal{P}} \{0, 1\}^X \mid \forall \mathcal{C} \in \wp_f(\mathcal{E}), \exists \delta \in \{0, 1\}^{\mathcal{P}}, \begin{array}{l} \delta|_{\text{dom } \varphi} = \varphi \\ \forall F \in \mathcal{C}, \delta(F) = 1 \end{array} \right\}.$$

L'ensemble \mathcal{V} est non-vidé car contient l'application vide de $\{0, 1\}^\emptyset$ car \mathcal{E} est finiment satisfiable. On définit la relation d'ordre \preceq sur \mathcal{V} par :

$$\varphi \preceq \psi \quad \text{ssi} \quad \psi \text{ prolonge } \varphi.$$

Montrons que (\mathcal{V}, \preceq) est inductif. Soit \mathcal{C} une chaîne de \mathcal{V} et construisons un majorant de \mathcal{C} . Soit λ la valuation partielle définie sur $\text{dom } \lambda = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{C}} \text{dom } \varphi$, par : si $x_i \in \text{dom } \lambda$ alors il existe $\varphi \in \mathcal{C}$ tel que $x_i \in \text{dom } \varphi$ et on pose $\lambda(x_i) = \varphi(x_i)$.

La valuation λ est définie de manière unique, *i.e.* ne dépend pas du choix de φ . En effet, si $\varphi \in \mathcal{C}$ et $\psi \in \mathcal{C}$, avec $x_i \in \text{dom } \varphi \cap \text{dom } \psi$, alors on a $\varphi \preceq \psi$ ou $\psi \preceq \varphi$, donc $\varphi(x_i) = \psi(x_i)$.

Autrement dit, λ est la limite de \mathcal{C} . Montrons que $\lambda \in \mathcal{V}$. Soit B une partie finie de \mathcal{E} . On cherche μ qui prolonge λ et satisfait B . L'ensemble de formules B est fini, donc utilise un ensemble fini de variables, dont un sous-ensemble fini $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\} \subseteq \text{dom}(\lambda)$. Il existe $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ dans \mathcal{C} telle que $x_{i_1} \in \text{dom } \varphi_1, \dots, x_{i_n} \in \text{dom } \varphi_n$. Comme \mathcal{C} est une chaîne, donc soit $\varphi_0 = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \varphi_i$ et on a $\varphi_0 \in \mathcal{C}$. On a, de plus, $x_{i_1}, \dots, x_{i_n} \in \text{dom } \varphi_0$. Soit $\varphi_0 \in \mathcal{V}$ prolongeable en ψ_0 qui satisfait B . On définit :

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{P} &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x \in \text{dom } \lambda &\longmapsto \lambda(x) \\ x \in \text{var } B &\longmapsto \psi_0(x) \\ \text{sinon} &\longmapsto 0. \end{aligned}$$

On vérifie que la définition est cohérente sur l'intersection car λ et ψ_0 prolongent tous les deux φ_0 et donc $\lambda \in \mathcal{V}$ d'où \mathcal{V} est inductif.

Soit γ un élément maximal de \mathcal{V} . Pour montrer le théorème, il suffit de montrer que $\text{dom } \gamma = \mathcal{P}$. Si $\text{dom } \gamma \neq \mathcal{P}$, soit $x \notin \text{dom } \gamma$. Montrons que γ n'est pas maximal en définissant $\gamma' \in \mathcal{V}$ qui vérifie $\gamma \prec \gamma'$. On prend $\text{dom } \gamma' = \text{dom } \gamma \cup \{x\}$.

- ▷ Si, pour toute partie finie B de \mathcal{E} , il existe une valuation δ qui prolonge γ et qui satisfait B telle que $\delta(x) = 0$, alors on pose $\gamma'(x) = 0$.
- ▷ Sinon, on pose $\gamma'(x) = 1$.

Montrons que $\gamma' \in \mathcal{V}$. Soit B un ensemble fini de formules de \mathcal{E} .

- ▷ Si $\gamma'(x) = 0$ alors il existe une valuation δ prolongeant γ et satisfaisant B telle que $\delta(x) = 0$, et donc δ prolonge γ' .
- ▷ Si $\gamma'(x) = 1$ alors il existe une partie finie B_0 de \mathcal{E} telle que toute valuation δ prolongeant γ et satisfaisant B_0 vérifie que $\delta(x) = 1$. On choisit une valuation qui prolonge γ et satisfait $B \cup B_0$; elle prolonge γ' .

On a donc une contradiction avec la maximalité de γ . On en conclut que $\text{dom } \gamma = \mathcal{P}$, ce qui termine la preuve du théorème. \square