

# DM n°2

## *Mesure & Intégration*

*Hugo SALOU*  
*Dept. Informatique*



*9 décembre 2024*

# Exercice 1.

1. Pour la linéarité de  $\ell_N$ , on utilise la linéarité de la somme, et la linéarité des fonctions  $c_n$  : si  $f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  alors

$$\begin{aligned} c_n(f + \alpha g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) + \alpha g(t)) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt + \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt \\ &= c_n(f) + \alpha c_n(g). \end{aligned}$$

Pour montrer que  $\ell_N$  est continue, on montre que c'est une somme finie de fonctions continues car 1-lipschitzienne. En effet,

$$\begin{aligned} |c_n(f)| &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_{\infty} dt \\ &\leq \|f\|_{\infty}, \end{aligned}$$

et il en découle que  $\ell_N$  est  $2N$ -lipschitzienne, donc continue. De plus, on a que, pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$  telle que  $\|f\|_{\infty} \leq 1$ ,

$$\ell_N(f) = \sum_{n \in \llbracket -N, N \rrbracket} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(-t) dt,$$

d'où, par inégalité triangulaire,

$$|\ell_N(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| |D_N(-t)| dt \leq \|f\|_{\infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| dt}_{\|D_N\|_1}.$$

Ainsi, comme  $\|f\|_{\infty} \leq 1$ , on en déduit  $|\ell_N(f)| \leq \|D_N\|_1$  quel que soit  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$  avec  $\|f\|_{\infty} \leq 1$ . On a donc un majorant de la fonction  $|\ell_N|$ . D'où  $\|\ell_N\| \leq \|D_N\|_1$  par sup.

2. Considérons, comme indiqué dans l'indication, les fonctions  $f_{\varepsilon}$  où  $f_{\varepsilon}(t) = D_N(t)/(|D_N(t)| + \varepsilon)$  pour  $\varepsilon > 0$ . D'une part, on sait que  $f_{\varepsilon}$  est  $2\pi$ -périodique. De plus, la continuité vient de la continuité de  $D_N$  (plus facile à voir sur l'expression avec la somme), et car  $|D_N(t)| + \varepsilon \geq \varepsilon > 0$  si  $\varepsilon > 0$ . En utilisant l'égalité sur  $\ell_N(f)$  précédente, on calcule

$$\ell_N(f_{\varepsilon}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{D_N^2(t)}{|D_N(t)| + \varepsilon} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|D_N(t)|^2}{|D_N(t)| + \varepsilon} dt.$$

Or,  $g_{\varepsilon} = |D_N|^2/(|D_N| + \varepsilon)$  converge presque partout vers  $|D_N|$  lorsque l'on a  $\varepsilon \rightarrow 0$ . De plus,  $g_{\varepsilon}$  est dominée par  $|D_N|$  intégrable. Par le théorème de convergence dominée,

$$|\ell_N(f_{\varepsilon})| = \ell_N(f_{\varepsilon}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| dt = \|D_N\|_1.$$

On vérifie aisément que

- ▷  $f_{\varepsilon}$  est  $2\pi$ -périodique et continue (simple à remarquer à partir de la forme de somme d'exponentielles) ;
- ▷  $\|f_{\varepsilon}\|_{\infty} = \sup_{t \in ]-\pi, \pi[} |D_N(t)|/(|D_N(t)| + \varepsilon) \leq 1$ .

On en conclut que

$$\|\ell_N\| = \|D_N\|_1.$$

## 3. On a

$$\begin{aligned}
\|D_N\|_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin[(2N+1)t/2]|}{|\sin t/2|} \, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2N+1)u|}{|\sin u|} \, du \\
&\geq \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2N+1)u|}{|u|} \, du \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-N\pi-\frac{\pi}{2}}^{N\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin v|}{|v|} \, dv \\
&\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\sin v|}{|v|} \, dv = +\infty.
\end{aligned}$$

Par minoration, on en déduit que  $\|\ell_N\| \rightarrow +\infty$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ .

4. On applique le théorème de Banach-Steinhaus où les espaces vectoriels sont  $E = (\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_{\infty})$  et  $F = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ . Pour démontrer que l'espace vectoriel  $\mathcal{C}_{2\pi}$  est complet, on utilise la complétude de  $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_L)$ . Considérons une suite de Cauchy  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions dans  $\mathcal{C}_{2\pi}$ . La suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy de  $L^1(\mathbb{R})$ , espace complet, qui converge donc vers  $g \in L^1(\mathbb{R})$ . Or, car la convergence est pour la norme infini, la convergence des  $g_n$  est uniforme vers  $g$ . On sait ainsi que  $g$  est continue (car les  $g_i$  le sont), par unicité de la limite,

$$g(x+2\pi) \xleftarrow{\infty \leftarrow n} g_n(x+2\pi) = g_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x).$$

On en conclut que  $g$  est dans  $\mathcal{C}_{2\pi}$ . L'espace  $E$  est donc complet. On peut donc appliquer le théorème de Banach-Steinhaus avec les applications linéaires continues  $(\ell_i)_{i \in \mathbb{N}}$  (c.f. question 1) de  $E$  dans  $F$ . Deux cas sont donc possibles.

- ▷ Ou bien la famille  $(\|\ell_i\|)_{i \in \mathbb{N}}$  est bornée, **absurde** par la question 3.

- ▷ Ou bien il existe une intersection  $A$  dénombrable d'ouverts denses dans  $\mathcal{C}_{2\pi}$  telle que  $\sup_{N \in \mathbb{N}} |\ell_N(f)| = +\infty$  pour toute fonction  $f \in A$ , *i.e.* que la série de Fourier de  $f$  diverge en 0.

## Exercice 2.

1. Pour montrer que  $\phi_g$  est bien défini, il suffit de montrer que si  $g$  et  $g'$  sont égales  $\mu$ -presque partout, alors quel que soit  $f$ , les fonctions  $f \cdot g$  et  $f \cdot g'$  sont égales  $\mu$ -presque partout. Ainsi, on a l'égalité  $\int_{\Omega} f(x) g(x) \mu(dx) = \int_{\Omega} f(x) g'(x) \mu(dx)$ , d'où  $\phi_g = \phi_{g'}$ .

De plus, par l'inégalité de Hölder, on a que

$$\left| \int_{\Omega} f g \, d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f g| \, d\mu \leq \|f\|_{L^p} \times \|g\|_{L^q},$$

qui est fini car les deux termes sont finis : on a bien  $\phi_g(f) \in \mathbb{R}$ . On en conclut que  $\phi$  est bien définie.

La linéarité de  $\phi_g$  vient simplement de la linéarité du produit de fonctions et de la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha g + \beta h}(f) &= \int_{\Omega} (\alpha g(x) + \beta h(x)) f(x) \, dx \\ &= \alpha \int_{\Omega} g(x) f(x) \, dx + \beta \int_{\Omega} h(x) f(x) \, dx \\ &= \alpha \phi_g(f) + \beta \phi_h(f). \end{aligned}$$

Pour la continuité, il suffit de remarquer que  $\phi$  est 1-lipschitzienne. En effet, on veut montrer que (par linéarité)

$$\|\phi_g\|_{(L^p)^*} := \sup_{\|f\|_{L^p}=1} |\phi_g(f)| \leq \|g\|_{L^q}.$$

Soit  $f \in L^p$  telle que  $\|f\|_{L^p} = 1$ . Alors, par l'inégalité de Hölder, on a que

$$|\phi_g(f)| = \left| \int_{\Omega} f g \, d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f g| \, d\mu \leq \|g\|_{L^q} \times \|f\|_{L^p},$$

- 6/8 -

et ce, quel que soit  $f$  de norme  $L^p$  valant 1. Ainsi  $\|\phi(g)\|_{(L^p)^*} \leq \|g\|_{L^q}$  et on en déduit que  $\phi$  est 1-lipschitzienne donc continue.

- 2.** Dans la question 1, on a montré  $(\star)$  :  $\|\phi_g\|_{(L^p)^*} \leq \|g\|_{L^q}$ . Il ne reste qu'à montrer l'autre inégalité. Considérons la fonction étagée  $u_g = \mathbf{1}_{\{g(x)>0\}} - \mathbf{1}_{\{g(x)<0\}}$ . Elle est bien définie car, si on a  $g = g' \mu$ -presque partout, alors  $u_g = u_{g'}$   $\mu$ -presque partout. On vérifie que  $g = u_g |g|$  : la fonction  $u_g$  donne le signe de  $g$ . Et, elle est mesurable car l'application  $g/|g|$  l'est comme quotient de deux fonctions mesurables. On pose  $h_{p,g} = u_g / \sqrt[p]{\mu(\Omega)}$  où  $\mu(\Omega) \geq 0$  est fini par hypothèse. La fonction  $h_g$  est donc mesurable. Ainsi, on a

$$\int_{\Omega} |h_{p,g}|^p d\mu = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} |u_g|^p d\mu = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} d\mu = 1.$$

D'où,  $\|h_{p,g}\|_{L^p} = 1$ . Or,

$$\left| \int_{\Omega} h_{p,g} g d\mu \right| = \left| \int_{\Omega} |g| d\mu \right| = \int_{\Omega} |g| d\mu \leq \|g\|_{L^q},$$

car  $q \geq 2$ . On en conclut que  $\|\phi_g\|_{(L^p)^*} \geq \|g\|_{L^q}$ , où l'on a égalité avec l'inégalité  $(\star)$  précédente.

- 3.** Comme  $\gamma \in (L^p)^*$ , on sait que  $\gamma : L^p \rightarrow \mathbb{R}$  est une application linéaire continue.

- a)** On applique le théorème de représentation de Riesz à l'application linéaire continue  $\gamma|_{L^2} : L^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . En effet, on a l'inclusion de  $L^2 \subseteq L^p$  car  $1 \leq p < 2$  et  $\Omega$  est de mesure finie (vu en TD). Et, on sait que  $L^2$  est un espace de Hilbert. Ceci justifie l'utilisation du théorème de représentation de Riesz, et on obtient donc qu'il existe  $g \in L^2$  tel que pour tout  $f \in L^2$ ,

$$\gamma|_{L^2}(f) = \langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} f g d\mu.$$

- b)** Montrons que  $\|g\|_{L^p}$  est finie. Considérons la suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où l'on pose  $g_n := u|g|^{q-1} \mathbf{1}_{\{|g| \leq n\}}$ . La suite  $(|g_n|)$  est croissante et converge vers  $|g|^{q-1}$ . Ainsi, par le théorème de

$$\gamma(g_n) = \int_{\Omega} g g_n \, d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |g|^q \, d\mu.$$

Et  $|\gamma(g_n)| \leq \|\gamma\|_{(L^p)^*} \|g_n\|_{L^p}$  est finie car

- ▷  $\|\gamma\|_{(L^p)^*} < +\infty$  car  $\gamma$  est continue ;
- ▷  $\|g_n\|_{L^p}^p = \int_{\{|g| \leq n\}} |g|^{(q-1)p} \, d\mu = \int_{\{|g| \leq n\}} |g|^p \, d\mu \leq \|g\|_{L^p}^p$ ,  
qui est finie par l'inclusion  $L^2 \subseteq L^p$ .

On sait donc que  $\|g\|_{L^q}$  est finie car majorée. On en conclut que  $g \in L^q$ .

4. Pour une forme linéaire continue  $\gamma \in (L^p)^*$ , on a trouvé  $g \in L^q$  tel que  $(\phi_g)|_{L^2} = \gamma|_{L^2}$ . Soit  $f \in L^p$  quelconque. Par densité de  $L^2$  dans  $L^p$ , il existe une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions dans  $L^2$  convergent vers  $f$ . Ainsi,

$$\phi_g(f) \xleftarrow{\infty \leftarrow n} \phi_g(f_n) = \gamma(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma(f),$$

par continuité de  $\phi_g$  (question 1) et de  $\gamma$  (car  $\gamma \in (L^p)^*$ ). Ainsi, on a bien  $\phi_g(f) = \gamma(f)$  quel que soit  $f \in L^p$ . On en conclut que l'on a  $\phi_g = \gamma$  et donc que  $\phi$  est surjective.

5. Il ne reste qu'à démontrer que  $\phi$  est injective. Soit  $g \in \ker \phi$ . Ainsi, pour tout  $f \in L^p$ , on a  $\phi_g(f) = 0$ . D'où,  $\|\phi_g\|_{(L^p)^*} = 0$ , et donc (question 2)  $\|g\|_{L^q} = 0$ . Or, par séparation de la norme, on a que  $g = 0$  (nulle  $\mu$ -presque partout implique nulle dans le quotient). On en déduit que  $\ker \phi$  est réduit au singleton trivial ; l'application  $\phi$  est donc injective.

On en conclut que  $\phi : L^q \rightarrow (L^p)^*$  est un isomorphisme continu, et on a donc  $L^q \cong (L^p)^*$ .

*Fin du DM.*