DM n°1 – Logique

Hugo Salou

ENS DE LYON

21 février 2025

1 Complétude du calcul propositionnel

Avant de commencer dans l'exercice, fixons quelques notations, et quelques précisions.

On utilise le système de règles classiques habituel, mais où l'on ajoute deux règles : le *tiers exclu* te et la *réécriture* rewrite.

$$\dfrac{}{\Gamma \vdash F \vee \neg F}\ \mathsf{te} \qquad \dfrac{\vdash F \leftrightarrow G \qquad \Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F}\ \mathsf{rewrite}\ .$$

On peut se l'autoriser car ces deux règles sont dérivables dans le système de règles classiques habituel. Il suffirait donc de remplacer les utilisations de te et rewrite par les morceaux d'arbres ci-dessous.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\neg(P \vee \neg P), P \vdash P$}
\RightLabel{$\vee_{\mathsf{i}}^{\mathsf{g}}$}
\UnaryInfC{$\neg(P \vee \neg P), P \vdash P \vee \neg P$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\neg(P \vee \neg P), P \vdash \neg(P \vee \neg P)$}
\RightLabel{$\neg_{\mathsf{e}}$}
\BinaryInfC{$\neg(P \vee \neg P), P \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg_{\mathsf{i}}$}
\UnaryInfC{$\neg(P \vee \neg P) \vdash \neg P$}
\RightLabel{$\vee_{\mathsf{i}}^{\mathsf{d}}$}
\UnaryInfC{$\neg(P \vee \neg P) \vdash P \vee \neg P$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\neg(P \vee \neg P) \vdash \neg(P \vee \neg P)$}
\RightLabel{$\neg_{\mathsf{e}}$}
\BinaryInfC{$\neg(P \vee \neg P) \vdash$}
\RightLabel{$\bot_{\mathsf{c}}$}
\UnaryInfC{$\vdash P \vee \neg P$}
\RightLabel{aff}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash P \vee \neg P$}
\end{prooftree}
$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash F \leftrightarrow G}{\vdash G \to F}\ \wedge_{\mathsf{e}}^{\mathsf{d}}}{\Gamma \vdash G \to F}\ \mathsf{aff} \qquad \Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F}\ \to_{\mathsf{e}}$$

On s'autorise également les résultats du TD 2, et notamment de l'exercice 5 (ainsi que des résultats très similaires) :

1. pour tout $P, Q \in \mathscr{F}$, $\vdash (P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$;
2. pour tout $P, Q \in \mathscr{F}$, $\vdash (P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$;
3. pour tout $P, Q, R \in \mathscr{F}$, $\vdash (P \vee Q) \vee R \leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$;
4. pour tout $P, Q, R \in \mathscr{F}$, $\vdash (P \wedge Q) \wedge R \leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$;
5. pour tout $P, Q, R \in \mathscr{F}$, $\vdash (P \wedge Q) \vee R \leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$;
6. pour tout $P, Q, R \in \mathscr{F}$, $\vdash (P \vee Q) \wedge R \leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$;
7. pour tout $P, Q, R \in \mathscr{F}$, $\vdash P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$;
8. pour tout $P, Q, R \in \mathscr{F}$, $\vdash P \vee (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Ces résultats sont

- ▷ pour 1–2, la « commutativité » de $\vee$ et $\wedge$;
- ▷ pour 3–4, l'« associativité » de $\vee$ et $\wedge$;
- ▷ pour 5–8, les « lois de De Morgan ».

Les termes sont entre guillemets car $\vee$ et $\wedge$ ne sont vraiment pas commutatif et associatifs (les formules $P \vee Q$ et $Q \vee P$ sont différentes), mais on peut considérer qu'ils le sont en utilisant la règle rewrite définie précédemment. C'est ce que nous ferrons pour le reste de l'exercice.

Ces considérations de réécriture sont nécessaires : dans l'énoncé on note $\bigwedge E$ où E est un ensemble de formules, et pour qu'il n'y ait pas d'ambigüité, il est nécessaire que $\wedge$ soit commutatif et associatif « à réécriture près ».

Quitte à rajouter des notations, on notera $\mathbb{B}^{\mathscr{V}}$ l'ensemble des valuations sur $\mathscr{V}$, où $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. Pour une valuation v sur $\mathscr{V} \setminus \{X_n\}$, on notera $v[X_n \mapsto b] := v'$ la valuation sur $\mathscr{V}$ définie par $v'(X_n) = b$ et par $v'\big|_{\mathscr{V} \setminus \{X_n\}} = v$.

Enfin, on notera $\Phi(\mathscr{V})$ la formule (définie à réécriture près)

$$\Phi(\mathscr{V}) := \bigvee_{v \in \mathbb{B}^{\mathscr{V}}} \varphi(v).$$

Q1. On procède par récurrence sur n pour montrer $\vdash \Phi(\mathscr{V})$.

▷ Pour $\mathscr{V} = \{X_1\}$, on a deux valuations sur $\mathscr{V}$:

$$\mathbb{B}^{\mathscr{V}} = \{X_1 \mapsto 0, X_1 \mapsto 1\},$$

et donc $\Phi(\{X_1\}) = X_1 \vee \neg X_1$. Montrons $\vdash \Phi(\mathscr{V})$:

$$\dfrac{}{X_1 \vee \neg X_1}\ \textsf{te}\ .$$

▷ Pour $\mathscr{V} = \{X_1, \dots, X_{n+1}\}$, on pose

$$\mathscr{V} = \underbrace{\{X_1, \dots, X_n\}}_{=:\mathscr{V}'} \sqcup \{X_{n+1}\},$$

et par hypothèse de récurrence, on a $\vdash \Phi(\mathscr{V}')$. On a la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{B}^{\mathscr{V}} = \quad & \left\{ v'[X_{n+1} \mapsto 1] \;\middle|\; v' \in \mathbb{B}^{\mathscr{V}'} \right\} \\ \sqcup & \left\{ v'[X_{n+1} \mapsto 0] \;\middle|\; v' \in \mathbb{B}^{\mathscr{V}'} \right\}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\Phi(\mathscr{V}) = \Big(\Phi(\mathscr{V}') \vee X_{n+1}\Big) \wedge \Big(\Phi(\mathscr{V}') \vee \neg X_{n+1}\Big).$$

Montrons $\vdash \Phi(\mathscr{V})$:

$$\dfrac{[\text{résultat } 8] \qquad \dfrac{\vdash \Phi(\mathscr{V}') \qquad \dfrac{}{\vdash X_{n+1} \vee \neg X_{n+1}}\ \textsf{te}}{\vdash \Phi(\mathscr{V}') \wedge (X_{n+1} \vee \neg X_{n+1})}\ \wedge_{\textsf{i}}}{\vdash \underbrace{\Big(\Phi(\mathscr{V}') \vee X_{n+1}\Big) \wedge \Big(\Phi(\mathscr{V}') \vee \neg X_{n+1}\Big)}_{\Phi(\mathscr{V})}}\ \textsf{rewrite}\ .$$

D'où l'hérédité. On en conclut que le résultat est vrai pour tout ensemble fini $\mathscr{V}$.

Q2. On procède par induction sur $F \in \mathscr{F}$ pour montrer que toute valuation v sur $\mathscr{V}$, si $v(F) = 1$ alors $\varphi(v) \vdash F$ et si $v(F) = 0$ alors $\varphi(v) \vdash \neg F$. On a *5* cas.

▷ On se place dans le cas $F = X_i$ pour un certain indice $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $v \in \mathscr{V}$. On note

$$\varphi'(v) := \varphi(v\big|_{\mathscr{V}\setminus\{X_i\}}).$$

– Si $v(X_i) = 1$ alors, on a la preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi(v), X_i \land \tilde{\varphi}(v) \vdash X_i}\ \mathsf{ax}}{\varphi(v), X_i \land \tilde{\varphi}(v) \vdash X_i}\ \land_\mathsf{e}^\mathsf{g}}{\varphi(v) \vdash X_i \land \tilde{\varphi}(v) \to X_i}\ \to_\mathsf{i} \qquad \dfrac{[\text{résultats } 4/2] \qquad \dfrac{}{\varphi(v) \vdash \varphi(v)}\ \mathsf{ax}}{\varphi(v) \vdash X_i \land \tilde{\varphi}(v)}\ \mathsf{rewrite}^\star}{\varphi(v) \vdash X_i}\ \to_\mathsf{e} \quad ,$$

où lorsque l'on a écrit « $\mathsf{rewrite}^\star$ », on applique la règle $\mathsf{rewrite}$ $2i - 1$ fois avec l'associativité (i fois) et la commutativité ($i - 1$ fois) en alternance.

– Si $v(X_i) = 0$ alors on a la preuve très similaire à la précédente :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi(v), \neg X_i \land \tilde{\varphi}(v) \vdash \neg X_i}\ \mathsf{ax}}{\varphi(v), \neg X_i \land \tilde{\varphi}(v) \vdash \neg X_i}\ \land_\mathsf{e}^\mathsf{g}}{\varphi(v) \vdash \neg X_i \land \tilde{\varphi}(v) \to \neg X_i}\ \to_\mathsf{i} \qquad \dfrac{[\text{résultats } 4/2] \qquad \dfrac{}{\varphi(v) \vdash \varphi(v)}\ \mathsf{ax}}{\varphi(v) \vdash \neg X_i \land \tilde{\varphi}(v)}\ \mathsf{rewrite}^\star}{\varphi(v) \vdash \neg X_i}\ \to_\mathsf{e} \quad .$$

▷ Dans le cas $F = G \lor H$, soit v une valuation sur $\mathscr{V}$.

- Si $v(F) = 1$, alors $v(G) = 1$ ou $v(H) = 1$.
  - Si $v(G) = 1$, alors $\varphi(v) \vdash G$ par hypothèse d'induction, et donc
  $$\dfrac{\varphi(v) \vdash G}{\varphi(v) \vdash G \vee H}\ \vee_{\mathsf{i}}^{\mathsf{g}}.$$
  - Si $v(H) = 1$, alors $\varphi(v) \vdash H$ par hypothèse d'induction, et donc
  $$\dfrac{\varphi(v) \vdash H}{\varphi(v) \vdash G \vee H}\ \vee_{\mathsf{i}}^{\mathsf{d}}.$$
- Sinon, $v(F) = 0$ et alors $v(G) = 0$ et $v(H) = 0$, d'où, par hypothèse d'induction, $\varphi(v) \vdash \neg G$ et $\varphi(v) \vdash \neg H$. On construit la preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi(v), G \vee H \vdash G \vee H}\ \mathsf{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\varphi(v), G \vee H, G \vdash G}\ \mathsf{ax} \quad \dfrac{\varphi(v) \vdash \neg G}{\varphi(v), G \vee H, G \vdash \neg G}\ \mathsf{aff}}{\varphi(v), G \vee H, G \vdash \bot}\ \neg_{\mathsf{e}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\varphi(v), G \vee H, H \vdash H}\ \mathsf{ax} \quad \dfrac{\varphi(v) \vdash \neg H}{\varphi(v), G \vee H, H \vdash \neg H}\ \mathsf{aff}}{\varphi(v), G \vee H, H \vdash \bot}\ \neg_{\mathsf{e}}}{\varphi(v), G \vee H \vdash \bot}\ \vee_{\mathsf{e}}}{\varphi(v) \vdash \neg(G \vee H)}\ \neg_{\mathsf{i}}.$$

▷ Dans le cas $F = G \wedge H$, soit v une valuation sur $\mathscr{V}$.

- Si $v(F) = 1$ alors $v(G) = v(H) = 1$ et donc, par hypothèse d'induction, $\varphi(v) \vdash G$ et $\varphi(v) \vdash H$. On construit la preuve :
$$\dfrac{\varphi(v) \vdash G \qquad \varphi(v) \vdash H}{\varphi(v) \vdash G \wedge H}\ \wedge_{\mathsf{i}}.$$
- Si $v(F) = 0$ alors $v(G) = 0$ ou $v(H) = 0$.
  - Si $v(G) = 0$, on a donc $\varphi(v) \vdash \neg G$ par hypothèse d'induction, et on construit la preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi(v), G \wedge H \vdash G \wedge H}\ \mathsf{ax}}{\varphi(v), G \wedge H \vdash G}\ \wedge_{\mathsf{e}}^{\mathsf{g}} \qquad \dfrac{\varphi(v) \vdash \neg G}{\varphi(v), G \wedge H \vdash \neg G}\ \mathsf{aff}}{\varphi(v), G \wedge H \vdash \bot}\ \neg_{\mathsf{e}}}{\varphi(v) \vdash \neg(G \wedge H)}\ \neg_{\mathsf{i}}.$$

- Si $v(H) = 0$, on a donc $\varphi(v) \vdash \neg H$ par hypothèse d'induction, et on construit la preuve :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\varphi(v), G \land H \vdash G \land H$}
\RightLabel{$\land_\mathsf{e}^\mathsf{d}$}
\UnaryInfC{$\varphi(v), G \land H \vdash H$}
\AxiomC{$\varphi(v) \vdash \neg H$}
\RightLabel{aff}
\UnaryInfC{$\varphi(v), G \land H \vdash \neg H$}
\RightLabel{$\neg_\mathsf{e}$}
\BinaryInfC{$\varphi(v), G \land H \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg_\mathsf{i}$}
\UnaryInfC{$\varphi(v) \vdash \neg(G \land H)$}
\end{prooftree}
.
$$

▷ Dans le cas $F = G \to H$, soit v une valuation sur $\mathscr{V}$.

– Si $v(F) = 1$ alors $v(G) = 0$ ou $v(H) = 1$.

- Si $v(G) = 0$ alors, par hypothèse d'induction, on a $\varphi(v) \vdash \neg G$. On construit la preuve :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\varphi(v), G \vdash G$}
\AxiomC{$\varphi(v) \vdash \neg G$}
\RightLabel{aff}
\UnaryInfC{$\varphi(v), G \vdash \neg G$}
\RightLabel{$\neg_\mathsf{e}$}
\BinaryInfC{$\varphi(v), G \vdash \bot$}
\RightLabel{$\bot_\mathsf{i}$}
\UnaryInfC{$\varphi(v), G \vdash H$}
\RightLabel{$\to_\mathsf{i}$}
\UnaryInfC{$\varphi(v) \vdash G \to H$}
\end{prooftree}
.
$$

On utilise ici la variante $\bot_\mathsf{i}$ de l'absurdité classique $\bot_\mathsf{c}$ qui est facilement dérivable (c'est juste une application de $\bot_\mathsf{c}$ puis de aff).

- Si $v(H) = 1$ alors, par hypothèse d'induction, on a $\varphi(v) \vdash H$. On construit la preuve :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\varphi(v) \vdash H$}
\RightLabel{aff}
\UnaryInfC{$\varphi(v), G \vdash H$}
\RightLabel{$\to_\mathsf{i}$}
\UnaryInfC{$\varphi(v) \vdash G \to H$}
\end{prooftree}
.
$$

– Sinon, $v(F) = 0$, et on a donc $v(G) = 1$ et $v(H) = 0$, d'où, par hypothèse d'induction, on a $\varphi(v) \vdash G$ et $\varphi(v) \vdash \neg H$.

On construit la preuve

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi(v), G \to H \vdash G \to H}\,\mathsf{ax} \qquad \dfrac{\varphi(v) \vdash G}{\varphi(v), G \to H \vdash G}\,\mathsf{aff}}{\varphi(v), G \to H \vdash H}\,\to_{\mathsf{e}} \qquad \dfrac{\varphi(v) \vdash \neg H}{\varphi(v), G \to H \vdash \neg H}\,\mathsf{aff}}{\dfrac{\varphi(v), G \to H \vdash \bot}{\varphi(v) \vdash \neg(G \to H)}\,\to_{\mathsf{i}}}\,\neg_{\mathsf{e}} \quad .$$

- Dernier cas : si $F = \neg G$, soit v une valuation sur $\mathscr{V}$.
  - Si $v(F) = 1$ alors $v(G) = 0$ et donc, par hypothèse d'induction, $\varphi(v) \vdash \neg G$. Or, $F = \neg G$, on a donc une preuve de $\varphi(v) \vdash F$.
  - Si $v(F) = 0$ alors $v(G) = 1$ et donc, par hypothèse d'induction, $\varphi(v) \vdash G$. On construit la preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\varphi(v) \vdash G}{\varphi(v), \neg G \vdash G}\,\mathsf{aff} \qquad \dfrac{}{\varphi(v), \neg G \vdash \neg G}\,\mathsf{ax}}{\dfrac{\varphi(v), \neg G \vdash \bot}{\varphi(v) \vdash \neg\neg G}\,\neg_{\mathsf{i}}}\,\neg_{\mathsf{e}} \quad .$$

Ceci conclut l'induction.

Q3. On écrit

$$\Phi(\mathscr{V}) := \bigvee_{i=2}^{m} \varphi(v_i)$$

et on procède par récurrence sur m.

- Cas de base ($m = 2$) : on considère $\varphi(v_1) \vee \varphi(v_2)$. Comme F est une tautologie, $v_i(F) = 1$ et donc, par Q2, on a $\varphi(v_i) \vdash F$. On construit la preuve :

$$\dfrac{\dfrac{}{\varphi(v_1) \vee \varphi(v_2) \vdash \varphi(v_1) \vee \varphi(v_2)}\,\text{ax} \quad \dfrac{\varphi(v_1) \vdash F}{\varphi(v_1) \vee \varphi(v_2), \varphi(v_1) \vdash F}\,\text{aff} \quad \dfrac{\varphi(v_2) \vdash F}{\varphi(v_1) \vee \varphi(v_2), \varphi(v_2) \vdash F}\,\text{aff}}{\varphi(v_1) \vee \varphi(v_2) \vdash F}\,\vee_\mathsf{e}$$

- ▷ Hérédité : on considère $\left(\bigwedge_{i=2}^m \varphi(v_i)\right) \vee \varphi(v_{m+1})$. Comme F est une tautologie, $v_{m+1}(F) = 1$ et donc, par Q2, on a $\varphi(v_{m+1}) \vdash F$. De plus, par hypothèse de récurrence, on a $\bigvee_{i=2}^m \varphi(v_i) \vdash F$. On construit la preuve :

$$\dfrac{\dfrac{}{\left(\bigwedge_{i=2}^m \varphi(v_i)\right) \vee \varphi(v_{m+1}) \vdash \left(\bigwedge_{i=2}^m \varphi(v_i)\right) \vee \varphi(v_{m+1})}\,\text{ax} \quad \dfrac{\left(\bigwedge_{i=2}^m \varphi(v_i)\right) \vdash F}{\left(\bigwedge_{i=2}^m \varphi(v_i)\right) \vee \varphi(v_{m+1}), \left(\bigwedge_{i=2}^m \varphi(v_i)\right) \vdash F}\,\text{aff} \quad \dfrac{\varphi(v_{m+1}) \vdash F}{\left(\bigwedge_{i=2}^m \varphi(v_i)\right) \vee \varphi(v_{m+1}), \varphi(v_{m+1}) \vdash F}\,\text{aff}}{\left(\bigwedge_{i=2}^m \varphi(v_i)\right) \vee \varphi(v_{m+1}) \vdash F}\,\vee_\mathsf{e}$$

Ceci conclut la récurrence.

Q4. L'énoncé du théorème de complétude est : si $\models F$ alors on a que $\vdash F$. Si l'on a $\models F$, alors F est une tautologie, on peut donc appliquer Q3. On applique aussi Q1. Construisons la preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{Q3}}{\Phi(\mathscr{V}) \vdash F}}{\vdash \Phi(V) \to F}\,\to_\mathsf{i} \qquad \overset{\text{Q1}}{\vdash \Phi(\mathscr{V})}}{\vdash F}\,\to_\mathsf{e}.$$

D'où le théorème de complétude.