TD n° 1

I. Savoir lire la définition.

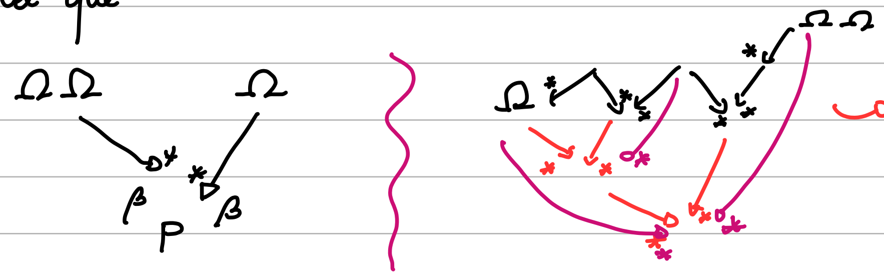
Ce sont des mesures de sécurité. Sinon :

$$(\lambda y.\ x\ y)[z/y] \neq_\alpha \lambda y.\ x\ z \qquad \rightsquigarrow ⚠\ x \neq y$$
$$(\lambda y.\ x\ y)[y/x] \neq_\alpha \lambda y.\ y\ y \qquad \rightsquigarrow ⚠\ y \notin vl(N).$$

II. Classes d'équivalence pour $=_\beta$.

Q2.1. $\Omega\Omega \to_\beta \Omega\Omega$ et $\Omega \to_\beta \Omega$.

Ainsi, si $\Omega\Omega =_\beta \Omega$ alors, par confluence, il existe M un λ-terme tel que



on utilise plusieurs fois la confluence avec les termes intermédiaires

C'est absurde car on aurait $\Omega\Omega = P = \Omega$ ($\Omega\Omega \to^*_\beta P$ implique $P = \Omega\Omega$ car il n'y a que 1 redex).

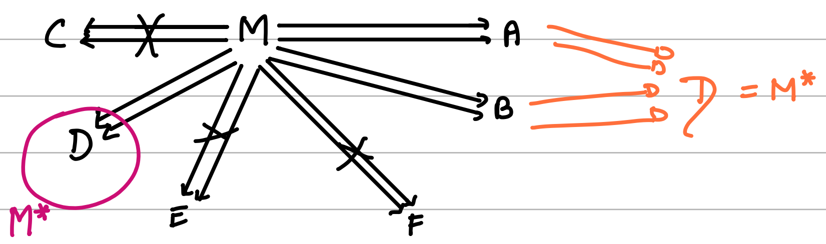
Q2.2. Soit N une forme normale avec $x \notin Vl(N)$

On pose :

$$M = (\lambda x.\ N)\ \Omega.$$

III Propriété du diamant pour les réductions parallèles

Q3.1.



Par induction (3 cas)

Q3.2. $x^* := x$

$(\lambda x. M)^* := \lambda x.(M^*)$

$(M\,N)^* := \begin{cases} P^*[N^*/x] & \text{si } M = \lambda x. P \\ M^*\,N^* & \text{sinon} \end{cases}$

Lemme : si $M \Rrightarrow N$ alors $N \Rrightarrow M^*$ (par induction sur M)

D'où

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, Rrightarrow] \arrow[dr, Rrightarrow] \arrow[d, Rrightarrow] & \\ A \arrow[r, Rrightarrow] & M^* & B \arrow[l, Rrightarrow] \end{tikzcd}$$

On a donc la propriété du diamant pour $\Rrightarrow$ donc la confluence de $\to_\beta$.

IV Normalisation faible et forte en λ-calcul pur.

Q4.1. Les propriétés (1), (2) et (3) restent vraies
La propriété (4) ne l'est pas :
on a
$$M := (\lambda x. x)\, M' \to M'$$
mais
$$\underset{\substack{\parallel \\ M\,M}}{(y\,y)[M/y]} \not\to \underset{\substack{\parallel \\ M'\,M'}}{(y\,y)[M'/y]}$$

Q4.2. Par induction sur $M \to M'$ (4 cas) :

* Cas $(\lambda x. M)\, N \to M[N/x]$. Supposons $x \in \mathrm{vl}(M)$ et $N \in \lambda I$. (*)
 Par induction sur M, il y a 3 cas :
 - si $M = y$ alors
   - si $y \neq x$ alors $M[N/x] = M \in \lambda I$.
   - si $y = x$ alors $M[N/x] = N \in \lambda I$.
 - si $M = P\,Q$ alors par hypothèse d'induction on a : $P[N/x] \in \lambda I$ et $Q[N/x] \in \lambda I$ d'où $(P\,Q)[N/x] \in \lambda I$. par (ii)
 - si $M = \lambda y. P$ avec $y \in \mathrm{vl}(P)$ alors $M[N/x] \in \lambda I$ car $P[N/x] \in \lambda I$.

* Cas $MN \to M'N$ avec $M \to M'$. Par hypothèse d'induction $M' \in \lambda I$.
avec $M \in \lambda I$, $N \in \lambda I$.
D'où $M'N \in \lambda I$ par (ii).

* Cas $MN \to MN'$ avec $N \to N'$. Par hypothèse d'induction $N' \in \lambda I$.
avec $M \in \lambda I$, $N \in \lambda I$.
D'où $MN' \in \lambda I$ par (ii).

* Cas $\lambda x.M \to \lambda x.M'$ avec $M \to M'$ et $M \in \lambda I$, $(\lambda x.M) \in \lambda I$, $M' \in \lambda I$ par hyp. d'ind°
Et, $vl(M') = vl(M)$ (preuve par induction)
d'où $(\lambda x.M') \in \lambda I$ car $x \in vl(M')$.

Q4.3. Supposons avoir une divergence issue de $(\lambda x.M)N$.
On a trois cas :
- soit $N \uparrow$ donc $N_i \to N_{i+1}$ avec $N_0 = N$ d'où $M[N_i/x] \to^* M[N_{i+1}/x]$ avec au moins un pas car $x \in vl(M_i)$ et donc $M[N/x] \uparrow$
- soit $M \uparrow$ donc $M_i \to M_{i+1}$ avec $M_0 = M$ d'où $M_i[N/x] \to M_{i+1}[N/x]$ et donc $M[N/x] \uparrow$
- soit $M[N/x] \uparrow$

Dans tous les cas, $M[N/x] \uparrow$

Q4.4. Non : $(\lambda x.y)\Omega \uparrow$ mais $y[\Omega/x] = y \cancel{\uparrow}$

car $\in \lambda I$ à toute étape

Q4.5. Mon instinct me dit non, mais vu qu'on ne peut pas faire "disparaître" une divergence, j'ai envie de dire oui.

Si on a une divergence, alors on ne peut pas l'éviter. Inversement, si on n'a pas de divergence, on ne peut pas aller dans une divergence.

En gros : tous les calculs dans λI sont utiles.

V Des λ-termes qui calculent : couples et prédécesseurs

Q5.1. On définit $succ := \lambda u.\lambda f.\lambda x.f(u f x)$.

$$succ\ \underline{n} = (\lambda u f x.f(u f x))(\lambda f x.f^n x) \to_\beta \lambda f x.f((\lambda f x.f^n x) f x)$$
$$\to_\beta \lambda f x.f((\lambda x.f^n x) x)$$
$$\to_\beta \lambda f x.f(f^n x) = \lambda f x.f^{n+1} x = \underline{n+1}.$$

D'où $succ\ \underline{n} \to^* \underline{n+1}$

Q5.2. On pose $fst := \lambda c. c\,\mathbf{T}$ et $snd := \lambda c. c\,\mathbf{F}$.

$$
\begin{aligned}
fst\ (M,N) &= (\lambda c. c\ (\lambda x y. x))\ (\lambda f. (f M) N) \\
&\to_\beta (\lambda f. (f M) N)\ (\lambda x y. x) \\
&\to_\beta ((\lambda x y. x) M) N \\
&\to_\beta (\lambda y. M) N \\
&\to_\beta M
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
snd\ (M,N) &= (\lambda c. c\ (\lambda x y. y))\ (\lambda f. (f M) N) \\
&\to_\beta (\lambda f. (f M) N)\ (\lambda x y. y) \\
&\to_\beta ((\lambda x y. y) M) N \\
&\to_\beta (\lambda y. y) N \\
&\to_\beta N
\end{aligned}
$$

Q5.3. On pose : $Next := \lambda c. (succ\ (fst\ c),\ fst\ c)$

$$
\begin{aligned}
Next\ (\underline{n}, \underline{k}) &\to_\beta (succ\ (fst\ (\underline{n}, \underline{k})),\ fst\ (\underline{n}, \underline{k})) && \text{par Q5.2} \\
&\to_\beta^* (succ\ \underline{n},\ fst\ (\underline{n}, \underline{k})) && \text{par Q5.1} \\
&\to_\beta^* (\underline{n+1},\ fst\ (\underline{n}, \underline{k})) && \text{par Q5.2} \\
&\to_\beta^* (\underline{n+1},\ \underline{n})
\end{aligned}
$$

Q5.4 On pose $pred := \lambda n. snd\ (n\ Next\ (\underline{0}, \underline{0}))$.

VI Des λ-termes qui bouclent

Q6.1.

$$
\begin{aligned}
Y\ M &\to_\beta (\lambda x. M (x x)) (\lambda x. M (x x)) \\
&\to_\beta M ((\lambda x. M (x x)) (\lambda x. M (x x))) \\
&\leftarrow_\beta M\ (Y\ M)
\end{aligned}
$$

D'où $M (YM) =_\beta YM$.

Q6.2. On pose :

$F := \lambda f. \lambda n.$ if $zero?(n)$ then $\underline{1}$

else $mult\ n\ (f\ (pred\ n))$

puis

$fact := YF$.

Q6.3. On pose $\gamma := \lambda f. f (f x)$ puis $\Gamma := \lambda x. \gamma \gamma$.

On a : degré de foisonnement :

$\Gamma = \lambda x. \gamma \gamma$ 2

$\rightarrow_\beta \lambda x. \gamma (\gamma x)$ 3

$\rightarrow_\beta \lambda x. \gamma (x(x\ x))$ 4

$\rightarrow_\beta \lambda x. (x(x\ x))((x(x\ x))\ x)$ 7

Q6.4. Dans l'exemple, on fait des β-réductions dans une abstraction. En forme, on ne peut pas faire ça.

TD n° 2

I. Typer des λ-termes

1.1. Une question de cours du 6 mars 2024.

Q1.1. $\underbrace{(\lambda f. f(f\ z))}_{(X \to X) \to (X \to X)}\ \underbrace{(\lambda x. \lambda y. x\ y)}_{(A \to B) \to (A \to B)}$ où $X = A \to B$ de taille 12

$\to_\beta (\lambda x. \lambda y.\ x\ y)((\lambda x. \lambda y.\ x\ y)\ z)$ de taille 13

1.2. Entiers de Church

Q1.2. $succ := \lambda n. \lambda f\, x. f(n\, f\, x)$

$add := \lambda n. \lambda m. \lambda f x.\ n\ f\ (m\, f\, x)$

$mult := \lambda n. \lambda m. \lambda f.\ n\,(m\ f)$

Q1.3. $\vdash succ : nat \to nat$

$\hookrightarrow n : nat,\ f : X \to X,\ x : X \ \vdash f\,(n\ f\,x) : X$

$\hookrightarrow$ " $\vdash n\ f\ x : X$

$\vdash add : nat \to nat \to nat$

$\hookrightarrow n : nat,\ m : nat,\ f : X \to X,\ x : X \ \vdash n\ f\ (m\ f\,x) : X$

$\hookrightarrow$ " $\vdash m\ f\ x : X$

$\vdash mult : nat \to nat \to nat$

$\hookrightarrow n : nat,\ m : nat,\ f : X \to X \ \vdash n\ (m\ f) : X \to X$

$\hookrightarrow$ " $\vdash m\ f : X \to X$

II. Types somme

Q2.1. Termes : $M, N ::= \ldots \mid g\,M \mid d\,N \mid$ "match M with $g\,x \to N \mid d\,y \to N'$"

Réductions :

$$\frac{M \to_\beta M'}{g\,M \to_\beta g\,M'} \qquad \frac{M \to_\beta M'}{d\,M \to_\beta d\,M'}$$

$$\frac{}{(\text{match } g\,M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N') \to_\beta N[M/x]}$$

$$\frac{}{(\text{match } d\, M \text{ with } g\, x \to N \mid d\, y \to N') \to_\beta N'[M/y]}$$

$$\frac{M \to_\beta M'}{\text{match } M \text{ with } g\, x \to N \mid d\, y \to N' \to_\beta \text{match } M' \text{ with } g\, x \to N \mid d\, y \to N'}$$

$$\frac{N \to_\beta N''}{\text{match } M \text{ with } g\, x \to N \mid d\, y \to N' \to_\beta \text{match } M \text{ with } g\, x \to N'' \mid d\, y \to N'}$$

$$\frac{N' \to N'''}{\text{match } M \text{ with } g\, x \to N \mid d\, y \to N' \to_\beta \text{match } M \text{ with } g\, x \to N \mid d\, y \to N'''}$$

Types : $A, B ::= \dots \mid A+B$

Typage : $\dfrac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash g\, M : A+B}$ $\qquad$ $\dfrac{\Gamma \vdash M : B}{\Gamma \vdash d\, M : A+B}$

$$\frac{\Gamma \vdash M : B+C \qquad \Gamma, x : B \vdash N : A \qquad \Gamma, y : C \vdash N' : A}{\Gamma \vdash \text{match } M \text{ with } g\, x \to N \mid d\, y \to N' : A}$$

III Normalisation faible

Q3.1. On a : M fortement normalisant $\Rightarrow M'$ fortement normalisant.
Réciproquement, supposons M' fortement normalisant.
Si M admet une divergence pour $\mapsto$ alors par déterminisme la divergence passe par M' et donc on a une divergence pour M'.
Absurde.

Q3.2 Non ! $M = \mathbf{F}\,\Omega \to_\beta \mathbf{F}\,\Omega$ avec $\Omega \to_\beta \Omega$

$\downarrow_\beta$

M' $\lambda y. y$ $\qquad$ M a une divergence alors que M' non.

Q3.3. Pour tout type A,
(CR1') si $M \in \mathcal{R}_A$ alors M termine pour $\mapsto$
(CR2') si $M \in \mathcal{R}_A$ et $M \mapsto M'$ alors $M' \in \mathcal{R}_A$.
(CR3') si $M \mapsto M' \Rightarrow M' \in \mathcal{R}_A$ alors $M \in \mathcal{R}_A$

Par induction sur A (2 cas) :

- si on a un type de base X

  (CR1') par définition

  (CR2') par définition & préservation du typage

  (CR3') par induction bien fondée sur $\mapsto$ car $\mapsto$ termine.

- si on a un type $A \to B$

  (CR1') On a $x \in \mathcal{R}_A$ pour x arbitraire.

  Or, $M\,x \in \mathcal{R}_B$ d'où $M\,x$ fortement normalisant.

  Si M diverge en $M = M_1 \mapsto M_2 \mapsto M_3 \dots$

  alors $M x \mapsto M_2 x \dots$ absurde !

  (CR2') Soit $M \in \mathcal{R}_{A \to B}$ et $M \mapsto M'$. Montrons que $M' \in \mathcal{R}_{A \to B}$.

  Soit $N \in \mathcal{R}_A$. Montrons que $M'N \in \mathcal{R}_B$.

  Or, $M\,N \mapsto M'\,N$ d'où, par (CR2') pour B, $M'N \in \mathcal{R}_B$.

  On conclut $M' \in \mathcal{R}_{A \to B}$.

  (CR3') Supposons $M \mapsto M' \Rightarrow M' \in \mathcal{R}_{A \to B}$.

  Montrons $M \in \mathcal{R}_{A \to B}$.

  Par hyp d'induction bien fondée,

  si $N \mapsto N'$ alors $M N' \in \mathcal{R}_B$.

  Montrons $M N \in \mathcal{R}_B$.

  Par (CR3') pour B, alors montrons que

  $M\ N \mapsto P$ et $P \in \mathcal{R}_B$.

  On a 2 cas :

  - Soit $M = \lambda x. M_0$ et $P = M_0[N/x]$ donc ok
  - Soit $P = M'N$ alors par hyp $M' \in \mathcal{R}_{A \to B}$

    et donc $M'N \in \mathcal{R}_B$.

Q 3.4.
$$\frac{}{(\lambda x. M)\, v \hookrightarrow M[v/x]} \qquad \frac{M \hookrightarrow M'}{M\,N \hookrightarrow M'\,N} \qquad \frac{N \hookrightarrow N'}{v\ N \hookrightarrow v\ N'}$$

Q 3.5.
- On a bien $\hookrightarrow \subseteq \to_\beta$.
- On a bien que $\hookrightarrow$ est déterministe.
- Si $M \hookrightarrow M'$ alors $M\ N \hookrightarrow M'N$ pour tout N.

On peut donc appliquer le théorème.

Q 3.6. On ne peut pas utiliser le théorème ci-avant car les formes normales pour $\hookrightarrow$ ne sont pas nécessairement des formes normales pour $\to_\beta$. Exemple : $(\lambda x.\, x)\,(y\ z) \not\hookrightarrow$

Q 3.7. Notre relation $\hookrightarrow$ n'est pas complète. Il faut ajouter d'autres règles pour qu'elle le devienne (et qu'elle reste déterministe).

On peut, par exemple, définir $\hookrightarrow$ par induction avec :

$$\frac{M \hookrightarrow M'}{M\,N \hookrightarrow M'\,N} \qquad \frac{M \not\to_\beta \quad N \hookrightarrow N'}{M\,N \hookrightarrow M\,N'}$$

$$\frac{M \hookrightarrow M'}{\lambda x.\, M \hookrightarrow \lambda x.\, M'} \qquad \frac{M \not\to_\beta \quad N \not\to_\beta}{(\lambda x.\, M)\,N \hookrightarrow M[N/x]}$$

où l'on définit $\not\to_\beta$ par induction :

$$\frac{}{x \not\to_\beta} \qquad \frac{M \not\to_\beta}{\lambda x.\, M \not\to_\beta} \qquad \frac{P \not\to_\beta}{x\ P \not\to_\beta}$$

$$\frac{(M\,N) \not\to_\beta \qquad P \not\to_\beta}{(M\,N)\,P \not\to_\beta}$$

La relation $\hookrightarrow$ ainsi définie vérifie

(1) $\hookrightarrow \subseteq \to_\beta$;

(2) $\hookrightarrow$ est déterministe ;

(3) si $M \hookrightarrow M'$ alors pour tout N, $M\,N \hookrightarrow M'\,N$;

(4) $NF(\hookrightarrow) = NF(\to_\beta)$.

D'où la normalisation faible du λ-calcul.