

TD n° 1

I. Savoir lire la définition.

Ce sont des mesures de sécurité. Donc :

$$(\lambda y. x y) [y/x] \neq \lambda y. x y$$

$$(\lambda y. x y) [y/y] \neq \lambda y. y y$$

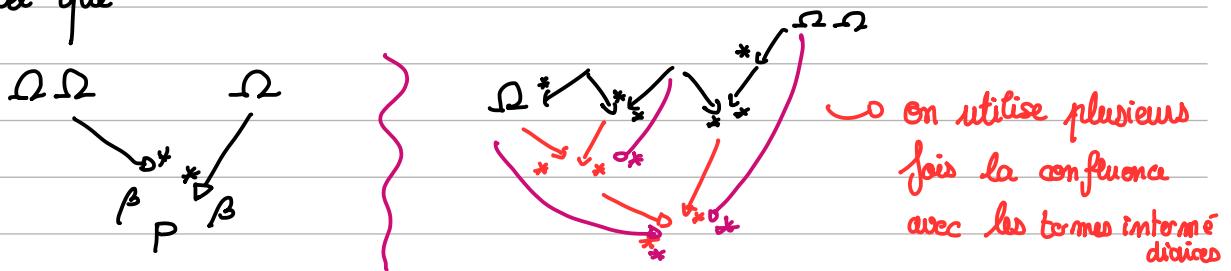
$$\text{mo } \Delta x \neq y$$

$$\text{mo } \Delta y \notin \text{cl}(N).$$

II. Classes d'équivalence pour $=_\beta$.

Q2.1. $\Omega \Omega \xrightarrow{\beta} \Omega \Omega$ et $\Omega \xrightarrow{\beta} \Omega$.

Ainsi, si $\Omega \Omega =_\beta \Omega$ alors, par confluence, il existe M un 2-terme tel que



C'est absurde car on aurait $\Omega \Omega =_\beta P = \Omega$ ($\Omega \Omega \xrightarrow{\beta} P$ implique $P = \Omega \Omega$ car il n'y a que 2 redex).

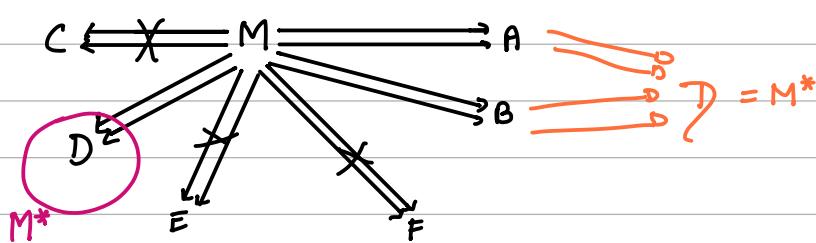
Q2.2. Soit N une forme normale avec $x \notin V\ell(N)$

On pose :

$$M = (\lambda x. N) \Omega.$$

III Propriété du diamant pour les réductions parallèles

Q3.1.



Par induction (3 cas)

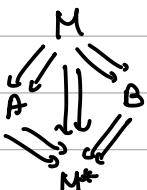
Q3.2. $x^* := x$

$$(\lambda x. M)^* := \lambda x. (M^*)$$

$$(M N)^* := \begin{cases} P[N^*/x] & \text{si } M = \lambda x. P \\ M^* N^* & \text{sinon} \end{cases}$$

Lemme : si $M \rightarrow N$ alors $N \rightarrow M^*$ (par induction sur M)

D'où



On a donc la propriété du diamant
 $\rightarrow_{\text{con}} \Rightarrow$ donc la confluence de \rightarrow_p .

IV Normalisation faible et forte en λ -calcul pur.

Q4.1. Les propriétés (1), (2) et (3) restent vraies
La propriété (4) ne l'est pas:

on a

$$M := (\lambda x. x) M' \rightarrow M'$$

mais

$$\begin{array}{ccc} (y y)[M/y] & \rightarrow & (y y)[M'/y] \\ \parallel & & \parallel \\ M & & M' n' \end{array}$$

Q4.2. Par induction sur $M \rightarrow M'$ (4 cas) :

* Cas $(\lambda x. M) N \rightarrow M[N/x]$. Supposons $x \in \text{nf}(M)$ et $N \in \mathcal{I}$. (*)

Par induction sur M , il y a 3 cas :

- si $M = y$ alors

- si $y \neq x$ alors $M[N/x] = M \in \mathcal{I}$.

- si $y = x$ alors $M[N/x] = N \in \mathcal{I}$.

- si $M = P Q$ alors par hypothèse d'induction

- on a : $P[N/x] \in \mathcal{I}$ et $Q[N/x] \in \mathcal{I}$

- d'où $(P Q)[N/x] \in \mathcal{I}$. par (ii)

- si $M = \lambda y. P$ avec $y \in \text{nf}(P)$ alors $M[N/x] \in \mathcal{I}$ car $P[N/x] \in \mathcal{I}$.

* Cas $M N \rightarrow M' N$ avec $M \rightarrow M'$. Par hypothèse d'induction $M' \in \lambda I$.
avec $M \in \lambda I$, $N \in \lambda I$.

D'où $M' N \in \lambda I$ par (ii).

* Cas $M N \rightarrow M N'$ avec $N \rightarrow N'$. Par hypothèse d'induction $N' \in \lambda I$.
avec $M \in \lambda I$, $N \in \lambda I$.

D'où $M N' \in \lambda I$ par (ii).

* Cas $\lambda x. M \rightarrow \lambda x. M'$ avec $M \rightarrow M'$ et $M \in \lambda I$, $(\lambda x. M) \in \lambda I$, $M' \in \lambda I$
Et, $v\ell(M') = v\ell(M)$ (preuve par induction) par hyp. d'ind°
d'où $(\lambda x. M') \in \lambda I$ car $x \in v\ell(M)$.

Q4.3. Supposons avoir une divergence issue de $(\lambda x. M) N$.

On a trois cas :

- soit $N \uparrow$ donc $N_i \rightarrow N_{i+1}$ avec $N_0 = N$ d'où $M[N/x] \xrightarrow{*} M[N_{i+1}/x]$ et donc $M[N/x] \uparrow$ avec au moins un pas
car $x \in v\ell(M)$
- soit $M \uparrow$ donc $M_i \rightarrow M_{i+1}$ avec $M_0 = M$ d'où $M_i[N/x] \xrightarrow{*} M_{i+1}[N/x]$ et donc $M[N/x] \uparrow$
- soit $M[N/x] \uparrow$

Dans tous les cas, $M[N/x] \uparrow$

Q4.4. Non : $(\lambda x. y) \Omega \uparrow$ mais $y[\Omega/x] = y \neq$

can $\in \lambda I$
à toute étape

Q4.5. Mon instinct me dit non, mais vu qu'on ne peut pas faire "disparaître" une divergence, j'ai envie de dire oui.

Si on a une divergence, alors on ne peut pas l'éviter. Inversement, si on n'a pas de divergence, on ne peut pas aller dans une divergence.

En gros : tous les calculs dans λI sont utiles.

V Des 2-termes qui calculent : couples et prédecesseurs

Q5.1. On définit $\text{succ} := \lambda u. \lambda f. \lambda x. f(u f x)$.

$$\begin{aligned} \text{succ } n &= (\lambda u f x. f(u f x))(\lambda f x. f^n x) \xrightarrow{*} \lambda f x. f((\lambda f x. f^n x) f x) \\ &\xrightarrow{*} \lambda f x. f(\lambda x. f^n x x) \\ &\xrightarrow{*} \lambda f x. f(f^n x) = \lambda f x. f^{n+1} x = \underline{n+1}. \end{aligned}$$

D'où $\text{succ } n \xrightarrow{*} \underline{n+1}$

Q5.2. On pose $\text{fst} := \lambda c. c T$ et $\text{snd} := \lambda c. c F$.

$$\text{fst } (M, N) = (\lambda c. c (\lambda x. y. x)) (\lambda f. (f M) N)$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda f. (f M) N) (\lambda x. y. x)$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda x. y. x) M N$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda y. M) N$$

$$\xrightarrow{\beta} M$$

$$\text{snd } (M, N) = (\lambda c. c (\lambda x. y. y)) (\lambda f. (f M) N)$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda f. (f M) N) (\lambda x. y. y)$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda x. y. y) M N$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda y. y) N$$

$$\xrightarrow{\beta} N$$

Q5.3. On pose : $\text{Next} := \lambda c. (\text{succ}(\text{fst } c), \text{fst } c)$

$$\text{Next } (\underline{m}, \underline{k}) \xrightarrow{\beta} (\text{succ } (\text{fst } (\underline{m}, \underline{k})), \text{fst } (\underline{m}, \underline{k})) \quad \text{par Q5.2}$$

$$\xrightarrow{\beta^*} (\text{succ } \underline{m}, \text{fst } (\underline{m}, \underline{k})) \quad \text{par Q5.1}$$

$$\xrightarrow{\beta^*} (\underline{m+1}, \text{fst } (\underline{m}, \underline{k})) \quad \text{par Q5.2}$$

$$\xrightarrow{\beta^*} (\underline{m+1}, \underline{m})$$

Q5.4. On pose $\text{pred} := \lambda n. \text{snd } (n \text{ Next } (\underline{0}, \underline{0}))$.

VII Des 2-termes qui bouclent

Q6.1. $\forall M \xrightarrow{\beta} (\lambda x. M(\alpha x)) (\lambda x. M(\alpha x))$

$$\xrightarrow{\beta} M ((\lambda x. M(\alpha x)) (\lambda x. M(\alpha x)))$$

$$\xleftarrow{\beta} M (\forall M)$$

$$\text{D'où } M(\forall M) =_{\beta} \forall M.$$

Q6.2. On pose :

$$F := \lambda f. \lambda n. \text{if zero?}(n) \text{ then } 1$$

$$\text{else mult } n \text{ } (f \text{ (pred } n))$$

puis

$$\text{fact} := \forall F.$$

Q6.3. On pose $\Upsilon := \lambda f. f(fx)$ puis $\Gamma := \lambda x. \Upsilon \Upsilon$.

Gm a:

$$\Gamma = \lambda x. \gamma \gamma$$

degré de scissionnement:

2

$$\rightarrow_{\beta} \lambda x. \gamma (\Gamma_x)$$

3

$$\rightarrow_{\beta} \lambda x. \gamma (x(x x))$$

4

$$\rightarrow_{\beta} \lambda x. (x(x x))(x(x x)) \infty$$

7

Q6.1. Dans l'exemple, on fait des β -réductions dans une abstraction.
En revanche, on ne peut pas faire ça.

TD n° 2

I. Types des 2-termes

1.1. Une question de cours du 6 mars 2024.

$$(x \rightarrow x) \rightarrow (x \rightarrow x) \quad (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad \text{où } X = A \rightarrow B$$

Q1.1. $(\lambda f. f(f z)) (\lambda x. \lambda y. x y)$ de taille 12
 $\rightarrow_{\beta} (\lambda x. \lambda y. x y) ((\lambda x. \lambda y. x y) z)$ de taille 13

1.2. Entiers de Church

Q1.2. $\text{succ} := \lambda n. \lambda f x. f(n f x)$

$$\text{add} := \lambda n. \lambda m. \lambda f x. n f (m f x)$$

$$\text{mult} := \lambda n. \lambda m. \lambda f. n(m f)$$

Q1.3. $\vdash \text{succ} : \text{nat} \rightarrow \text{nat}$

$$\begin{array}{c} \text{L} \circ n : \text{nat}, f : x \rightarrow x, x : x \quad \vdash f(n f x) : x \\ \text{L} \circ \quad \quad " \quad \quad \quad \quad \quad \vdash n f x : x \end{array}$$

$\vdash \text{add} : \text{nat} \rightarrow \text{nat} \rightarrow \text{nat}$

$$\begin{array}{c} \text{L} \circ n : \text{nat}, m : \text{nat}, f : x \rightarrow x, x : x \quad \vdash n f (m f x) : x \\ \text{L} \circ \quad \quad " \quad \quad \quad \quad \quad \vdash m f x : x \end{array}$$

$\vdash \text{mult} : \text{nat} \rightarrow \text{nat} \rightarrow \text{nat}$

$$\begin{array}{c} \text{L} \circ n : \text{nat}, m : \text{nat}, f : x \rightarrow x \quad \vdash n(m f) : x \rightarrow x \\ \text{L} \circ \quad \quad " \quad \quad \quad \quad \quad \vdash m f : x \rightarrow x \end{array}$$

II. Types somme

Q2.1. Termes : $M, N ::= \dots \mid g M \mid d N \mid \text{"match } M \text{ with } g x \rightarrow N \mid d y \rightarrow N \text{"}$
 Réductions :

$$\frac{M \rightarrow_{\beta} M'}{g M \rightarrow_{\beta} g M'} \quad \frac{M \rightarrow_{\beta} M'}{d M \rightarrow_{\beta} d M'}$$

$$\overline{(\text{match } g M \text{ with } g x \rightarrow N \mid d y \rightarrow N) \rightarrow_{\beta} N[M/x] }$$

$(\text{match } M \text{ with } g \approx \rightarrow N \mid d.y \rightarrow N') \xrightarrow{\beta} N'[M/y]$

$M \xrightarrow{\beta} M'$

$\text{match } M \text{ with } g \approx \rightarrow N \mid d.y \rightarrow N' \xrightarrow{\beta} \text{match } M \text{ with } g \approx \rightarrow N \mid d.y \rightarrow N'$
 $N \xrightarrow{\beta} N''$

$\text{match } M \text{ with } g \approx \rightarrow N \mid d.y \rightarrow N' \xrightarrow{\beta} \text{match } M \text{ with } g \approx \rightarrow N' \mid d.y \rightarrow N'$
 $N' \xrightarrow{\beta} N''$

$\text{match } M \text{ with } g \approx \rightarrow N \mid d.y \rightarrow N' \xrightarrow{\beta} \text{match } M \text{ with } g \approx \rightarrow N \mid d.y \rightarrow N''$

Types : $A, B ::= \dots \mid A+B$

$$\text{Typeage : } \frac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash g M : A+B} \quad \frac{\Gamma \vdash M : B}{\Gamma \vdash d M : A+B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : B+C \quad \Gamma, x:C \vdash N : A}{\Gamma \vdash \text{match } M \text{ with } g \approx \rightarrow N \mid d.y \rightarrow N' : A}$$

III Normalisation faible

Q3.1. On a : M fortement normalisant $\Rightarrow M'$ fortement normalisent.

Réiproquement, supposons M' fortement normalisant.

Si M admet une divergence pour \rightarrow alors par déterminisme la divergence passe par M' et donc on a une divergence pour M' . Absurde.

Q3.2 Non ! $M = F_\Omega \xrightarrow{\beta} F_\Omega$ avec $\Omega \xrightarrow{\beta} \omega$

$$M' \xrightarrow{\beta} y.y.y \quad M \text{ a une divergence alors que } M' \text{ non.}$$

Q3.3. Pour tout type A ,

(CR1') si $M \in R_A$ alors M termine pour \rightarrow

(CR2') si $M \in R_A$ et $M \rightarrow M'$ alors $M' \in R_A$.

(CR3') si $M \rightarrow M' \Rightarrow M' \in R_A$ alors $M \in R_A$

Par induction sur A (2 cas) :

- Si on a un type de base X
 - (CR1') par définition
 - (CR2') par définition & préservation du type
 - (CR3') par induction bien fondée sur \vdash car \vdash terminé.
- Si on a un type $A \rightarrow B$
 - (CR1'') Gm a $x \in R_A$ pour x arbitraire.
Or, $M[x] \in R_B$ d'où $M[x]$ fortement normalisant.
Si M diverge en $M = M_1 \vdash M_2 \vdash M_3 \dots$
alors $M[x] \vdash M_2[x] \vdash \dots$ absurde!

(CR2'') Soit $M \in R_{A \rightarrow B}$ et $M \vdash M'$. Montrons que $M' \in R_{A \rightarrow B}$.
Soit $N \in R_A$. Montrons que $M'[N] \in R_B$.
Or, $M[N] \vdash M'[N]$ d'où, par (CR2') pour B, $M'[N] \in R_B$.
Gm conclut $M' \in R_{A \rightarrow B}$.

(CR3'') Supposons $M \vdash M' \Rightarrow M' \in R_{A \rightarrow B}$.

Montrons $M \in R_{A \rightarrow B}$.

Par hyp d'induction bien fondée,

si $N \vdash N'$ alors $M[N] \in R_B$.

Montrons $M[N] \in R_B$.

Par (CR3') pour B, alors montrons que

$M[N] \vdash P$ et $P \in R_B$.

Gm a 2 cas :

- Soit $M = \lambda z. M_0$ et $P = M_0[N/z]$ donc ok
- Soit $P = M'[N]$ alors par hyp $M' \in R_{A \rightarrow B}$
et donc $M'[N] \in R_B$.

Q3.4.

$$\frac{}{(2x.M)N \vdash M[\forall x]}$$

$$\frac{M \hookrightarrow M'}{M[N] \hookrightarrow M'[N]}$$

$$\frac{N \hookrightarrow N'}{N[N] \hookrightarrow N[N']}$$

Q3.5. • Gm a bien $\hookrightarrow \subseteq \rightarrow_\beta$.

• Gm a bien que \hookrightarrow est déterministe.

• Si $M \hookrightarrow M'$ alors $M[N] \hookrightarrow M'[N]$ pour tout N.

Gm peut donc appliquer le théorème.

Q 3.6. On ne peut pas utiliser le théorème ci-dessus car les formes normales pour \rightarrow ne sont pas nécessairement des formes normales pour \rightarrow_β . Exemple : $(\lambda x. x)(y z)$ c'est

Q 3.7. Cette relation \rightarrow n'est pas complète. Il faut ajouter d'autres règles pour qu'elle le devienne (et qu'elle reste déterministe).

On peut, par exemple, définir \rightarrow par induction avec :

$$\frac{M \rightarrow M'}{MN \rightarrow M'N}$$

$$\frac{M \rightarrow_p \quad N \rightarrow N'}{MN \rightarrow M'N'}$$

$$\frac{M \rightarrow M'}{\lambda x. M \rightarrow \lambda x. M'}$$

$$\frac{M \rightarrow_p \quad N \rightarrow_p}{(\lambda x. M) N \rightarrow M[x/x]}$$

où l'on définit \rightarrow_p par induction :

$$\frac{}{x \rightarrow_p}$$

$$\frac{M \rightarrow_p}{\lambda x. M \rightarrow_p}$$

$$\frac{P \rightarrow_p}{x P \rightarrow_p}$$

$$\frac{(M N) \rightarrow_p \quad P \rightarrow_p}{(M N) P \rightarrow_p}$$

La relation \rightarrow ainsi définie vérifie

- (1) $\rightarrow \subseteq \rightarrow_\beta$;
- (2) \rightarrow est déterministe ;
- (3) si $M \rightarrow M'$ alors pour tout N , $M N \rightarrow M' N$;
- (4) $NF(\rightarrow) = NF(\rightarrow_\beta)$.

D'où la normalisation faible du λ -calcul.

1D n° 3

I. Existence d'une preuve sans coupure.

Q1.1

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overline{AB \vdash A} \alpha x}{AB \vdash A \Rightarrow A} \Rightarrow_i \\
 \frac{\overline{AB \vdash B \Rightarrow A} \alpha x}{AB \vdash A \Rightarrow B \Rightarrow A} \Rightarrow_i \\
 \frac{\overline{AB \vdash A \Rightarrow B \Rightarrow A} \alpha x}{AB \vdash A} \Rightarrow_e \\
 \frac{\overline{AB \vdash B \Rightarrow A} \alpha x}{AB \vdash B \Rightarrow A} \Rightarrow_e \\
 \frac{\overline{AB \vdash B} \alpha x}{AB \vdash A} \Rightarrow_e
 \end{array}$$

Q1.2. On considère le multiensemble des degrés des coupures.

Lorsque l'on réduit la coupure la plus profonde

$$\text{coupure } c \left\{ \begin{array}{c} \frac{\delta}{\Gamma, A \vdash B} \Rightarrow_I \\ \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}{\Gamma \vdash B} \Rightarrow_E \end{array} \right. \quad \deg(c) > 1$$

où δ et δ' ne contiennent pas de coupures, on engendre éventuellement un nombre fini de coupures mais de degré $< \deg(c)$.

$$\deg(c') \leq \max(|A|, |B|) < \deg(c).$$

D'où, par terminaison de " \leq mul", il existe une preuve sans coupure.

Q3.1. Éliminer la conjonction fait décroître strictement la taille de l'arbre.

$$\frac{\frac{\frac{\delta}{\Gamma \vdash A} \quad \frac{\delta}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_1}{\Gamma \vdash A} \wedge_2 \rightsquigarrow \frac{\delta}{\Gamma \vdash A}$$

(et de même avec \wedge_e).

Il suffit de faire un ordre produit $\leq \text{taille} \times \leq \text{mul}$.

$$\text{Autre sol': } t(A \wedge B) = t(A) + t(B) \text{ et dans le multiensemble.}$$

Q1.4. On a montré la normalisation faible pour la \rightarrow_p .

II. Curry-Howard : enrichir la logique.

II.1. Types produit

Q2.1. $A ::= X \mid A \rightarrow A' \mid A \wedge A'$

$$\frac{\begin{array}{c} M:A \\ \Gamma \vdash A \end{array}}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i \quad \frac{\begin{array}{c} M:A \times A' \\ \Gamma \vdash A \wedge A' \end{array}}{\begin{array}{c} \Gamma \vdash A \\ \pi_1 M:A \end{array}} \wedge^g \quad \frac{\begin{array}{c} M:A \times A' \\ \Gamma \vdash A \wedge A' \end{array}}{\begin{array}{c} \Gamma \vdash A' \\ \pi_2 M:A \end{array}} \wedge^d$$

Q2.2. \vec{C} est une preuve de A et une preuve de A' , ce qui donne une preuve de $A \wedge A'$.

Q2.3/4 c.f. Q1.3.

II.2. Les autres connecteurs

Q2.5. $A ::= X \mid A \rightarrow A' \mid A \wedge A' \mid A \vee A' \mid T \mid \perp$

$$\frac{\begin{array}{c} \tilde{\Gamma} \vdash M:A+B \\ \Gamma \vdash A \vee B \end{array}}{\Gamma \vdash C} \vee_e \quad \frac{\begin{array}{c} \tilde{\Gamma}, z:A \vdash N:C \\ \Gamma, A \vdash C \end{array}}{\Gamma, B \vdash C} \quad \frac{\begin{array}{c} \tilde{\Gamma} \vdash M:A \\ \Gamma \vdash A \end{array}}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad \frac{\begin{array}{c} \tilde{\Gamma} \vdash M':B \\ \Gamma \vdash B \end{array}}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

$$\tilde{\Gamma} \vdash \text{case}(M, x \mapsto N, y \mapsto N') : C \quad \frac{\begin{array}{c} \tilde{\Gamma} \vdash M : A+B \\ \Gamma \vdash T \end{array}}{\tilde{\Gamma} \vdash g_M : A+B} \quad \frac{\begin{array}{c} \tilde{\Gamma} \vdash d M' : A+B \\ \Gamma \vdash B \end{array}}{\tilde{\Gamma} \vdash d M' : A+B}$$

$$\frac{\begin{array}{c} \tilde{\Gamma} \vdash M : \mathbb{O} \\ \Gamma \vdash \perp \end{array}}{\Gamma \vdash A} \quad \frac{}{\Gamma \vdash T} \quad \frac{}{\tilde{\Gamma} \vdash \perp} \quad M, N ::= \dots \mid * \mid g M \mid d M \mid \text{case}(M, x \mapsto N, y \mapsto N') \quad A ::= \dots \mid A+B \mid \perp \mid \mathbb{O}$$

Coupures

$$\frac{\delta}{\frac{\begin{array}{c} \Gamma \vdash A \\ \Gamma \vdash A \vee B \end{array}}{\Gamma \vdash C} \vee^g} \quad \frac{\delta'}{\frac{\begin{array}{c} \Gamma, A \vdash C \\ \Gamma, B \vdash C \end{array}}{\Gamma \vdash C} \vee^d} \quad \frac{\delta''}{\frac{\begin{array}{c} \Gamma, B \vdash C \\ \Gamma \vdash C \end{array}}{\Gamma \vdash C} \wedge^d} \quad \frac{\delta'[\delta/A]}{\Gamma \vdash C}$$

$$\frac{\delta}{\frac{\begin{array}{c} \Gamma \vdash B \\ \Gamma \vdash A \vee B \end{array}}{\Gamma \vdash C} \vee^d} \quad \frac{\delta'}{\frac{\begin{array}{c} \Gamma, A \vdash C \\ \Gamma, B \vdash C \end{array}}{\Gamma \vdash C} \vee^g} \quad \frac{\delta''}{\frac{\begin{array}{c} \Gamma, B \vdash C \\ \Gamma \vdash C \end{array}}{\Gamma \vdash C} \wedge^g} \quad \frac{\delta''[\delta/B]}{\Gamma \vdash C}$$

Pas de coupure avec T et \perp .

Q2.6.

$$\tilde{\Gamma} \vdash N : A$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \perp} \text{ re}$$

$$\tilde{\Gamma} \vdash M : A \rightarrow \bullet$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \perp} \text{ re}$$

$$\tilde{\Gamma}, x : A \vdash M : \bullet$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \text{ ri}$$

$$\frac{\tilde{\Gamma} \vdash (\lambda x. M) : A \rightarrow \bullet}{\tilde{\Gamma} \vdash \perp} \text{ ri}$$

On peut poser $\perp := \neg \top$.

TD n° 4

I. Recherche de preuve en déduction naturelle intuitionniste.

Q1.1. On peut prouver $\Gamma \vdash B$. On ajoute A à chaque contexte dans les ségments de la preuve de $\Gamma \vdash B$. Ceci ne change pas la validité de la preuve : le seul point potentiellement problématique est l'axiome mais on a l'implication

$$A \in \Gamma \implies A \in \Gamma, B$$

Q1.2. On a l'arbre de preuve partiel suivant :

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \vdash A \Rightarrow B \\ \hline \Gamma, A \vdash A \Rightarrow B \end{array}}{\Gamma, A \vdash B} \text{aff} \quad \frac{\Gamma, A \vdash A}{\Gamma, A \vdash A} \Rightarrow_E.$$

Q1.3. On peut démontrer, par induction que si

$$\Gamma, A, \Delta, A, \Gamma' \vdash B \text{ alors } \Gamma, A, \Delta, \Gamma' \vdash B.$$

Il y a 11 cas. Le seul cas intéressant est celui de l'axiome où l'on a l'implication

$$B \in \Gamma, A, \Delta, A, \Gamma' \implies B \in \Gamma, A, \Delta, \Gamma'$$

Ceci correspond à "mutualiser" les utilisations des variables libres ayant un même type.

lorsque l'on cherche à prouver $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$ on a 2 possibilités

- ou bien on a directement $(A \Rightarrow B) \in \Gamma$
- ou bien on tente en faisant une \Rightarrow_I (si $A \in \Gamma$, on n'a pas besoin de l'ajouter au contexte).

Q1.4. On peut tenter d'utiliser une règle d'élimination \Rightarrow_E mais on boucle très rapidement ...

$$\frac{\frac{x \Rightarrow x + x \Rightarrow x}{\text{Ax}}}{x \Rightarrow x + x} \quad x \Rightarrow x + x$$

Q1.5. Gm donne l'algorithme suivant :

- (1) Gm supprime les doublons dans Γ
- (2) Si $A \in \Gamma$ alors c'est okay
- (3) Si $(B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow B_n \Rightarrow A) \in \Gamma$, alors

on montre $\Gamma \vdash B_1$

\vdots

on montre $\Gamma \vdash B_n$

on en conclut avec $\Gamma \vdash A$

- (4) Si $A = B \Rightarrow C$ alors

on tente de montrer $\Gamma, B \vdash C$ si $B \notin \Gamma$.

- (5) Sinon on ne peut pas démontrer $\Gamma \vdash A$.

Gm peut ensuite éliminer les coupures

Q1.6. Gm tente de montrer que $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow A$

Gm tente de montrer que $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A$

Gm tente de montrer que $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A \Rightarrow B$

Gm tente de montrer que $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A, A \vdash B$

Gm ne peut plus avancer : en supposant que l'algo est correct, on ne peut pas prouver la loi de Peirce en intuitionniste.

II. Typage dans le λ -calcul polymorphe

Q2.1.1. Gm pose $\text{Bool} := \forall X. X \rightarrow X \multimap X$

Q2.1.2.

Gm a bien and₁: bool → bool → bool

$$\frac{\Gamma \vdash b_1 : \text{bool}}{\Gamma \vdash b_1 : X \rightarrow X \rightarrow X} \quad \frac{\Gamma \vdash b_2 : X \rightarrow X \rightarrow X \quad \Gamma \vdash x : X}{\Gamma \vdash b_2 x : X \rightarrow X} \quad \frac{\Gamma \vdash x : X}{\Gamma \vdash y : X}$$

$$\frac{\Gamma \vdash b_1 : X \rightarrow X \rightarrow X \quad \Gamma \vdash b_2 x : X \rightarrow X \quad \Gamma \vdash y : X}{\Gamma \vdash b_1 (b_2 x y) : X \rightarrow X \quad \Gamma \vdash y : X}$$

$$\underbrace{b_1 : \text{bool}, b_2 : \text{bool}, x : X, y : X}_{x \in \text{VLL}(\tilde{\Gamma})} \quad \underbrace{\Gamma}_{\Gamma} \quad \underbrace{b_1 (b_2 x y) y : X}_{y : X}$$

Gm a bien and₂: bool → bool → bool

can T: bool F: bool

$$\frac{\Gamma \vdash b_2 : \text{bool}}{\Gamma \vdash b_2 : \text{bool} \rightarrow \text{bool} \rightarrow \text{bool}} \quad \vdots$$

$$\frac{\Gamma \vdash b_1 : \text{bool}}{\Gamma \vdash b_1 : \text{bool}} \quad \frac{\Gamma \vdash b_2 T : \text{bool} \rightarrow \text{bool} \quad \Gamma \vdash F : \text{bool}}{\Gamma \vdash b_2 T F : \text{bool}} \quad \vdots$$

$$\frac{\Gamma \vdash b_1 : \text{bool} \quad \Gamma \vdash b_2 T F : \text{bool}}{\Gamma \vdash b_1 (b_2 T F) : \text{bool} \rightarrow \text{bool}} \quad \frac{\Gamma \vdash F : \text{bool}}{\Gamma \vdash F : \text{bool}}$$

$$\underbrace{b_1 : \text{bool}, b_2 : \text{bool}}_{\Gamma} \quad \underbrace{b_1 (b_2 T F) F : \text{bool}}_{\vdots}$$

Gm a and₃: bool → bool → bool

$$\frac{\Gamma \vdash b_1 : \text{bool}}{\Gamma \vdash b_1 : \text{bool} \rightarrow \text{bool} \rightarrow \text{bool}} \quad \frac{\Gamma \vdash b_2 : \text{bool}}{\Gamma \vdash b_2 : \text{bool} \rightarrow \text{bool}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash b_1 b_2 : \text{bool} \rightarrow \text{bool} \quad \Gamma \vdash b_1 : \text{bool}}{\Gamma \vdash b_1 b_2 b_1 : \text{bool}}$$

$$\underbrace{b_1 : \text{bool}, b_2 : \text{bool}}_{\Gamma} \quad \underbrace{b_1 b_2 b_1 : \text{bool}}_{\vdots}$$

Q2.2. On donne le typage

$$\delta := \lambda \gamma : \forall \alpha, \alpha \rightarrow \alpha. \quad \gamma \circ \gamma : (\forall \alpha, \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\forall \alpha, \alpha \rightarrow \alpha)$$

Q2.3. On peut faire

$$\delta : ((\forall \alpha, \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\forall \alpha, \alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\forall \alpha, \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\forall \alpha, \alpha \rightarrow \alpha)$$

Q2.4.1. On montre les deux propriétés :

- 1 {
- si $\Gamma \vdash \lambda x. M : A$, alors nécessairement A est un type flèche potentiellement imbriqué dans des généralisations (induct^o sur la relation de typage), et on montre $\Gamma \vdash \lambda x. M : B \rightarrow C$.
 - Réciproquement, si $\Gamma, x : B \vdash M : C$ alors en généralisant, on a:
 $\Gamma \vdash \lambda x. M : \forall \vec{\alpha}, B \rightarrow C$
 - Si $\Gamma \vdash M N : \forall \vec{\alpha} A$, alors nécessairement, $\Gamma \vdash M : B \rightarrow C$ et $\Gamma \vdash N : C$. De plus, on a que C est nécessairement une généralisat^o de A .
D'où on a bien le résultat demandé.
 - Réciproquement, il suffit de spécialiser pour avoir le résultat.

Q4.2.2. Si $\vdash \Omega : \forall \vec{\alpha} A$ (potentiellement avec $\vec{\alpha}$ vide)
alors $\vdash \delta : B \rightarrow C$ et $\vdash \delta : C$
absurde car on aurait

$$\delta : B \rightarrow (B \rightarrow (B \rightarrow \dots))) \dots$$

III Principes classiques en déduction naturelle

Q3.1. En analysant les règles de la déduction naturelle, on montre qu'une preuve de $X \vee \neg X$ demande d'exhiber si l'on veut prouver le membre gauche ou le droit.

Supposons que l'on ait prouvé X , alors par substitution de X par \perp , on a montré \perp . Absurde car $\not\models \perp$.

Réiproquement, si on a montré $\neg X$ alors on substitue X avec T , on a l'arbre de preuve :

$$\frac{\text{par hyp.} \quad \overline{T \top} \quad T_i \quad \overbrace{T \neg T}}{\top \perp}$$

Absurde

D'où $\not\models X \vee \neg X$.

Q3.2. Supposons $\vdash \neg X \vee \neg \neg X$.

Si on a montré $\neg X$, alors, avec $X \rightsquigarrow T$ on a $\vdash \perp$ comme montré ci-dessus. Absurde

Si on a montré $\neg \neg X$ alors, avec $X \rightsquigarrow \perp$, on a $\vdash \perp$:

$$\frac{\overline{\perp \vdash \perp} \quad \text{par hyp.} \quad \overbrace{\vdash \neg \neg \perp}}{\vdash \perp}$$

Q3.3. On a montré (pas en Prolog mais en logique) que la logique intuitionniste est correcte, hors $\not\models \neg(X \vee \neg X)$ car $\models X \vee \neg X$.

Il est donc impossible d'avoir $\vdash \neg(X \vee \neg X)$.