Algèbre 1.

Fiche de synthèse Hugo Salou

I. Sous-groupes.

• Centre d'un groupe :

$$Z(G)\coloneqq\{g\in G\mid \forall x\in G, gx=xg\}$$

C'est un sous-groupe de G.

• Sous-groupe engendré par X :

$$\langle X \rangle \coloneqq \bigcap_{X \subseteq H \preceq G} H.$$

C'est un sous-groupe de G et il contient X.

• Index de H dans G:

$$[G:H] := \#\{aH \mid a \in G\}$$

= $\#\{Ha \mid a \in G\}$

Pour
$$H = \{e\} =: 1$$
, on a $[G : 1] = |G|$.

• Théorème de Lagrange :

$$[G:1] = [G:H] \cdot [H:1]$$

 $Mieux : si H \succeq K alors$

$$[G:K] = [G:H] \cdot [H:K]$$

• Sous-groupe distingué $N \lhd G$:

$$\forall g \in G, \quad gNg^{-1} = N$$

Mieux: on n'a que l'inclusion $gNg^{-1} \subseteq N$ à démontrer quel que soit $g \in G$.

- Sous groupe simple S: avoir $X \triangleleft S$ implique alors X = 1 ou X = G.
- distingué × sous-groupe = sous-groupe
- $\operatorname{distingu\acute{e}} \times \operatorname{distingu\acute{e}} = \operatorname{distingu\acute{e}}$
- Sous-groupe distingué engendré par X :

$$\langle X \rangle_{\text{distingu\'e}} := \left\langle \bigcup_{g \in G} gXg^{-1} \right\rangle.$$

C'est un sous-groupe distingué de G et il contient X.

• $\ker u \lhd G$ où $u:G \to H$ est un morphisme. $\mathit{Mieux}:$ c'est une équivalence

noyau
$$\longleftrightarrow$$
 sg. distingué.

II. Quotient & isomorphisme.

• Quotient : si $N \lhd G$ alors

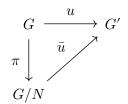
$$G/N := \{aN \mid a \in G\}$$

est un groupe. On ajoute la projection canonique :

$$\pi: G \longrightarrow G/N$$
$$q \longmapsto qN$$

On a $ker(\pi) = N$.

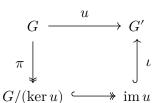
• Factorisation d'un morp. par le quotient : si $u:G\to G'$ et u(N)=1 (i.e. $\ker u=1$) alors il existe un unique $\bar u:G/N\to G'$.



• Premier théorème d'isomorphisme.

« factorisation de morphismes »

$$G/(\ker u) \cong \operatorname{im} u$$



Second théorème d'isomorphisme.

« théorème d'isomorphisme »

Pour
$$H \leq G$$
 et $N \triangleleft G$,

$$H/(H \cap N) \cong HN/N$$

• Troisième théorème d'isomorphisme.

« quotient de quotient par quotient »

Pour
$$H \triangleleft G$$
 et $N \triangleleft G$,

$$G/H \cong (G/N)/(H/N)$$

III. Actions de groupes.

- Action de groupe : $\alpha: G \to \mathrm{Bij}(X)$
- Orbite : $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\} \subseteq X$.

- Stabilisateur : Stab $(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \preceq G$ et Stab $(g \cdot x) = g(\operatorname{Stab} x)g^{-1}$
- Points fixes de $g \in G$:

$$Fix(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\} \subseteq X$$

et, l'ensemble des points fixes de l'action :

$$X^G = \bigcap_{g \in G} \operatorname{Fix}(g)$$

On dit qu'une action est :

- fidèle si ker α = {id} « la seule action qui fixe tout le monde est l'identité » (en passant au quotient, on résout ce problème);
- libre si $\forall g \neq 1_G$, $Fix(g) = \emptyset$;
- transitive s'il n'y a qu'une orbite :

$$\forall x, y \in X, \exists g \in G, y = g \cdot x;$$

• *simplement transitive* : libre et transitive (*i.e.* unicité de *g* au dessus).

Actions classiques de G sur G:

- translation gauche: $g \cdot x := gx$. \rightarrow libre et transitive
- conjugaison: $g \cdot x := gxg^{-1}$.

Théorème de Caylay. Pour G un groupe d'ordre fini $n \in \mathbb{N}^*$, on a que G est isomorphe à un sousgroupe de \mathfrak{S}_n .

 $\mathit{Id\acute{e}}: G \hookrightarrow \mathfrak{S}_n$ et 1er théorème d'isomorphisme.

- Classe de conjugaison : $G \cdot x$ pour la conjugaison
- Centralisateur : Stab x pour la conjugaison

Normalisateur:

$$N_G(H) \coloneqq \left\{g \in G \mid gHg^{-1} = H\right\} \lhd G$$

C'est le plus grand s.g.dist. contenant H.