TD n° 1

I. Savoir lire la définition.

Ce sont des mesures de sécurité. Sinon :

$$(\lambda y.\ x\ y)[z/y] \neq_\alpha \lambda y.\ x\ z \qquad \rightsquigarrow ⚠\ x \neq y$$
$$(\lambda y.\ x\ y)\ [y/x] \neq_\alpha \lambda y.\ y\ y \qquad \rightsquigarrow ⚠\ y \notin Vl(N).$$

II. Classes d'équivalence pour $=_\beta$.

Q2.1. $\Omega\,\Omega \to_\beta \Omega\,\Omega$ et $\Omega \to_\beta \Omega$.

Ainsi, si $\Omega\Omega =_\beta \Omega$ alors, par confluence, il existe M un λ-terme tel que

$$\begin{tikzcd}
\Omega\Omega \arrow[dr, "*"', "\beta"] & & \Omega \arrow[dl, "*", "\beta"'] \\
& P &
\end{tikzcd}$$

C'est absurde car on aurait $\Omega\Omega = P = \Omega$ ($\Omega\Omega \to_\beta^* P$ implique $P = \Omega\Omega$ car il n'y a que 1 redex).

Q2.2. Soit N une forme normale avec $x \notin Vl(N)$

On pose :

$$M = (\lambda x.\ N)\ \Omega.$$

III Propriété du diamant pour les réductions parallèles

Q3.1.

$$\begin{tikzcd}
C & M \arrow[l, Rightarrow, "/" marking] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow, "/" marking] \arrow[drr, Rightarrow, "/" marking] & A \\
D & E & B \quad F
\end{tikzcd}$$

Par induction (3 cas)

Q 3. 2. $x^* := x$

$(\lambda x. M)^* := \lambda x.(M^*)$

$(M\ N)^* := \begin{cases} P^*[N^*/x] & \text{si } M = \lambda x. P \\ M^*\ N^* & \text{sinon} \end{cases}$

Lemme : si $M \Rrightarrow N$ alors $N \Rrightarrow M^*$ (par induction sur M)

D'où

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow] & \\ A \arrow[dr, Rightarrow] & & B \arrow[dl, Rightarrow] \\ & M^* & \end{tikzcd}$$

IV Normalisation faible et forte en λ-calcul pur.

Q4. 1. Les propriétés (1), (2) et (3) restent vraies

La propriété (4) ne l'est pas :

on a

$$M := (\lambda x. x)\, M' \longrightarrow M'$$

mais

$$\underbrace{(y\ y)[M/y]}_{=\, M\ M} \not\longrightarrow \underbrace{(y\ y)[M'/y]}_{=\, M'\ M'}$$

Q4. 2. Par induction sur $M \to M'$ (4 cas) :

* Cas $(\lambda x. M)\, N \longrightarrow M[N/x]$. Supposons $x \in \mathcal{V}\ell(M)$ et $N \in \lambda I$. (*)

Par induction sur M, il y a 3 cas :

- si $M = y$ alors
  - si $y \neq x$ alors $M[N/x] = M \in \lambda I$.
  - si $y = x$ alors $M[N/x] = N \in \lambda I$.
- si $M = P\ Q$ alors par hypothèse d'induction on a : $P[N/x] \in \lambda I$ et $Q[N/x] \in \lambda I$ d'où $(P\ Q)[N/x] \in \lambda I$. par (ii)

- si $M = \lambda y. P$ avec $y \in \mathcal{V}\ell(P)$ alors $M[N/x] \in \lambda I$ car $P[N/x] \in \lambda I$.

* Cas $M N \to M' N$ avec $M \to M'$. Par hypothèse d'induction $M' \in \lambda I$.
avec $M \in \lambda I$, $N \in \lambda I$.
D'où $M' N \in \lambda I$ par (ii).
* Cas $M N \to M N'$ avec $N \to N'$. Par hypothèse d'induction $N' \in \lambda I$.
avec $M \in \lambda I$, $N \in \lambda I$.
D'où $M N' \in \lambda I$ par (ii).

* Cas $\lambda x . M \to \lambda x . M'$ avec $M \to M'$ et $M \in \lambda I$, $(\lambda x . M) \in \lambda I$, $M' \in \lambda I$ par hyp. d'ind°
Et, $vl(M') = vl(M)$ (preuve par induction)
d'où $(\lambda x . M') \in \lambda I$ car $x \in vl(M')$.

Q4.3.