

TD n° 1

I. Savoir lire la définition.

Ce sont des mesures de sécurité. Donc :

$$(\lambda y. x y) [y/x] \neq \lambda y. x y$$

$$(\lambda y. x y) [y/y] \neq \lambda y. y y$$

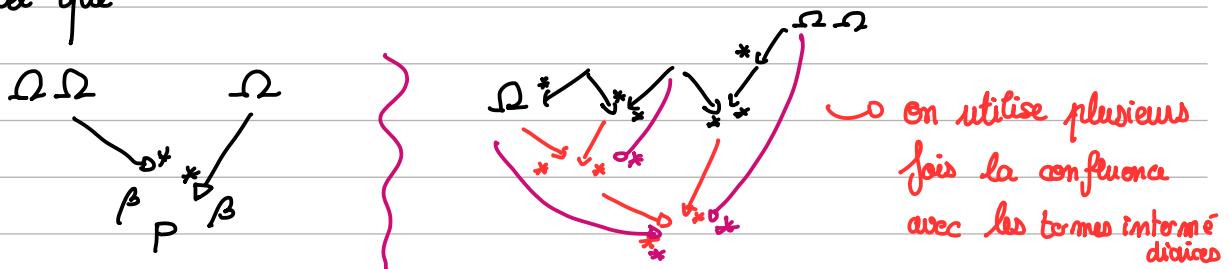
$$\text{mo } \Delta x \neq y$$

$$\text{mo } \Delta y \notin \text{cl}(N).$$

II. Classes d'équivalence pour $=_\beta$.

Q2.1. $\Omega \Omega \xrightarrow{\beta} \Omega \Omega$ et $\Omega \xrightarrow{\beta} \Omega$.

Ainsi, si $\Omega \Omega =_\beta \Omega$ alors, par confluence, il existe M un 2-terme tel que



C'est absurde car on aurait $\Omega \Omega = P = \Omega$ ($\Omega \Omega \xrightarrow{\beta} P$ implique $P = \Omega \Omega$ car il n'y a que 2 redex).

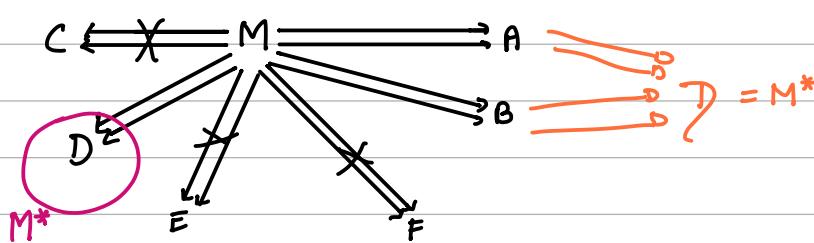
Q2.2. Soit N une forme normale avec $x \notin V\ell(N)$

On pose :

$$M = (\lambda x. N) \Omega.$$

III Propriété du diamant pour les réductions parallèles

Q3.1.



Par induction (3 cas)

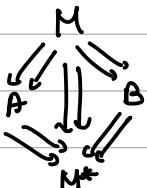
Q3.2. $x^* := x$

$$(\lambda x. M)^* := \lambda x. (M^*)$$

$$(M N)^* := \begin{cases} P[N^*/x] & \text{si } M = \lambda x. P \\ M^* N^* & \text{sinon} \end{cases}$$

Lemme : si $M \rightarrow N$ alors $N \rightarrow M^*$ (par induction sur M)

D'où



On a donc la propriété du diamant
 $\rightarrow_{\text{con}} \Rightarrow$ donc la confluence de \rightarrow_p .

IV Normalisation faible et forte en λ -calcul pur.

Q4.1. Les propriétés (1), (2) et (3) restent vraies
La propriété (4) ne l'est pas:

on a

$$M := (\lambda x. x) M' \rightarrow M'$$

mais

$$\begin{array}{ccc} (y y)[M/y] & \rightarrow & (y y)[M'/y] \\ \parallel & & \parallel \\ M & & M' n' \end{array}$$

Q4.2. Par induction sur $M \rightarrow M'$ (4 cas) :

* Cas $(\lambda x. M) N \rightarrow M[N/x]$. Supposons $x \in \text{nf}(M)$ et $N \in \mathcal{I}$. (*)

Par induction sur M , il y a 3 cas :

- si $M = y$ alors

- si $y \neq x$ alors $M[N/x] = M \in \mathcal{I}$.

- si $y = x$ alors $M[N/x] = N \in \mathcal{I}$.

- si $M = P Q$ alors par hypothèse d'induction

- on a : $P[N/x] \in \mathcal{I}$ et $Q[N/x] \in \mathcal{I}$

- d'où $(P Q)[N/x] \in \mathcal{I}$. par (ii)

- si $M = \lambda y. P$ avec $y \in \text{nf}(P)$ alors $M[N/x] \in \mathcal{I}$ car $P[N/x] \in \mathcal{I}$.

* Cas $M N \rightarrow M' N$ avec $M \rightarrow M'$. Par hypothèse d'induction $M' \in \lambda I$.
avec $M \in \lambda I$, $N \in \lambda I$.

D'où $M' N \in \lambda I$ par (ii).

* Cas $M N \rightarrow M N'$ avec $N \rightarrow N'$. Par hypothèse d'induction $N' \in \lambda I$.
avec $M \in \lambda I$, $N \in \lambda I$.

D'où $M N' \in \lambda I$ par (ii).

* Cas $\lambda x. M \rightarrow \lambda x. M'$ avec $M \rightarrow M'$ et $M \in \lambda I$, $(\lambda x. M) \in \lambda I$, $M' \in \lambda I$
Et, $v\ell(M') = v\ell(M)$ (preuve par induction) par hyp. d'ind°
d'où $(\lambda x. M') \in \lambda I$ car $x \in v\ell(M)$.

Q4.3. Supposons avoir une divergence issue de $(\lambda x. M)N$.

On a trois cas :

- soit $N \uparrow$ donc $N_i \rightarrow N_{i+1}$ avec $N_0 = N$ d'où $M[N/x] \xrightarrow{*} M[N_{i+1}/x]$ et donc $M[N/x] \uparrow$ avec au moins un pas
car $x \in v\ell(M)$
- soit $M \uparrow$ donc $M_i \rightarrow M_{i+1}$ avec $M_0 = M$ d'où $M_i[N/x] \xrightarrow{*} M_{i+1}[N/x]$ et donc $M[N/x] \uparrow$
- soit $M[N/x] \uparrow$

Dans tous les cas, $M[N/x] \uparrow$

Q4.4. Non : $(\lambda x. y) \Omega \uparrow$ mais $y[\Omega/x] = y \neq$

can $\in \lambda I$
à toute étape

Q4.5. Mon instinct me dit non, mais vu qu'on ne peut pas faire "disparaître" une divergence, j'ai envie de dire oui.

Si on a une divergence, alors on ne peut pas l'éviter. Inversement, si on n'a pas de divergence, on ne peut pas aller dans une divergence.

En gros : tous les calculs dans λI sont utiles.

V Des 2-termes qui calculent : couples et prédecesseurs

Q5.1. On définit $\text{succ} := \lambda u. \lambda f. \lambda x. f(ufx)$.

$$\begin{aligned} \text{succ } n &= (\lambda ufx. f(ufx))(\lambda fx. f^n x) \xrightarrow{*} \lambda fx. f((\lambda fx. f^n x)fx) \\ &\xrightarrow{*} \lambda fx. f(\lambda x. f^n x) x \\ &\xrightarrow{*} \lambda fx. f(f^n x) = \lambda fx. f^{n+1} x = \underline{n+1}. \end{aligned}$$

D'où $\text{succ } n \xrightarrow{*} \underline{n+1}$

Q5.2. On pose $\text{fst} := \lambda c. c T$ et $\text{snd} := \lambda c. c F$.

$$\text{fst } (M, N) = (\lambda c. c (\lambda x. y. x)) (\lambda f. (f M) N)$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda f. (f M) N) (\lambda x. y. x)$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda x. y. x) M N$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda y. M) N$$

$$\xrightarrow{\beta} M$$

$$\text{snd } (M, N) = (\lambda c. c (\lambda x. y. y)) (\lambda f. (f M) N)$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda f. (f M) N) (\lambda x. y. y)$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda x. y. y) M N$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda y. y) N$$

$$\xrightarrow{\beta} N$$

Q5.3. On pose : $\text{Next} := \lambda c. (\text{succ}(\text{fst} c), \text{fst} c)$

$$\text{Next } (\underline{m}, \underline{k}) \xrightarrow{\beta} (\text{succ}(\text{fst } (\underline{m}, \underline{k})), \text{fst } (\underline{m}, \underline{k})) \quad \text{par Q5.2}$$

$$\xrightarrow{\beta^*} (\text{succ } \underline{m}, \text{fst } (\underline{m}, \underline{k}))$$

$$\xrightarrow{\beta^*} (\underline{m+1}, \text{fst } (\underline{m}, \underline{k}))$$

$$\xrightarrow{\beta^*} (\underline{m+1}, \underline{m})$$

par Q5.1

par Q5.2

Q5.4. On pose $\text{pred} := \lambda n. \text{snd } (\underline{n} \text{ Next } (\underline{0}, \underline{0}))$.

VII Des 2-termes qui bouclent

$$\text{Q6.1. } Y M \xrightarrow{\beta} (\lambda x. M(\alpha x)) (\lambda x. M(\alpha x))$$

$$\xrightarrow{\beta} M ((\lambda x. M(\alpha x)) (\lambda x. M(\alpha x)))$$

$$\xleftarrow{\beta} M (Y M)$$

$$\text{D'où } M(Y M) =_{\beta} Y M.$$

Q6.2. On pose :

$$F := \lambda f. \lambda n. \text{if zero?}(n) \text{ then } 1$$

$$\text{else mult } n \text{ } (f \text{ (pred } n))$$

puis

$$\text{fact} := Y F.$$

Q6.3. On pose $\Upsilon := \lambda f. f(f x)$ puis $\Gamma := \lambda x. \Upsilon \Upsilon$.

Gm a:

$$\Gamma = \lambda x. \gamma \gamma$$

degré de bâtonnement:

2

$$\rightarrow \beta \lambda x. \gamma (\Gamma x)$$

3

$$\rightarrow \beta \lambda x. \gamma (x(x x))$$

4

$$\rightarrow \beta \lambda x. (x(x x))(x(x x)) \infty$$

7

Q6.1. Aucune idée...