

# Logique

*Basé sur le cours de Natacha PORTIER  
Notes prises par Hugo SALOU*



*28 janvier 2025*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Le calcul propositionnel.</b>	<b>4</b>
1.1	Syntaxe. . . . .	4
1.2	Sémantique. . . . .	6

# Introduction.

Dans ce cours, on s'intéressera à quatre thèmes :

- ▷ la théorie des modèles (▷ les « vraies » mathématiques) ;
- ▷ la théorie de la démonstration (▷ les preuves) ;
- ▷ la théorie des ensembles (▷ les objets) ;
- ▷ les théorèmes de Gödel (▷ les limites).

On ne s'intéressera pas à la calculabilité, car déjà vu en cours de FDI. Ce cours peut être utile à ceux préparant l'agrégation d'informatique.

# 1 Le calcul propositionnel.

Le *calcul propositionnel*, c'est la « grammaire » de la logique. Dans ce chapitre, on s'intéressera à

1. la construction des formules ( $\triangleright$  la syntaxe) ;
2. la sémantique et les théorèmes de compacité ( $\triangleright$  la compacité sémantique).

## 1.1 Syntaxe.

**Définition 1.1.** Le *langage*, ou *alphabet*, est un ensemble d'éléments fini ou pas. Les éléments sont les *lettres*, et les suites finies sont les *mots*.

**Définition 1.2.** On choisit l'alphabet :

- $\triangleright \mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots\}$  des variables propositionnelles ;
- $\triangleright$  un ensemble de *connecteurs* ou *symboles logiques*, défini par  $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ , il n'y a pas  $\exists$  et  $\forall$  pour l'instant.
- $\triangleright$  les parenthèses  $\{(, )\}$ .

Les formules logiques sont des mots. On les fabrique avec des briques de base (les variables) et des opérations de construction : si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux formules, alors  $\neg F$ ,  $(F_1 \vee F_2)$ ,  $(F_1 \wedge F_2)$ ,  $(F_1 \rightarrow F_2)$  et  $(F_1 \leftrightarrow F_2)$  aussi.

**Définition 1.3** (« par le haut », « mathématique »). L'ensemble  $\mathcal{F}$  des formules du calcul propositionnel construit sur  $\mathcal{P}$  est le plus petit ensemble contenant  $\mathcal{P}$  et stable par les opérations de construction.

**Définition 1.4** (« par le bas », « informatique »). L'ensemble  $\mathcal{F}$  des formules logiques du calcul propositionnel sur  $\mathcal{P}$  est défini par

$$\triangleright \mathcal{F}_0 = \mathcal{P};$$

$$\triangleright \mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \left\{ \begin{array}{c} \neg F_1 \\ (F_1 \vee F_2) \\ (F_1 \wedge F_2) \\ (F_1 \rightarrow F_2) \\ (F_1 \leftrightarrow F_2) \end{array} \middle| F_1, F_2 \in \mathcal{F} \right\}$$

puis on pose  $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ .

On peut montrer l'équivalence des deux définitions.

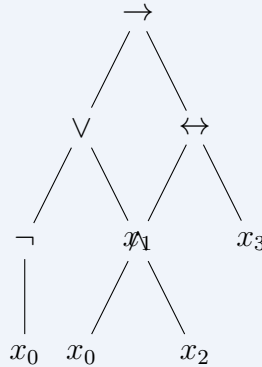
**Théorème 1.1** (Lecture unique). Toute formule  $G \in \mathcal{F}$  vérifie une et une seule de ces propriétés :

- $\triangleright G \in \mathcal{P}$ ;
- $\triangleright$  il existe  $F \in \mathcal{F}$  telle que  $G = \neg F$ ;
- $\triangleright$  il existe  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$  telle que  $G = (F_1 \vee F_2)$ ;
- $\triangleright$  il existe  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$  telle que  $G = (F_1 \wedge F_2)$ ;
- $\triangleright$  il existe  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$  telle que  $G = (F_1 \rightarrow F_2)$ ;
- $\triangleright$  il existe  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$  telle que  $G = (F_1 \leftrightarrow F_2)$ .

**Preuve.** En exercice. □

**Corollaire 1.1.** Il y a une bijection entre les formules et les arbres dont

- $\triangleright$  les feuilles sont étiquetées par des variables;
- $\triangleright$  les nœuds internes sont étiquetés par des connecteurs;
- $\triangleright$  ceux étiquetés par  $\neg$  ont un fils, les autres deux.

**Exemple 1.1.**

## 1.2 Sémantique.

**Lemme 1.1.** Soit  $\nu$  une fonction de  $\mathcal{P}$  dans  $\{0, 1\}$  appelé *valuation*. Alors  $\nu$  s'étend de manière unique en une fonction  $\bar{\nu}$  de  $\mathcal{F}$  dans  $\{0, 1\}$  telle que

- ▷ sur  $\mathcal{P}$ ,  $\nu = \bar{\nu}$  ;
- ▷ si  $F, G \in \mathcal{F}$  sont des formules alors
  - $\bar{\nu}(\neg F) = 1 - \bar{\nu}(F)$  ;
  - $\bar{\nu}(F \vee G) = 1$  ssi  $\bar{\nu}(F) = 1$  ou<sup>1</sup>  $\bar{\nu}(G) = 1$  ;
  - $\bar{\nu}(F \wedge G) = \bar{\nu}(F) \times \bar{\nu}(G)$  ;
  - $\bar{\nu}(F \rightarrow G) = 1$  ssi  $\bar{\nu}(G) = 1$  ou  $\bar{\nu}(F) = 0$  ;
  - $\bar{\nu}(F \leftrightarrow G) = 1$  ssi  $\bar{\nu}(F) = \bar{\nu}(G)$ .

Par abus de notations, on notera  $\nu$  pour  $\bar{\nu}$  par la suite.

**Preuve. Existence.** On définit en utilisant le lemme de lecture unique, et par induction sur  $\mathcal{F}$  :

- ▷  $\bar{\nu}$  est définie sur  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{P}$  ;
- ▷ si  $\bar{\nu}$  est définie sur  $\mathcal{F}_n$  alors pour  $F \in \mathcal{F}_{n+1}$ , on a la

1. C'est un « ou » inclusif : on peut avoir les deux (ce qui est très différent du « ou » exclusif dans la langue française).

disjonction de cas

- si  $F = \neg G$  avec  $G \in \mathcal{F}_n$ , et on définit  $\bar{\nu}(F) = 1 - \bar{\nu}(F_1)$  ;
- *etc* pour les autres cas.

**Unicité.** On montre que si  $\lambda = \nu$  sur  $\mathcal{P}$  alors  $\bar{\lambda} = \bar{\nu}$  si  $\bar{\lambda}$  et  $\nu$  vérifient les égalités précédents.

□

**Exemple 1.2 (Table de vérité).** Pour la formule

$$F = ((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1)),$$

on construit la table

$x_1$	0	0	1	1
$x_2$	0	1	0	1
$x_1 \rightarrow x_2$	1	1	0	1
$x_2 \rightarrow x_1$	1	0	1	1
$F$	1	0	1	1

**Définition 1.5.** ▷ Une formule  $F$  est dite *satisfaite par une valuation*  $\nu$  si  $\nu(F) = 1$ .

- ▷ Une *tautologie* est une formule satisfaite pour toutes les valuations.
- ▷ Un ensemble  $\mathcal{E}$  de formules est *satisfiable* s'il existe une valuation qui satisfait toutes les formules de  $\mathcal{E}$ .
- ▷ Un ensemble  $\mathcal{E}$  de formules est *finiment satisfiable* si tout sous-ensemble fini de  $\mathcal{E}$  est satisfiable.
- ▷ Une formule  $F$  est *conséquence sémantique* d'un ensemble de formules  $\mathcal{E}$  si toute valuation qui satisfait  $\mathcal{E}$  satisfait  $F$ .
- ▷ Un ensemble de formules  $\mathcal{E}$  est *contradictoire* s'il n'est pas satisfiable.
- ▷ Un ensemble de formules  $\mathcal{E}$  est *finiment contradictoire* s'il

existe un sous-ensemble fini contradictoire de  $\mathcal{E}$ .

**Théorème 1.2 (compacité du calcul propositionnel).** On donne trois énoncés équivalents (équivalence des trois énoncés laissé en exercice) du théorème de compacité du calcul propositionnel.

**Version 1.** Un ensemble de formules  $\mathcal{E}$  est satisfiable si et seulement s'il est finiment satisfiable.

**Version 2.** Un ensemble de formules  $\mathcal{E}$  est contradictoire si et seulement s'il est finiment contradictoire.

**Version 3.** Pour tout ensemble  $\mathcal{E}$  de formules du calcul propositionnel, et toute formule  $F$ ,  $F$  est conséquence sémantique de  $\mathcal{E}$  si et seulement si  $F$  est conséquence sémantique d'un sous-ensemble fini de  $\mathcal{E}$ .

**Preuve.** Dans le cas où  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots\}$  est au plus dénombrable (le cas non dénombrable sera traité après). On démontre le cas « difficile » de la version 1 (*i.e.* finiment satisfiable implique satisfiable). Soit  $\mathcal{E}$  un ensemble de formules finiment satisfiable. On construit par récurrence une valuation  $\nu$  qui satisfasse  $\mathcal{E}$  par récurrence : on construit  $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n, \dots$  tels que  $\nu(x_0) = \varepsilon_0, \dots, \nu(x_n) = \varepsilon_n, \dots$

▷ Cas de base. On définit la valeur de  $\varepsilon_n$  pour  $x_0 \in \mathcal{P}$ .

1. soit, pour tout sous-ensemble fini  $B$  de  $\mathcal{E}$ , il existe une valuation  $\lambda$  qui satisfait  $B$  avec  $\lambda(x_0) = 0$ ;
2. soit, il existe un sous-ensemble fini  $B_0$  de  $\mathcal{E}$ , pour toute valuation  $\lambda$  qui satisfait  $B_0$ , on a  $\lambda(x_0) = 1$ .

Si on est dans le cas 1, on pose  $\varepsilon_0 = 0$ , et sinon (cas 2) on pose  $\varepsilon_0 = 1$ .

▷ Cas de récurrence. On montre, par récurrence sur  $n$ , la propriété suivante :

il existe une suite  $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n$  (que l'on étend, la suite ne change pas en fonction de  $n$ ) de booléens telle que, pour tout sous-ensemble fini  $B$  de  $\mathcal{E}$ , il



existe une valuation  $\nu$  satisfaisant  $B$  et telle que  $\nu(x_0) = \varepsilon_0, \dots$ , et  $\nu(x_n) = \varepsilon_n$ .

- Pour  $n = 0$ , soit on est dans le cas 1, et on prend  $\varepsilon_0 = 0$  et on a la propriété ; soit on est dans le cas 2 ;, et on prend  $B$  un sous-ensemble fini de  $\mathcal{E}$ , alors  $B \cup B_0$  est un ensemble fini donc satisfiable par une valuation  $\nu$ . La valuation satisfait  $B_0$  donc  $\nu(x_0) = 1$  et  $\nu$  satisfait  $B$ . On a donc la propriété au rang 0.
- Hérédité. Par hypothèse de récurrence, on a une suite  $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n$ .
  1. Soit, pour tout sous-ensemble fini  $B$  de  $\mathcal{E}$ , il existe  $\nu$  qui satisfait  $B$  et telle que  $\nu(x_0) = \varepsilon_0, \dots, \nu(x_n) = \varepsilon_n$ , et  $\nu(x_{n+1}) = 0$ . On pose  $\varepsilon_{n+1} = 0$ .
  2. Soit il existe  $B_{n+1}$  un sous-ensemble fini de  $\mathcal{E}$  tel que, pour toute valuation  $\nu$  telle que  $\nu$  satisfait  $B_{n+1}$  et  $\nu(x_0) = \varepsilon_0, \dots, \nu(x_n) = \varepsilon_n$ , on a  $\nu(x_{n+1}) = 1$  et on pose  $\varepsilon_{n+1} = 1$ .

Montrons l'hérédité :

1. vrai par définition ;
2. soit  $B$  un sous-ensemble fini de  $\mathcal{E}$ . On considère  $B \cup B_{n+1}$ , soit  $\nu$  telle que  $\nu(x_0) = \varepsilon_0, \dots, \nu(x_n) = \varepsilon_n$ . On a que  $\nu$  satisfait  $B_{n+1}$  donc  $\nu(x_{n+1}) = 1 = \varepsilon_{n+1}$  et  $\nu$  satisfait  $B$ .

On a donc la propriété pour tout  $n$ .

Finalement, soit  $\delta$  une valuation telle que, pour tout  $i$ ,  $\delta(x_i) = \varepsilon_i$ . Montrons que  $\delta$  satisfait  $\mathcal{E}$ . Soit  $F \in \mathcal{E}$ . On sait que  $F$  est un mot (fini), donc contient un ensemble fini de variables inclus dans  $\{x_0, \dots, x_n\}$ . D'après la propriété par récurrence au rang  $n$ , il existe une valuation  $\nu$  qui satisfait  $F$  et telle que  $\nu(x_0) = \varepsilon_0, \dots, \nu(x_n) = \varepsilon_n$ , et donc  $\nu$  et  $\delta$  coïncident sur les variables de  $F$ . Donc (lemme simple), elles coïncident sur toutes les formules qui n'utilisent que ces variables. Donc,  $\delta(F) = 1$ , et on en conclut que  $\delta$  satisfait  $\mathcal{E}$ .  $\square$

Dans le cas non-dénombrable, on utilise le *lemme de Zorn*, un équivalent de l'*axiome du choix*.

**Définition 1.6.** Un ensemble ordonné  $(X, \mathcal{R})$  est inductif si pour tout sous-ensemble  $Y$  de  $X$  totalement ordonné par  $\mathcal{R}$  (i.e. une chaîne) admet un majorant dans  $X$ .

**Remarque 1.1.** On considère ici un majorant et non un plus grand élément (un maximum).

**Exemple 1.3.** 1. Dans le cas  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ , le majorant est l'union des parties de la chaîne, il est donc inductif.  
2. Dans le cas  $(\mathbb{R}, \leq)$ , il n'est pas inductif car  $\mathbb{R}$  n'a pas de majorant dans  $\mathbb{R}$ .

**Lemme 1.2 (Lemme de Zorn).** Si  $(X, \mathcal{R})$  est un ensemble ordonné inductif non-vide, il admet au moins un élément maximal.

**Remarque 1.2.** Un élément maximal n'est pas nécessairement le plus grand.

**Preuve.** Soit  $\mathcal{E}$  un ensemble de formules finiment satisfiable, et  $\mathcal{P}$  un ensemble de variables. On note  $\mathcal{V}$  l'ensemble des valuations partielles prolongeables pour toute partie finie  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{E}$  en une valuation satisfaisant  $\mathcal{C}$ . C'est-à-dire :

$$\mathcal{V} := \left\{ \varphi \in \bigcup_{X \subseteq \mathcal{P}} \{0, 1\}^X \mid \forall \mathcal{C} \in \wp_f(\mathcal{E}), \exists \delta \in \{0, 1\}^{\mathcal{P}}, \begin{array}{l} \delta|_{\text{dom}(\varphi)} = \varphi \\ \forall F \in \mathcal{C}, \delta(F) = 1 \end{array} \right\}.$$

L'ensemble  $\mathcal{V}$  est non-vide car contient l'application vide de  $\{0, 1\}^{\emptyset}$  car  $\mathcal{E}$  est finiment satisfiable. On défini la relation

d'ordre  $\preccurlyeq$  sur  $\mathcal{V}$  par :

$$\varphi \preccurlyeq \psi \quad \text{ssi} \quad \psi \text{ prolonge } \varphi.$$

Montrons que  $(\mathcal{V}, \preccurlyeq)$  est inductif. Soit  $\mathcal{C}$  une chaîne de  $\mathcal{V}$  et construisons un majorant de  $\mathcal{C}$ . Soit  $\lambda$  la valuation partielle définie sur  $\text{dom } \lambda = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{C}} \text{dom } \varphi$ , par : si  $x_i \in \text{dom } \lambda$  alors il existe  $\varphi \in \mathcal{C}$  tel que  $x_i \in \text{dom } \varphi$  et on pose  $\lambda(x_i) = \varphi(x_i)$ .

La valuation  $\lambda$  est définie de manière unique, *i.e.* ne dépend pas du choix de  $\varphi$ . En effet, si  $\varphi \in \mathcal{C}$  et  $\psi \in \mathcal{C}$ , avec  $x_i \in \text{dom } \varphi \cap \text{dom } \psi$ , alors on a  $\varphi \preccurlyeq \psi$  ou  $\psi \preccurlyeq \varphi$ , donc  $\varphi(x_i) = \psi(x_i)$ .

Autrement dit,  $\lambda$  est la limite de  $\mathcal{C}$ . Montrons que  $\lambda \in \mathcal{V}$ . Soit  $B$  une partie finie de  $\mathcal{E}$ . On cherche  $\mu$  qui prolonge  $\lambda$  et satisfait  $B$ . L'ensemble de formules  $B$  est fini, donc utilise un ensemble fini de variables, dont un sous-ensemble fini  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\} \subseteq \text{dom}(\lambda)$ . Il existe  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  dans  $\mathcal{C}$  telle que  $x_{i_1} \in \text{dom } \varphi_1, \dots, x_{i_n} \in \text{dom } \varphi_n$ . Comme  $\mathcal{C}$  est une chaîne, donc soit  $\varphi_0 = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \varphi_i$  et on a  $\varphi_0 \in \mathcal{C}$ . On a, de plus,  $x_{i_1}, \dots, x_{i_n} \in \text{dom}(\varphi_0)$ . Soit  $\varphi_0 \in \mathcal{V}$  prolongeable en  $\psi_0$  qui satisfait  $B$ . On définit :

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{P} &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x \in \text{dom } \lambda &\longmapsto \lambda(x) \\ x \in \text{var } B &\longmapsto \psi_0(x) \\ \text{sinon} &\longmapsto 0. \end{aligned}$$

On vérifie que la définition est cohérente sur l'intersection car  $\lambda$  et  $\psi_0$  prolongent tous les deux  $\varphi_0$  et donc  $\lambda \in \mathcal{V}$  d'où  $\mathcal{V}$  est inductif.

Suite la preuve plus tard. □