

Exercice 1. Théorie des graphes.

Q1. pas de boucles : $\forall x \rightarrow R(x, x)$
 non-orienté : $\forall x \forall y \quad R(x, y) \leftrightarrow R(y, x)$.
 (l'implication simple suffit).

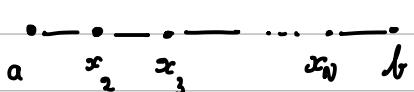
D'où $\mathcal{L}(\text{Graphes non-orientés simples}) = \{ \forall x \rightarrow R(x, x), \forall x \forall y \quad R(x, y) \leftrightarrow R(y, x) \}$.

Q2. On pose $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$ qui est une théorie sur $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$.
pour n fixé

Q3. $\varphi_n = \underbrace{\forall x_1 \dots \forall x_{n-1}}_{\text{pour } n \text{ fixé}} \neg(R(a, x_1) \wedge R(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge R(x_{n-1}, b))$

Q4. Oui. On considère $G = (V, E)$ dit ci-dessous.

Soit $N = \max \{ n_1, \dots, n_k \} + 1$.



Il est connexe, simple, non-orienté et non-vide.

Et, pour tout $i \in [1, k]$, il n'y a pas de chemins de longueur n_k entre a et b dans G .

Q5. Soit $\mathcal{T}' \supseteq A$ une théorie des graphes connexes.

On pose $\mathcal{T}' := \mathcal{T}' \cup \{ \varphi_n \mid n \in \mathbb{N}^* \}$.

Toute partie finie de \mathcal{T}' est satisfiable.
 Par compacité, on a que \mathcal{T}' est satisfiable. Absurde car seul un graphe vide satisfait \mathcal{T}' .

Exercice 2. Langage sans fonction.

Q1. Par récurrence sur n , montre que :

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y_1 \dots \exists y_k A[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k]$$

est un théorème ssi elle est satisfait dans toute interprétation de cond^o au plus $n+m$.

- Pour $n=0$, $\underbrace{\exists y_1 \dots \exists y_k}_{\varphi} A[y_1, \dots, y_k]$ est un théorème ssi

$$\forall M \text{ modèle}, \forall e, M, e \models \varphi$$

Si on a un modèle de cond $> m$, on peut le décomposer en modèles de cond $\leq k$ par dénombrement.

D'où l'équivalence.

•

Q2. Dans $\mathcal{L} = \{c_1, \dots, c_m, f, =\}$,

on considère $A = "f(y_1, y_2) = f(y_2, y_1) \wedge \neg(y_1 = y_2) \wedge \bigwedge_{i=3}^{k-1} (y_i = y_{i+1})"$.

Dans le modèle

$$M: \{0, 1\}, f_M = \text{id}_M, c_i = 0$$

la formule A est fausse.

Exercice 3. Densité.

Q1. On a (\mathbb{Q}, \prec) et (\mathbb{R}, \prec) qui sont non-isomorphes.

Q2

Soit $\varphi := \forall x, \exists y \quad r(x, y)$.

Dans (\mathbb{R}, \prec) , la formule φ est vérifiée

Dans $[0, 1], \prec$ la formule φ ne l'est pas.

D'où \mathcal{T} n'est pas complète.

Q3. Soit un modèle \mathcal{M} .

Soient $x, y \in |\mathcal{M}|$ tels que $x \prec y$ (par A_2).

Construisons par récurrence des éléments de \mathcal{M} .

- on commence avec x, y
- par A_4 , et comme $x \prec y$, il existe z tq $x \prec z \prec y$
- par A_{24} , $x \prec z$ w $x \prec w \prec z$

Si $w \in \{x, y, z\}$, alors par A_2 et A_3 on a une absurdité.

D'où \mathcal{T} n'admet pas de modèle fini.

Q4. $\mathcal{T}_1 : (\{1\}, \preceq)$

$\mathcal{T}_2 : (\{1, 2\}, \leq)$

$\mathcal{T}_3 :$



$\mathcal{T}_4 : (\{0, 1\}, \prec)$

Exercice 1. Modèle infini.

On pose $\Phi_k = \exists x_1 \dots \exists x_k \neg(x_1 = x_2) \wedge \dots \wedge \neg(x_{k-1} = x_k)$.

Toute sous-théorie finie A de $T' := T \cup \{\Phi_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ a un modèle (de card $\geq \max \{\kappa \in \mathbb{N} \mid \Phi_k \in A\} \in \mathbb{N}$ avec $\max \emptyset = 0$).

Pour compactité, T' admet un modèle. Si il est fini de cardinal k , absurdité car $\Phi_k \in T'$. Il admet donc un modèle infini \mathcal{M}_∞ .

La théorie T admet donc un modèle infini \mathcal{M}_∞ .

TP m^o 6

Exercice 1. Générationnisme.

Q1.

$\text{Th}(\text{Groupes abéliens sans torsion}) := \{$

$$\forall x \exists y \quad x + y = y + x = 0,$$

$$\forall x \forall y \forall z \quad (x + y) + z = x + (y + z),$$

$$\forall x \quad x + 0 = 0 + x = x,$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \forall y \quad x + y = y + x \\ \exists \underbrace{\forall x \gamma (x = 0) \rightarrow \underbrace{n(x + x + \dots + x = 0)}_n} \mid n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ou } (a = b = c) := \\ a = b \wedge b = c \end{array} \right)$$

Q2. Supposons qu'il existe une théorie T des groupes abéliens avec torsion.

Gm considère :

$$T' := T \cup \left\{ \underbrace{\forall x \quad x \neq 0 \rightarrow \underbrace{n \cdot x \neq 0}_n}_{Q_m} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Toute partie finie $T \subseteq T'$ est satisfiable.

En effet, soit $n = \max \{m \in \mathbb{N}^* \mid \psi_m \in T\} < +\infty$,

puis $G := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p > n$ et p premier.

Pour compacté, T' est satisfiable.

Absurde car il existe $x \in G$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $n \cdot x \neq 0$ et $x \neq 0$.

Q3. avec torsion \neq sans torsion

Exercice 2. Formules closes.

Gm a : $T_{\mathcal{G}} = \{F \in \mathfrak{F} \mid \mathcal{G} \models F\}$

Soit $F \in \mathcal{F}$.

Si $\mathcal{O} \models F$ alors $\frac{}{\mathcal{T}_{\mathcal{O}} \models F}$ ax car $F \in T_{\mathcal{O}}$.

Si $\mathcal{O} \not\models F$ alors $\mathcal{O} \models \neg F$ et $\frac{}{\mathcal{T}_{\mathcal{O}} \vdash \neg F}$ ax car $\neg F \in T_{\mathcal{O}}$.

De plus, si $T_{\mathcal{O}} \vdash \perp$ alors, par correction, $\mathcal{O} \not\models \perp$ absurde.
car \mathcal{O} modèle de $T_{\mathcal{O}}$.

Exercice 3.

Q1 Pour $n=0$, on a : $P_0 + S 0 \neq 0$ par A_1 .

Pour $n > 0$, on a :

$$\frac{\Gamma \vdash A_3 \text{ ax}}{\Gamma \vdash \forall y S^{n+1} 0 = S^n y \rightarrow S^n 0 = y \text{ ve}} \quad \frac{\Gamma \vdash S^{n+1} 0 = S^n 0 \rightarrow S^n 0 = S^n 0 \text{ ax}}{\Gamma \vdash S^{n+1} 0 = S^n 0 + S^n 0 = S^{n+1} 0 \text{ oe}} \quad \frac{P_0 \vdash S^n 0 \neq S^{n-1} 0 \text{ aff}}{P_0, S^{n+1} 0 = S^n 0 + S^n 0 \neq S^{n+1} 0 \text{ ve}} \quad (*)$$

$$\frac{P_0, S^{n+1} 0 = S^n 0 + \perp}{P_0 \vdash S^{n+1} 0 \neq S^n 0}$$

Q2. $PA \vdash \forall x S x \neq 0$.

On a :

- $P_0 \vdash S 0 \neq 0$
- et :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash A_4 \text{ ax}}{\Gamma \vdash S^2 x = S x \rightarrow S x = x \text{ ve}} \frac{\frac{\Gamma \vdash S^2 x = S x \text{ ax}}{\Gamma \vdash S x = x \text{ oe}}}{\Gamma \vdash S x = x}}{\Gamma \vdash S x \neq x \text{ ax}} \gamma_e}{\Gamma \vdash S x \neq x \text{ ve}} \gamma_i}{PA, S x \neq x, S^2 x = S x \vdash \perp \text{ ve}} \gamma_i$$

$$\frac{PA, S x \neq x \vdash S^2 x \neq S x \text{ oe}}{PA \vdash S x \neq x \rightarrow S^2 x \neq S x \text{ oe}}$$

D'où, par schéma inductif, on a $\forall x, Sx \neq x$.

Q2.3. On pose $\bar{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ où $S\omega := \omega$ avec $\omega \times 0 := 0$.
 $\omega \times x := \omega$

(A₁) - (A₅) pas de pb avec ω

(A₆) ok par déf.

$$(A_7) 0 \times \underbrace{S\omega}_{\omega} = (0 \times \omega) + 0 = 0$$

$$\omega \times (Sg) = \underbrace{(\omega \times g)}_{= 0 \text{ ou } \omega} + \omega = \omega$$

D'où $\bar{\mathbb{N}} \models P_0$ et $\bar{\mathbb{N}} \not\models \forall x Sx \neq x$
car $S\omega = \omega$.

Exercice 4.

Q1. On applique le théorème de Löwenheim-Skolem pour obtenir un modèle de $\text{card} > \aleph_0$.

Q2. Soit, par l'absurde, $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{M}$ un \mathcal{L} -isomorphisme.

$$\varphi(0) = (0,0)$$

$$\varphi(1) = \varphi(S_N 0) = S_{\mathcal{M}} \varphi(0) = S_{\mathcal{M}}(0,0) = (0,1)$$

$$\varphi(2) = \varphi(S_N 1) = S_{\mathcal{M}} \varphi(1) = S_{\mathcal{M}}(0,1) = (0,2)$$

$$\varphi(3) = \varphi(S_N 2) = S_{\mathcal{M}} \varphi(2) = S_{\mathcal{M}}(0,2) = (0,3)$$

Ainsi, $\text{im } \varphi = \{0^3 \times \mathbb{N} \neq |\mathcal{M}|\}$. Absurde.

On vérifie que \mathcal{M} vérifie (A₁) - (A₇).

Q3. Soit $F := \forall x \vee y x+y = y+x$.

On a $\mathbb{N} \models F$ mais $\mathcal{M} \not\models F$ car $(1,1) + (2,1) = (1,2)$
et $(2,1) + (1,1) = (2,2)$.

D'où P_0 n'est pas complète.

Exercice 5. Ensembles définissables.

$$Q1. \quad F_{2N}(x) := \exists y \quad x = y + y.$$

$$Q2. \ F_{PP}(x) := \forall y \ (\exists z \ x = y * z) \rightarrow (y = x \vee y = (SO))$$

$$Q3. (a) \forall x F_E(x) \rightarrow F_{E'}(x)$$

$$(b) \quad F_E(x) \wedge \forall y < x \neg F_E(y) \quad)) \quad G(x)$$

$$(c) (\exists x F_E x) \wedge (\forall x F_E(x) \rightarrow \exists y > x F_E(y))$$

$$\text{Q4. } P_E(y) := (\exists x \leq y \quad F_E(x)) \rightarrow \exists_x \quad G(x) \wedge x \leq y$$

Q5.

$$\begin{array}{c}
 (a) \quad \overline{P_0 + A_4}^{\alpha} \\
 \underline{P_0 + 0+0=0} \\
 \hline
 P_0 + 3x_3 0+ x_3 = 0
 \end{array}$$

(b) long et se fait par induction sur y . (fait en cours)

(c)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Gamma \vdash S(\beta + y) \neq 0}{\Gamma \vdash S\beta + y \neq 0} A_1 \\
 \frac{\Gamma \vdash x = y = 0}{\Gamma \vdash x + y = 0} A_2 \\
 \hline
 \Gamma \vdash x + y = 0
 \end{array}$$

(d) On utilise le schéma induktif:

$$\bullet P_E(O) : F_E(O) \rightarrow \underbrace{F_E(O)}_{\text{Rep}} \wedge \underbrace{O \leq O}_{\omega} \wedge \underbrace{\forall y < O \neg F_E(y)}_{\neg(y + S_y = 0)} \rightarrow A_2$$

$\underbrace{S(y + z)}_{S(y + z) \text{ par } A_S}$

$$\bullet P_E(n) \rightarrow P_E(m+1)$$

$\exists y \leq m+1 F_E(y) \rightsquigarrow$ si non $y = m+1 \rightarrow G(m+1)$ $m+1 \leq n+1$.
 (Ou car sinon, on était dans l'autre cas.)

Q6. $(\exists x \ F_E(x)) \rightarrow \exists y \ G(y)$

Soit $x \in E$. Par Q5, $\exists y, G(y) \wedge y \leq x$.
D'où $G(y)$.

Q7.

TD 7

Exercice 1. Modèles sans schéma d'induction

Q1. A₁ okay A₂ okay A₃ okay A₄ $f(x, *) = x$
 A₅ okay A₆ $g(x, *) = *$ A₇ $g(g(x, y), x) = g(x, y)$

En effet:

$$\begin{aligned} (x, n) +_{\mathcal{G}} S_{\mathcal{G}}(y, m) &= (x, n) +_{\mathcal{G}} (y, m+1) \\ &= (f(x, y), n+m+1) \\ &= S_{\mathcal{G}}(f(x, y), n+m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x, n) \times_{\mathcal{G}} S_{\mathcal{G}}(y, m) &= (x, n) \times_{\mathcal{G}} (y, m+1) \\ &= (g(x, y), n+m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((x, n) \times_{\mathcal{G}} (y, m)) +_{\mathcal{G}} (x, n) &= \\ &= (g(x, y), n+m) +_{\mathcal{G}} (x, n) \\ &= (f(g(x, y), x), n+m+n) \end{aligned}$$

Q2. Commutativité: $f(x, y) = f(y, x)$ et $g(x, y) = g(y, x)$

Associativité: $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$
 $g(g(x, y), z) = g(x, g(y, z))$

Q3. c.f. TD6 exercice 4

Q4. $x \leq y := \exists z. x + z = y$

$$\begin{aligned} (x, n) \leq_{\mathcal{G}} (y, m) &\Leftrightarrow \exists (z, p). (x, n) +_{\mathcal{G}} (z, p) = (y, m) \\ &\Leftrightarrow \exists (z, p). (f(x, z), n+p) = (y, m) \\ &\Leftrightarrow \exists z. f(x, z) = y \end{aligned}$$

$$Q5. \quad f(x, y) = x \quad g(x, y) = xy$$

$$(*, 0) + (x, n) = (f(*, x), n) = (*, n) \neq (x, n)$$

$$(*, 0) \times (x, n) = (g(*, x), 0) = (x, 0) \neq (*, 0).$$

Exercice 2. Équivalences.

Q1. Supposons avoir T une théorie des relations d'équivalences ayant un nombre fini de classes.

$$\text{Soit } \Psi_n := \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i=1}^n \bigwedge_{j=i+1}^n \neg R(x_i, x_j).$$

$$\text{Puis, } T' := T \cup \{\Psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Toute partie $A \subseteq$ finie T' est satisfiable, par exemple $([1, n], =)$, où $n = \max \{n \in \mathbb{N} \mid \Psi_n \in A\}$ fini.

D'où T' satisfiable absurde.

Q2. Par l'absurde, soit T une théorie des relations d'équivalences n'ayant que des classes finies.

$$\text{Soit } \Psi_n := \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i=1}^{n-1} R(x_i, x_{i+1}) \wedge \bigwedge_{i \neq j} \neg (x_i = x_j).$$

$$\text{Soit } T' := T \cup \{\Psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Toute partie finie $A \subseteq$ finie T' est satisfiable, par exemple $([1, n], \sim)$, où $n := \max \{n \mid \Psi_n \in A\}$ fini et $x \sim y \forall x, \forall y$.

D'où T' satisfiable. Absurde.

$$Q3. \quad \text{On pose } T := \{ \forall x \ R(x, x), \forall x \forall y \ R(x, y) \rightarrow R(y, x), \\ \forall x \forall y \forall z \ R(x, y) \rightarrow R(y, z) \rightarrow R(x, z) \} \\ \cup \{\Psi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\Psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Q24. (a) Soit T_1 tel que $\frac{\text{et } T_1 \vdash T}{T \vdash T_1}$. Il existe donc $T' \subseteq T$ telle que l'on ait $T' \vdash T_1$ (car preuve de $T \vdash T_1$ fermée).

On a: $T' \vdash T_1$ et $T_1 \vdash T$ d'où $T' \vdash T$.

(b) Prenons: si bien $T' \subseteq_{\text{finie}} T$ donc $n := \min_{\Phi_m \in T'} m$

$$\text{et } m := \min_{\Phi_m \in T'} m$$

On considère un ensemble ayant $< n$ classes toutes de cardinal $< m$. \rightsquigarrow modèle \mathcal{M} .

D'où T' admet \mathcal{M} pour modèle. Absurde.

(c) oui en théorie, mais non, cela ne dépend pas.

Q25. Soient $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{N}, =, \text{divisibilité})$,
 $\mathcal{M}_2 = (\mathbb{N}, =, n \sim m \Leftrightarrow \Phi(n) \approx \Phi(m))$

$$\Phi: \mathbb{N} \xrightarrow{\text{bij.}} \mathbb{N}^2 \quad \text{où } (p, q) \approx (p', q') \Leftrightarrow p+q' = p'+q.$$

Soit $\Psi: \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ un α -morphisme.

$$n \mid m \Leftrightarrow \Psi(n) \approx \Psi(m) \quad \text{Absurde.}$$