

# Le $\lambda$ -calcul simplement typé.

Dans ce chapitre, on va parler de *typage*. Ceci permet de « stratifier » les  $\lambda$ -termes. En effet, pour l’instant, tous les termes se ressemblent.

## 1 Définition du système de types.

**Définition 1.** On se donne un ensemble de *types de base*, notés  $X, Y, Z, \dots$ . Les types simples sont donnés par la grammaire suivante :

$$A, B, C ::= \mathbf{X} \mid A \rightarrow B.$$

Il n’y a donc que deux « types » de types : les types de base, et les types fonctions. Il n’y a donc pas de type `unit`, `bool`, `...`. En effet, ceci demanderait d’ajouter des constantes `()`, `true`, `false`, *etc* dans la grammaire du  $\lambda$ -calcul (et ceci demanderait ensuite d’ajouter des règles de typage supplémentaire). On verra en TD comment typer **T** et **F** comme défini au chapitre précédent.

Par convention, on notera  $A \rightarrow B \rightarrow C$  pour  $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ .

**Définition 2.** On définit une *hypothèse de typage* comme un couple variable-type  $(x, A)$  noté  $x : A$ .

**Définition 3.** Un *environnement de typage*, noté  $\Gamma, \Gamma', \text{etc}$  est un dictionnaire sur  $(\mathcal{V}, \text{Types})$ , *c.f.* cours de Théorie de la Programmation. On notera  $\Gamma(x) = A$  lorsque  $\Gamma$  associe  $x$  à  $A$ . On définit

le *domaine* de  $\Gamma$  comme

$$\text{dom}(\Gamma) := \{x \mid \exists A, \Gamma(x) = A\}.$$

On note aussi  $\Gamma, x : A$  l'extension de  $\Gamma$  avec  $x : A$  si  $x \notin \text{dom}(\Gamma)$ .

**Définition 4.** On définit la *relation de typage*, notée  $\Gamma \vdash M : A$  (« sous les hypothèses  $\Gamma$ , le  $\lambda$ -terme  $M$  a le type  $A$  ») par les règles d'inférences suivantes :

$$\begin{array}{c} \Gamma(x) = A \quad \frac{}{\Gamma \vdash x : A} \quad \frac{\Gamma \vdash M : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash M N : B} \\[2ex] \frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x. M : A \rightarrow B} \quad x \notin \text{dom}(\Gamma) \end{array}$$

Dans cette dernière règle, on peut toujours l'appliquer modulo  $\alpha$ -conversion (il suffit d' $\alpha$ -renommer  $x$  dans  $\lambda x. M$ ).

**Exemple 1.** On peut omettre le «  $\emptyset$  » avant «  $\vdash$  ».

$$\frac{\frac{f : X \rightarrow X, z : X \vdash f : X \rightarrow X}{f : X \rightarrow X, z : X \vdash f : X \rightarrow X} \quad \frac{\frac{f : X \rightarrow X, z : X \vdash f : X \rightarrow X \quad f : X \rightarrow X, z : X \vdash z : X}{f : X \rightarrow X, z : X \vdash f z : X}}{f : X \rightarrow X, z : X \vdash f(fz) : X} \quad \frac{f : X \rightarrow X, z : X \vdash f(fz) : X}{f : X \rightarrow X \vdash \lambda z. f(fz) : X \rightarrow X} \quad \frac{f : X \rightarrow X \vdash \lambda z. f(fz) : X \rightarrow X}{\vdash \lambda f. \lambda z. f(fz) : (X \rightarrow X) \rightarrow X \rightarrow X}$$

**Exemple 2.**

$$\frac{\frac{a, X, t : X \rightarrow Y \vdash t : X \rightarrow Y}{a, X, t : X \rightarrow Y \vdash t a : Y} \quad \frac{a, X, t : X \rightarrow Y \vdash t a : Y}{a : X \vdash \lambda t. t a : (X \rightarrow Y) \rightarrow Y} \quad .$$

## 2 Propriétés de la relation de typage.

**Lemme 1** (Lemme administratif).

- ▷ Si  $\Gamma \vdash M : A$  alors  $\mathcal{V}\ell(M) \subseteq \text{dom}(\Gamma)$ .
- ▷ *Renforcement* : si  $\Gamma, x : B \vdash M : A$  et  $x \notin \mathcal{V}\ell(M)$  alors  $\Gamma \vdash M : A$ .
- ▷ *Affaiblissement* : si  $\Gamma \vdash M : A$  alors, pour tout  $B$  et tout  $x \notin \text{dom}(\Gamma)$  alors  $\Gamma, x : B \vdash A$ .
- ▷ *Contraction* : si  $\Gamma, x : B, y : B \vdash M : A$  alors  $\Gamma, x : B \vdash M[x/y] : A$  □

**Proposition 1** (Préservation du typage). Si  $\Gamma \vdash M : A$  et  $M \rightarrow_\beta M'$  alors  $\Gamma \vdash M' : A$ .

**Preuve.** On procède comme en [Théorie de la Programmation \[Chapitre 7\]](#) avec le lemme suivant.

**Lemme 2.** Si  $\Gamma, x : A \vdash M : B$  et  $\Gamma \vdash N : A$  alors  $\Gamma \vdash M[N/x] : B$ .

□

### 3 Normalisation forte.

**Définition 5.** Un  $\lambda$ -terme  $M$  est dit *fortement normalisant* ou *terminant* si toute suite de  $\beta$ -réductions issue de  $M$  conduit à une forme normale. Autrement dit, il n'y a pas de divergence issue de  $M$ .

**Théorème 1.** Si  $M$  est typage (il existe  $\Gamma, A$  tels que  $\Gamma \vdash M : A$ ) alors  $M$  est fortement normalisant.

**Remarque 1** (Quelques tentatives de preuves ratées.). ▷ Par induction sur  $M$  ? Non.

- ▷ Par induction sur la relation de typage  $\Gamma \vdash M : A$  ? Non (le cas de l'application pose problème car deux cas de  $\beta$ -réductions).

Pour démontrer cela, on utilise une méthode historique : les *candidats de réductibilité*.

**Définition 6 (Candidat de réductibilité).** Soit  $A$  un type simple. On associe à  $A$  un ensemble de  $\lambda$ -termes, noté  $\mathcal{R}_A$  appelé *candidats de réductibilité* (ou simplement *candidats*) associé à  $A$ , défini par induction sur  $A$  de la manière suivante :

- ▷  $\mathcal{R}_X := \{M \mid M \text{ est fortement normalisant}\} ;$
- ▷  $\mathcal{R}_{A \rightarrow B} := \{M \mid \forall N \in \mathcal{R}_A, M N \in \mathcal{R}_B\}.$

L'idée est la suivante :

$$\begin{array}{c} M \text{ typable} \\ \Gamma \vdash M : A \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad M \in \mathcal{R}_A \quad \rightsquigarrow \quad M \text{ fortement normalisant.}$$

**Remarque 2 (Rappel sur le PIBF, c.f. Théorie de la Programmation [Chapitre 10]).** Le principe d'induction bien fondé nous dit qu'une relation  $\mathcal{R}$  est terminante ssi pour tout prédicat  $\mathcal{P}$  sur  $E$  vérifie que si

$$\forall x \in E \left( (\forall y, x \mathcal{R} y \implies \mathcal{P}(y)) \implies \mathcal{P}(x) \right)$$

alors  $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ .

**Proposition 2.** Soit  $A$  un type simple. On a :

**CR 1.** Pour tout  $M \in \mathcal{R}_A$ ,  $M$  est fortement normalisant.

**CR 2.** Pour tout  $M \in \mathcal{R}_A$ , si  $M \rightarrow_\beta M'$  alors  $M' \in \mathcal{R}_A$ .

**CR 3.** Pour tout  $M$  neutre (c-à-d,  $M$  n'est pas une  $\lambda$ -abstraction), si  $\forall M', M \rightarrow_\beta M' \implies M' \in \mathcal{R}_A$  alors  $M \in \mathcal{R}_A$ .

**Preuve.** On montre la conjonction de **CR 1**, **CR 2** et **CR 3** par induction sur  $A$ . Il y a deux cas.

▷ Cas  $X$  un type simple.

**CR 1.** C'est vrai par définition.

**CR 2.** Si  $M$  est fortement normalisant, et  $M \rightarrow_\beta M'$  alors  $M' \in \mathcal{R}_X$ .

**CR 3.** Si  $M$  est neutre et si on a que « pour tout  $M'$  tel que  $M \rightarrow_\beta M'$  alors  $M' \in \mathcal{R}_X$  » alors c'est l'induction bien fondée pour  $\rightarrow_\beta$  sur  $\mathcal{R}_X$ .

▷ Cas  $A \rightarrow B$  un type flèche.

**CR 1.** Soit  $M \in \mathcal{R}_{A \rightarrow B}$ . Supposons que  $M$  diverge :

$$M \rightarrow_\beta M_1 \rightarrow_\beta M_2 \rightarrow_\beta \cdots$$

On a observé que  $x \in \mathcal{R}_A$  pour une variable  $x$  arbitraire (conséquence de **CR 3** pour  $A$ ). Par définition de  $\mathcal{R}_{A \rightarrow B}$ ,  $M x \in \mathcal{R}_B$ . Par **CR 1** pour  $B$ , on a que  $M x$  est fortement normalisant. Or,  $M x \rightarrow_\beta M_1 x$  car  $M \rightarrow_\beta M_1$ . On construit ainsi une divergence dans  $\mathcal{R}_B$  à partir de  $M x$  :

$$M x \rightarrow_\beta M_1 x \rightarrow_\beta M_2 x \rightarrow_\beta \cdots$$

C'est absurde car cela contredit que  $M x$  fortement normalisant.

**CR 2.** Soit  $M \in \mathcal{R}_{A \rightarrow B}$  et  $M \rightarrow M'$ . Montrons que  $M' \in \mathcal{R}_{A \rightarrow B}$ , *i.e.* pour tout  $N \in \mathcal{R}_A$  alors  $M' N \in \mathcal{R}_B$ . Soit donc  $N \in \mathcal{R}_A$ . On sait que  $M N \in \mathcal{R}_B$  (car  $M \in \mathcal{R}_{A \rightarrow B}$ ). Et comme  $M \rightarrow_\beta M'$  alors  $M N \rightarrow_\beta M' N$  et, par **CR 2** pour  $B$ , on a  $M' N \in \mathcal{R}_B$ . On a donc montré  $\forall N \in \mathcal{R}_{A \rightarrow B}, M' N \in \mathcal{R}_B$  autrement dit,  $M' \in \mathcal{R}_{A \rightarrow B}$ .

**CR 3.** Soit  $M$  neutre tel que  $\forall M', M \rightarrow_\beta M' \implies M' \in \mathcal{R}_{A \rightarrow B}$ . Montrons que  $M \in \mathcal{R}_{A \rightarrow B}$ . On sait que  $\rightarrow_\beta$  est

terminante sur  $\mathcal{R}_A$  (par **CR 1** pour  $A$ ). On peut donc montrer que  $\forall N \in \mathcal{R}_A, M N \in \mathcal{R}_B$  par induction bien fondée sur  $\rightarrow_\beta$ . On a les hypothèses suivantes :

- hypothèse 1 : pour tout  $M'$  tel que  $M \rightarrow_\beta M'$  alors  $M' \in \mathcal{R}_{A \rightarrow B}$  ;
- hypothèse d'induction bien fondée : pour tout  $N'$  tel que  $N \rightarrow_\beta N'$  que  $M N' \in \mathcal{R}_B$ .

On veut montrer  $M N \in \mathcal{R}_B$ . On s'appuie sur **CR 3** pour  $B$  et cela nous ramène à montrer que, pour tout  $P$  tel que  $M N \rightarrow_\beta P$  est  $P \in \mathcal{R}_B$ . On a trois cas possibles pour  $M N \rightarrow_\beta P$ .

- Si  $M = \lambda x. M_0$  et  $P = M_0[N/x]$  qui est exclu car  $M$  est neutre.
- Si  $P = M' N$  alors par hypothèse 1  $M' \in \mathcal{R}_{A \rightarrow B}$  et donc  $M' N \in \mathcal{R}_B$ .
- Si  $P = M N'$  alors, par par hypothèse d'induction bien fondée,  $M N' \in \mathcal{R}_B$ .

□

**Lemme 3.** Soit  $M$  tel que  $\forall N \in \mathcal{R}_A, M[N/x] \in \mathcal{R}_B$ . Alors  $\lambda x. M \in \mathcal{R}_{A \rightarrow B}$ .

**Preuve.** On procède comme pour **CR 3** pour  $A \rightarrow B$ . □

**Lemme 4.** Supposons  $x_1 : A_1, \dots, x_k : A_k \vdash M : A$ . Alors, pour tout  $N_1, \dots, N_k$  tel que  $N_i \in \mathcal{R}_{A_i}$ , on a

$$M[N_1 \dots N_k / x_1 \dots x_k] \in \mathcal{R}_A.$$

On note ici la *substitution simultanée* des  $x_i$  par des  $N_i$  dans  $M$ . C'est **n'est pas** la composition des substitutions.

**Preuve.** Par induction sur la relation de typage, il y a trois cas.

- ▷ Si on a utilisé la règle de l'axiome, c'est que  $M$  est une variable :  $M = x_i$  et  $A = A_i$ . Soit  $N_i \in \mathcal{R}_{A_i}$  alors  $M[N_1 \cdots N_k/x_1 \cdots x_k] = N_i \in \mathcal{R}_A$ .
- ▷ Si on a utilisé la règle de l'application, c'est que  $M$  est une application :  $M = M_1 M_2$  et  $M_1 : B \rightarrow A$  et  $M_2 : B$ . On a :

$$M[N_1 \cdots N_k/x_1 \cdots x_k] = M_1[N_1 \cdots N_k/x_1 \cdots x_k] M_2[N_1 \cdots N_k/x_1 \cdots x_k].$$

On conclut en appliquant les hypothèses d'inductions :  $M_1[N_1 \cdots N_k/x_1 \cdots x_k] \in \mathcal{R}_{B \rightarrow A}$  et  $M_2[N_1 \cdots N_k/x_1 \cdots x_k] \in \mathcal{R}_B$ .

- ▷ Si on a utilisé la règle de l'abstraction, c'est que  $M = \lambda y. M_0$  avec  $y \notin \{x_1, \dots, x_k\} \cup \mathcal{V}\ell(N_1) \cup \dots \cup \mathcal{V}\ell(N_k)$ . Supposons que  $x_1 : A_1, \dots, x_k : A_k \vdash \lambda y. M_0 : A \rightarrow B$ . Alors nécessairement  $x_1 : A_1, \dots, x_k : A_k, y : A \vdash M_0 : B$ . Par hypothèse d'induction, on a que pour tout  $N_i \in \mathcal{R}_{A_i}$  on a

$$M_0[N_1 \cdots N_k/x_1 \cdots x_k][N/y] = M_0[N_1 \cdots N_k N/x_1 \cdots x_k y] \in \mathcal{R}_B.$$

Par le lemme précédent, on déduit que

$$(\lambda y. M_0)[N_1 \cdots N_k/x_1 \cdots x_k] = \lambda y. (M_0[N_1 \cdots N_k/x_1 \cdots x_k]) \in \mathcal{R}_{A \rightarrow B}.$$

□

**Corollaire 1.** Si  $\Gamma \vdash M : A$  alors  $M \in \mathcal{R}_A$ .

## 4 Extension : le $\lambda$ -calcul typé avec $\times$ et 1.

En ajoutant les couples et *unit*, il faut modifier quatre points.

**Syntaxe.**  $M, N ::= \lambda x. M \mid M N \mid x \mid (M, N) \mid \star \mid \pi_1 M \mid \pi_2 M$

**$\beta$ -réduction.**

$$\frac{M \rightarrow_\beta M'}{(M, N) \rightarrow_\beta (M', N)} \quad \frac{N \rightarrow_\beta N'}{(M, N) \rightarrow_\beta (M, N')}$$

– 7/8 –

$$\overline{\pi_1 (M, N) \rightarrow_\beta M} \quad \overline{\pi_2 (M, N) \rightarrow_\beta N}.$$

**Types.**

$$A, B ::= X \mid A \rightarrow B \mid A \times B \mid \mathbf{1}$$

**Typage.**

$$\frac{}{\star : \mathbf{1}} \quad \frac{\Gamma \vdash M : A \quad \Gamma \vdash N : B}{\Gamma \vdash (M, N) : A \times B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P : M \times N}{\Gamma \vdash \pi_1 P : M} \quad \frac{\Gamma \vdash P : M \times N}{\Gamma \vdash \pi_2 P : N}.$$