

Probabilités

Exercice 1. Bits aléatoires I.

A) Notons (Z_n) la suite de nombres tirés uniformément dans $[1, 8]$.

On a :

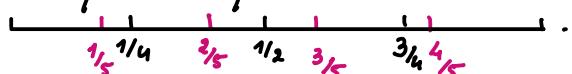
$$P(Z_n \leq 5) = \frac{5}{8}$$

d'où, le nombre de paquets de 3 bits utilisés par la méthode A suit une loi géométrique $G(5/8)$, car les tirages sont indépendants.

D'où, $E[\text{Nombre de bits utilisés}] = \frac{8}{5} \times 3 = 4,8$.

B) Par calcul de la représentation binaire, on sait que :

On lit 2 bits pour se placer dans la situation suivante :



- $1/5 = 0,0011 \overline{0011}$,
- $2/5 = 0,011 \overline{0011}$,
- $3/5 = 0,1 \overline{0011}$,
- $4/5 = 0,11 \overline{0011}$.

Dans chacun des intervalles induits par les 2 premiers bits, on peut être dans deux intervalles de $1/5$. Ainsi, à chaque nouveau bit, on se trouve dans une situation $\frac{1}{5}$: soit on est sûr d'être dans un intervalle, soit le doute plane encore. Ceci suit une loi de Bernoulli $B(1/2)$.

D'où, après les 2 premiers bits, l'espérance du nombre de bits utilisés est 2 car loi géométrique $G(1/2)$. On conclut :

$$E[\text{Nombre de bits utilisés}] = 2 + 2 = 4$$

C) Prendre 5 bits de loi $B(1/2)$ est équivalent à tirer uniformément dans $[0, 2^5 - 1]$ car les tirages des bits sont indépendants.

Soit $Y \sim U([0, 2^5 - 1])$.

$$\begin{aligned} P(\text{les 5 bits sont identiques}) &= P(Y = 0 \text{ ou } Y = 2^5 - 1) \\ &= P(Y = 0) + P(Y = 2^5 - 1) \\ &= 2/2^5 = 2^4. \end{aligned}$$

Ainsi, l'espérance du nombre de paquets de 5 utilisés est $\frac{1}{1-2^{-5}} = \frac{16}{15}$ car elle suit une loi géométrique $G(1-2^{-5})$.

De plus, on a

$$P(\text{on tire 1 bit supplémentaire}) = \frac{2 \cdot \binom{5}{2}}{2^5 - 2} = \frac{2}{3}$$

↳ tous les nombres identiques exclu

$$\text{d'où } \mathbb{E}[\text{nombre de bits utilisés}] = \frac{16}{15} \cdot 5 + \frac{2}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

La loi de Bernoulli
bits supplémentaires

Mieux: on tire 3 bits, pour obtenir $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Si $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, on renvoie x .

Sinon, on tire un bit supplémentaire: on a donc 6 possibilités $\{(6,0), (6,1), (7,0), (7,1), (8,0), (8,1)\}$.

On renvoie la pos° dans l'ordre donné ci-dessus, sauf si on a $(6,0)$, où dans ce cas, on recommence.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\text{Nombre de bits utilisés}] &= \frac{1}{1 - P(\text{avoir } (6,0))} \times 4 - P(\text{n'utiliser que 3 bits à la fin}) \\ &= \frac{16}{15} \times 4 - \frac{10}{15} = 3,6\end{aligned}$$

Exercice 2. Bits aléatoires II

Q1. Notons A, B les eventuels 2 bits générés par l'algorithme (3 cas possibles : $A=B=\Delta$; $A \in \{0,1\}$ et $B=\Delta$; et $A,B \in \{0,1\}$). On note $q := 1-p$.

$$P(A=\Delta=B) = P(X_1 \dots X_4 \in \{0000, 1111\}) = (p^4 + q^4)/16 \quad \text{ignoré}$$

$$P(A=0, B=0) = \frac{1}{16} pq(p^2 + q^2 + pq) = \frac{1}{16} ((p+q)^2 - pq) \quad P(A=0, B=1) = \frac{1}{16} pq(p^2 + q^2 + pq) = \frac{pq(1-pq)}{16}$$

$$P(A=0, B=\Delta) = \frac{p^2 q^2}{16} \quad P(A=1, B=0) = \frac{pq}{16} (1-pq)$$

$$P(A=1, B=\Delta) = \frac{p^2 q^2}{16} \quad P(A=1, B=1) = \frac{pq(1-pq)}{16}$$

même probabilité donc

même probabilité donc non biaisé

non biaisé.

D'où $(Y_k)_{k \geq 1}$ est une suite de bits non biaisés. Chaque bit individuel est non biaisé.

Notons N le nombre de bits produits après la lecture de 4 bits biaisés.

On calcule :

$$\mathbb{E}[\text{Nombre de bits produits}] = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{16} + 2 \cdot \frac{12}{16} \right) = \frac{26}{4 \cdot 16} = \frac{13}{32} \geq \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \geq p \cdot (1-p).$$

"0,40625"

Q2. On lit les bits biaisés 8 par 8 et on produit $(Y_k)_{k \geq 1}$ selon la règle suivante:

$$\begin{array}{l} 0000 \ 0000 \rightarrow \Delta \\ 1111 \ 1111 \rightarrow \Delta \\ 0000 \ 1111 \rightarrow 0000 \\ 1111 \ 0000 \rightarrow 1111 \\ \hline \underbrace{\Delta \quad \Delta}_{\rightarrow x_A x_B} \end{array}$$

où x_A est le résultat de l'algorithme en Q1 sur le mot de 4 bits A (de même avec x_B).

Les bits ne sont pas biaisés car, avec Q1, on sait que le résultat de x_A n'est pas biaisé, et les règles ci-dessus ne "favorisent" pas plus la prob° de 0 que de 1.

$$\mathbb{E}[\text{Nombre de bits produits}] = \frac{1}{8} \left(\frac{2}{2^8} \cdot 4 \right) + \frac{13}{32} = \frac{105}{256} \approx 0,41 \quad \text{C'est mieux.}$$

Exercice 3. liste à réuts aléatoire.

Q1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $C \in \mathbb{R}_*^+$ quelconque.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(M_n \geq C \cdot \log n) &= \mathbb{P}(\exists k \leq n, X_k \geq C \cdot \log n) \\
 &= 1 - \prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{P}(X_k \geq C \cdot \log n)) \quad \text{par indépendance} \\
 &= 1 - \prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{P}(X_k \geq C \log n - 1)) \\
 &= 1 - \prod_{k=1}^n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{C \log n - 1}\right) \\
 &= 1 - \prod_{k=1}^n \left(1 - 2^{-C}\right) \\
 &= 1 - (1 - 2^{-C})^n \\
 &= 1 - 1 + 2^{-n} \cdot n^{-C} + \mathcal{O}(n \cdot n^{-C})
 \end{aligned}$$

On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M_n > C \log n) = 0 \Leftrightarrow 2^{-n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \Leftrightarrow C > 1.$$

D'où, avec $C = \frac{\pi}{e} > 1$, on a bien

$$\mathbb{P}(M_n > \frac{\pi}{e} \log_2 n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Q2. La variable S_k représente le temps d'attente pour le succès.
Soit $B_n \sim \mathcal{B}(n, 1/2)$, où $n := \lfloor (1+\lambda) 2k \rfloor$.

On a : $\mathbb{P}(S_k > (1+\lambda) 2k) = \mathbb{P}(S_k > n) = \mathbb{P}(B_n < k) \leq \mathbb{P}(B_n \leq k).$

car c'est un temps d'attente pour la succès

$$\begin{aligned}
 \text{Or, par Chernoff I, on a : } \mathbb{P}(B_n \leq \underbrace{\frac{n}{2}}_{\mu} - \underbrace{(\frac{n}{2} - k)}_{\geq 2k > 0}) &\leq \exp\left(-2 \frac{(\frac{n}{2} - k)^2}{n}\right) \leq \exp\left(-2 \frac{(2k)^2}{(1+\lambda) \cdot 2k}\right) \\
 &= \exp\left(-\frac{2k^2}{1+\lambda} - 2k\right).
 \end{aligned}$$

D'où le résultat demandé.

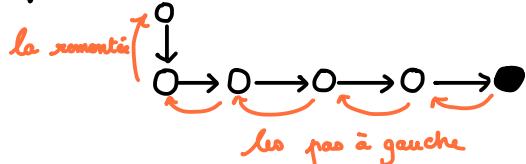
Q3. La "hauteur" de chaque élément x , c'est-à-dire $\max \{ j \in \mathbb{N} \mid x \in L_j \}$, suit une loi géométrique $G(1/2)$: succession de loi de Bernoulli $B(1/2)$ jusqu'au premier succès (en supposant x du niveau 0).

Ainsi, M_n décrit le nombre de niveaux d'une liste à n éléments.
Par Q1,

$$P(M_n > O(\log n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

D'où, avec grande probabilité, la hauteur est en $O(\log n)$.

Q4. De manière équivalente, partons de la fin (x) du noeud et remontons jusqu'au noeud \rightarrow le plus haut. Ceci est un enchaînement de pas à gauche puis une remontée.



Le nombre de pas à gauche ^{et la remontée finale} suit une loi géométrique $G(1/2)$ car c'est le temps d'attente avant un succès (on a un noeud au dessus) et $P(\text{un noeud est au dessus}) = \frac{1}{2}$.

D'où le nombre de pas total est une somme de lois géométriques $G(1/2)$ qu'on note S_h où h est la hauteur. On utilise la question 2:

$$P(S_h > 2h) \leq \exp\left(-\frac{1}{2}h\right)$$

et, par la question précédente, $h = O(\log n)$ avec grande probabilité.
D'où,

$$P(S_h > 2h) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{car } \exp\left(-\frac{1}{2}\log n\right) = \frac{\log 2 e}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

On en conclut qu'avec très grande probabilité le parcours se fait en $O(\log n)$.
En effet:

$$\text{Nombre d'opérations} = \text{Nombre de pas} + \underbrace{\text{Nombre de comparaisons}}_{O(\text{nombre de pas})}$$

Fin du DM.