Le λ-calcul simplement typé.

Dans ce chapitre, on va parler de *typage*. Ceci permet de « stratifier » les λ-termes. En effet, pour l'instant, tous les termes se ressemblent.

1 Définition du système de types.

Définition 1. On se donne un ensemble de *types de base*, notés X, Y, Z, ... Les types simples sont donnés par la grammaire suivante :

$$A, B, C ::= X \mid A \to B.$$

Il n'y a donc que deux « types » de types : les types de base, et les types fonctions. Il n'y a donc pas de type `unit`, `bool`, ... En effet, ceci demanderai d'ajouter des constantes `()`, `true`, `false`, *etc* dans la grammaire du λ-calcul (et ceci demanderai ensuite d'ajouter des règles de typage supplémentaire). On verra en TD comment typer $\mathbf{T}$ et $\mathbf{F}$ comme défini au chapitre précédent.

Par convention, on notera $A \to B \to C$ pour $A \to (B \to C)$.

Définition 2. On définit une *hypothèse de typage* comme un couple variable-type (x, A) noté $x : A$.

Définition 3. Un *environnement de typage*, noté Γ, Γ', *etc* est un dictionnaire sur $(\mathscr{V}, \mathsf{Types})$, *c.f.* cours de Théorie de la Programmation. On notera $\Gamma(x) = A$ lorsque Γ associe x à A. On définit le *domaine* de Γ comme

$$\operatorname{dom}(\Gamma) := \{x \mid \exists A,\ \Gamma(x) = A\}.$$

On note aussi $\Gamma, x : A$ l'extension de Γ avec $x : A$ si $x \notin \operatorname{dom}(\Gamma)$.

Définition 4. On définit la *relation de typage*, notée $\Gamma \vdash M : A$ (« sous les hypothèses Γ, le λ-terme M a le type A ») par les règles d'inférences suivantes :

$$\frac{}{\Gamma \vdash x : A}\ {\scriptstyle \Gamma(x) = A} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \to B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash M\ N : B}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x.\ M : A \to B}\ {\scriptstyle x \notin \operatorname{dom}(\Gamma)}$$

Dans cette dernière règle, on peut toujours l'appliquer modulo α-conversion (il suffit d'α-renommer x dans $\lambda x.\ M$).

Exemple 1. On peut omettre le « $\emptyset$ » avant « $\vdash$ ».

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{f : X \to X, z : X \vdash f : X \to X} \qquad \dfrac{\dfrac{}{f : X \to X, z : X \vdash f : X \to X} \qquad \dfrac{}{f : X \to X, z : X \vdash z : X}}{f : X \to X, z : X \vdash f\ z : X}}{\dfrac{f : X \to X, z : X \vdash f\ (f\ z) : X}{f : X \to X \vdash \lambda z.\ f\ (f\ z) : X \to X}}}{\vdash \lambda f.\ \lambda z.\ f\ (f\ z) : (X \to X) \to X \to X}$$

Exemple 2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{a, X, t : X \to Y \vdash t : X \to Y} \qquad \dfrac{}{a, X, t : X \to Y \vdash a : X}}{a, X, t : X \to Y \vdash t\ a : Y}}{a : X \vdash \lambda t.\ t\ a : (X \to Y) \to Y}\ .$$

2 Propriétés de la relation de typage.

Lemme 1 (Lemme administratif).

- Si $\Gamma \vdash M : A$ alors $\mathscr{V}\ell(M) \subseteq \mathrm{dom}(\Gamma)$.
- *Renforcement* : si $\Gamma, x : B \vdash M : A$ et $x \notin \mathscr{V}\ell(M)$ alors $\Gamma \vdash M : A$.
- *Affaiblissement* : si $\Gamma \vdash M : A$ alors, pour tout B et tout $x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$ alors $\Gamma, x : B \vdash A$.
- *Contraction* : si $\Gamma, x : B, y : B \vdash M : A$ alors $\Gamma, x : B \vdash M[{}^{x}/_{y}] : A$ □

Proposition 1 (Préservation du typage). Si $\Gamma \vdash M : A$ et $M \to_\beta M'$ alors $\Gamma \vdash M' : A$.

Preuve. On procède comme en Théorie de la Programmation avec le lemme suivant.

> **Lemme 2.** Si $\Gamma, x : A \vdash M : B$ et $\Gamma \vdash N : A$ alors $\Gamma \vdash M[{}^{N}/_{x}] : B$.

□

3 Normalisation forte.

Définition 5. Un λ-terme M est dit *fortement normalisant* ou *terminant* si toute suite de β-réductions issue de M conduit à une forme normale. Autrement dit, il n'y a pas de divergence issue de M.

Théorème 1. Si M est typage (il existe Γ, A tels que $\Gamma \vdash M : A$) alors M est fortement normalisant.

Remarque 1 (Quelques tentatives de preuves ratées.).
- Par induction sur M ? Non.

- ▷ Par induction sur la relation de typage $\Gamma \vdash M : A$? Non (le cas de l'application pose problème car deux cas de β-réductions).

Pour démontrer cela, on utilise une méthode historique : les *candidats de réductibilité*.

Définition 6 (Candidat de réductibilité). Soit A un type simple. On associe à A un ensemble de λ-termes, noté $\mathscr{R}_A$ appelé *candidats de réductibilité* (ou simplement *candidats*) associé à A, défini par induction sur A de la manière suivante :

- ▷ $\mathscr{R}_X := \{M \mid M \text{ est fortement normalisant}\}$;
- ▷ $\mathscr{R}_{A\to B} := \{M \mid \forall N \in \mathscr{R}_A, M\ N \in \mathscr{R}_B\}$.

L'idée est la suivante :

$$\begin{array}{c} M \text{ typable} \\ \Gamma \vdash M : A \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad M \in \mathscr{R}_A \quad \rightsquigarrow \quad M \text{ fortement normalisant.}$$

Remarque 2 (Rappel sur le PIBF, *c.f.* Théorie de la Programmation). Le principe d'induction bien fondé nous dit qu'une relation $\mathscr{R}$ est terminante ssi pour tout prédicat $\mathscr{P}$ sur E vérifie que si

$$\forall x \in E \left((\forall y, x \mathrel{\mathscr{R}} y \implies \mathscr{P}(y)) \implies \mathscr{P}(x)\right)$$

alors $\forall x \in E, \mathscr{P}(x)$.

Proposition 2. Soit A un type simple. On a :

CR 1. Pour tout $M \in \mathscr{R}_A$, M est fortement normalisant.

CR 2. Pour tout $M \in \mathscr{R}_A$, si $M \to_\beta M'$ alors $M' \in \mathscr{R}_A$.

CR 3. Pour tout $M \in \mathscr{R}_A$, si M est *neutre* (c-à-d, M n'est pas une λ-abstraction), et si $\forall M', M \to_\beta M' \implies M' \in \mathscr{R}_A$ alors $M \in \mathscr{R}_A$.

Preuve. On montre la conjonction de **CR 1**, **CR 2** et **CR 3** par induction sur A. Il y a deux cas.

- Cas X un type simple.

  CR 1. C'est vrai par définition.

  CR 2. Si M est fortement normalisant, et $M \to_\beta M'$ alors $M' \in \mathcal{R}_X$.

  CR 3. Si M est neutre et si on a que « pour tout M' tel que $M \to_\beta M'$ alors $M' \in \mathcal{R}_X$ » alors c'est l'induction bien fondée pour $\to_\beta$ sur $\mathcal{R}_X$.

- Cas $A \to B$ un type flèche.

  CR 1. Soit $M \in \mathcal{R}_{A\to B}$. Supposons que M diverge :

  $$M \to_\beta M_1 \to_\beta M_2 \to_\beta \cdots .$$

  On a observé que $x \in \mathcal{R}_A$ pour une variable x arbitraire (conséquence de **CR 3** pour A). Par définition de $\mathcal{R}_{A\to B}$, $M\,x \in \mathcal{R}_B$. Par **CR 1** pour B, on a que $M\,x$ est fortement normalisant. Or, $M\,x \to_\beta M_1\,x$ car $M \to_\beta M_1$. On construit ainsi une divergence dans $\mathcal{R}_B$ à partir de $M\,x$:

  $$M\,x \to_\beta M_1\,x \to_\beta M_2\,x \to_\beta \cdots .$$

  C'est absurde car cela contredit que $M\,x$ fortement normalisant.

  CR 2. Soit $M \in \mathcal{R}_{A\to B}$ et $M \to M'$. Montrons que $M' \in \mathcal{R}_{A\to B}$, *i.e.* pour tout $N \in \mathcal{R}_A$ alors $M'\,N \in \mathcal{R}_B$. Soit donc $N \in \mathcal{R}_A$. On sait que $M\,N \in \mathcal{R}_B$ (car $M \in \mathcal{R}_{A\to B}$). Et comme $M \to_\beta M'$ alors $M\,N \to_\beta M'\,N$ et, par **CR 2** pour B, on a $M'\,N \in \mathcal{R}_B$. On a donc montré $\forall N \in \mathcal{R}_{A\to B}, M'\,N \in \mathcal{R}_B$ autrement dit, $M' \in \mathcal{R}_{A\to B}$.

  CR 3. Soit M neutre tel que $\forall M', M \to_\beta M' \implies M' \in \mathcal{R}_{A\to B}$. Montrons que $M \in \mathcal{R}_{A\to B}$. On sait que $\to_\beta$ est terminante sur $\mathcal{R}_A$ (par **CR 1** pour A). On peut donc montrer que $\forall N \in \mathcal{R}_A$, $M\,N \in \mathcal{R}_B$ par induction bien fondée sur $\to_\beta$. On a les hypothèses suivantes :

- hypothèse 1 : pour tout M' tel que $M \to_\beta M'$ alors $M' \in \mathcal{R}_{A\to B}$;
- hypothèse d'induction bien fondée : pour tout N' tel que $N \to_\beta N'$ que $M\,N' \in \mathcal{R}_B$.

On veut montrer $M\,N \in \mathcal{R}_B$. On s'appuie sur **CR 3** pour B et cela nous ramène à montrer que, pour tout P tel que $M\,N \to_\beta P$ est $P \in \mathcal{R}_B$. On a trois cas possibles pour $M\,N \to_\beta P$.

- Si $M = \lambda x.\, M_0$ et $P = M_0[{}^N/_x]$ qui est exclu car M est neutre.
- Si $P = M'\,N$ alors par hypothèse 1 $M' \in \mathcal{R}_{A\to B}$ et donc $M'\,N \in \mathcal{R}_B$.
- Si $P = M\,N'$ alors, par par hypothèse d'induction bien fondée, $M\,N' \in \mathcal{R}_B$.

$\square$

Lemme 3. Soit M tel que $\forall N \in \mathcal{R}_A, M[{}^N/_x] \in \mathcal{R}_B$. Alors $\lambda x.\, M \in \mathcal{R}_{A\to B}$.

Preuve. On procède comme pour **CR 3** pour $A \to B$. $\square$

Lemme 4. Supposons $x_1 : A_1, \ldots, x_k : A_k \vdash M : A$. Alors, pour tout $N_1, \ldots, N_k$ tel que $N_i \in \mathcal{R}_{A_i}$, on a

$$M[{}^{N_1\ \cdots\ N_k}/_{x_1\ \cdots\ x_k}] \in \mathcal{R}_A.$$

On note ici la *substitution simultanée* des x_i par des N_i dans M. C'est ***n'est pas*** la composition des substitutions.

Preuve. Par induction sur la relation de typage, il y a trois cas.

- Si on a utilisé la règle de l'axiome, c'est que M est une variable : $M = x_i$ et $A = A_i$. Soit $N_i \in \mathscr{R}_{A_i}$ alors $M[{}^{N_1 \cdots N_k}/_{x_1 \cdots x_k}] = N_i \in \mathscr{R}_A$.
- Si on a utilisé la règle de l'application, c'est que M est une application : $M = M_1\, M_2$ et $M_1 : B \to A$ et $M_2 : B$. On a :

$$M[{}^{N_1 \cdots N_k}/_{x_1 \cdots x_k}] = M_1[{}^{N_1 \cdots N_k}/_{x_1 \cdots x_k}] M_2[{}^{N_1 \cdots N_k}/_{x_1 \cdots x_k}].$$

  On conclut en appliquant les hypothèses d'inductions : $M_1[{}^{N_1 \cdots N_k}/_{x_1 \cdots x_k}] \in \mathscr{R}_{B \to A}$ et $M_2[{}^{N_1 \cdots N_k}/_{x_1 \cdots x_k}] : \mathscr{R}_B$.
- Si on a utilisé la règle de l'abstraction, c'est que $M = \lambda y. M_0$ avec $y \notin \{x_1, \ldots, x_k\} \cup \mathscr{V}\ell(N_1) \cup \cdots \cup \mathscr{V}\ell(N_k)$. Supposons que $x_1 : A_1, \ldots, x_k : A_k \vdash \lambda y.\, M_0 : A \to B$. Alors nécessairement $x_1 : A_1, \ldots, x_k : A_k, y : A \vdash M_0 : B$. Par hypothèse d'induction, on a que pour tout $N_i \in \mathscr{R}_{A_i}$ on a

$$M_0[{}^{N_1 \cdots N_k}/_{x_1 \cdots x_k}][{}^{N}/_{y}] = M_0[{}^{N_1 \cdots N_k\, N}/_{x_1 \cdots x_k\, y}] \in \mathscr{R}_B.$$

  Par le lemme précédent, on déduit que

$$(\lambda y. M_0)[{}^{N_1 \cdots N_k}/_{x_1 \cdots x_k}] = \lambda y.(M_0[{}^{N_1 \cdots N_k}/_{x_1 \cdots x_k}]) \in \mathscr{R}_{A \to B}.$$

□

Corollaire 1. Si $\Gamma \vdash M : A$ alors $M \in \mathscr{R}_A$.

4 Extension : le λ-calcul typé avec $\times$ et 1.

En ajoutant les couples et *unit*, il faut modifier quatre points.

Syntaxe. $M, N ::= \lambda x.\, M \mid M\, N \mid x \mid (M, N) \mid (\,) \mid \pi_1\, M \mid \pi_2\, M$

β-réduction.

$$\frac{M \to_\beta M'}{(M, N) \to_\beta (M', N)} \qquad \frac{N \to_\beta N'}{(M, N) \to_\beta (M, N')}$$

Types. $A, B ::= X \mid A \to B \mid A \times B \mid \mathbf{1}$

Typage.

$$\frac{}{(\,) : \mathbf{1}} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \qquad \Gamma \vdash N : B}{\Gamma \vdash (M, N) : A \times B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P : M \times N}{\Gamma \vdash \pi_1\, P : M} \qquad \frac{\Gamma \vdash P : M \times N}{\Gamma \vdash \pi_2\, P : N}\ .$$