TD n°3
Théorie des catégories

Hugo Salou
Dept. Informatique

ENS DE LYON

16 décembre 2024

Table des matières

Exercice 1.

Montrer que si un foncteur est un adjoint à droite (resp. à gauche) alors il est continue (resp. cocontinue).

Soit $F : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ un foncteur possédant un adjoint à gauche que l'on notera $G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$. Ainsi, on sait que $\mathrm{Hom}(-, G-) \cong \mathrm{Hom}(F-, -)$.

Considérons un petit diagramme $J : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$. Ainsi, on a la chaîne d'isomorphisme :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(A, G(\lim J)) &\cong \mathrm{Hom}(FA, \lim J) && \text{par adjoint} \\
&\cong \lim \mathrm{Hom}(FA, J) && \text{par continuité (TD2)} \\
&\cong \lim \mathrm{Hom}(A, GJ) && \text{par adjoint} \\
&\cong \mathrm{Hom}(A, \lim GJ) && \text{par continuité (TD2),}
\end{aligned}$$

pour tout $A \in \mathbf{C}_0$. Ceci étant vrai quel que soit A, on a donc l'isomorphisme $\mathcal{Y}(G(\lim J)) \cong \mathcal{Y}(\lim GJ)$.

Par le lemme de Yoneda, on en déduit que $G(\lim J) \cong \lim GJ$. On a donc bien la continuité d'un foncteur possédant un adjoint à gauche, *i.e.* d'un foncteur qui est à un adjoint à droite.

Par dualité, on a bien le résultat pour les foncteurs possédant un adjoints à droite.

Exercice 2.

Montrer que si $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ est une équivalence de catégories et $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ est un quasi-inverse de F, alors F est adjoint à gauche à G et G est aussi adjoint à gauche à F.

On veut construire l'isomorphisme

$$\alpha : \mathrm{Hom}(-, G-) \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Hom}(F-, -).$$

On sait qu'il existe deux isomorphismes naturels

$$\theta : \mathrm{id}_{\mathbf{D}} \Rightarrow F \circ G \qquad \text{et} \qquad \eta : \mathrm{id}_{\mathbf{C}} \Rightarrow G \circ F.$$

Considérons $(f : A \to GB) \in \mathrm{Hom}(-, G-)$, et on veut construire une flèche de la forme $\alpha_{A,B}(f) : FA \to B$. On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dd, "f"] & & & FA \arrow[dd, "Ff"] \arrow[ddr, dashed, "\alpha_{A,B}(f)"] & \\
 & {} \arrow[r, "F"] & {} & & \\
GB & & & F(GB) \arrow[r, "\theta_B^{-1}"] & B
\end{tikzcd},$$

et on pose $\alpha_{A,B}(f) := \theta_B^{-1} \circ (Ff)$. Ceci donne donc un isomorphisme

$$\alpha_{A,B} : \mathrm{Hom}(A, GB) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(FA, B).$$

En effet, l'inverse est $\beta_{A,B} : g \mapsto (Gg) \circ \eta_A$ comme le montre le diagramme

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[dd, "g"] & & & G(FA) \arrow[dd, "Gg"] & A \arrow[l, "\eta_A"'] \arrow[ddl, dashed, "\beta_{A,B}(f)"] \\
& {} \arrow[r, "G"] & {} & & \\
B & & & GB &
\end{tikzcd} .$$

Ceci démontre ainsi que l'on a deux isomorphismes naturels

$$\alpha : \mathrm{Hom}(-, G-) \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Hom}(F-, -)$$
$$\beta : \mathrm{Hom}(F-, -) \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Hom}(-, G-).$$

démontrant ainsi que F et G sont adjoints à gauche de G et à droite de F respectivement.

Exercice 3.

On montre que les limites dans $\mathbf{Psh}(\mathbf{C}) := [\mathbf{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ens}]$ *existent et se calculent point par point. Soit* $F : \mathbf{J} \to \mathbf{Psh}(\mathbf{C})$ *un diagramme. On rappelle que* F *se voit comme* $\hat{F}$ *de* $[\mathbf{J} \times \mathbf{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ens}]$*. Vu que* $\mathbf{Ens}$ *est complet, montrer que* $\varprojlim F$ *existe et vaut en* X *:*

$$\big(\varprojlim F\big)(X) \cong \varprojlim \hat{F}(-, X),$$

ou écrite de façon plus suggestive,

$$\big(\varprojlim P_\bullet\big)(X) \cong \varprojlim P_\bullet(X),$$

avec $P_\bullet = F$ *(modulo curryfication). Quel est l'énoncé dual ?*

Exercice 4.

1. *On rappelle que pour $f : A \to B$ une fonction, on peut définir le foncteur $f^{-1} : \wp B \to \wp A$ entre catégories posétales. Montrer qu'il admet un adjoint à gauche (bien connu) et un adjoint à droite (à construire).*
2. *En déduire que*
   - $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$;
   - $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$;
   - $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i)$;
3. *Pourquoi f n'a-t-il pas d'adjoint à gauche ?*

1. On pose le foncteur image directe, noté $f : \wp A \to \wp B$. Parce que

$$f(S) \subseteq T \iff S \subseteq f^{-1}(T),$$

quels que soient S et T, on sait donc que f est adjoint à gauche de f^{-1}. Pour l'adjoint à droite, il faut construire un foncteur de la forme $R : \wp A \to \wp B$ vérifiant l'équivalence

$$S \subseteq R(T) \iff f^{-1}(S) \subseteq T,$$

quels que soient S et T.

On pose

$$R(T) := f(A) \setminus f(A \setminus T),$$

et on a bien l'équivalence demandée.

En effet, si $S \subseteq R(T)$ alors $S \subseteq f(A) = \operatorname{im} f$ et $S \cap f(A \setminus T) = \emptyset$. Ceci implique que $f^{-1}(S) \cap f^{-1}(f(A \setminus T)) = \emptyset$ et donc que l'on ait $f^{-1}(S) \cap (A \setminus T) = \emptyset$ (car $f^{-1}(f(A \setminus T)) \supseteq A \setminus T$). On en déduit que $f^{-1}(S) \subseteq T$

Réciproquement, si $f^{-1}(S) \subseteq T$, c'est alors que l'on ait $S \subseteq \operatorname{im} f$ et que $S \cap f(A \setminus T) = \emptyset$. On en déduit que $S \subseteq R(T)$.

Ceci permet de conclure que l'on a bien construit un adjoint à droite du foncteur f^{-1}.

2. On applique l'exercice 1. En effet, l'union est la limite du diagramme discret (que l'on notera A_I par la suite) dans la catégorie posétale $\wp X$ (pour X un ensemble quelconque) et la colimite est l'intersection.

- ▷ On a
$$f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = f(\lim A_I) = \lim f(A_I) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$$
car le foncteur f est continu comme adjoint à droite de f^{-1}.
- ▷ On a
$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = f^{-1}(\lim A_I) = \lim f^{-1}(A_I) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$$
car le foncteur f^{-1} est continu comme adjoint à droite du foncteur R.
- ▷ On a
$$f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = f^{-1}(\operatorname{colim} A_I) = \operatorname{colim} f^{-1}(A_I) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i)$$
car le foncteur f^{-1} est cocontinu comme adjoint à gauche du foncteur f.

3. Supposons que f admette un adjoint à gauche, alors f donc un adjoint à droite, et ainsi il est continu. En particulier, on a l'égalité $f\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. Sauf que c'est faux ! On considère par exemple le cas $A = B = [\![1,3]\!]$ muni de l'application

$$\begin{aligned} f : [\![1,3]\!] &\longrightarrow [\![1,3]\!] \\ 1 &\longmapsto 1 \\ 2 &\longmapsto 2 \\ 3 &\longmapsto 1 \end{aligned}.$$

Ainsi pour $A_1 = \{1,2\}$ et $A_2 = \{2,3\}$, on a

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\{2\}) = \{2\} \qquad \text{mais} \qquad f(A_1) \cap f(A_2) = \{1,2\}.$$

En général, f n'admet pas d'adjoint à gauche.[1]

1. À moins que f soit injective, auquel cas $f^{-1}(S) \subseteq T \iff S \subseteq f(T)$ car l'image réciproque $f^{-1}(S)$ ne contient *que* les images de S et rien d'autre.

Exercice 5.

Montrer qu'une transformation naturelle $\alpha : P \Rightarrow Q$ est un monomorphisme dans $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})$ si et seulement si chaque composante $\alpha_X : P(X) \to Q(X)$ l'est. Quel est l'énoncé dual ?

Indice. Utiliser le lemme de Yoneda dans le sens difficile.

On procède en deux temps.

Considérons η et γ comme indiqué dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r, Rightarrow, bend left, "\eta"] \arrow[r, Rightarrow, bend right, "\gamma"'] & P \arrow[r, Rightarrow, "\alpha"] & Q \end{tikzcd} .$$

On sait que $\eta = \gamma$ si et seulement si $\eta_X = \gamma_X$ pour tout $X \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ (et de même pour $\alpha \circ \eta$,$\alpha \circ \gamma$). Supposons que $\alpha \circ \eta = \alpha \circ \gamma$, et que chaque α_X est un monomorphisme. Ainsi, $\alpha_X \circ \eta_X = \alpha_X \circ \gamma_X$ par définition de la composition et donc $\eta_X = \gamma_X$ quel que soit X.

$$\begin{tikzcd} OX \arrow[r, bend left, "\eta_X"] \arrow[r, bend right, "\gamma_X"'] & PX \arrow[r, "\alpha_X"] & QX \end{tikzcd} .$$

On en déduit $\eta = \gamma$ et ainsi que α est un monomorphisme.

Pour l'autre sens, le sens difficile, on suppose que $\alpha : P \Rightarrow Q$ est un monomorphisme. Fixons un X quelconque. On applique le lemme de Yoneda qui donne une transformation naturelle

$$\tau : \mathrm{Ev}(-, X) \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Nat}(\mathcal{Y}(X), -),$$

où l'on a noté $\mathrm{Ev}(F, X)$ le bifoncteur d'évaluation. Ainsi, le diagramme

$$\begin{tikzcd} PX \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "\tau_P", "\wr"'] & QX \arrow[d, "\tau_Q", "\wr"'] \\ \mathrm{Nat}(\mathcal{Y}(X), P) \arrow[r, "- \circ \alpha"] & \mathrm{Nat}(\mathcal{Y}(X), Q) \end{tikzcd}$$

commute. Et, si α est un monomorphisme alors $- \circ \alpha$ l'est aussi et il en va de même pour

$$\tau_Q^{-1} \circ (- \circ \alpha) \circ \tau_P,$$

par composition de monomorphismes (isomorphisme implique monomorphisme).

On en déduit que α_X est un monomorphisme, et ce quel que soit X. D'où l'équivalence.

L'énoncé dual est

> « une transformation naturelle $\alpha : P \Rightarrow Q$ est un épimorphisme dans $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})^{\mathrm{op}}$ si et seulement si chaque composante $\alpha_X : PX \to QX$ l'est ».

Exercice 6.

1. *Montrer que $\wp : A \mapsto \wp(A)$ et $f \mapsto \tilde{f}$ (où $\tilde{f}$ est l'image directe) n'est pas représentable.*
2. *Choisir une catégorie d'objet mathématique avec un foncteur d'oubli vers* **Ens** *et montrer qu'il est représentable (ou sinon, pourquoi il ne l'est pas). Les exemples du cours ne sont pas autorisés.*

1. Par l'absurde supposons le représentable. Ainsi, il existe A un ensemble tel que $\wp - \overset{\sim}{\Rightarrow} \operatorname{Hom}(A, -)$.

   Considérons un ensemble fini B de cardinal m. Notons n le cardinal de A (potentiellement infini, cela ne posera pas problème s'il l'est). On a ainsi

$$2^m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dénombrement}}}{=} \operatorname{card} \wp(B) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{isomorphisme}}}{=} \operatorname{card} \operatorname{Hom}(A, B) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dénombrement}}}{=} (\operatorname{card} B)^{\operatorname{card} A} = m^n,$$

   ce qui est faux pour un ensemble arbitraire B de cardinal m.
2. On considère la catégorie des monoïdes **Mon** muni des morphismes de monoïdes. Le foncteur d'oubli U : **Mon** $\to$ **Ens** est défini par :
   - ▷ à un monoïde $(M, \cdot, \epsilon)$ on associe M l'ensemble sous-jacent ;
   - ▷ à un morphisme $u : (M, \cdot, \epsilon) \to (N, \diamond, \varepsilon)$ on associe l'application $\hat{u} : M \mapsto N, x \mapsto u(x)$ la fonction sous-jacente.

   On représente un tel foncteur d'oubli par le monoïde libre que l'on notera $(\{1\}^\star, \cdot, \varepsilon)$. (Un monoïde libre sur X est l'ensemble des mots sur l'alphabet X donné.) L'ensemble $\{1\}^\star$ est ainsi égal à

$$\{1\}^\star = \{1^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

L'opération $\cdot$ correspond à la concaténation usuelle des mots ($1^n \cdot 1^m = 1^{n+m}$ en est une conséquence), et ε correspond au mot vide ($\varepsilon = 1^0$ est aussi une conséquence).

Le monoïde libre sur $\{1\}$ est isomorphe à $(\mathbb{N}, +, 0)$ mais cette construction n'est plus vraie pour des alphabets plus grands (*c.f.* théorie des langages).

Construisons l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mon}}((\{1\}^\star, \cdot, \varepsilon), (N, \diamond, \epsilon)) \cong N = U(N).$$

On définit

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mon}}((\{1\}^\star, \cdot, \varepsilon), (N, \diamond, \epsilon)) &\longrightarrow N \\ (u : \{1\}^\star \to N) &\longmapsto u(1). \end{aligned}$$

C'est bien un isomorphisme :

- ▷ *injectivité*, si $f, g : \{1\}^\star \to N$ vérifient $f(1) = g(1)$ mais par morphisme de monoïde, on a que $f(1^n) = f(1)^n = g(1)^n = g(1^n)$ et les $(1^n)_{n \in N}$ engendrent le monoïde libre (il n'y a rien de plus en réalité), donc $f = g$;
- ▷ *surjectivité*, pour un élément $x \in N$ on pose le morphisme u défini par $u(1^n) := x^n$, il vérifie bien que $u(1) = x$, d'où la surjectivité.

On en conclut quant à la représentabilité du foncteur d'oubli sur les monoïdes $U : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Ens}$.

Exercice 7.

Dans une catégorie posétale admettant tout produit fini (dite « cartésienne »), on appelle (s'il existe) l'exponentiation par X le foncteur $(-)^X$ (s'il existe) adjoint à gauche de

$$\begin{aligned} - \times X : \mathbf{C} &\longrightarrow \mathbf{C} \\ A &\longmapsto A \times X \\ (f : A \to B) &\longmapsto (f \times \mathrm{id}_X : A \times X \to B \times X). \end{aligned}$$

1. *Décrire l'exponentiation dans* **Ens**.

2. *Montrer que dans une catégorie admettant tout objet exponentiel que $(A^B)^C \cong A^{B \times C}$.*

3. *Dans une catégorie admettant tout produit fini et tout objet exponentiel (c'est à dire « clos cartésien ») montrer que si de plus* **C** *est localement petite et contient les coproduits alors*

$$A \times (B + C) \cong A \times B + A \times C.$$

1. Montrons que dans **Ens**, l'exponentiation $(-)^X$ correspond au foncteur $\mathrm{Hom}(X, -)$. Soient A, B, X trois ensembles. On a donc l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(X, B)) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(A \times X, B) \\ (f : A \to \mathrm{Hom}(X, B)) &\longmapsto \left(\begin{array}{rcl} g : (A \times X) & \to & B \\ (a, x) & \mapsto & f(a)(x) \end{array} \right), \end{aligned}$$

qui est juste une curryfication. D'où $\mathrm{Hom}(X, -)$ est adjoint à gauche de $- \times X$. On en déduit que dans **Ens** l'exponentiation existe toujours et qu'il vaut $\mathrm{Hom}(X, -) \cong (-)^X$.

2. Soient X, A, B, C des objets. On a la chaine d'isomorphisme suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(X, (A^B)^C) &\cong \mathrm{Hom}(X \times C, A^B) && \text{par adjoint} \\ &\cong \mathrm{Hom}((X \times C) \times B, A) && \text{par adjoint} \\ &\cong \mathrm{Hom}(X \times (C \times B), A) && \text{par TD2 (ex1)} \\ &\cong \mathrm{Hom}(X \times (B \times C), A) && \text{par TD2 (ex1)} \\ &\cong \mathrm{Hom}(X, A^{B\times C}) && \text{par adjoint.} \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{Y}((A^B)^C) \cong \mathcal{Y}(A^{B\times C})$. D'où, $(A^B)^C \cong A^{B\times C}$ par le lemme de Yoneda.

3. Le foncteur $A \times -$ admet un adjoint à gauche (justification ?). Il est donc co-continu (exercice 1).

Considérons $F : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ le diagramme discret donné ci-dessous

$$\begin{tikzcd} B \arrow[loop above, "\mathrm{id}_B"] & C \arrow[loop above, "\mathrm{id}_C"] \end{tikzcd}.$$

On a la chaîne d'isomorphismes suivante :

$$\begin{aligned} A \times (B + C) &\cong A \times (\operatorname{colim} F) \\ &\cong \operatorname{colim}(A \times F) \\ &\cong A \times B + A \times C, \end{aligned}$$

car le diagramme $A \times F$ est :

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[loop above, "\mathrm{id}_{A\times B}"] & A \times C \arrow[loop above, "\mathrm{id}_{A\times C}"] \end{tikzcd}.$$