

I. Savoir lire la définition.

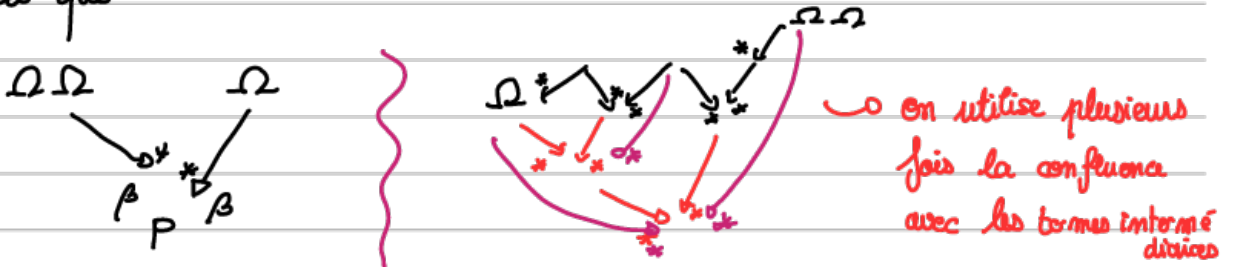
Ce sont des mesures de sécurité. Simon :

$$\begin{aligned} (\lambda y. x y) [y/y] &\neq_{\alpha} \lambda y. x y & \sim_{\Delta} \Delta x \neq y \\ (\lambda y. x y) [y/x] &\neq_{\alpha} \lambda y. y y & \sim_{\Delta} \Delta y \notin \text{vl}(N). \end{aligned}$$

II. Classes d'équivalence pour $=_{\beta}$.

Q2.1. $\Omega \Omega \rightarrow_{\beta} \Omega \Omega$ et $\Omega \rightarrow_{\beta} \Omega$.

Ainsi, si $\Omega \Omega =_{\beta} \Omega$ alors, par confluence, il existe M un λ -terme tel que



C'est absurde car on aurait $\Omega \Omega = P = \Omega$ ($\Omega \Omega \rightarrow_{\beta}^* P$ implique $P = \Omega \Omega$ car il n'y a que 2 redex).

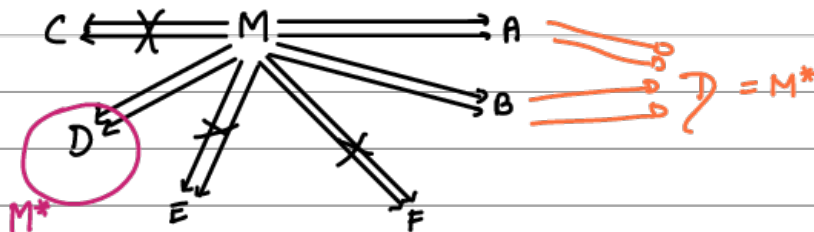
Q2.2. Soit N une forme normale avec $x \notin \text{vl}(N)$

On pose :

$$M = (\lambda x. N) \Omega.$$

III Propriété du diamant pour les réductions parallèles

Q3.1.



Par induction (3 cas)

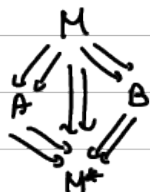
Q3.2. $x^* := x$

$(\lambda x. M)^* := \lambda x. (M^*)$

$(M N)^* := \begin{cases} P[N^*/x] & \text{si } M = \lambda x. P \\ M^* N^* & \text{sinon} \end{cases}$

Lemme : si $M \Rightarrow N$ alors $N \Rightarrow M^*$ (par induction sur M)

D'où



Gm a donc la propriété du diamant pour \Rightarrow donc la confluence de \rightarrow_β .

IV Normalisation faible et forte en λ -calcul pur.

Q4.1. Les propriétés (1), (2) et (3) restent vraies
La propriété (4) ne l'est pas:

on a

$M := (\lambda x. x) M' \rightarrow M'$

mais

$$\begin{array}{ccc} (\lambda y. y) [M/y] & \not\rightarrow & (\lambda y. y) [M'/y] \\ \text{"} & & \text{"} \\ M & & M' \end{array}$$

Q4.2. Par induction sur $M \rightarrow M'$ (4 cas) :

* Bas $(\lambda x. M) N \rightarrow M[N/x]$. Supposons $x \in \mathcal{V}(M)$ et $N \in \mathcal{R}I$. (*)

Par induction sur M , il y a 3 cas :

• si $M = y$ alors

- si $y \neq x$ alors $M[N/x] = M \in \mathcal{R}I$.

- si $y = x$ alors $M[N/x] = N \in \mathcal{R}I$.

• si $M = P Q$ alors par hypothèse d'induction

on a : $P[N/x] \in \mathcal{R}I$ et $Q[N/x] \in \mathcal{R}I$

d'où $(P Q)[N/x] \in \mathcal{R}I$. par (ii)

• si $M = \lambda y. P$ avec $y \in \mathcal{V}(P)$ alors $M[N/x] \in \mathcal{R}I$ car $P[N/x] \in \mathcal{R}I$.

* Cas $MN \rightarrow M'N$ avec $M \rightarrow M'$. Par hypothèse d'induction $M' \in \lambda I$, avec $M \in \lambda I, N \in \lambda I$.

D'où $M'N \in \lambda I$ par (ii).

* Cas $MN \rightarrow MN'$ avec $N \rightarrow N'$. Par hypothèse d'induction $N' \in \lambda I$, avec $M \in \lambda I, N \in \lambda I$.

D'où $MN' \in \lambda I$ par (ii).

* Cas $\lambda x. M \rightarrow \lambda x. M'$ avec $M \rightarrow M'$ et $M \in \lambda I, (\lambda x. M) \in \lambda I, M' \in \lambda I$
Et, $vc(M') = vc(M)$ (preuve par induction) par hyp. d'ind
d'où $(\lambda x. M') \in \lambda I$ car $x \in vc(M)$.

Q4.3. Supposons avoir une divergence issue de $(\lambda x. M)N$.

On a trois cas :

- soit $N \uparrow$ donc $N_1 \rightarrow N_{i+2}$ avec $N_0 = N$ d'où $M[N_1/x] \rightarrow^* M[N_{i+2}/x]$ avec au moins un pas car $x \in vc(M_i)$ et donc $M[N/x] \uparrow$
- soit $M \uparrow$ donc $M_1 \rightarrow M_{i+2}$ avec $M_0 = M$ d'où $M_i[N/x] \rightarrow M_{i+2}[N/x]$ et donc $M[N/x] \uparrow$
- soit $M[N/x] \uparrow$

Dans tous les cas, $M[N/x] \uparrow$

Q4.4. Non : $(\lambda x. y) \Omega \uparrow$ mais $y[\Omega/x] = y \uparrow$

on est à toute étape

Q4.5. Mon instinct me dit non, mais vu qu'on ne peut pas faire "disparaitre" une divergence, j'ai envie de dire oui.

Si on a une divergence, alors on ne peut pas l'éviter. Inversement, si on n'a pas de divergence, on ne peut pas aller dans une divergence.

En gros : tous les calculs dans λI sont utiles.

V Des λ -termes qui calculent : couples et prédécesseurs

Q5.1. On définit $\text{succ} := \lambda u. \lambda f. \lambda x. f(u f x)$.

$$\begin{aligned} \text{succ } n &= (\lambda u f x. f(u f x))(\lambda f x. f^n x) \rightarrow \lambda f x. f((\lambda f x. f^n x) f x) \\ &\rightarrow \lambda f x. f(\lambda x. f^n x) x \\ &\rightarrow \lambda f x. f(f^n x) = \lambda f x. f^{n+1} x = \underline{n+1}. \end{aligned}$$

D'où $\text{succ } n \rightarrow^* \underline{n+1}$

Q5.2. On pose $\text{fst} := \lambda c. c \text{ T}$ et $\text{snd} := \lambda c. c \text{ F}$.

$$\text{fst } (M, N) = (\lambda c. c (\lambda x y. x)) (\lambda f. (f M) N)$$

$$\rightarrow_{\beta} (\lambda f. (f M) N) (\lambda x y. x)$$

$$\rightarrow_{\beta} ((\lambda x y. x) M) N$$

$$\rightarrow_{\beta} (\lambda y. M) N$$

$$\rightarrow_{\beta} M$$

$$\text{snd } (M, N) = (\lambda c. c (\lambda x y. y)) (\lambda f. (f M) N)$$

$$\rightarrow_{\beta} (\lambda f. (f M) N) (\lambda x y. y)$$

$$\rightarrow_{\beta} ((\lambda x y. y) M) N$$

$$\rightarrow_{\beta} (\lambda y. y) N$$

$$\rightarrow_{\beta} N$$

Q5.3. On pose : $\text{Next} := \lambda c. (\text{succ } (\text{fst } c), \text{fst } c)$

$$\text{Next } (\underline{n}, \underline{k}) \rightarrow_{\beta} (\text{succ } (\text{fst } (\underline{n}, \underline{k})), \text{fst } (\underline{n}, \underline{k})) \quad \text{par Q5.2}$$

$$\rightarrow_{\beta}^* (\text{succ } \underline{n}, \text{fst } (\underline{n}, \underline{k}))$$

$$\rightarrow_{\beta}^* (\underline{n+1}, \text{fst } (\underline{n}, \underline{k}))$$

$$\rightarrow_{\beta}^* (\underline{n+1}, \underline{n})$$

par Q5.1

par Q5.2

Q5.4. On pose $\text{pred} := \lambda n. \text{snd } (\text{Next } (\underline{0}, \underline{0}))$.

VI Des λ -termes qui bouclent

$$\text{Q6.1. } \forall M \rightarrow_{\beta} (\lambda x. M (x x)) (\lambda x. M (x x))$$

$$\rightarrow_{\beta} M ((\lambda x. M (x x)) (\lambda x. M (x x)))$$

$$\leftarrow_{\beta} M (\forall M)$$

$$\text{D'où } M(\forall M) =_{\beta} \forall M.$$

Q6.2. On pose :

$$F := \lambda f. \lambda n. \text{if zero?}(n) \text{ then } \underline{1}$$

$$\text{else mult } n \ (f \ (\text{pred } n))$$

puis

$$\text{fact} := \forall F.$$

Q6.3. On pose $\Upsilon := \lambda f. f(f x)$ puis $\Gamma := \lambda x. \Upsilon \Upsilon$.

Qm a:

degré de faisonnement:

$$\Gamma = \lambda x. \gamma \gamma$$

2

$$\rightarrow_{\beta} \lambda x. \gamma (\gamma x)$$

3

$$\rightarrow_{\beta} \lambda x. \gamma (x (x x))$$

4

$$\rightarrow_{\beta} \lambda x. (x (x x)) (x (x x) x)$$

7

Q 6.4. Aucune idée...