Hugo SALOU
Dept. Informatique
http://167.99.84.84/

TD n° 1

I. Savoir lire la définition.

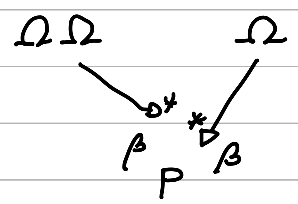
Ce sont des mesures de sécurité. Sinon :

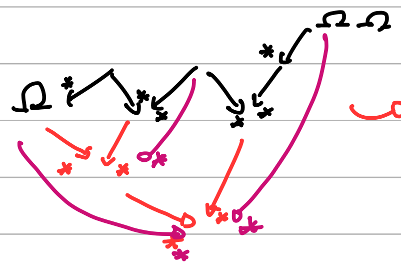
$$(\lambda y.\ x\ y)[z/y] \neq_\alpha \lambda y.\ x\ z \quad \rightsquigarrow \triangle\ x \neq y$$
$$(\lambda y.\ x\ y)[y/x] \neq_\alpha \lambda y.\ y\ y \quad \rightsquigarrow \triangle\ y \notin vl(N).$$

II. Classes d'équivalence pour $=_\beta$.

Q2.1. $\Omega\,\Omega \to_\beta \Omega\,\Omega$ et $\Omega \to_\beta \Omega$.

Ainsi, si $\Omega\Omega =_\beta \Omega$ alors, par confluence, il existe M un λ-terme tel que





↪ on utilise plusieurs fois la confluence avec les termes intermédiaires

C'est absurde car on aurait $\Omega\Omega = P = \Omega$ ($\Omega\Omega \to_\beta^* P$ implique $P = \Omega\Omega$ car il n'y a que 1 redex).

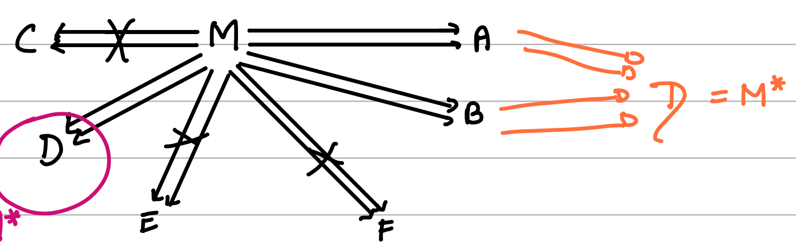
Q2.2. Soit N une forme normale avec $x \notin Vl(N)$.

On pose :

$$M = (\lambda x.\ N)\ \Omega.$$

III Propriété du diamant pour les réductions parallèles

Q3.1.



Q3. 2. Par induction (3 cas)

$x^* := x$

$(\lambda x.\, M)^* := \lambda x.(M^*)$

$(M\ N)^* := \begin{cases} P^*[N^*/x] & \text{si } M = \lambda x.\, P \\ M^*\ N^* & \text{sinon} \end{cases}$

Lemme : si $M \Rrightarrow N$ alors $N \Rrightarrow M^*$ (par induction sur M)

D'où

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, Rrightarrow] \arrow[dr, Rrightarrow] \arrow[dd, Rrightarrow] & \\ A \arrow[dr, Rrightarrow] & & B \arrow[dl, Rrightarrow] \\ & M^* & \end{tikzcd}$$

On a donc la propriété du diamant pour $\Rrightarrow$ donc la confluence de $\to_\beta$.

IV Normalisation faible et forte en λ-calcul pur.

Q4. 1. Les propriétés (1), (2) et (3) restent vraies

La propriété (4) ne l'est pas :

on a

$$M := (\lambda x.\, x)\, M' \longrightarrow M'$$

mais

$$\underbrace{(y\ y)[M/y]}_{=\, M\ M} \not\longrightarrow \underbrace{(y\ y)[M'/y]}_{=\, M'\ M'}$$

Q4. 2. Par induction sur $M \to M'$ (4 cas) :

* Cas $(\lambda x.\, M)\, N \to M[N/x]$. Supposons $x \in \mathcal{V}\ell(M)$ et $N \in \lambda I$. $(*)$

Par induction sur M, il y a 3 cas :

- si $M = y$ alors
  - si $y \neq x$ alors $M[N/x] = M \in \lambda I$.
  - si $y = x$ alors $M[N/x] = N \in \lambda I$.
- si $M = P\ Q$ alors par hypothèse d'induction on a : $P[N/x] \in \lambda I$ et $Q[N/x] \in \lambda I$

  d'où $(P\ Q)[N/x] \in \lambda I$. par (ii)

- si $M = \lambda y.\, P$ avec $y \in \mathcal{V}\ell(P)$ alors $M[N/x] \in \lambda I$ car $P[N/x] \in \lambda I$.

* Cas $MN \to M'N$ avec $M \to M'$. Par hypothèse d'induction $M' \in \lambda I$.
avec $M \in \lambda I$, $N \in \lambda I$.
D'où $M'N \in \lambda I$ par (ii).
* Cas $MN \to MN'$ avec $N \to N'$. Par hypothèse d'induction $N' \in \lambda I$.
avec $M \in \lambda I$, $N \in \lambda I$.
D'où $MN' \in \lambda I$ par (ii).

* Cas $\lambda x.M \to \lambda x.M'$ avec $M \to M'$ et $M \in \lambda I$, $(\lambda x.M) \in \lambda I$, $M' \in \lambda I$ par hyp. d'ind°
Et, $vl(M') = vl(M)$ (preuve par induction)
d'où $(\lambda x.M') \in \lambda I$ car $x \in vl(M')$.

Q4.3. Supposons avoir une divergence issue de $(\lambda x.M)N$.
On a trois cas :
- soit $N \uparrow$ donc $N_i \to N_{i+1}$ avec $N_0 = N$ d'où $M[N_i/x] \to^+ M[N_{i+1}/x]$ et donc $M[N/x] \uparrow$
avec au moins un pas car $x \in vl(M_i)$
- soit $M \uparrow$ donc $M_i \to M_{i+1}$ avec $M_0 = M$ d'où $M_i[N/x] \to M_{i+1}[N/x]$ et donc $M[N/x] \uparrow$
- soit $M[N/x] \uparrow$

Dans tous les cas, $M[N/x] \uparrow$

Q4.4. Non : $(\lambda x.y)\Omega \uparrow$ mais $y[\Omega/x] = y \cancel{\uparrow}$

car $\in \lambda I$ à toute étape

Q4.5. Mon instinct me dit non, mais vu qu'on ne peut pas faire "disparaître" une divergence, j'ai envie de dire oui.

Si on a une divergence, alors on ne peut pas l'éviter. Inversement, si on n'a pas de divergence, on ne peut pas aller dans une divergence.

En gros : tous les calculs dans λI sont utiles.

V Des λ-termes qui calculent : couples et prédécesseurs

Q5.1. On définit $succ := \lambda u.\lambda f.\lambda x.f(u f x)$.

$$succ\ \underline{n} = (\lambda u f x. f(u f x))(\lambda f x. f^n x) \to_\beta \lambda f x. f((\lambda f x. f^n x) f x)$$
$$\to_\beta \lambda f x. f(\lambda x. f^n x)\, x)$$
$$\to_\beta \lambda f x. f(f^n x) = \lambda f x. f^{n+1} x = \underline{n+1}.$$

D'où $succ\ \underline{n} \to^* \underline{n+1}$

Q5.2. On pose $fst := \lambda c.\, c\, \mathbf{T}$ et $snd := \lambda c.\, c\, \mathbf{F}$.

$$\begin{aligned} fst\ (M,N) &= (\lambda c. c\, (\lambda x y. x))\, (\lambda f. (f M) N) \\ &\to_\beta (\lambda f. (f M) N)\, (\lambda x y. x) \\ &\to_\beta ((\lambda x y. x) M) N \\ &\to_\beta (\lambda y. M) N \\ &\to_\beta M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} snd\ (M,N) &= (\lambda c. c\, (\lambda x y. y))\, (\lambda f. (f M) N) \\ &\to_\beta (\lambda f. (f M) N)\, (\lambda x y. y) \\ &\to_\beta ((\lambda x y. y) M) N \\ &\to_\beta (\lambda y. y) N \\ &\to_\beta N \end{aligned}$$

Q5.3. On pose : $Next := \lambda c. (succ\, (fst\ c),\ fst\, c)$

$$\begin{aligned} Next\ (\underline{n}, \underline{k}) &\to_\beta (succ\ (fst\ (\underline{n}, \underline{k})),\ fst\ (\underline{n}, \underline{k})) && \text{par Q5.2} \\ &\to_\beta^* (succ\ \underline{n},\ fst\ (\underline{n}, \underline{k})) && \text{par Q5.1} \\ &\to_\beta^* (\underline{n+1},\ fst\ (\underline{n}, \underline{k})) && \text{par Q5.2} \\ &\to_\beta^* (\underline{n+1},\ \underline{n}) \end{aligned}$$

Q5.4 On pose $pred := \lambda n.\ snd\ (n\ Next\ (\underline{0}, \underline{0}))$.

VI Des λ-termes qui bouclent

Q6.1.
$$\begin{aligned} Y\ M &\to_\beta (\lambda x.\ M\, (x\, x))\, (\lambda x.\ M\, (x\, x)) \\ &\to_\beta M\, ((\lambda x.\ M (x\, x))\, (\lambda x.\ M (x\, x))) \\ &\leftarrow_\beta M\ (Y\ M) \end{aligned}$$

D'où $M(YM) =_\beta YM$.

Q6.2. On pose :

$F := \lambda f.\ \lambda n.$ if $zero?(n)$ then $\underline{1}$
else $mult\ n\ (f\ (pred\ n))$

puis

$fact := Y F$.

Q6.3. On pose $\gamma := \lambda f.\ f(f\, x)$ puis $\Gamma := \lambda x.\ \gamma\, \gamma$.

On a :   degré de foisonnement :

$\Gamma = \lambda x.\, \gamma\gamma$ — 2

$\to_\beta \lambda x.\, \gamma(\gamma x)$ — 3

$\to_\beta \lambda x.\, \gamma(x(x\ x))$ — 4

$\to_\beta \lambda x.\, (x(x\ x))((x(x\ x))\ x)$ — 7

Q6.4. Dans l'exemple, on fait des β-réductions dans une abstraction. En forme, on ne peut pas faire ça.

TD n° 2

I. Typer des λ-termes

1.1. Une question de cours du 6 mars 2024.

$$\underbrace{(\lambda f.\ f(f\ z))}_{(X \to X) \to (X \to X)}\ \underbrace{(\lambda x.\ \lambda y.\ x\ y)}_{(A \to B) \to (A \to B)} \qquad \text{où } X = A \to B$$

Q1.1. $(\lambda f.\ f(f\ z))\ (\lambda x.\ \lambda y.\ x\ y)$ de taille 12

$\to_\beta (\lambda x. \lambda y.\ x\ y)((\lambda x. \lambda y.\ x\ y)\ z)$ de taille 13

1.2. Entiers de Church

Q1.2. $\text{succ} := \lambda n.\ \lambda f\ x.\ f(n\ f\ x)$

$\text{add} := \lambda n.\ \lambda m.\ \lambda f x.\ n\ f\ (m\ f\ x)$

$\text{mult} := \lambda n.\ \lambda m.\ \lambda f.\ n\ (m\ f)$

Q1.3. $\vdash \text{succ} : \text{nat} \to \text{nat}$

↳ $n : \text{nat},\ f : X \to X,\ x : X \ \vdash f\ (n\ f\ x) : X$

↳ " $\vdash n\ f\ x : X$

$\vdash \text{add} : \text{nat} \to \text{nat} \to \text{nat}$

↳ $n : \text{nat},\ m : \text{nat},\ f : X \to X,\ x : X \ \vdash n\ f\ (m\ f\ x) : X$

↳ " $\vdash m\ f\ x : X$

$\vdash \text{mult} : \text{nat} \to \text{nat} \to \text{nat}$

↳ $n : \text{nat},\ m : \text{nat},\ f : X \to X \ \vdash n\ (m\ f) : X \to X$

↳ " $\vdash m\ f : X \to X$

II. Types somme

Q2.1. Termes : $M, N ::= \dots \mid g\ M \mid d\ N \mid$ "match M with $g\ x \to N \mid d\ y \to N'$"

Réductions :

$$\frac{M \to_\beta M'}{g\ M \to_\beta g\ M'} \qquad \frac{M \to_\beta M'}{d\ M \to_\beta d\ M'}$$

$$\frac{}{(\text{match } g\,M \text{ with } g\ x \to N \mid d\ y \to N') \to_\beta N[M/x]}$$

$$\overline{(\text{match } d\,M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N') \to_\beta N'[M/y]}$$

$$\frac{M \to_\beta M'}{\text{match } M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N' \to_\beta \text{match } M' \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N'}$$

$$\frac{N \to_\beta N''}{\text{match } M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N' \to_\beta \text{match } M \text{ with } g\,x \to N'' \mid d\,y \to N'}$$

$$\frac{N' \to N'''}{\text{match } M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N' \to_\beta \text{match } M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N'''}$$

Types : $A, B ::= \dots \mid A+B$

Typage : $\dfrac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash g\,M : A+B}$ $\dfrac{\Gamma \vdash M : B}{\Gamma \vdash d\,M : A+B}$

$$\frac{\Gamma \vdash M : B+C \qquad \Gamma, x : B \vdash N : A \qquad \Gamma, y : C \vdash N' : A}{\Gamma \vdash \text{match } M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N' : A}$$

III Normalisation faible

Q3.1. On a : M fortement normalisant $\Rightarrow$ M' fortement normalisant.
Réciproquement, supposons M' fortement normalisant.
Si M admet une divergence pour $\mapsto$ alors par déterminisme la divergence passe par M' et donc on a une divergence pour M'.
Absurde.

Q3.2 Non ! $M = \mathbf{F}\,\Omega \to_\beta \mathbf{F}\,\Omega$ avec $\Omega \to_\beta \Omega$
$\downarrow_\beta$
M' $\lambda y. y$ M a une divergence alors que M' non.

Q3.3. Pour tout type A,
(CR1') si $M \in \mathcal{R}_A$ alors M termine pour $\mapsto$
(CR2') si $M \in \mathcal{R}_A$ et $M \mapsto M'$ alors $M' \in \mathcal{R}_A$.
(CR3') si $M \mapsto M' \Rightarrow M' \in \mathcal{R}_A$ alors $M \in \mathcal{R}_A$

Par induction sur A (2 cas) :

- si on a un type de base X
  - (CR1') par définition
  - (CR2') par définition & préservation du typage
  - (CR3') par induction bien fondée sur $\mapsto$ car $\mapsto$ termine.
- si on a un type $A \to B$
  - (CR1') On a $x \in \mathcal{R}_A$ pour x arbitraire.

    Or, $M\,x \in \mathcal{R}_B$ d'où $M\,x$ fortement normalisant.

    Si M diverge en $M = M_1 \mapsto M_2 \mapsto M_3 \cdots$

    alors $M\,x \mapsto M_2\,x \cdots$ absurde !

  - (CR2') Soit $M \in \mathcal{R}_{A \to B}$ et $M \mapsto M'$. Montrons que $M' \in \mathcal{R}_{A \to B}$.

    Soit $N \in \mathcal{R}_A$. Montrons que $M'N \in \mathcal{R}_B$.

    Or, $M\,N \mapsto M'N$ d'où, par (CR2') pour B, $M'N \in \mathcal{R}_B$.

    On conclut $M' \in \mathcal{R}_{A \to B}$.

  - (CR3') Supposons $M \mapsto M' \Rightarrow M' \in \mathcal{R}_{A \to B}$.

    Montrons $M \in \mathcal{R}_{A \to B}$.

    Par hyp d'induction bien fondée,

    si $N \mapsto N'$ alors $M\,N' \in \mathcal{R}_B$.

    Montrons $M\,N \in \mathcal{R}_B$.

    Par (CR3') pour B, alors montrons que

    $M\,N \mapsto P$ et $P \in \mathcal{R}_B$.

    On a 2 cas :

    - Soit $M = \lambda x.\, M_0$ et $P = M_0[N/x]$ donc ok
    - Soit $P = M'N$ alors par hyp $M' \in \mathcal{R}_{A \to B}$ et donc $M'N \in \mathcal{R}_B$.

Q 3.4.

$$\frac{}{(\lambda x.M)\, v \hookrightarrow M[v/x]} \qquad \frac{M \hookrightarrow M'}{M\,N \hookrightarrow M'\,N} \qquad \frac{N \hookrightarrow N'}{v\,N \hookrightarrow v\,N'}$$

Q 3.5.
- On a bien $\hookrightarrow \subseteq \to_\beta$.
- On a bien que $\hookrightarrow$ est déterministe.
- Si $M \hookrightarrow M'$ alors $M\,N \hookrightarrow M'N$ pour tout N.

On peut donc appliquer le théorème.

Q 3.6. On ne peut pas utiliser le théorème ci-avant car les formes normales pour $\hookrightarrow$ ne sont pas nécessairement des formes normales pour $\to_\beta$. Exemple : $(\lambda x. x)(y\ z) \not\hookrightarrow$

Q 3.7. Notre relation $\hookrightarrow$ n'est pas complète. Il faut ajouter d'autres règles pour qu'elle le devienne (et qu'elle reste déterministe).

On peut, par exemple, définir $\hookrightarrow$ par induction avec :

$$\frac{M \hookrightarrow M'}{M\ N \hookrightarrow M'\ N} \qquad \frac{M \not\to_\beta \quad N \hookrightarrow N'}{M\ N \hookrightarrow M\ N'}$$

$$\frac{M \hookrightarrow M'}{\lambda x. M \hookrightarrow \lambda x. M'} \qquad \frac{M \not\to_\beta \quad N \not\to_\beta}{(\lambda x.\ M)\ N \hookrightarrow M[N/x]}$$

où l'on définit $\not\to_\beta$ par induction :

$$\frac{}{x \not\to_\beta} \qquad \frac{M \not\to_\beta}{\lambda x. M \not\to_\beta} \qquad \frac{P \not\to_\beta}{x\ P \not\to_\beta}$$

$$\frac{(M\ N) \not\to_\beta \quad P \not\to_\beta}{(M\ N)\ P \not\to_\beta}$$

La relation $\hookrightarrow$ ainsi définie vérifie

(1) $\hookrightarrow \subseteq \to_\beta$;
(2) $\hookrightarrow$ est déterministe ;
(3) si $M \hookrightarrow M'$ alors pour tout N, $M\ N \hookrightarrow M'\ N$;
(4) $NF(\hookrightarrow) = NF(\to_\beta)$.

D'où la normalisation faible du λ-calcul.

TD n° 3

I. Existence d'une preuve sans coupure.

Q1.1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A,B \vdash A}\,\text{ax}}{A,B \vdash B \Rightarrow A}\Rightarrow_i}{A,B \vdash A \Rightarrow B \Rightarrow A}\Rightarrow_i \qquad \dfrac{}{A,B \vdash A}\,\text{ax}}{A,B \vdash B \Rightarrow A}\Rightarrow_e \qquad \dfrac{}{A,B \vdash B}\,\text{ax}$$

$$\dfrac{A,B \vdash B \Rightarrow A \qquad A,B \vdash B}{A,B \vdash A}\Rightarrow_e$$

Q1.2. On considère le multiensemble des degrés des coupures.

Lorsque l'on réduit la coupure la plus profonde

$$\text{coupure } c \left\{ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\delta}{\Gamma, A \vdash B}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\Rightarrow_I \qquad \dfrac{\delta'}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash B}\Rightarrow_E \right. \qquad \deg(c) > 1$$

où δ et δ' ne contiennent pas de coupures, on engendre éventuellement un nombre fini de coupures mais de degré $< \deg(c)$.

$\deg(c') \leq \max(|A|, |B|) < \deg(c)$.

D'où, par terminaison de $<_{mul}$, il existe une preuve sans coupure.

Q3.1. Eliminer la conjonction fait décroître strictement la taille de l'arbre.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\delta}{\Gamma \vdash A} \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\wedge_i}{\Gamma \vdash A}\wedge_e^g \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\delta}{\Gamma \vdash A}$$

(et de même avec $\wedge_e^d$).

Il suffit de faire un ordre produit $<_{taille} \times <_{mul}$.

Autre sol° : $t(A \wedge B) = t(A) + t(B)$ et dans le multiensemble.

Q1.4. On a montré la normalisation faible pour la $\to_\beta$.

II. Curry-Howard : enrichir la logique.

II.1. Types produit

Q2.1. $A ::= X \mid A \to A' \mid A \wedge A'$

$$\dfrac{\begin{array}{c} M : A \\ \Gamma \vdash A \end{array} \qquad \begin{array}{c} N : A' \\ \Gamma \vdash A' \end{array}}{\begin{array}{c} \Gamma \vdash A \wedge B \\ (M,N) : A \times A' \end{array}} \wedge i \qquad \dfrac{\begin{array}{c} M : A \times A' \\ \Gamma \vdash A \wedge A' \end{array}}{\begin{array}{c} \Gamma \vdash A \\ \pi_1 M : A \end{array}} \wedge e^g \qquad \dfrac{\begin{array}{c} M : A \times A' \\ \Gamma \vdash A \wedge A' \end{array}}{\begin{array}{c} \Gamma \vdash A' \\ \pi_2 M : A' \end{array}} \wedge e^d$$

Q2.2. C'est une preuve de A et une preuve de A', ce qui donne une preuve de $A \wedge A'$.

Q2.3/4 c.f. Q1.3.

II.2. Les autres connecteurs

Q2.5. $A ::= X \mid A \to A' \mid A \wedge A' \mid A \vee A' \mid \top \mid \bot$

$$\dfrac{\begin{array}{c} \tilde{\Gamma} \vdash M : A+B \\ \Gamma \vdash A \vee B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \tilde{\Gamma}, x : A \vdash N : C \\ \Gamma, A \vdash C \end{array} \qquad \begin{array}{c} \tilde{\Gamma}, y : B \vdash N' : C \\ \Gamma, B \vdash C \end{array}}{\begin{array}{c} \Gamma \vdash C \\ \tilde{\Gamma} \vdash \mathrm{case}(M, x \mapsto N, y \mapsto N') : C \end{array}} \vee e \qquad \dfrac{\begin{array}{c} \tilde{\Gamma} \vdash M : A \\ \Gamma \vdash A \end{array}}{\begin{array}{c} \Gamma \vdash A \vee B \\ \tilde{\Gamma} \vdash g M : A+B \end{array}} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} \tilde{\Gamma} \vdash M' : B \\ \Gamma \vdash B \end{array}}{\begin{array}{c} \Gamma \vdash A \vee B \\ \tilde{\Gamma} \vdash d M' : A+B \end{array}}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c} \tilde{\Gamma} \vdash M : \mathbf{0} \\ \Gamma \vdash \bot \end{array}}{\begin{array}{c} \Gamma \vdash A \\ \tilde{\Gamma} \vdash M : A \end{array}} \qquad \dfrac{}{\begin{array}{c} \Gamma \vdash \top \\ \tilde{\Gamma} \vdash * : \mathbf{1} \end{array}}$$

$M, N ::= \dots \mid * \mid g M \mid d M \mid \mathrm{case}(M, x \mapsto N, y \mapsto N')$

$A ::= \dots \mid A+B \mid \mathbf{1} \mid \mathbf{0}$

Coupures

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\delta}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee i^g \qquad \dfrac{\delta'}{\Gamma, A \vdash C} \qquad \dfrac{\delta''}{\Gamma, B \vdash C}}{\Gamma \vdash C} \vee e \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\delta'[\delta / A]}{\Gamma \vdash C}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\delta}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee i^d \qquad \dfrac{\delta'}{\Gamma, A \vdash C} \qquad \dfrac{\delta''}{\Gamma, B \vdash C}}{\Gamma \vdash C} \vee e \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\delta''[\delta / B]}{\Gamma \vdash C}$$

Pas de coupure avec $\top$ et $\bot$.

Q2.6.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\tilde{\Gamma} \vdash N : A \\ \Gamma \vdash A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\tilde{\Gamma} \vdash M : A \multimap \mathbf{0} \\ \Gamma \vdash \neg A\end{array}}{\begin{array}{c}\Gamma \vdash \bot \\ \tilde{\Gamma} \vdash MN : \mathbf{0}\end{array}}\ \neg e \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\tilde{\Gamma}, x : A \vdash M : \mathbf{0} \\ \Gamma, A \vdash \bot\end{array}}{\begin{array}{c}\Gamma \vdash \neg A \\ \tilde{\Gamma} \vdash (\lambda x. M) : A \multimap \mathbf{0}\end{array}}\ \neg i$$

On peut poser $\bot := \neg \top$.

TD n° 4

I. Recherche de preuve en déduction naturelle intuitionniste.

Q1.1. On peut prouver $\Gamma \vdash B$. On ajoute A à chaque contexte dans les séquents de la preuve de $\Gamma \vdash B$. Ceci ne change pas la validité de la preuve : le seul point potentiellement problématique est l'axiome mais on a l'implication

$$A \in \Gamma \implies A \in \Gamma, B$$

Q1.2. On a l'arbre de preuve partiel suivant :

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}{\Gamma, A \vdash A \Rightarrow B}\text{aff} \qquad \Gamma, A \vdash A}{\Gamma, A \vdash B} \Rightarrow_E .$$

Q1.3. On peut démontrer, par induction que si

$$\Gamma, A, \Delta, A, \Gamma' \vdash B \quad \text{alors} \quad \Gamma, A, \Delta, \Gamma' \vdash B.$$

Il y a 11 cas. Le seul cas intéressant est celui de l'axiome où l'on a l'implication

$$B \in \Gamma, A, \Delta, A, \Gamma' \implies B \in \Gamma, A, \Delta, \Gamma'$$

Ceci correspond à "mutualiser" les utilisations des variables libres ayant un même type.

Lorsque l'on cherche à prouver $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$ on a 2 possibilités
- ou bien on a directement $(A \Rightarrow B) \in \Gamma$
- ou bien on tente en faisant une $\Rightarrow_I$ (si $A \in \Gamma$, on n'a pas besoin de l'ajouter au contexte).

Q1.4. On peut tenter d'utiliser une règle d'élimination $\Rightarrow_E$ mais on boucle très rapidement ...

$$\dfrac{\dfrac{}{X \Rightarrow X \vdash X \Rightarrow X}\,Ax \qquad X \Rightarrow X \vdash X}{X \Rightarrow X \vdash X}$$

Q1.5. On donne l'algorithme suivant :

(1) On supprime les doublons dans Γ
(2) Si $A \in \Gamma$ alors c'est okay
(3) Si $(B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow B_n \Rightarrow A) \in \Gamma$, alors

on montre $\Gamma \vdash B_1$

$\vdots$

on montre $\Gamma \vdash B_n$

on en conclut avec $\Gamma \vdash A$

(4) Si $A = B \Rightarrow C$ alors

on tente de montrer $\Gamma, B \vdash C$ si $B \notin \Gamma$.

(5) Sinon on ne peut pas démontrer $\Gamma \vdash A$.

On peut ensuite éliminer les coupures

Q1.6. On tente de montrer que $\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$
On tente de montrer que $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A$
On tente de montrer que $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A \Rightarrow B$
On tente de montrer que $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A, A \vdash B$
On ne peut plus avancer : en supposant que l'algo est correct, on ne peut pas prouver la loi de Peirce en intuitionniste.

II. Typer dans le λ-calcul polymorphe

Q2.1.1. On pose $bool := \forall X.\ X \to X \to X$

Q2.1.2.

On a bien $\mathrm{and}_1 : \mathrm{bool} \to \mathrm{bool} \to \mathrm{bool}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash b_1 : \mathrm{bool}}}{\Gamma \vdash b_1 : X \to X \to X} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash b_2 : X \to X \to X} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash x : X}}{\Gamma \vdash b_2\ x : X \to X} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash y : X}}{\Gamma \vdash b_2\ x\ y : X}}{\Gamma \vdash b_1\ (b_2\ x\ y) : X \to X} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash y : X}}{\underbrace{\underbrace{b_1 : \mathrm{bool},\ b_2 : \mathrm{bool}}_{X \in VL(\tilde{\Gamma})},\ x : X,\ y : X}_{\Gamma} \vdash b_1\ (b_2\ x\ y)\ y : X}$$

$\vdots$

On a bien $\mathrm{and}_2 : \mathrm{bool} \to \mathrm{bool} \to \mathrm{bool}$

car $T : \mathrm{bool}$ $\quad F : \mathrm{bool}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash b_1 : \mathrm{bool}}}{\Gamma \vdash b_1 : \mathrm{bool} \to \mathrm{bool} \to \mathrm{bool}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash b_2 : \mathrm{bool}}{\Gamma \vdash b_2 : \mathrm{bool} \to \mathrm{bool} \to \mathrm{bool}} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash T : \mathrm{bool}}\ \vdots}{\Gamma \vdash b_2\ T : \mathrm{bool} \to \mathrm{bool}} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash F : \mathrm{bool}}\ \vdots}{\Gamma \vdash b_2\ T\ F : \mathrm{bool}}}{\Gamma \vdash b_1\ (b_2\ T\ F) : \mathrm{bool} \to \mathrm{bool}} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash F : \mathrm{bool}}}{\underbrace{b_1 : \mathrm{bool},\ b_2 : \mathrm{bool}}_{\Gamma} \vdash b_1\ (b_2\ T\ F)\ F : \mathrm{bool}}$$

$\vdots$

On a $\mathrm{and}_3 : \mathrm{bool} \to \mathrm{bool} \to \mathrm{bool}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash b_1 : \mathrm{bool}}}{\Gamma \vdash b_1 : \mathrm{bool} \to \mathrm{bool} \to \mathrm{bool}} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash b_2 : \mathrm{bool}}}{\Gamma \vdash b_1\ b_2 : \mathrm{bool} \to \mathrm{bool}} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash b_1 : \mathrm{bool}}}{\underbrace{b_1 : \mathrm{bool},\ b_2 : \mathrm{bool}}_{\Gamma} \vdash b_1\ b_2\ b_1 : \mathrm{bool}}$$

$\vdots$

Q2.2. On donne le typage

$$\delta := \lambda x : \forall \alpha, \alpha \to \alpha.\ x\ x : (\forall \alpha, \alpha \to \alpha) \to (\forall \alpha, \alpha \to \alpha)$$

Q2.3. On peut faire

$$\delta : ((\forall \alpha, \alpha \to \alpha) \to (\forall \alpha, \alpha \to \alpha)) \to (\forall \alpha, \alpha \to \alpha) \to (\forall \alpha, \alpha \to \alpha)$$

Q2.4.1. On montre les deux propriétés :

1
- si $\Gamma \vdash \lambda x.M : A$, alors nécessairement A est un type flèche potentiellement imbriqué dans des généralisations (induct° sur la relation de typage), et on montre $\Gamma \vdash \lambda x.M : B \to C$.
- Réciproquement, si $\Gamma, x : B \vdash M : C$ alors en généralisant, on a : $\Gamma \vdash \lambda x.M : \forall \vec{\alpha}, B \to C$

- Si $\Gamma \vdash M\ N : \forall \vec{\alpha}\ A$, alors nécessairement, $\Gamma \vdash M : B \to C$ et $\Gamma \vdash N : C$. De plus, on a que C est nécessairement une généralisat° de A.
  D'où on a bien le résultat demandé.

- Réciproquement, il suffit de spécialiser pour avoir le résultat.

Q4.2.2. Si $\vdash \Omega : \forall \vec{\alpha}\ A$ (potentiellement avec $\vec{\alpha}$ vide)
alors $\vdash \delta : B \to C$ et $\vdash \delta : C$
Absurde car on aurait

$$\delta : B \to (B \to (B \to \ldots)))\cdots).$$

III Principes classiques en déduction naturelle

Q3.1. En analysant les règles de la déduction naturelle, on montre qu'une preuve de $X \vee \neg X$ demande d'exhiber si l'on veut prouver le membre gauche ou le droit.

Supposons que l'on ait prouvé X, alors par substitution de X par $\perp$, on a montré $\perp$. Absurde car $\nvdash \perp$.

Réciproquement, si on a montré $\neg X$ alors on substitue X avec $\top$, on a l'arbre de preuve :

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash \top}\,\top_i \qquad \overbrace{\vdash \neg \top}^{\text{par hyp.}}}{\vdash \perp}$$

Absurde

D'où $\nvdash X \vee \neg X$.

Q3.2. Supposons $\vdash \neg X \vee \neg\neg X$.

Si on a montré $\neg X$, alors, avec $X \rightsquigarrow \top$ on a $\vdash \perp$ comme montré ci-dessus. Absurde

Si on a montré $\neg\neg X$ alors, avec $X \rightsquigarrow \perp$, on a $\vdash \perp$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\perp \vdash \perp}}{\vdash \neg \perp} \qquad \overbrace{\vdash \neg\neg \perp}^{\text{par hyp.}}}{\vdash \perp}$$

Q3.3. On a montré (pas en Prolog mais en Logique) que la logique intuitionniste est correcte, hors $\not\models \neg(X \vee \neg X)$ car $\models X \vee \neg X$.

Il est donc impossible d'avoir $\vdash \neg(X \vee \neg X)$.

TD n° 5.

I. Quantification existentielle sur les types.

Q1.1. $\langle nat \to nat \,;\, (\lambda x.\, x+1,\ \lambda f.\ f\ 0) \rangle$ as $\exists \alpha.\ (\alpha * (\alpha \to nat))$

Q1.2. $\exists \alpha.\ \underbrace{(\alpha \to int \to \alpha)}_{\text{push}} * \underbrace{(\alpha \to (int + 1) * \alpha)}_{\text{pop}} * \underbrace{(\alpha \to bool)}_{\text{isempty.}}$

Q1.3.
$$\frac{\Gamma \vdash M : A[B/\alpha]}{\Gamma \vdash (\langle B ; M \rangle \text{ as } \exists \alpha. A) : \exists \alpha.\ A}$$

Q1.4.
$$\alpha' \text{ fraîche}\ \frac{\Gamma \vdash M : \exists \alpha'. A \qquad \Gamma, x : A[\alpha/\alpha'] \vdash N : B}{\Gamma \vdash \text{let } \langle \alpha ; x \rangle = M \text{ in } N : B}$$

Q1.5.
$$\frac{}{\text{let } \langle \alpha ; x \rangle = (\langle B ; M \rangle \text{ as } \exists \alpha. A) \text{ in } N \longrightarrow_\beta N[M/x, B/\alpha]}$$

Q1.6.
$$\alpha \text{ fraîche}\ \frac{\Gamma \vdash \exists \alpha. A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ \exists_E$$

$$\frac{\Gamma \vdash B[A/\alpha]}{\Gamma \vdash \exists \alpha. B}\ \exists_I$$

Q1.7. $\exists \alpha.\ A \rightsquigarrow \forall \beta.\ (\forall \alpha.\ A \to \beta) \to \beta.$

II. Fonctions récursives et terminaison, un λ-calcul avec niveaux.

Q2.1. Si la règle (r) était :

$$\frac{}{(\text{letrec } f = e_1)\ e_2 \longrightarrow_\beta e_1[\text{letrec } f = e_1 / f]\ e_2}$$

et alors on ne procéderai jamais à la réduction du terme de droite.

Q2.2.

$$(\text{letrec plus} = \lambda x.\lambda y.\ \text{match } x \text{ with } \{0 \Rightarrow y \mid S \Rightarrow \lambda x'.\ S(\text{plus } x'\ y)\})\ (S\ 0)\ (S\ S\ 0)$$

$\xrightarrow[\beta]{(r)}$ $(\lambda x.\lambda y.\ \text{match } x \text{ with } \{0 \Rightarrow y \mid S \Rightarrow \lambda x'.\ S(\text{Plus } x'\ y)\})\ (S\ 0)\ (S\ S\ 0)$

$\xrightarrow[\beta]{(\beta)}$ $(\lambda y.\ \text{match } S\,0 \text{ with } \{0 \Rightarrow y \mid S \Rightarrow \lambda x'.\ S(\text{Plus } x'\ y)\})\ (S\ S\ 0)$

$\xrightarrow[\beta]{(mS)}$ $(\lambda y.(\lambda x'.\ S(\text{Plus } x'\ y))\ 0)\ (S\ S\ 0)$

$\xrightarrow[\beta]{(\beta)}$ $(\lambda y.(S(\text{Plus } 0\ y)))\ (S\ S\ 0)$

$\xrightarrow[\beta]{(\beta)}$ $S(\text{Plus } 0\ (S\ (S\ 0)))$

$\xrightarrow[\beta]{(c)}{}^{*}$ $S(S(S(0)))$

et $(\text{letrec plus} = \lambda x.\lambda y.\ \text{match } x \text{ with } \{0 \Rightarrow y \mid S \Rightarrow \lambda x'.\ S(\text{plus } x'\ y)\})\ 0\ (S\ S\ 0)$

$\xrightarrow[\beta]{(r)}$ $(\lambda x.\lambda y.\ \text{match } x \text{ with } \{0 \Rightarrow y \mid S \Rightarrow \lambda x'.\ S(\text{Plus } x'\ y)\})\ 0\ (S\ S\ 0)$

$\xrightarrow[\beta]{(\beta)}$ $(\lambda y.\ \text{match } 0 \text{ with } \{0 \Rightarrow y \mid S \Rightarrow \lambda x'.\ S(\text{Plus } x'\ y)\})\ (S\ S\ 0)$

$\xrightarrow[\beta]{(m0)}$ $(\lambda y.\ y)\ (S\ S\ 0)$

$\xrightarrow[\beta]{(\beta)}$ $S\ S\ 0.$

Q2.3. $\text{letrec plus} : \text{Nat}^{I} \to \text{Nat} \to \text{Nat} = \lambda x : \text{Nat}^{\hat{I}}.\ \lambda y : \text{Nat}.\ \text{match } x \text{ with}$

$\mid 0 \Rightarrow y$

$\mid S \Rightarrow \lambda x' : \text{Nat}^{I}.\ \underbrace{S(\text{plus } x'\ y)}_{\text{Nat}}$

Q2.3. La fonction $e ::= (\text{let rec } f = \lambda x.\ f\ x)$ n'est pas typable :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash e : \text{Nat}^{I} \to \sigma[\hat{I}/I] \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash x : \text{Nat}^{\hat{I}}}}{\Gamma := f : \text{Nat}^{I} \to \sigma,\ x : \text{Nat}^{\hat{I}} \vdash f\ x : \sigma[\hat{I}/I]}}{f : \text{Nat}^{I} \to \sigma \vdash \lambda x.\ f\ x : \text{Nat}^{\hat{I}} \to \sigma[\hat{I}/I]}}{\vdash \text{letrec } f = \lambda x.\ f\ x : \text{Nat}^{S} \to \sigma[S/I]}$$

on ne peut pas faire ça car

$$f : \text{Nat}^{I} \to \sigma,\ x : \text{Nat}^{\hat{I}} \vdash f : \text{Nat}^{\hat{I}} \to \sigma[\hat{I}/I]$$

seulement si $\text{Nat}^{\hat{I}} \sqsubseteq \text{Nat}^{I}$ seulement si $\hat{I} \lesssim I$.

↳ impossible !

Q2.5. (1) C'est du $\text{Nat}^{s} \to \text{bool}$

(2) Dans le match interne, on doit avoir $\lambda x'.\ \text{match } x' \text{ with } \{\dots\}$ de type $\text{Nat}^{I} \to \text{bool}$ où $x : \text{Nat}^{I}$. Or, la règle du match requiert $x : \text{Nat}^{\hat{I}}$: on utilise ici $(*)$ avec $\text{Nat}^{I} \sqsubseteq \text{Nat}^{\hat{I}}$.

Q2.6. (1) let rec $\text{div} : \text{Nat}^{I} \to \text{Nat} \to \text{Nat}^{I} =$

$$
\begin{aligned}
&\lambda x : \text{Nat}^{\hat{I}}.\ \lambda y : \text{Nat}. \\
&\quad \text{match } x \text{ with } \{ \\
&\quad\quad O \Rightarrow O \\
&\quad | \; S \Rightarrow \lambda x' : \text{Nat}^{I}.\ S\,(\underbrace{\text{div}\ \underbrace{(\text{minus } x'\ y)}_{\text{Nat}^{I}}\ y}_{\text{Nat}^{I}}) \\
&\quad \}
\end{aligned}
$$

(2) On n'a pas besoin de montrer que "$(\text{minus } x'\ y) \leq x$" au sens "ont des types $\sqsubseteq$", ce qui serait nécessaire en Rocq.

Q2.7. (1) Extension de la β-réduction :

$$\frac{}{\text{match nil with } \{ \text{nil} \Rightarrow e_1 \mid \text{cons} \Rightarrow e_2 \} \to_\beta e_1}\ (\text{m nil})$$

$$\frac{}{\text{match } (\text{cons } e\ e') \text{ with } \{ \text{nil} \Rightarrow e_1 \mid \text{cons} \Rightarrow e_2 \} \to_\beta e_2\ e\ e'}\ (\text{m cons})$$

que l'on peut effectuer "partout" (au sens de l'énoncé).

Extension de la relation de typage :

$$\sigma, \tau ::= \sigma \to \tau \mid \text{Nat}^{s} \mid \text{List}^{r,s}$$

$$\frac{r \lesssim r' \qquad s \lesssim s'}{\text{List}^{r,s} \sqsubseteq \text{List}^{r',s'}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \text{nil} : \text{List}^{r,\hat{s}}}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{cons} : \text{List}^{r,s} \to \text{Nat}^{r} \to \text{List}^{r,\hat{s}}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : \text{List}^{r,\hat{s}} \qquad \Gamma \vdash e_1 : \sigma \qquad \Gamma \vdash e_2 : \text{List}^{r,s} \to \text{Nat}^{r} \to \sigma}{\Gamma \vdash \text{match } e \text{ with } \{ \text{nil} \Rightarrow e_1 \mid \text{cons} \Rightarrow e_2 \} : \sigma}$$

$$\frac{\Gamma, f : \text{List}^{J,I} \to \sigma \vdash e : \text{List}^{J,\hat{I}} \to \sigma[\hat{I}/I, J/J]}{\Gamma \vdash (\text{let rec } f = e) : \text{List}^{r,s} \to \sigma[s/I, r/J]}$$

Comment gérer une liste qui décroît par son argument et non sa taille ?

(2) $\text{Length} : \text{List}^{\overset{\text{arg}}{r},\overset{\text{len}}{s}} \multimap \text{Nat}^s$

Q 2.8. Il faut pouvoir enrichir avec des listes de listes.

$$r, s ::= I \mid \infty \mid \hat{s}$$
$$\sigma, \tau ::= \sigma \multimap \tau \mid \text{Nat}^s \mid \text{List}^s(\tau)$$

$$\frac{s \lesssim r \qquad \sigma \sqsubseteq \tau}{\text{List}^s(\sigma) \sqsubseteq \text{List}^r(\tau)}$$

On définit $r \lesssim s$ inductivement (c'est la relation $\lesssim$ stricte où $r < \hat{r}$ et $r < \infty$ si $r \neq \infty$).

De même pour $\sqsubseteq$.

Ensuite :

$$\frac{\Gamma \vdash e : \text{List}^r(\tau) \quad \Gamma \vdash e_1 : \sigma \quad \Gamma \vdash e_2 : \sigma' \quad \sigma' \sqsubseteq \text{List}^r(\tau)}{\Gamma \vdash \text{match } e \text{ with } \{\text{nil} \Rightarrow e_1 \mid \text{cons} \Rightarrow e_2\} : \sigma}$$

$$\frac{\Gamma, f : \text{List}^I(\tau) \multimap \sigma \vdash e : \text{List}^{\hat{I}}(\tau) \multimap \sigma[\hat{I}/I]}{\Gamma \vdash (\text{letrec } f = e) : \text{List}^r(\tau) \multimap \sigma[r/I]}$$

À vérifier ...

Ceci conclut les TDs de ProFon