# TD n° 1

## I. Savoir lire la définition.

Ce sont des mesures de sécurité. Sinon :

$$(\lambda y.\ x\ y)[z/y] \neq_\alpha \lambda y.\ x\ z \qquad \leadsto \Delta\ x \neq y$$
$$(\lambda y.\ x\ y)\ [y/x] \neq_\alpha \lambda y.\ y\ y \qquad \leadsto \Delta\ y \notin VL(N).$$

## II. Classes d'équivalence pour $=_\beta$.

Q2.1. $\Omega\,\Omega \to_\beta \Omega\,\Omega$ et $\Omega \to_\beta \Omega$.

Ainsi, si $\Omega\Omega =_\beta \Omega$ alors, par confluence, il existe M un λ-terme tel que

on utilise plusieurs fois la confluence avec les termes intermédiaires

C'est absurde car on aurait $\Omega\Omega = P = \Omega$ ($\Omega\Omega \to_\beta^* P$ implique $P = \Omega\Omega$ car il n'y a que 1 redex).

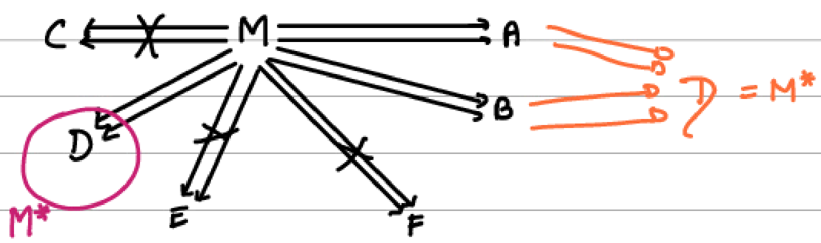
Q2.2. Soit N une forme normale avec $x \notin VL(N)$

On pose :

$$M = (\lambda x.\ N)\ \Omega.$$

## III Propriété du diamant pour les réductions parallèles

Q3.1.



Par induction (3 cas)

Q3.2. $x^* := x$

$(\lambda x. M)^* := \lambda x.(M^*)$

$(M\ N)^* := \begin{cases} P^*[N^*/x] & \text{si } M = \lambda x. P \\ M^*\ N^* & \text{sinon} \end{cases}$

Lemme : si $M \Rrightarrow N$ alors $N \Rrightarrow M^*$ (par induction sur $M$)

D'où

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow] & \\ A \arrow[dr, Rightarrow] & & B \arrow[dl, Rightarrow] \\ & M^* & \end{tikzcd}$$

On a donc la propriété du diamant pour $\Rrightarrow$ donc la confluence de $\to_\beta$.

## IV Normalisation faible et forte en $\lambda$-calcul pur.

Q4.1. Les propriétés (1), (2) et (3) restent vraies

La propriété (4) ne l'est pas :

on a

$$M := (\lambda x. x)\, M' \to M'$$

mais

$$\underbrace{(y\ y)[M/y]}_{=\ M\ M} \not\to \underbrace{(y\ y)[M'/y]}_{=\ M'\ M'}$$

Q4.2. Par induction sur $M \to M'$ (4 cas) :

* Cas $(\lambda x.\ M)\ N \to M[N/x]$. Supposons $x \in \mathcal{VL}(M)$ et $N \in \lambda I$. (*)

Par induction sur $M$, il y a 3 cas :

- si $M = y$ alors
  - si $y \neq x$ alors $M[N/x] = M \in \lambda I$.
  - si $y = x$ alors $M[N/x] = N \in \lambda I$.
- si $M = P\ Q$ alors par hypothèse d'induction on a : $P[N/x] \in \lambda I$ et $Q[N/x] \in \lambda I$ d'où $(P\ Q)[N/x] \in \lambda I$. par (ii)
- si $M = \lambda y. P$ avec $y \in \mathcal{VL}(P)$ alors $M[N/x] \in \lambda I$ car $P[N/x] \in \lambda I$.

* Cas $M N \to M' N$ avec $M \to M'$. Par hypothèse d'induction $M' \in \lambda I$.
avec $M \in \lambda I$, $N \in \lambda I$.
D'où $M' N \in \lambda I$ par (ii).

* Cas $M N \to M N'$ avec $N \to N'$. Par hypothèse d'induction $N' \in \lambda I$.
avec $M \in \lambda I$, $N \in \lambda I$.
D'où $M N' \in \lambda I$ par (ii).

* Cas $\lambda x. M \to \lambda x. M'$ avec $M \to M'$ et $M \in \lambda I$, $(\lambda x. M) \in \lambda I$, $M' \in \lambda I$ par hyp. d'ind°
Et, $vl(M') = vl(M)$ (preuve par induction)
d'où $(\lambda x. M') \in \lambda I$ car $x \in vl(M')$.

Q4.3. Supposons avoir une divergence issue de $(\lambda x. M) N$.
On a trois cas :
- soit $N \uparrow$ donc $N_i \to N_{i+1}$ avec $N_0 = N$ d'où $M[N_i/x] \to^+ M[N_{i+1}/x]$ avec au moins un pas car $x \in vl(M_i)$ et donc $M[N/x] \uparrow$
- soit $M \uparrow$ donc $M_i \to M_{i+1}$ avec $M_0 = M$ d'où $M_i[N/x] \to M_{i+1}[N/x]$ et donc $M[N/x] \uparrow$
- soit $M[N/x] \uparrow$

Dans tous les cas, $M[N/x] \uparrow$

Q4.4. Non : $(\lambda x. y)\, \Omega \uparrow$ mais $y[\Omega/x] = y \cancel{\uparrow}$

car $\in \lambda I$ à toute étape

Q4.5. Mon instinct me dit non, mais vu qu'on ne peut pas faire "disparaître" une divergence, j'ai envie de dire oui.

Si on a une divergence, alors on ne peut pas l'éviter. Inversement, si on n'a pas de divergence, on ne peut pas aller dans une divergence.

En gros : tous les calculs dans $\lambda I$ sont utiles.

# V Des $\lambda$-termes qui calculent : couples et prédécesseurs

Q5.1. On définit $succ := \lambda u. \lambda f. \lambda x. f(u f x)$.

$$succ\ \underline{n} = (\lambda u f x. f(u f x))(\lambda f x. f^n x) \to_\beta \lambda f x. f((\lambda f x. f^n x) f x)$$
$$\to_\beta \lambda f x. f((\lambda x. f^n x)\, x)$$
$$\to_\beta \lambda f x. f(f^n x) = \lambda f x. f^{n+1} x = \underline{n+1}.$$

D'où $succ\ \underline{n} \to^* \underline{n+1}$

Q5.2. On pose $fst := \lambda c.\, c\, \mathbf{T}$ et $snd := \lambda c.\, c\, \mathbf{F}$.

$$\begin{aligned}
fst\ (M,N) &= (\lambda c.c\ (\lambda x y. x))\ (\lambda f.\ (f M) N) \\
&\rightarrow_\beta (\lambda f.\ (f M) N)\ (\lambda x y. x) \\
&\rightarrow_\beta ((\lambda x y. x) M) N \\
&\rightarrow_\beta (\lambda y. M) N \\
&\rightarrow_\beta M
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
snd\ (M,N) &= (\lambda c.c\ (\lambda x y. y))\ (\lambda f.\ (f M) N) \\
&\rightarrow_\beta (\lambda f.\ (f M) N)\ (\lambda x y. y) \\
&\rightarrow_\beta ((\lambda x y. y) M) N \\
&\rightarrow_\beta (\lambda y. y) N \\
&\rightarrow_\beta N
\end{aligned}$$

Q5.3. On pose : $Next := \lambda c.\ (succ\ (fst\ c),\ fst\ c)$

$$\begin{aligned}
Next\ (\underline{n}, \underline{k}) &\rightarrow_\beta (succ\ (fst\ (\underline{n}, \underline{k})),\ fst\ (\underline{n}, \underline{k})) && \text{par Q5.2} \\
&\rightarrow_\beta^* (succ\ \underline{n},\ fst\ (\underline{n}, \underline{k})) && \text{par Q5.1} \\
&\rightarrow_\beta^* (\underline{n+1},\ fst\ (\underline{n}, \underline{k})) && \text{par Q5.2} \\
&\rightarrow_\beta^* (\underline{n+1},\ \underline{n})
\end{aligned}$$

Q5.4 On pose $pred := \lambda n.\ snd\ (n\ Next\ (\underline{0}, \underline{0}))$.

## VI Des $\lambda$-termes qui bouclent

Q6.1.
$$\begin{aligned}
Y\ M &\rightarrow_\beta (\lambda x.\ M (x\ x))\ (\lambda x.\ M (x\ x)) \\
&\rightarrow_\beta M ((\lambda x.\ M (x\ x))\ (\lambda x.\ M (x\ x))) \\
&\leftarrow_\beta M\ (Y\ M)
\end{aligned}$$

D'où $M (Y M) =_\beta Y M$.

Q6.2. On pose :

$F := \lambda f.\ \lambda n.\ \text{if } zero?(n) \text{ then } \underline{1}$
$\qquad \text{else } mult\ n\ (f\ (pred\ n))$

puis

$fact := Y F$.

Q6.3. On pose $\gamma := \lambda f.\ f (f\ x)$ puis $\Gamma := \lambda x.\ \gamma\gamma$.

On a :                                   degré de foisonnement :

$\Gamma = \lambda x.\, \gamma \gamma$ — 2

$\to_\beta \lambda x.\, \gamma (\gamma x)$ — 3

$\to_\beta \lambda x.\, \gamma (x (x\ x))$ — 4

$\to_\beta \lambda x.\, (x(x\ x))((x(x\ x))\ x)$ — 7

Q 6.4. Dans l'exemple, on fait des $\beta$-réductions dans une abstraction. En forme, on ne peut pas faire ça.

# TD n° 2

## I. Typer des $\lambda$-termes

### 1.1. Une question de cours du 6 mars 2024.

$$\underbrace{(\lambda f.\ f(f\ z))}_{(X \to X) \to (X \to X)}\ \underbrace{(\lambda x.\ \lambda y.\ x\ y)}_{(A \to B) \to (A \to B)} \quad \text{où } X = A \to B$$

Q1.1. $(\lambda f.\ f(f\ z))\ (\lambda x.\ \lambda y.\ x\ y)$ de taille 12

$\to_\beta (\lambda x.\ \lambda y.\ x\ y)((\lambda x.\lambda y.\ x\ y)\ z)$ de taille 13

### 1.2. Entiers de Church

Q1.2. $\text{succ} := \lambda n.\ \lambda f\ x.\ f(n\ f\ x)$

$\text{add} := \lambda n.\ \lambda m.\ \lambda f x.\ n\ f\ (m\ f\ x)$

$\text{mult} := \lambda n.\ \lambda m.\ \lambda f.\ n\ (m\ f)$

Q1.3. $\vdash \text{succ} : \text{nat} \to \text{nat}$

$\hookrightarrow n : \text{nat},\ f : X \to X,\ x : X \vdash f\ (n\ f\ x) : X$

$\hookrightarrow$ " $\vdash n\ f\ x : X$

$\vdash \text{add} : \text{nat} \to \text{nat} \to \text{nat}$

$\hookrightarrow n : \text{nat},\ m : \text{nat},\ f : X \to X,\ x : X \vdash n\ f\ (m\ f\ x) : X$

$\hookrightarrow$ " $\vdash m\ f\ x : X$

$\vdash \text{mult} : \text{nat} \to \text{nat} \to \text{nat}$

$\hookrightarrow n : \text{nat},\ m : \text{nat},\ f : X \to X \vdash n\ (m\ f) : X \to X$

$\hookrightarrow$ " $\vdash m\ f : X \to X$

## II. Types somme

Q2.1. Termes : $M, N ::= \dots \mid g\ M \mid d\ N \mid$ "match $M$ with $g\ x \to N \mid d\ y \to N'$"

Réductions :

$$\frac{M \to_\beta M'}{g\ M \to_\beta g\ M'} \qquad \frac{M \to_\beta M'}{d\ M \to_\beta d\ M'}$$

$$\frac{}{(\text{match } g\ M \text{ with } g\ x \to N \mid d\ y \to N') \to_\beta N[M/x]}$$

$$\overline{(\text{match } d\,M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N') \to_\beta N'[M/y]}$$

$$\frac{M \to_\beta M'}{\text{match } M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N' \to_\beta \text{match } M' \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N'}$$

$$\frac{N \to_\beta N''}{\text{match } M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N' \to_\beta \text{match } M \text{ with } g\,x \to N'' \mid d\,y \to N'}$$

$$\frac{N' \to N'''}{\text{match } M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N' \to_\beta \text{match } M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N'''}$$

Types : $A, B ::= \dots \mid A+B$

Typage : $\dfrac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash g\,M : A+B}$ $\quad$ $\dfrac{\Gamma \vdash M : B}{\Gamma \vdash d\,M : A+B}$

$$\frac{\Gamma \vdash M : B+C \qquad \Gamma, x : B \vdash N : A \qquad \Gamma, y : C \vdash N' : A}{\Gamma \vdash \text{match } M \text{ with } g\,x \to N \mid d\,y \to N' : A}$$

## III Normalisation faible

Q3.1. On a : $M$ fortement normalisant $\Rightarrow M'$ fortement normalisant.
Réciproquement, supposons $M'$ fortement normalisant.
Si $M$ admet une divergence pour $\mapsto$ alors par déterminisme la divergence passe par $M'$ et donc on a une divergence pour $M'$.
Absurde.

Q3.2 Non ! $M = \mathbf{F}\,\Omega \to_\beta \mathbf{F}\,\Omega$ avec $\Omega \to_\beta \Omega$

$\downarrow_\beta$

$M'$ $\lambda y. y$ $\qquad$ $M$ a une divergence alors que $M'$ non.

Q3.3. Pour tout type $A$,
(CR1') si $M \in \mathcal{R}_A$ alors $M$ termine pour $\mapsto$
(CR2') si $M \in \mathcal{R}_A$ et $M \mapsto M'$ alors $M' \in \mathcal{R}_A$.
(CR3') si $M \mapsto M' \Rightarrow M' \in \mathcal{R}_A$ alors $M \in \mathcal{R}_A$

Par induction sur A (2 cas) :

- si on a un type de base $X$
  - (CR1') par définition
  - (CR2') par définition & préservation du typage
  - (CR3') par induction bien fondée sur $\mapsto$ car $\mapsto$ termine.
- si on a un type $A \to B$
  - (CR1') On a $x \in \mathcal{R}_A$ pour $x$ arbitraire.
    Or, $M x \in \mathcal{R}_B$ d'où $Mx$ fortement normalisant.
    Si $M$ diverge en $M = M_1 \mapsto M_2 \mapsto M_3 \cdots$
    alors $Mx \mapsto M_2 x \cdots$ absurde !

(CR2') Soit $M \in \mathcal{R}_{A \to B}$ et $M \mapsto M'$. Montrons que $M' \in \mathcal{R}_{A \to B}$.
Soit $N \in \mathcal{R}_A$. Montrons que $M'N \in \mathcal{R}_B$.
Or, $MN \mapsto M'N$ d'où, par (CR2') pour $B$, $M'N \in \mathcal{R}_B$.
On conclut $M' \in \mathcal{R}_{A \to B}$.

(CR3') Supposons $M \mapsto M' \Rightarrow M' \in \mathcal{R}_{A \to B}$.
Montrons $M \in \mathcal{R}_{A \to B}$.
Par hyp d'induction bien fondée,
si $N \mapsto N'$ alors $MN' \in \mathcal{R}_B$.
Montrons $MN \in \mathcal{R}_B$.
Par (CR3') pour $B$, alors montrons que
$MN \mapsto P$ et $P \in \mathcal{R}_B$.
On a 2 cas :
- Soit $M = \lambda x. M_0$ et $P = M_0[N/x]$ donc ok
- Soit $P = M'N$ alors par hyp $M' \in \mathcal{R}_{A \to B}$
  et donc $M'N \in \mathcal{R}_B$.

Q 3.4.
$$\frac{}{(\lambda x. M)\, v \hookrightarrow M[v/x]} \qquad \frac{M \hookrightarrow M'}{M N \hookrightarrow M' N} \qquad \frac{N \hookrightarrow N'}{v\, N \hookrightarrow v\, N'}$$

Q 3.5.
- On a bien $\hookrightarrow \subseteq \to_\beta$.
- On a bien que $\hookrightarrow$ est déterministe.
- Si $M \hookrightarrow M'$ alors $M N \hookrightarrow M' N$ pour tout $N$.

On peut donc appliquer le théorème.

Q.3.6. On ne peut pas utiliser le théorème ci-avant car les formes normales pour $\hookrightarrow$ ne sont pas nécessairement des formes normales pour $\rightarrow_\beta$. Exemple : $(\lambda x. x)(y\ z) \not\hookrightarrow$

Q 3.7. Notre relation $\hookrightarrow$ n'est pas complète. Il faut ajouter d'autres règles pour qu'elle le devienne (et qu'elle reste déterministe).