

Ordres partiels et treillis.

1 Ordres partiels.

Définition 1. Un *ordre partiel* (ou *poset* en anglais) est une paire (P, \leq) où \leq est une relation binaire sur P telle que

- ▷ (*reflexivité*) $\forall x \in P, x \leq x$;
- ▷ (*transitivité*) $\forall x, y \in P, x \leq y \implies y \leq z \implies x \leq z$;
- ▷ (*antisymétrie*) $\forall x, y \in P, x \leq y \implies y \leq x \implies x = y$.

Un préordre est une relation binaire réflexive et transitive.

Exemple 1. On donne quelques exemples de poset :

1. $(\wp(X), \subseteq)$, l'inclusion dans les parties de X
2. $(\Omega X, \subseteq)$, l'inclusion dans les ouverts de X
3. (Σ^*, \subseteq) , la relation préfixe dans les mots sur Σ

Attention, dans les trois exemples, il existe deux éléments u, v où

$$u \not\leq v \quad \text{et} \quad v \not\leq u.$$

Définition 2 (Dual). Soit (P, \leq) un poset. Le *dual* de P est $(P, \leq)^{\text{op}} := (P, \geq)$ où

$$a \geq b \iff b \leq a.$$

Définition 3 (Fonction (anti)monotone). Soit (P, \leq_P) et (L, \leq_L) deux posets. Une fonction $f : P \rightarrow L$ est *monotone* si pour tout $a, b \in P$ on a

$$a \leq_P b \implies f(a) \leq_L f(b).$$

On dit que $f : (P, \leq) \rightarrow (L, \leq)$ est *antimonotone* si $f : (P, \geq) = (P, \leq_P)^{\text{op}} \rightarrow (L, \leq_L)$ est monotone, autrement dit pour tout $a, b \in P$ on a

$$a \leq_P b \implies f(a) \geq_L f(b).$$

2 Treillis complet.

Définition 4. Soit (A, \leq) un poset et $S \subseteq A$.

- ▷ Un *upper bound* de S est un élément $a \in A$ tel que $\forall s \in S, s \leq a$.
- ▷ Un *least upper bound* (*lub*, *join* ou *sup*) de S est un upper bound $a \in A$ de S tel que, pour tout upper bound $b \in A$ de S , on a $a \leq b$.

Par dualité, on a les définitions suivantes.

- ▷ Un élément $a \in A$ est un *lower bound* de S ssi a est un upper bound de S dans A^{op} .
- ▷ Un élément $a \in A$ est un *greatest lower bound* (*glb*, *meet*, *inf*) de S ssi a est un least upper bound de S dans A^{op} .

On note $\bigvee S$ le least upper bound de S . On note $\bigwedge S$ le greatest lower bound de S .

Exemple 2. Soit $S \subseteq \wp(X)$ alors le least upper bound de S dans $(\wp(X), \subseteq)$ est $\bigcup S \in \wp(X)$. Le greatest lower bound de S dans $(\wp(X), \subseteq)$ est $\bigcap S \in \wp(X)$.

Exemple 3. Soit $S \subseteq \Omega X$ alors le least upper bound dans $(\Omega X, \subseteq)$ est $\bigcup S \in \Omega X$. Le greatest lower bound dans $(\Omega X, \subseteq)$ n'existe pas forcément.

Exemple 4. Dans (Σ^*, \subseteq) (la relation « préfixe de »), une partie $S \subseteq \Sigma^*$ n'a pas forcément de sup.

[Il manque une partie du cours ici, je la complèterai plus tard...]

Définition 5. Un poset (L, \leq) est un *treillis complet* si

- ▷ tout $S \subseteq L$ a un sup $\bigvee S \in L$;
- ▷ tout $S \subseteq L$ a un inf $\bigwedge S \in L$.

En conséquence on a que tout treillis complet a

- ▷ un plus petit élément $\perp := \bigvee \emptyset \in L$;
- ▷ un plus grand élément $\top := \bigwedge \emptyset \in L$.

Remarque 1 (Non-exemple). Le poset (Σ^*, \subseteq) (avec la relation « préfixe de ») n'est ***pas*** un treillis complet, car il n'a pas de plus grand élément \top .

3 Opérateur de clôture.

Définition 6. Soit (A, \leq) un poset. Un *opérateur de clôture* sur (A, \leq) est une fonction

$$c : A \rightarrow A$$

telle que

- ▷ c est monotone ;

- ▷ c est « *expansive* » : pour tout $a \in A$, $a \leq c(a)$;
- ▷ c est *idempotent* : $c(c(a)) = c(a)$ pour tout $a \in A$.

Exemple 5. Soit $(X, \Omega X)$ un espace topologique. Alors

$$\wp(X) \ni A \mapsto \bar{A} \in \wp(X)$$

est un opérateur de clôture sur $(\wp(X), \subseteq)$.

Lemme 1. Soit c un opérateur de clôture sur (L, \leq) . On pose

$$L^c := \{a \in L \mid \underbrace{c(a) = a}_{a \in \text{im } c}\}.$$

Si (L, \leq) est un treillis complet alors (L^c, \leq) est un treillis complet avec

$$\forall S \subseteq L^c, \quad \bigwedge^{L^c} S = \bigwedge^L S.$$

Exemple 6. Pour $\overline{(-)} : \wp(X) \rightarrow \wp(X)$ où $(X, \Omega X)$ est un espace topologique, on a

$$(\wp(X))^{\overline{(-)}} = \{F \in \wp(X) \mid F \text{ fermé}\}.$$

Dans ce treillis complet :

$$\bigwedge \mathcal{F} = \bigcap \mathcal{F} \quad \text{et} \quad \bigvee \mathcal{F} = \overline{\bigcup \mathcal{F}},$$

où \mathcal{F} est un ensemble de fermés.

4 Connexion de Galois.

Définition 7. Considérons deux posets (A, \leq_A) et (B, \leq_B) . Une *connexion de Galois* $g \dashv f : A \rightarrow B$ est une paire (f, g) de

fonctions :

$$f : B \rightarrow A \quad \text{et} \quad g : A \rightarrow B$$

telle que

$$g(a) \leq_B b \iff a \leq_A f(b).$$

Exemple 7. Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. On possède deux « lifts » de f sur les powersets :

- ▷ le lift covariant $f_! : \begin{array}{ccc} \wp(X) & \longrightarrow & \wp(Y) \\ A & \longmapsto & \{f(a) \mid a \in A\} \end{array}$;
- ▷ le lift contravariant $f^\bullet : \begin{array}{ccc} \wp(Y) & \longrightarrow & \wp(X) \\ B & \longmapsto & \{x \in X \mid f(x) \in B\} \end{array}$.¹

On a que $f_! \dashv f^\bullet$. En effet, pour tout $A \in \wp(X)$ et $B \in \wp(Y)$,

$$\begin{aligned} f_!(A) \subseteq B &\iff \forall x \in X, (x \in A \implies f(x) \in B) \\ &\iff A \subseteq f^\bullet(B). \end{aligned}$$

Exemple 8. Soit Σ un alphabet. On a, d'une part,

$$\begin{aligned} \text{Pref} : \wp(\Sigma^\omega) &\longrightarrow \wp(\Sigma^*) \\ A &\longmapsto \underbrace{\{\hat{\sigma} \in \Sigma^* \mid \exists \sigma \in A, \hat{\sigma} \subseteq \sigma\}}_{\bigcup_{\sigma \in A} \text{Pref}(\sigma)}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \text{cl} : \wp(\Sigma^*) &\longrightarrow \wp(\Sigma^\omega) \\ W &\longmapsto \{\sigma \in \Sigma^\omega \mid \text{Pref}(\sigma) \subseteq W\}. \end{aligned}$$

Attention, ce n'est pas le cl vu en TD. On a que

$$\text{Pref}(-) \dashv \text{cl}(-).$$

¹On note habituellement f^* et non f^\bullet , mais vu qu'on utilise souvent « * » dans le cours, on change de notation.

Lemme 2. ▷ Si $g \dashv f$ et $g' \dashv f$ alors $g = g'$.

▷ Si $g \dashv f$ et $g \dashv f'$ alors $f = f'$.

▷ Si $g \dashv f$ alors g et f sont monotones.

Preuve. Vu en TD. □

Dans $g \dashv f$, on dit que

▷ g est un *adjoint à gauche* de f ;

▷ f est un *adjoint à droite* de g .

Lemme 3. Si $g \dashv f : (A, \leq_A) \rightarrow (B, \leq_B)$ alors

$$f \circ g : A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} A$$

est un opérateur de clôture sur (A, \leq_A) .²

Preuve. Vu en TD. □

Exemple 9. Pour $\text{Pref}(-) \dashv \text{cl}(-) : \wp(\Sigma^\omega) \rightarrow \wp(\Sigma^*)$, le lemme précédent nous donne l'opérateur de clôture

$$\text{cl} \circ \text{Pref} : \wp(\Sigma^\omega) \longrightarrow \wp(\Sigma^\omega)$$

$$A \longmapsto \{\sigma \in \Sigma^\omega \mid \text{Pref}(\sigma) \subseteq \text{Pref}(A)\}$$

(c'est le $\text{cl}(-)$ vu en TD) est la clôture topologique pour $(\Sigma^\omega, \Omega\Sigma^\omega)$.

Remarque 2. En particulier, $A \subseteq \Sigma^\omega$ est un fermé si et seulement s'il existe un arbre $T \subseteq \Sigma^*$ tel que

$$A = \{\pi \in \Sigma^\omega \mid \pi \text{ chemin infini dans } T\}.$$

On a que $\text{cl} \circ \text{Pref}(A)$ qui est un arbre sur Σ .

²Attention à ne pas se tromper sur le sens de la composition !

Corollaire 1. \triangleright Une propriété $P \subseteq (2^{\text{AP}})^\omega$ est de sûreté si et seulement si on a $P = \text{cl}(\text{Pref}(P))$.

\triangleright Une propriété $P \subseteq (2^{\text{AP}})^\omega$ est de vivacité si et seulement si on a $(2^{\text{AP}})^\omega = \text{cl}(\text{Pref}(P))$.

Preuve. (Déjà) vu en TD. Ceci correspond exactement au fait que

- $\triangleright P$ est de sûreté ssi P est fermé dans $(\Sigma^\omega, \Omega\Sigma^\omega)$;
- $\triangleright P$ est de vivacité ssi P est dense dans $(\Sigma^\omega, \Omega\Sigma^\omega)$;
- $\triangleright \text{cl} \circ \text{Pref}$ est exactement $\overline{(-)}$ dans $(\Sigma^\omega, \Omega\Sigma^\omega)$.

□

Proposition 1. Une propriété $P \subseteq (2^{\text{AP}})^\omega$ est de vivacité si et seulement si $\text{Pref}(P) = (2^{\text{AP}})^*$.

Preuve. En effet, par adjonction (connexion de Galois), on a

$$(2^{\text{AP}})^* = \text{Pref}((2^{\text{AP}})^\omega) \subseteq \text{Pref}(P) \iff (2^{\text{AP}})^\omega \subseteq \text{cl}(\text{Pref}(P)).$$

□

Quelques propriétés des connexions de Galois.

Lemme 4. Soit $g \dashv f : A \rightarrow B$ une connexion de Galois.

1. pour tout $S \subseteq A$ tel que $\bigvee S \in A$ alors $g(\bigvee S) = \bigvee g!(S)$;
2. pour tout $S \subseteq B$ tel que $\bigwedge S \in B$ alors $f(\bigwedge S) = \bigwedge f!(S)$.

Remarque 3. Dans le lemme précédent, il est important de remarquer que l'on a une implication « cachée » : $\bigvee S$ existe dans A implique $\bigvee g!(S)$ existe dans B (et idem pour \bigwedge et f).

Lemme 5. Soient (A, \leq_A) et (B, \leq_B) deux treillis complets.

1. Si $g : A \rightarrow B$ préserve les sups (*i.e.* $g(\bigvee S) = \bigvee g(S)$) alors il existe une fonction $f : B \rightarrow A$ telle que $g \dashv f$. Cette fonction est :

$$f(b) := \bigvee \{a \in A \mid g(a) \leq_B b\}.$$

2. Si $f : B \rightarrow A$ préserve les infs alors il existe une fonction $g : A \rightarrow B$ telle que $g \dashv f$. Cette fonction est :

$$g(a) := \bigwedge \{b \in B \mid a \leq_A f(b)\}.$$

Exemple 10 (Algèbres de Heyting complètes). Soit (L, \leq) un treillis complet. Soit $a \in L$. On a une fonction

$$\begin{aligned} - \wedge a : L &\longrightarrow L \\ b &\longmapsto b \wedge a = \bigwedge \{a, b\}. \end{aligned}$$

On dit que (L, \leq) est une *algèbre de Heyting complète* si, pour tout $a \in A$, la fonction $- \wedge a$ a un adjoint à gauche. Si cet adjoint existe, on le note $a \Rightarrow -$. Ceci nous donne que

$$\forall a, b, c \in L, \quad b \wedge a \leq c \iff b \leq a \Rightarrow c.$$

On a l'équivalence entre :

- ▷ (L, \leq) est une algèbre de Heyting complète ;
- ▷ pour tout $a \in L$, $- \wedge a : L \rightarrow L$ préserve les sups, autrement dit pour tout $S \subseteq L$,

$$\left(\bigvee S \right) \wedge a = \bigvee \{s \wedge a \mid s \in S\}.$$

C'est une sorte de distributivité.

Dans ce cas, on a que

$$a \Rightarrow c = \bigvee \{b \mid b \wedge a \leq c\}.$$