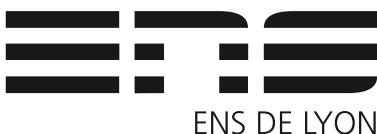


# **Semantics and Verifications**

*Based on the lectures of Colin RIBA  
Notes written by Hugo SALOU*



*November 5, 2025*

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction.</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Transition systems.</b>	<b>6</b>
2.1	Transition systems. . . . .	6
2.2	Program graphs. . . . .	7
2.3	Transition system of a program graph. . . . .	9
<b>3</b>	<b>Linear Time Properties.</b>	<b>12</b>
3.1	Linear-time properties. . . . .	13
3.2	Decomposition of a linear-time property. . . . .	15
3.2.1	Safety properties. . . . .	16
3.2.2	Safety properties and trace equivalences. . . . .	16
3.2.3	Propriétés de vivacité. . . . .	25
<b>4</b>	<b>L'approche topologique.</b>	<b>27</b>
4.1	Théorème de décomposition. . . . .	29
4.2	Bases. . . . .	30
<b>5</b>	<b>Ordres partiels et treillis.</b>	<b>32</b>
5.1	Ordres partiels. . . . .	32
5.2	Treillis complet. . . . .	33
5.3	Opérateur de clôture. . . . .	35
5.4	Connexion de Galois. . . . .	36
<b>6</b>	<b>Propriétés “observables”.</b>	<b>42</b>
6.1	Compacité. . . . .	44
6.2	Espace Hausdorff. . . . .	46

<b>7 Logique temporelle linéaire.</b>	<b>47</b>
7.1 La logique LML. . . . .	47
7.1.1 Équivalences logiques. . . . .	49
7.1.2 <i>Homework</i> : Dualité de Stone. . . . .	50
7.1.3 Extension de LML avec $\square$ et $\Diamond$ . . . . .	51
7.1.4 Théorème de Knaster-Tarski. . . . .	55
7.2 La logique LTL. . . . .	56
7.2.1 Points fixes dans LTL. . . . .	57
7.2.2 Équivalences logiques pour LTL. . . . .	59
<b>8 Expressions <math>\omega</math>-régulières.</b>	<b>61</b>
8.1 Automates de Büchi non-déterministes (NBA). . . . .	62
8.2 Automates de Büchi déterministes (DBA). . . . .	67

# 1 Introduction.

Let us give precisions on the terms in the name of the course, and in the broader space of semantics and verifications.

**Verification.** Formal techniques to ensure the correctness software or hardware of systems.

**Model Checking.** “Automatic” checking of the correctness by means of exhaustive exploration.

**Exemple 1.1.** Consider a program that is 10 lines long, contains 3 booleans variables and 5 integers variables in the range  $\{0, \dots, 9\}$ . The number of states for this program is:

$$10 \times 2^3 \times 10^5 = 8\,000\,000.$$

The real issue with the state exploration problem is the factor  $10^5$ , coming from the use of 5 integers.

**Exemple 1.2.** Consider a server and  $n$  clients. Clients can make requests to the server and the server can answer a client. The specification of this server should include the following:

- ▷ Each client which makes a request is eventually answered.
- ▷ We *abstract* away from precise quantitative constraints.

We will sometimes reason about an infinite amount of executions. For example, if some client makes infinitely-many requests (then it'll have infinitely-many answers). Infinite sequences are represented by  $\omega$ -words, *i.e.* infinite words indexed by  $\mathbb{N}$ . Thus,  $\omega$ -words on some

alphabet  $\Sigma$  are functions  $\mathbb{N} \rightarrow \Sigma$ . We will denote  $\Sigma^\omega$  the set of those infinite words on the alphabet  $\Sigma$ .

If  $|\Sigma| \geq 2$ , then the set  $\Sigma^\omega$  is uncountable.

This course will cover the following:

- ▷ Transition systems;
- ▷ Linear-time properties;
- ▷ Topology;
- ▷ Orders and Lattices;
- ▷ Linear Temporal Logic (LTL);
- ▷ Büchi automata;
- ▷ **Stone duality** (mostly in homework);
- ▷ Bisimilarity/bisimulation;
- ▷ Modal Logic.

Ressources from this course include:

- ▷ the [course notes](#) (available online, non-exhaustive);
- ▷ Baier, C. and Katoen, J.-P., Principles of Model Checking, MIT Press, 2008.

Prerequisites for this course include:

- ▷ First-order logic (*see my [course notes](#) for the “Logique” L3 course, in french*);
- ▷ Finite automata (“FDI” L3 course).

Evaluation for this course will be in two parts: the final exam (50 %) and the homework, in two parts (25 % each).

The tutorials will be done by Lison Blondeau-Patissier.

# 2 Transition systems.

## 2.1 Transition systems.

**Définition 2.1.** A transition system is a tuple

$$TS = (S, \text{Act}, \rightarrow, I, \text{AP}, L)$$

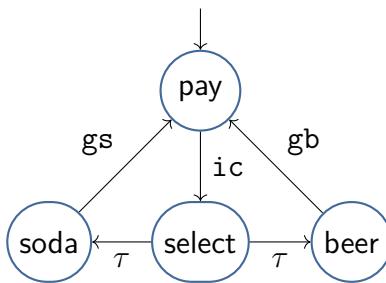
where

- ▷  $S$  is the set of *states*;
- ▷  $\text{Act}$  is the set of *actions*;
- ▷  $\rightarrow \subseteq S \times \text{Act} \times S$  the *transition relation*;
- ▷  $I \subseteq S$  the set of *initial states*;
- ▷  $\text{AP}$  is the set of *atomic propositions*;
- ▷  $L : S \rightarrow \wp(\text{AP}) \cong 2^{\text{AP}}$  is the *state labelling function*.

We will write  $s \xrightarrow{\alpha} s'$  when  $(s, \alpha, s') \in \rightarrow$ .

**Exemple 2.1 (Beverage Vending Machine, BVM).** We can model a beverage vending machine using a diagram like in figure 2.1. Here we have that:

- ▷  $S = \{\text{pay}, \text{select}, \text{soda}, \text{beer}\}$ ,
- ▷  $I = \{\text{pay}\}$ ,
- ▷  $\text{Act} = \{\text{ic}, \tau, \text{gb}, \text{gs}\}$ .<sup>1</sup>



**Figure 2.1** | Transition system for the BVM

We can define the labels:

$L(\text{pay}) = \emptyset$     $L(\text{soda}) = L(\text{beer}) = \{\text{paid}, \text{drink}\}$     $L(\text{select}) = \{\text{paid}\}$ ,  
 with  $\text{AP} = \{\text{paid}, \text{drink}\}$ .

## 2.2 Program graphs.

The goal is to represent the evaluation of a program.

**Définition 2.2 (Typed variables).** ▷ A set  $\text{Var}$  of *variables*.

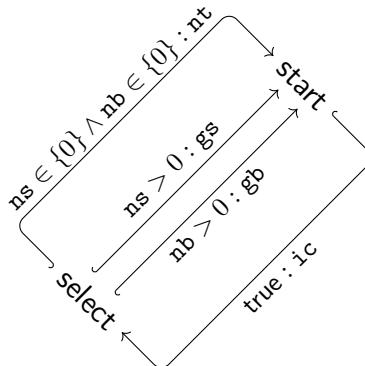
- ▷ For each variable  $x \in \text{Var}$ , consider a set  $\text{Dom}(x)$ .
- ▷ Given  $TV = (\text{Var}, (\text{Dom}(x))_{x \in \text{Var}})$ , we define

$$\text{Eval}(TV) = \prod_{x \in \text{Var}} \text{Dom}(x),$$

the set of valuations of the form  $\eta : x \in \text{Var} \mapsto \eta(x) \in \text{Dom}(x)$  (in the sense of a dependent function type).

---

<sup>1</sup>The meaning of the actions are the following: **ic** means *insert coin*, **gb** means *get beer* and **gs** for *get soda*.



**Figure 2.2 |** BVM as a program graph

**Définition 2.3 (Program graph).** A *program graph* is a tuple

$$PG = (\text{Loc}, \text{Act}, \text{Effect}, \hookrightarrow, \text{Loc}_0, g_0),$$

where

- ▷ Loc is the set of *locations* (lines of codes);
- ▷ Act is the set of *actions*;
- ▷ Effect : Act × Eval(TV) → Eval(TV);
- ▷  $\hookrightarrow \subseteq \text{Loc} \times \text{Conditions} \times \text{Act} \times \text{Loc}$  where conditions are propositional formula built from atoms of the forms “ $x \in D$ ” for some variable  $x$  and some set  $D \subseteq \text{Dom}(x)$ ;
- ▷  $\text{Loc}_0 \subseteq \text{Loc}$  the set of *initial locations*;
- ▷  $g_0$  is the *initial condition*.

We will write  $\ell \xrightarrow{g:\alpha} \ell'$  for  $(\ell, g, \alpha, \ell') \in \hookrightarrow$ .

**Exemple 2.2 (BVM as a program graph).** In figure 2.2, we use

- ▷  $\text{Loc} = \{\text{start}, \text{select}\};$

- ▷  $\text{Var} = \{\text{ns}, \text{nb}\};$
- ▷  $\text{Act} = \{\text{ic}, \text{nt}, \text{gs}, \text{gb}, \text{refill}\};$
- ▷  $\text{Loc}_0 = \{\text{start}\};$
- ▷  $g_0 = \text{ns} \in \{\text{max}\} \wedge \text{nb} \in \{\text{max}\}$
- ▷

$\text{Effect} : \text{Act} \times \text{Eval}(TV) \longrightarrow \text{Eval}(TV)$

$$\begin{aligned} (\text{refill}, \eta) &\longmapsto [\text{ns} \mapsto \text{max}, \text{nb} \mapsto \text{max}] \\ (\text{gs}, \eta) &\longmapsto \eta[\text{ns} \mapsto \eta(\text{ns}) - 1] \\ (\text{gb}, \eta) &\longmapsto \eta[\text{nb} \mapsto \eta(\text{nb}) - 1] \end{aligned}$$

## 2.3 Transition system of a program graph.

**Définition 2.4.** Given  $TV$  and  $PG$  a program graph, we define

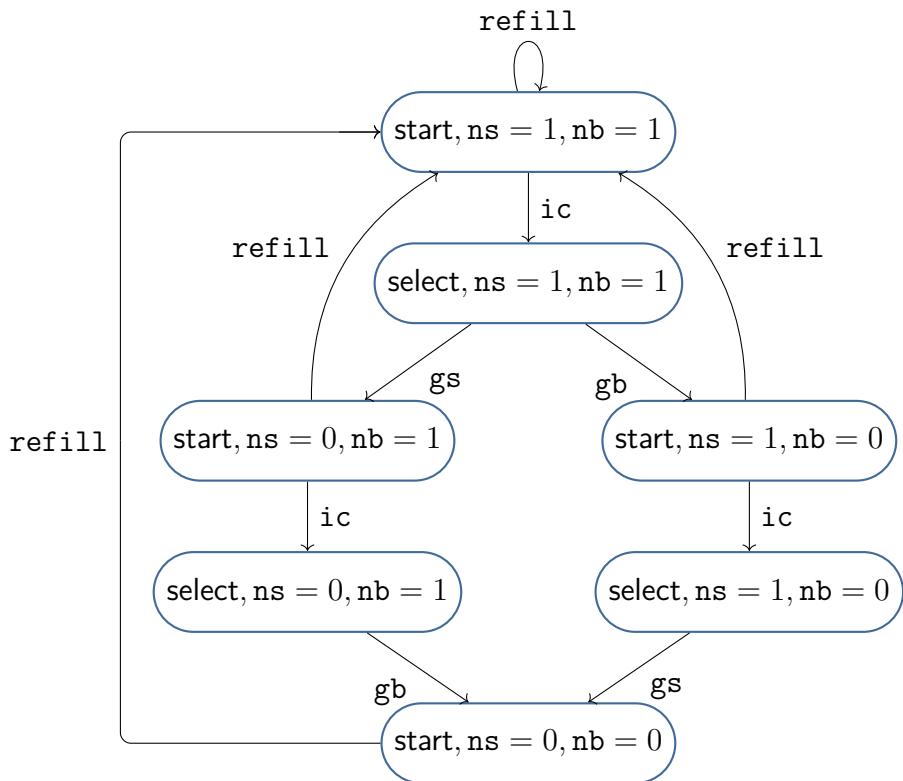
$$TS(PG) := (S, \text{Act}, \rightarrow, I, \text{AP}, L)$$

where

- ▷  $S = \text{Loc} \times \text{Eval}(TV);$
- ▷  $\text{AP} = \text{Loc} \cup \text{Conditions} ;$
- ▷  $I = \{(\ell_0, \eta) \mid \ell_0 \in \text{Loc}_0, \eta \models g_0\};$
- ▷  $\rightarrow$  is defined by:

$$\frac{\ell \xrightarrow{g:\alpha} \ell' \quad \eta \models g}{(\ell, \eta) \xrightarrow{\alpha} (\ell', \text{Effect}(\alpha, \eta))),}$$

- ▷ and  $L(\ell, \eta) = \{\ell\} \cup \{g \mid \eta \models g\}.$



**Figure 2.3 |** Transition system of the BVM program graph

**Exemple 2.3.** The BVM program graph example seen in the previous example can be transformed as a transition system thanks to the previous definition; it is shown in figure 2.3. To simplify, we assume  $\text{max} = 1$ .

# 3 Linear Time Properties.

**Definition 3.1.** Let  $\Sigma$  be an alphabet (*i.e.* a set).

1. A  $\omega$ -word on  $\Sigma$  is a function  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma$ . We denote  $\Sigma^\omega$  for the set of  $\omega$ -words on  $\Sigma$ .
2. We define  $\Sigma^\infty := \Sigma^\omega \cup \Sigma^*$  the set of finite or infinite words.
3. Given  $\hat{\sigma} \in \Sigma^*$  and  $\sigma \in \Sigma^\infty$ , we say that  $\hat{\sigma}$  is a prefix of  $\sigma$ , written  $\hat{\sigma} \subseteq \sigma$ , whenever

$$\forall i < \text{length}(\hat{\sigma}), \quad \hat{\sigma}(i) = \sigma(i).$$

4. Given  $\sigma \in \Sigma^\infty$ , we define

$$\text{Pref}(\sigma) := \{ \hat{\sigma} \in \Sigma^* \mid \hat{\sigma} \subseteq \sigma \},$$

which we extend to sets of words: for  $E \subseteq \Sigma^\infty$ ,

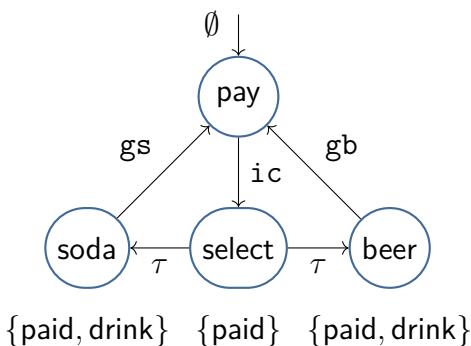
$$\text{Pref}(E) := \bigcup_{\sigma \in E} \text{Pref}(\sigma).$$

**Remark 3.1.**

- ▷ The prefix order  $\subseteq$  on  $\Sigma^*$  is generally<sup>1</sup> a partial order: there are  $u, v \in \Sigma^*$  such that  $u \not\subseteq v$  and  $v \not\subseteq u$ .
- ▷ Given  $\sigma \in \Sigma^\infty$ , the prefix order  $\subseteq$  on  $\text{Prefix}(\sigma)$  is a linear (or total order).

---

<sup>1</sup>As long as the alphabet has at least two letters.



**Figure 3.1** | Transition system for the BVM with labels

### 3.1 Linear-time properties.

Let AP be a set of *atomic propositions*.

**Definition 3.2.** A *linear-time property* (sometimes written LT property) on AP is a set  $P \subseteq (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$ .

The idea is that a linear-time property  $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{2}^{\text{AP}}$  specifies, for each  $i \in \mathbb{N}$ , a set  $\sigma(i) \subseteq \text{AP}$  of all atomic propositions assumed at time  $i$ .

**Example 3.1.** For the Beverage vending machine (shown in figure 3.1), we can have the following linear-time properties:

- ▷  $\{\sigma \in (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega \mid \forall n \in \mathbb{N}, \text{drink} \in \sigma(n) \implies \exists k < n, \text{paid} \in \sigma(k)\}$ ,
- ▷  $\{\sigma \in (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega \mid \forall n \in \mathbb{N}, \#\{k \leq n \mid \text{drink} \in \sigma(k)\} \leq \#\{k \leq n \mid \text{paid} \in \sigma(k)\}\}$ ,
- ▷  $\{\sigma \in (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega \mid (\exists^\infty t, \text{paid} \in \sigma(t)) \implies (\exists^\infty t, \text{drink} \in \sigma(t))\}$ ,
- ▷  $\{\sigma \in (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega \mid (\forall^\infty t, \text{paid} \notin \sigma(t)) \implies (\forall^\infty t, \text{drink} \notin \sigma(t))\}$ .

**Remark 3.2.** The notations  $\exists^\infty$  and  $\forall^\infty$  are “infinitely many” and “ultimately all” quantifiers:

- ▷  $\exists^\infty t, P(t)$  is, by definition,  $\forall N \in \mathbb{N}, \exists t \geq N, P(t)$ ;

- ▷  $\forall^\infty t, P(t)$  is, by definition,  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall t \geq N, P(t)$ .

**Definition 3.3.** A (finite or infinite) *path* in  $TS$  is a finite or infinite sequence  $\pi = (s_i)_i \in S^\infty$  which respects transitions: for all  $i$ , we have  $s_i \xrightarrow{\mathbf{a}} s_{i+1}$  for some  $\mathbf{a} \in \text{Act}$ .

A path  $\pi = (s_i)_i$  is *initial* if  $s_0 \in I$ .

**Definition 3.4 (Trace).** 1. The *trace* of a path  $\pi = (s_i)_i$  is the (finite or infinite) word

$$L(\pi) := (L(s_i))_i \in L^\infty.$$

2. We define

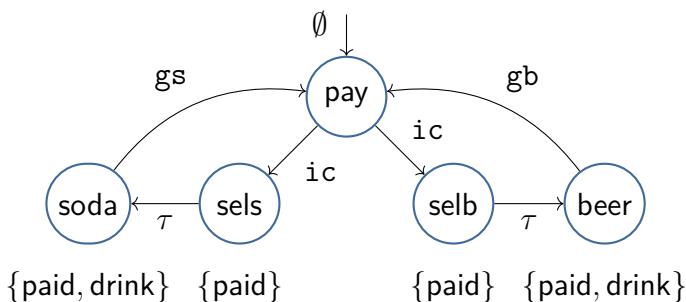
- ▷  $\text{Tr}(TS) := \{L(\pi) \mid \pi \text{ is a finite or infinite path in } TS\};$
- ▷  $\text{Tr}^\omega(TS) := \{L(\pi) \mid \pi \text{ is a infinite path in } TS\};$
- ▷  $\text{Tr}_{\text{fin}}(TS) := \{L(\pi) \mid \pi \text{ is a finite path in } TS\}.$

**Definition 3.5 (Satisfaction of a LT property).** We say that a transition system  $TS$  over AP *satisfies* a LT property  $P$  on AP, written  $TS \approx P$ , when  $\text{Tr}^\omega(TS) \subseteq P$ .

**Example 3.2.** The BVM satisfies all the properties from example 3.1.

**Example 3.3.** We use a different transition system  $BVM'$  to model the beverage vending machine, as seen in figure 3.2. The two transition systems are equivalent in the sense that:

$$\text{Tr}^\omega(BVM') = \text{Tr}^\omega(BVM),$$



**Figure 3.2 |** Transition system for the alternative BVM

so, for any LT Property  $P \subseteq (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$ ,

$$\text{BVM}' \approx P \quad \text{iff} \quad \text{BVM} \approx P.$$

We have a very simple result, which we will (probably) prove in the tutorials.

**Proposition 3.1.** Given two transition systems  $TS_1$  and  $TS_2$  over AP, then the following are equivalent:

- ▷  $\text{Tr}^\omega(TS_1) \subseteq \text{Tr}^\omega(TS_2)$ ,
- ▷  $\forall P \subseteq (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega, TS_2 \approx P \implies TS_1 \approx P$ .

## 3.2 Decomposition of a linear-time property.

In this section, we introduce the notions of a “safety property” and a “liveness property” such that, for any LT property  $P$ ,

1. there exists a safety property  $P_{\text{safe}}$  and a liveness property  $P_{\text{liveness}}$  such that

$$P = P_{\text{safe}} \cap P_{\text{liveness}};$$

2.  $P$  is a liveness and a safety property if and only if  $P = (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$ .

### 3.2.1 Safety properties.

The idea of a safety property is to ensure that “nothing bad is going to happen.”

**Definition 3.6.** We say that  $P \subseteq (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$  is a *safety property* if there exists a set  $P_{\text{bad}} \subseteq (\mathbf{2}^{\text{AP}})^*$  such that

$$\sigma \in P \iff \text{Pref}(\sigma) \cap P_{\text{bad}} = \emptyset.$$

**Example 3.4.** Considering the examples of LT-properties from example 3.1,

- ▷ Property (1) is a safety property: we can consider

$$P_{\text{bad}}^{(1)} = \{\hat{\sigma} \in \Sigma^* \mid \text{drink} \in \hat{\sigma}(n) \wedge \forall i < n, \text{paid} \notin \hat{\sigma}(i)\},$$

where  $n$  is the length of  $\hat{\sigma}$ .

- ▷ Property (2) is a safety property: we can consider

$$P_{\text{bad}}^{(2)} = \{\hat{\sigma} \in \Sigma^* \mid \#\{t \mid \text{paid} \in \hat{\sigma}(t)\} < \#\{t \mid \text{drink} \in \hat{\sigma}(t)\}\}.$$

- ▷ Properties (3) and (4) are not safety properties: for any finite word  $\hat{\sigma} \in (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$ , there exists  $\sigma \in (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$  such that  $\hat{\sigma} \subseteq \sigma$  and  $\sigma \in P$ .

**Example 3.5 (Traffic Light).** We consider a traffic light as a transition system over  $\text{AP} = \{\text{G}, \text{Y}, \text{R}\}$ , as shown in figure 3.3. An example of a safety property is

$$\forall n, \text{R} \in \sigma(n) \implies n > 0 \text{ and } \text{Y} \in \sigma(n-1).$$

### 3.2.2 Safety properties and trace equivalences.

**Example 3.6.** Consider the transition system shown in figure 3.4, a safety property  $P$  with  $P_{\text{bad}} = \{\text{a}\}^*\{\text{b}\}$  is satisfied:  $TS \approx P$ . This is true since  $\text{Tr}^\omega(TS) = \{\text{a}\}^\omega$ . However, when we consider *finite* (instead of infinites) traces, we have that  $\text{Tr}_{\text{fin}}(TS) \cap P_{\text{bad}} \neq \emptyset$ .

**Definition 3.7 (Terminal state).** A state  $s \in S$  of a transition system  $TS$  is *terminal* if

$$\forall s' \in S, \quad \forall \alpha \in \text{Act}, \quad s \xrightarrow{\alpha} s'.$$

**Proposition 3.2.** Let  $TS$  be a transition system without terminal states, and a safety property  $P$  with  $P_{\text{bad}}$  the set of “bad behaviours”. Then,

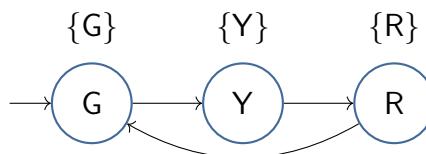
$$TS \approx P \quad \text{if and only if} \quad \text{Tr}_{\text{fin}}(TS) \cap P_{\text{bad}} = \emptyset.$$

**Proof.** See the course notes in §3.2.3. □

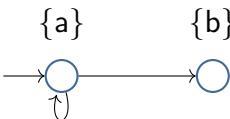
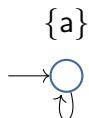
**Lemma 3.1.** Let  $TS$  and  $TS'$  be two transition systems over AP without terminal states. Then, the following are equivalent:

- ▷  $\text{Tr}_{\text{fin}}(TS) \subseteq \text{Tr}_{\text{fin}}(TS');$
- ▷ for any safety property  $P$ ,  $TS' \approx P$  implies  $TS \approx P$ .

**Proof.** ▷ “ $\implies$ ”. This is true by the last proposition.



**Figure 3.3** | Transition system for the traffic light

**Figure 3.4** | Another transition system**Figure 3.5** | One-state transition system

▷ “ $\Leftarrow$ ”. Let  $P$  be a safety property with

$$P_{\text{bad}} = (\mathbf{2}^{\text{AP}})^* \setminus \text{Tr}_{\text{fin}}(TS').$$

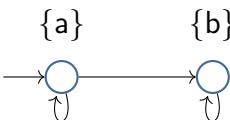
So,  $TS' \not\models P$  hence  $TS \not\models P$  by assumption. Therefore,  $\text{Tr}_{\text{fin}}(TS) \subseteq \text{Tr}_{\text{fin}}(TS')$  by the last proposition.

□

**Example 3.7.** Consider the transition system  $TS$  from figure 3.4 (example 3.6, which has a terminal state), and the transition system  $TS'$  from figure 3.5. Safety properties satisfied in  $TS'$  are satisfied in  $TS$ . However,  $\text{Tr}_{\text{fin}}(TS) \not\subseteq \text{Tr}_{\text{fin}}(TS')$  (even though the sets of infinite traces are equal).

**Example 3.8.** Consider the transition system  $TS'$  shown in figure 3.7 (page 20) and  $TS$  the transition system shown in figure 3.6. The transition system  $TS'$  has terminal states and  $TS$  does not. However, we have that

$$\text{Tr}_{\text{fin}}(TS) = \text{Tr}_{\text{fin}}(TS').$$



**Figure 3.6 |** A transition system with no terminal state

We also have that

$$\text{Tr}^\omega(TS') = \{a\}^\omega \quad \text{and} \quad \text{Tr}^\omega(TS) = \{a\}^\omega \cup \{a\}^+ \cdot \{b\}^\omega.$$

Thus giving a counter example to the previous lemma if one of the transition system has terminal states: consider a linear-time property  $P$  with the set of “bad behaviors” as  $P_{\text{bad}} = \{a\}^+ \cdot \{b\}$ , then  $TS' \approx P$  but  $TS \not\approx P$ .

The rest of the course will be done in french.

L’objectif est de trouver des conditions sur  $TS$  et  $TS'$  telles que l’on ait l’équivalence entre :

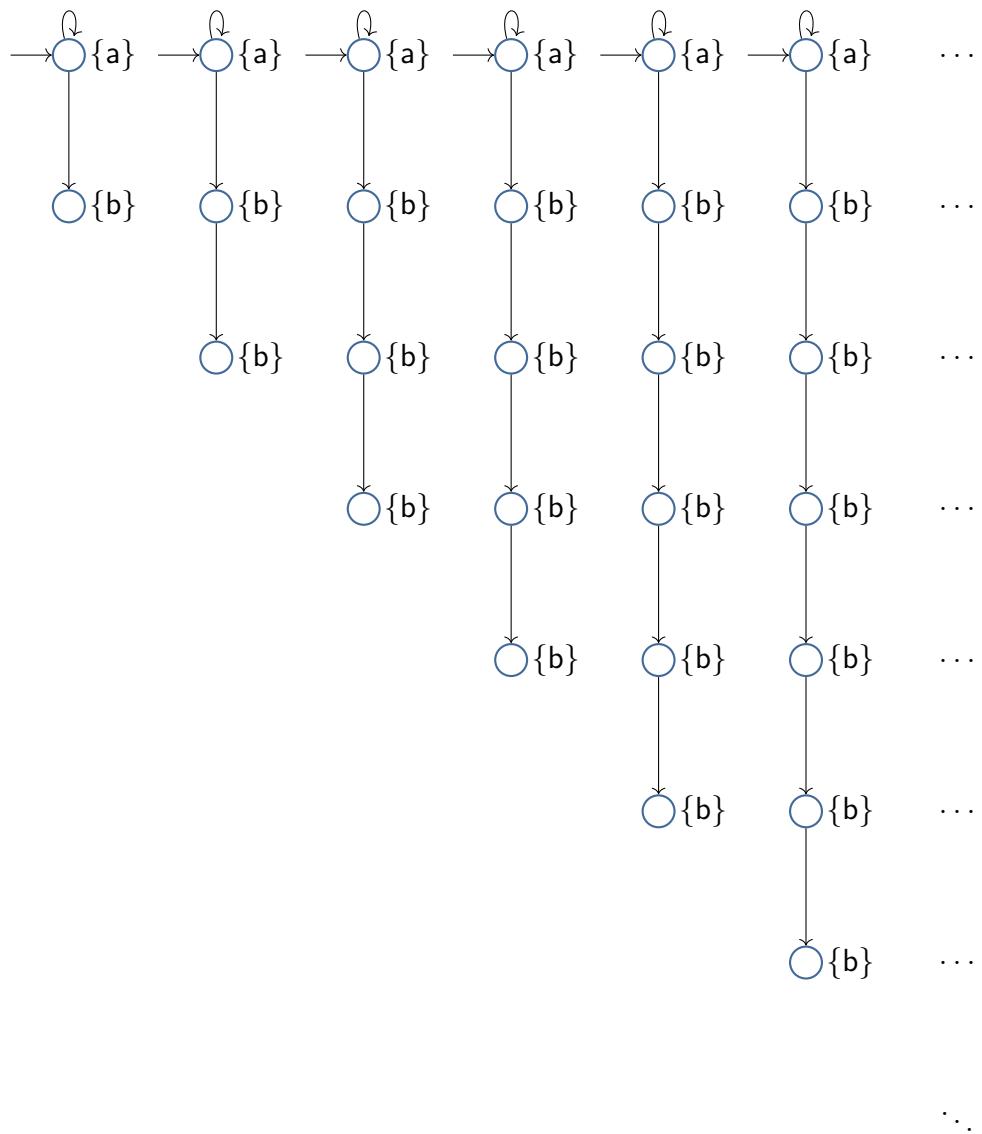
- ▷  $\text{Tr}^\omega(TS) \subseteq \text{Tr}^\omega(TS')$  ;
- ▷ pour toute propriété de sûreté  $P$ ,  $TS' \approx P$  implique  $TS \approx P$ .

On commence par trouver des conditions sur  $TS$  et  $TS'$  telles que l’on ait l’équivalence :

$$\text{Tr}^\omega(TS) \subseteq \text{Tr}^\omega(TS') \iff \text{Tr}_{\text{fin}}(TS) \subseteq \text{Tr}_{\text{fin}}(TS').$$

Pour que l’on ait «  $\implies$  », il est nécessaire que  $TS$  soit sans état terminal. En effet, si  $TS$  est sans état terminal, alors pour tout  $\hat{\sigma} \in \text{Tr}_{\text{fin}}(TS)$ , il existe  $\sigma \in \text{Tr}^\omega(TS)$  tel que  $\hat{\sigma} \subseteq \sigma$ .

Dans l’autre sens, supposons que  $\text{Tr}_{\text{fin}}(TS) \subseteq \text{Tr}_{\text{fin}}(TS')$ . Soit  $\sigma \in \text{Tr}^\omega(TS)$ . Alors, pour tout  $\hat{\sigma} \subseteq \sigma$ , on a  $\hat{\sigma} \in \text{Tr}_{\text{fin}}(TS) \subseteq \text{Tr}_{\text{fin}}(TS')$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a qu’il existe un chemin  $\pi^n := (\pi_i^n)_{i \leq n}$  initial dans  $TS'$  tel que  $L(\pi^n) = \sigma(0) \dots \sigma(n)$ .



**Figure 3.7** | An infinite transition system

**Exemple 3.1.** On considère  $TS$  comme celui représenté en figure 3.6 et  $TS'$  comme représenté en figure 3.8. On a que

$$\text{Tr}_{\text{fin}}(TS) = \text{Tr}_{\text{fin}}(TS') = \{a\}^* \cup \{a\}^+ \{b\}^*,$$

et

$$\text{Tr}^\omega(TS) = \{a\}^\omega \cup \{a\}^+ \{b\}^\omega \neq \{a\}^+ \{b\}^\omega = \text{Tr}^\omega(TS').$$

Dans notre cas, on a  $\{a\}^n \subseteq \text{Tr}_{\text{fin}}(TS')$  mais on n'a pas  $\{a\}^\omega \subseteq \text{Tr}^\omega(TS')$ .

**Définition 3.1 (Branchement fini).** Un système de transition  $TS = (S, \text{Act}, \rightarrow, I, \text{AP}, L)$  est à *branchement fini* si

1.  $I$  est fini ;
2. pour tout  $s \in S$ , l'ensemble  $\{s' \mid \exists \alpha \in \text{Act}, s \xrightarrow{\alpha} s'\}$  est fini.

## Interlude. Le lemme de König.

**Définition 3.2.** Soit  $A$  un ensemble.

1. Un *arbre* sur  $A$  est un ensemble  $T \subseteq A^*$  clos par préfixe, c'est-à-dire que si  $u \in T$  alors pour tout préfixe  $v \subseteq u$ , on a  $v \in T$ .
2. Un chemin infini dans un arbre  $T \subseteq A^*$  est un mot  $\pi \in A^\omega$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\pi(0) \dots \pi(n) \in T$ .
3. Un arbre est à *branchement fini* si, pour tout  $u \in T$ , l'ensemble  $\{ua \mid a \in A \text{ et } ua \in T\}$  est fini.

**Remarque 3.1.** Si  $A$  est fini, alors tout arbre sur  $A$  est à branchement fini.

Aussi, si  $T$  est fini alors  $T$  n'a pas de chemin infini.

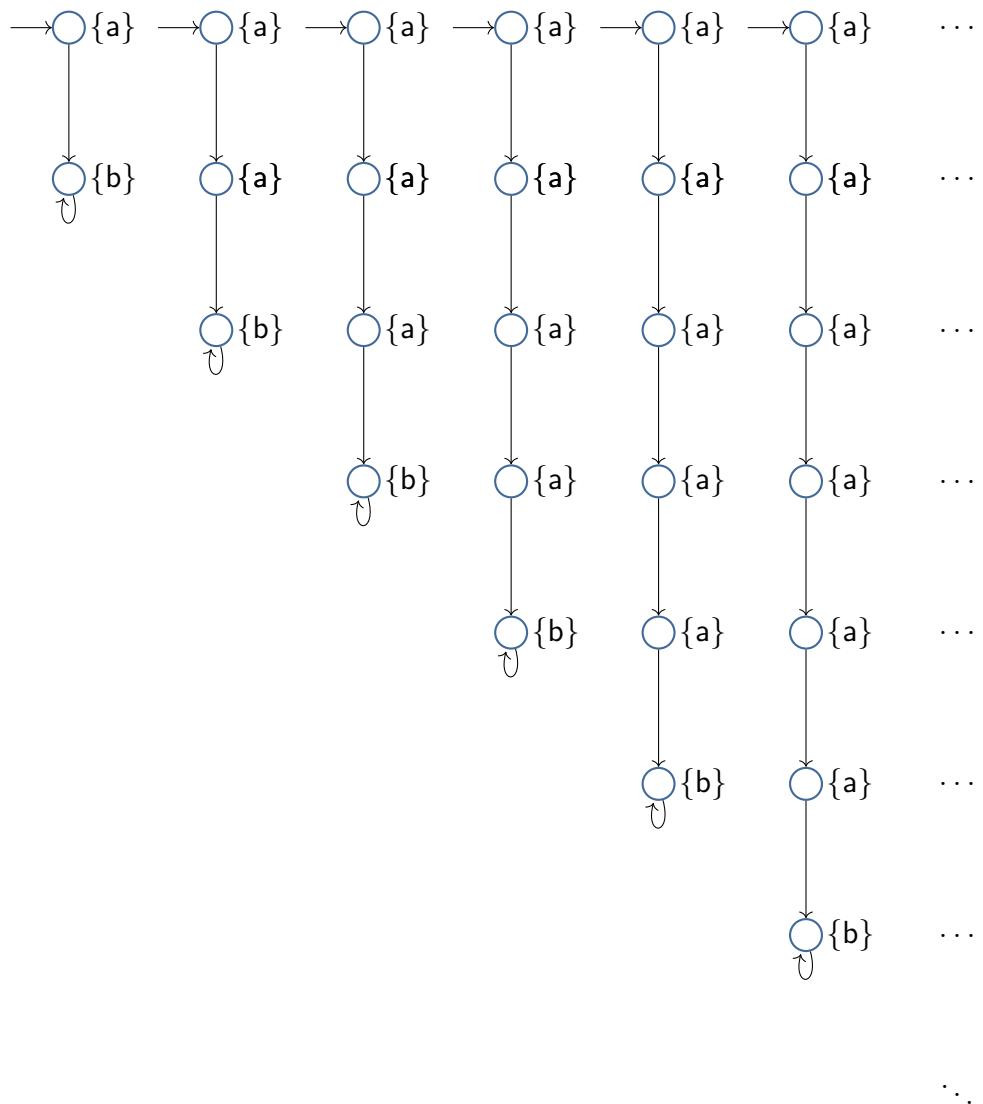
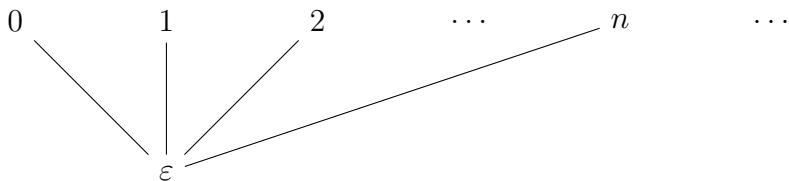


Fig. 3.8 | Un système de transition infini

**Fig. 3.9 | Arbre  $\{\varepsilon\} \cup \mathbb{N}$  sur  $\mathbb{N}$** 

**Exemple 3.2.** Avec  $T \subseteq \mathbb{N}^*$  défini par  $T = \{\varepsilon\} \cup \mathbb{N}$  alors  $T$  est sans chemin infini et à branchement infini (figure 3.9).

**Lemme 3.1 (Lemme de König).** Si  $T$  est un arbre infini et à branchement fini alors  $T$  a un chemin infini.

**Preuve.** Soit  $T \subseteq A^*$  un arbre infini à branchement fini. Si  $u \in T$  on note  $T \upharpoonright u$  l'arbre

$$\{v \in T \mid u \subseteq v \text{ ou } v \subseteq u\}.$$

On remarque que  $T = T \upharpoonright \varepsilon$  et  $T \upharpoonright u = \bigcup_{a \in A \text{ et } ua \in T} T \upharpoonright ua$ . Alors, comme que  $T$  est infini et  $T = \bigcup_{a \in A \cap T} T \upharpoonright a$ , par le lemme des tiroirs infinis, il existe  $a \in A \cap T$  tel que  $T \upharpoonright a$  est infini. On a donc

$$T \upharpoonright a = \bigcup_{b \in A \text{ et } ab \in T} T \upharpoonright ab.$$

Par induction sur  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $a_0, \dots, a_n \in A$  (en étendant) tel que  $a_0 \dots a_n \in T$  et  $T \upharpoonright a_0 \dots a_n$  est infini. On obtient donc  $\pi = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  qui est un chemin infini dans  $T$ .  $\square$

**Remarque 3.2 (Attention!).** On doit manipuler un arbre !

En considérant  $A = \{0, 1\}$  avec  $T_0 = \{0\}^* \{1\} \subseteq A^*$ , on a que :

- ▷  $T_0$  est infini ;

- ▷  $T_0$  est à branchement fini ;
- ▷ MAIS, ce n'est pas un arbre.

On considère donc  $T = \text{Pref}(T_0)$  qui est un arbre infini et à branchement fini. Alors, par le lemme de König, on a que  $T$  a un chemin infini  $\pi \in \{0\}^\omega$  (il n'y a qu'un seul choix possible). Et, on a  $\text{Pref}(\pi) \subseteq T$  sauf que  $\text{Pref}(\pi) \cap T_0 = \emptyset$ .

On peut maintenant revenir à notre objectif de caractériser les propriétés de sûreté par les traces.

**Proposition 3.1.** Si  $TS$  est sans état terminal et  $TS'$  est à branchement fini, on a que

$$\text{Tr}^\omega(TS) \subseteq \text{Tr}^\omega(TS') \iff \text{Tr}_{\text{fin}}(TS) \subseteq \text{Tr}_{\text{fin}}(TS').$$

**Preuve.** ▷ «  $\implies$  ». On l'a déjà vu précédemment.

▷ «  $\iff$  ». Supposons  $\text{Tr}_{\text{fin}}(TS) \subseteq \text{Tr}_{\text{fin}}(TS')$ . Considérons un mot  $\sigma \in \text{Tr}^\omega(TS)$ . Soit  $T' \subseteq (S')^*$  (où  $S'$  est l'ensemble des états de  $TS'$ ) défini par

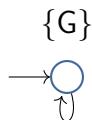
$$T' = \{u \in (S')^* \mid u \text{ chemin initial fini de } TS' \text{ et } L'(u) \subseteq \sigma\}.$$

On a que  $T'$  est un arbre, qui est infini (car  $\text{Tr}_{\text{fin}}(TS) \subseteq \text{Tr}_{\text{fin}}(TS')$ ). Aussi, on a que  $T'$  est à branchement fini car  $TS'$  est à branchement fini. Par le lemme de König, on a que  $T'$  a un chemin infini  $\pi$ . On a aussi  $L'(\pi) = \sigma$  et donc  $\sigma \in \text{Tr}^\omega(TS')$ .

□

**Corollaire 3.1.** Si  $TS$  et  $TS'$  sont deux systèmes de transitions sans états terminaux et à branchement fini alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- ▷  $\text{Tr}^\omega(TS) = \text{Tr}^\omega(TS')$  ;



**Fig. 3.10** | Un feu tricolore un peu dangereux

- ▷ pour toute propriété de sûreté  $P$ ,  $TS' \approx P$  ssi  $TS \approx P$ .  $\square$

### 3.2.3 Propriétés de vivacité.

L'idée est de s'assurer que « quelque chose de bon peut toujours arriver ».

**Exemple 3.3.** Avec  $AP = \{G, Y, R\}$  et  $TS$  défini comme en figure 3.10. On a que  $TS$  satisfait « si  $R$  à un instant donné alors  $Y$  à l'instant précédent » (on note cette propriété  $P_{safe}$ ). Cependant  $TS$  ne satisfait pas  $P_{live} := \{\sigma \mid \exists^\infty t, R \in \sigma(t)\}$ .

**Définition 3.3 (Vivacité).** On dit que  $P \subseteq (\mathbf{2}^{AP})^\omega$  est une propriété de *vivacité* si, pour tout mot fini  $\hat{\sigma} \in (\mathbf{2}^{AP})^*$ , il existe  $\sigma \in (\mathbf{2}^{AP})^\omega$  tel que  $\hat{\sigma} \subseteq \sigma$  et  $\sigma \in P$ .

**Exemple 3.4.** Avec l'exemple de la BVM, les propriétés (3) et (4) sont des propriétés de vivacité.

Dans la suite, on montrera le théorème de décomposition suivant en passant au point de vue topologique.

**Théorème 3.1.** Pour toute propriété  $P \subseteq (\mathbf{2}^{AP})^\omega$ , il existe

- ▷  $P_{safe}$  une propriété de sûreté,
- ▷  $P_{live}$  une propriété de vivacité,

tels que  $P = P_{safe} \cap P_{live}$ .

**Proposition 3.2.** La propriété  $\text{True} := (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega \subseteq (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$  est l’unique LT-property sur AP qui est une propriété de sûreté et de vivacité.

**Preuve.** ▷ On a que  $\text{True}$  est une propriété de sûreté en posant l’ensemble des « mauvais comportements » comme  $\text{True}_{\text{bad}} := \emptyset$ .

- ▷ On a que  $\text{True}$  est une propriété de vivacité car, pour tout mot fini  $\hat{\sigma} \in (\mathbf{2}^{\text{AP}})^*$ , il existe  $\sigma \in (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$  tel que  $\hat{\sigma} \subseteq \sigma$ .
- ▷ **Unicité.** Soit  $P \subseteq (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$  de sûreté pour  $P_{\text{bad}} \subseteq (\mathbf{2}^{\text{AP}})^*$ . Si  $P$  est une propriété de vivacité alors pour tout  $\hat{\sigma} \in P_{\text{bad}}$  alors il existe  $\sigma \in P$  tel que  $\hat{\sigma} \subseteq \sigma$ . Donc, on a que  $P_{\text{bad}} = \emptyset$  et donc  $P = \text{True}$ .

□

# 4 L'approche topologique.

**Définition 4.1.** Un *espace topologique* est une paire  $(X, \Omega X)$  où  $X$  est un ensemble et  $\Omega X \subseteq \wp(X)$  que l'on appelle *ensemble des ouverts* telle que

- ▷ si  $\mathcal{S} \subseteq_{\text{fin}} \Omega X$  alors  $\bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{V \in \mathcal{S}} V \in \Omega X$  ;
- ▷ si  $\mathcal{S} \subseteq \Omega X$  alors  $\bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{V \in \mathcal{S}} V \in \Omega X$ .

**Remarque 4.1.** On a toujours  $\emptyset, X \in \Omega X$  avec  $\emptyset = \bigcup \emptyset$  et  $X = \bigcap \emptyset$ .

**Exemple 4.1 (Topologie sur  $\Sigma^\omega$  et intuition).** On peut voir les ouverts comme « analogues » aux ensembles récursivement énumérables.

On définit une topologie sur  $\Sigma^\omega$  où les ouverts sont  $\text{ext}(W)$  où  $W \subseteq \Sigma^*$  et  $\text{ext}(W) = \bigcup_{u \in W} \text{ext}(u)$  et

$$\text{ext}(u) = \{\sigma \in \Sigma^\omega \mid u \subseteq \sigma\}.$$

Ainsi, si on a une manière d'énumérer  $W$ , on peut tester si  $u \in \text{ext}(W)$  en temps fini, mais il n'est pas forcément possible de vérifier que  $u \notin \text{ext}(W)$ .

**Définition 4.2.** Soit  $(X, \Omega X)$  un espace topologique. Alors, on appelle *fermé* un sous-ensemble  $C \subseteq X$  tel que  $X \setminus C \in \Omega X$ .

**Remarque 4.2.** On a donc que  $\emptyset$  et  $X$  sont toujours fermés.

**Remarque 4.3.** L'ensemble des fermés sur  $(X, \Omega X)$  est stable par

- ▷ intersections arbitraire ;
- ▷ unions finies.

Ce sont les « duales » des propriétés de stabilité des ouverts.

Avec quelques manipulations « simples », on peut arriver à la caractérisation suivante.

**Lemme 4.1.** Soit  $(X, \Omega X)$  un espace topologique.

- ▷ On a que  $A \subseteq X$  est un ouvert ssi  $\forall x \in X$  on a l'équivalence suivante

$$x \in A \iff \exists U \in \Omega X, \quad x \in U \subseteq A.$$

- ▷ On a que  $A \subseteq X$  est un fermé ssi  $\forall x \in X$  on a l'équivalence suivante

$$x \in A \iff \forall U \in \Omega X, \quad (x \in U \implies A \cap U \neq \emptyset).$$

**Lemme 4.2 (Avec  $\Sigma^\omega$ ).** ▷ Sur  $\Sigma^\omega$ , on a que  $A \subseteq \Sigma^\omega$  est ouvert ssi  $\forall \sigma \in \Sigma^\omega$ , on a l'équivalence suivante

$$\sigma \in A \iff \exists \hat{\sigma} \subseteq \sigma, \text{ext}(\hat{\sigma}) \subseteq A.$$

- ▷ Sur  $\Sigma^\omega$ , on a que  $A \subseteq \Sigma^\omega$  est fermé ssi  $\forall \sigma \in \Sigma^\omega$ , on a l'équivalence suivante

$$\sigma \in A \iff \forall \hat{\sigma} \subseteq \sigma, \text{ext}(\hat{\sigma}) \cap A \neq \emptyset,$$

autrement dit,

$$\sigma \in A \iff \forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{l} \text{ext}(\sigma(0) \dots \sigma(n)) \cap A \neq \emptyset \\ \updownarrow \\ \forall \hat{\sigma} \subseteq \sigma, \exists \beta \supseteq \hat{\sigma}, \beta \in A. \end{array} \right.$$

**Exemple 4.2.** L'ensemble  $\{a\}^\omega$  est un fermé mais pas un ouvert. En effet, si  $\hat{\sigma} \subseteq a^\omega$  alors  $\hat{\sigma} = a^n$ , mais, si  $|\Sigma| \geq 2$ ,

$$\text{ext}(a^n) \not\subseteq \{a^\omega\}.$$

**Corollaire 4.1.** Une propriété  $P \subseteq (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$  est de sûreté ssi  $P$  est un fermé.

**Preuve.** L'idée est que  $\text{ext}(P_{\text{bad}})$  est un ouvert et que

$$P = (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega \setminus \text{ext}(P_{\text{bad}}).$$

□

**Proposition 4.1 (Clôture).** Soit  $A \subseteq X$  où  $(X, \Omega X)$  est un espace topologique. Alors,

$$\bar{A} := \bigcap_{A \subseteq C \text{ où } C \text{ fermé}} C$$

est un fermé.

**Remarque 4.4.** On a que  $A$  est un fermé ssi  $\bar{A} = A$ .

## 4.1 Théorème de décomposition.

**Définition 4.3.** Pour  $(X, \Omega X)$  un espace topologique, on dit que  $A \subseteq X$  est *dense* si

$$\forall U \in \Omega X, \quad U \neq \emptyset \implies U \cap A \neq \emptyset.$$

**Exemple 4.3.** Une partie  $A \subseteq \Sigma^\omega$  est dense ssi

$$\forall u \in \Sigma^* \quad \text{ext}(u) \cap A \neq \emptyset,$$

autrement dit, pour tout mot fini  $u \in \Sigma^*$ , il existe  $\sigma \in \Sigma^\omega$  qui étend  $u$  (*i.e.*  $u \subseteq \sigma$ ) et tel que  $\sigma \in A$ .

**Lemme 4.3.** On a que  $P \subseteq (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$  est une propriété de vivacité ssi  $P$  est dense.

**Théorème 4.1 (Décomposition).** Soit  $(X, \Omega X)$  un espace et  $A \subseteq X$ . Alors il existe  $C \subseteq X$  un fermé et  $D \subseteq X$  dense tel que

$$A = C \cap D.$$

**Preuve.** On pose  $C := \bar{A}$  et  $D := A \cup (X \setminus \bar{A})$ . Ainsi, on a bien que  $A = C \cap D$ . On a aussi que  $C$  est fermé. Montrons que  $D$  est dense.

Soit  $U \in \Omega X$  non vide. Si  $U \cap A = \emptyset$  alors  $A \subseteq X \setminus U$ , qui est un fermé. Donc  $\bar{A} \subseteq X \setminus U$  et  $U \subseteq X \setminus \bar{A}$ .  $\square$

## 4.2 Bases.

**Définition 4.4.** Soit  $X$  un ensemble et  $\mathcal{B} \subseteq \wp(X)$  tel que  $\mathcal{B}$  est stable par intersections finies. Alors,

$$\Omega := \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i \mid \forall i \in I, B_i \in \mathcal{B} \right\}$$

est une topologie sur  $X$  et  $\mathcal{B}$  est appelée *base* de  $\Omega$ . Autrement dit, on a défini

$$\Omega := \left\{ \bigcup \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \right\}.$$

**Lemme 4.4** (Quelques propriétés).  $\triangleright$  Si  $u \subseteq v$  alors  $\text{ext}(v) \subseteq \text{ext}(u)$ .

$\triangleright$  Si  $|\Sigma| \geq 2$  et  $\text{ext}(v) \subseteq \text{ext}(u)$  alors  $u \subseteq v$ .

(Attention à la contravariance!)

$\triangleright$  Pour  $u, v \in \Sigma^*$ , on a

$$\text{ext}(u) \cap \text{ext}(v) = \begin{cases} \text{ext}(v) & \text{si } u \subseteq v \\ \text{ext}(u) & \text{si } v \subseteq u \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Remarque 4.5.** Sur  $\Sigma^\omega$ , on a que pour tout ouvert  $U$ , il existe  $W \subseteq \Sigma^*$  tel que  $U = \bigcup_{v \in W} \text{ext}(v)$ . Avec le lemme précédent, on a que  $\Omega\Sigma^\omega$  a pour base

$$\{\text{ext}(u) \mid u \in \Sigma^*\} \cup \{\emptyset\}.$$

**Remarque 4.6.** On a  $\text{ext}(\varepsilon) = \Sigma^\omega$ .

**Remarque 4.7.** L'ensemble  $\Sigma^\omega$  est un *espace métrique complet* pour la distance

$$d : \Sigma^\omega \times \Sigma^\omega \longrightarrow [0, 1]$$

$$\alpha, \beta \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = \beta \\ 1/2^{\min n | \alpha(n) \neq \beta(n)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a que  $d(\alpha, \gamma) \leq \max(d(\alpha, \beta), d(\beta, \gamma))$ .

# 5 Ordres partiels et treillis.

## 5.1 Ordres partiels.

**Définition 5.1.** Un *ordre partiel* (ou *poset* en anglais) est une paire  $(P, \leq)$  où  $\leq$  est une relation binaire sur  $P$  telle que

- ▷ (*reflexivité*)  $\forall x \in P, x \leq x$  ;
- ▷ (*transitivité*)  $\forall x, y \in P, x \leq y \implies y \leq z \implies x \leq z$  ;
- ▷ (*antisymétrie*)  $\forall x, y \in P, x \leq y \implies y \leq x \implies x = y$ .

Un préordre est une relation binaire reflexive et transitive.

**Exemple 5.1.** On donne quelques exemples de poset :

1.  $(\wp(X), \subseteq)$ , l'inclusion dans les parties de  $X$
2.  $(\Omega X, \subseteq)$ , l'inclusion dans les ouverts de  $X$
3.  $(\Sigma^*, \subseteq)$ , la relation préfixe dans les mots sur  $\Sigma$

Attention, dans les trois exemples, il existe deux éléments  $u, v$  où

$$u \not\leq v \quad \text{et} \quad v \not\leq u.$$

**Définition 5.2 (Dual).** Soit  $(P, \leq)$  un poset. Le *dual* de  $P$  est  $(P, \leq)^{\text{op}} := (P, \geq)$  où

$$a \geq b \iff b \leq a.$$

**Définition 5.3 (Fonction (anti)monotone).** Soit  $(P, \leq_P)$  et  $(L, \leq_L)$  deux posets. Une fonction  $f : P \rightarrow L$  est *monotone* si pour tout  $a, b \in P$  on a

$$a \leq_P b \implies f(a) \leq_L f(b).$$

On dit que  $f : (P, \leq) \rightarrow (L, \leq)$  est *antimonotone* si  $f : (P, \leq) = (P, \leq_P)^{\text{op}} \rightarrow (L, \leq_L)$  est monotone, autrement dit pour tout  $a, b \in P$  on a

$$a \leq_P b \implies f(a) \geq_L f(b).$$

## 5.2 Treillis complet.

**Définition 5.4.** Soit  $(A, \leq)$  un poset et  $S \subseteq A$ .

- ▷ Un *upper bound* de  $S$  est un élément  $a \in A$  tel que  $\forall s \in S$ ,  $s \leq a$ .
- ▷ Un *least upper bound (lub, join ou sup)* de  $S$  est un upper bound  $a \in A$  de  $S$  tel que, pour tout upper bound  $b \in A$  de  $S$ , on a  $a \leq b$ .

Par dualité, on a les définitions suivantes.

- ▷ Un élément  $a \in A$  est un *lower bound* de  $S$  ssi  $a$  est un upper bound de  $S$  dans  $A^{\text{op}}$ .
- ▷ Un élément  $a \in A$  est un *greatest lower bound (glb, meet, inf)* de  $S$  ssi  $a$  est un least upper bound de  $S$  dans  $A^{\text{op}}$ .

On note  $\bigvee S$  le least upper bound de  $S$ . On note  $\bigwedge S$  le greatest lower bound de  $S$ .

**Exemple 5.2.** Soit  $S \subseteq \wp(X)$  alors le least upper bound de  $S$  dans  $(\wp(X), \subseteq)$  est  $\bigcup S \in \wp(X)$ . Le greatest lower bound de  $S$  dans  $(\wp(X), \subseteq)$  est  $\bigcap S \in \wp(X)$ .

**Exemple 5.3.** Soit  $S \subseteq \Omega X$  alors le least upper bound dans  $(\Omega X, \subseteq)$  est  $\bigcup S \in \Omega X$ . Le greatest lower bound dans  $(\Omega X, \subseteq)$  n'est pas évident. En effet,

$$\{\text{ext}(a^n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Omega\Sigma^\omega,$$

mais  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{ext}(a^n) = \{a^\omega\} \notin \Omega\Sigma^\omega$ .

**Exemple 5.4.** Dans  $(\Sigma^*, \subseteq)$  (la relation « préfixe de »), une partie  $S \subseteq \Sigma^*$  n'a pas forcément de sup.

**Définition 5.5.** Un poset  $(L, \leq)$  est un *treillis complet* si

- ▷ tout  $S \subseteq L$  a un sup  $\bigvee S \in L$ ;
- ▷ tout  $S \subseteq L$  a un inf  $\bigwedge S \in L$ .

**Remarque 5.1 (Unicité du lub/glb).** Par antisymétrie, si  $a$  et  $b$  sont deux least upper bound (ou greatest lower bound) alors  $a = b$ .

En conséquence on a que tout treillis complet a

- ▷ un plus petit élément  $\perp := \bigvee \emptyset \in L$ ;
- ▷ un plus grand élément  $\top := \bigwedge \emptyset \in L$ .

**Remarque 5.2 (Non-exemple).** Le poset  $(\Sigma^*, \subseteq)$  (avec la relation « préfixe de ») n'est *pas* un treillis complet, car il n'a pas de plus grand élément  $\top$ .

**Exemple 5.5.** Le poset  $(\wp(X), \subseteq)$  (avec la relation d'inclusion ensembliste) est un treillis complet.

**Lemme 5.1.** Les conditions suivantes sont équivalentes pour un poset  $(L, \leq)$  :

1.  $(L, \leq)$  est un treillis complet ;
2. tout  $S \subseteq L$  a un sup  $\bigvee S \in L$  ;
3. tout  $S \subseteq L$  a un inf  $\bigwedge S \in L$  ;

**Preuve.** Pour montrer l'implication « 2.  $\implies$  3. », on peut définir

$$\forall S \subseteq L, \quad \bigwedge S := \bigvee \{b \mid \forall s \in S, b \leq s\},$$

et montrer que c'est bien un inf.  $\square$

**Exemple 5.6.** En revenant sur  $(\Omega X, \subseteq)$ , c'est un treillis complet dont l'inf de  $S \subseteq \Omega X$  est

$$\bigwedge S = \bigcup \{V \in \Omega X \mid V \subseteq \cap S\}.$$

Il s'agit de  $\widehat{\cap S}$  qui est l'*intérieur* de  $\cap S$ .

Par exemple, dans  $(\Omega \Sigma^\omega, \subseteq)$ , on a

$$\bigwedge \{\text{ext}(a^n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \widehat{\{a^\omega\}} = \emptyset.$$

## 5.3 Opérateur de clôture.

**Définition 5.6.** Soit  $(A, \leq)$  un poset. Un *opérateur de clôture* sur  $(A, \leq)$  est une fonction

$$c : A \rightarrow A$$

telle que

- ▷  $c$  est monotone ;

- ▷  $c$  est « *expansive* » : pour tout  $a \in A$ ,  $a \leq c(a)$  ;
- ▷  $c$  est *idempotent* :  $c(c(a)) = c(a)$  pour tout  $a \in A$ .

**Exemple 5.7.** Soit  $(X, \Omega X)$  un espace topologique. Alors

$$\wp(X) \ni A \mapsto \bar{A} \in \wp(X)$$

est un opérateur de clôture sur  $(\wp(X), \subseteq)$ .

**Lemme 5.2.** Soit  $c$  un opérateur de clôture sur  $(L, \leq)$ . On pose

$$L^c := \{a \in L \mid \underbrace{c(a)}_{a \in \text{im } c} = a\}.$$

Si  $(L, \leq)$  est un treillis complet alors  $(L^c, \leq)$  est un treillis complet avec

$$\forall S \subseteq L^c, \quad \bigwedge^{L^c} S = \bigwedge^L S.$$

**Exemple 5.8.** Pour  $\overline{(-)} : \wp(X) \rightarrow \wp(X)$  où  $(X, \Omega X)$  est un espace topologique, on a

$$(\wp(X))^{\overline{(-)}} = \{F \in \wp(X) \mid F \text{ fermé}\}.$$

Dans ce treillis complet :

$$\bigwedge \mathcal{F} = \bigcap \mathcal{F} \quad \text{et} \quad \bigvee \mathcal{F} = \overline{\bigcup \mathcal{F}},$$

où  $\mathcal{F}$  est un ensemble de fermés.

## 5.4 Connexion de Galois.

**Définition 5.7.** Considérons deux posets  $(A, \leq_A)$  et  $(B, \leq_B)$ . Une *connexion de Galois*  $g \dashv f : A \rightarrow B$  est une paire  $(f, g)$  de

fonctions :

$$f : B \rightarrow A \quad \text{et} \quad g : A \rightarrow B$$

telle que

$$g(a) \leq_B b \iff a \leq_A f(b).$$

**Exemple 5.9.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une fonction. On possède deux « lifts » de  $f$  sur les powersets :

- ▷ le lift covariant  $f_! : \begin{array}{ccc} \wp(X) & \longrightarrow & \wp(Y) \\ A & \longmapsto & \{f(a) \mid a \in A\} \end{array}$  ;
- ▷ le lift contravariant  $f^\bullet : \begin{array}{ccc} \wp(Y) & \longrightarrow & \wp(X) \\ B & \longmapsto & \{x \in X \mid f(x) \in B\} \end{array}$ .<sup>1</sup>

On a que  $f_! \dashv f^\bullet$ . En effet, pour tout  $A \in \wp(X)$  et  $B \in \wp(Y)$ ,

$$\begin{aligned} f_!(A) \subseteq B &\iff \forall x \in X, (x \in A \implies f(x) \in B) \\ &\iff A \subseteq f^\bullet(B). \end{aligned}$$

**Exemple 5.10.** Soit  $\Sigma$  un alphabet. On a, d'une part,

$$\begin{aligned} \text{Pref} : \wp(\Sigma^\omega) &\longrightarrow \wp(\Sigma^*) \\ A &\longmapsto \underbrace{\{\hat{\sigma} \in \Sigma^* \mid \exists \sigma \in A, \hat{\sigma} \subseteq \sigma\}}_{\bigcup_{\sigma \in A} \text{Pref}(\sigma)}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \text{cl} : \wp(\Sigma^*) &\longrightarrow \wp(\Sigma^\omega) \\ W &\longmapsto \{\sigma \in \Sigma^\omega \mid \text{Pref}(\sigma) \subseteq W\}. \end{aligned}$$

Attention, ce n'est pas le cl vu en TD. On a que

$$\text{Pref}(-) \dashv \text{cl}(-).$$

---

<sup>1</sup>On note habituellement  $f^*$  et non  $f^\bullet$ , mais vu qu'on utilise souvent « \* » dans le cours, on change de notation.

**Lemme 5.3.** ▷ Si  $g \dashv f$  et  $g' \dashv f$  alors  $g = g'$ .

▷ Si  $g \dashv f$  et  $g \dashv f'$  alors  $f = f'$ .

▷ Si  $g \dashv f$  alors  $g$  et  $f$  sont monotones.

**Preuve.** Vu en TD. □

Dans  $g \dashv f$ , on dit que

- ▷  $g$  est un *adjoint à gauche* de  $f$  ;
- ▷  $f$  est un *adjoint à droite* de  $g$ .

**Lemme 5.4.** Si  $g \dashv f : (A, \leq_A) \rightarrow (B, \leq_B)$  alors

$$f \circ g : A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} A$$

est un opérateur de clôture sur  $(A, \leq_A)$ .<sup>2</sup>

**Preuve.** Vu en TD. □

**Exemple 5.11.** Pour  $\text{Pref}(-) \dashv \text{cl}(-) : \wp(\Sigma^\omega) \rightarrow \wp(\Sigma^*)$ , le lemme précédent nous donne l’opérateur de clôture

$$\begin{aligned} \text{cl} \circ \text{Pref} : \wp(\Sigma^\omega) &\longrightarrow \wp(\Sigma^\omega) \\ A &\longmapsto \{\sigma \in \Sigma^\omega \mid \text{Pref}(\sigma) \subseteq \text{Pref}(A)\} \end{aligned}$$

(c’est le  $\text{cl}(-)$  vu en TD) est la clôture topologique pour  $(\Sigma^\omega, \Omega\Sigma^\omega)$ .

**Remarque 5.3.** En particulier,  $A \subseteq \Sigma^\omega$  est un fermé si et seulement s’il existe un arbre  $T \subseteq \Sigma^*$  tel que

$$A = \{\pi \in \Sigma^\omega \mid \pi \text{ chemin infini dans } T\}.$$

On a que  $\text{cl} \circ \text{Pref}(A)$  qui est un arbre sur  $\Sigma$ .

---

<sup>2</sup>Attention à ne pas se tromper sur le sens de la composition !

**Corollaire 5.1.** ▷ Une propriété  $P \subseteq (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$  est de sûreté si et seulement si on a  $P = \text{cl}(\text{Pref}(P))$ .

▷ Une propriété  $P \subseteq (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$  est de vivacité si et seulement si on a  $(\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega = \text{cl}(\text{Pref}(P))$ .

**Preuve.** (Déjà) vu en TD. Ceci correspond exactement au fait que

- ▷  $P$  est de sûreté ssi  $P$  est fermé dans  $(\Sigma^\omega, \Omega\Sigma^\omega)$ ;
- ▷  $P$  est de vivacité ssi  $P$  est dense dans  $(\Sigma^\omega, \Omega\Sigma^\omega)$ ;
- ▷  $\text{cl} \circ \text{Pref}$  est exactement  $\overline{(-)}$  dans  $(\Sigma^\omega, \Omega\Sigma^\omega)$ .

□

**Proposition 5.1.** Une propriété  $P \subseteq (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$  est de vivacité si et seulement si  $\text{Pref}(P) = (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\star$ .

**Preuve.** En effet, par adjonction (connexion de Galois), on a

$$(\mathbf{2}^{\text{AP}})^\star = \text{Pref}((\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega) \subseteq \text{Pref}(P) \iff (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega \subseteq \text{cl}(\text{Pref}(P)).$$

□

## Quelques propriétés des connexions de Galois.

**Lemme 5.5.** Soit  $g \dashv f : A \rightarrow B$  une connexion de Galois.

1. pour tout  $S \subseteq A$  tel que  $\bigvee S \in A$  alors  $g(\bigvee S) = \bigvee g_!(S)$ ;
2. pour tout  $S \subseteq B$  tel que  $\bigwedge S \in B$  alors  $f(\bigwedge S) = \bigwedge f_!(S)$ .

**Remarque 5.4.** Dans le lemme précédent, il est important de remarquer que l'on a une implication « cachée » :  $\bigvee S$  existe dans  $A$  implique  $\bigvee g_!(S)$  existe dans  $B$  (et idem pour  $\bigwedge$  et  $f$ ).

**Lemme 5.6.** Soient  $(A, \leq_A)$  et  $(B, \leq_B)$  deux treillis complets.

1. Si  $g : A \rightarrow B$  préserve les sups (i.e.  $g(\bigvee S) = \bigvee g(S)$ ) alors il existe une fonction  $f : B \rightarrow A$  telle que  $g \dashv f$ . Cette fonction est :

$$f(b) := \bigvee \{a \in A \mid g(a) \leq_B b\}.$$

2. Si  $f : B \rightarrow A$  préserve les inf's alors il existe une fonction  $g : A \rightarrow B$  telle que  $g \dashv f$ . Cette fonction est :

$$g(a) := \bigwedge \{b \in B \mid a \leq_A f(b)\}.$$

**Exemple 5.12 (Algèbres de Heyting complètes).** Soit  $(L, \leq)$  un treillis complet. Soit  $a \in L$ . On a une fonction

$$\begin{aligned} - \wedge a : L &\longrightarrow L \\ b &\longmapsto b \wedge a = \bigwedge \{a, b\}. \end{aligned}$$

On dit que  $(L, \leq)$  est une *algèbre de Heyting complète* si, pour tout  $a \in A$ , la fonction  $- \wedge a$  a un adjoint à gauche. Si cet adjoint existe, on le note  $a \Rightarrow -$ . Ceci nous donne que

$$\forall a, b, c \in L, \quad b \wedge a \leq c \iff b \leq a \Rightarrow c.$$

On a l'équivalence entre :

- ▷  $(L, \leq)$  est une algèbre de Heyting complète ;
- ▷ pour tout  $a \in L$ ,  $- \wedge a : L \rightarrow L$  préserve les sups, autrement dit pour tout  $S \subseteq L$ ,

$$(\bigvee S) \wedge a = \bigvee \{s \wedge a \mid s \in S\}.$$

C'est une sorte de distributivité.

Dans ce cas, on a que

$$a \Rightarrow c = \bigvee \{b \mid b \wedge a \leq c\}.$$

# 6 Propriétés « observables ».

La terminologie « propriété observable » n'est pas utilisée dans la littérature, mais c'est en réalité la compacité.

**Remarque 6.1 (Rappel).** Si  $f : X \rightarrow Y$  alors

$$f_! \dashv f^\bullet : \wp(X) \rightarrow \wp(Y),$$

où  $f_!$  est l'image directe, et  $f^\bullet$  est l'image réciproque.

Ainsi,  $f^\bullet : \wp(Y) \rightarrow \wp(X)$  préserve les intersections (*i.e.* si  $\mathcal{S} \subseteq \wp(Y)$  alors on a que  $f^\bullet(\bigcap \mathcal{S}) = \bigcap_{S \in \mathcal{S}} f^\bullet(S)$ ).

De plus,  $f^\bullet$  préserve les unions car  $f^\bullet \dashv f_\bullet : \wp(Y) \rightarrow \wp(X)$  où

$$\begin{aligned} f_\bullet : \wp(X) &\longrightarrow \wp(Y) \\ A &\longmapsto \bigcup\{B \subseteq Y \mid f^\bullet(B) \subseteq A\}. \end{aligned}$$

**Définition 6.1.** Soient  $(X, \Omega X)$  et  $(Y, \Omega Y)$  deux espaces topologiques. Une fonction  $f : X \rightarrow Y$  est *continue* si  $f^\bullet : \wp(Y) \rightarrow \wp(X)$  se restreint en une fonction  $f^\bullet : \Omega Y \rightarrow \Omega X$ , autrement dit

$$\forall V \in \Omega Y, \quad f^\bullet(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\} \in \Omega(X).$$

On définit ainsi une catégorie d'espaces topologiques.

Un *homéomorphisme*  $f : X \rightarrow Y$  est une bijection continue telle que

$$f^{-1} : Y \rightarrow X$$

est continue.<sup>1</sup>

**Lemme 6.1.** Une fonction  $f : \Sigma^\omega \rightarrow \Gamma^\omega$  est continue si et seulement si

$$\forall \alpha \in \Sigma^\omega, \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \Sigma^\omega,$$

$$\beta(0) \dots \beta(k) = \alpha(0) \dots \alpha(k)$$



$$f(\beta)(0) \dots f(\beta)(n) = f(\alpha)(0) \dots f(\alpha)(n).$$

Autrement dit,  $f$  est continue ssi on peut déterminer une partie finie de sa sortie à partir d'une partie finie de son entrée.

Soit  $P \subseteq \Sigma^\omega$ , et on définit la *fonction caractéristique* de  $P$  :

$$\chi_P : \Sigma^\omega \longrightarrow \mathbf{2} = \{0, 1\}$$

$$\alpha \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \in P \\ 0 & \text{si } \alpha \notin P \end{cases}.$$

Avec  $\Omega\mathbf{2} = \wp(\mathbf{2}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$  (ce qui est cohérent avec l'idée que  $\mathbf{2}$  représente les booléens), on a que  $\chi_P$  est continue ssi

- ▷  $\chi_P^{-1}\{0\} = \Sigma^\omega \setminus P$  est un ouvert ;
- ▷  $\chi_P^{-1}\{1\} = P$  est un ouvert.

On arrive donc à la notion de *clopen*.

**Définition 6.2.** Soit  $(X, \Omega X)$  un espace topologique. Une partie  $P \subseteq X$  est *clopen* (*ouvert fermé* en français) si  $P$  et  $X \setminus P$  sont ouverts.

---

<sup>1</sup>Ce n'est pas évident : par exemple, il y a une bijection  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  (où  $\mathbb{S}^1$  est le cercle unité de  $\mathbb{R}^2$ ) continue mais la réciproque ne l'est pas.

- Remarque 6.2.**
1. On a  $\emptyset$  est clopen, et que, si  $A$  et  $B$  sont clopen alors  $A \cup B$  est clopen.
  2. On a  $X$  est clopen, et que, si  $A$  et  $B$  sont clopen alors  $A \cap B$  est clopen (dual du point précédent).
  3. Si  $A$  est clopen alors  $X \setminus A$  est clopen.

**Exemple 6.1.** Soit  $u \in \Sigma^*$ , on a que  $\text{ext}(u)$  est ouvert. Mais, on a aussi que  $\Sigma^\omega \setminus \text{ext}(u)$  est ouvert :

$$\Sigma^\omega \setminus \text{ext}(u) = \bigcup \{\text{ext}(v) \mid v \neq u \text{ et } \text{length}(v) = \text{length}(u)\}.$$

**Remarque 6.3.** Sur  $(\Sigma^\omega, \Omega\Sigma^\omega)$ , tous les  $\text{ext}(W)$  où  $W \subseteq \Sigma^*$  est **fini** sont clopen. La réciproque est fausse, comme le montre le lemme suivant.

**Lemme 6.2.** Si  $\Sigma$  est infini et  $a \in \Sigma$ , alors

$$\Sigma^\omega \setminus \text{ext}(a) = \bigcup_{\Sigma \ni b \neq a} \text{ext}(b)$$

est clopen mais **pas** de la forme  $\text{ext}(W)$  avec  $W$  fini.

## 6.1 Compacité.

**Définition 6.3.** Soit  $(X, \Omega X)$  un espace topologique.

1. Une partie  $A \subseteq X$  est *compacte* si, pour toute famille  $(V_i)_{i \in I} \in \Omega X^I$  telle que  $A \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$ , il existe  $J \subseteq I$  **fini** tel que  $A \subseteq \bigcup_{j \in J} V_j$ .
2. On dit que  $(X, \Omega X)$  est *compact* si  $X$  est une partie compacte.

**Remarque 6.4 (Non-exemple).** Si  $\Sigma$  est infini alors  $\Sigma^\omega$  n'est pas compact :

$$\Sigma^\omega = \bigcup_{a \in \Sigma} \text{ext}(a).$$

**Proposition 6.1.** Si  $\Sigma$  est *fini* alors  $\Sigma^\omega$  est compact.

**Preuve.** On procède à l'aide du lemme de König. Supposons que  $\Sigma^\omega = \bigcup_{i \in I} U_i$  où  $U_i \in \Omega\Sigma^\omega$ . On a que  $U_i = \text{ext}(V_i)$  pour un  $V_i \subseteq \Sigma^*$  (en général,  $V_i$  est infini). Soit  $V = \bigcup_{i \in I} V_i \subseteq \Sigma^*$ , et on vérifie que  $\text{ext}(V) = \Sigma^\omega$ . Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $W_n \subseteq \Sigma^n$  par récurrence :

- ▷ On pose  $W_0 := \{\varepsilon\}$  si  $\varepsilon \in V$  et  $W_0 := \emptyset$  sinon.
- ▷ On pose

$$W_{n+1} := \{ u \in V \mid u \text{ n'a pas de préfixe dans } \bigcup_{k \leq n} W_k \}.$$

On pose enfin  $W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$ . On a que  $\text{ext}(W) = \text{ext}(V)$  (car, pour tout  $v \in V$ , il existe  $w \in W$  tel que  $w \subseteq v$ ), et  $W$  est « prefix-free » (c'est-à-dire que, pour  $w, w' \in W$ , on a  $w \not\subseteq w'$  ssi  $w \neq w'$ ).

Si  $W$  est fini alors on s'arrête.

Par l'absurde, supposons  $W$  infini, et posons  $T = \text{Pref}(W)$  qui est un arbre par définition. L'arbre  $T$  est à branchement fini (car  $\Sigma$  est fini), et  $T$  est infini (car  $W$  l'est) Par le lemme de König, il existe un chemin infini  $\pi \in \Sigma^\omega$  dans  $T$ . Comme  $\Sigma^\omega = \text{ext}(W)$ , il existe  $u \in W$  tel que  $u \subseteq \pi$ . De plus, il existe  $a \in \Sigma$  tel que  $ua \subseteq \pi$  et donc  $ua \in T = \text{Pref}(W)$ .

On arrive à une contradiction car  $u \in W$  et  $W$  est prefix-free.  $\square$

**Corollaire 6.1.** On a que  $\Sigma^\omega$  est compact ssi  $\Sigma$  fini.  $\square$

**Lemme 6.3.** Si  $(X, \Sigma X)$  est compact et  $C \subseteq X$  est fermé alors  $C$  est compact.

**Preuve.** L'idée est que si  $C \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$  alors  $X \subseteq (X \setminus C) \cup \bigcup_{i \in I} V_i$ .  $\square$

**Corollaire 6.2.** Si  $\Sigma$  est fini alors  $A \subseteq \Sigma^\omega$  est clopen ss'il existe  $W \subseteq \Sigma^*$  **fini** tel que  $A = \text{ext}(W)$ .  $\square$

## 6.2 Espace Hausdorff.

**Définition 6.4.** On dit que  $(X, \Omega X)$  est *Hausdorff* (ou  $T_2$ ) lorsque, pour tout  $x \neq y \in X$ , alors il existe  $U, V \in \Omega X$  tels que

$$U \cap V = \emptyset \quad x \in U \quad \text{et} \quad y \in V.$$

**Exemple 6.2.** L'espace  $(\Sigma^\omega, \Omega \Sigma^\omega)$  est Hausdorff. Soient  $\alpha \neq \beta$ . Il existe  $u \subseteq \alpha$  et  $v \subseteq \beta$  tels que  $\text{ext}(u) \cap \text{ext}(v) = \emptyset$ .

(On peut choisir  $u = p\alpha(\text{length}(p))$  et  $v = p\beta(\text{length}(p))$  où  $p$  est le plus long préfixe commun à  $\alpha$  et  $\beta$ .)

**Proposition 6.2.** Si  $(X, \Omega)$  est compact Hausdorff et  $C \subseteq X$  est compact alors  $C$  est fermé.

**Preuve.** Soit  $C \subseteq X$  est compact et  $x \notin C$ . Pour tout  $y \in C$ , il existe  $U_y, V_y$  tels que  $U_y \cap V_y = \emptyset$  et  $x \in U_y$  et  $y \in V_y$ . Donc, on a  $C \subseteq \bigcup_{y \in C} V_y$ . Comme  $C$  est compact, il existe  $y_1, \dots, y_n \in C$  tels que  $C \subseteq V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \dots \cup V_{y_n}$ . On a que  $x \in U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n} =: U \in \Omega X$ . Et,  $U \subseteq X \setminus C$  car,  $U \cap (V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}) = \emptyset$ .  $\square$

**Corollaire 6.3.** Si  $(X, \Omega X)$  est compact Hausdorff et  $C \subseteq X$ ,

$C$  compact  $\iff C$  fermé.

# 7 Logique temporelle linéaire.

## 7.1 La logique LML.

**Remarque 7.1 (Idée).** La signification de LML est *linear-time modal logic*. L'idée est de définir une logique pour une propriété LT  $P \subseteq (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$  telle que, pour AP fini, les formules correspondent aux clopens.

Soit AP un ensemble de proposition atomiques.

**Définition 7.1.** Les formules de LML sont

$$\begin{array}{ll} \phi, \psi ::= a & a \in \text{AP} \\ | \text{ True} & (\text{parfois notée } \top) \\ | \text{ False} & (\text{parfois notée } \perp) \\ | \phi \wedge \psi \\ | \phi \vee \psi \\ | \neg \phi \\ | \circ \phi \end{array}$$

.

La modalité  $\circ$  est appelée *later* ou *next*.

**Définition 7.2.** L'interprétation  $\llbracket \phi \rrbracket \subseteq (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$  est définie par :

- ▷  $\llbracket a \rrbracket := \{\sigma \mid a \in \sigma(0)\};$

- ▷  $\llbracket \text{True} \rrbracket := (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$ ;
- ▷  $\llbracket \phi \wedge \psi \rrbracket := \llbracket \varphi \rrbracket \cap \llbracket \psi \rrbracket$ ;
- ▷  $\llbracket \text{False} \rrbracket := \emptyset$ ;
- ▷  $\llbracket \phi \vee \psi \rrbracket := \llbracket \varphi \rrbracket \cup \llbracket \psi \rrbracket$ ;
- ▷  $\llbracket \neg \phi \rrbracket := (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega \setminus \llbracket \phi \rrbracket$ ;
- ▷  $\llbracket \circ \phi \rrbracket := \{\sigma \mid \sigma \restriction 1 \in \llbracket \phi \rrbracket\}$  où, pour  $\sigma \in (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$ , on note

$$\begin{aligned}\sigma \restriction i : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbf{2}^{\text{AP}} \\ k &\longmapsto \sigma \restriction \sigma(k+i),\end{aligned}$$

(c'est un décalage d'indices).

**Exemple 7.1.** Quelques exemples de mots tels que  $\sigma \in \llbracket a \vee \circ b \rrbracket$  :

- ▷  $\sigma = \{a\} \emptyset^\omega$ ,
- ▷  $\sigma = \{b\} \{a, b\}^\omega$ ,
- ▷  $\sigma = \emptyset \{a, b\} \emptyset^\omega$ .

**Proposition 7.1.** Pour  $\phi$  une formule de LML, on a que  $\llbracket \phi \rrbracket$  est clopen dans  $(\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$ .

**Preuve.** Par induction sur  $\phi$ , on a les cas suivants.

- ▷ On a que  $\llbracket a \rrbracket = \bigcup_{a \in A \subseteq \text{AP}} \text{ext}(A)$ <sup>1</sup> est un ouvert. De plus, on a que  $(\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega \setminus \llbracket a \rrbracket = \bigcup_{a \notin B \subseteq \text{AP}} \text{ext}(B)$  est un ouvert.
- ▷ On a que
  - $\llbracket \circ \phi \rrbracket = \bigcup_{u \in W, A \subseteq \text{AP}} \text{ext}(Au)$
  - $(\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega \setminus \llbracket \circ \phi \rrbracket = \bigcup_{v \in V, A \subseteq \text{AP}} \text{ext}(Av)$

où par hypothèse d'induction, il existe  $V, W \subseteq \Sigma^*$  tels que  $\llbracket \phi \rrbracket = \text{ext}(W)$  et  $(\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega \setminus \llbracket \phi \rrbracket = \text{ext}(V)$ .

- ▷ De même pour les autres cas.

□

**Proposition 7.2.** Si AP est *fini* et  $P \subseteq (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$  est clopen alors il existe  $\phi$  une formule LML telle que  $P = \llbracket \phi \rrbracket$ .

**Preuve.** On a que  $P = \text{ext}(W)$  où  $W \subseteq (\mathbf{2}^{\text{AP}})^*$  est *fini*. On a montrer par récurrence sur la taille du mot  $u$  que :

$$\forall u \in (\mathbf{2}^{\text{AP}})^*, \quad \exists \phi_u \text{ une formule LML}, \quad \llbracket \phi_u \rrbracket = \text{ext}(u).$$

- ▷ *Cas de base.* Soit  $A \subseteq \text{AP}$ , on peut prendre

$$\phi_A := \left( \bigwedge_{\mathbf{a} \in A} \mathbf{a} \right) \wedge \left( \bigwedge_{\mathbf{b} \notin A} \neg \mathbf{b} \right).$$

- ▷ *Récurrence.* Soit  $u = Av$  où  $A \subseteq \text{AP}$  et  $v \in (\mathbf{2}^{\text{AP}})^*$ . On peut poser

$$\phi_{Av} := \phi_A \wedge \circ \phi_v.$$

On peut aussi faire le cas de base pour  $\varepsilon$ , en posant  $\phi_\varepsilon := \text{True}$ .

□

**Corollaire 7.1.** Si AP est *fini* et  $P \subseteq (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$  alors

$$P \text{ clopen} \iff \text{il existe } \phi \text{ telle que } \llbracket \phi \rrbracket = P.$$

□

### 7.1.1 Équivalences logiques.

**Définition 7.3.** On note  $\phi \equiv \psi$  lorsque  $\llbracket \phi \rrbracket = \llbracket \psi \rrbracket$ . On dit que  $\phi$  et  $\psi$  sont (*logiquement*) équivalentes.

---

<sup>1</sup>On rappelle que  $\text{ext}(A) = \{\sigma \mid \sigma(0) = A \subseteq \text{AP}\}$ .

On a les équivalences suivantes :

- ▷  $\phi \equiv \phi \wedge \phi$
- ▷  $\phi \equiv \text{True} \wedge \phi$
- ▷  $\text{True} \equiv \phi \vee \neg\phi$
- ▷  $\text{False} \equiv \phi \wedge \neg\phi$
- ▷  $\phi \equiv \neg\neg\phi$
- ▷  $\circ(\phi \vee \psi) \equiv \circ\phi \vee \circ\psi$
- ▷  $\circ\text{False} \equiv \text{False}$
- ▷  $\circ(\phi \wedge \psi) \equiv \circ\phi \wedge \circ\psi$
- ▷  $\circ\text{True} \equiv \text{True}$

d'autres équivalences sont possibles (*c.f.* figure 6 des notes de cours).

### 7.1.2 ***Homework : Dualité de Stone.***

L'idée est de motiver le DM, et de donner quelques bases sur ce que l'on va montrer.

On se place dans le cas où AP est un ensemble fini. Considérons un mot  $\sigma \in (2^{\text{AP}})^\omega$ , on pose

$$\mathcal{F}_\sigma := \{[\phi]_\equiv \mid \sigma \in [\phi]\},$$

où  $[\phi]_\equiv$  est la classe d'équivalence de  $\equiv$ . Par les résultats précédents, on a que

$$\mathcal{F}_\sigma \cong \{C \mid \sigma \in C \text{ clopen}\}.$$

On a  $\sigma \neq \beta$  implique  $\mathcal{F}_\sigma \neq \mathcal{F}_\beta$ . De plus, on a les propriétés suivantes :

1. si  $C \in \mathcal{F}_\sigma$  et  $C \subseteq D$  clopen alors  $D \in \mathcal{F}_\sigma$ ;
2. si  $C, D \in \mathcal{F}_\sigma$  alors  $C \cap D \in \mathcal{F}_\sigma$ ;
3.  $(2^{\text{AP}})^\omega \in \mathcal{F}_\sigma$ ;

4. si  $C, D$  sont clopen tels que  $C \cup D \in \mathcal{F}_\sigma$  alors  $C \in \mathcal{F}_\sigma$  ou  $D \in \mathcal{F}_\sigma$ ;
5.  $\emptyset \in \mathcal{F}_\sigma$ .

Ces cinq propriétés caractérisent totalement les mots infinis, comme le montre le théorème suivant.

**Théorème 7.1.** Si  $\mathcal{F}$  est un ensemble de clopens dans  $(2^{\text{AP}})^\omega$  vérifiant les cinq propriétés, alors il existe  $\sigma \in (2^{\text{AP}})^\omega$  tel que  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\sigma$ .

Ce théorème est une spécialisation de la *dualité de Stone*.

**Définition 7.4.** On dit que  $(X, \Omega X)$  est un *espace de Stone* s'il est compact, Hausdorff et qu'il admet une base de clopens.

**Théorème 7.2.** Si  $(X, \Omega X)$  est un espace de Stone alors

$$(X, \Omega X) \cong \mathbf{Sp}\left(\underbrace{\{C \mid C \text{ clopen}\}}_{\text{algèbre de Boole}}, \subseteq\right).$$

On va définir le *spectre*  $\mathbf{Sp}(B)$  où  $B$  est une algèbre de Boole, à l'aide des ultrafiltres sur  $B$  et les filtres premiers (*c.f.* les cinq propriétés ci-dessus).

**Remarque 7.2 (Idée).** Si  $\mathcal{F} \subseteq B$  alors c'est une « théorie consistante et complète » où

- ▷ *théorie* : stable par implication, *c.f.* 1.–3.
- ▷ *consistante* : sans contradiction, 5.
- ▷ *complète* : 4.,  $\forall C$  clopen, si  $C \notin \mathcal{F}_\sigma$  alors  $(2^{\text{AP}})^\omega \setminus C \in \mathcal{F}_\sigma$ .

### 7.1.3 Extension de LML avec $\square$ et $\diamond$ .

**Remarque 7.3.** Avec LML, on ne définit que des clopens. Ainsi, les propriétés de sécurité ne sont que « finitaires » et il n'y a que  $(\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$  comme propriété de vivacité.

**Définition 7.5.** On ajoute à LML les modalités

- ▷  $\Box \phi$  qui signifie « always » (notée parfois  $A\phi$ ) ;
- ▷  $\Diamond \phi$  qui signifie « eventually » (notée parfois  $E\phi$ ) ;

où

- ▷  $\llbracket \Box \phi \rrbracket := \{ \sigma \in (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega \mid \forall n \in \mathbb{N}, \sigma \upharpoonright n \in \llbracket \phi \rrbracket \}$  ;
- ▷  $\llbracket \Diamond \phi \rrbracket := \{ \sigma \mid \exists n \in \mathbb{N}, \sigma \upharpoonright n \in \llbracket \phi \rrbracket \}$ .

Dans la suite, les preuves se termineront par « **QED** » au lieu du symbole usuel «  $\square$  », pour enlever l'ambigüité avec la modalité.

**Notation.** On note  $\sigma \Vdash \phi$  pour  $\sigma \in \llbracket \phi \rrbracket$ .

**Exemple 7.2.** On a

1.  $\sigma \Vdash \Diamond a$ ssi  $\exists n \in \mathbb{N}, a \in \sigma(n)$ , l'ensemble  $\llbracket \Diamond a \rrbracket$  est ouvert mais pas compact, donc pas un clopen car

$$\llbracket \Diamond a \rrbracket = \bigcup_{u \in (\mathbf{2}^{\text{AP}})^*, a \in A} \text{ext}(uA);$$

2.  $\sigma \Vdash \Box a$ ssi  $\forall n \in \mathbb{N}, a \in \sigma(n)$  (l'ensemble  $\llbracket \Box a \rrbracket$  est un fermé non clopen) ;
3.  $\sigma \Vdash \Box \Diamond a$ ssi  $\exists^{\infty} n, a \in \sigma(n)$  (c'est une propriété de vivacité) ;
4.  $\sigma \Vdash \Diamond \Box a$ ssi  $\forall^{\infty} n, a \in \sigma(n)$  (c'est une propriété de vivacité).

**Lemme 7.1.** On a que :

1.  $\Box \phi \equiv \neg \Diamond \neg \phi$ ;
2.  $\Diamond \phi \equiv \neg \Box \neg \phi$ ;
3.  $\Box \phi \equiv \phi \wedge \Diamond \Box \phi$ ;
4.  $\Diamond \phi \equiv \phi \vee \Diamond \Diamond \phi$ .

Avec des  $\wedge$  et des  $\vee$  infinis, on aurait :

$$\Box \phi \equiv \phi \wedge \Diamond \phi \wedge \Diamond \Diamond \phi \wedge \dots \equiv \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \Diamond^n \phi$$

et

$$\Diamond \phi \equiv \phi \vee \Box \phi \vee \Box \Box \phi \vee \dots \equiv \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \Box^n \phi.$$

**Définition 7.6.** On étend ensuite LML par variables :

$$\phi, \psi ::= X \mid \dots,$$

où  $X, Y, \dots \in \mathcal{X}$ . Une *valuation* de  $\mathcal{X}$  est une fonction

$$\rho : \mathcal{X} \rightarrow \wp((\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega),$$

où la sémantique  $[\![\phi]\!]_\rho$  est définie de manière très similaire à  $[\![\phi]\!]$  en ajoutant

$$[\![X]\!]_\rho := \rho(X).$$

**Notation.** Soient  $\phi, \rho, X$ , on pose

$$\begin{aligned} [\![\phi]\!]_\rho(X) : \wp((\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega) &\longrightarrow \wp((\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega) \\ A &\longmapsto [\![\phi]\!]_\rho[A/X], \end{aligned}$$

où  $\rho[A/X](X) = A$  et  $\rho[A/X](Y) = \rho(Y)$  si  $Y \neq X$ .

**Lemme 7.2.** Soit  $\phi$  et  $X$  n'apparaissant pas dans  $\phi$ . On pose

$$\phi_{\Diamond}(X) := \phi \wedge \circ X \quad \phi_{\Box}(X) := \phi \wedge \circ X.$$

Alors, pour tout  $\rho$ ,

- ▷  $\llbracket \Diamond \phi \rrbracket_\rho$  est le plus petit point fixe de  $\llbracket \phi_{\Diamond} \rrbracket_\rho(X)$  ;
- ▷  $\llbracket \Box \phi \rrbracket_\rho$  est le plus grand point fixe de  $\llbracket \phi_{\Box} \rrbracket_\rho(X)$ .

**Preuve.** Pour le premier point, on doit montrer les deux propriétés suivantes :

1.  $\llbracket \Diamond \phi \rrbracket_\rho = \llbracket \phi_{\Diamond} \rrbracket(\llbracket \Diamond \phi \rrbracket)$  ;
2.  $\forall P \subseteq (2^{\text{AP}})^\omega, P = \llbracket \phi_{\Diamond} \rrbracket_\rho(P) \implies \llbracket \Diamond \phi \rrbracket_\rho \subseteq P$ .

Pour la première propriété, c'est la loi d'expansion de  $\Diamond$ . Pour la seconde, soit  $P$  tel que  $P = \llbracket \phi \vee \circ X \rrbracket(P)$  et  $\sigma \in \llbracket \Diamond \phi \rrbracket$ , et montrons que  $\sigma \in P$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\sigma \upharpoonright n \in \llbracket \phi \rrbracket$ . Alors, on a que  $\sigma \upharpoonright n \in \llbracket \phi \vee \circ X \rrbracket(P)$  et donc  $\sigma \upharpoonright n \in P$ . Donc  $\sigma \upharpoonright (n-1) \in \llbracket \phi \vee \circ \phi \rrbracket(P) = P$ , donc pour tout  $i \leq n$ ,  $\sigma \upharpoonright i \in \llbracket \phi \vee \circ X \rrbracket(P) = P$  et en particulier  $\sigma = \sigma \upharpoonright 0 \in P$ . QED

**Définition 7.7.** On dit qu'une variable  $X$  est *positive* dans  $\phi$  si toutes les occurrences de  $X$  dans  $\phi$  sont sous un nombre pair de  $\neg$ . (On peut donner une définition inductive de «  $X$  est positive dans  $\phi$  » et de «  $\phi$  est négative dans  $\phi$  ».)

**Exemple 7.3.** Dans les exemples ci-dessous, on a que  $X$  est positive dans  $\phi$  :

$$\mathbf{a} \wedge \circ X \quad \mathbf{a} \vee \circ X \quad \text{et } \neg(\neg \mathbf{a} \wedge \circ \neg X),$$

mais, dans les exemples ci-dessous,  $X$  n'est pas positive dans  $\phi$  :

$$\neg X \quad \text{et} \quad \neg X \vee (\mathbf{a} \wedge \circ X).$$

**Lemme 7.3.** Si  $X$  est positive dans  $\phi$  alors

$$\llbracket \phi \rrbracket(X) : (\wp((2^{\text{AP}})^\omega), \subseteq) \longrightarrow (\wp((2^{\text{AP}})^\omega), \subseteq)$$

est monotone.

QED

### 7.1.4 Théorème de Knaster-Tarski.

**Définition 7.8.** Soient  $(L, \leq)$  un poset et  $f : L \rightarrow L$ .

1. On dit que  $a \in L$  est un *pré-pointfixe* de  $f$  si  $f(a) \leq a$ .
2. On dit que  $a \in L$  est un *post-pointfixe* de  $f$  si  $a \leq f(a)$ .

**Théorème 7.3 (Knaster-Tarski).** Soit  $f : L \rightarrow L$  une fonction monotone où  $(L, \leq)$  est un treillis complet. Alors

$$\mu(f) := \bigwedge \{ a \in L \mid f(a) \leq a \}$$

est le plus petit point fixe de  $f$ , et

$$\nu(f) := \bigvee \{ a \in L \mid a \leq f(a) \}$$

est le plus grand point fixe de  $f$ .

**Preuve.** Vu en TD.

QED

**Lemme 7.4.** Soit  $f : (\wp(X), \subseteq) \rightarrow (\wp(X), \subseteq)$  monotone. On pose

$$\begin{aligned} g : \wp(X) &\longrightarrow \wp(X) \\ A &\longmapsto g(A) = X \setminus f(X \setminus A). \end{aligned}$$

On a alors que

$$\mu(f) = X \setminus \nu(g) \quad \nu(f) = X \setminus \mu(g).$$

**Preuve.**

$$\begin{aligned}
 X \setminus \nu(g) &= X \setminus \bigcup \{ A \mid A \subseteq g(a) \} \\
 &= \bigcap \{ X \setminus A \mid A \subseteq g(A) \} \\
 &= \bigcap \{ X \setminus A \mid A \subseteq X \setminus f(X \setminus A) \} \\
 &= \bigcap \{ X \setminus A \mid f(X \setminus A) \subseteq X \setminus A \} \\
 &= \bigcap \{ B \mid f(B) \subseteq B \} \\
 &= \nu(f).
 \end{aligned}$$

**QED**

## 7.2 La logique LTL.

La logique LTL est une extension de LML par certains points fixes. Soit  $\theta(X)$  avec  $X$  positive dans  $\theta$ . On peut écrire

$$\theta(X) \equiv \psi \vee \left( \bigwedge_{i \in I} \left( \phi_i \wedge \bigwedge_{j \in J_i} \circ^{n_{i,j}} X \right) \right),$$

où  $X$  n'apparaît pas dans  $\psi$  ni dans  $\phi_i$  pour tout  $i \in I$ .

Dans LTL, on va avoir les points fixes de  $\theta$  si  $n_{i,j} = 1$ . Dans ce cas, on pourra écrire

$$\theta(X) \equiv \psi \vee (\phi \wedge \circ X),$$

où  $X$  n'apparaît pas dans  $\psi$  ni dans  $\phi$ .

**Définition 7.9.** On définit la syntaxe de LTL par

$$\begin{aligned}
 \phi, \psi ::= & \text{ a } & \text{a} \in \text{AP} \\
 | & \phi \wedge \psi \\
 | & \phi \vee \psi \\
 | & \text{False} \\
 | & \text{True} \\
 | & \neg \phi \\
 | & \circ \phi \\
 | & \phi \text{ Until } \psi \\
 .
 \end{aligned}$$

La modalité  $\phi$  Until  $\psi$  est notée  $\phi \cup \psi$  dans les notes de cours.

La sémantique pour LTL est définie de manière identique à la sémantique de LML en ajoutant

$$\llbracket \phi \text{ Until } \psi \rrbracket = \left\{ \sigma \in (2^{\text{AP}})^\omega \mid \exists i \in \mathbb{N}, \quad \begin{array}{l} \sigma \upharpoonright i \in \llbracket \psi \rrbracket \\ \forall j < i, \sigma \upharpoonright j \in \llbracket \phi \rrbracket \end{array} \right\}.$$

### 7.2.1 Points fixes dans LTL.

On étend, dans cette sous-section uniquement, LTL avec des variables (comme pour LML).

**Lemme 7.5.** Soit  $X$  n'apparaissant pas dans  $\phi$  ni  $\psi$ . Alors, on a que  $\llbracket \phi \text{ Until } \psi \rrbracket$  est le plus petit point fixe de  $\llbracket \theta \rrbracket(X)$ .

**Preuve.** On a

$$\phi \text{ Until } \psi \equiv \psi \vee (\phi \wedge \circ(\phi \text{ Until } \psi)).$$

Soit  $P$  tel que  $P = \llbracket \theta \rrbracket(P)$ . Soit  $\sigma \in \llbracket \phi \text{ Until } \psi \rrbracket$ . Soit  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $\sigma \upharpoonright i \in \llbracket \psi \rrbracket$  et  $\sigma \upharpoonright 0, \dots, \sigma \upharpoonright (i-1) \in \llbracket \phi \rrbracket$ . On a  $\sigma \upharpoonright i \in \llbracket \theta \rrbracket(P) = P$ , et comme  $\sigma \upharpoonright (i-1) \in \llbracket \phi \rrbracket$ , on a que  $\sigma \upharpoonright (i-1) \in \llbracket \theta \rrbracket(P) = P$ .

Ainsi, pour tout  $k \in \{i - 1, \dots, 0\}$ , on a  $\sigma \upharpoonright k \in \llbracket \theta \rrbracket(P) = P$ ,  
donc  $\sigma = \sigma \upharpoonright 0 \in P$ . QED

**Remarque 7.4.** Si  $X$  est (positive et) sous exactement un  $\circlearrowleft$  dans  $\theta(X)$  alors c'est le cas aussi dans  $\neg\theta[\neg X/X]$ .

On a

$$\begin{aligned}\neg\theta[\neg X/X] &= \neg(\phi \vee (\psi \wedge \circlearrowleft(\neg X))) \\ &\equiv \neg\psi \wedge (\neg\phi \vee \circlearrowleft X) \\ &\equiv (\neg\psi \wedge \neg\phi) \vee (\neg\psi \wedge \circlearrowleft X)\end{aligned},$$

donc

$$\mu \llbracket \neg\theta[\neg X/X] \rrbracket(X) = \llbracket \neg\psi \text{ Until } (\neg\psi \wedge \neg\phi) \rrbracket.$$

**Lemme 7.6.** Soit  $X$  n'apparaissant pas dans  $\phi, \psi$ . Alors

$$\llbracket \neg(\neg\psi \text{ Until } (\neg\psi \wedge \neg\phi)) \rrbracket$$

qui est un plus petit point fixe de  $\llbracket \theta \rrbracket(X)$  pour  $\theta(X) = \psi \vee (\phi \wedge \circlearrowleft X)$ .

**Notation.** On note

$$\phi \text{ WUntil } \psi := \neg(\neg\psi \text{ Until } (\neg\psi \wedge \neg\phi)),$$

pour *weak until*.

**Notation.** On note

$$\Diamond \phi := \text{True Until } \phi \quad \Box \phi := \phi \text{ WUntil False},$$

et ont la même sémantique que pour LML.

**Remarque 7.5.** On peut montrer que le plus grand point fixe de  $\theta(X) = \mathbf{a} \wedge \circlearrowleft X$  n'est pas définissable dans LTL.

## 7.2.2 Équivalences logiques pour LTL.

On note, comme avant,  $\phi \equiv \psi$  si  $\llbracket \phi \rrbracket = \llbracket \psi \rrbracket$ . On a des lois, comme pour LML, *c.f.* figure 8 dans les notes de cours (section 7.3.3).

**Exemple 7.4.** On a

$$\begin{aligned}\diamond \text{False} &\equiv \text{False} \\ \diamond (\phi \vee \psi) &\equiv \diamond \phi \vee \diamond \psi \\ \square \text{True} &\equiv \text{True} \\ \square (\phi \wedge \psi) &\equiv \square \phi \wedge \square \psi \\ \circ (\phi \text{ Until } \psi) &\equiv \circ \phi \text{ Until } \circ \psi\end{aligned}$$

**Lemme 7.7.** On a

1.  $\neg(\phi \text{ WUntil } \psi) \equiv \neg\psi \text{ Until } (\neg\psi \wedge \neg\phi)$ ;
2.  $\neg(\phi \text{ Until } \psi) \equiv \neg\psi \text{ WUntil } (\neg\psi \wedge \neg\phi)$ .

QED

**Lemme 7.8.** On a

$$\phi \text{ WUntil } \psi \equiv (\phi \text{ Until } \psi) \vee \square \phi.$$

**Preuve.** Soit  $P = \llbracket (\phi \text{ Until } \psi) \vee \square \phi \rrbracket$ . On va montrer que  $P = \nu(\llbracket \theta \rrbracket(X))$  où  $\theta = \psi \vee (\phi \wedge \circlearrowleft X)$ . On a que  $P = \llbracket \theta \rrbracket(P)$  (c'est « facile »). Soit  $Q$  tel que  $Q = \llbracket \theta \rrbracket(Q)$  et on va montrer que  $Q \subseteq P$ . Soit  $\sigma \in Q$ .

- ▷ Si  $\sigma \in \llbracket \square \phi \rrbracket$  alors  $\sigma \in P$  par définition de  $P$ .

- ▷ Sinon soit  $i$  le plus petit tel que  $\sigma \upharpoonright i \notin \llbracket \phi \rrbracket$ . Ainsi, par définition,  $\sigma \upharpoonright j \in \phi$  pour  $j < i$ . On montre qu'il existe un certain  $k \leq i$  tel que  $\sigma \upharpoonright k \in \llbracket \psi \rrbracket$ . Par l'absurde, supposons que  $\sigma \upharpoonright k \notin \llbracket \psi \rrbracket$  pour tout  $k \leq i$ . On voit que pour tout  $k < i$ , on a  $\sigma \upharpoonright k \in \llbracket \theta \rrbracket(Q) = Q$  donc  $\sigma \upharpoonright (i - 1) \in \llbracket \theta \rrbracket(Q) = Q$ , et donc  $\sigma \upharpoonright (i - 1) \notin \llbracket \psi \rrbracket$ , ce qui implique  $\sigma \upharpoonright i \in Q$ , ce qui contredit la définition de  $i$  (car  $\sigma \upharpoonright i \notin \llbracket \psi \rrbracket$  et  $\sigma \upharpoonright i \notin \llbracket \phi \rrbracket$ ).

**QED**

# 8 Expressions $\omega$ -régulières.

Cette partie du cours n'est pas dans les notes de cours mais la source est

Baier, C. and Katoen, J.-P., *Principles of Model Checking*, MIT Press, 2008.

L'objet de cette section est l'analogie des expressions régulières pour les  $\omega$ -mots.

Soit  $\Sigma$  un alphabet non vide et fini.

**Définition 8.1 (Quelques opérations).** Soit  $F$  une expression régulière sur  $\Sigma$  telle que  $\varepsilon \notin \mathcal{L}(F)$ . On pose

$$\mathcal{L}(F)^\omega := \left\{ \sigma \in \Sigma^\omega \mid \begin{array}{l} \sigma = v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \cdots \\ \forall i \geq 1, v_i \in \mathcal{L}(F) \end{array} \right\}.$$

Soit, de plus,  $E$  une expression régulière sur  $\Sigma$ . On pose

$$\mathcal{L}(E) \cdot (\mathcal{L}(F))^\omega := \left\{ u \cdot \sigma \in \Sigma^\omega \mid \begin{array}{l} u \in \mathcal{L}(E) \\ \sigma \in \mathcal{L}(F)^\omega \end{array} \right\}.$$

**Attention.** On peut avoir  $u = \varepsilon \in \mathcal{L}(E)$ .

**Définition 8.2.** Une *expression  $\omega$ -régulière* sur  $\Sigma$  est de la forme

$$G := E_1 \cdot F_1^\omega + \cdots + E_n F_n^\omega,$$

où les  $E_i, F_i$  soin des expressions régulières (classiques) sur  $\Sigma$ ,<sup>1</sup>

avec  $\varepsilon \notin \mathcal{L}(F_i) \subseteq \Sigma^*$ .

Le *langage* de  $G$  est

$$\mathcal{L}_\omega(G) := \mathcal{L}(E_1) \cdot (\mathcal{L}(F_1))^\omega \cup \cdots \cup \mathcal{L}(E_n) \cdot (\mathcal{L}(F_n))^\omega \subseteq \Sigma^\omega.$$

**Exemple 8.1.** Avec  $\Sigma = \{a, b\}$ , on a

$$P := (b^* a)^\omega (\equiv \{\varepsilon\} \cdot (b^* a)^\omega \equiv (b^* a) \cdot (b^* a)^\omega),$$

où l'on note  $G \equiv G'$  quand  $\mathcal{L}_\omega(G) = \mathcal{L}_\omega(G')$ .

On a que

$$\mathcal{L}_\omega(P) = \{\sigma \in \Sigma^\omega \mid \exists^\infty t, \sigma(t) = a\}.$$

**Exemple 8.2.** Avec  $\Sigma = \{a, b\}$  et  $S := (a + b)^* \cdot b^\omega$ , on a

$$\mathcal{L}_\omega(S) = \{\sigma \in \Sigma^\omega \mid \forall^\infty t, \sigma(t) = b\}.$$

## 8.1 Automates de Büchi non-déterministes (NBA).

Avec ces NBA, on va définir une classe de langages équivalents aux expressions  $\omega$ -régulières.

**Définition 8.3.** Un *NBA* est de la forme

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F),$$

où

- ▷  $Q$  est un ensemble **fini** d'états ;
- ▷  $\Sigma$  est l'alphabet d'entrée (non vide et fini) ;

---

<sup>1</sup>Il y a plusieurs grammaires pour décrire ces expressions mais elles sont toutes (généralement) équivalentes.

- ▷  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \wp(Q)$  est la *fonction de transition* (non-déterministe) ;
- ▷  $Q_0 \subseteq Q$  est l'ensemble des *états initiaux* ;
- ▷  $F \subseteq Q$  est l'ensemble des *états acceptant*.

(C'est la même définition que les automates finis non-déterministes (NFA) mais la différence est que l'on va exécuter ces automates sur des  $\omega$ -mots, et on va donc modifier la définition d'*acceptation*.)

**Définition 8.4.** Une *exécution* de  $\mathcal{A}$  sur  $\sigma \in \Sigma^\omega$  est un  $\rho \in Q^\omega$  tel que

$$\rho(0) \in Q_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \rho(n+1) \in \delta(\rho(n), \sigma(n)).$$

**Remarque 8.1.** L'ensemble

$$\{\rho \in Q^\omega \mid \rho \text{ est une exécution de } \mathcal{A} \text{ sur } \sigma\}$$

peut être non-dénombrable (par non déterminisme), et peut être vide.

**Définition 8.5.** Une exécution  $\rho$  de  $\mathcal{A}$  sur  $\sigma$  est *acceptante* si

$$\exists^\infty t, \quad \rho(t) \in F,$$

on visite infiniment souvent un état acceptant.

**Remarque 8.2.** Par le principe des tiroirs infinis (l'ensemble  $Q$  est fini), une exécution  $\rho$  est acceptante ssi il existe un état acceptant  $q \in F$  que l'on visite une infinité de fois :

$$\exists q \in F, \quad \exists^\infty t \quad \rho(t) = q.$$

**Définition 8.6.** Le langage  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})^{\text{2}} \subseteq \Sigma^\omega$  est défini par

$$\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) := \left\{ \sigma \in \Sigma^\omega \mid \exists \rho \in Q^\omega, \begin{array}{l} \rho \text{ est une exécution} \\ \text{acceptante de } \mathcal{A} \end{array} \right\}.$$

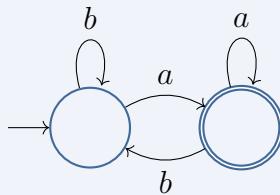
**Remarque 8.3.** La fonction caractéristique de  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})$  :

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})} : \Sigma^\omega &\longrightarrow \{0, 1\} \\ \sigma &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \in \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

**Proposition 8.1.** Étant donné un NBA  $\mathcal{A}$ , on peut tester si  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) = \emptyset$  en temps  $O(|Q| + |\text{transitions}|)$ .

**Preuve.** Il suffit de faire un DFS (c'est Tarjan-approved). □

**Exemple 8.3.** Avec  $\Sigma = \{a, b\}$ , on considère le NBA  $\mathcal{P}$  défini comme

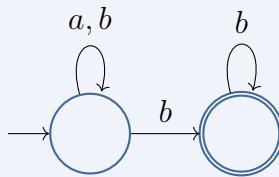


**Fig. 8.1 |** Automate de Büchi non-déterministe  $\mathcal{P}$

où l'on note avec une flèche entrante les états initiaux et avec un double cercle les états acceptants. On a  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{P}) = \mathcal{L}_\omega(P)$ .

<sup>2</sup>L'indice  $\omega$  est très important ici.

**Exemple 8.4.** On considère le NBA  $\mathcal{S}$  défini comme



**Fig. 8.2 | Automate de Büchi non-déterministe  $\mathcal{S}$**

On a  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_\omega(S)$ .

**Remarque 8.4.** On note  $\Pi_2^0$  l'ensemble des intersections dénombrables d'ouverts. On peut montrer que tout langage dans  $\Pi_2^0$  peut s'écrire comme combinaison booléenne (union, intersection, complément) de langages comme  $\mathcal{L}_w(P)$ .

On note  $\Sigma_2^0$  l'ensemble des unions dénombrables de fermés. On peut montrer que tout langage dans  $\Sigma_2^0$  peut s'écrire comme combinaison booléenne (union, intersection, complément) de langages comme  $\mathcal{L}_w(S)$ .

**Théorème 8.1.** Soit  $\Sigma$  un alphabet non vide et fini.

1. Pour tout NBA  $\mathcal{A}$  sur  $\Sigma$ , il existe une expression  $\omega$ -régulière  $G$  sur  $\Sigma$  telle que  $\mathcal{L}_\omega(G) = \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})$ .
2. Pour toute expression  $\omega$ -régulière  $G$  sur  $\Sigma$ , il existe un NBA  $\mathcal{A}$  tel que  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) = \mathcal{L}_\omega(G)$ .

De plus, ces deux « il existe » sont *constructifs*.

**Preuve.** 1. Soit  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$  un NBA. Pour tout  $p, q \in Q$ , on note  $\mathcal{A}_{p,q} = (Q, \Sigma, \delta, \{p\}, \{q\})$ , et on a

$$\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) = \bigcup_{p \in Q_0, q \in F} \mathcal{L}(\mathcal{A}_{o,p}) \cdot (\mathcal{L}(\mathcal{A}_{q,q}) \setminus \{\varepsilon\})^\omega.$$

2. On montre que :

- a) Soient  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  deux NBAs sur  $\Sigma$ . Il existe (constructif) un NBA  $\mathcal{C}$  sur  $\Sigma$  tel que

$$\mathcal{L}_\omega(\mathcal{C}) = \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) \cup \mathcal{L}_\omega(\mathcal{B}).$$

- b) Soit  $\mathcal{A}$  un NFA sur  $\Sigma$  tel que  $\varepsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{A})$ , il existe (constructif) un NBA  $\mathcal{B}$  sur  $\Sigma$  tel que

$$\mathcal{L}_\omega(\mathcal{B}) = (\mathcal{L}(\mathcal{A}))^\omega.$$

- c) Soit  $\mathcal{A}$  un NFA sur  $\Sigma$  et  $\mathcal{B}$  un NBA sur  $\Sigma$ , il existe  $\mathcal{C}$  un NBA sur  $\Sigma$  tel que  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{C}) = \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{L}_\omega(\mathcal{B})$ .

On ne détaillera pas toute la preuve.

- a) Il suffit de mettre les deux automates en parallèle (comme pour l'union disjointe de deux NFAs).
- b) Soit  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$  un NFA tel que  $\varepsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{A})$ . On peut supposer qu'il n'y a pas de transition vers  $Q_0$  et que  $Q_0 \cap F = \emptyset$ .<sup>3</sup> On définit

$$\mathcal{B} := (Q, \Sigma, \delta_{\mathcal{B}}, Q_0, Q_0).$$

où

$$\delta_{\mathcal{B}}(q, a) := \begin{cases} \delta(q, a) & \text{si } \delta(q, a) \cap F = \emptyset \\ \delta(q, a) \cup Q_0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(Ce deuxième cas est important car on ne sait pas toujours le découpage du mot avant d'avoir considéré le mot en entier, ce qui demande de continuer l'exécution dans  $\mathcal{A}$ .)

- c) Il suffit de « mettre en série »  $\mathcal{A}$  puis  $\mathcal{B}$  en connectant les acceptants de  $\mathcal{B}$  avec les finaux de  $\mathcal{A}$  (quitte à prendre  $\mathcal{B}_\iota$ ).

□

**Définition 8.7.** Un langage  $L \subseteq \Sigma^\omega$  est  $\omega$ -régulier s'il existe un NBA  $\mathcal{A}$  tel que  $L = \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})$ .

**Corollaire 8.1.** Si  $L, K \subseteq \Sigma^\omega$  deux langages  $\omega$ -réguliers alors  $L \cup K$  est  $\omega$ -régulier.

Dans la suite, on va voir la stabilité par intersections finies, mais on ne va pas voir de preuve du théorème ci-dessous.

**Théorème 8.2** (Büchi). Si  $L \subseteq \Sigma^\omega$  est  $\omega$ -régulier alors  $\Sigma^\omega \setminus L$  est  $\omega$ -régulier.

**Preuve.** On l'admet (il n'est pas nécessaire pour le lien avec les formules LTL). □

## 8.2 Automates de Büchi déterministes (DBA).

**Définition 8.8.** Un NBA  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$  est *déterministe* si

- ▷  $|Q_0| \leq 1$
- ▷  $\forall q \in Q, \forall a \in \Sigma, |\delta(q, a)| \leq 1$ .

**Proposition 8.2.** Il n'existe pas de DBA  $\mathcal{D}$  sur  $\Sigma$  tel que

$$\mathcal{L}_\omega(\mathcal{D}) = \mathcal{L}_\omega((a + b)^\star \cdot b^\omega).$$

<sup>3</sup>On peut prendre  $\mathcal{A}_\iota := (\overline{Q \sqcup \{\iota\}}, \Sigma, \delta_\iota, \{\iota\}, F)$  avec  $\delta_\iota(\iota, a) = \bigcup_{q \in Q_0} \delta(q, a)$  et  $\delta_\iota(q, a) = \delta(q, a)$  pour  $q \neq \iota$ . On a  $\mathcal{L}(\mathcal{A}_\iota) = \mathcal{L}(\mathcal{A})$  car  $\varepsilon \notin \mathcal{A}$ .

(C'est le langage du NBA  $\mathcal{S}$  vu précédemment.)

**Preuve.** Par l'absurde, soit  $\mathcal{D}$  un DBA tel que  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{D}) = \mathcal{L}_\omega((a + b)^\star \cdot b^\omega)$ . On peut supposer  $\mathcal{D}$  complet :

$$|Q_0| = 1 \quad \text{et} \quad \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma, |\delta(q, a)| = 1.$$

(Il suffit d'ajouter un état puits.)

On notera donc  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$  et  $Q_0 = \{q_\ell\}$ . On définit

$$\begin{aligned} \delta^* : \Sigma^* &\longrightarrow Q \\ \varepsilon &\longmapsto q_\ell \\ u \cdot a &\longmapsto \delta(\delta^*(u), a). \end{aligned}$$

On a que  $b^\omega \in \mathcal{L}_\omega(\mathcal{D})$ , il existe donc  $n_0 \geq 0$  tel que  $\delta^*(b^{n_0}) \in F$ . Puis, on a que  $b^{n_0}ab^\omega \in \mathcal{L}_\omega(\mathcal{D})$ , il existe donc  $n_1 \geq 0$  tel que  $\delta^*(b^{n_0}ab^{n_1}) \in F$ . En itérant, il existe  $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$  tel que

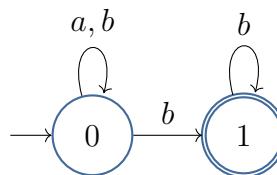
$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \delta^*(b^{n_0}ab^{n_1}ab^{n_2}a \cdots ab^{n_i}) \in F.$$

Considérons  $\sigma = b^{n_0}ab^{n_1}ab^{n_2}a \cdots \in \Sigma^\omega$ . Comme  $\mathcal{D}$  est déterministe, on a que  $\sigma \in \mathcal{L}_\omega(\mathcal{D})$ , ce qui est absurde.  $\square$

On ne peut donc pas déterminiser un automate de Büchi (ce qui explique que le théorème de Büchi n'est pas aussi simple que pour les NFA).

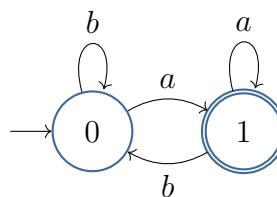
Il existe plusieurs familles d'automates déterministes sur les  $\omega$ -mots équivalents aux NBAs.

Pour faire un DBA équivalent à  $\mathcal{S}$ , on doit changer le formalisme.



**Fig. 8.3 | Automate de Büchi non-déterministe  $\mathcal{S}$**

On peut par exemple considérer le DBA suivant et dire que l'on ne peut voir l'état 1 au plus un nombre fini de fois.



**Fig. 8.4 | Automate de Büchi non-déterministe  $\bar{\mathcal{S}}$**

Il existe plusieurs familles de conditions d'acceptation : Muller, Rabin, Street, Parité, etc. Par exemple, pour Muller, un DBA est défini comme  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, \mathcal{T})$  où  $\delta$  est déterministe et  $\mathcal{T} \subseteq \wp(Q)$ , et où  $\rho \in Q^\omega$  est acceptant ssi  $\{q \mid \exists^\infty t, \rho(t) = q\} \in \mathcal{T}$ .