Propriétés « observables ».

La terminologie « propriété observable » n'est pas utilisée, mais c'est en réalité la compacité.

Remarque 1 (Rappel). Si $f : X \to Y$ alors

$$f_! \dashv f^\bullet : \wp(X) \to \wp(Y),$$

où $f_!$ est l'image directe, et $f^\bullet$ est l'image réciproque.

Ainsi, $f^\bullet : \wp(Y) \to \wp(X)$ préserve les intersections (*i.e.* si $\mathcal{S} \subseteq \wp(Y)$ alors on a que $f^\bullet(\bigcap \mathcal{S}) = \bigcap_{S \in \mathcal{S}} f^\bullet(S)$).

De plus, $f^\bullet$ préserve les unions car $f^\bullet \dashv f_\bullet : \wp(Y) \to \wp(X)$ où

$$\begin{aligned} f_\bullet : \wp(X) &\longrightarrow \wp(Y) \\ A &\longmapsto \bigcup \{B \subseteq Y \mid f^\bullet(B) \subseteq A\}. \end{aligned}$$

Définition 1. Soient $(X, \Omega X)$ et $(Y, \Omega Y)$ deux espaces topologiques. Une fonction $f : X \to Y$ est *continue* si $f^\bullet : \wp(Y) \to \wp(X)$ se restreint en une fonction $f^\bullet : \Omega Y \to \Omega X$, autrement dit

$$\forall V \in \Omega Y, \qquad f^\bullet(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\} \in \Omega(X).$$

On définie ainsi une catégorie d'espaces topologiques.

Un *homéomorphisme* $f : X \to Y$ est une bijection continue telle que

$$f^{-1} : Y \to X$$

est continue.[1]

Lemme 1. Une fonction $f : \Sigma^\omega \to \Gamma^\omega$ est continue si et seulement si

$$\begin{gathered}\forall \alpha \in \Sigma^\omega, \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \Sigma^\omega,\\ \beta(0)\dots\beta(k) = \alpha(0)\dots\alpha(k)\\ \Downarrow\\ f(\beta)(0)\dots f(\beta)(n) = f(\alpha)(0)\dots f(\alpha)(n).\end{gathered}$$

Autrement dit, f est continue ssi on peut déterminer une partie finie de sa sortie à partir d'une partie finie de son entrée.

Soit $P \subseteq \Sigma^\omega$, et on définit la *fonction caractéristique* de P :

$$\begin{aligned}\chi_P : \Sigma^\omega &\longrightarrow \mathbf{2} = \{0,1\}\\ \alpha &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \in P\\ 0 & \text{si } \alpha \notin P\end{cases}.\end{aligned}$$

Avec $\Omega\mathbf{2} = \wp(\mathbf{2}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$ (ce qui est cohérent avec l'idée que $\mathbf{2}$ représente les booléens), on a que χ_P est continue ssi

- ▷ $\chi_P^\bullet\{0\} = \Sigma^\omega \setminus P$ est un ouvert ;
- ▷ $\chi_P^\bullet\{1\} = P$ est un ouvert.

On arrive donc à la notion de *clopen*.

Définition 2. Soit $(X, \Omega X)$ un espace topologique. Une partie $P \subseteq X$ est *clopen* (*ouvert fermé* en français) si P et $X \setminus P$ sont ouverts.

[1] Ce n'est pas évident : par exemple, il y a une bijection $[0,1] \to \mathbb{S}^1$ (où $\mathbb{S}^1$ est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$) continue mais la réciproque ne l'est pas.

Exemple 1. Soit $u \in \Sigma^\star$, on a que $\mathsf{ext}(u)$ est ouvert. Mais, on a aussi que $\Sigma^\omega \setminus \mathsf{ext}(u)$ est ouvert :

$$\Sigma^\omega \setminus \mathsf{ext}(u) = \bigcup \{\mathsf{ext}(v) \mid v \neq u \text{ et } \mathsf{length}(v) = \mathsf{length}(u)\}.$$

Remarque 2. Sur Σ^ω, tous les $\mathsf{ext}(W)$ où $W \subseteq \Sigma^\star$ sont clopen.