

# Langages $\omega$ -réguliers.

Cette partie du cours n'est pas dans les notes de cours mais la source est

*Baier, C. and Katoen, J.-P., Principles of Model Checking, MIT Press, 2008.*

## 1 Expressions $\omega$ -régulières.

L'objet de cette section est l'analogue des expressions régulières pour les  $\omega$ -mots.

Soit  $\Sigma$  un alphabet non vide et fini.

**Définition 1** (Quelques opérations). Soit  $F$  une expression régulière sur  $\Sigma$  telle que  $\varepsilon \notin \mathcal{L}(F)$ . On pose

$$\mathcal{L}(F)^\omega := \left\{ \sigma \in \Sigma^\omega \mid \begin{array}{l} \sigma = v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \cdot \dots \\ \forall i \geq 1, v_i \in \mathcal{L}(F) \end{array} \right\}.$$

Soit, de plus,  $E$  une expression régulière sur  $\Sigma$ . On pose

$$\mathcal{L}(E) \cdot (\mathcal{L}(F))^\omega := \left\{ u \cdot \sigma \in \Sigma^\omega \mid \begin{array}{l} u \in \mathcal{L}(E) \\ \sigma \in \mathcal{L}(F)^\omega \end{array} \right\}.$$

**Attention.** On peut avoir  $u = \varepsilon \in \mathcal{L}(E)$ .

**Définition 2.** Une *expression  $\omega$ -régulière* sur  $\Sigma$  est de la forme

$$G := E_1 \cdot F_1^\omega + \dots + E_n F_n^\omega,$$

où les  $E_i, F_i$  sont des expressions régulières (classiques) sur  $\Sigma$ ,<sup>1</sup> avec  $\varepsilon \notin \mathcal{L}(F_i) \subseteq \Sigma^*$ .

Le langage de  $G$  est

$$\mathcal{L}_\omega(G) := \mathcal{L}(E_1) \cdot (\mathcal{L}(F_1))^\omega \cup \dots \cup \mathcal{L}(E_n) \cdot (\mathcal{L}(F_n))^\omega \subseteq \Sigma^\omega.$$

**Exemple 1.** Avec  $\Sigma = \{a, b\}$ , on a

$$P := (b^*a)^\omega (\equiv \{\varepsilon\} \cdot (b^*a)^\omega \equiv (b^*a) \cdot (b^*a)^\omega),$$

où l'on note  $G \equiv G'$  quand  $\mathcal{L}_\omega(G) = \mathcal{L}_\omega(G')$ .

On a que

$$\mathcal{L}_\omega(P) = \{\sigma \in \Sigma^\omega \mid \exists^\infty t, \sigma(t) = a\}.$$

**Exemple 2.** Avec  $\Sigma = \{a, b\}$  et  $S := (a + b)^* \cdot b^\omega$ , on a

$$\mathcal{L}_\omega(S) = \{\sigma \in \Sigma^\omega \mid \forall^\infty t, \sigma(t) = b\}.$$

## 2 Automates de Büchi non-déterministes (NBA).

Avec ces NBA, on va définir une classe de langages équivalents aux expressions  $\omega$ -régulières.

**Définition 3.** Un NBA est de la forme

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F),$$

où

- ▷  $Q$  est un ensemble **fini** d'états;
- ▷  $\Sigma$  est l'alphabet d'entrée (non vide et fini);

<sup>1</sup>Il y a plusieurs grammaires pour décrire ces expressions mais elles sont toutes (généralement) équivalentes.

- ▷  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \wp(Q)$  est la *fonction de transition* (non-déterministe) ;
- ▷  $Q_0 \subseteq Q$  est l'ensemble des *états initiaux* ;
- ▷  $F \subseteq Q$  est l'ensemble des *états acceptant*.

(C'est la même définition que les automates finis non-déterministes (NFA) mais la différence est que l'on va exécuter ces automates sur des  $\omega$ -mots, et on va donc modifier la définition d'*acceptation*.)

**Définition 4.** Une *exécution* de  $\mathcal{A}$  sur  $\sigma \in \Sigma^\omega$  est un  $\rho \in Q^\omega$  tel que

$$\rho(0) \in Q_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \rho(n+1) \in \delta(\rho(n), \sigma(n)).$$

**Remarque 1.** L'ensemble

$$\{\rho \in Q^\omega \mid \rho \text{ est une exécution de } \mathcal{A} \text{ sur } \sigma\}$$

peut être non-dénombrable (par non déterminisme), et peut être vide.

**Définition 5.** Une exécution  $\rho$  de  $\mathcal{A}$  sur  $\sigma$  est *acceptante* si

$$\exists^\infty t, \quad \rho(t) \in F,$$

on visite infiniment souvent un état acceptant.

**Remarque 2.** Par le principe des tiroirs infinis (l'ensemble  $Q$  est fini), une exécution  $\rho$  est acceptante ssi il existe un état acceptant  $q \in F$  que l'on visite une infinité de fois :

$$\exists q \in F, \quad \exists^\infty t \quad \rho(t) = q.$$

**Définition 6.** Le langage  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})^2 \subseteq \Sigma^\omega$  est défini par

$$\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) := \left\{ \sigma \in \Sigma^\omega \mid \exists \rho \in Q^\omega, \begin{array}{l} \rho \text{ est une exécution} \\ \text{acceptante de } \mathcal{A} \text{ sur } \sigma \end{array} \right\}.$$

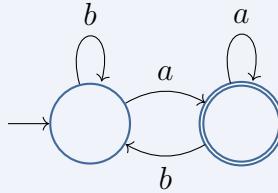
**Remarque 3.** La fonction caractéristique de  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})$  :

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})} : \Sigma^\omega &\longrightarrow \{0, 1\} \\ \sigma &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \in \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

**Proposition 1.** Étant donné un NBA  $\mathcal{A}$ , on peut tester si  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) = \emptyset$  en temps  $O(|Q| + |\text{transitions}|)$ .

**Preuve.** Il suffit de faire un DFS (c'est Tarjan-approved).  $\square$

**Exemple 3.** Avec  $\Sigma = \{a, b\}$ , on considère le NBA  $\mathcal{P}$  défini comme

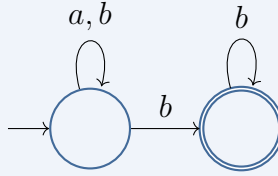


**Fig. 1** | Automate de Büchi non-déterministe  $\mathcal{P}$

où l'on note avec une flèche entrante les états initiaux et avec un double cercle les états acceptants. On a  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{P}) = \mathcal{L}_\omega(P)$ .

<sup>2</sup>L'indice  $\omega$  est très important ici.

**Exemple 4.** On considère le NBA  $\mathcal{S}$  défini comme



**Fig. 2** | Automate de Büchi non-déterministe  $\mathcal{S}$

On a  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_\omega(S)$ .

**Remarque 4.** On note  $\Pi_2^0$  l'ensemble des intersections dénombrables d'ouverts. On peut montrer que tout langage dans  $\Pi_2^0$  peut s'écrire comme combinaison booléenne (union, intersection, complément) de langages comme  $\mathcal{L}_\omega(P)$ .

On note  $\Sigma_2^0$  l'ensemble des unions dénombrables de fermés. On peut montrer que tout langage dans  $\Sigma_2^0$  peut s'écrire comme combinaison booléenne (union, intersection, complément) de langages comme  $\mathcal{L}_\omega(S)$ .

**Théorème 1.** Soit  $\Sigma$  un alphabet non vide et fini.

1. Pour tout NBA  $\mathcal{A}$  sur  $\Sigma$ , il existe une expression  $\omega$ -régulière  $G$  sur  $\Sigma$  telle que  $\mathcal{L}_\omega(G) = \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})$ .
2. Pour toute expression  $\omega$ -régulière  $G$  sur  $\Sigma$ , il existe un NBA  $\mathcal{A}$  tel que  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) = \mathcal{L}_\omega(G)$ .

De plus, ces deux « il existe » sont *constructifs*.

**Preuve.** 1. Soit  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$  un NBA. Pour tout  $p, q \in Q$ , on note  $\mathcal{A}_{p,q} = (Q, \Sigma, \delta, \{p\}, \{q\})$ , et on a

$$\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) = \bigcup_{p \in Q_0, q \in F} \mathcal{L}(\mathcal{A}_{p,q}) \cdot (\mathcal{L}(\mathcal{A}_{q,q}) \setminus \{\varepsilon\})^\omega.$$

2. On montre que :

- a) Soient  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  deux NBAs sur  $\Sigma$ . Il existe (constructif) un NBA  $\mathcal{C}$  sur  $\Sigma$  tel que

$$\mathcal{L}_\omega(\mathcal{C}) = \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) \cup \mathcal{L}_\omega(\mathcal{B}).$$

- b) Soit  $\mathcal{A}$  un NFA sur  $\Sigma$  tel que  $\varepsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{A})$ , il existe (constructif) un NBA  $\mathcal{B}$  sur  $\Sigma$  tel que

$$\mathcal{L}_\omega(\mathcal{B}) = (\mathcal{L}(\mathcal{A}))^\omega.$$

- c) Soit  $\mathcal{A}$  un NFA sur  $\Sigma$  et  $\mathcal{B}$  un NBA sur  $\Sigma$ , il existe  $\mathcal{C}$  un NBA sur  $\Sigma$  tel que  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{C}) = \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{L}_\omega(\mathcal{B})$ .

On ne détaillera pas toute la preuve.

- a) Il suffit de mettre les deux automates en parallèle (comme pour l'union disjointe de deux NFAs).
- b) Soit  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$  un NFA tel que  $\varepsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{A})$ . On peut supposer qu'il n'y a pas de transition vers  $Q_0$  et que  $Q_0 \cap F = \emptyset$ .<sup>3</sup> On définit

$$\mathcal{B} := (Q, \Sigma, \delta_{\mathcal{B}}, Q_0, Q_0).$$

où

$$\delta_{\mathcal{B}}(q, a) := \begin{cases} \delta(q, a) & \text{si } \delta(q, a) \cap F = \emptyset \\ \delta(q, a) \cup Q_0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(Ce deuxième cas est important car on ne sais pas toujours le découpage du mot avant d'avoir considéré le mot en entier, ce qui demande de continuer l'exécution dans  $\mathcal{A}$ .)

- c) Il suffit de « mettre en série »  $\mathcal{A}$  puis  $\mathcal{B}$  en connectant les acceptants de  $\mathcal{B}$  avec les finaux de  $\mathcal{A}$  (quitte à prendre  $\mathcal{B}_\iota$ ).

□

**Définition 7.** Un langage  $L \subseteq \Sigma^\omega$  est  $\omega$ -régulier s'il existe un NBA  $\mathcal{A}$  tel que  $L = \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})$ .

**Corollaire 1.** Si  $L, K \subseteq \Sigma^\omega$  deux langages  $\omega$ -réguliers alors  $L \cup K$  est  $\omega$ -régulier.

Dans la suite, on va voir la stabilité par intersections finies, mais on ne va pas voir de preuve du théorème ci-dessous.

**Théorème 2 (Büchi).** Si  $L \subseteq \Sigma^\omega$  est  $\omega$ -régulier alors  $\Sigma^\omega \setminus L$  est  $\omega$ -régulier.

**Preuve.** On l'admet (il n'est pas nécessaire pour le lien avec les formules LTL). □

### 3 Automates de Büchi déterministes (DBA).

**Définition 8.** Un NBA  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$  est *déterministe* si

- ▷  $|Q_0| \leq 1$
- ▷  $\forall q \in Q, \forall a \in \Sigma, |\delta(q, a)| \leq 1$ .

**Proposition 2.** Il n'existe pas de DBA  $\mathcal{D}$  sur  $\Sigma$  tel que

$$\mathcal{L}_\omega(\mathcal{D}) = \mathcal{L}_\omega((a + b)^* \cdot b^\omega).$$

<sup>3</sup>On peut prendre  $\mathcal{A}_\iota := (Q \sqcup \{\iota\}, \Sigma, \delta_\iota, \{\iota\}, F)$  avec  $\delta_\iota(\iota, a) = \bigcup_{q \in Q_0} \delta(q, a)$  et  $\delta_\iota(q, a) = \delta(q, a)$  pour  $q \neq \iota$ . On a  $\mathcal{L}(\mathcal{A}_\iota) = \mathcal{L}(\mathcal{A})$  car  $\varepsilon \notin \mathcal{A}$ .

(C'est le langage du NBA  $\mathcal{S}$  vu précédemment.)

**Preuve.** Par l'absurde, soit  $\mathcal{D}$  un DBA tel que  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{D}) = \mathcal{L}_\omega((a+b)^* \cdot b^\omega)$ . On peut supposer  $\mathcal{D}$  *complet* :

$$|Q_0| = 1 \quad \text{et} \quad \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma, |\delta(q, a)| = 1.$$

(Il suffit d'ajouter un état puits.)

On notera donc  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$  et  $Q_0 = \{q_\iota\}$ . On définit

$$\begin{aligned} \delta^* : \Sigma^* &\longrightarrow Q \\ \varepsilon &\longmapsto q_\iota \\ u \cdot a &\longmapsto \delta(\delta^*(u), a). \end{aligned}$$

On a que  $b^\omega \in \mathcal{L}_\omega(\mathcal{D})$ , il existe donc  $n_0 \geq 0$  tel que  $\delta^*(b^{n_0}) \in F$ . Puis, on a que  $b^{n_0}ab^\omega \in \mathcal{L}_\omega(\mathcal{D})$ , il existe donc  $n_1 \geq 0$  tel que  $\delta^*(b^{n_0}ab^{n_1}) \in F$ . En itérant, il existe  $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$  tel que

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \delta^*(b^{n_0}ab^{n_1}ab^{n_2}a \cdots ab^{n_i}) \in F.$$

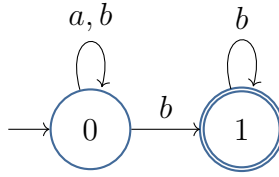
Considérons  $\sigma = b^{n_0}ab^{n_1}ab^{n_2}a \cdots \in \Sigma^\omega$ . Comme  $\mathcal{D}$  est déterministe, on a que  $\sigma \in \mathcal{L}_\omega(\mathcal{D})$ , ce qui est absurde.  $\square$

On ne peut donc pas déterminer un automate de Büchi (ce qui explique que le théorème de Büchi n'est pas aussi simple que pour les NFA).

Il existe plusieurs familles d'automates déterministes sur les  $\omega$ -mots équivalents aux NBAs.

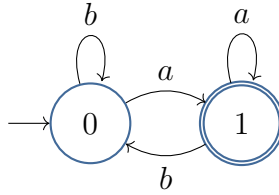
Pour faire un DBA équivalent à  $\mathcal{S}$ , on doit changer le formalisme.





**Fig. 3** | Automate de Büchi non-déterministe  $\mathcal{S}$

On peut par exemple considérer le DBA suivant et dire que l'on ne peut voir l'état 1 au plus un nombre fini de fois.



**Fig. 4** | Automate de Büchi non-déterministe  $\bar{\mathcal{S}}$

Il existe plusieurs familles de conditions d'acceptation : Muller, Rabin, Street, Parité, *etc.* Par exemple, pour Muller, un DBA est défini comme  $(Q, \Sigma, \delta, q_\iota, \mathcal{T})$  où  $\delta$  est déterministe et  $\mathcal{T} \subseteq \wp(Q)$ , et où  $\rho \in Q^\omega$  est acceptant ssi  $\{q \mid \exists^\infty t, \rho(t) = q\} \in \mathcal{T}$ .

## 4 Automates de Büchi généralisés (GNBA).

L'objectif des GNBA est pour la stabilité par intersection finies des expression  $\omega$ -régulières, et seront utiles pour passer de LTL à un NBA.

**Définition 9.** Un GNBA est de la forme

$$\mathcal{G} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, \mathcal{F}),$$

où  $Q, \Sigma, \delta, Q_0$  sont définis comme pour les NBAs et où  $\mathcal{F} \subseteq \wp(Q)$ .

Une exécution de  $\mathcal{G}$  sur  $\sigma \in \Sigma^\omega$  est *acceptante* si

$$\forall F \in \mathcal{F}, \quad \exists^\infty t \quad \rho(t) \in F.$$

Le langage  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{G})$  est

$$\left\{ \sigma \in \Sigma^\omega \mid \begin{array}{l} \text{il existe une exécution} \\ \text{acceptante de } \mathcal{G} \text{ sur } \sigma \end{array} \right\}.$$

**Remarque 5.** Soit  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$  un NBA alors  $\mathcal{G} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, \{F\})$  est un GNBA tel que  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{G}) = \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})$ .

**Lemme 1.** Soient  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  deux GNBA avec  $\mathcal{G}_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, Q_{0,i}, \mathcal{F}_i)$ . Alors,  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{G}_1) \cap \mathcal{L}_\omega(\mathcal{G}_2) = \mathcal{L}_\omega(\mathcal{G})$  où

$$\mathcal{G} = (Q_1 \times Q_2, \delta, Q_{0,1} \times Q_{0,2}, \mathcal{F})$$

avec

$$\begin{aligned} \triangleright \delta((q_1, q_2), a) &= \left\{ (q'_1, q'_2) \mid \begin{array}{l} q'_1 \in \delta_1(q_1, a) \\ q'_2 \in \delta_2(q_2, a) \end{array} \right\}; \\ \triangleright \mathcal{F} &= \{F \times Q_2 \mid F \in \mathcal{F}_1\} \cup \{Q_1 \times F \mid F \in \mathcal{F}_2\}. \end{aligned}$$

□

**Théorème 3.** Soit  $\mathcal{G} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, \mathcal{F})$  où  $\mathcal{F} = \{F_0, \dots, F_{k-1}\}$ . Alors  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{G}) = \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})$  où

$$\mathcal{A} = (Q \times \{0, \dots, k-1\}, \Sigma, \delta_{\mathcal{A}}, Q_0 \times \{0\}, F_0 \times \{0\}),$$

avec

$$\delta_{\mathcal{A}}((q, i), a) = \begin{cases} \{(q', i) \mid q' \in \delta(q, a)\} & \text{si } q \notin F_i \\ \{(q', i+1 \bmod k) \mid q' \in \delta(q, a)\} & \text{sinon} \end{cases}.$$

**Preuve.** ▷ Montrons  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}_\omega(\mathcal{G})$ . Soit  $\sigma \in \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})$  et  $\rho$  une exécution acceptante de  $\sigma$  par  $\mathcal{A}$ . Soit  $\rho \in Q^\omega$  une exécution de  $\mathcal{G}$  sur  $\sigma$  telle que  $\rho = \pi_1 \circ \rho'$ . Soit  $t < t'$  tels que  $\rho'(t) = \rho'(t') \in F_0 \times \{0\}$ . Alors,  $\rho'(t+1) \in Q \times \{1\}$  donc, il existe  $t_1, \dots, t_{k-1}$  tels que  $\rho'(t_i) \in F_i \times \{i\}$  et  $t < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t'$ . Comme il existe une infinité de  $t$  tels que  $\rho(t) \in F_0 \times \{0\}$ , on voit que  $\rho$  est acceptante.

▷ Montrons  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})$ . Soit  $\sigma \in \mathcal{L}_\omega(\mathcal{G})$  et  $\rho \in Q^\omega$  une exécution de  $\sigma$  acceptante. Soit  $\rho'$  une exécution de  $\mathcal{A}$  sur  $\sigma$  telle que  $\pi_1 \circ \rho' = \rho$ . Supposons, par l'absurde, que pour un  $i \in \{0, \dots, k-1\}$  tel que  $\forall^\infty t, \pi_2(\rho(t)) = i$ . Alors  $\forall^\infty t, \pi_2(\rho'(t)) \notin F_i$ . C'est impossible car  $\exists^\infty t, \rho(t) \in F_i$ . Il s'en suit que  $\rho'$  est acceptante.

□

**Corollaire 2.** Si  $L$  et  $K$  sont deux langages  $\omega$ -réguliers alors  $L \cap K$  est  $\omega$ -régulier.

## 5 Traduction de LTL en (G)NBA.

Soit AP **fini** et  $\phi$  une formule LTL sur AP. On veut montrer que  $\llbracket \phi \rrbracket \subseteq (2^{\text{AP}})^\omega$  est  $\omega$ -régulier. Pour cela, on va construire un GNBA  $\mathcal{G}$  tel que  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{G}) = \llbracket \phi \rrbracket$ .

**Remarque 6 (Idée).** Soit  $\sigma \in (2^{\text{AP}})^\omega$ . On « voudrait »  $\mathcal{G}$  tel que les exécutions  $\rho$  de  $\mathcal{G}$  sur  $\sigma$  sont de la forme

$$i \mapsto \{ \psi \mid \sigma \upharpoonright i \in \llbracket \psi \rrbracket \}.$$

Ceci n'est pas possible car on aurait une infinité d'états pour  $\mathcal{G}$ , ce que l'on ne peut pas avoir.

On suppose que LTL est défini par

$$\psi ::= a \mid \text{True} \mid \psi \wedge \psi \mid \neg \psi \mid \bigcirc \psi \mid \psi \text{ Until } \psi$$

– 11/19 –

(on retire les redondances du LTL « habituel »).

**Définition 10.** On pose

$$\text{cl}(\phi) = \{\psi, \neg\psi \mid \psi \text{ sous formule de } \phi\} / \psi \text{ identifié avec } \neg\neg\psi.$$

Les états de  $\mathcal{G}$  vont être certains  $B \subseteq \text{cl}(\phi)$ .

**Définition 11.** On dit que  $B \subseteq \text{cl}(\phi)$  est *maximal-consistant* si :

- ▷ Si  $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \text{cl}(\phi)$  alors  $\psi_1 \wedge \psi_2 \in B$  ssi  $\psi_1, \psi_2 \in B$ .
- ▷ Si  $\text{True} \in \text{cl}(\phi)$  alors  $\text{True} \in B$ .
- ▷ Si  $\psi \in \text{cl}(\phi)$ , alors  $\neg\psi \in B$  ssi  $\psi \notin B$ .

On dit que  $B \subseteq \text{cl}(\phi)$  est *localement consistant pour Until* si

- ▷  $\psi_2 \in B$  implique  $\psi_1 \text{ Until } \psi_2 \in B$  ;
- ▷  $\psi_1 \text{ Until } \psi_2 \in B$  et  $\psi_2 \notin B$  implique  $\psi_1 \in B$ .

**Définition 12.** On pose

$$\mathcal{G} = (Q, \mathbf{2}^{\text{AP}}, \delta, Q_0, \mathcal{F}),$$

où

- ▷  $Q = \left\{ B \subseteq \text{cl}(\phi) \mid \begin{array}{l} B \text{ maximal-consistant} \\ B \text{ localement consistant pour Until} \end{array} \right\}$  ;
- ▷  $Q_0 = \{B \in Q \mid \phi \in B\}$  ;
- ▷  $\delta : Q \times \mathbf{2}^{\text{AP}} \rightarrow \wp(Q)$  est tel que  $B' \in \delta(B, a)$  avec
  1.  $B \cap \text{AP} = A \cap \text{cl}(\phi)$ ,
  2. si  $\circ\psi \in \text{cl}(\phi)$  alors  $\circ\psi \in B \iff \psi \in B'$ ,

3. si  $\psi_1$  Until  $\psi_2 \in \text{cl}(\phi)$  alors

$$\psi_1 \text{ Until } \psi_2 \in B \iff \left( \begin{array}{c} \psi_2 \in B \\ \text{ou} \\ \psi_1 \in B \text{ et } \psi_1 \text{ Until } \psi_2 \in B' \end{array} \right) ;$$

▷  $\mathcal{F} = \{F_{\psi_1 \text{ Until } \psi_2} \mid \psi_1 \text{ Until } \psi_2 \in \text{cl}(\phi)\}$  où

$$F_{\psi_1 \text{ Until } \psi_2} = \{B \in \mathcal{Q} \mid \psi_1 \text{ Until } \psi_2 \in B \implies \psi_2 \in B\}.$$

**Théorème 4.** Avec cette définition, on a  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{G}) = \llbracket \phi \rrbracket$ .

**Preuve.** ▷ Montrons que  $\llbracket \phi \rrbracket \subseteq \mathcal{L}_\omega(\mathcal{G})$ . Soit  $\sigma \in \llbracket \phi \rrbracket$  un mot. On définit  $\rho \in \wp(\text{cl}(\phi))^\omega$  telle que

$$\rho(i) = \{\psi \in \text{cl}(\phi) \mid \sigma \upharpoonright i \in \llbracket \psi \rrbracket\}.$$

On voit que, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\rho(i) \in \mathcal{Q}$ . On a que  $\rho(0) \in \mathcal{Q}_0$  car  $\sigma \upharpoonright 0 = \sigma \in \llbracket \phi \rrbracket$ . De plus, on a que  $\rho(i+1) \in \delta(\rho(i), \sigma(i))$  (on vérifie aisément les trois propriétés sur  $\delta$ ). On montre que  $\rho \in \mathcal{Q}^\omega$  est acceptante. Soit  $\psi_1 \text{ Until } \psi_2 \in \text{cl}(\phi)$ . Si  $\forall^\infty t, \sigma \upharpoonright t \notin \llbracket \psi_1 \text{ Until } \psi_2 \rrbracket$ , alors  $\forall^\infty t, (\psi_1 \text{ Until } \psi_2) \notin \rho(t)$ . Sinon,  $\exists^\infty t, \sigma \upharpoonright t \in \llbracket \psi_1 \text{ Until } \psi_2 \rrbracket$ . Soit  $N \in \mathbb{N}$ . Il existe un certain  $t \geq N$  tel que  $\sigma \upharpoonright t \in \llbracket \psi_1 \text{ Until } \psi_2 \rrbracket$ . Ainsi, il existe  $i$  tel que  $\sigma \upharpoonright (t+i) \in \llbracket \psi_2 \rrbracket$  et pour tout  $j \in \{0, \dots, i-1\}$ ,  $\sigma \upharpoonright (t+j) \in \llbracket \psi_1 \rrbracket$ . Donc  $\psi_2, \psi_1 \text{ Until } \psi_2 \in \rho(t+i)$  et donc  $\rho(t+i) \in F_{\psi_1 \text{ Until } \psi_2}$ . On en conclut que  $\rho$  est acceptante.

▷ Montrons que  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{G}) \subseteq \llbracket \phi \rrbracket$ . Soit  $\sigma \in \mathcal{L}_\omega(\mathcal{G})$  et  $\rho$  une exécution acceptante de  $\mathcal{G}$  sur  $\sigma$ . (On ne donne que l'idée pour cette partie de la preuve.) On va montrer que, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$\rho(i) = \{\psi \in \text{cl}(\phi) \mid \sigma \upharpoonright i \in \llbracket \phi \rrbracket\}.$$

On peut montrer par induction sur  $\psi \in \text{cl}(\phi)$  que, pour tout  $\rho \in \mathcal{Q}^\omega$  et pour tout  $\sigma \in (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$  tel que

- $\forall i, \rho(i+1) \in \delta(\rho(i), \sigma(i))$  ;
  - $\forall F \in \mathcal{F}, \exists^\infty t, \rho(t) \in F$  ;
- alors  $\psi \in \rho(0) \iff \sigma \in \llbracket \psi \rrbracket$ .

□

**Remarque 7.** Le GNFA  $\mathcal{G}$  a  $O(2^{|\phi|})$  états et  $|\mathcal{F}| = O(|\phi|)$ . Donc, on a un NBA  $\mathcal{A}$  tel que  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) = \llbracket \phi \rrbracket$  et  $|Q_{\mathcal{A}}| = O(2^{|\phi| + \log |\phi|})$ .

**Remarque 8.** Supposons que  $|\text{AP}| \geq 1$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , le langage

$$L_n := \{ A_1 \dots A_n A_1 \dots A_n \sigma \mid \sigma \in (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega \}$$

est la sémantique de la formule

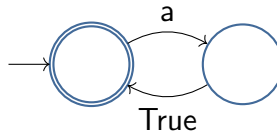
$$\phi_n = \bigwedge_{\mathbf{a} \in \text{AP}} \bigwedge_{1 \leq i \leq n} (\bigcirc^i \mathbf{a} \leftrightarrow \bigcirc^{n+i} \mathbf{a}),$$

et on a que  $|\phi_n| = O(n^2)$ . Or, tout NBA  $\mathcal{A}$  pour  $L_n$  a  $|Q_{\mathcal{A}}| = O(2^n)$ .

**Remarque 9.** Soit  $|\text{AP}| \geq 1$  et  $\mathbf{a} \in \text{AP}$ . Soit

$$L := \{ \sigma \in (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega \mid \forall i, \mathbf{a} \in \sigma(2i) \}.$$

On peut construire un NBA  $\mathcal{A}$  tel que  $L = \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})$ .



**Fig. 5** | NBA sur l'alphabet  $\mathbf{2}^{\text{AP}}$

Le langage  $L$  est le plus grand point fixe de  $X = \mathbf{a} \wedge \bigcirc \bigcirc X$  qui

n'est pas définissable en LTL (le  $X$  doit être sous exactement un  $\bigcirc$  pour être définissable dans LTL). Il n'existe donc pas de formule  $\phi$  LTL telle que  $\llbracket \phi \rrbracket = L$ .

## 6 Théorème de Büchi : complémentation pour les langages $\omega$ -réguliers.

Soit  $\Sigma$  un alphabet fini. L'objectif de cette section est de montrer le théorème suivant.

**Théorème 2 (Büchi).** Si  $L \subseteq \Sigma^\omega$  est  $\omega$ -régulier alors  $\Sigma^\omega \setminus L$  est  $\omega$ -régulier.

**Notation.** Pour  $\sigma \in \Sigma^\omega$  et  $n \leq k$ , on note  $\sigma[n : k] = \sigma(n) \cdots \sigma(k-1)$  avec la convention  $\sigma[n : n] = \varepsilon$ .

**Notation.** Pour  $\mathcal{V} \in \Sigma^*$ , on note  $\mathcal{V}^\omega$  est l'ensemble ds  $\sigma \in \Sigma^\omega$  tels qu'il existe  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  strictement croissante avec  $\sigma[k_n : k_{n+1}] \in \mathcal{V}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Soit  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$  un NBA. On va construire une expression  $\omega$ -régulière dont le langage est  $\Sigma^\omega \setminus \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})$ .

**Notation.** Soient  $q, q' \in Q$   $\omega \in \Sigma^*$ . On note

- ▷  $q \xrightarrow{w} q'$  si  $w \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_{q,q'})$  ;
- ▷  $q \xrightarrow{w}_F q'$  si  $q \xrightarrow{w} q'$  en passant par  $F$  (possiblement en  $q$  et/ou en  $q'$ ).

**Définition 13.** On définit la relation  $\sim_{\mathcal{A}}$  sur  $\Sigma^*$  par :

$$u \sim_{\mathcal{A}} v \iff \forall q, q' \in Q, \begin{cases} q \xrightarrow{u} q' \iff q \xrightarrow{v} q' \\ \text{ET} \\ q \xrightarrow{u}_F q' \iff q \xrightarrow{v}_F q' \end{cases}.$$

**Lemme 2.** La relation  $\sim_{\mathcal{A}}$  est une *congruence*. C'est-à-dire, une relation d'équivalence qui vérifie

$$u \sim_{\mathcal{A}} u' \implies vuw \sim_{\mathcal{A}} vu'w.$$

**Lemme 3.** La congruence  $\sim_{\mathcal{A}}$  est d'*index fini* (i.e. a un nombre fini de classes d'équivalences). Ses classes d'équivalences  $\mathcal{V} \subseteq \Sigma^*$  sont des langages réguliers.

**Preuve.** (Idée) La classe d'équivalence de  $u \in \Sigma^*$  est exactement

$$\begin{aligned} & \bigcap_{q, q' \in Q} \{S(q, q') \mid u \in S(q, q')\} \\ & \cap \bigcap_{q, q' \in Q} \{S^F(q, q') \mid u \in S^F(q, q')\} \\ & \cap \bigcap_{q, q' \notin Q} \{S(q, q') \mid u \notin S(q, q')\} \\ & \cap \bigcap_{q, q' \notin Q} \{S^F(q, q') \mid u \notin S^F(q, q')\} \\ & , \end{aligned}$$

où l'on note

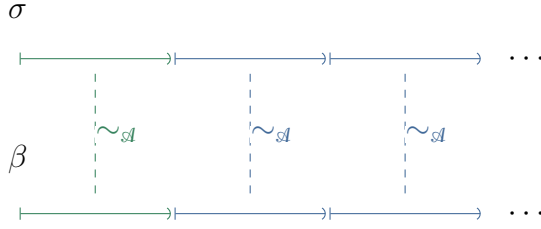
- ▷  $S(q, q') = \{w \in \Sigma^* \mid q \xrightarrow{w} q'\};$
- ▷  $S^F(q, q') = \{w \in \Sigma^* \mid q \xrightarrow{w}_F q'\};$

□

**Lemme 4.** La congruence  $\sim_{\mathcal{A}}$  *sature*  $\mathcal{L}_{\omega}(\mathcal{A})$  : si  $U, V \subseteq \Sigma^*$  sont des classes d'équivalences telles que  $UV^{\omega} \cap \mathcal{L}_{\omega}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$  alors  $UV^{\omega} \subseteq \mathcal{L}_{\omega}(\mathcal{A})$ .

**Preuve.** (Idée) Soit  $\sigma \in UV^{\omega} \cap \mathcal{L}_{\omega}(\mathcal{A})$ . Soit  $\rho$  une exécution acceptante de  $\mathcal{A}$  sur  $\sigma$ . Soit  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  strictement croissante telle que  $\sigma[0 : k_0] \in U$  et  $\sigma[k_n : k_{n+1}] \in V$  pour tout  $n \geq 0$ .





**Fig. 6** | Visuel de la preuve du lemme 4

On remarque que  $\sigma[k_n : k_{n+1}] \in S(\rho(k_n), \rho(k_{n+1}))$  et il existe une infinité de  $n$  tels que  $\sigma[k_n : k_{n+1}] \in S^F(\rho(k_n), \rho(k_{n+1}))$ .

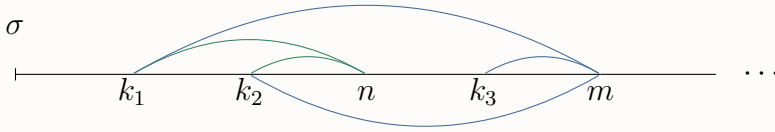
Soit  $\beta \in UV^\omega$  et soit  $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$  strictement croissante telle que  $\beta[0 : \ell_0] \in U$  et  $\beta[\ell_n : \ell_{n+1}] \in V$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Donc  $\beta[0 : \ell_0] \sim_{\mathcal{A}} \sigma[0 : k_0] \in S(\rho(0), \rho(k_0))$  et  $\beta[\ell_n : \ell_{n+1}] \sim_{\mathcal{A}} \sigma[k_n : k_{n+1}]$ . En particulier, on a  $\beta[\ell_n : \ell_{n+1}] \in S(\rho(k_n), \rho(k_{n+1}))$  et il existe une infinité de  $n$  tels que  $\beta[\ell_n : \ell_{n+1}] \in S^F(\rho(k_n), \rho(k_{n+1}))$ .  $\square$

**Proposition 3.** Soit  $\sim$  une congruence d'index fini sur  $\Sigma^*$ . Si  $\sigma \in \Sigma^\omega$  alors il existe  $U, V \subseteq \Sigma^*$  des classes d'équivalences telles que  $\sigma \in UV^\omega$ .

**Preuve.** Fixons  $\sim$  et  $\sigma \in \Sigma^\omega$ . Pour  $k, \ell \in \mathbb{N}$  et  $n > k, \ell$ , on note  $k \equiv_\sigma^n \ell$  ssi  $\sigma[k : n] \sim \sigma[\ell : n]$ . Puis, on note  $k \equiv_\sigma \ell$  s'il existe un certain  $n > k, \ell$  tel que  $k \equiv_\sigma^n \ell$ .

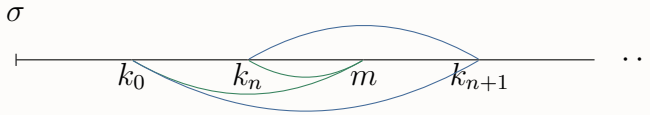
**Lemme 5.** La relation  $\equiv_\sigma$  est une relation d'équivalence d'index fini.

**Preuve.** Pour la transitivité, si  $k_1 \equiv_\sigma k_2$  et  $k_2 \equiv_\sigma k_3$ , on peut regarder la figure ci-dessous.



□

La relation  $\equiv_\sigma$  est d'index fini donc par le principe des tiroirs infinis, il existe  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  strictement croissante telle que  $k_n \equiv_\sigma k_m$  pour toute paire  $n, m$ . Quitte à prendre une sous séquence, on peut supposer que, pour  $n \geq 1$ , on a  $\sigma[k_0 : k_n] \sim_{\mathcal{A}} \sigma[k_n : k_{n+1}]$ .



Par le principe des tiroirs infinis, on peut supposer, pour tout  $n, m \geq 1$  que  $\sigma[k_0 : k_n] \sim \sigma[k_0, k_m]$  et on a donc, pour tout  $n, m \geq 0$ , on ait  $\sigma[k_n : k_{n+1}] \sim \sigma[k_m : k_{m+1}]$ .

Il suffit donc de prendre  $U$  la classe d'équivalence de  $\sigma[0 : k_0]$  et  $V$  la classe des  $\sigma[k_n : k_{n+1}]$ . □

**Remarque 10.** Dans la preuve, on a  $VV \subseteq V$ , i.e. si  $u, v \in V$  alors  $uv \in V$ .

**Corollaire 3.** Soit  $\sim$  une congruence d'index fini sur  $\Sigma^*$  et

soit  $L \subseteq \Sigma^\omega$  saturé par  $\sim$ . Alors

$$L = \bigcup \left\{ UV^\omega \mid \begin{array}{l} UV^\omega \cap L \neq \emptyset \\ U, V \text{ classes pour } \sim \end{array} \right\}.$$

**Théorème 2 (Büchi).** Si  $L \subseteq \Sigma^\omega$  est  $\omega$ -régulier alors  $\Sigma^\omega \setminus L$  est  $\omega$ -régulier.

**Preuve.** Avec  $L = \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})$ , on a que  $\Sigma^\omega \setminus L$  est saturé par  $\sim_{\mathcal{A}}$ . Si  $U$  et  $V$  sont des classes d'équivalences pour  $\sim_{\mathcal{A}}$ , alors  $UV^\omega \cap (\Sigma^\omega \setminus L) \neq \emptyset$  et donc  $UV^\omega \cap L = \emptyset$  donc  $U, V^\omega \subseteq \Sigma^\omega \setminus L$ . Donc,

$$\Sigma^\omega \setminus L = \bigcup \left\{ UV^\omega \mid \begin{array}{l} UV^\omega \cap L = \emptyset \\ U, V \text{ classes pour } \sim \end{array} \right\},$$

et donc  $\Sigma^\omega \setminus L$  est  $\omega$ -régulier car

- ▷  $U, V \subseteq \Sigma^\omega$  sont des  $\sim_{\mathcal{A}}$ -classes donc réguliers ;
- ▷  $\sim_{\mathcal{A}}$  est d'index fini.

De plus, on peut décider si  $UV^\omega \cap L = \emptyset$  donc on peut *construire* une expression  $\omega$ -régulière.  $\square$