

Bisimulation.

L'idée de ce chapitre est d'identifier les systèmes de transitions avec une « même structure de branchement ». Par exemple, on identifie les deux systèmes suivants (le premier est un « dépliement » du second).

$$\begin{array}{ll} TS_1 & \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots \\ TS_2 & \longrightarrow \bullet \\ & \quad \downarrow \end{array}$$

Fig. 1 | Deux systèmes de transitions identifiés par bisimulation

Définition 1. Soient TS_0 et TS_1 où

$$TS_i = (S_i, \text{Act}, \rightarrow_i, I_i, \text{AP}, L_i),$$

où l'on note $s_i \xrightarrow{\alpha} s'_i$ où $\alpha \in \text{Act}$ et $s_i, s'_i \in S_i$, et $L_i : S_i \rightarrow \wp(\text{AP})$.

Une *bisimulation* entre TS_0 et TS_1 est une relation $\mathcal{R} \subseteq S_0 \times S_1$ telle que

1. si $s_0 \mathcal{R} s_1$ alors $L_0(s_0) = L_1(s_1)$;
2. si $s_0 \mathcal{R} s_1$ et $s_0 \xrightarrow{\alpha} s'_0$, alors il existe $s'_1 \in S_1$ tel que $s_1 \xrightarrow{\alpha} s'_1$ et $s'_0 \mathcal{R} s'_1$.
3. de même symétriquement.

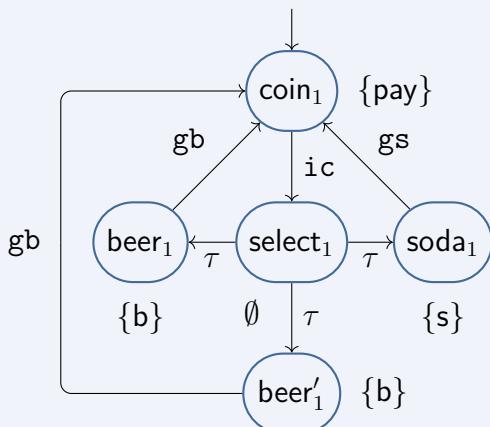
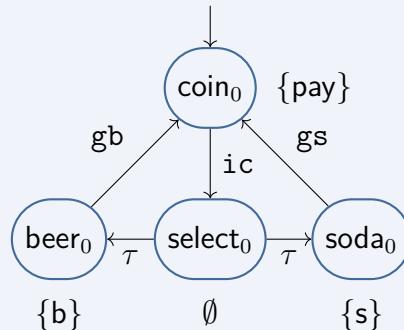
Ces deux dernières conditions peuvent être visualisées comme les

deux diagrammes ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc}
 s_0 & \xrightarrow{\mathcal{R}} & s_1 \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\
 s'_0 & \xrightarrow{\mathcal{R}} & s'_1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 s_0 & \xrightarrow{\mathcal{R}} & s_1 \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\
 s'_0 & \xrightarrow{\mathcal{R}} & s'_1
 \end{array}.$$

Exemple 1. Avec les deux systèmes de transitions suivants, on peut construire une bisimulation \mathcal{R} avec

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{l} (\text{coin}_0, \text{coin}_1), (\text{select}_0, \text{select}_1), (\text{beer}_0, \text{beer}_1), \\ (\text{beer}_0, \text{beer}'_1), (\text{soda}_0, \text{soda}_1) \end{array} \right\}.$$



Définition 2. Soient TS_0 et TS_1 deux systèmes de transitions. La relation de *bisimilarité* entre TS_0 et TS_1 est donnée par

$$s_0 \sim s_1 \iff \exists \mathcal{R} \text{ une bisimulation, } s_0 \mathcal{R} s_1.$$

On dit alors que s_0 est *bisimilaire* à s_1 .

Lemme 1. 1. Étant donné TS , on a que s est bisimilaire à s (car $\{(s, s) \mid s \in S\}$ est une bisimulation entre TS et lui-même).

2. Si \mathcal{R} est une bisimulation entre TS_1 et TS_2 , alors

$$\mathcal{R}^{-1} := \{(s_2, s_1) \mid (s_1, s_2) \in \mathcal{R}\}$$

est une bisimulation entre TS_2 et TS_1 .

3. Si \mathcal{R} est une bisimulation entre TS_1 et TS_2 , et \mathcal{S} est une bisimulation entre TS_2 et TS_3 , alors

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} := \left\{ (s_1, s_3) \mid \exists s_2, \begin{array}{l} (s_1, s_2) \in \mathcal{R} \\ (s_2, s_3) \in \mathcal{S} \end{array} \right\}$$

est une bisimulation entre TS_1 et TS_3 .

□

Lemme 2. 1. La relation de bisimilarité \sim entre TS_1 et TS_2 est une bisimulation.

2. Si \mathcal{R} est une bisimulation entre TS_1 et TS_2 alors $\mathcal{R} \subseteq \sim$.
3. La relation \sim entre TS et lui-même est une relation d'équivalence.

Preuve. (Idée)

1. Soient $s_1 \sim s_2$, et soit donc \mathcal{R} telle que $s_1 \mathcal{R} s_2$. Donc,

- ▷ $L_1(s_1) = L_2(s_2)$;
- ▷ comme $s'_1 \mathcal{R} s'_2$, on a $s'_1 \sim s'_2$ où

$$\begin{array}{ccc} s_0 & \xrightarrow{\mathcal{R}} & s_1 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha ; \\ s'_0 & \dashrightarrow^{\mathcal{R}} & s'_1 \end{array}$$

- ▷ et symétriquement pour le cas dual.
2. Si $s_1 \mathcal{R} s_2$ alors $s_1 \sim s_2$ par définition de \sim .
 3. On a les points suivants.

Réflexivité. On a $s \sim s$.

Symétrie. Si $s \sim s'$ alors $s \mathcal{R} s'$ pour une certaine bisimulation \mathcal{R} , et donc $s' \mathcal{R}^{-1} s$ et donc $s \sim s'$.

Transitivité. Si $s \sim s'$ et $s' \sim s''$ alors $s \mathcal{R} s'$ et $s' \mathcal{R} s''$, et donc $s (\mathcal{R} \circ \mathcal{R}) s''$ d'où $s \sim s''$.

□

1 Quotient par bisimulation.

Définition 3 (Quotient par bisimulation). Soit un système de transitions $TS = (S, \text{Act}, \rightarrow, I, \text{AP}, L)$. On définit TS_\sim par :

- ▷ $S_\sim := \{[s]_\sim \mid s \in S\}$;
- ▷ $\text{Act}_\sim := \text{Act}$;
- ▷ $[s]_\sim \xrightarrow{\alpha} [s']_\sim$ ssi $s \xrightarrow{\alpha} s'$;
- ▷ $I_\sim = \{[s]_\sim \mid s \in I\}$;
- ▷ $\text{AP}_\sim := \text{AP}$;
- ▷ $L_\sim([s]_\sim) = L(s)$.

Lemme 3. Pour tout $s \in I$ et $s \sim [s]_\sim$.

Définition 4. Soient $TS_1 = (S_1, \text{Act}, \rightarrow_1, I_1, \text{AP}, L_1)$ et $TS_2 = (S_2, \text{Act}, \rightarrow_2, I_2, \text{AP}, L_2)$ deux systèmes de transitions.

On note $TS_1 \approx TS_2$ s'il existe une bisimulation \mathcal{R} entre TS_1 et TS_2 telle que

1. pour tout $s_1 \in I_1$, il existe $s_2 \in I_2$ tel que $s_1 \mathcal{R} s_2$;
2. pour tout $s_2 \in I_2$, il existe $s_1 \in I_1$ tel que $s_1 \mathcal{R} s_2$.

2 Bisimilarité et équivalence de traces.

Proposition 1. Soient TS_1, TS_2 sur un même ensemble d'actions Act et de propositions atomiques AP . Si $TS_1 \approx TS_2$ alors

$$\text{Tr}^\omega(TS_1) = \text{Tr}^\omega(TS_2).$$

Corollaire 1. Si $TS_1 \approx TS_2$ alors, pour toute propriété LT $P \subseteq (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$, on a

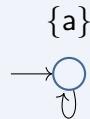
$$TS_1 \models P \iff TS_2 \models P.$$

Exemple 2. Pour un système de transitions TS , on a $TS \approx TS_\sim$, on peut donc se ramener au quotient par bisimilarité, pour tester si $TS \approx P$.

Exemple 3. Le quotient par bisimilarité du système de transitions



est le système de transitions



car tous les états sont bisimilaires dans le système de transitions original.