

# Complexité en espace.

## 1 Définitions et premières propriétés.

**Définition 1.** L'espace utilisé par une machine de Turing déterministe sur une entrée  $x$  est le nombre de cases distinctes utilisés sur les rubans de travail<sup>1</sup> au cours de son calcul sur  $x$ .

On dit que  $M$  fonctionne en espace  $s(n)$  si  $M$  s'arrête sur toutes ses entrées et utilise un espace au plus  $s(n)$  sur toute entrée de taille  $n$ .

On note  $\text{DSPACE}(s(n))$  l'ensemble des langages reconnus par une machine de Turing déterministe fonctionnant en espace  $O(s(n))$ .

**Remarque 1.** On supposera que, pour le ruban d'entrée, la tête de lecture ne dépassera jamais la fin de l'entrée.

**Exemple 1.**   ▷ Un algorithme naïf pour SAT utilise un espace en  $O(n)$ . En effet, il suffit d'énumérer toutes les valuations possibles avec un compteur binaire de taille  $n$ , puis de vérifier si une de ces valuations satisfait la formule.

▷ L'addition de deux entiers de taille  $n$  peut s'effectuer en espace  $O(\log n)$ . En effet, il suffit de stocker les positions des bits en cours d'addition et la retenue.

---

1. Pas le ruban d'entrée, ni le ruban de sortie, ceci permet de parler de machine utilisant un espace logarithmique, bien que la taille de l'entrée soit  $n$ .

**Définition 2.** On dit que  $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est *constructible en espace* s'il existe une machine de Turing qui, sur l'entrée  $1^n$  calcule  $1^{t(n)}$  en espace  $O(t(n))$ .

**Proposition 1.** On a l'inclusion

$$\text{NTIME}(f(n)) \subseteq \text{DSpace}(f(n)).$$

**Preuve.** Supposons  $f$  constructible en espace  $(*)$ .

Soit  $L \in \text{NTIME}(f(n))$  et  $M$  une machine non-déterministe reconnaissant  $L$  en temps au plus  $c f(n)$ . On code un chemin de calcul de  $M$  par  $y \in \llbracket 0, R-1 \rrbracket^{c f(n)}$  où  $R$  désigne le nombre de choix possibles à chaque étape (il dépend de  $M$ ).

- 1 : Calculer  $f(n)$  en espace  $O(f(n))$
- 2 : **pour tout**  $y$  de taille  $c f(n)$  **faire**
- 3 :     Simuler  $M$  sur  $x$  en suivant les choix donnés par  $y$
- 4 :     **si** la simulation accepte **alors**
- 5 :     |     **Accepter**
- 6 : **Rejeter**

On a un algorithme en espace  $f(n)$  qui teste l'appartenance au langage  $L$ .

Sans l'hypothèse  $(*)$ , on peut obtenir la même inclusion avec une légère modification de l'argument. On fait fonctionner le même algorithme pour des chemins de calcul de longueur  $t = 1, 2, \dots$  jusqu'à ce que la simulation de  $M$  sur l'entrée de  $x$  s'arrête (ce qui arrive forcément si  $x \in L$ ). On s'arrête pour  $t = c f(n)$  au plus.  $\square$

**Proposition 2.** On a l'inclusion

$$\text{DSpace}(s(n)) \subseteq \text{DTIME}(2^{O(s(n))}),$$

dès lors que  $s(n) \geq \log n$ .

**Preuve.** Soit  $N$  tel que, si un calcul prend un temps plus long que  $N$ , alors il boucle. Nous allons montrer que  $N = 2^{O(s(n))}$ . On compte le nombre de configurations distinctes possibles d'une machine  $M$  sur l'entrée  $x$  de taille  $n$ . Une configuration est donnée<sup>2</sup> par :

- ▷ l'état courant (il y a au plus  $|Q|$  possibilités) ;
- ▷ la position de la tête de lecture sur le ruban d'entrée (il y a au plus  $n$  possibilités) ;
- ▷ le contenu des cases utilisées sur les rubans de travail (il y a au plus  $|\Gamma|^{s(n)}$  possibilités) ;
- ▷ la position des têtes de lecture sur les rubans de travail (il y a au plus  $s(n)^k$  possibilités où  $k$  est le nombre de rubans de travail).

D'où la borne annoncée. □

**Remarque 2.** A-t-on  $\text{DSPACE}(1) \subseteq \text{DTIME}(1)$  ? Non ! En effet, retourner le dernier caractère de l'entrée se fait en espace  $O(1)$  mais pas en temps  $O(1)$ .

**Définition 3.** On définit  $L = \text{DSPACE}(\log n)$ .

**Corollaire 1.** On a les inclusions

$$L \subseteq P \subseteq NP \subseteq \text{PSPACE},$$

où  $\text{PSPACE}$  est l'ensemble des problèmes définis en espace polynomial (défini plus tard). □

**Théorème 1.** Si deux fonctions  $f, g : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  sont calculables en espace  $s(n) \geq \log n$  alors leur composée  $g \circ f$  est

---

2. On oublie la position de la tête de lecture sur le ruban de sortie, vu qu'elle n'influe pas le calcul (car écriture uniquement).

calculable en espace  $O(s(|x|)) + s(|f(x)|)$ .

**Preuve.** L'idée est de calculer un bit de  $f(x)$  uniquement quand on en a besoin pour calculer  $g(f(x))$ .

**Lemme 1.** Étant donné  $i$ , on peut calculer le  $i$ -ème bit de  $f(x)$  en espace  $O(s(|x|))$ .

**Preuve.** Faire fonctionner  $M_f$  (la machine calculant  $f$  en espace logarithmique) sans écrire sur le ruban de sortie, mais simplement en comptant le nombre de bits que l'on voulait écrire. Dès lors que  $i$  est atteint, on renvoie le bit courant : c'est le  $i$ -ème bit de  $f(x)$ .  $\square$

On utilise ensuite l'algorithme suivant :

```

1 :  $i \leftarrow 0$ 
2 : tant que  $M_g$  ne s'est pas arrêtée faire
3 :   Calculer le  $i$ -ème bit de  $f(x)$  (par le lemme)
4 :   L'écrire sur le ruban d'entrée de  $M_g$ 
5 :   Effectuer un pas de calcul de  $M_g$ 
6 :   si la tête  $\rightarrow$  sur le ruban d'entrée de  $M_g$  alors
7 :      $i \leftarrow i + 1$ 
8 :   sinon si la tête  $\leftarrow$  sur le ruban d'entrée de  $M_g$  alors
9 :      $i \leftarrow i - 1$ 

```

$\square$

**Corollaire 2.** Si  $f$  et  $g$  sont calculables en espace  $O(\log n)$  alors  $g \circ f$  est calculable en espace  $O(\log n)$ .  $\square$

## 2 Hiérarchie en espace.

**Théorème 2.** Si  $s$  est constructible en espace et  $s \geq \log n$  alors il existe un langage reconnaissable en espace  $O(s(n))$  mais pas en espace  $o(s(n))$ .

**Corollaire 3.** On a les inclusions strictes suivantes :

$$\underbrace{\text{DSPACE}(\log n)}_{\text{L}} \subsetneq \text{DSPACE}(n) \subsetneq \text{DSPACE}(n^2) \subsetneq \cdots \subsetneq \text{PSPACE}.$$

**Note 1.** Il manque une partie du cours ici... mais, promis, je la recopie bientôt.

**Remarque 3 (Rappels).** On a que

- ▷  $\text{NSPACE}(s(n)) \subseteq \text{DTIME}(2^{O(s(n))})$
- ▷ et  $\text{NSPACE}(s(n)) \subseteq \text{DSpace}(s(n)^2)$  (Savitch)

lorsque  $s(n) \geq \log n$ . On a

$$\text{L} \subseteq \text{NL} \subseteq \text{P} \subseteq \text{NP} \subseteq \text{PSPACE},$$

et avec Savitch et la hiérarchie en espace, on a

$$\text{NL} \subsetneq \text{PSPACE}.$$

**Définition 4.** On définit

$$\text{PSPACE} := \bigcup_{k \geq 1} \text{DSpace}(n^k).$$

**Remarque 4.** On peut aussi définir la classe  $\text{NPSPACE}$  mais cette classe est égale à  $\text{PSPACE}$  par Savitch. On a donc

$$\text{P} \subseteq \underset{(*)}{\text{NP}} \subseteq \underset{(**)}{\text{PSPACE}} \subseteq \text{EXPTIME} = \bigcup_{k \geq 1} \text{DTIME}(2^{n^k}),$$

où

- ▷  $(*)$  est vraie car  $\text{NTIME}(t(n)) \subseteq \text{DSpace}(t(n))$  ;
- ▷  $(**)$  est vraie car  $\text{DSpace}(s(n)) \subseteq \text{DTIME}(2^{O(s(n))})$ .

On sait, de plus, que  $\text{P} \subsetneq \text{EXPTIME}$  par la hiérarchie en temps (variante (vue en TD) de la hiérarchie en espace vue avant).

### 3 Formules booléennes quantifiées.

On autorise des quantificateurs universels et existentiels aux formules vues précédemment.

**Exemple 2.** Les formules

$$\begin{aligned} & \triangleright \forall x \exists y \left( \overbrace{(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})}^{\text{c'est } x \text{ xor } y} \right) \\ & \triangleright \exists y \forall x \left( (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \right) \end{aligned}$$

sont des formules booléennes quantifiées. La première est vraie (avec  $y = \bar{x}$ ) mais pas la seconde (avec  $x = y$ ). On suppose que les quantificateurs sont tous en début de formule (forme prénexe).

**Définition 5.** On définit le problème **QBF** comme

QBF	<p><b>Entrée.</b> Une formule booléenne quantifiée <math>F</math> (close)</p> <p><b>Sortie.</b> Est-ce que <math>F</math> est vraie ?</p>
-----	---

**Proposition 3.** On a **QBF**  $\in$  **PSPACE**.

**Preuve.** On utilise l'algorithme suivant.

1. Si  $F$  ne contient pas de quantificateurs, accepter si  $F$  s'évalue à vrai et rejeter si  $F$  s'évalue à faux.
2. Si  $F = \exists x G$ , on décide récursivement avec  $G[x := 0]$  et  $G[x := 1]$ . Si une de ces formules s'évalue à vrai, accepter sinon rejeter.
3. Si  $F = \forall x G$ , on décide récursivement avec  $G[x := 0]$  et  $G[x := 1]$ . Si une de ces formules s'évalue à faux, rejeter sinon accepter.

Cet algorithme utilise un espace linéaire. □

**Théorème 3.** Le problème **QBF** est **PSPACE**-complet.

**Preuve.** Supposons que  $A$  est résolu en espace  $n^k$  par une machine  $M$  à un ruban. On va montrer que  $A \leq_P \text{QBF}$ .

On considère le diagramme espace-temps de taille  $n^k$  en espace



et  $2^{c \cdot n^k}$  en temps. On ne peut pas simplement utiliser la même preuve que pour SATcar le diagramme est exponentiel.

On construit une formule  $\phi_t(c_1, c_2)$  qui exprime qu'on peut aller de la configuration  $c_1$  en la configuration  $c_2$  en au plus  $2^t$  étapes de calcul.

On a donc que  $M$  accepte si  $\phi_{c \cdot n^k}(c_{\text{initiale}}, c_{\text{finale}})$ .<sup>3</sup>

La formule  $\phi_0(c_1, c_2)$  est de taille polynomiale (c.f. preuve du théorème de Cook).

Pour aller de  $\phi_t$  à  $\phi_{t+1}$ , on cherche la configuration du milieu. On pourrait utiliser  $(*) := \exists c \phi_t(c_1, c) \wedge \phi_t(c, c_2)$  qui est correcte mais trop couteuse (taille exponentielle). On choisit plutôt :

$$\exists c \forall c_3 \forall c_4 [(c_3 = c_1 \wedge c_4 = c) \vee (c_3 = c \wedge c_4 = c_2)] \Rightarrow \phi_t(c_3, c_4).$$

Cette formule est logiquement équivalente à  $(*)$  (en regardant les cas où  $(c_3, c_4) = (c_1, c)$  et  $(c_3, c_4) = (c, c_2)$ ). Il est important de se rappeler que  $c, c_3, c_4$  ne sont pas des variables mais des  $n$ -uplets de taille  $O(n^k)$  variables booléennes. La taille de  $\phi_{t+1}$  augmente de  $O(n^k)$  par rapport à la taille de  $\phi_t$ . Au final, on est de taille  $O(n^{2k})$ .<sup>4</sup>  $\square$

Le problème **QBF** est « le » problème **PSPACE**-complet. En TD, on fera des réductions de certains problèmes à **QBF**.

**Théorème 4 (Savitch).** On a  $\text{NSPACE}(s(n)) \subseteq \text{DSPACE}(s(n)^2)$  si  $s(n) \geq \log n$ .<sup>5</sup>  $\square$

**Corollaire 4.** On a  $\text{NL} \subseteq \text{DSPACE}(\log^2 n)$ .

3. On peut considérer qu'il y a une unique configuration acceptante, quitte à transformer tout état acceptant en un état qui efface tout le ruban et remet la tête en position initiale.

4. Le passage quadratique est similaire au théorème de Savitch.

5. Depuis sa preuve, on n'a jamais réussi à améliorer ce résultat, ni montrer qu'un facteur carré est nécessaire.

**Proposition 4.** On a que  $\text{PATH} \in \text{DSPACE}(\log^2 n)$ , où

$\text{PATH}$	<p><b>Entrée.</b> Un graphe <math>G</math> orienté, et <math>s, t \in V(G)</math></p> <p><b>Sortie.</b> Existe-t-il un chemin de <math>s</math> à <math>t</math> dans <math>G</math> ?</p>
---------------	--

**Remarque 5.** En TD, on a vu que  $\text{PATH}$  est  $\text{NL}$ -complet, et donc la proposition implique le corollaire. En effet, soit  $A \in \text{NL}$  et  $x \in \{0, 1\}^n$ , on a

$$x \in A \iff f(x) \in \text{PATH},$$

où  $f : A \leq_L \text{PATH}$  est la réduction en espace logarithmique (car le problème  $\text{PATH}$  est  $\text{NL}$ -complet). La construction de  $f(x)$  se fait en espace  $O(\log n)$  et décider si  $f(x) \in \text{PATH}$  ou non peut se faire en espace  $O(\log^2 |f(x)|)$ , or  $|f(x)|$  est polynomial en  $|x| = n$ , d'où la borne annoncée.

**Preuve (de la proposition).** On donne un algorithme  $\text{path}(G, u, v, i)$  en espace  $O(\log^2 n)$  qui décide s'il existe, dans  $G$ , un chemin de  $u$  à  $v$  de longueur au plus  $2^i$ . On pourra donc résoudre  $\text{PATH}$  en appelant  $\text{path}(G, s, t, \lceil \log n \rceil)$ .

```

1 : Procédure  $\text{path}(G, u, v, i)$ 
2 :   si  $i = 0$  alors
3 :     si  $uv \in E(G)$  ou  $u = v$  alors Accepter
4 :   sinon Rejeter
5 :   pour tout sommet  $w \in V(G)$  faire
6 :     si  $\text{path}(G, u, w, i - 1)$  et  $\text{path}(G, w, v, i - 1)$  alors
7 :       Accepter
8 :   Rejeter

```

Pour la correction, on montre si  $\text{path}(G, u, v, i)$  accepte alors il existe un chemin de longueur au plus  $2^i$  par récurrence sur  $i$ .

▷ Pour le cas  $i = 0$ , c'est bon par le premier « **si** ».

- ▷ Pour l'hérédité, si on a un chemin de longueur au plus  $2^{i-1}$  de  $u$  à  $w$  et un chemin de longueur au plus  $2^{i-1}$  de  $w$  à  $v$ , on concatène ces chemins pour obtenir un chemin de  $u$  à  $v$  de longueur au plus  $2^i$ .

Réciproquement, s'il existe un chemin de  $u$  à  $v$  de longueur au plus  $2^i$ , alors  $\text{path}(G, u, v, i)$  accepte, car il suffit de choisir  $w$  comme sommet milieu du chemin.

On a  $O(\log n)$  appels récurifs ; et à chaque appel, on doit mémoriser  $w$  ce qui demande  $O(\log n)$  bits. On en déduit une complexité en espace en  $O(\log^2 n)$ .  $\square$

**Preuve (du théorème de Savitch).** Supposons que  $A$  peut être résolu par une machine non-déterministe  $M$  en espace  $O(s(n))$  où  $s(n)$  est constructible en espace. Soit  $x \in \{0, 1\}^n$  une instance de  $A$ .

On considère le graphe  $G_x$  des *configurations potentielles* de la machine  $M$  sur l'entrée  $x$ , c'est-à-dire l'ensemble des configurations avec  $x$  en entrée et au plus  $c \cdot s(n)$  cases utilisées sur chaque ruban de travail.

**Lemme 2.** Le graphe  $G_x$  a  $2^{O(s(n))}$  sommets et peut être construit en espace  $O(s(n))$ .  $\square$

On a que

$$x \in A \quad \Longleftrightarrow \quad (G_x, s, t) \in \text{PATH},$$

où  $s$  est la configuration initiale de  $M$  sur l'entrée  $x$  et  $t$  la configuration acceptante (qu'on supposera unique, *c.f.* preuve de la **PSPACE**-complétude de **QBF**). Par le lemme, on a que  $(G_x, s, t)$  se fait en espace  $O(s(n))$ . Décider si  $(G_x, s, t) \in \text{PATH}$  se fait en espace  $O(\log^2 |G_x|)$  donc  $O(s(n)^2)$ .  $\square$

**Remarque 6.** La preuve précédente utilise deux résultats

- ▷ le théorème de composition *amélioré* :

**Théorème 5 (Composition).** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions calculables en espace  $s_f(n)$  (*resp.*  $s_g(n)$ ). On peut calculer la composée  $(f \circ g)(x)$  en espace  $O(s_g(|x|) + s_f(|g(x)|))$ .  $\square$

- ▷ et le fait que l'on pourra supprimer l'hypothèse de constructibilité de  $s(n)$  :

Pour cela, on essaye  $s(n) = 1, 2, \dots$  et on s'arrête à  $s(n) = i$  si aucune configuration de taille  $i + 1$  n'est accessible à partir de la configuration initiale sur l'entrée  $x$  (appel à l'algorithme pour **PATH**).

**Remarque 7.** Le problème **PATH** dans les graphes non-orientés est dans **L** ! C'est un résultat récent (2005).

La prochaine fois, on s'intéresse aux oracles.