Hugo SALOU

Récap #2 du traquenard HoTT

TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE et CATÉGORIES

I Revêtements de $\mathbb{S}^1$

On sait trois choses :

1) $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$

2) les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$

3) CORRESPONDANCE DE GALOIS :

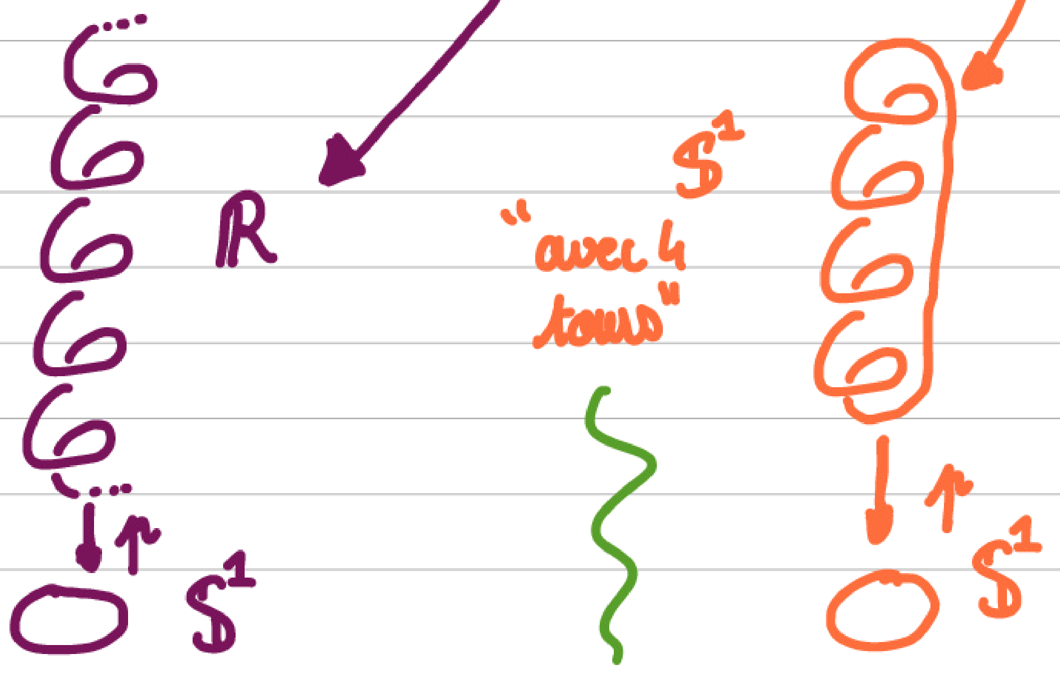
Revêtements (pointés connexes) de (X,x) $\longleftrightarrow$ Sous-groupes de $\pi_1(X,x)$

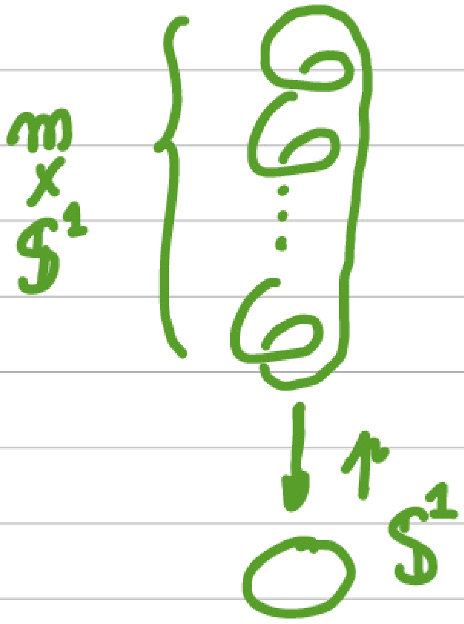
$$(\tilde{X},\tilde{x}) \longmapsto \pi_1(\tilde{X},\tilde{x})$$

Ainsi, il suffit de s'intéresser aux sous-groupes de $\pi_1(S^1)$ pour connaître les revêtements pointés connexes de S^1.

$$m\mathbb{Z} \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m \neq 0 \\ \{0\} & \text{si } m = 0 \end{cases}$$

On s'attend donc à avoir $|\mathbb{N}|$ revêtements dont un avec un $\pi_1(-)$ trivial, et les autres "ressemblent" à des cercles.





et ça se généralise à $m > 0$ tours

On a donc trouvé les revêtements pointés connexes de $\mathbb{S}^1$.

En effet, on a bien que :

"m tours"

$$[\pi_1(\mathbb{S}^1) : \pi_1(\mathbb{S}^1[m])] = [\langle \ell \rangle : \langle \ell^m \rangle]$$

$$\parallel$$

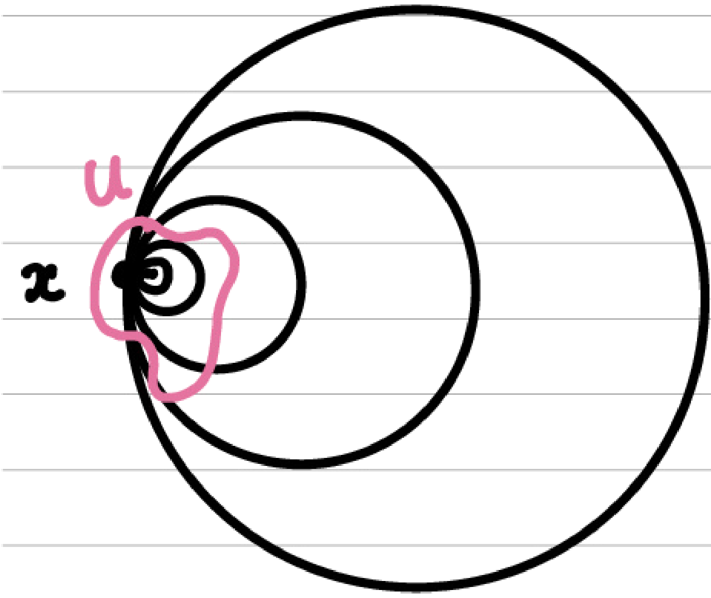
$$[\mathbb{Z} : m\mathbb{Z}] = m.$$

II Construction explicite du revêtement universel

Le revêtement universel de (X,x) est l'unique revêtement pointé connexe de (X,x) de $\pi_1(-)$ trivial.

↳ Comment le montrer à l'aide de la correspondance de Galois ?

Il existe toujours, sous quelques hypothèses topologiques pas très intéressantes... mais parlons-en quand-même !



Les BOUCLES HAWAIENNES sont des cercles de rayon $1/2^n$.

Un revêtement universel de (X,x) doit satisfaire qu'il existe un voisinage U de x où

$$\tilde{p}^{-1}(U) = \bigsqcup_{i\in I} V_i$$

et $V_i \xrightarrow[\tilde{p}]{\sim} U$ (*)

$$\begin{aligned} \text{Or, } \pi_1(X,x) &\cong \pi_1(U,x) && \text{par le dessin} \\ &\cong \pi_1(V_i, \tilde{x}_i) && p(\tilde{x}_i) = x \text{ par } (*) \\ &\leq \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_i) = \{e\} \end{aligned}$$

D'où $\pi_1(X,x)$, absurde !

On a besoin que X soit
"localement simplement connexe"
(et aussi localement connexe).

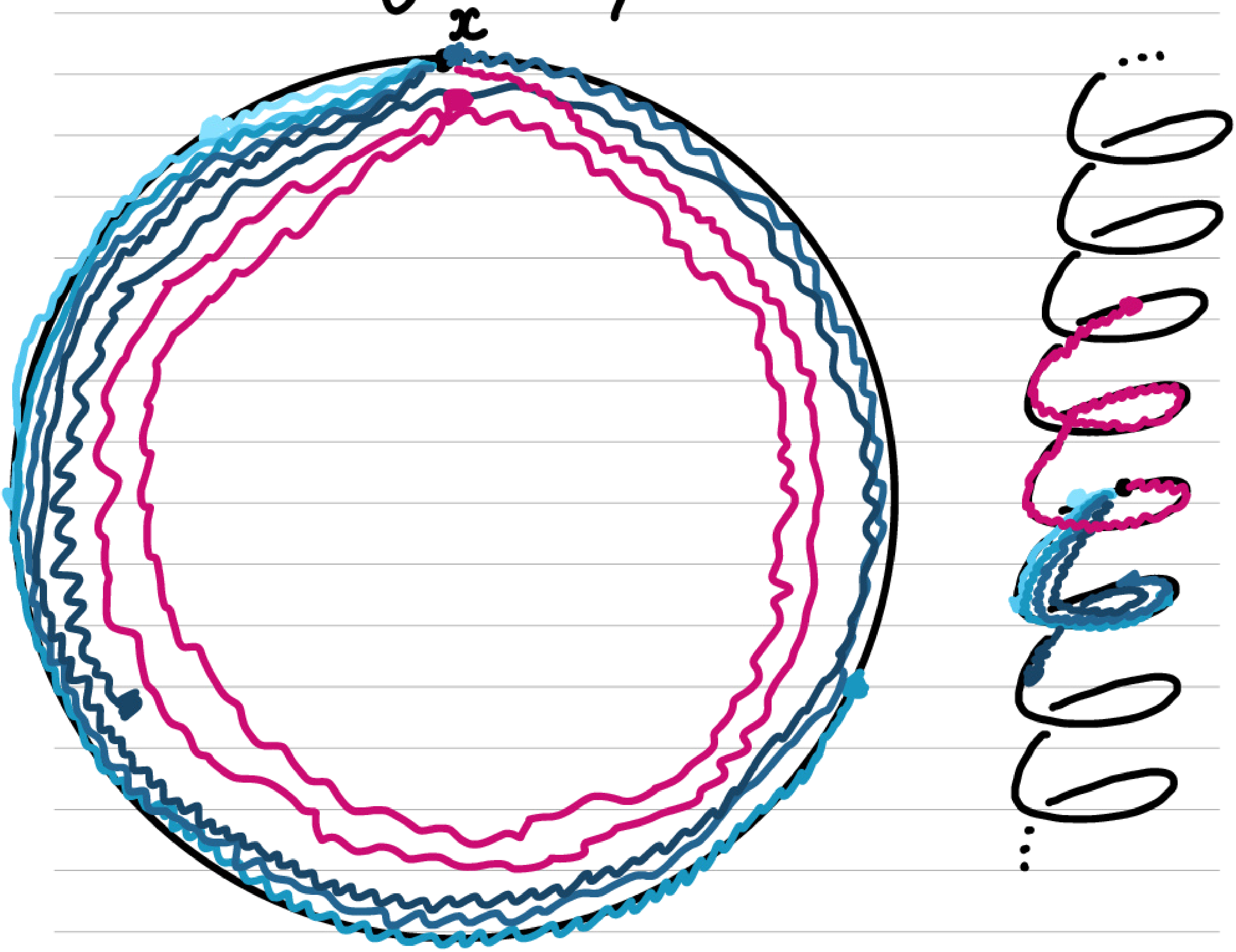
La construction explicite

$$\tilde{X} := \{ [\gamma] \mid \gamma : x \rightsquigarrow y \text{ pour un certain } y \in X \}$$

homotopie à extrémités fixées

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & & [\gamma] \\ \downarrow & & \downarrow \tilde{p} \\ X & & \gamma(1) \end{array}$$

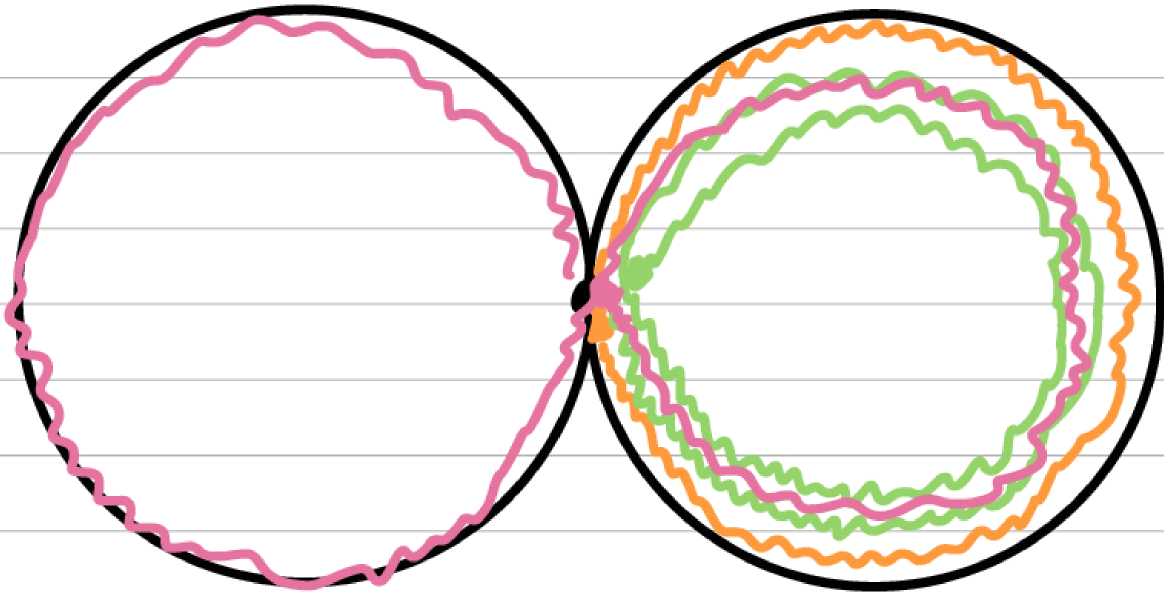
L'intuition géométrique :

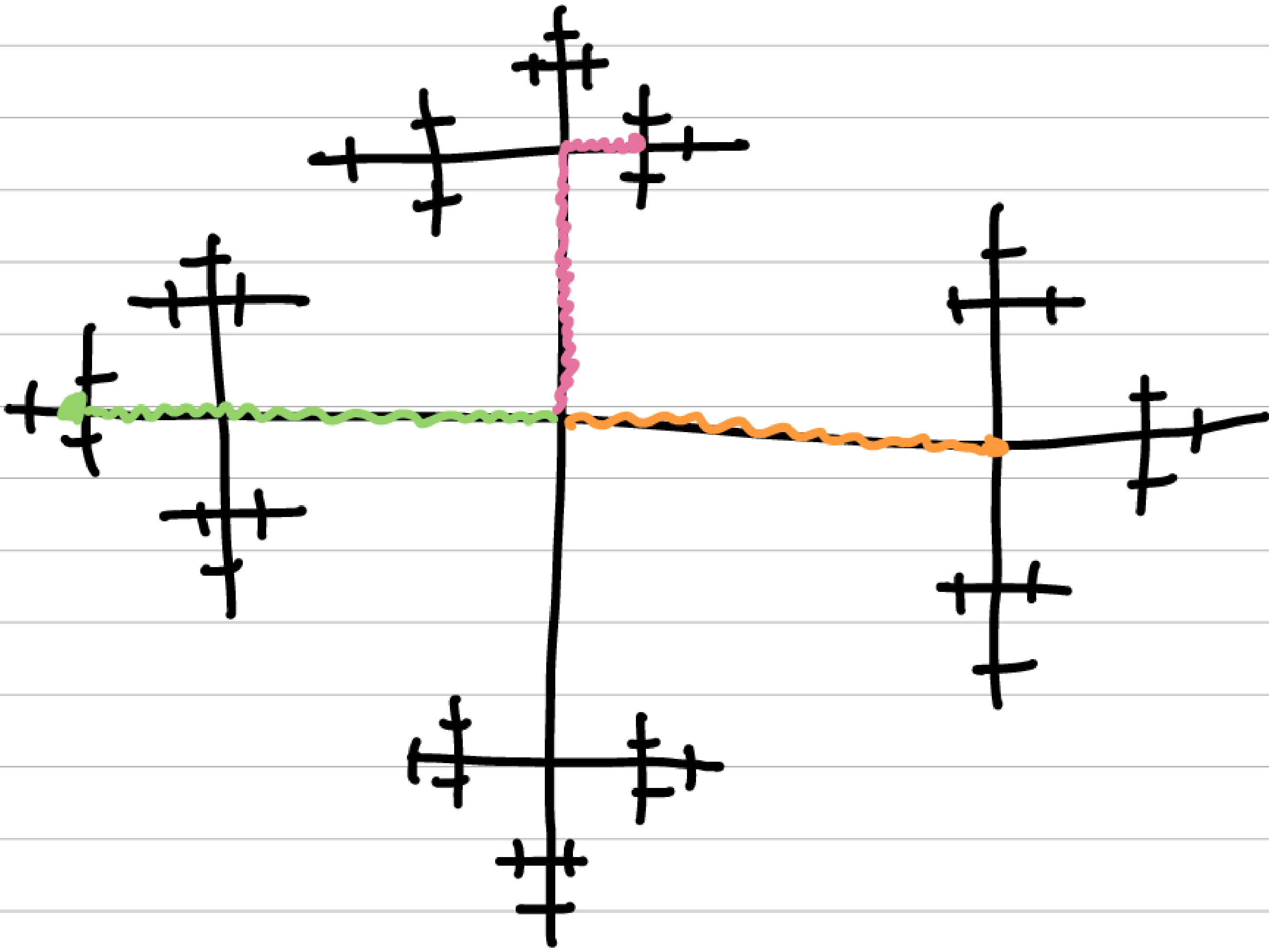


On "déplie" l'espace de base.

Autre exemple plus complexe :

$S^1 \vee S^1$





et on construit ainsi le revêtement universel de $S^1 \vee S^1$

III La catégorie $\mathcal{C}ov(X,x)$

"Covering Spaces"

On définit $\mathcal{C}ov(X,x)$ par :

- objets : revêtements connexes pointés de (X,x)
- morphismes : on a $f : (\tilde{X}, \tilde{x}) \longrightarrow (\bar{X}, \bar{x})$ ssi

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{x}) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\tilde{p}"'] & & (\bar{X}, \bar{x}) \arrow[dl, "\bar{p}"] \\
& (X,x) &
\end{tikzcd}$$

commute

- composition : composition usuelle et on "colle" les triangles

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{x}) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] \arrow[dr, "\tilde{p}"'] & (\bar{X}, \bar{x}) \arrow[d, "\bar{p}"] \arrow[r, "g"] & (\hat{X}, \hat{x}) \arrow[dl, "\hat{p}"] \\
& (X,x) &
\end{tikzcd}$$

(Bonus pour celles et ceux qui comprennent)

Remarque: C'est une sous-catégorie de la "slice category" $Top_* /_{(X,x)}$.

Est-elle pleine? Oui !

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cov}(X,x)}((\tilde{X},\tilde{x}),(\bar{X},\bar{x})) = \mathrm{Hom}_{Top_*/(X,x)}((\tilde{X},\tilde{x}),(\bar{X},\bar{x}))$$

Est-elle large? (wide) Non !

$$\underbrace{\mathrm{Obj}_{\mathrm{Cov}(X,x)}}_{\text{revêtements (pointés connexes) de } (X,x)} \underset{\text{en général}}{\not\subseteq} \mathrm{Obj}_{Top_*/(X,x)} = \underbrace{\mathrm{Obj}_{Top_*}}_{\text{espaces topologiques}}$$

(Fin du bonus)

III. A. Quelques propriétés des revêtements

Un relèvement de $f:(A,a) \to (X,x)$ à un revêtement $(\tilde{X},\tilde{x})$ de (X,x) est une fonction
pointée
connexe $\tilde{f}:(A,a) \to (\tilde{X},\tilde{x})$

tel que

$$\begin{tikzcd}
 & (\tilde{X},\tilde{x}) \arrow[d, "\tilde{p}"] \\
(A,a) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (X,x)
\end{tikzcd}$$

commute.

En général, $\tilde{f}$ n'existe pas forcément.

Mais, si $\tilde{f}$ existe, elle est unique.

LEMME: Si $\tilde{X}$ est un revêtement connexe de X, (pas pointé)

et $f, \tilde{f}, \tilde{f}'$ font commuter les triangles

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "\tilde{p}"] \\ A \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "\tilde{p}"] \\ A \arrow[ur, "\tilde{f}'"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Et, si $\tilde{f}'(\tilde{x}) = \tilde{f}(\tilde{x})$ pour un certain $\tilde{x} \in \tilde{X}$.

Alors $\tilde{f}' = \tilde{f}$.

Avec des revêtements et des fonctions pointées, on a directement l'unicité :

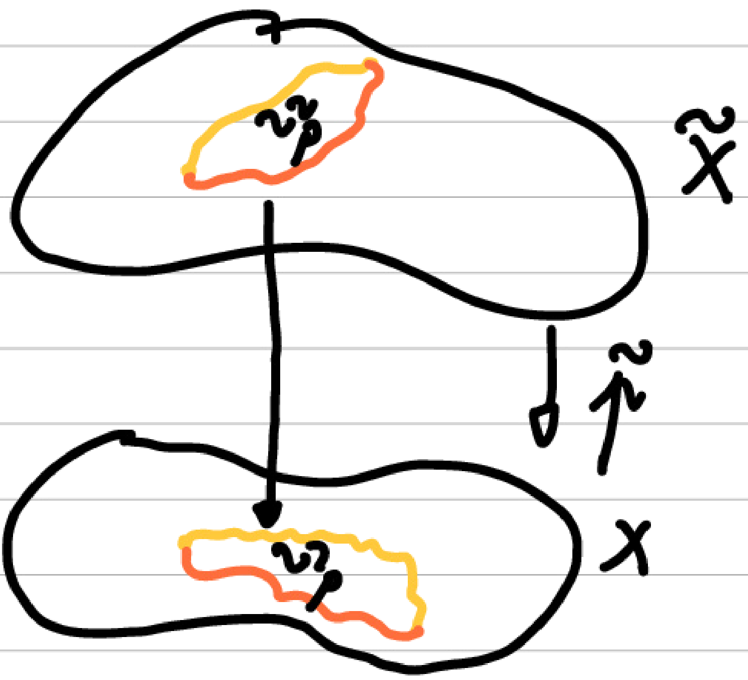
si
$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{x}) \arrow[d] \\ (A,a) \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (X,x) \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{x}) \arrow[d] \\ (A,a) \arrow[ur, "\tilde{f}'"] \arrow[r, "f"'] & (X,x) \end{tikzcd}$$

alors $\tilde{f} = \tilde{f}'$.

On peut toujours relever les chemins et homotopies :

LEMME : Si $q : x \rightsquigarrow y$ et soit $\tilde{x} \in \tilde{X}$, alors il existe un unique chemin $\tilde{q} : \tilde{x} \rightsquigarrow \tilde{y}$ pour un certain $\tilde{y} \in \tilde{X}$.

De plus, si $q \simeq_p r$ alors $\tilde{q} \simeq_p \tilde{r}$.



III.B $\mathrm{Cov}(X,x)$ est posétale.

⚠ C'est inhabituel !

Notons $(\tilde{X},\tilde{x}) \leq (\bar{X},\bar{x})$ s'il existe un morphisme $f : (\tilde{X},\tilde{x}) \to (\bar{X},\bar{x})$ de revêtements $\underbrace{\text{(pointés connexes)}}_{\text{Je vais arrêter de le préciser}}$ de (X,x).

On sait que $\leq$ forme un préordre sur les revêtements de (X,x).

Mais, on peut faire bien mieux !

Si on a :

$$f : (\tilde{X},\tilde{x}) \to (\bar{X},\bar{x})$$

et $g : (\bar{X},\bar{x}) \to (\tilde{X},\tilde{x})$

alors

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X},\tilde{x}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\tilde{p}"'] & (\bar{X},\bar{x}) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\bar{p}"] & (\tilde{X},\tilde{x}) \arrow[dl, "\tilde{p}"] \\
& (X,x) &
\end{tikzcd}$$

(de même dans l'autre sens).

D'où
$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X},\tilde{x}) \arrow[d, "\tilde{p}"] \\ (\tilde{X},\tilde{x}) \arrow[ru, "g\circ f"] \arrow[r, "\tilde{p}"'] & (X,x) \end{tikzcd}$$
commute

or
$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X},\tilde{x}) \arrow[d, "\tilde{p}"] \\ (\tilde{X},\tilde{x}) \arrow[ru, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "\tilde{p}"'] & (X,x) \end{tikzcd}$$
commute aussi.

ce sont deux relèvements de $\tilde{p}$

On en conclut $g\circ f = \mathrm{id}$ et, de même, $f\circ g = \mathrm{id}$.

Autrement dit, si $(\tilde{X},\tilde{x}) \leq (\bar{X},\bar{x})$
et $(\bar{X},\bar{x}) \leq (\tilde{X},\tilde{x})$

alors $(\tilde{X},\tilde{x}) \cong (\bar{X},\bar{x})$.

D'où $\leq$ est, à iso près, une relation d'ordre.

Encore mieux !

$$\left(\frac{\text{Revetements de } (X,x)}{\text{Iso de revêtement}}, \leq \right)$$

est un treillis complet !

La correspondance de Galois est un isomorphisme de treillis complet

$$\left(\frac{\text{Revetements de } (X,x)}{\text{Iso de revêtement}}, \leq \right)$$

$$\Big\updownarrow \quad \text{Correspondance de Galois}$$

$$\left(\text{Sous-groupes de } \pi_1(X,x), \quad \right)$$

IV Foncteurs π_1 et Π

On définit la catégorie Top_* par :

- objets : espaces topologiques pointés
- morphismes : fonctions continues

$$f : (X, x) \to (Y, y)$$

- composition : composition usuelle.

(C'est aussi la coslice $Top \backslash 1$.)

Regardez l'annexe de la semaine dernière si vous n'êtes pas à jour sur catégories et foncteurs.

Et, posez des questions !

Si $f : (X, x) \to (Y, y)$ est continue alors f induit un homomorphisme de groupes noté $\pi_1(f) : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$

$$[\ell] \longmapsto [f \circ \ell]$$

On a que π_1 est un foncteur :

$$\pi_1 : Top_* \longrightarrow Group$$

objets $(X,x) \longmapsto \pi_1(X,x)$

morphismes $f \longmapsto \pi_1(f)$.

En effet,

$$\pi_1(f) \circ \pi_1(g)([l]) = \pi_1(f)[\overbrace{g \circ l}]$$

$$= [\underbrace{f \circ g} \circ l]$$

$$= \pi_1(f \circ g)[l]$$

Et,

$$\pi_1(id) : [l] \longmapsto [id \circ l] = [l].$$

De même, si

$$f : X \to Y$$

est continue alors f induit un foncteur

$$\Pi(f) : \Pi(X) \to \Pi(Y)$$

objets $\quad x \in X \longrightarrow f(x) \in Y$

morphismes $\quad p : x \rightsquigarrow y \longrightarrow f \circ p : f(x) \rightsquigarrow f(y).$

Et là c'est le moment à la

INCEPTION™ (probablement) :

Π est un foncteur

$$\Pi : \mathcal{T}op \to \mathcal{G}roupoïd\,!$$

En résumé :

$$\pi_1 : \mathrm{Top}_* \longrightarrow \mathrm{Group}$$

et

$$\Pi : \mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{Groupoïd}$$

sont deux foncteurs.

La fin, c'est un peu abstrait...

Mais ça risque de s'empirer...