

Logique modale pour systèmes de transitions.

1 Modèle de Kripke.

Dans un système de transition $TS = (S, \text{Act}, \rightarrow, I, \text{AP}, L)$, on différencie

- ▷ la partie **transitions** $K = (S, \text{Act}, \rightarrow)$;
- ▷ la partie **logique** $M = (K, \text{AP}, L)$;
- ▷ la partie **structure** « pointée » (M, I) .

Définition 1. Une *structure de Kripke* (sur AP) est de la forme

$$K = (S, \text{Act}, \rightarrow).$$

Un *modèle de Kripke* sur Act et AP est de la forme

$$M = (K, \text{AP}, L)$$

où K est une structure de Kripke sur Act.

2 Logique de Hennessy-Milner.

Fixons Act et AP.

Définition 2. On définit les formules de la logique HML par :

$$\begin{array}{ll}
 \phi, \psi ::= \mathbf{a} & \mathbf{a} \in \text{AP} \\
 | \phi \wedge \psi | \top & \\
 | \phi \vee \psi | \perp & \\
 | \neg \phi & \\
 | \underbrace{\langle \alpha \rangle \phi}_{\diamond} | \underbrace{[\alpha] \phi}_{\square} & \alpha \in \text{Act}.
 \end{array}$$

Définition 3. Pour $M = (S, \text{Act}, \rightarrow, \text{AP}, L)$, on définit $\llbracket \phi \rrbracket \in \wp(S)$ par induction sur ϕ :

- ▷ $\llbracket \mathbf{a} \rrbracket := \{s \in S \mid \mathbf{a} \in L(s)\}$;
- ▷ $\llbracket \top \rrbracket := S$;
- ▷ $\llbracket \perp \rrbracket := \emptyset$;
- ▷ $\llbracket \phi \wedge \psi \rrbracket := \llbracket \phi \rrbracket \cap \llbracket \psi \rrbracket$;
- ▷ $\llbracket \phi \vee \psi \rrbracket := \llbracket \phi \rrbracket \cup \llbracket \psi \rrbracket$;
- ▷ $\llbracket \neg \phi \rrbracket := \wp(S) \setminus \llbracket \phi \rrbracket$;
- ▷ $\llbracket \langle \alpha \rangle \phi \rrbracket := \{s \in S \mid \exists s' \in S, s \xrightarrow{\alpha} s' \text{ et } s' \in \llbracket \phi \rrbracket\}$;
- ▷ $\llbracket [\alpha] \phi \rrbracket := \{s \in S \mid \forall s' \in S, s \xrightarrow{\alpha} s' \text{ implique } s' \in \llbracket \phi \rrbracket\}$;

Notation. On note $s \Vdash \phi$ si $s \in \llbracket \phi \rrbracket$.

Définition 4. Soient Act , AP et soit ϕ une formule HML.

1. Pour $M = (S, \text{Act}, \rightarrow, \text{AP}, L)$, on dit que $s \in S$ **satisfait** ϕ si $s \Vdash \phi$.
2. On dit que ϕ est **valide** dans $M = (S, \text{Act}, \rightarrow, \text{AP}, L)$, que l'on note $M \models \phi$, si

$$\forall s \in S, \quad s \Vdash \phi.$$

3. On dit que ϕ est **valide**, que l'on note $\models \phi$, si ϕ est valide dans tout modèle M .

Exemple 1 (Logique LML). Soit $\text{Act} = \mathbf{1} = \{\bullet\}$. Soit

$$M((\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega) := (S, \mathbf{1}, \rightarrow, \text{AP}, L)$$

où

- ▷ $S = (\mathbf{2}^{\text{AP}})^\omega$;
- ▷ pour tout σ , on a que $\sigma \xrightarrow{\bullet} \sigma \upharpoonright 1$;
- ▷ $L(\sigma) = \sigma(0)$.

On a

$$\sigma \Vdash \langle \bullet \rangle \phi \iff \sigma \upharpoonright 1 \Vdash \phi \iff \phi \Vdash [\bullet] \phi,$$

donc $\langle \bullet \rangle$ et $[\bullet]$ correspondent ainsi à la modalité \bigcirc « next ».

De plus, sur ce système, on a $\sigma \sim s'$ ssi $\sigma = s'$.

3 Équivalences logiques.

3.1 Équivalences logiques pour les formules.

Définition 5. Soient AP , Act , et soient ϕ, ψ des formules. On note $\phi \equiv \psi$ ssi

$$\forall M = (S, \text{Act}, \rightarrow, \text{AP}, L), \quad \llbracket \phi = \psi \rrbracket,$$

autrement dit $\forall M, \forall s \in S, \quad s \Vdash \phi \iff s \Vdash \psi$.

Lemme 1. On a que $[\alpha]-$ et $\langle \alpha \rangle-$ sont duaux par De Morgan :

$$[\alpha] \phi \equiv \neg \langle \alpha \rangle \neg \phi \quad \text{et} \quad \langle \alpha \rangle \phi \equiv \neg [\alpha] \neg \phi.$$

De plus, comme $\langle \alpha \rangle -$ est défini comme quantification existentielle, on a

$$\langle \alpha \rangle (\phi \vee \psi) \equiv \langle \alpha \rangle \phi \vee \langle \alpha \rangle \psi \quad \text{et} \quad \langle \alpha \rangle \perp \equiv \perp.$$

De même, comme $[\alpha] -$ est défini comme quantification universelle, on a

$$[\alpha] (\phi \wedge \psi) \equiv [\alpha] \phi \wedge [\alpha] \psi \quad \text{et} \quad [\alpha] \top \equiv \top.$$

3.2 Équivalences logiques pour les états.

Définition 6. Soient Act et AP. On se donne M_1 , et M_2 deux modèles de Kripke. Pour $s_1 \in S_1$ et $s_2 \in S_2$, on note

$$s_1 \equiv s_2 \quad \text{ssi} \quad \forall \phi, \quad s_1 \Vdash \phi \iff s_2 \Vdash \phi.$$

Remarque 1. On aurait pu définir une telle équivalence pour LML, mais on aurait que $\sigma_1 \equiv \sigma_2$ ssi $\sigma_1 = \sigma_2$, ce qui n'est pas très intéressant. Avec des modèles de Kripke et la logique HML, on a des états différents qui sont équivalents.

Théorème 1. Si $s_1 \sim s_2$ alors $s_1 \equiv s_2$.

Preuve. Par induction sur ϕ , on montre que

$$s_1 \sim s_2 \implies (s_1 \Vdash \phi \iff s_2 \Vdash \phi).$$

Cas de $a \in \text{AP}$. Si $s_1 \sim s_2$ alors $L_1(s_1) = L_2(s_2)$ donc $s_1 \Vdash a$ ssi $s_2 \Vdash a$.

Cas de $-\wedge -, -\vee -, \top, \perp$, et $\neg -$. On applique l'hypothèse d'induction et/ou l'hypothèse $s_1 \sim s_2$, et on conclut.

Cas de $\langle \alpha \rangle -$. Supposons $s_1 \sim s_2$. Supposons $s_1 \Vdash \langle \alpha \rangle \phi$. Il existe

donc s'_1 tel que $s_1 \xrightarrow{\alpha} s'_1$ et $s'_1 \Vdash \phi$. Par bisimulation

$$\begin{array}{ccc} s_1 & \xrightarrow{\sim} & s_2 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha, \\ s'_1 & \xrightarrow{\sim} & s'_2 \end{array}$$

il existe donc s'_2 tel que $s_2 \xrightarrow{\alpha} s'_2$ et $s'_1 \sim s'_2$. Donc, par hypothèse d'induction, on a que $s'_2 \Vdash \phi$. On a donc $s_2 \Vdash \langle \alpha \rangle \phi$. On procédant de même dans l'autre cas, on a bien que

$$s_1 \Vdash \langle \alpha \rangle \phi \iff s_2 \Vdash \langle \alpha \rangle \phi.$$

Cas de $[\alpha]-$. On a que $[\alpha]\phi \equiv \neg \langle \alpha \rangle \neg \phi$.

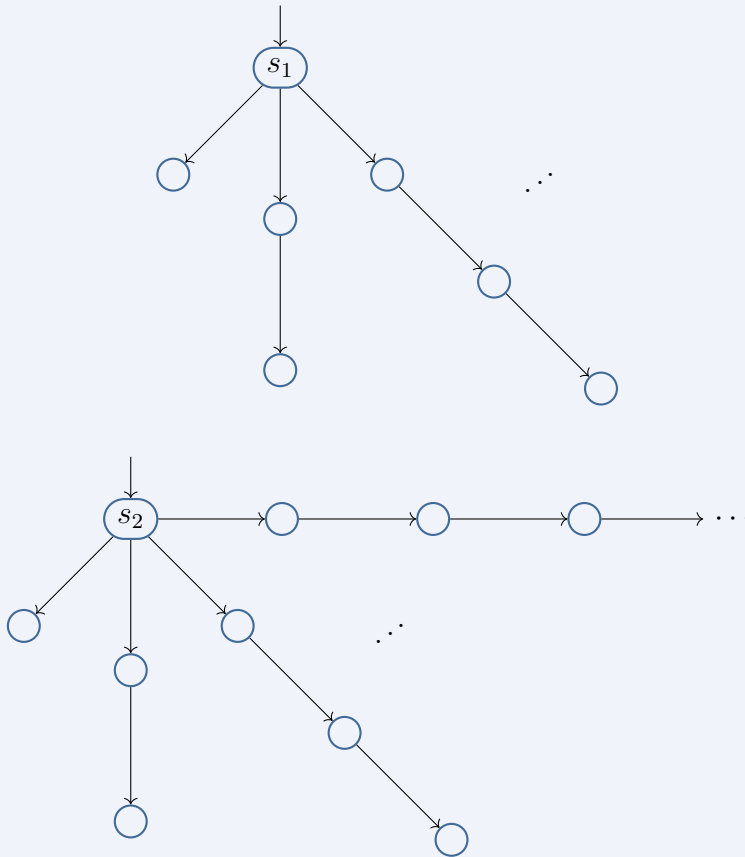
□

4 Propriété de Hennessy-Milner.

Remarque 2 (Question). Est-ce que $s_1 \equiv s_2$ implique $s_1 \sim s_2$? Autrement dit, est-ce que \equiv est une bisimulation?

La réponse est **non** en général.

Exemple 2. Considérons les système de transitions suivants.



On remarque que $s_1 \approx s_2$ mais $s_1 \not\equiv s_2$ (la logique HML ne peut « voir » qu'à une profondeur finie).

Définition 7. Une classe \mathfrak{M} de modèles a la **propriété de Hennessy-Milner** si, dans \mathfrak{M} , l'équivalence \equiv entre états est une bisimulation.

Définition 8. Soit $K = (S, \text{Act}, \rightarrow)$ alors, pour $\alpha \in \text{Act}$ et $s \in S$, on note

$$\text{Succ}^\alpha(s) := \{s' \in S \mid s \xrightarrow{\alpha} s'\}.$$

Définition 9. Un modèle de Kripke M est dit **à image finie** si, pour tout $s \in S$ et $\alpha \in \text{Act}$, l'ensemble $\text{Succ}^\alpha(s)$ des successeurs de s par une action α fixée est finie.

Proposition 1 (Hennessy-Milner). La classe des modèles à image finie a la propriété de Hennessy-Milner.