

Homotopies

homotope, classes d'homotopies

Soient X et Y deux espaces topo.

toutes les topos seront supposées séparées

On note $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble des app. continues $f: X \rightarrow Y$.

\mathcal{C} est muni de la topologie "compacte-ouverte" où une sous-base sont les ouverts

$$\mathcal{U}(K, V) = \{ f \in \mathcal{C}(X, Y) \mid f(K) \subseteq V\}$$

où $K \subseteq V$ est compact et $V \subseteq Y$ un ouvert.

$A \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ est ouvert si $\forall f_0 \in A, \exists (K_i, V_i)_{i \in I}$ fini t.q $\bigcap_{i \in I} \mathcal{U}(K_i, V_i) \subseteq A$

On note $I = [0, 1] \ (\subseteq \mathbb{R})$ le segment.

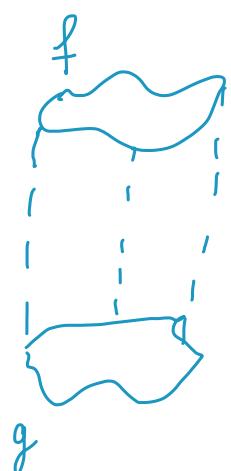
Si $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$, une homotopie de f à g est $F \in \mathcal{C}(X \times I, Y)$

telle que

$$F(\cdot, 0) = f \quad \text{et} \quad F(\cdot, 1) = g \quad F$$

Si X est "raisonnable" alors

(F homotope $\Leftrightarrow x \mapsto F(x, -)$ continue.



On note alors $F: f \simeq g$. S'il existe une hom. de f à g , on dit que f est homotope à g noté $f \simeq g$. On définit une relation sur $\mathcal{C}(X, Y)$ qui est une relation d'équivalence via

• la concaténation $F: f \simeq g$, $G: g \simeq h$

$$(F * G)(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$F * G : f \simeq h.$$

On note $[X, Y]$ l'ens. des classes d'hom. d'app. continues de X à Y .

$$[X, Y] := \mathcal{C}(X, Y) / \simeq$$

On note $[f]$ la classe d'hom de f .

Si f est hom. à une app constante g_0 , on dit que f est hom. à zéro, nulhomotopique.

Si X est muni d'un point de base x_0 ((X, x_0) est un espace pointé), on définit

$$F: f \simeq g \text{ rel } x_0 \Leftrightarrow F: f \simeq g \text{ et } F(x_0, t) = f(x_0).$$

Si (Y, y_0) est aussi pointé, on définit

$$[X, x_0; Y, y_0] = \mathcal{C}(X, x_0; Y, y_0) / \simeq \text{ rel } x_0$$

$$\hookrightarrow f(x_0) = y.$$

De même, si $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ alors on définit

$$\mathcal{C}(X, A; Y, B) = \{ f \in \mathcal{C}(X, Y) \mid f(A) \subseteq B \}.$$

et $[X, A; Y, B] \dots$

Cas des variétés différentiables

Si X et Y sont des variétés différentiables on note

$$\mathcal{C}^\infty(X, Y) \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$$

l'ens. des app \mathcal{C}^∞ de X à Y .

On définit la notion d'homotopie $\simeq_{\mathcal{C}^\infty}$:

$$F: f \simeq_{\mathcal{C}^\infty} g \quad \text{ssi } F.f \simeq g \quad \text{et } F \in \mathcal{C}^\infty$$

On note alors $[X, Y]_{\mathcal{C}^\infty} = \mathcal{C}^\infty(X, Y) / \simeq_{\mathcal{C}^\infty}$

Fait l'autre $[X, Y]_{\mathcal{C}^\infty} \longrightarrow [X, Y]$ est bijective.

Idée de la preuve

- 1) Si $f_0 \in \mathcal{C}(X, Y)$, $\exists f \in \mathcal{C}^\infty(X, Y)$ arbitrairement proche de f_0 en topologie \mathcal{C}^∞ . Si $Y \subseteq \mathbb{R}^N$ (toujours vrai par whitney), on ait $\forall \varepsilon \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}_+^*)$, $\exists f \in \mathcal{C}^\infty(X, Y)$
 $(*) \quad \|f(x) - f_0(x)\| \leq \varepsilon(x)$

2) Si Y est muni d'une métrique riemannienne complète,
 $(*) \Rightarrow$ il existe un unique chemin géodésique

Gm pose

$$\gamma_t(x) = " (1-t) f_0(x) + t f(x)" \quad F(-, t) = \partial_t$$

et on a $F: f \cong f_0$.

Espaces compactement engendrés.

Idée. Gm définit une classe d'espaces "raisonnables" vérifiant que
 quels que soient X et Z , pour Y raisonnable, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X \times Y, Z) & \longrightarrow & \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)) \\ f \longmapsto & & x \mapsto f(x, -) \end{array}$$

est une bijection, et même un homéomorphisme.

Corollaire Si X est raisonnable $\mathcal{C}(X \times I, Y) \equiv \mathcal{C}(I, \mathcal{C}(X, Y))$

Def. Un espace topologique X est compactement engendré
 si $\forall A \subseteq X$,

A ouvert $\Leftrightarrow A \cap K$ est ouvert dans K
 $\forall K \subseteq X$ compact

$(A \text{ forme} \Leftrightarrow A \cap K \text{ est fermé dans } K \text{ et } K \subseteq X \text{ compact})$

Exemples

- 1) Si X est métrisable (ou plus généralement à base dénombrable), X est compactement engendré : en effet, si $x_n \rightarrow x_\infty$, $K = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_\infty\}$ est compact.
- 2) Si X est localement compact, X est compactement engendré.
- 3) Tout espace cellulaire (ou CW-complexes) est compactement engendré.

Prop Si Y est compactement engendré, $\forall X, \forall Z$,

$$\mathcal{T}(X \times Y, Z) \equiv \mathcal{T}(X, \mathcal{T}(Y, Z))$$

Le homéomorphisme

Exemples d'espaces non compactement engendrés

- 1) $\mathcal{T}([0, 1], \mathbb{R}) \subseteq (0, 1)^\mathbb{R}$ muni de la convergence simple
- 2) $X = \left(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} S^1_n \right) \times \left(\bigvee_{t \in \mathbb{R}} S^1_t \right)$ 

Exemples d'ensembles de classes d'homotopie

1) Si X est quelconque et $\{*\}$ un espace réduit à un point,

$$[\{*\}, X] = \pi_0(X) = \{\text{comp. connexes}_\text{par arcs} \text{ de } X\}.$$

Si $n \in \mathbb{N}$, on note $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i^2 = 1\}$.

$$p_0 = (1, 0, \dots, 0) \in S^n \quad S^0 :=$$

Si (X, x_0) est pointé, on a $S^1 = \bullet$

$$[S^0, p_0; X, x_0] = \pi_0(X, x_0)$$

Le ensemble $\pi_0(X)$ pointé avec la comp. connexe de x_0 .

2) Si (X, x_0) est connexe par arcs, on a

$$[S^1, p_1; X, x_0] = \pi_1(X, x_0)$$

c'est le groupe fondamental de X en x_0 .

Rappelons que si $x_1 \stackrel{\text{même comp. connexe par arc que celle de } x_0}{\in} X$, on a un isomorphisme

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_1)$$

par conjugaison. On a $[S^1, X] = \pi_1(X, x_0) /_{\text{conj.}} = \pi_1(X) /_{\text{conj.}}$

(classes d'homotopie libre de lacets)

Avec $X = \mathbb{O}$, on a $\pi_1(X) = \mathbb{F}_2$
 Le groupe libre à 2 générateurs

3) Si X est raisonnnable,

$$[x, y] = \pi_0(\mathcal{C}(x, y))$$

en effet,

$$f \simeq g \Leftrightarrow \exists c \in \mathcal{C}(I, \mathcal{C}(x, y)) \text{ tq } c(0) = f \\ c(1) = g$$

Type d'homotopie, invariants d'homotopie.

Déf. Si X et Y sont deux espaces, une application $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ est une équivalence d'homotopie (homotopie) si l'existe $g \in \mathcal{C}(Y, X)$

telles que

$$g \circ f \simeq \text{id}_X \quad f \circ g \simeq \text{id}_Y.$$

Gm dit que g (qui est aussi une éq. d'hom.) est un inverse homotope à f .

La relation "il existe une équivalence d'homotopie de X à Y " note $X \simeq Y$ est une relation d'équivalence. Une classe d'homotopie est un type d'homotopie

$X \simeq Y \Rightarrow X$ et Y ont le même type d'homotopie.

Gm obtient ainsi un foncteur

$$\text{Top} \longrightarrow \text{Typ}$$

$$\mathcal{C}(X, Y) = \text{Hom}(X, Y) \longleftrightarrow \text{Hom}([X], [Y]) = [X, Y]$$

$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z) \quad [x, y] \times [y, z] \longrightarrow [x, z] \\ [f], [g] \longmapsto [g \circ f].$$

Un invariant d'homotopie est un foncteur $\text{Top} \longrightarrow \mathcal{C}$ où

$$X \longmapsto i(X)$$

\mathcal{C} est une catégorie, par exemple, de groupes, de modules, de modules gradués) qui factorise à travers Typ :

$$\begin{aligned} X &\longmapsto i(X) \\ X \cong Y &\longmapsto i(X) \cong i(Y) \\ [x, y] &\xrightarrow{i^\circ} \text{Hom}(i(X), i(Y)) \\ i(g \circ f) &= i(g) \circ i(f). \end{aligned}$$

Rétraction, rétraction par déformation

Def Soit $A \subseteq X$ un fermé dans un espace X . Une rétraction de X sur A est $r \in \mathcal{C}(X, A)$ telle que $r|_A = \text{id}_A$.

Une rétraction par déformation de X sur A est $R \in \mathcal{C}(X \times I, X)$ telle que

$$R(-, 0) = \text{id}_X \quad R(x, 1) \in A \quad \forall x \in X,$$

$$R(a, t) = a \quad \forall a \in A, \quad \forall t \in I.$$

Une rétraction par déformation faible de X sur A est $R \in \mathcal{C}(X \times I, X)$ tq

$$R(-, 0) = \text{id}_X \quad R(x, 1) \in A \quad \forall x \in X,$$

$$R(a, 1) = a$$

Autrement dit, une restriction par déformation faible est une hom. de id_X à une rétraction de X en A .

C'est une rétractation par déformation si elle est relative à A.

On dit que A est un rétrat (par déformation) de X.

En particulier, un rétract par déformation faible est une équivalence d'homotope de X à A dont l'inclusion $A \hookrightarrow X$ est un inverse homotopique.

Exemple

(i) Tout point $x \in X$ est un rétract de X.

(ii) Tout sous-espace $X \times \{y\} \subseteq X \times Y$ est un rétract de $X \times Y$.

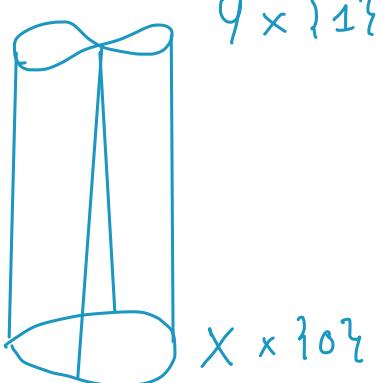
C'est un rétract par déformation si $Y = \mathbb{R}^n$.

(iii) En particulier $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est un rétract par déformation de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} = S^{n-1} \times (0, +\infty)$.

(iv) Le cylindre $M_f = ((X \times I) \sqcup Y) / (x, 1) \sim f(x)$

où $f: X \rightarrow Y$

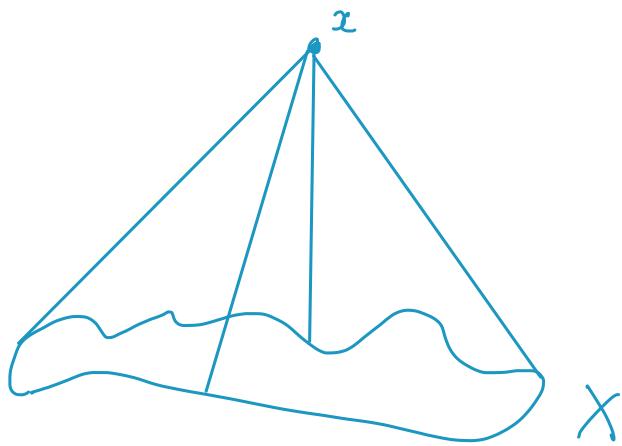
se rétracte par déformation sur Y



$$R([x, t], y) = [x, t + y(1-t)]$$

$$R(y, y) = y$$

En particulier, si $Y = \{\ast\}$, on obtient le cône CX
 $(CX = (X \times I) / (x, 1) \sim (x', 1))$



Espaces contractibles

Def. On dit que X est contractible s'il a le type d'homotopie d'un point. Autrement dit $\pi_0 \cong \text{id}_X$.

Def Un espace topologique X est fortement contractible si $\forall n \in \mathbb{N}, [\mathbb{S}^n, X] = \{\ast\}$.

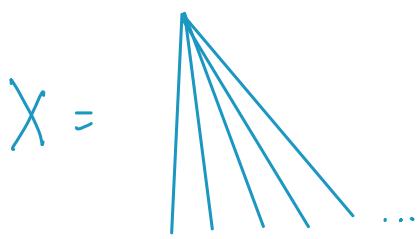
Si $n=0$, \mathbb{S}^0 vient dire X connexe par arcs. } simplement
Pour $n=1$, on a $\pi_1(X) = \{1\}$. commexe.

Exemples.

- 1) Tout convexe dans un espace contractible, il se rétracte par déformation sur tout point.
- 2) Si X est un arbre, il se rétracte par déformation

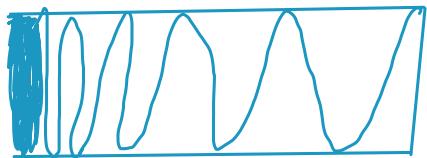
Inversement, si X est un graphe non-arbre, alors il n'est pas contractible car $\pi_1(X) \neq \{\ast\}$.

3) le cône CX se retract par déformation sur son sommet.



Fait CX ne retract pas^{par} déformation sur $(0, y)$ pour $y \in]0, 1[$.

Exemple d'espace faiblement contractile mais non contractile



$f: \frac{x}{\sin x}$
graph de $\sin x/x$.

$$f(\mathbb{R}_+) = [0, 1]$$

compact