

# Expressions $\omega$ -régulières.

Cette partie du cours n'est pas dans les notes de cours mais la source est

Baier, C. and Katoen, J.-P., *Principles of Model Checking*, MIT Press, 2008.

L'objet de cette section est l'analogie des expressions régulières pour les  $\omega$ -mots.

Soit  $\Sigma$  un alphabet non vide et fini.

**Définition 1 (Quelques opérations).** Soit  $F$  une expression régulière sur  $\Sigma$  telle que  $\varepsilon \notin \mathcal{L}(F)$ . On pose

$$\mathcal{L}(F)^\omega := \left\{ \sigma \in \Sigma^\omega \mid \begin{array}{l} \sigma = v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \cdots \\ \forall i \geq 1, v_i \in \mathcal{L}(F) \end{array} \right\}.$$

Soit, de plus,  $E$  une expression régulière sur  $\Sigma$ . On pose

$$\mathcal{L}(E) \cdot (\mathcal{L}(F))^\omega := \left\{ u \cdot \sigma \in \Sigma^\omega \mid \begin{array}{l} u \in \mathcal{L}(E) \\ \sigma \in \mathcal{L}(F)^\omega \end{array} \right\}.$$

**Attention.** On peut avoir  $u = \varepsilon \in \mathcal{L}(E)$ .

**Définition 2.** Une *expression  $\omega$ -régulière* sur  $\Sigma$  est de la forme

$$G := E_1 \cdot F_1^\omega + \cdots + E_n F_n^\omega,$$

où les  $E_i, F_i$  soin des expressions régulières (classiques) sur  $\Sigma$ ,<sup>1</sup>

avec  $\varepsilon \notin \mathcal{L}(F_i) \subseteq \Sigma^*$ .

Le *langage* de  $G$  est

$$\mathcal{L}_\omega(G) := \mathcal{L}(E_1) \cdot (\mathcal{L}(F_1))^\omega \cup \cdots \cup \mathcal{L}(E_n) \cdot (\mathcal{L}(F_n))^\omega \subseteq \Sigma^\omega.$$

**Exemple 1.** Avec  $\Sigma = \{a, b\}$ , on a

$$P := (b^* a)^\omega (\equiv \{\varepsilon\} \cdot (b^* a)^\omega \equiv (b^* a) \cdot (b^* a)^\omega),$$

où l'on note  $G \equiv G'$  quand  $\mathcal{L}_\omega(G) = \mathcal{L}_\omega(G')$ .

On a que

$$\mathcal{L}_\omega(P) = \{\sigma \in \Sigma^\omega \mid \exists^\infty t, \sigma(t) = a\}.$$

**Exemple 2.** Avec  $\Sigma = \{a, b\}$  et  $S := (a + b)^* \cdot b^\omega$ , on a

$$\mathcal{L}_\omega(S) = \{\sigma \in \Sigma^\omega \mid \forall^\infty t, \sigma(t) = b\}.$$

## 1 Automates de Büchi non-déterministes (NBA).

Avec ces NBA, on va définir une classe de langages équivalents aux expressions  $\omega$ -régulières.

**Définition 3.** Un *NBA* est de la forme

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F),$$

où

- ▷  $Q$  est un ensemble **fini** d'états ;
- ▷  $\Sigma$  est l'alphabet d'entrée (non vide et fini) ;

---

<sup>1</sup>Il y a plusieurs grammaires pour décrire ces expressions mais elles sont toutes (généralement) équivalentes.

- ▷  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \wp(Q)$  est la *fonction de transition* (non-déterministe) ;
- ▷  $Q_0 \subseteq Q$  est l'ensemble des *états initiaux* ;
- ▷  $F \subseteq Q$  est l'ensemble des *états acceptant*.

(C'est la même définition que les automates finis non-déterministes (NFA) mais la différence est que l'on va exécuter ces automates sur des  $\omega$ -mots, et on va donc modifier la définition d'*acceptation*.)

**Définition 4.** Une *exécution* de  $\mathcal{A}$  sur  $\sigma \in \Sigma^\omega$  est un  $\rho \in Q^\omega$  tel que

$$\rho(0) \in Q_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \rho(n+1) \in \delta(\rho(n), \sigma(n)).$$

**Remarque 1.** L'ensemble

$$\{\rho \in Q^\omega \mid \rho \text{ est une exécution de } \mathcal{A} \text{ sur } \sigma\}$$

peut être non-dénombrable (par non déterminisme), et peut être vide.

**Définition 5.** Une exécution  $\rho$  de  $\mathcal{A}$  sur  $\sigma$  est *acceptante* si

$$\exists^\infty t, \quad \rho(t) \in F,$$

on visite infiniment souvent un état acceptant.

**Remarque 2.** Par le principe des tiroirs infinis (l'ensemble  $Q$  est fini), une exécution  $\rho$  est acceptante ssi il existe un état acceptant  $q \in F$  que l'on visite une infinité de fois :

$$\exists q \in F, \quad \exists^\infty t \quad \rho(t) = q.$$

**Définition 6.** Le langage  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})^{\text{2}} \subseteq \Sigma^\omega$  est défini par

$$\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) := \left\{ \sigma \in \Sigma^\omega \mid \exists \rho \in Q^\omega, \begin{array}{l} \rho \text{ est une exécution} \\ \text{acceptante de } \mathcal{A} \end{array} \right\}.$$

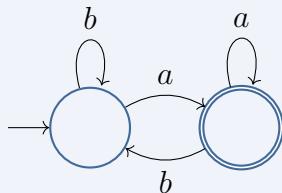
**Remarque 3.** La fonction caractéristique de  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})$  :

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})} : \Sigma^\omega &\longrightarrow \{0, 1\} \\ \sigma &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \in \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

**Proposition 1.** Étant donné un NBA  $\mathcal{A}$ , on peut tester si  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) = \emptyset$  en temps  $O(|Q| + |\text{transitions}|)$ .

**Preuve.** Il suffit de faire un DFS (c'est Tarjan-approved). □

**Exemple 3.** Avec  $\Sigma = \{a, b\}$ , on considère le NBA  $\mathcal{P}$  défini comme

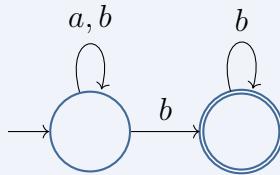


**Fig. 1 |** Automate de Büchi non-déterministe  $\mathcal{P}$

où l'on note avec une flèche entrante les états initiaux et avec un double cercle les états acceptants. On a  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{P}) = \mathcal{L}_\omega(P)$ .

<sup>2</sup>L'indice  $\omega$  est très important ici.

**Exemple 4.** On considère le NBA  $\mathcal{S}$  défini comme



**Fig. 2 |** Automate de Büchi non-déterministe  $\mathcal{S}$

On a  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_\omega(S)$ .

**Remarque 4.** On note  $\Pi_2^0$  l'ensemble des intersections dénombrables d'ouverts. On peut montrer que tout langage dans  $\Pi_2^0$  peut s'écrire comme combinaison booléenne (union, intersection, complément) de langages comme  $\mathcal{L}_w(P)$ .

On note  $\Sigma_2^0$  l'ensemble des unions dénombrables de fermés. On peut montrer que tout langage dans  $\Sigma_2^0$  peut s'écrire comme combinaison booléenne (union, intersection, complément) de langages comme  $\mathcal{L}_w(S)$ .

**Théorème 1.** Soit  $\Sigma$  un alphabet non vide et fini.

1. Pour tout NBA  $\mathcal{A}$  sur  $\Sigma$ , il existe une expression  $\omega$ -régulière  $G$  sur  $\Sigma$  telle que  $\mathcal{L}_\omega(G) = \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})$ .
2. Pour toute expression  $\omega$ -régulière  $G$  sur  $\Sigma$ , il existe un NBA  $\mathcal{A}$  tel que  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) = \mathcal{L}_\omega(G)$ .

De plus, ces deux « il existe » sont *constructifs*.

**Preuve.** 1. Soit  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$  un NBA. Pour tout  $p, q \in Q$ , on note  $\mathcal{A}_{p,q} = (Q, \Sigma, \delta, \{p\}, \{q\})$ , et on a

$$\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) = \bigcup_{p \in Q_0, q \in F} \mathcal{L}(\mathcal{A}_{o,p}) \cdot (\mathcal{L}(\mathcal{A}_{q,q}) \setminus \{\varepsilon\})^\omega.$$

2. On montre que :

- a) Soient  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  deux NBAs sur  $\Sigma$ . Il existe (constructif) un NBA  $\mathcal{C}$  sur  $\Sigma$  tel que

$$\mathcal{L}_\omega(\mathcal{C}) = \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) \cup \mathcal{L}_\omega(\mathcal{B}).$$

- b) Soit  $\mathcal{A}$  un NFA sur  $\Sigma$  tel que  $\varepsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{A})$ , il existe (constructif) un NBA  $\mathcal{B}$  sur  $\Sigma$  tel que

$$\mathcal{L}_\omega(\mathcal{B}) = (\mathcal{L}(\mathcal{A}))^\omega.$$

- c) Soit  $\mathcal{A}$  un NFA sur  $\Sigma$  et  $\mathcal{B}$  un NBA sur  $\Sigma$ , il existe  $\mathcal{C}$  un NBA sur  $\Sigma$  tel que  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{C}) = \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{L}_\omega(\mathcal{B})$ .

On ne détaillera pas toute la preuve.

- a) Il suffit de mettre les deux automates en parallèle (comme pour l'union disjointe de deux NFAs).
- b) Soit  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$  un NFA tel que  $\varepsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{A})$ . On peut supposer qu'il n'y a pas de transition vers  $Q_0$  et que  $Q_0 \cap F = \emptyset$ .<sup>3</sup> On définit

$$\mathcal{B} := (Q, \Sigma, \delta_{\mathcal{B}}, Q_0, Q_0).$$

où

$$\delta_{\mathcal{B}}(q, a) := \begin{cases} \delta(q, a) & \text{si } \delta(q, a) \cap F = \emptyset \\ \delta(q, a) \cup Q_0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(Ce deuxième cas est important car on ne sait pas toujours le découpage du mot avant d'avoir considéré le mot en entier, ce qui demande de continuer l'exécution dans  $\mathcal{A}$ .)

c) Il suffit de « mettre en série »  $\mathcal{A}$  puis  $\mathcal{B}$  en connectant les acceptants de  $\mathcal{B}$  avec les finaux de  $\mathcal{A}$  (quitte à prendre  $\mathcal{B}_\iota$ ).

□

**Définition 7.** Un langage  $L \subseteq \Sigma^\omega$  est  $\omega$ -régulier s'il existe un NBA  $\mathcal{A}$  tel que  $L = \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A})$ .

**Corollaire 1.** Si  $L, K \subseteq \Sigma^\omega$  deux langages  $\omega$ -réguliers alors  $L \cup K$  est  $\omega$ -régulier.

Dans la suite, on va voir la stabilité par intersections finies, mais on ne va pas voir de preuve du théorème ci-dessous.

**Théorème 2 (Büchi).** Si  $L \subseteq \Sigma^\omega$  est  $\omega$ -régulier alors  $\Sigma^\omega \setminus L$  est  $\omega$ -régulier.

**Preuve.** On l'admet (il n'est pas nécessaire pour le lien avec les formules LTL). □

## 2 Automates de Büchi déterministes (DBA).

**Définition 8.** Un NBA  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$  est déterministe si

- ▷  $|Q_0| \leq 1$
- ▷  $\forall q \in Q, \forall a \in \Sigma, |\delta(q, a)| \leq 1$ .

**Proposition 2.** Il n'existe pas de DBA  $\mathcal{D}$  sur  $\Sigma$  tel que

$$\mathcal{L}_\omega(\mathcal{D}) = \mathcal{L}_\omega((a + b)^\star \cdot b^\omega).$$

---

<sup>3</sup>On peut prendre  $\mathcal{A}_\iota := (Q \sqcup \{\iota\}, \Sigma, \delta_\iota, \{\iota\}, F)$  avec  $\delta_\iota(\iota, a) = \bigcup_{q \in Q_0} \delta(q, a)$  et  $\delta_\iota(q, a) = \delta(q, a)$  pour  $q \neq \iota$ . On a  $\mathcal{L}(\mathcal{A}_\iota) = \mathcal{L}(\mathcal{A})$  car  $\varepsilon \notin \mathcal{A}$ .

(C'est le langage du NBA  $\mathcal{S}$  vu précédemment.)

**Preuve.** Par l'absurde, soit  $\mathcal{D}$  un DBA tel que  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{D}) = \mathcal{L}_\omega((a + b)^\star \cdot b^\omega)$ . On peut supposer  $\mathcal{D}$  complet :

$$|Q_0| = 1 \quad \text{et} \quad \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma, |\delta(q, a)| = 1.$$

(Il suffit d'ajouter un état puits.)

On notera donc  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$  et  $Q_0 = \{q_\ell\}$ . On définit

$$\begin{aligned} \delta^* : \Sigma^* &\longrightarrow Q \\ \varepsilon &\longmapsto q_\ell \\ u \cdot a &\longmapsto \delta(\delta^*(u), a). \end{aligned}$$

On a que  $b^\omega \in \mathcal{L}_\omega(\mathcal{D})$ , il existe donc  $n_0 \geq 0$  tel que  $\delta^*(b^{n_0}) \in F$ . Puis, on a que  $b^{n_0}ab^\omega \in \mathcal{L}_\omega(\mathcal{D})$ , il existe donc  $n_1 \geq 0$  tel que  $\delta^*(b^{n_0}ab^{n_1}) \in F$ . En itérant, il existe  $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$  tel que

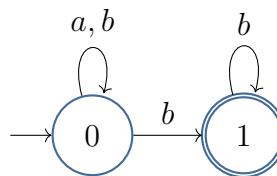
$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \delta^*(b^{n_0}ab^{n_1}ab^{n_2}a \cdots ab^{n_i}) \in F.$$

Considérons  $\sigma = b^{n_0}ab^{n_1}ab^{n_2}a \cdots \in \Sigma^\omega$ . Comme  $\mathcal{D}$  est déterministe, on a que  $\sigma \in \mathcal{L}_\omega(\mathcal{D})$ , ce qui est absurde.  $\square$

On ne peut donc pas déterminiser un automate de Büchi (ce qui explique que le théorème de Büchi n'est pas aussi simple que pour les NFA).

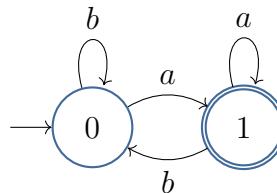
Il existe plusieurs familles d'automates déterministes sur les  $\omega$ -mots équivalents aux NBAs.

Pour faire un DBA équivalent à  $\mathcal{S}$ , on doit changer le formalisme.



**Fig. 3 |** Automate de Büchi non-déterministe  $\mathcal{S}$

On peut par exemple considérer le DBA suivant et dire que l'on ne peut voir l'état 1 au plus un nombre fini de fois.



**Fig. 4 |** Automate de Büchi non-déterministe  $\bar{\mathcal{S}}$

Il existe plusieurs familles de conditions d'acceptation : Muller, Rabin, Street, Parité, *etc.* Par exemple, pour Muller, un DBA est défini comme  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, \mathcal{T})$  où  $\delta$  est déterministe et  $\mathcal{T} \subseteq \wp(Q)$ , et où  $\rho \in Q^\omega$  est acceptant ssi  $\{q \mid \exists^\infty t, \rho(t) = q\} \in \mathcal{T}$ .