# Récap #1 du traquenard HoTT

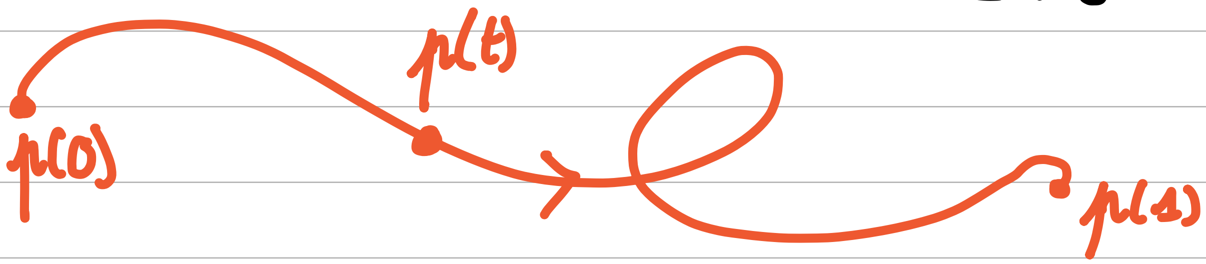
Hugo Salou

## Intro à la topologie algébrique

## I. Chemins & homotopie

En topo. alg., on ne travaille qu'avec des fonctions continues.

Un chemin est une fonction continue $p : \mathbb{I} \longrightarrow X$.
$\mathbb{I} = [0,1]$




(les chemins ont une direction)

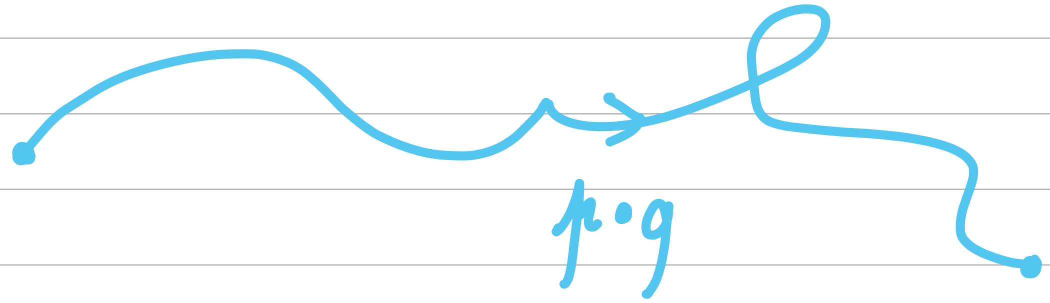
# Opérations sur les chemins

• la concaténation :

$$(p\cdot q)(t) := \begin{cases} p(2t) & \text{si } 0\le t\le \frac{1}{2} \\ q(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1\end{cases}$$

↳ on passe de


à




• l'"inversion" : $p^{-1}(t) := p(1-t)$

↳ on passe de

à


Aussi, on a un chemin "trivial"

$$refl_x(t) := x$$


J'ai "agrandi" la boucle pour qu'on la voie!

Sauf que nos opérations ne sont pas "sympathiques"

$$p \cdot (q \cdot r) \neq (p \cdot q) \cdot r \qquad p \cdot refl \neq p$$

$$p \cdot p^{-1} \neq refl$$

on se déplace mais rien d'intéressant...

... ouch!

Une homotopie de chemins est une fonction continue

$$h : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \longrightarrow X$$

où

$$h(u,0) = x \qquad h(u,1) = y$$

$$h(0,-) = p \qquad h(1,-) = q$$

À tout instant $u$, $h(u,-)$ est un chemin de $x$ à $y$

On part de $p$

On arrive à $q$.

(En décurryfiant, on peut le voir comme un chemin de $p$ à $q$ dans un espace de chemins de $x$ à $y$.)

<u>Notation :</u> $p \simeq_p q$ s'il existe une homotopie de $p$ à $q$

La condition en rose est nécessaire car sinon :

$p \approx_p q \iff$ $p$ et $q$ sont dans la même comp. connexe

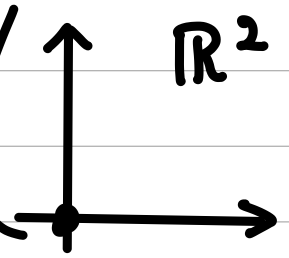
(merci Sarah)

# II. Groupe fondamental

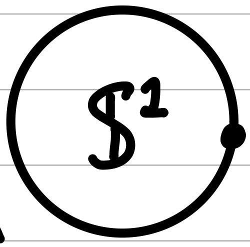
lacet en $x$

On pose $\pi_1(X, x) := \dfrac{\text{chemins de } x \text{ à } x}{\approx_p}$

## Quelques exemples

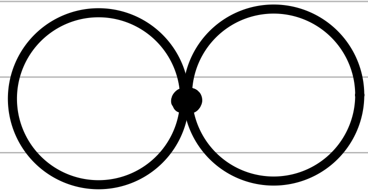
$\pi_1\Big($ 

$\Big)$ est trivial

$\pi_1\Big($ 

$\Big) \cong \mathbb{Z}$

Idée : on doit partir et revenir en un point fixé, on compte juste le nombre de "tours autour du trou"

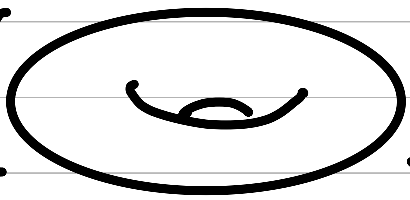
$\pi_1$ (  ) $\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

produit libre

(c'est $\{a^{-1}, b^{-1}, a, b\}^*$ où l'on "simplifie" $a^{-1}a$, $aa^{-1}$, $bb^{-1}$, $b^{-1}b$.)

Le groupe $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ n'est pas abélien!

$$ab \neq ba$$

$\pi_1$ (  ) $\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

produit "classique"

(il est abélien)

Euh... Hugo... c'est "légal" d'écrire $\pi_1(X)$ sans point ?

... pas vraiment... mais on peut y remédier de deux manières :

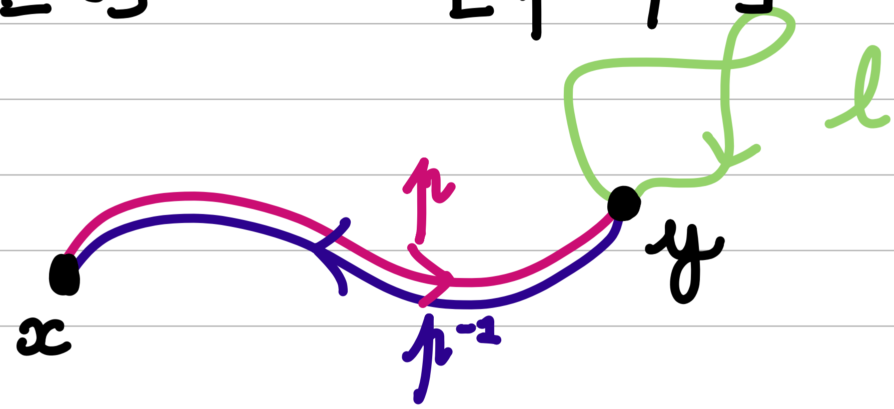
groupoïde fondamental ou connexité (par arcs)

c.f. annexe — vu maintenant

**PROPOSITION :** Si $\underset{\text{chemin de } x \text{ à } y}{p : x \rightsquigarrow y}$ alors

$$\pi_1(X,x) \cong \pi_1(X,y)$$
$$[l] \longmapsto [p\cdot l\cdot p^{-1}]$$

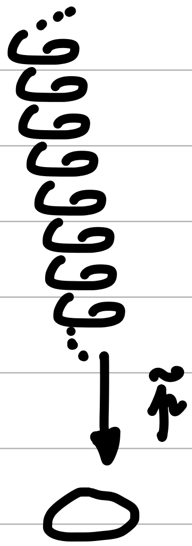
Pourquoi ?



Ainsi, dans un espace connexe (non-vide), pas besoin de donner le point de base.

D'autres propriétés la prochaine fois...

# III. Revêtements

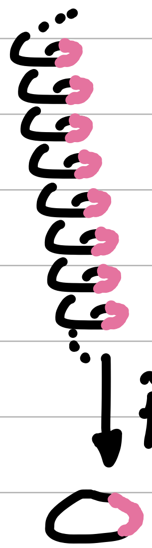


$\mathbb{R}$ (mais tordu)

$S^1$

Un revêtement est une sorte de simplification ("dépliage") d'un espace.

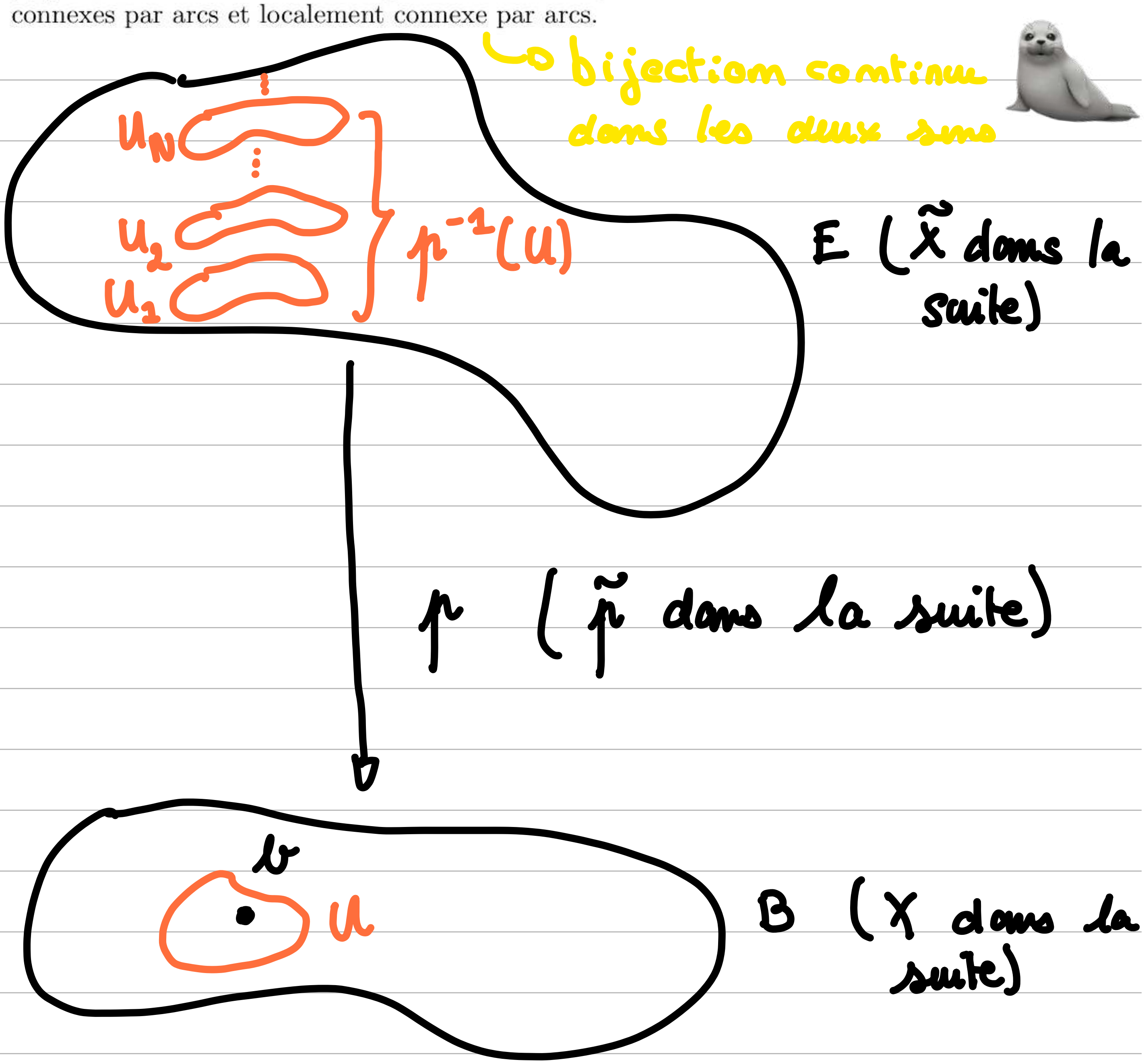
"Localement, un revêtement de X ressemble à (un sandwich de copies de) X."



# La définition formelle est pas fun...

**Définition 1.1.1.** Une application continue $p : E \to B$ est un **revêtement de** $B$ si tout point $b \in B$ admet $U \in \mathcal{V}(b)$ ouvert tel que $p^{-1}(U)$ est une union disjointe d'ouverts $U_i, i \in I$ avec $p|_{U_i} : U_i \to U$ est un homéomorphisme. On dira que le revêtement est CALCA si $E$ et $B$ sont connexes par arcs et localement connexe par arcs.

↳ bijection continue dans les deux sens

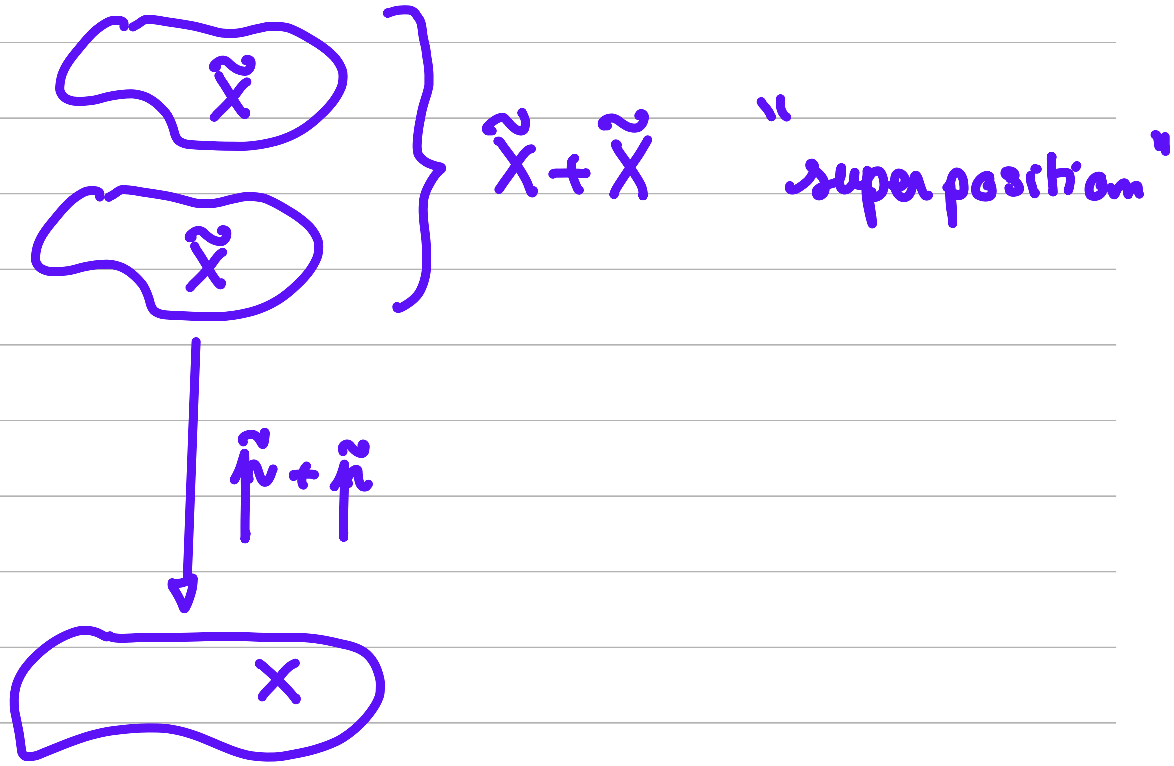



On travaillera toujours avec X (B) connexe (il suffit de travailler sur chaque comp. connexe de X sinon).

On se restreint aussi aux revêtements connexes ($\tilde{X} = E$ connexe) car sinon...

" une infinité pour le prix d'un !! "

On peut dupliquer les revêtements :
si $\tilde{p} : \tilde{X} \longrightarrow X$ est un revêtement
alors




est aussi un revêtement... et on peut faire autant de copies que l'on veut.

Plus de propriétés la prochaine fois...

# II Correspondance de Galois.

Revêtements pointés connexes de $(X, x)$ $\longleftrightarrow$ Sous-groupes de $\pi_1(X, x)$

Sources sympatoches :

→ topologie algébrique ⇝ Hatcher

→ théorie des types homotopiques ⇝ HoTT Book

→ théorie des catégories ⇝ n~~Lab~~ Perrone Paolo (c'est un bon livre!)

# ANNEXE.

# Quelques bases en théorie des catégories

Le but n'est pas de tout définir mais de donner les éléments principaux.

Une **catégorie** $\mathscr{C}$ est la donnée de :

- une collection d'objets $Ob_{\mathscr{C}}$
- pour deux objets $A$ et $B$, un ensemble

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$$

  de "morphismes" de $A$ à $B$

- pour $A, B, C \in Ob_{\mathscr{C}}$,

  $-\circ- : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,C)$

  la loi de composition.

Tels que

- pour tout $A \in Ob_{\mathcal{C}}$, $id_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$
- $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \quad \forall f, g, h$
- $f \circ id_A = id_A \circ f = f. \quad \forall f$

## Quelques exemples :

- la catégorie $\mathcal{S}et$ :
  - objets : ensembles
  - morphismes : fonctions
  - composition : composition de fonctions

- la catégorie $\mathcal{G}roup$ :
  - objets : groupes
  - morphismes : morphismes de groupes
  - composition : composition de fonctions

... de même pour Ring, Field, ...

Les morphismes sont toujours des fonctions dans les exemples précédents... sauf que ce n'est pas toujours le cas.

- soit $\leq$ un ordre sur $X$, la catégorie

$$\mathrm{Poset}(X) :$$

→ objets : éléments de $X$

→ morphismes : un unique morphisme $x \to y$ ssi $x \leq y$

→ composition : la seule manière possible

Les morphismes sont des objets purement formels.

Exemple avec $\mathrm{Poset}(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \subseteq)$

$$\begin{tikzcd}
 & \{1,2\} \arrow[rr] & & \{1,2,3\} \\
\{1\} \arrow[ur] \arrow[rr] & & \{1,3\} \arrow[ur] & \\
 & \{2\} \arrow[uu] \arrow[rr] & & \{2,3\} \arrow[uu] \\
\varnothing \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \{3\} \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

On ne dessine pas les identités ni les compo-sées pour simplifier.

Autre exemple : le groupoïde fondamental $\Pi(X)$ (espace topo.)

- objets : points de $X$
- morphismes : chemins à homotopie près
- composition : concaténation de chemins.

C'est même mieux qu'une "simple" catégorie, c'est un groupoïde : tous les morphismes sont des isomorphismes car $p^{-1}$ existe et

$$p \cdot p^{-1} \simeq_p \underset{\text{refl}}{\overset{}{\mathrm{id}}} \qquad p^{-1} \cdot p \simeq_p \mathrm{id}.$$

**PROPOSITION** Si $\mathcal{G}$ est un groupoïde alors pour tout $x \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{G}}$, $\underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(x,x)}_{\mathrm{Aut}_{\mathcal{G}}(x)}$ est un groupe.

Dans notre cas :

$$\pi_1(X,x) = \mathrm{Hom}_{\Pi(X)}(x,x).$$

Les morphismes entre deux catégories : les foncteurs.

Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est la donnée de :

- une fonction $F : Ob_{\mathcal{C}} \to Ob_{\mathcal{D}}$
- une fonction $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A),F(B))$

on écrit "F" dans tous les cas car il n'y a pas vraiment d'ambiguïté des notations

telles que :

- $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ $\quad \forall f \forall g$
- $F(id_A) = id_{F(A)}$ $\quad \forall A.$

Quelques exemples :

- foncteur d'"oubli" $\mathcal{U} : \mathcal{G}roup \to \mathcal{S}et$
qui à $(G, \cdot, 1_G)$ associe $G$ l'ensemble sous-jacent et à
$$u : (G, \cdot, 1_G) \to (H, \times, 1_H)$$
associe $\mathcal{U}u : G \to H$

- de même, on a des foncteurs d'oublis
$$\mathcal{F}ield \to \mathcal{R}ing \; , \; \mathcal{R}ing \to \mathcal{G}roup,$$
$$\mathcal{G}roup \to \mathcal{M}onoïd \; , \; \text{etc}$$

- On construit un foncteur
$$-^* \; \mathcal{S}et \to \mathcal{M}onoïd$$
  - à $\Sigma$, on associe $\Sigma^*$ l'ens. des mots sur $\Sigma$ avec la concaténation de mots et le mot vide
  - à $f : \Sigma \to \Gamma$, on associe
$$f^* : \Sigma^* \to \Gamma^*$$
$$a_1 \dots a_n \mapsto f(a_1) \dots f(a_n).$$

Autre exemple : $\pi_1$ ... mais on en parle la prochaine fois.