

Récap # 2 du français HoTT

Hugo
Salou

TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE

de CATÉGORIES

I Revêtements de S^1

On sait trois choses :

1) $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

2) les sous-groupes de \mathbb{Z} sont les $m\mathbb{Z}$ pour un certain $m \in \mathbb{Z}$

3) CORRESPONDANCE DE GALOIS.

Revêtements
(pointés connexes)
de (x, z)

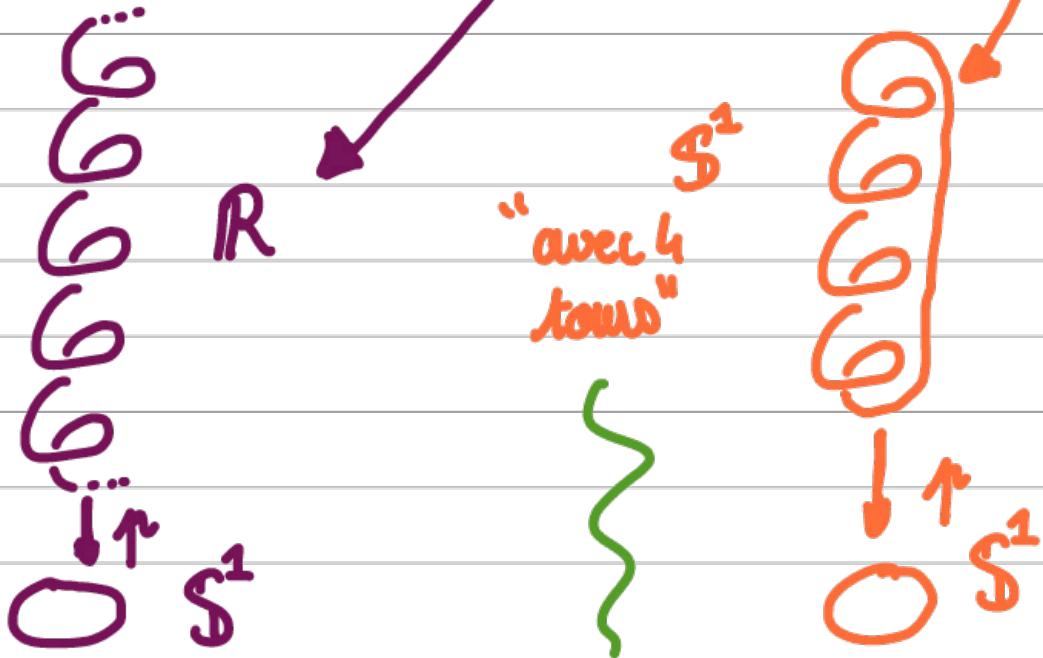
Sous-groupes
de $\pi_1(x, z)$

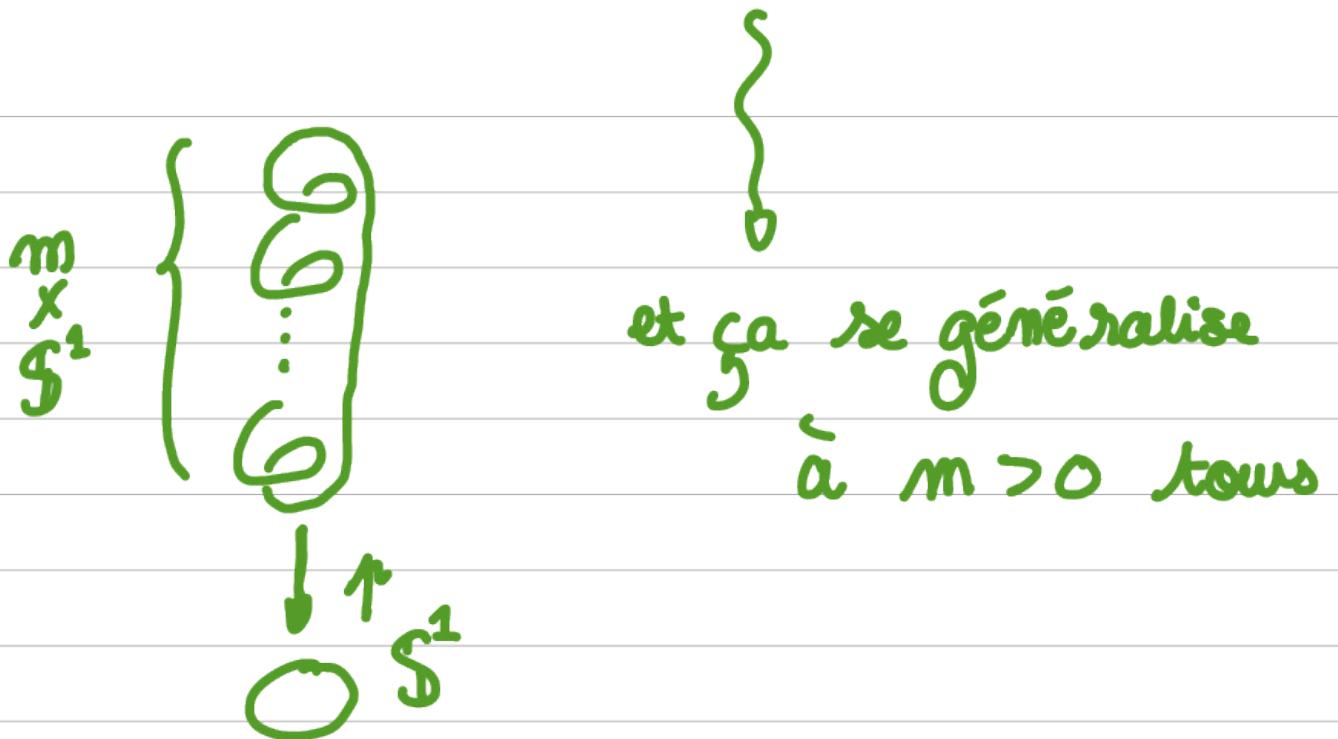
$$(\tilde{x}, \tilde{z}) \longleftarrow \pi_1(\tilde{x}, \tilde{z})$$

Ainsi, il suffit de s'intéresser aux sous-groupes de $\pi_1(S^1)$ pour connaître les revêtements pointés connexes de S^1 .

$$m\mathbb{Z} \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m \neq 0 \\ \{0\} & \text{si } m = 0 \end{cases}$$

Gm s'attend donc à avoir $|N|$ revêtements dont un avec un $\pi_1(-)$ trivial, et les autres "ressemblent" à des cercles.





Gn a donc trouvé les revêtements permis connexes de S^1 .

En effet, on a bien que :

$$[\pi_1(S^1) : \pi_1(S^1[m])] \xrightarrow{\text{"m fois"}} [\langle \iota \rangle : \langle \iota^m \rangle]$$

||

$$[\mathbb{Z} : m\mathbb{Z}] = m.$$

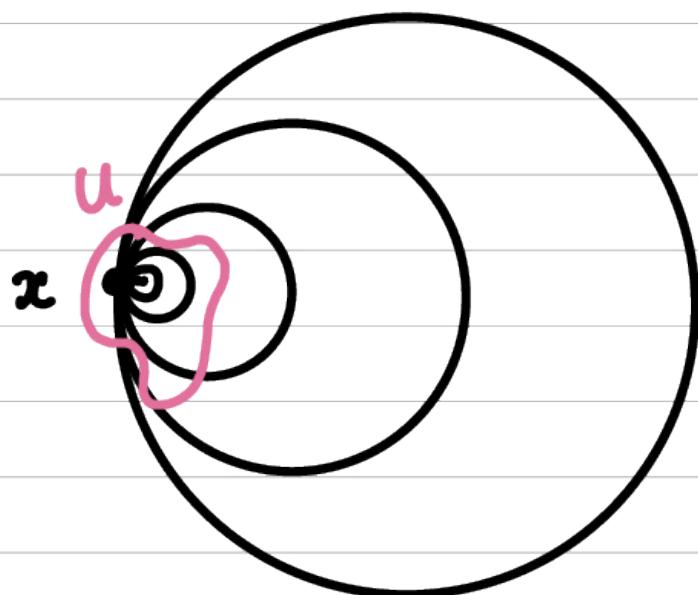
II Construction explicite du revêtement universel

Le revêtement universel de (X, x) est l'unique revêtement de (X, x) de $\pi_1(-)$ trivial.

pointé comme ça

Q : Comment le montrer à l'aide de la correspondance de Galois ?

Il existe toujours, sous quelques hypothèses topologiques pas très intéressantes... mais parlons-en quand-même !



Les BOUCLES HAWAÏENNES sont des cercles de rayon $1/2^n$.

Un revêtement universel de (X, x) doit satisfaire qu'il existe un voisinage U de x où

$$\tilde{\pi}^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$$

$$\text{et } V_i \xrightarrow[\tilde{\pi}]{} U \quad (*)$$

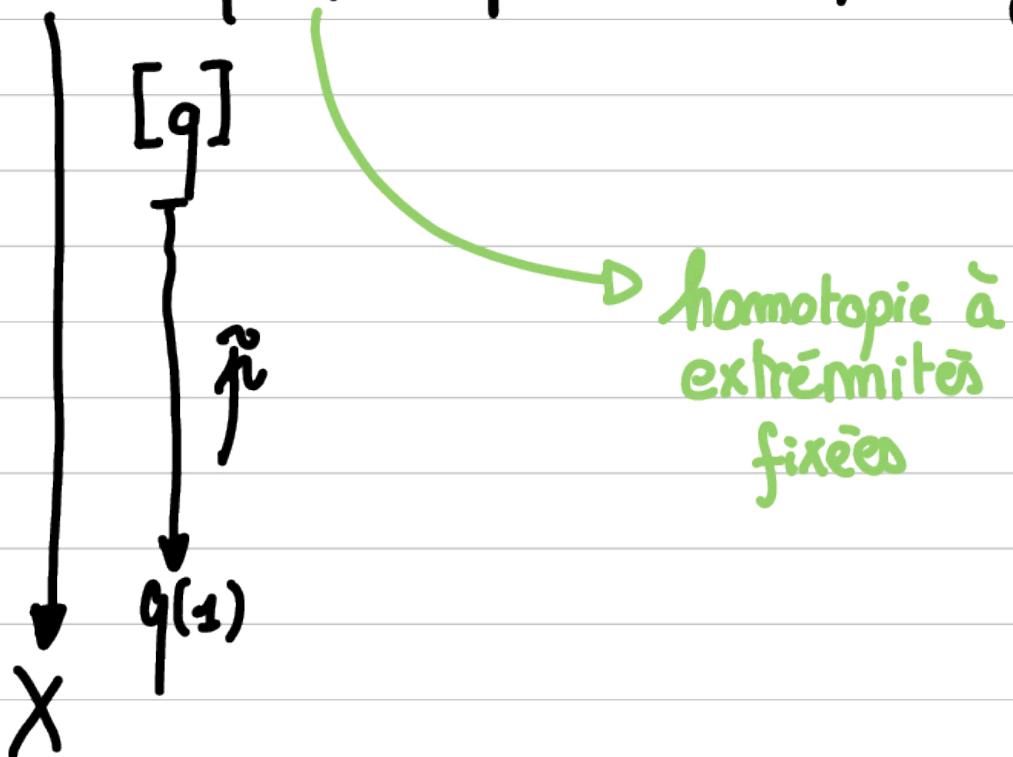
Gr, $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(U, x)$ par le dessin
 $\cong \pi_1(V_i, \tilde{x}_i)$ par $\tilde{\pi}(\tilde{x}_i) = x$ par (*)
 $\leq \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_i) = \{e\}$

D'où $\pi_1(X, x)$, absurde !

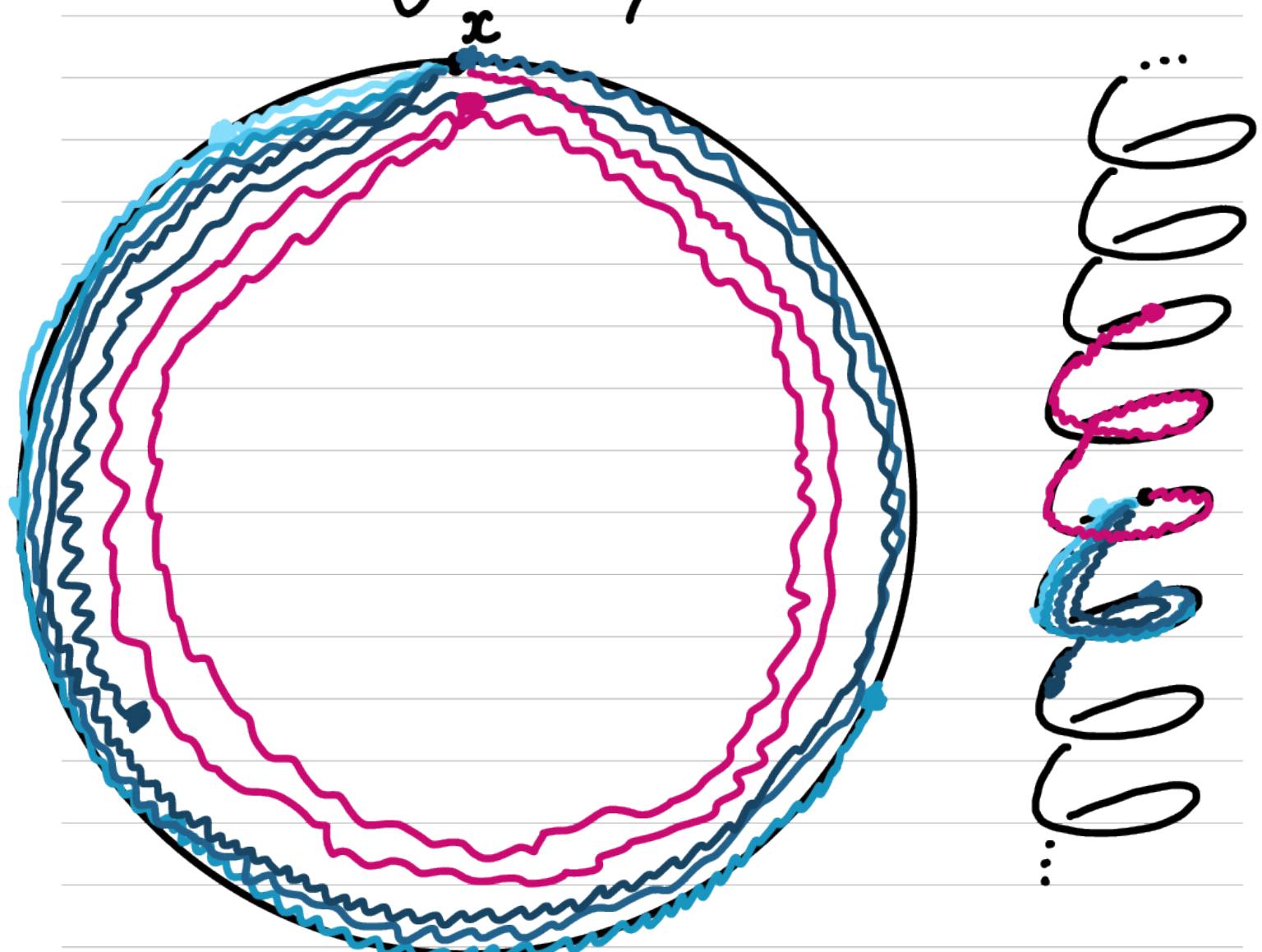
Gm a besoin que X soit
" localement simplement connexe "
(et aussi localement connexe).

La construction explicite

$$\tilde{X} := \{ [q] \mid q : x \text{~moy pour un certain } y \in X \}$$



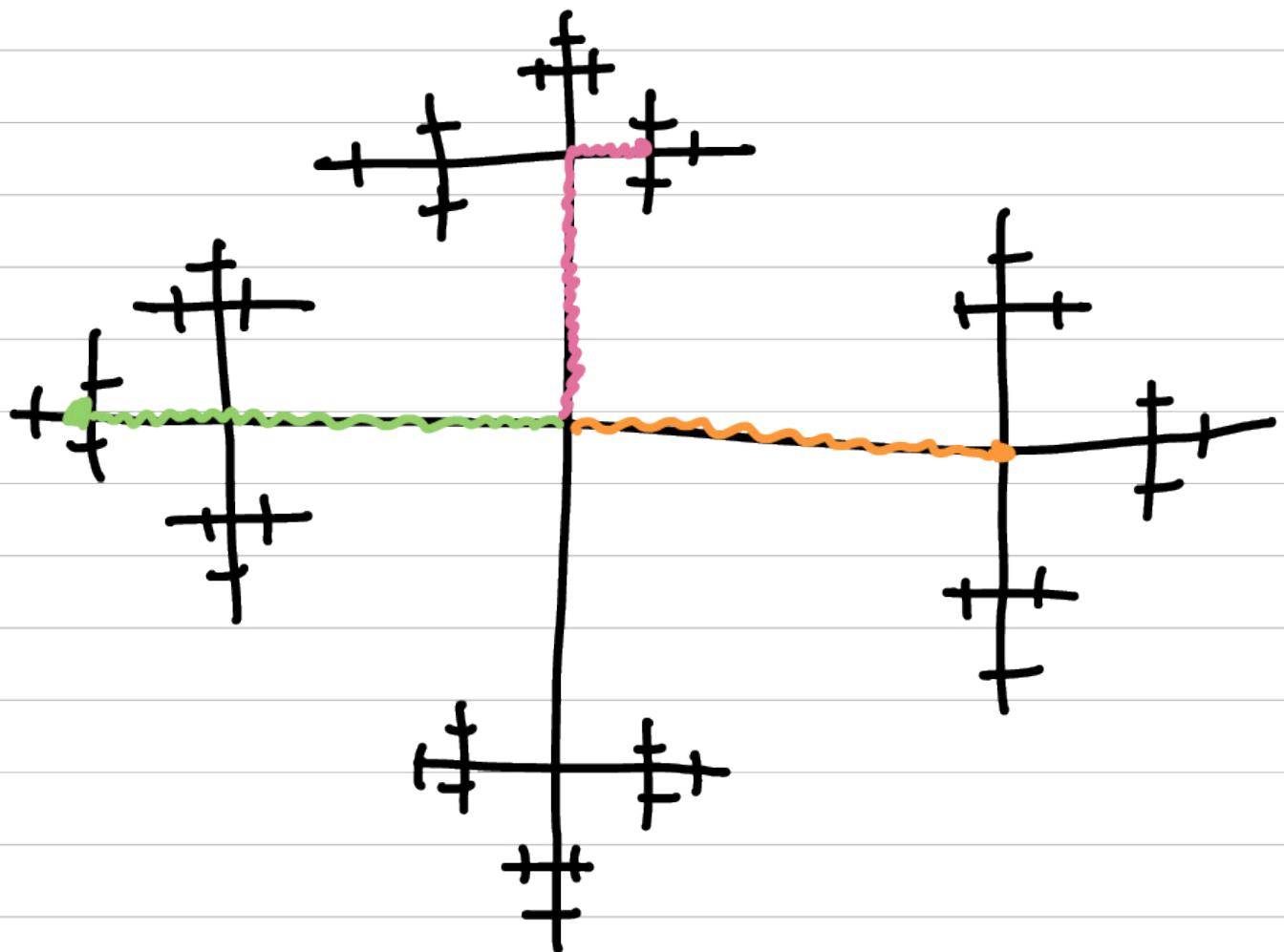
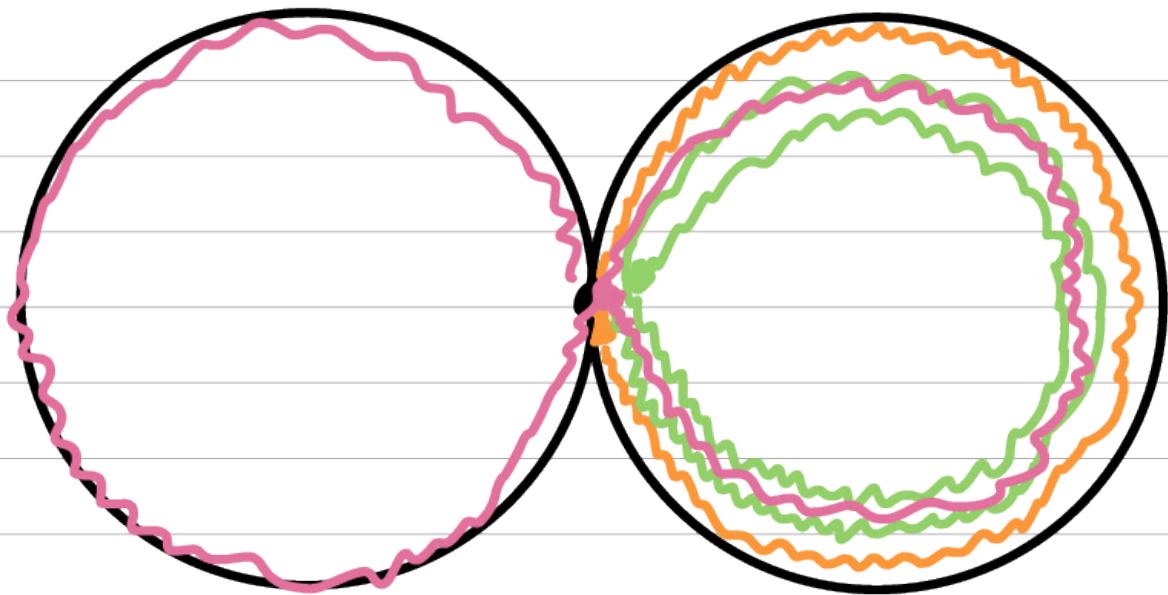
L'intuition géométrique :



On "déplie" l'espace de base.

Autre exemple plus complexe :

$$S^1 \vee S^1$$

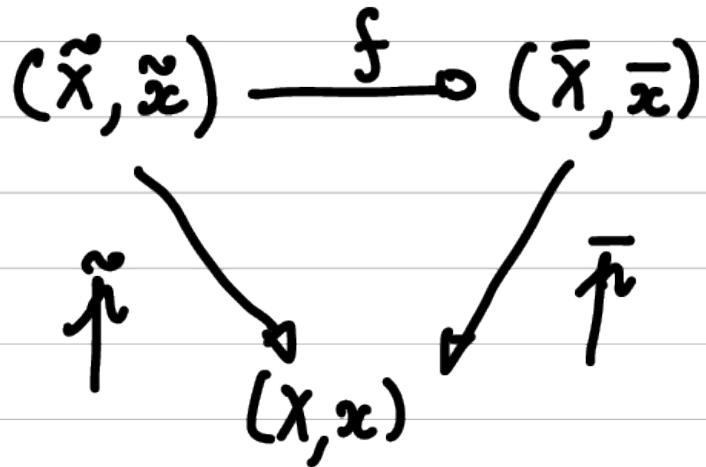


et on construit ainsi le
grattement universel
de $S^1 \vee S^1$

III La catégorie $\text{Cov}(X, x)$

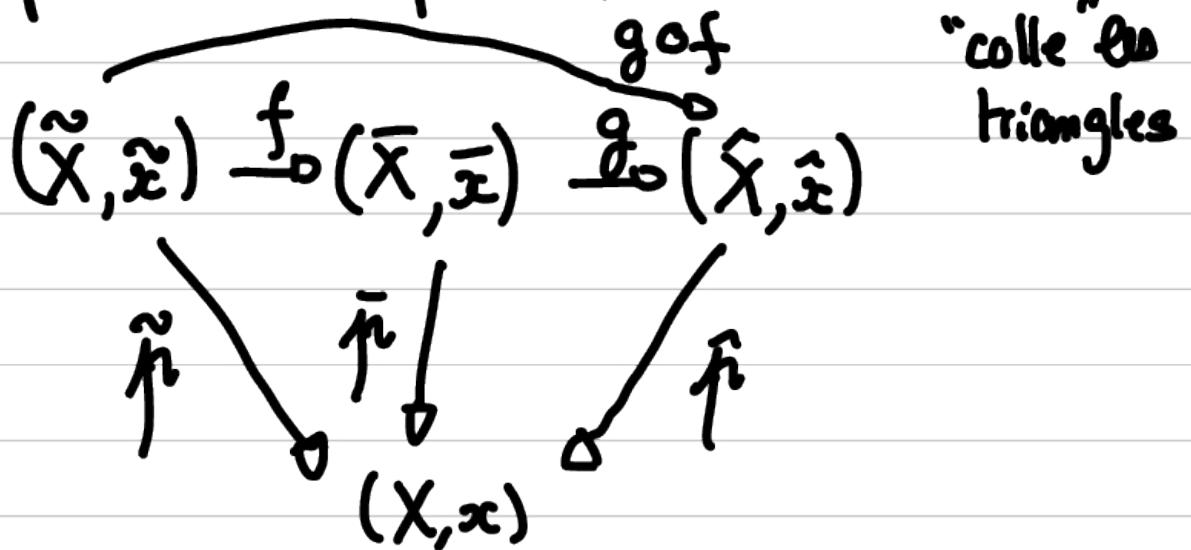
On définit $\text{Cov}(X, x)$ par :

- objets : ensembles connexes pointés de (X, x)
- morphismes: on a $f: (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (\bar{X}, \bar{x})$ si



commute

- composition : composition usuelle et on



(Bonus pour celles et ceux qui comprennent)

Remarque: C'est une sous-catégorie de la "slice category" $\text{Top}_*/(X, x)$.

Est-elle pliée? Gui!

$$\mathbb{H}\text{om}_{\text{Cov}(X, x)}((\tilde{X}, \tilde{x}), (\bar{X}, \bar{x})) = \mathbb{H}\text{om}_{\text{Top}_*/(X, x)}((\tilde{X}, \tilde{x}), (\bar{X}, \bar{x}))$$

Est-elle large? (wide) Non!

$\underbrace{\text{Gbj}_{\text{Cov}(X, x)}}_{\text{ensembles}} \not\subseteq \underbrace{\text{Gbj}_{\text{Top}_*/(X, x)}}_{\text{en général}} = \text{Gbj}_{\text{Top}_*}$

$\underbrace{\text{espaces topologiques}}$

(points communs)
de (X, x)

(fin du bonus)

III. A. Quelques propriétés des revêtements

Un relèvement de $f: (A, a) \rightarrow (X, x)$ à un revêtement (\tilde{X}, \tilde{x}) de (X, x) est une fonction pointée¹ connexe $\tilde{f}: (A, a) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$ tel que

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{f} & (\tilde{X}, \tilde{x}) \\ & \dashv \vdash & \downarrow \tilde{\pi} \\ (A, a) & \xrightarrow{f} & (X, x) \end{array}$$

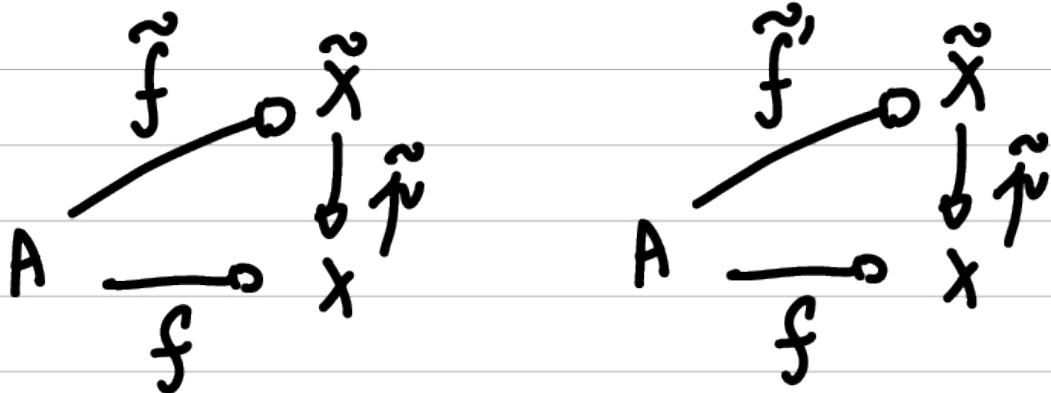
commute.

En général, \tilde{f} n'existe pas forcément.

Mais, si \tilde{f} existe, elle est unique.

LEMME: Si \tilde{X} est un revêtement connexe de X ,
 (pas pointé)

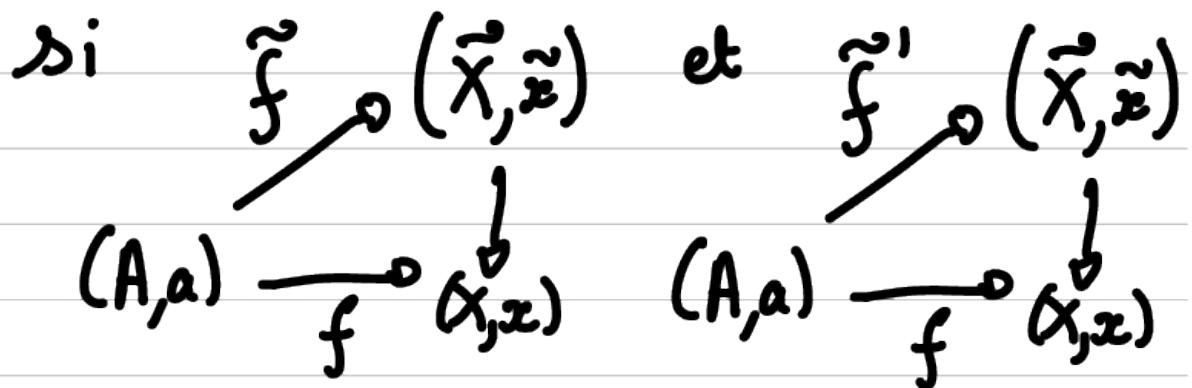
et f, \tilde{f}, \tilde{f}' font commuter les triangles



Et, si $\tilde{f}'(\tilde{x}) = \tilde{f}(\tilde{x})$ pour un certain $\tilde{x} \in \tilde{X}$.

Alors $\tilde{f}' = \tilde{f}$.

Avec des revêtements et des fonctions pointées, on a directement l'unicité :

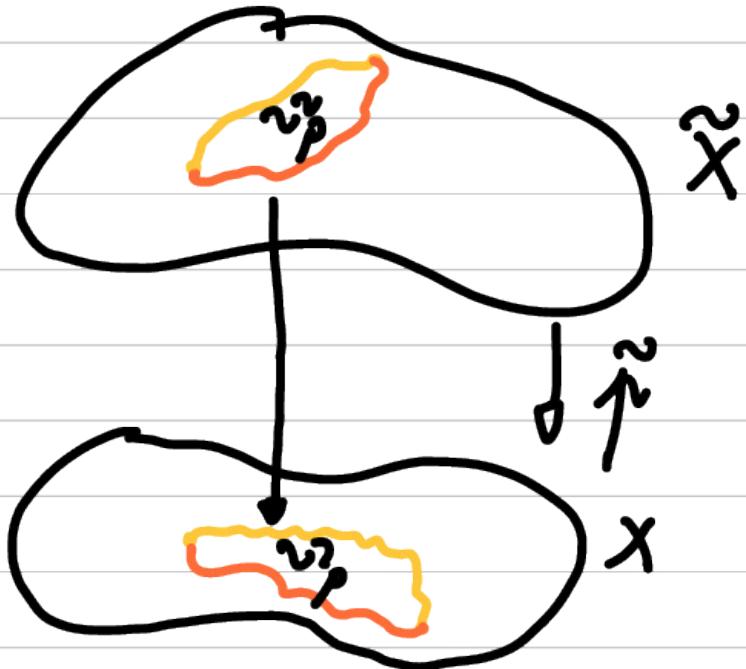


alors $\tilde{f} = \tilde{f}'$.

On peut toujours relever les chemins
et homotopies :

LEMME: Si $q: x \rightsquigarrow y$ et soit $\tilde{x} \in \tilde{X}$,
alors il existe un unique chemin $\tilde{q}: \tilde{x} \rightsquigarrow \tilde{y}$
pour un certain $\tilde{y} \in \tilde{X}$.

De plus, si $q \approx_{pr}$ alors $\tilde{q} \approx_{pr}$.



III.B $\text{Cov}(X, x)$ est posétale.

⚠ C'est inhabituel!

Notons $(\tilde{X}, \tilde{x}) \leq (\bar{X}, \bar{x})$ si il existe
un morphisme $f: (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (\bar{X}, \bar{x})$ de

revêtements (points connexes) de (X, x) .

Je vais arrêter de le préciser.
On sait que \leq forme un préordre sur
les revêtements de (X, x) .

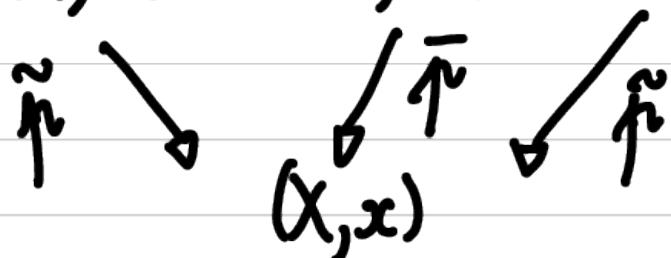
Mais, on peut faire bien mieux !

Si on a :

$$f: (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (\bar{X}, \bar{x})$$

$$\text{et } g: (\bar{X}, \bar{x}) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$$

$$\text{alors } (\tilde{X}, \tilde{x}) \xrightarrow{f} (\bar{X}, \bar{x}) \xrightarrow{g} (\tilde{X}, \tilde{x})$$



(de même dans l'autre sens).

D'où

$$\begin{array}{ccc} & \cancel{g \circ f} & (\tilde{X}, \tilde{x}) \\ (\tilde{X}, \tilde{x}) & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & (X, x) \\ \uparrow \tilde{\pi} & \uparrow \tilde{\pi} & \end{array}$$

commute

ou

$$\begin{array}{ccc} & \cancel{id} & (\tilde{X}, \tilde{x}) \\ (\tilde{X}, \tilde{x}) & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & (X, x) \\ \uparrow \tilde{\pi} & \uparrow \tilde{\pi} & \end{array}$$

commute
aussi.

ce sont deux
révêtements
du $\tilde{\pi}$

Gm en conclut $g \circ f = id$ et, de même,
 $f \circ g = id$.

Autrement dit, si $(\tilde{X}, \tilde{x}) \leq (\bar{X}, \bar{x})$
et $(\bar{X}, \bar{x}) \leq (\tilde{X}, \tilde{x})$

alors $(\tilde{X}, \tilde{x}) \cong (\bar{X}, \bar{x})$.

D'où \leq est, à iso près, une
relation d'ordre.

Encore mieux!

$(\underline{\text{Revêtements de } (X, x)}, \leq)$
Iso de revêtement

est un treillis complet!

La correspondance de Galois est
un isomorphisme de treillis complet

$(\underline{\text{Revêtements de } (X, x)}, \leq)$
Iso de revêtement

↑
Correspondance
de
Galois
 $(\text{Sous-groupes de } \pi_1(X, x), \leq)$

IV Foncteurs π_1 et $\tilde{\pi}$

On définit la catégorie Top_* par :

- objets : espaces topologiques pointés
- morphismes : fonctions continues

$$f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$$

- composition : composition usuelle.

(C'est aussi la catégo Top\text{-}1.)

Regardez l'annexe de la semaine dernière si vous n'êtes pas à jour sur catégories et foncteurs.

Et, posez des questions !

Si $f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ est continue

alors f induit un homomorphisme de

groupes noté $\pi_1(f): \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$
 $[l] \longmapsto [f \circ l]$

On a que π_1 est un foncteur :

$$\pi_1 : \text{Top}_\ast \longrightarrow \text{Group}$$

objets $(X, x) \mapsto \pi_1(X, x)$

morphismes $f \mapsto \pi_1(f)$.

En effet,

$$\pi_1(f) \circ \pi_1(g) ([l]) = \pi_1(f) [g \circ l]$$

$$= [\underbrace{f \circ g \circ}_{\sim} l]$$

$$= \pi_1(f \circ g) [l]$$

Et,

$$\pi_1(\text{id}) : [l] \mapsto [\text{id} \circ l] = [l].$$

De même, si

$$f: X \rightarrow Y$$

est continue alors f induit un fonction

$$\Pi(f): \Pi(X) \longrightarrow \Pi(Y)$$

objets $x \in X \longrightarrow f(x) \in Y$

morphismes $\rho: x \sim y \longrightarrow f \circ \rho: f(x) \sim f(y)$

Et là c'est le moment à la

INCEPTION™ probablement:

Π est un fonction

$\Pi: \text{Top} \longrightarrow \text{Groupoid}!$

En résumé :

$$\pi_1 : \text{Top}_* \longrightarrow \text{Group}$$

et

$$\Pi : \text{Top} \longrightarrow \text{Groupoid}$$

sont deux fonctions.

La fin, c'est un peu abstrait...

Mais ça risque de s'empirer...