Hugo SALOU
M1 ENS Lyon

Tutorial n° 1.

2. Linear algebra

A. 1. $(A^\dagger)^\dagger = \overline{(\overline{A}^T)}^T = \overline{\overline{(A^{TT})}} = \overline{\overline{A}} = A$

2. $(AB)^\dagger = \overline{(AB)}^T = \overline{(B^T A^T)} = \overline{B}^T\, \overline{A}^T = B^\dagger A^\dagger$.
identique pour $(Av)^\dagger = v^\dagger A^\dagger$.

3. $\langle A^\dagger u, v \rangle = (A^\dagger u)^\dagger v = u^\dagger A^{\dagger\dagger} v = u^\dagger A v = \langle u, Av \rangle$.

B. 1. Si A est hermitienne, $AA^\dagger = AA = A^\dagger A$ donc A normale.
Si A est unitaire, $AA^\dagger = AA^{-1} = 1 = A^{-1}A = A^\dagger A$ donc A normale.

2. $(UV)^\dagger = V^\dagger U^\dagger = V^{-1}U^{-1} = (UV)^{-1}$ donc UV est unitaire.

3. $(G+H)^\dagger = \overline{G+H}^T = (\overline{G}+\overline{H})^T = \overline{G}^T + \overline{H}^T = G^\dagger + H^\dagger = G+H$
donc $G+H$ est hermitienne

4. $(vv^\dagger)^2 = v\underbrace{v^\dagger v}v^\dagger = \langle v, v\rangle vv^\dagger = \|v\|^2 vv^\dagger = vv^\dagger$
car v est unitaire

$(vv^\dagger)^\dagger = v^{\dagger\dagger} v^\dagger = vv^\dagger$ donc $vv^\dagger$ est bien une matrice de projection.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et u un vecteur.

On a : $P^2 u = Pu$.

$$Pu = \lambda u \implies P(Pu) = \overbrace{P(\lambda u)}^{\lambda^2 u} = \lambda u$$
$$\implies \lambda^2 = \lambda$$

D'où $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

3. Quantum random access code.

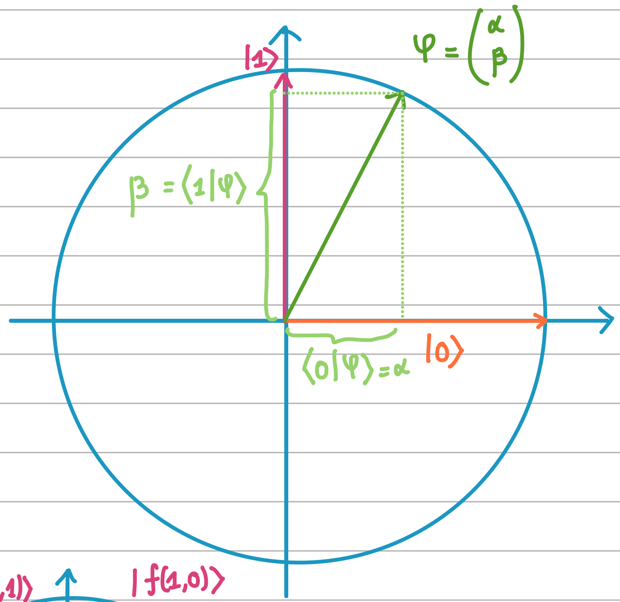
1. On a $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ donc on a nécessairement une collision.
Sans perdre en généralité, supposons $f(0,x) = f(1,x)$.

D'où, pour obtenir le 1er bit, on a :
$$f(0,x) \underset{q_0}{\rightsquigarrow} 0 \quad \text{et} \quad f(1,x) \underset{q_1}{\rightsquigarrow} 1.$$

Nécessairement, $q_0 + q_1 = 1$ et $q_0 \geq p$, $q_1 \geq p$,

d'où $p \leq \frac{1}{2}$.

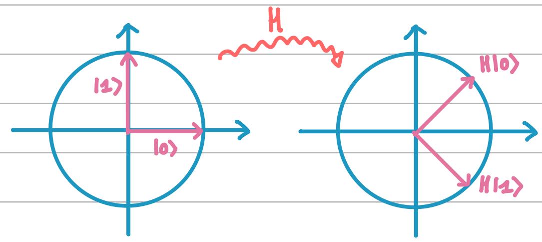
2.



Appliquer une matrice unitaire correspond à une rotation ou une symmétrie de ce cercle unitaire (et du vecteur φ dedans).

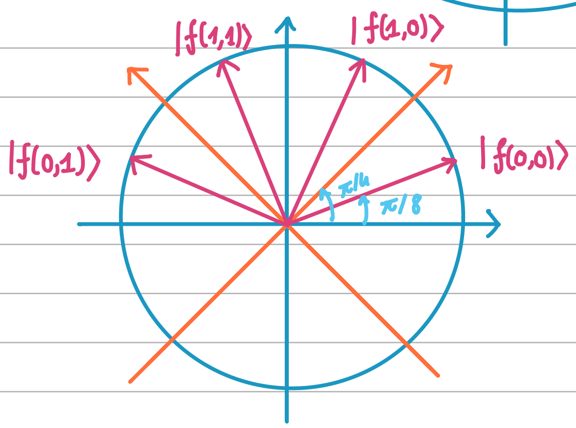
Exemple avec la matrice de Hadamard

$$H = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$



C'est une symmétrie sur l'axe x puis une rotation de 45°.

3.



$U_1 = \mathbb{1}$ et $U_2 = R_{\pi/4}$.

La probabilité de succès est de $\cos^2(\pi/8) \simeq 0{,}86$.

4. Tensor products

1.

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 0 & e^{2i\pi/3} & 0 & e^{i\pi/3} \\ e^{-2i\pi/3} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & e^{-i\pi/3} \\ e^{i\pi/3} & 0 & e^{i\pi/3} & 0 \end{pmatrix} ; \quad B \otimes A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{2i\pi/3} & e^{i\pi/3} \\ 0 & 0 & -1 & e^{-i\pi/3} \\ e^{-2i\pi/3} & -1 & 0 & 0 \\ e^{-i\pi/3} & e^{i\pi/3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.

a) $A \otimes (\lambda B) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda B) & a_{21}(\lambda B) & \cdots \\ a_{12}(\lambda B) & a_{22}(\lambda B) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}\lambda)B & (a_{21}\lambda)B & \cdots \\ (a_{12}\lambda)B & (a_{22}\lambda)B & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \lambda A \otimes B$

d) $(A \otimes B)^\dagger = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{21}B & \cdots \\ a_{12}B & a_{22}B & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11}B^\dagger & \bar{a}_{12}B^\dagger & \cdots \\ \bar{a}_{21}B^\dagger & \bar{a}_{22}B^\dagger & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

$= A^\dagger \otimes B^\dagger$