

# Propriétés « observables ».

La terminologie « propriété observable » n'est pas utilisée dans la littérature, mais c'est en réalité la compacité.

**Remarque 1 (Rappel).** Si  $f : X \rightarrow Y$  alors

$$f_! \dashv f^\bullet : \wp(X) \rightarrow \wp(Y),$$

où  $f_!$  est l'image directe, et  $f^\bullet$  est l'image réciproque.

Ainsi,  $f^\bullet : \wp(Y) \rightarrow \wp(X)$  préserve les intersections (*i.e.* si  $\mathcal{S} \subseteq \wp(Y)$  alors on a que  $f^\bullet(\bigcap \mathcal{S}) = \bigcap_{S \in \mathcal{S}} f^\bullet(S)$ ).

De plus,  $f^\bullet$  préserve les unions car  $f^\bullet \dashv f_\bullet : \wp(Y) \rightarrow \wp(X)$  où

$$\begin{aligned} f_\bullet : \wp(X) &\longrightarrow \wp(Y) \\ A &\longmapsto \bigcup \{B \subseteq Y \mid f^\bullet(B) \subseteq A\}. \end{aligned}$$

**Définition 1.** Soient  $(X, \Omega X)$  et  $(Y, \Omega Y)$  deux espaces topologiques. Une fonction  $f : X \rightarrow Y$  est *continue* si  $f^\bullet : \wp(Y) \rightarrow \wp(X)$  se restreint en une fonction  $f^\bullet : \Omega Y \rightarrow \Omega X$ , autrement dit

$$\forall V \in \Omega Y, \quad f^\bullet(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\} \in \Omega(X).$$

On définit ainsi une catégorie d'espaces topologiques.

Un *homéomorphisme*  $f : X \rightarrow Y$  est une bijection continue telle que

$$f^{-1} : Y \rightarrow X$$

est continue.<sup>1</sup>

**Lemme 1.** Une fonction  $f : \Sigma^\omega \rightarrow \Gamma^\omega$  est continue si et seulement si

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \Sigma^\omega, \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \Sigma^\omega, \\ \beta(0) \dots \beta(k) = \alpha(0) \dots \alpha(k) \\ \Downarrow \\ f(\beta)(0) \dots f(\beta)(n) = f(\alpha)(0) \dots f(\alpha)(n). \end{aligned}$$

Autrement dit,  $f$  est continue ssi on peut déterminer une partie finie de sa sortie à partir d'une partie finie de son entrée.

Soit  $P \subseteq \Sigma^\omega$ , et on définit la *fonction caractéristique* de  $P$  :

$$\begin{aligned} \chi_P : \Sigma^\omega &\longrightarrow \mathbf{2} = \{0, 1\} \\ \alpha &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \in P \\ 0 & \text{si } \alpha \notin P \end{cases}. \end{aligned}$$

Avec  $\Omega\mathbf{2} = \wp(\mathbf{2}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$  (ce qui est cohérent avec l'idée que  $\mathbf{2}$  représente les booléens), on a que  $\chi_P$  est continue ssi

- ▷  $\chi_P^\bullet\{0\} = \Sigma^\omega \setminus P$  est un ouvert ;
- ▷  $\chi_P^\bullet\{1\} = P$  est un ouvert.

On arrive donc à la notion de *clopen*.

**Définition 2.** Soit  $(X, \Omega X)$  un espace topologique. Une partie  $P \subseteq X$  est *clopen* (*ouvert fermé* en français) si  $P$  et  $X \setminus P$  sont ouverts.

<sup>1</sup>Ce n'est pas évident : par exemple, il y a une bijection  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  (où  $\mathbb{S}^1$  est le cercle unité de  $\mathbb{R}^2$ ) continue mais la réciproque ne l'est pas.

- Remarque 2.**
1. On a  $\emptyset$  est clopen, et que, si  $A$  et  $B$  sont clopen alors  $A \cup B$  est clopen.
  2. On a  $X$  est clopen, et que, si  $A$  et  $B$  sont clopen alors  $A \cap B$  est clopen (dual du point précédent).
  3. Si  $A$  est clopen alors  $X \setminus A$  est clopen.

**Exemple 1.** Soit  $u \in \Sigma^*$ , on a que  $\text{ext}(u)$  est ouvert. Mais, on a aussi que  $\Sigma^\omega \setminus \text{ext}(u)$  est ouvert :

$$\Sigma^\omega \setminus \text{ext}(u) = \bigcup \{ \text{ext}(v) \mid v \neq u \text{ et } \text{length}(v) = \text{length}(u) \}.$$

**Remarque 3.** Sur  $(\Sigma^\omega, \Omega\Sigma^\omega)$ , tous les  $\text{ext}(W)$  où  $W \subseteq \Sigma^*$  est **fini** sont clopen. La réciproque est fausse, comme le montre le lemme suivant.

**Lemme 2.** Si  $\Sigma$  est infini et  $a \in \Sigma$ , alors

$$\Sigma^\omega \setminus \text{ext}(a) = \bigcup_{\Sigma \ni b \neq a} \text{ext}(b)$$

est clopen mais **pas** de la forme  $\text{ext}(W)$  avec  $W$  fini.

## 1 Compacité.

**Définition 3.** Soit  $(X, \Omega X)$  un espace topologique.

1. Une partie  $A \subseteq X$  est *compacte* si, pour toute famille  $(V_i)_{i \in I} \in \Omega X^I$  telle que  $A \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$ , il existe  $J \subseteq I$  **fini** tel que  $A \subseteq \bigcup_{j \in J} V_j$ .
2. On dit que  $(X, \Omega X)$  est *compact* si  $X$  est une partie compacte.

**Remarque 4 (Non-exemple).** Si  $\Sigma$  est infini alors  $\Sigma^\omega$  n'est pas compact :

$$\Sigma^\omega = \bigcup_{a \in \Sigma} \text{ext}(a).$$

**Proposition 1.** Si  $\Sigma$  est *fini* alors  $\Sigma^\omega$  est compact.

**Preuve.** On procède à l'aide du lemme de Kőnig. Supposons que  $\Sigma^\omega = \bigcup_{i \in I} U_i$  où  $U_i \in \Omega \Sigma^\omega$ . On a que  $U_i = \text{ext}(V_i)$  pour un  $V_i \subseteq \Sigma^*$  (en général,  $V_i$  est infini). Soit  $V = \bigcup_{i \in I} V_i \subseteq \Sigma^*$ , et on vérifie que  $\text{ext}(V) = \Sigma^\omega$ . Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $W_n \subseteq \Sigma^n$  par récurrence :

- ▷ On pose  $W_0 := \{\varepsilon\}$  si  $\varepsilon \in V$  et  $W_0 := \emptyset$  sinon.
- ▷ On pose

$$W_{n+1} := \{ u \in V \mid u \text{ n'a pas de préfixe dans } \bigcup_{k \leq n} W_k \}.$$

On pose enfin  $W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$ . On a que  $\text{ext}(W) = \text{ext}(V)$  (car, pour tout  $v \in V$ , il existe  $w \in W$  tel que  $w \subseteq v$ ), et  $W$  est « prefix-free » (c'est-à-dire que, pour  $w, w' \in W$ , on a  $w \not\subseteq w'$  ssi  $w \neq w'$ ).

Si  $W$  est fini alors on s'arrête.

Par l'absurde, supposons  $W$  infini, et posons  $T = \text{Pref}(W)$  qui est un arbre par définition. L'arbre  $T$  est à branchement fini (car  $\Sigma$  est fini), et  $T$  est infini (car  $W$  l'est) Par le lemme de Kőnig, il existe un chemin infini  $\pi \in \Sigma^\omega$  dans  $T$ . Comme  $\Sigma^\omega = \text{ext}(W)$ , il existe  $u \in W$  tel que  $u \subseteq \pi$ . De plus, il existe  $a \in \Sigma$  tel que  $ua \subseteq \pi$  et donc  $ua \in T = \text{Pref}(W)$ .

On arrive à une contradiction car  $u \in W$  et  $W$  est prefix-free.  $\square$

**Corollaire 1.** On a que  $\Sigma^\omega$  est compact ssi  $\Sigma$  fini.  $\square$

**Lemme 3.** Si  $(X, \Sigma X)$  est compact et  $C \subseteq X$  est fermé alors  $C$  est compact.

**Preuve.** L'idée est que si  $C \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$  alors  $X \subseteq (X \setminus C) \cup \bigcup_{i \in I} V_i$ .  $\square$

**Corollaire 2.** Si  $\Sigma$  est fini alors  $A \subseteq \Sigma^\omega$  est clopen ss'il existe  $W \subseteq \Sigma^*$  *fini* tel que  $A = \text{ext}(W)$ .  $\square$

## 2 Espace Hausdorff.

**Définition 4.** On dit que  $(X, \Omega X)$  est *Hausdorff* (ou  $T_2$ ) lorsque, pour tout  $x \neq y \in X$ , alors il existe  $U, V \in \Omega X$  tels que

$$U \cap V = \emptyset \quad x \in U \quad \text{et} \quad y \in V.$$

**Exemple 2.** L'espace  $(\Sigma^\omega, \Omega \Sigma^\omega)$  est Hausdorff. Soient  $\alpha \neq \beta$ . Il existe  $u \subseteq \alpha$  et  $v \subseteq \beta$  tels que  $\text{ext}(u) \cap \text{ext}(v) = \emptyset$ .

(On peut choisir  $u = p\alpha(\text{length}(p))$  et  $v = p\beta(\text{length}(p))$  où  $p$  est le plus long préfixe commun à  $\alpha$  et  $\beta$ .)

**Proposition 2.** Si  $(X, \Omega)$  est compact Hausdorff et  $C \subseteq X$  est compact alors  $C$  est fermé.

**Preuve.** Soit  $C \subseteq X$  est compact et  $x \notin C$ . Pour tout  $y \in C$ , il existe  $U_y, V_y$  tels que  $U_y \cap V_y = \emptyset$  et  $x \in U_y$  et  $y \in V_y$ . Donc, on a  $C \subseteq \bigcup_{y \in C} V_y$ . Comme  $C$  est compact, il existe  $y_1, \dots, y_n \in C$  tels que  $C \subseteq V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \dots \cup V_{y_n}$ . On a que  $x \in U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n} =: U \in \Omega X$ . Et,  $U \subseteq X \setminus C$  car,  $U \cap (V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}) = \emptyset$ .  $\square$

**Corollaire 3.** Si  $(X, \Omega X)$  est compact Hausdorff et  $C \subseteq X$ ,

$$C \text{ compact} \iff C \text{ fermé.}$$

