Logique temporelle linéaire.

1 La logique LML.

Remarque 1 (Idée). La signification de LML est *linear-time modal logic*. L'idée est de définir une logique pour une propriété LT $P \subseteq (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$ telle que, pour AP fini, les formules correspondent aux clopens.

Soit AP un ensemble de proposition atomiques.

Définition 1. Les formules de LML sont

$$
\begin{aligned}
\phi, \psi ::= {} & \mathsf{a} && \mathsf{a} \in \mathrm{AP} \\
\mid {} & \mathsf{True} && \text{(parfois notée } \top\text{)} \\
\mid {} & \mathsf{False} && \text{(parfois notée } \bot\text{)} \\
\mid {} & \phi \wedge \psi \\
\mid {} & \phi \vee \psi \\
\mid {} & \neg\phi \\
\mid {} & \bigcirc\phi \\
& .
\end{aligned}
$$

La *modalité* $\bigcirc$ est appelée *later* ou *next*.

Définition 2. L'*interprétation* $[\![\phi]\!] \subseteq (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$ est définie par :

- ▷ $[\![\mathsf{a}]\!] := \{\sigma \mid \mathsf{a} \in \sigma(0)\}$;

- $[\![\mathsf{True}]\!] := (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$;
- $[\![\phi \wedge \psi]\!] := [\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!]$;
- $[\![\mathsf{False}]\!] := \emptyset$;
- $[\![\phi \vee \psi]\!] := [\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!]$;
- $[\![\neg\phi]\!] := (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega \setminus [\![\phi]\!]$;
- $[\![\bigcirc\phi]\!] := \{\sigma \mid \sigma \restriction 1 \in [\![\phi]\!]\}$ où, pour $\sigma \in (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$, on note

$$\begin{aligned} \sigma \restriction i : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbf{2}^{\mathrm{AP}} \\ k &\longmapsto \sigma \restriction \sigma(k+i), \end{aligned}$$

  (c'est un décalage d'indices).

Exemple 1. Quelques exemples de mots tels que $\sigma \in [\![\mathsf{a} \vee \bigcirc \mathsf{b}]\!]$:

- $\sigma = \{\mathsf{a}\}\emptyset^\omega$,
- $\sigma = \{\mathsf{b}\}\{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^\omega$,
- $\sigma = \emptyset\{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}\emptyset^\omega$.

Proposition 1. Pour ϕ une formule de LML, on a que $[\![\phi]\!]$ est clopen dans $(\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$.

Preuve. Par induction sur ϕ, on a les cas suivants.

- On a que $[\![\mathsf{a}]\!] = \bigcup_{\mathsf{a} \in A \subseteq \mathrm{AP}} \mathsf{ext}(A)$[1] est un ouvert. De plus, on a que $(\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega \setminus [\![\mathsf{a}]\!] = \bigcup_{a \notin B \subseteq \mathrm{AP}} \mathsf{ext}(B)$ est un ouvert.
- On a que
  - $[\![\bigcirc\phi]\!] = \bigcup_{u \in W, A \subseteq \mathrm{AP}} \mathsf{ext}(Au)$
  - $(\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega \setminus [\![\bigcirc\phi]\!] = \bigcup_{v \in V, A \subseteq \mathrm{AP}} \mathsf{ext}(Av)$

  où par hypothèse d'induction, il existe $V, W \subseteq \Sigma^\star$ tels que $[\![\phi]\!] = \mathsf{ext}(W)$ et $(\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega \setminus [\![\phi]\!] = \mathsf{ext}(V)$.

▷ De même pour les autres cas.

□

Proposition 2. Si AP est ***fini*** et $P \subseteq (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$ est clopen alors il existe ϕ une formule LML telle que $P = [\![\phi]\!]$.

Preuve. On a que $P = \mathsf{ext}(W)$ où $W \subseteq (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\star$ est ***fini***. On a montrer par récurrence sur la taille du mot u que :

$$\forall u \in (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\star, \quad \exists \phi_u \text{ une formule } \mathsf{LML}, \quad [\![\phi_u]\!] = \mathsf{ext}(u).$$

▷ *Cas de base.* Soit $A \subseteq \mathrm{AP}$, on peut prendre

$$\phi_A := \Big(\bigwedge_{\mathsf{a} \in A} \mathsf{a}\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{\mathsf{b} \notin A} \neg \mathsf{b}\Big).$$

▷ *Récurrence.* Soit $u = Av$ où $A \subseteq \mathrm{AP}$ et $v \in (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\star$. On peut poser

$$\phi_{Av} := \phi_A \wedge \bigcirc \phi_v.$$

On peut aussi faire le cas de base pour ε, en posant $\phi_\varepsilon := \mathsf{True}$.

□

Corollaire 1. Si AP est ***fini*** et $P \subseteq (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$ alors

$$P \text{ clopen} \iff \text{il existe } \phi \text{ telle que } [\![\phi]\!] = P.$$

□

1.1 Équivalences logiques.

Définition 3. On note $\phi \equiv \psi$ lorsque $[\![\phi]\!] = [\![\psi]\!]$. On dit que ϕ et ψ sont *(logiquement) équivalentes.*

[1]On rappelle que $\mathsf{ext}(A) = \{\sigma \mid \sigma(0) = A \subseteq \mathrm{AP}\}$.

On a les équivalences suivantes :

- $\phi \equiv \phi \wedge \phi$
- $\phi \equiv \mathsf{True} \wedge \phi$
- $\mathsf{True} \equiv \phi \vee \neg\phi$
- $\mathsf{False} \equiv \phi \wedge \neg\phi$
- $\phi \equiv \neg\neg\phi$
- $\bigcirc(\phi \vee \psi) \equiv \bigcirc\phi \vee \bigcirc\psi$
- $\bigcirc\mathsf{False} \equiv \mathsf{False}$
- $\bigcirc(\phi \wedge \psi) \equiv \bigcirc\phi \wedge \bigcirc\psi$
- $\bigcirc\mathsf{True} \equiv \mathsf{True}$

d'autres équivalences sont possibles (*c.f.* figure 6 des notes de cours).

1.2 *Homework* : Dualité de Stone.

L'idée est de motiver le DM, et de donner quelques bases sur ce que l'on va montrer.

On se place dans le cas où AP est un ensemble fini. Considérons un mot $\sigma \in (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$, on pose

$$\mathscr{F}_\sigma := \{[\phi]_\equiv \mid \sigma \in [\![\phi]\!]\},$$

où $[\phi]_\equiv$ est la classe d'équivalence de $\equiv$. Par les résultats précédents, on a que

$$\mathscr{F}_\sigma \cong \{C \mid \sigma \in C \text{ clopen}\}.$$

On a $\sigma \neq \beta$ implique $\mathscr{F}_\sigma \neq \mathscr{F}_\beta$. De plus, on a les propriétés suivantes :

1. si $C \in \mathscr{F}_\sigma$ et $C \subseteq D$ clopen alors $D \in \mathscr{F}_\sigma$;
2. si $C, D \in \mathscr{F}_\sigma$ alors $C \cap D \in \mathscr{F}_\sigma$;
3. $(\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega \in \mathscr{F}_\sigma$;

4. si C, D sont clopen tels que $C \cup D \in \mathscr{F}_\sigma$ alors $C \in \mathscr{F}_\sigma$ ou $D \in \mathscr{F}_\sigma$;
5. $\emptyset \in \mathscr{F}_\sigma$.

Ces cinq propriétés caractérisent totalement les mots infinis, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 1. Si $\mathscr{F}$ est un ensemble de clopens dans $(\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$ vérifiant les cinq propriétés, alors il existe $\sigma \in (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$ tel que $\mathscr{F} = \mathscr{F}_\sigma$.

Ce théorème est une spécialisation de la *dualité de Stone*.

Définition 4. On dit que $(X, \Omega X)$ est un *espace de Stone* s'il est compact, Hausdorff et qu'il admet une base de clopens.

Théorème 2. Si $(X, \Omega X)$ est un espace de Stone alors

$$(X, \Omega X) \cong \mathbf{Sp}\big(\underbrace{\{C \mid C \text{ clopen}\}, \subseteq}_{\text{algèbre de Boole}}\big).$$

On va définir le *spectre* $\mathbf{Sp}(B)$ où B est une algèbre de Boole, à l'aide des ultrafiltres sur B et les filtres premiers (*c.f.* les cinq propriétés ci-dessus).

Remarque 2 (Idée). Si $\mathscr{F} \subseteq B$ alors c'est une « théorie consistante et complète » où

- *théorie* : stable par implication, *c.f.* 1.–3.
- *consistante* : sans contradiction, 5.
- *complète* : 4., $\forall C$ clopen, si $C \notin \mathscr{F}_\sigma$ alors $(\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega \setminus C \in \mathscr{F}_\sigma$.