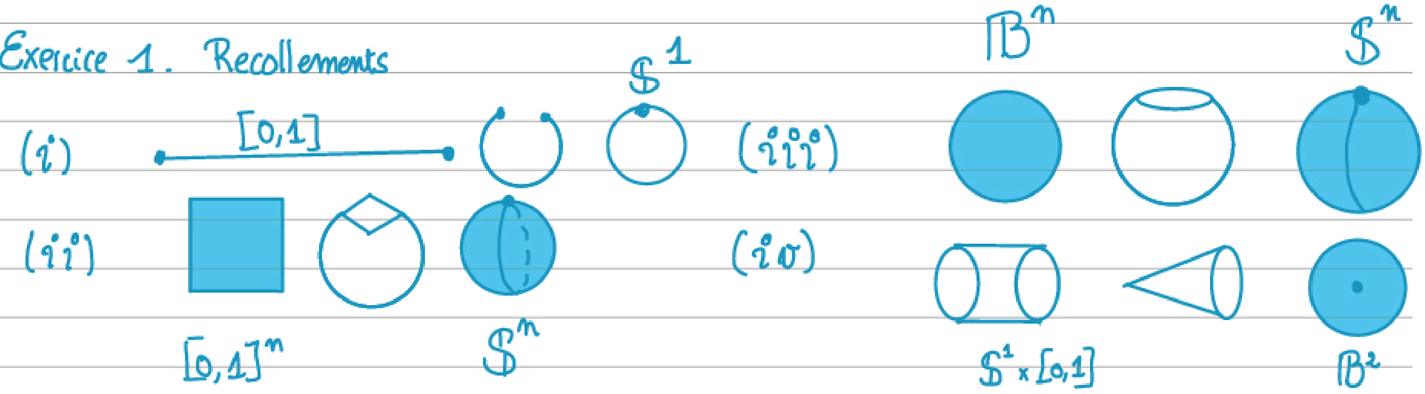
Chargé de TD
Antoine VELUT
MGN1 – 413

TD n° 1.

Homotopie & groupe fondamental.

Exercice 1. Recollements



Exercice 2. Equivalences d'homotopie

1) Soient $f, g, h \in \mathcal{C}(X,Y)$ et $F : f \simeq g$ et $G : g \simeq h$.

- Soit $H : X \times I \longrightarrow Y$, $(x, t) \longmapsto f(x)$. On a $H : f \simeq f$.

- Soit $\bar{F} : X \times I \longrightarrow Y$, $(x, t) \longmapsto \bar{F}(x, 1-t)$. On a $\bar{F} : g \simeq f$.

- Soit $F \cdot G : X \times I \longrightarrow Y$
$$(x, t) \longmapsto \begin{cases} F(x, 2t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ G(x, 2t-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $F \cdot G : f \simeq h$.

2) Soient $F_Y : f \circ \bar{f} \simeq id_Y$, $F_X : \bar{f} \circ f \simeq id_X$ et $G_Y : \bar{g} \circ g \simeq id_Y$, $G_Z : g \circ \bar{g} \simeq id_Z$. On pose $\overline{g \circ f} := \bar{f} \circ \bar{g}$. Notons $h := g \circ f$.

On pose $H_X := H'_X \cdot F_X$ où $H'_X : (x, t) \longmapsto \bar{f}(G_Y(f(x), t))$.

On a $H_X : \bar{h} \circ h \simeq id_X$, où $\bar{h} \circ h = \bar{f} \circ \bar{g} \circ g \circ f$.

$H_1 : \bar{f} \circ \bar{g} \circ g \circ f \simeq \bar{f} \circ f$

De même pour $h \circ \bar{h}$.

3). Soit $F : f \simeq g$ et g est une équivalence homotopique.

Soient $G_X : \bar{g} \circ g \simeq id_X$ et $G_Y : g \circ \bar{g} \simeq id_Y$.

On pose $\bar{f} := \bar{g}$. On a : $f \circ \bar{f} = f \circ \bar{g} \simeq g \circ \bar{g} \simeq id_Y$
$\bar{f} \circ f = \bar{g} \circ f \simeq \bar{g} \circ g \simeq id_X$.

Exercice 3. Espaces contractiles.

1) Supposons $X \simeq \{x_0\}$ où $x_0 \in X$. Soient $F : \bar{\imath} \circ i \simeq id_{\{x_0\}}$ et $G : i \circ \bar{\imath} \simeq id_X$, où i est l'inclusion et $\bar{\imath}$ la fonction constante x_0.

Alors $id_X \simeq i \circ \bar{\imath} = x \longmapsto x_0$.

Réciproquement, si $id_X \simeq x \longmapsto x_0$. On pose $i : x_0 \longmapsto x_0 \in X$.
$\bar{\imath} : x \longmapsto x_0$.

On a $\bar{\imath} \circ i = x_0 \longmapsto x_0 = id_{\{x_0\}}$ et $id_X \simeq i \circ \bar{\imath}$.

2) Supposons $id_X \simeq x \longmapsto x_0 \in X$.

On a $f = f \circ id_X \simeq x \longmapsto f(x_0) \underset{F}{\simeq} x \longmapsto g(x_0) \simeq g \circ id_X = g$.

où $F : Y \times I \longrightarrow Y$
$(-, t) \longmapsto p(t)$
où $p : f(x_0) \rightsquigarrow g(x_0)$.

3) Soient $x, y \in X$. Les fonctions constantes x et y sont homotopes d'où on a un chemin de x à y.

4) Posons $i : \underset{\{c_0\}}{\underset{\cap}{c_0}} \longmapsto \underset{C}{\underset{\cap}{c_0}}$ et $\bar{\imath} : x \longmapsto c_0$.

On a $\bar{\imath} \circ i = id_{\{c_0\}}$ et définissons $F : C \times I \longrightarrow C$
$(c, t) \longmapsto \underbrace{c_0(1-t) + ct}_{\in [c_0, c] \subseteq C}$.

On a $F : id_C \simeq c \longmapsto c_0 = i \circ \bar{\imath}$.

D'où $C \simeq \{c_0\}$.

5) Considérons X une partie convexe non-vide de $\mathbb{R}^n$. C'est une partie étoilée de $\mathbb{R}^n$ d'où contractile.

6) Supposons X non vide. Soit $x \in X$.

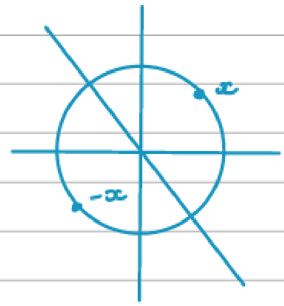
Considérons $i : \{*\} \longrightarrow CX$ et $\bar{\imath} : CX \longrightarrow \{*\}$.
$* \longmapsto (x, 0)$ $\qquad$ $- \longmapsto *$

On a $\bar{i} \circ i \simeq \mathrm{id}_{\{*\}}$. Construisons $i \circ \bar{i} = \_ \mapsto (x,0) \simeq \mathrm{id}_{CX}$.

$$F : CX \times I \longrightarrow CX$$
$$(x, u, v) \longmapsto (x, \min(u,v))$$

On a $F(-,0) = - \mapsto (x,0) = i \circ \bar{i}$.

$F(-,1) = \mathrm{id}_X$



Exercice 4. Supposons n impair.

Soit $F : S^n \times I \longrightarrow S^n$

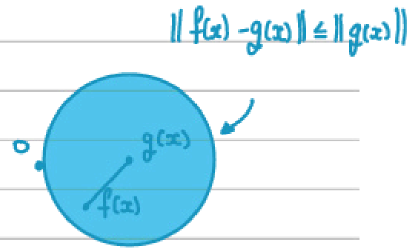
$(x, t) \longmapsto$

Exercice 5. Exemples d'homotopie

1) Soient x et y deux points de X.
Montrons que $f(x)$ et $g(y)$ sont dans la même comp connexe de Y.

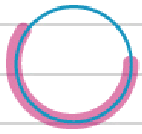
Soit $p : x \rightsquigarrow y$ un chemin et soit $F : f \simeq g$.

On a $f(x) \underset{f \circ p}{\rightsquigarrow} f(y) \underset{F(y,-)}{\rightsquigarrow} g(y)$.



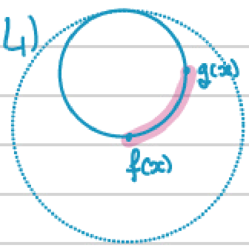
2) On a $Y = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\forall x \in X$, $\|f(x) - g(x)\| < \|g(x)\|$.
On a, pour tout $x \in X$, $[f(x), g(x)] \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
D'où on a $F : f \simeq g$ avec
$F : (x,t) \longmapsto (1-t) f(x) + t\, g(x)$.

3) Supposons $Y = S^n$ et qu'il existe $y \in S^n$ tel que $y \notin f(X)$.



On a donc que $f(X)$ est contractile, d'où $f \simeq \_ \mapsto f(x_0)$ où $x_0 \in X$.
(car $S^n \setminus \{y\}$ l'est car $S^n \setminus \{y\} \cong \mathbb{R}^n$ par projection stéréographique).

4)



Les points $f(x)$ et $g(x)$ ne sont pas antipodaux. On considère

$$H : (x,t) \longmapsto \frac{(1-t) f(x) + t\, g(x)}{\|(1-t) f(x) + t\, g(x)\|} \in S^1$$

et on a $H : f \simeq g$.

On pose $g(x) := -x$. On a $\|f(x) - g(x)\| = \|\underbrace{f(x)}_{\neq x} + x\| < 2$ d'où $f \simeq \mathrm{id}_{S^n}$.