

Machines de Turing.

On travaille avec des machines à $k \geq 1$ rubans. Les rubans sont semi-infinis à droite et sur chaque ruban, on a une tête de lecture qui lit le contenu d'une case.

À chaque étape,

- ▷ la machine M lit les k caractères situés sous les têtes de lecture (a_1, \dots, a_k) ;
- ▷ en fonction de son état interne $q \in Q$, et des caractères lus, M remplace chaque a_i par a'_i , déplace les têtes de lectures (d'au plus une case à droite ou à gauche), et passe dans un état $q' \in Q$.

1 Définitions.

■ **Définition 1.** Formellement, une *machine de Turing* à k rubans est un triplet (Γ, Q, δ) où

- ▷ Γ est l'alphabet du ruban ;
- ▷ Q est un ensemble fini d'états ;
- ▷ $\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{\leftarrow, \rightarrow, \text{I}\}^k$ la fonction de transition.

■ **Remarque 1.** On fixe

- ▷ un *ruban d'entrée* (généralement supposé en lecture uniquement),
- ▷ un *ruban de sortie* (généralement supposé en écriture uniquement),
- ▷ un état initial q_{initial} ;
- ▷ un état final q_{final} ;

- ▷ un symbole blanc $\square \in \Gamma$;
- ▷ un symbole de départ $\triangleright \in \Gamma$;
- ▷ un alphabet d'entrée $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{\triangleright, \square\}$.¹

Au départ, M est dans l'état q_{initial} , le ruban d'entrée contient le mot infini $\triangleright x \square^\infty$ où $x \in \Sigma^*$ est l'entrée.

☞ **Définition 2.** On dit que M *calcule* la fonction $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ si, pour toute entrée $x \in \Sigma^*$, le calcul de M termine et $f(x)$ est écrit sur le ruban de sortie.

On dit qu'un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est *reconnu* si on peut calculer la fonction $\mathbb{1}_L : \Sigma^* \rightarrow \{\emptyset, 1\} \subseteq \Sigma$. On peut aussi avoir un état q_{accepte} acceptant et un état q_{rejet} de rejet.

☞ **Remarque 2 (Variantes).** On peut considérer un modèle avec des rubans bi-infinis. C'est un modèle équivalent (c.f. TD).

On peut considérer une machine avec $\Gamma = \{\emptyset, 1, 2, 3, \square, \triangleright\}$, c'est-à-dire un alphabet plus gros. Ce modèle est équivalent avec l'association

$$\emptyset \leftrightarrow \emptyset\emptyset \quad 1 \leftrightarrow \emptyset 1 \quad 2 \leftrightarrow 1\emptyset \quad 3 \leftrightarrow 11.$$

☞ **Définition 3.** Un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est *reconnu en temps* $T(n)$ par une machine M si

- ▷ M reconnaît L ;
- ▷ sur toute entrée x de taille n , la machine M s'arrête en au plus $T(n)$ étapes de calcul.

☞ **Définition 4.** On dit que L est dans la classe $\text{DTIME}(f(n))$ s'il existe une machine (à plusieurs rubans) qui reconnaît L en temps $O(f(n))$. On supposera toujours avoir $f(n) \geq n + 1$.²

1. Généralement, on prendra $\Sigma \subseteq \{\emptyset, 1\}$.

2. Il faut, au moins, lire l'entrée.

▮ **Définition 5.** La classe P est l'ensemble des langages reconnaissables en temps polynomial :

$$P = \bigcup_{\alpha \geq 1} DTIME(n^\alpha).$$

▮ **Théorème 1.** Si $L \in DTIME(f(n))$ alors L peut être reconnu en temps $O(f(n)^2)$ sur une machine à un ruban.

▮ **Théorème 2 (Simulation efficace).** Pour toute machine M fonctionnant en temps $T(n)$, il existe une machine M' à deux rubans qui fonctionne en temps $O(T(n) \log T(n))$ telle que $M(x) = M'(x)$ pour toute entrée $x \in \Sigma^*$.

▮ **Définition 6.** Étant donné x, y , on définit l'encodage du couple (x, y) comme le mot $\langle x, y \rangle = 1^{|x|}0xy$.

▮ **Définition 7.** Une *machine universelle* U prend en entrée des couples $\langle x, \alpha \rangle$ (où α est le code d'une machine M_α et $x \in \Sigma^*$) et simule la machine M_α sur l'entrée x . Autrement dit, pour tout x et tout α , on a

$$U(\langle x, \alpha \rangle) = M_\alpha(x).$$

▮ **Théorème 3.** Il existe une machine de Turing universelle U telle que, sur toute entrée $\langle x, \alpha \rangle$, si M_α s'arrête sur x en t étapes, alors la machine U s'arrête sur $\langle x, \alpha \rangle$ en au plus $ct \log t$, où c ne dépend que de x .

▮ **Preuve.**

- ▷ *Cas d'une machine à deux rubans.* On montre d'abord que si M_α est une machine à deux rubans, alors U peut simuler

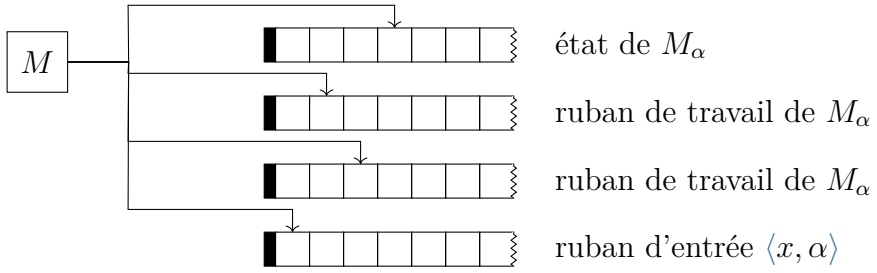


Figure 1 | Construction de U dans le cas à deux rubans

M_α en temps linéaire. En effet, on utilise quatre rubans (figure 1) :

- deux rubans pour stocker les deux rubans de M_α ;
- un ruban qui stocke l'état de M_α ;
- le ruban d'entrée qui contient $\langle x, \alpha \rangle$.

Pour faire une étape de calcul de M_α , la machine U doit déterminer $\delta(q, a, b)$, mais la complexité de cette opération est cachée dans la constante.

- ▷ *Cas général.* Par le théorème de simulation efficace, on peut construire une machine M_β à deux rubans équivalente et on peut simuler M_β en temps linéaire, et on obtient bien la complexité attendue.

□

2 Non déterminisme.

■ **Définition 8.** Une *machine de Turing non-déterministe* est un triplet (Γ, Q, δ) où

$$\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow \wp(Q \times \Gamma^k \times \{\leftarrow, \rightarrow, \text{I}\}^k),$$

où l'on distingue deux états q_{accepte} et q_{rejet} .

Une entrée $x \in \Sigma^*$ est *acceptée* s'il existe un chemin d'exécution acceptant sur l'entrée x .

☞ **Définition 9.** On note $\text{NTIME}(f(n))$ l'ensemble des langages acceptés par une machine de Turing non-déterministe fonctionnant en temps $O(f(n))$ sur toute entrée de taille n et tout chemin de calcul.

☞ **Définition 10.** Un langage L est dans NP s'il existe une machine non-déterministe M fonctionnant en temps polynomial tel que L est l'ensemble des entrées acceptées par M . Ainsi,

$$\text{NP} = \bigcup_{\alpha \geq 1} \text{NTIME}(n^\alpha).$$

☞ **Théorème 4** (Définition alternative de NP). Un langage L est dans NP s'il existe un polynôme p et $A \in \mathcal{P}$ tel que, pour toute entrée $x \in \{0, 1\}^*$,

$$x \in L \quad \Longleftrightarrow \quad \exists y \in \{0, 1\}^*, \quad \langle x, y \rangle \in A.$$

On dit que y *certifie* que x est dans L .

3 NP-complétude.

☞ **Définition 11.** On dit qu'un problème A se réduit à B en temps polynomial s'il existe une fonction $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ calculable en temps polynomial telle que, pour toute entrée x ,

$$x \in A \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \in B.$$

On note alors $A \leq_{\mathcal{P}} B$ ou $A \leq_M B$.³

☞ **Remarque 3.** Si $A \leq_{\mathcal{P}} B$ et $B \leq_{\mathcal{P}} C$ alors $A \leq_{\mathcal{P}} C$ par composition des réductions.

3. Personnellement, je noterai parfois $f : A \leq_{\mathcal{P}} B$ où f est une fonction de réduction.

▮ **Définition 12 (NP-complétude).** On dit que A est **NP-complet** dès lors que

- ▷ $A \in \text{NP}$;
- ▷ A est **NP-dur**, c'est-à-dire $B \leq_P A$ pour tout $B \in \text{NP}$.

▮ **Remarque 4.** Pour montrer qu'un problème $A \in \text{NP}$ est **NP-complet**, il suffit de montrer que $B \leq_P A$ où B est un problème **NP-complet**. En effet, on a alors, pour tout $C \in \text{NP}$,

$$C \leq_P B \leq_P A.$$

Il suffit donc d'avoir un problème **NP-complet** comme « point de départ ». Généralement, on choisit **SAT** ou **3-SAT**, mais dans ce cours on partira de **CIRCUITSAT** (défini au prochain chapitre).

SAT | **Entrée.** Une formule booléenne ϕ
Sortie. La formule ϕ est-elle satisfiable ?

3-SAT | **Entrée.** Une formule booléenne ϕ sous 3-CNF
Sortie. La formule ϕ est-elle satisfiable ?