

Récap #1 du traquenard HoTT

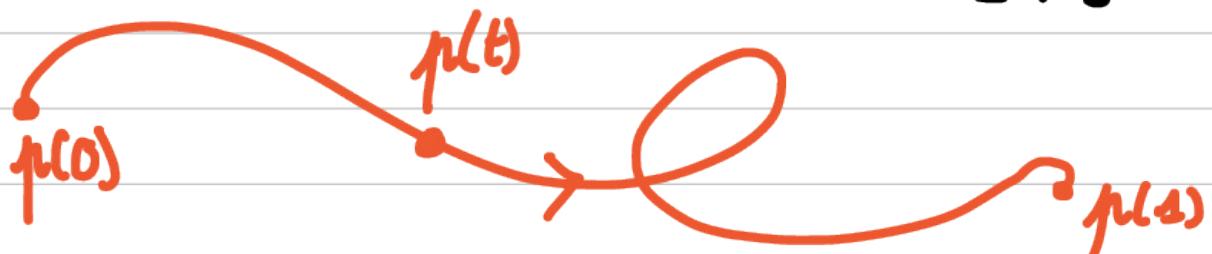
Hugo
SALOU

INTRO à la TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE

I. Chemins & homotopie

En topo. alg., on ne travaille qu'avec des fonctions continues.

Un chemin est une fonction continue $p : \mathbb{I} \longrightarrow X$.
 $\begin{matrix} \text{II} \\ \parallel \\ [0,1] \end{matrix}$



(les chemins ont une direction)

Opérations sur les chemins

- la concaténation :

$$(p \cdot q)(t) := \begin{cases} p(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ q(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

On passe de



à



- l'“inversion” :

$$p^{-1}(t) := p(1-t)$$

On passe de



à



Aussi, on a un chemin "trivial"

$$\text{refl}_x(t) := x$$

$\text{refl}_x \cdot x$

J'ai "agrandi" la boucle pour qu'on la voie

Sauf que nos opérations ne sont pas
"sympathiques"

$$p \cdot (q \cdot r) \neq (p \cdot q) \cdot r$$

$$p \cdot \text{refl} \neq p$$

$$p \cdot p^{-1} \neq \text{refl}$$

on se déplace
mais rien d'intéressant ...

... ouch!

de chemins
Une homotopie^V est une fonction continue

$$h : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow X$$

où

$$\begin{aligned} h(u, 0) &= x \\ h(u, 1) &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(0, -) &= p \\ h(1, -) &= q \end{aligned}$$

À tout instant u ,

$$h(u, -)$$

est un chemin de
 x à y

On part de p
On arrive à q .

(En décurryifiant, on peut le voir comme un
chemin de p à q dans un espace de
chemins de x à y .)

Notation: $p \approx_p q$ s'il existe une homotopie
de p à q

La condition en rose est nécessaire car sinon :

$p \approx_p q \iff p$ et q sont dans la même comp. connexe

(merci Sarah)

II. Groupe fondamental

On pose $\pi_1(X, x) := \frac{\text{chemins de } x \text{ à } x}{\approx_p}$

Quelques exemples

$\pi_1(\mathbb{R}^2)$ est trivial

$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

Idee : on doit partir et revenir en un point fixé, on compte juste

le nombre de "tours
autour du trou"

$$\pi_1(\text{∞}) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$



produit libre

(c'est $\{a^{-1}, b^{-1}, a, b\}^*$ où
l'on "simplifie" $a^{-1}a$, aa^{-1} , $b^{-1}b$,
 $b^{-1}a \cdot b$.)

Le groupe $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ n'est pas abélien!

$$ab \neq ba$$

$$\pi_1(\text{∞}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

↑ produit "classique"
(il est abélien)

Euh ... Hugo ... c'est "légal" d'écrire
 $\pi_1(X)$
 sans point ?

... pas vraiment ... mais on peut y renoncer de deux manières :

groupoïde fondamental ou

c.f. annexe

connexité (par arcs)

ou maintenant

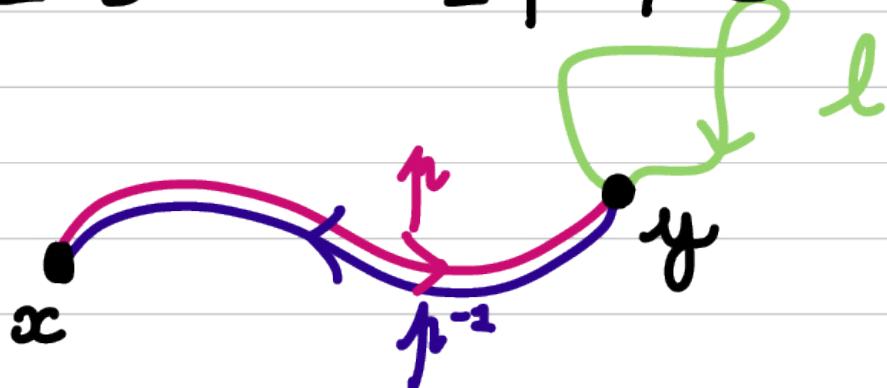
chemin de x à y

PROPOSITION: Si $p: x \rightsquigarrow y$ alors

$$\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y)$$

$$[l] \longleftrightarrow [p \cdot l \cdot p^{-1}]$$

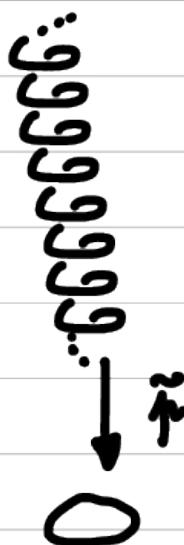
Pourquoi ?



Ainsi, dans un espace connexe (non-vide),
pas besoin de donner le point de base.

D'autres propriétés la prochaine fois...

III. Revêtements



R (mais tordu)

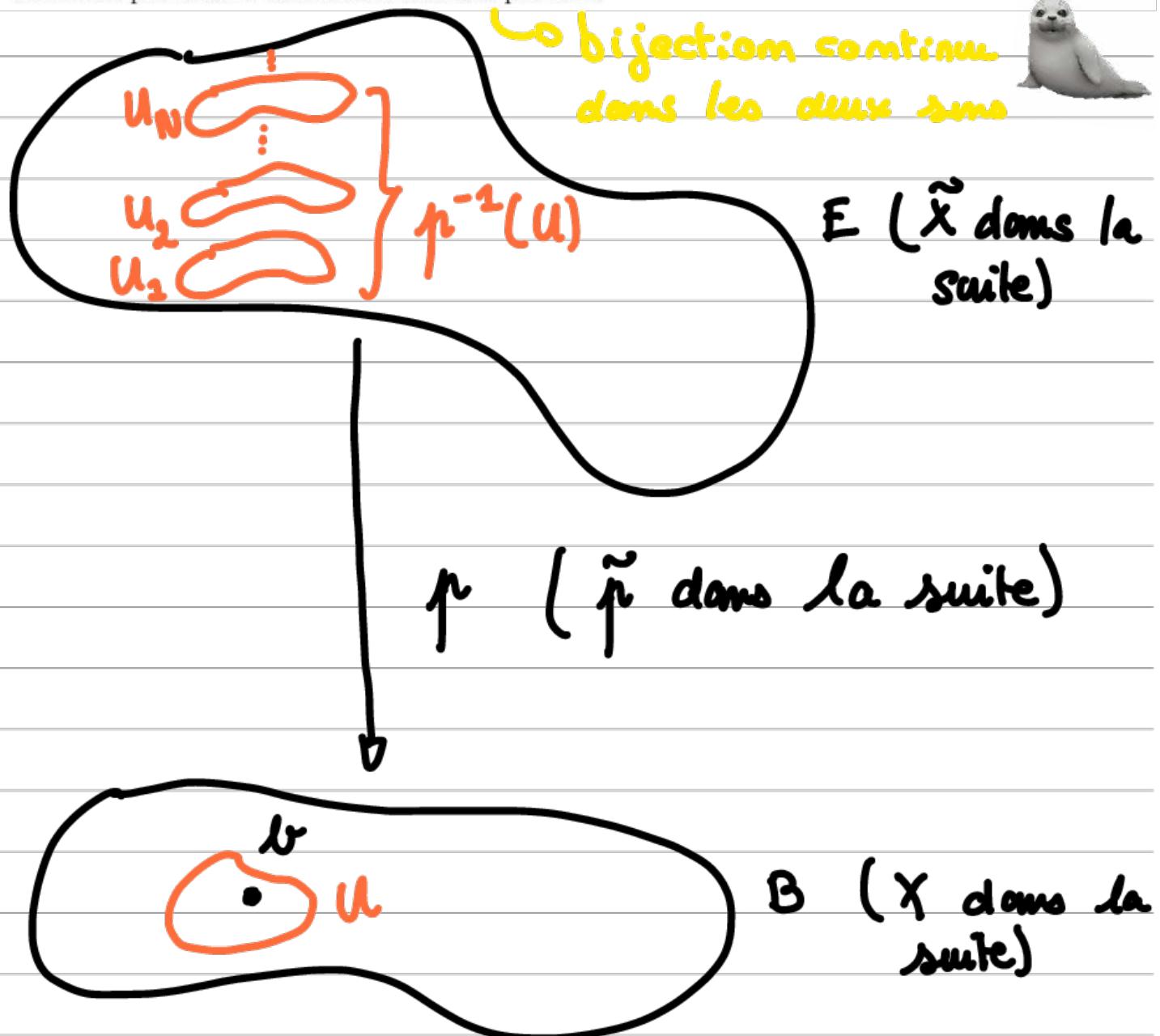


Un revêtement est une sorte de simplification ("dépliage") d'un espace.

"Localement, un revêtement de X ressemble à (un sandwich de copies de) X ."

La définition formelle est pas fum...

Définition 1.1.1. Une application continue $p : E \rightarrow B$ est un **revêtement de B** si tout point $b \in B$ admet $U \in \mathcal{V}(b)$ ouvert tel que $p^{-1}(U)$ est une union disjointe d'ouverts $U_i, i \in I$ avec $p|_{U_i} : U_i \rightarrow U$ est un **homéomorphisme**. On dira que le revêtement est **CALCA** si E et B sont connexes par arcs et localement connexe par arcs.

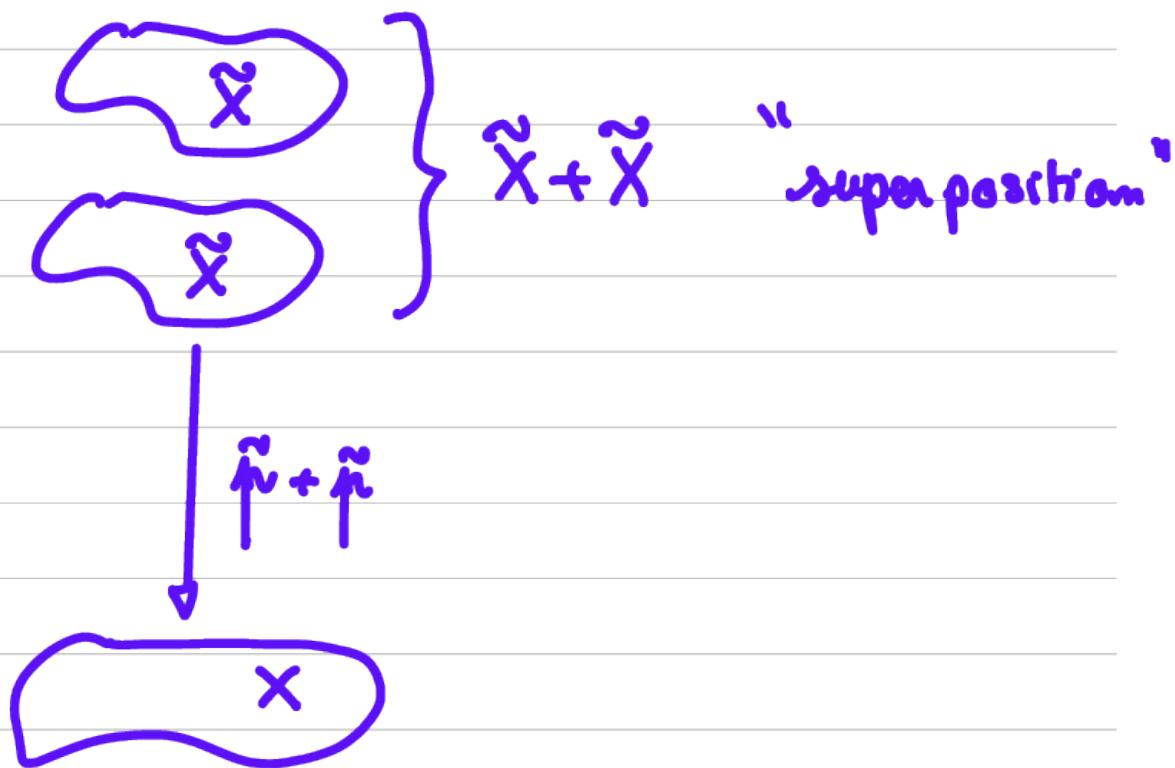


Gm travaillera toujours avec X (B) connexe (il suffit de travailler sur chaque comp. connexe de X selon).

On se restreint aussi aux revêtements connexes ($\tilde{X} = E$ connexe) comme...
simon...

"une infinité pour le prix d'un !!"

On peut dupliquer les revêtements :
si $\tilde{\pi}: \tilde{X} \rightarrow X$ est un revêtement alors



est aussi un revêtement... et on peut faire autant de copies que l'on veut.

Plus de propriétés la prochaine fois...

II Correspondance de Galois.

Revêtements
pointés connexes
de (X, x)



sous-groupes
de $\pi_1(X, x)$

Sources sympathiques :

→ topologie algébrique ~~mo~~ Hatcher

→ théorie des types homotopiques ~~mo~~ HOTT Book

→ théorie des catégories ~~mo~~ ~~MLab~~ Perrone
Paolo

(c'est un bon livre!)

ANNEXE .

Quelques bases en théorie des catégories

Le but n'est pas de tout définir mais de donner les éléments principaux .

Une catégorie \mathcal{C} est la donnée de :

→ une collection d'objets $Ob_{\mathcal{C}}$

→ pour deux objets A et B , un ensemble

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

de "morphismes" de A à B

→ pour $A, B, C \in Ob_{\mathcal{C}}$,

$$-\circ- : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

la loi de composition.

Tels que

— pour tout $A \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$, $\text{id}_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$

— $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \quad \forall f, g, h$

— $f \circ \text{id}_A = \text{id}_A \circ f = f. \quad \forall f$

Quelques exemples :

• la catégorie Set :

— objets : ensembles

— morphismes : fonctions

— composition : composition de fonctions

• la catégorie Group :

— objets : groupes

— morphismes : morphismes de groupes

— composition : composition de fonctions

... de même pour Ring, Field, ...

Les morphismes sont toujours des fonctions dans les exemples précédents... sauf que ce n'est pas toujours le cas.

- Soit \subseteq un ordre sur X , la catégorie

$\text{Poset}(X)$:

→ objets: éléments de X

→ morphismes: un unique morphisme

$$x \rightarrow y$$

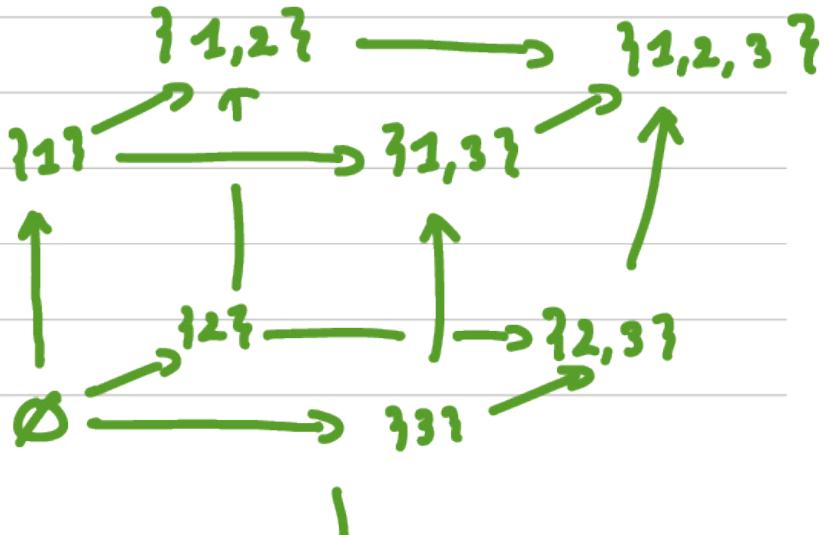
ssi $x \leq y$

→ composition: la seule manière possible

Les morphismes sont des objets purement formels.

Exemple avec

$\text{Poset}(\wp(\{1,2,3\}), \subseteq)$



On ne dessine pas les identités ni les compositions pour simplifier.

espace topo.

(Autre exemple : le groupoïde fondamental $\pi_1(X)$)

→ objets : points de X

→ morphismes : chemins à homotope près

→ composition : concaténation de chemins.

C'est même mieux qu'une "simple" catégorie,
c'est un **groupoïde** : tous les morphismes
sont des isomorphismes et ρ^{-1} existe
et

$$\rho \cdot \rho^{-1} \underset{\text{refl}}{\sim_{\rho}} \text{id} \quad \rho^{-1} \cdot \rho \underset{\text{id}}{\sim_{\rho}} \text{id}.$$

PROPOSITION Si \mathcal{G} est un groupoïde alors pour
tout $x \in \text{Ob}_{\mathcal{G}}$, $\underbrace{\text{Hom}_{\mathcal{G}}(x, x)}$ est un groupe.
 $\text{Aut}_{\mathcal{G}}(x)$

Dans notre cas :

$$\pi_1(X, x) = \text{Hom}_{\pi(X)}(x, x).$$

Les morphismes entre deux catégories : les foncteurs.

Un foncteur $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est la donnée de :

- une fonction $F: \text{Ob}_{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Ob}_{\mathcal{D}}$
- une fonction $F: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$



en écrit "F" dans tous les cas car il n'y a pas vraiment d'ambiguité des notations

telles que :

- $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ $\forall f \forall g$
- $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$ $\forall A$.

Quelques exemples :

• foncteur d'oubli "U : $\text{Group} \rightarrow \text{Set}$

qui à $(G, \cdot, 1_G)$ associe G l'ensemble sous-jacent et à

$$u: (G, \cdot, 1_G) \rightarrow (H, x, 1_H)$$

associe $u: G \rightarrow H$

• de même, on a des foncteurs d'oubli

$\text{Field} \rightarrow \text{Ring}$, $\text{Ring} \rightarrow \text{Group}$,

$\text{Group} \rightarrow \text{Monoid}$, etc

• On construit un foncteur

$-^*: \text{Set} \rightarrow \text{Monoid}$

• à Σ , on associe Σ^* l'ens. des mots sur Σ avec la concaténation de mots et le mot vide

• à $f: \Sigma \rightarrow \Gamma$, on associe

$$f^*: \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$$

$$a_1 \dots a_n \mapsto f(a_1) \dots f(a_n).$$

Autre exemple : π_1 ... mais on en parle
la prochaine fois.