KHÔLLE N° 10

Exercice 1

1. On pose $x = 1$. L'intégrale $I = \int_0^\pi \ln(2 - 2\cos t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en 0 et en π. Elle converge si, et seulement si les intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2 - 2\cos t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(2 - 2\cos t)\,\mathrm{d}t$ convergent.
$$\ln(2 - 2\cos t) = (\ln 2)\ln(1 - \cos t) = -\ln 2 + o(1).$$
L'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2-2\cos t)\,\mathrm{d}t$ est donc faussement impropre en 0. Et, avec le changement de variable strictement monotone $u = t - \frac{\pi}{2}$, on a $\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(2 - 2\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(2 - 2\cos u)\,\mathrm{d}u$, qui est faussement impropre en 0. On en déduit que l'intégrale I converge, la fonction F est bien définie en $x = 1$.
2. On a, pour $x \in [0, 1[$ et $t \in [0, \pi]$, $-2x\cos t \geqslant -2x$ donc $x^2 - 2x\cos t + 1 \geqslant x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 > 0$ car $x < 1$. Ainsi, la fonction f est définie sur $[0, 1[\times [0, \pi]$.
3. On pose $X = [0, 1[$.
   — Pour $t \in [0, \pi]$, la fonction $x \mapsto f(x, t) = \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur X comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
   — Pour $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x, t) = \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)$ est continue par morceaux sur $[0, \pi]$, et intégrable sur $[0, \pi]$ (d'après la question 1).
   — Pour $x \in X$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, \pi]$:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{2x - 2\cos t}{x^2 - 2x\cos t + 1}.$$
   — Pour $x \in X$, pour $t \in [0, \pi]$,
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant .$$