DM$_5$ Mathématiques

Exercice

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. La fonction tangente est $\mathscr{C}^\infty$ sur cet intervalle. On peut donc utiliser la formule de Leibniz :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad (\tan^2)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)}(x) \times \tan^{(n-k)}(x).$$

Or, on sait que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan^{(n+1)}(x) = (\tan')^{(n)}(x) = (\tan^2)^{(n)}(x)$ car $\tan' x = 1 + \tan^2 x$. D'où,

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)}(x) \times \tan^{(n-k)}(x).}$$

2. On procède par récurrence forte.
   - On a, pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan^{(0)} x = \tan x \geqslant 0$.
   - D'après la question 1, pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan^{(n+1)} x$ est positif, car somme de n termes positifs, par hypothèse de récurrence.

   D'où,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan^{(n)} x \geqslant 0.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si I est un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, et $a \in I$, alors

$$\boxed{\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(x-t)^n \,\mathrm{d}t.}$$

4.
5. On a $a_0 = \tan(0) = 0$, et $a_1 = \tan'(0) = 1 + \tan^2 0 = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
(n+1)a_{n+1} &= \frac{(n+1)\ \tan^{(n+1)} 0}{(n+1)!} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \tan^{(k)} 0 \times \tan^{(n-k)} 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times \frac{1}{n!} \tan^{(k)} 0 \times \tan^{(n-k)} 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\tan^{(k)} 0}{k!} \times \frac{\tan^{(n-k)} 0}{(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k}
\end{aligned}$$

6. D'après la question 4, la série $\sum a_n x^n$ converge pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Or, la série $\sum a_n x^n$ est une série entière, son rayon de convergence R est donc supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$:

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad \sum a_n x^n \text{ converge.}$$

D'où, $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\subset \left]-R, R\right[$, la série $\sum a_n x^n$ converge. La fonction S est donc bien définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

7. On peut dériver terme à terme la série entière $\sum a_n x^n$ sans changer son rayon de convergence. Ainsi, pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\begin{aligned} S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (a_k x^k) \cdot (a_{n-k} x^{n-k}) \\ &= 1 + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\Big) \\ &= 1 + \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\Big) \\ &= 1 + S^2(x). \end{aligned}$$

Problème

Partie 1.

1. Soit $\vec{v} \in E \setminus F$, donc $\vec{v} \neq \vec{0}$. Soit p l'application $p : \vec{x} \mapsto \vec{x} - p(\vec{x})$, la projection sur $F^{\perp}$, car E est de dimension finie. On procède par Analyse-Synthèse, ce qui démontre l'existence et l'unicité.

Analyse Soient $\vec{u} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{u}+\lambda\vec{v} \in F^{\perp}$, $\|\vec{u}+\lambda\vec{v}\| = \alpha$ et $\langle \vec{u} + \lambda\vec{v} \mid \vec{v} \rangle > 0$. On a

$$\begin{aligned} \vec{u} + \lambda\vec{v} \in F^{\perp} \quad & \text{donc} \quad \langle \vec{u} + \lambda\vec{v} \mid \vec{u} \rangle = 0 \\ & \text{donc} \quad \langle \vec{u} + \lambda\pi(\vec{v}) \mid \vec{u} \rangle + \lambda \langle p(\vec{v}) \mid \vec{u} \rangle = 0 \\ & \text{donc} \quad \langle \vec{u} + \lambda\pi(\vec{v}) \mid \vec{u} \rangle = 0 \\ & \text{donc} \quad \vec{u} + \lambda\pi(\vec{v}) \in F^{\perp} \\ & \text{donc} \quad \vec{u} + \lambda\pi(\vec{v}) = \vec{0} \end{aligned}$$

On en déduit $\vec{u} = -\lambda\pi(\vec{v})$. On a

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \lambda\vec{v}\| = \alpha \text{ donc } & \|-\lambda\pi(\vec{v}) + \lambda\vec{v}\| = \alpha \\ \text{donc } & \|\lambda p(\vec{v})\| = \alpha \\ \text{donc } & |\lambda| = \frac{\alpha}{\|p(\vec{v})\|} \end{aligned}$$

car $p(\vec{v}) \neq \vec{0}$ (sinon, $\vec{v} \in F$, ce qui est faux par hypothèse). On en déduit $\lambda \in \{\alpha/\|p(\vec{v})\|, -\alpha/\|p(\vec{v})\|\}$. Et, on a,

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} + \lambda\vec{v} \mid \vec{v} \rangle > 0 \quad & \text{si, et seulement si} \quad \langle \lambda p(\vec{v}) \mid \vec{v} \rangle > 0 \\ & \text{si, et seulement si} \quad \lambda \langle p(\vec{v}) \mid \vec{v} \rangle > 0 \\ & \text{si, et seulement si} \quad \lambda \langle p(\vec{v}) \mid p(\vec{v}) \rangle + \langle p(\vec{v}) \mid \pi(\vec{v}) \rangle > 0 \\ & \text{si, et seulement si} \quad \lambda \|p(\vec{v})\|^2 > 0 \\ & \text{si, et seulement si} \quad \lambda > 0 \end{aligned}$$

On en déduit $\lambda > 0$.

Synthèse On pose $\lambda = \alpha / \|p(\vec{v})\|$, et $\vec{u} = -\lambda\pi(\vec{v})$. On a $\vec{u} + \lambda\vec{v} = -\lambda\pi(\vec{v}) + \lambda\vec{v} = \lambda p(\vec{v}) \in F^\perp$. Par l'équivalence de l'analyse, on a $\langle \vec{u} + \lambda\vec{v} \mid \vec{v} \rangle > 0$ car $\lambda > 0$. Finalement, on a

$$\|\vec{u} + \lambda\vec{v}\| = \|\lambda p(\vec{v})\| = \lambda\|p(\vec{v})\| = \alpha.$$

D'où l'existence et l'unicité. De plus, $\vec{u} + \lambda\vec{v} = \lambda p(\vec{v})$ où p est la projection orthogonale sur $F^\perp$ (car $(F^\perp)^\perp = F$, car E est de dimension finie).

2. On procède par Analyse-Synthèse.

Analyse Supposons construit la famille $(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n)$ vérifiant les conditions de l'énoncé. Ainsi, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $\vec{w}_p \in E_p$. Soit alors les réels $x_1, \ldots, x_p$ tels que $\vec{w}_p = x_1\vec{w}_1 + \cdots + x_{p-1}\vec{w}_{p-1} + x_p\vec{v}_p$. De plus, $\vec{w}_p \in E_{p-1}^\perp$, d'où, $\forall q \in [\![1, p-1]\!]$,

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \vec{w}_p \mid \vec{v}_q \rangle \\
&= \langle x_1\vec{w}_1 + \cdots + x_{p-1}\vec{w}_{p-1} + x_p\vec{w}_p \mid \vec{v}_q \rangle \\
&= x_1 \langle \vec{w}_1 \mid \vec{v}_q \rangle + \cdots + x_{p-1} \langle \vec{w}_{p-1} \mid \vec{v}_q \rangle + x_p \langle \vec{v}_p \mid \vec{v}_q \rangle \\
&= x_q \langle \vec{w}_q \mid \vec{v}_q \rangle + \cdots + x_{p-1} \langle \vec{w}_{p-1} \mid \vec{v}_q \rangle + x_p\|\vec{v}_p\|
\end{aligned}$$