Khôlle n° 8

Exercice 2

1. Posons U_k l'événement « on choisit l'urne k. » Les événements $U_1, U_2, \ldots, U_k$ forment une partition de l'univers Ω. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
u_{K,n} &= P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) \\
&= \sum_{k=1}^{K} P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n \mid U_k) \times P(U_k) \text{ d'après les probabilité totales} \\
&= \sum_{k=1}^{K} P(B_1 \mid U_k) \cdot P(B_1 \mid B_2 \cap U_k) \cdot \ldots \cdot P(B_n \mid B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap U_k) \\
&= \sum_{k=1}^{K} P(U_k) \prod_{i=1}^{n} P(B_i \mid U_k) \text{ par indépendance} \\
&= \sum_{k=1}^{K} P(U_k) \prod_{i=1}^{n} P(B_1 \mid U_k) \text{ par équiprobabilité} \\
&= \sum_{k=1}^{K} P(U_k) P(B_1 \mid U_k)^n \\
&= \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{K} \times \left(\frac{k}{K}\right)^n \\
&= \frac{1}{K^{n+1}} \times \sum_{k=1}^{K} k^n.
\end{aligned}$$

2. On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{K,n} = \sum_{k=1}^{K} \frac{k^n}{K^n} \times \frac{1}{K} = \sum_{k=1}^{K-1} \Big(\underbrace{\frac{k}{K}}_{\substack{\cap \\ [0,1]}}\Big)^n \cdot \frac{1}{K} + \frac{1}{K}.$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![1, K-1]\!]$, $\left(\frac{k}{K}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, et donc, comme la somme est finie, on a

$$u_{K,n} = \sum_{k=1}^{K-1} \left(\frac{k}{K}\right)^n \cdot \frac{1}{K} + \frac{1}{K} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{K}.$$

Cet événement correspond à « on tire toujours une boule blanche. » Cet événement est certain uniquement si l'urne tirée est celle contenant K boules blanches et 0 boules noires, et la probabilité de choisir cette urne est $P(U_K) = \frac{1}{K}$.

3. On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{K,n} = \frac{1}{K} \times \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{k}{K}\right)^n = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} f\left(\frac{k}{K}\right)$$

avec $f : x \mapsto x^n$, qui est continue par morceaux sur $[0,1]$.. Par somme de Riemann, on en déduit que

$$u_{K,n} \xrightarrow[K\to\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 1

1. Soit $x > -1$, et soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a
$$\begin{aligned} |f_k(x)| = f_k(x) &= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \\ &= \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{1+\frac{x}{k}}\right) \\ &= \frac{1}{k}\left(1 - 1 + \frac{x}{k} + o\left(\frac{x}{k}\right)\right) \\ &= \frac{x}{k^2} + \underset{k\to\infty}{o}\left(\frac{1}{k^2}\right). \end{aligned}$$
2. Soit $x > -1$. La série $\sum \frac{x}{n^2}$ converge absolument. Ainsi, d'après la question précédente, on en déduit que la série $\sum f_n(x)$ converge, la somme $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$ existe donc. On en déduit que S est défini pour tout réel $x > -1$.
3. Soit $\varepsilon > 0$, et soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $x > -1$. On calcule
$$f_k(x+\varepsilon) - f_k(x) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+\varepsilon} + \frac{1}{k+x} = \frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+\varepsilon} \geqslant 0$$
car $k + x \leqslant k + x + \varepsilon$. Ainsi, par croissance de la somme et comme les inégalités larges passent à la limite, on en déduit que $S(x+\varepsilon) \geqslant S(x)$. On conclut que la fonction S est croissante.
4. Soit $a \geqslant 0$. D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \left]-1, a\right]$, $f_k(x) \leqslant f_k(a)$, par croissance de f_k. De plus, $f_k(x) \geqslant 0$, car $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{k+x}$. On en déduit que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \left]-1, a\right], \quad \big|f_k(x)\big| \leqslant f_k(a).$$
Or, comme la suite numérique $\sum f_n(a)$ converge (d'après la question 1 car $a > -1$), on en déduit que la série de fonctions $\sum f_k$ converge normalement sur $\left]-1, a\right]$ pour $a \geqslant 0$. Si $a < 0$, alors la série de fonctions converge toujours normalement car $\left]-1, a\right] \subset \left]-1, 0\right]$.
5. Soit $a > -1$. Les fonctions f_k sont continues sur $\left]-1, a\right]$. La série de fonctions $\sum f_k$ converge normalement donc uniformément sur $\left]-1, a\right]$. On sait donc que la fonction S est continue sur $\left]-1, a\right]$. Ceci étant vrai pour tout $a > -1$. On en déduit que S est continue sur $\left]-1 + \infty\right]$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $x > -1$. On calcule
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} f_k(x+1) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) &= \sum_{k=1}^{n} \left(f_k(x+1) - f_k(x)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+x} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k+x} \\ &= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{n+1+x} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$
Par unicité de la limite, on a donc bien
$$S(x+1) - S(x) = \frac{1}{1+x}.$$
7. Soit $x > -1$. D'après la question 6, $S(x) = S(x+1) - \frac{1}{1+x}$. Par continuité de S, on a $S(x) = S(0) + o_{x\to 0}(x)$. Or, $S(0) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(0) = 0$. Ainsi, on a donc
$$S(x) = S(x+1) - \frac{1}{1+x} = -\frac{1}{1+x} + \underset{x\to -1}{o}(1+x).$$
8. En itérant la formule de la question 6, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S(n) = S(n-1) + \frac{1}{1+n} = \cdots = S(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = \ln n + o(\ln n)$$
car il s'agit d'un équivalent de la série harmonique.
9. On a montré que la fonction S est croissante. Mais, comme la suite $\big(S(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. On en déduit que la fonction S tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$.