Khôlle n° 18

Exercice 1.

1. Soient G_{X_1} et G_{X_2} les fonctions génératrices de X_1 et X_2 respectivement. On note $\mathrm{G}_{X_1+X_2}$ la fonction génératrice de $X_1 + X_2$. On sait que $\mathrm{G}_{X_1+X_2} = \mathrm{G}_{X_1} \cdot \mathrm{G}_{X_2}$, car X_1 et X_2 sont indépendantes. De plus, $X_1 \sim \mathscr{P}(\lambda_1)$ d'où $\mathrm{G}_{X_1}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1(t-1)}$, pour tout réel t. De même, $\mathrm{G}_{X_2}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2(t-1)}$ pour tout réel t car $X_2 \sim \mathscr{P}(\lambda_2)$. On en déduit que, pour tout réel t, $\mathrm{G}_{X_1+X_2}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1(t-1)} \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2(t-1)} = \mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)(t-1)}$. On reconnaît la série génératrice d'une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$. Or, les termes de la série génératrice permettent de déterminer les probabilités des valeurs prisent par la variable aléatoire. D'où, $(X_1 + X_2) \sim \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
2. $$\begin{aligned}
&P(X_1 = j \mid X_1 + X_2 = k) \\
&= P\big((X_1 = j \cap (X_1 + X_2 = k)\big) \cdot P(X_1 + X_2 = k) && \text{car } P(X_1 + X_2 = k) \neq 0, \\
&= P\big((X_1 = j) \cap (X_2 = k - j)\big) \cdot P(X_1 + X_2 = k) \\
&= P(X_1 = j) \cdot P(X_2 = k - j) \cdot P(X_1 + X_2 = k) && \text{par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2, \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^j}{j!} \times \mathrm{e}^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{k-j}}{(k-j)!} \times \mathrm{e}^{-\lambda_1-\lambda_2} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!} && \text{car } (X_1 + X_2) \sim \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2) \\
&= \mathrm{e}^{-2(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{\left(\lambda_1^{k+1}\lambda_2^{k-j} + \lambda_1^j \lambda_2^{k-j+1}\right)^k}{j! \cdot (k-j)! \cdot k!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-2(\lambda_1+\lambda_2)}}{2 \cdot k!} \binom{k}{j} \left(\lambda_1^{k+1}\lambda_2^{k-j} + \lambda_1^j \lambda_2^{k-j+1}\right)^k
\end{aligned}$$

Exercice 2.

1. Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de $\bar{F}$. Soient λ et μ deux réels. Par la caractérisation séquentielle de l'adhérence, il existe deux suites $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\vec{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de F convergent vers $\vec{x}$ et $\vec{y}$ respectivement. On pose $(\vec{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de vecteurs de F définie par $\vec{z}_i = \lambda\vec{x}_i + \mu\vec{y}_i$, pour tout entier i. Ainsi, par somme des limites, la suite $(\vec{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$. Par la caractérisation séquentielle de l'adhérence, on en déduit que $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in \bar{F}$. D'où, $\bar{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. (a) On suppose $\bar{F} \neq F$. Soit $\vec{v} \in \bar{F}$ tel que $\vec{v} \notin F$. Alors, $(\operatorname{Vect}\vec{v}) \cap F = \{\vec{0}\}$ donc $\operatorname{Vect}\vec{v}$ et F sont en somme directe. Ainsi, comme F admet un supplémentaire de dimension 1 dans E, on en déduit que $(\operatorname{Vect}\vec{v}) \oplus F = E$.
   (b) On sait que $\bar{F}$ est un sous-espace vectoriel de E. Or, $\vec{v} \in \bar{F}$ et $F \subset \bar{F}$, donc $E = (\operatorname{Vect}\vec{v}) \oplus F \subset \bar{F}$. Or, $\bar{F} \subset E$ d'après la question 1. On en déduit que $\bar{F} = E$.

Exercice 3.

1. Pour montrer que $\bar{A} = A$, on utilise la caractérisation séquentielle de l'adhérence. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A qui converge pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ vers une fonction $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. On sait que la suite de fonctions converge uniformément. En effet,
$$\sup_{t\in[0,1]} \|f_n(t) - f(t)\| \overset{\star}{=} \max_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| = \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
L'égalité $\star$ est assurée car les fonctions f et f_n sont continues sur un segment. Ainsi, on a $0 = f_n(0) \to f(0)$ quand $n \to \infty$; de même, $0 = f_n(1) \to f(1)$. On en déduit donc que $f(0) = f(1) = 0$. De plus, par interversion limite–intégrale sur un segment,
$$1 = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{d'où} \qquad \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$
On en déduit donc que $f \in A$. On peut en conclure que l'ensemble A est un fermé dans $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.

2. On considère la suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définies comme montré dans la figure ci-dessous.

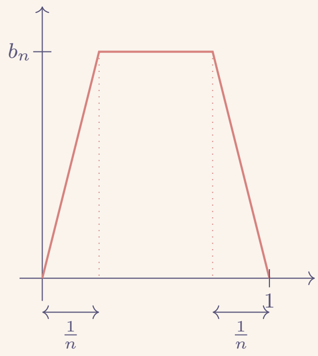

Figure 1 – Suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $b_n = 1/(1-\frac{1}{n})$. Par construction de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, on a bien $f_n(0) = f_n(1) = 0$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$. De plus,

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = b_n \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

On en déduit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite de fonctions de A. Par définition de d, on a $d(0, A) \leqslant d(0, f_n) = \|f_n\|_\infty = b_n$. Or, $b_n \to 1$ quand $n \to \infty$, et inf est le plus grand minorant, donc $d(0, A) \leqslant 1$.