TD n° 4

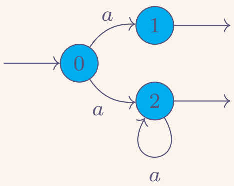
Langages et expressions régulières (2)

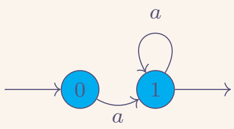
Hugo SALOU MPI*

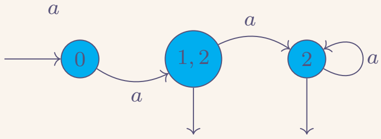
Dernière mise à jour le 6 novembre 2022

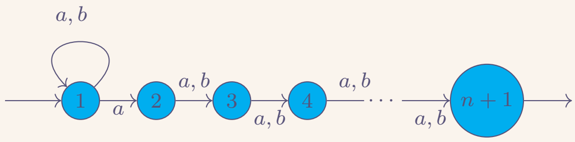
1 Déterminisation de taille exponentielle

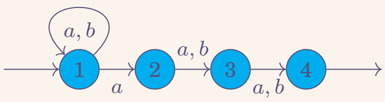
1. En notant n le nombre d'états de $\mathscr{A}$, alors le nombre d'états de $\det(\mathscr{A})$ est, au plus, 2^n. En effet, les états sont des éléments de $\wp(Q)$ et $|\wp(Q)| = 2^n$.

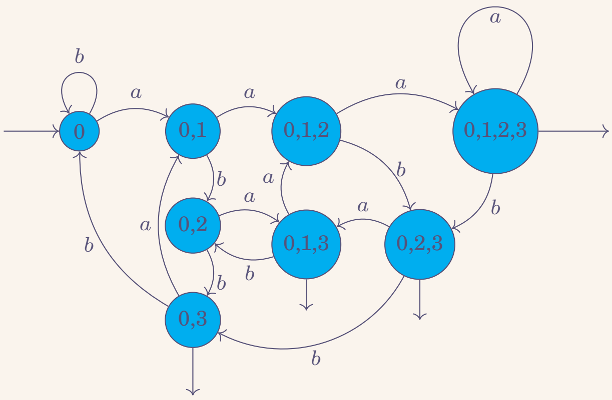
2. $\mathscr{A}$: 

$\mathscr{B}$: 

mais $\det(\mathscr{A})$: 

3. $\mathscr{A}_n$: 

4. $\mathscr{A}_3$: 

et, $\det(\mathscr{A}_3)$: 

5. Soit $i_0 = \max\{k \in [\![1, n]\!] \mid u_k \neq v_k\}$. Soit $m \in \Sigma^{i_0}$ tel que $u \cdot m \in L_n$ mais $v \cdot m \notin L_n$. Or, $\delta^*(i, u \cdot m) = \delta^*(\delta^*(i, u), m)$ et $\delta^*(i, v \cdot m) = \delta^*(\delta^*(i, v), m)$. D'où $\delta^*(i, u \cdot m) \in F$ et $\delta^*(i, v \cdot m) \notin F$. Ce qui est absurde.

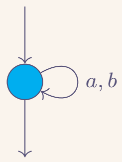
6. Ainsi, l'application

$$\begin{aligned} f : \Sigma^* &\longrightarrow Q \\ u &\longmapsto \delta^*(i, u) \end{aligned}$$

est injective. D'où, $\mathscr{D}_n = |Q| \geqslant |\Sigma^*| = 2^n$.

7. D'où, d'après les questions 1 et 6, on en déduit que le nombre d'états utilisés pour la déterminisation de $\mathscr{A}_n$ est de $\mathscr{D}_n \geqslant 2^n$.

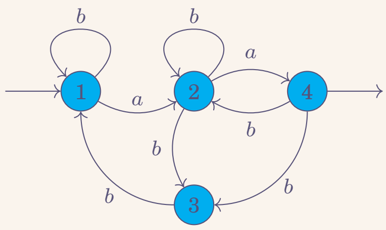
2 Suppression des ε-transitions



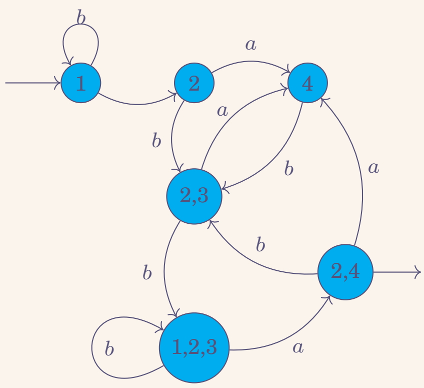
3 Déterminisation d'automates avec ε-transitions

Pour les deux automates, on commence par supprimer les ε-transitions, puis on le déterminise.

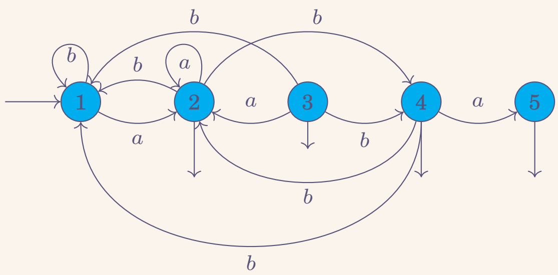
1. L'automate équivalent sans ε-transitions est le suivant.



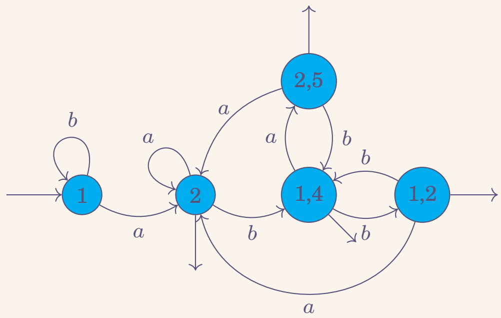
Une fois déterminisé, on obtient l'automate ci-dessous.



2. L'automate équivalent, sans ε-transitions, est le suivant.



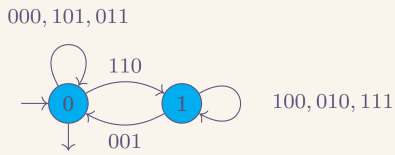
Une fois déterminisé, on obtient l'automate ci-dessous.



4 Automates pour le calcul de l'addition en binaire

4.1 Nombres de même tailles

Q. 1



Q. 2 Pour $r \in \{0, 1\}$, il existe une exécution dans $\mathscr{A}$ étiquetée par

$$(u_0, v_0, w_0)(u_1, v_1, w_1) \dots (u_{n-1}, v_{n-1}, w_{n-1})$$

menant à r si et seulement si

$$\overline{u_0 \dots u_{n-1}}^2 + \overline{v_0 \dots v_{n-1}}^2 = \overline{w_0 \dots w_{n-1}}^2 + r\, 2^n,$$

ce qui est équivalent à si et seulement si

$$\overline{u_0 \dots u_{n-1} 0}^2 + \overline{v_0 \dots v_{n-1} 0}^2 = \overline{w_0 \dots w_{n-1} r}^2.$$

Q. 3 Prouvons-le par récurrence.

— Pour $n = 0$, il existe une exécution dans $\mathscr{A}$ étiquetée par ε menant à $r = 0$ si et seulement si $\overline{\varepsilon}^2 + \overline{\varepsilon}^2 = 0 = \overline{\varepsilon}^2 + 0 \times 2^0$. De même, il existe une exécution dans $\mathscr{A}$ étiquetée par ε menant à $r = 1$ si et seulement si $\overline{\varepsilon}^2 + \overline{\varepsilon}^2 = 0 = 1 = \overline{\varepsilon}^2 + 1 \times 2^0$.