TD n° 2

Logique propositionnelle

Hugo Salou MPI*

Dernière mise à jour le 31 octobre 2022

1 Logique avec `If`

1.1 Représentatibilité des fonctions booléennes par formules de $\mathscr{F}_{\texttt{if}}$

1. On pose $G = \texttt{if}\ p\ \texttt{then}\ \top\ \texttt{else}\ \underbrace{(\texttt{if}\ q\ \texttt{then}\ \top\ \texttt{else}\ r)}_{A}$, et on a

$$\begin{aligned}
[\![G]\!]^\rho &= [\![p]\!]^\rho \cdot [\![\top]\!]^\rho + \overline{[\![p]\!]^\rho} \cdot [\![A]\!]^\rho \\
&= \rho(p) + \overline{\rho(p)} \cdot \left([\![q]\!]^\rho \cdot [\![\top]\!]^\rho + \overline{[\![q]\!]^\rho} \cdot [\![r]\!]^\rho\right) \\
&= \rho(p) + \overline{\rho(p)} \cdot \left(\rho(q) + \overline{\rho(q)} \cdot \rho(r)\right) \\
&= \rho(p) + \overline{\rho(p)} \cdot \rho(q) + \overline{\rho(p)} \cdot \overline{\rho(q)} \cdot \rho(r) \\
&= \rho(p) + \rho(q) + \rho(r).
\end{aligned}$$

2.
$$[\![\texttt{if}\ C\ \texttt{then}\ G\ \texttt{else}\ H]\!]^\rho = \begin{cases} [\![G]\!]^\rho & \text{si } [\![C]\!]^\rho = \boldsymbol{V} \\ [\![H]\!]^\rho & \text{if } [\![C]\!]^\rho = \boldsymbol{F} \end{cases}.$$

3. Soit $G \in \mathbb{F}$.
   Cas 1 Soit $\mathscr{P} = \{p\}$
   - Sous-cas 1 : $f : \rho \mapsto \boldsymbol{V}$ est associée à $\top$.
   - Sous-cas 2 : la fonction dont la table de vérité est ci-dessous est associée à p.

p	f
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$

   - Sous-cas 3 : la fonction dont la table de vérité est ci-dessous est associée à $\bar{p}$.

p	f
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$
$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$

   - Sous-cas 4 : $f : \rho \mapsto \boldsymbol{F}$ est associée à $\bot$.

   Cas 2 Soit $\mathscr{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ et on pose

$$P_r : \text{“}\forall f : \mathbb{B}^{\{p_1,\dots,p_r\}} \to \mathbb{B},\ \exists G \in \mathscr{F}_{\texttt{if}},\ [\![G]\!] = f.\text{”}$$

   Soit $r \in [\![2, n]\!]$ et f une fonction booléenne définie sur $\mathbb{B}^{\{p_1,\dots,p_r\}}$ à valeurs dans $\mathbb{B}$. Soit

$$\begin{aligned} g : \mathbb{B}^{\{p_1,\dots,p_{r-1}\}} &\longrightarrow \mathbb{B} \\ \rho' &\longmapsto f\big(\rho' \uplus (p_r \mapsto \boldsymbol{V})\big). \end{aligned}$$

   où $\uplus$ est défini comme dans l'exemple $(p \mapsto \boldsymbol{V}, q \mapsto \boldsymbol{F}) \uplus (r \mapsto \boldsymbol{V}) = (p \mapsto \boldsymbol{V}, q \mapsto \boldsymbol{F}, r \mapsto \boldsymbol{V})$. Soit alors G par hypothèse de récurrence tel que $[\![G]\!] = g$. Soit

$$\begin{aligned} h : \mathbb{B}^{\{p_1,\dots,p_{r-1}\}} &\longrightarrow \mathbb{B} \\ \rho' &\longmapsto f\big(\rho' \uplus (p_r \mapsto \boldsymbol{F})\big). \end{aligned}$$

   Soit alors H par hypothèse de récurrence tel que $[\![H]\!] = h$.
   On pose alors $A = \texttt{if}\ p_r\ \texttt{then}\ G\ \texttt{else}\ H$. Montrons que $[\![A]\!] = f$. Soit $\rho \in \mathbb{B}^{\{p_1,\dots,p_r\}}$.
   - Si $\rho(p_r) = \boldsymbol{V}$ alors

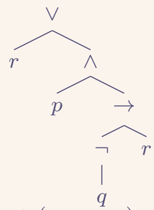
$$\begin{aligned}
[\![A]\!]^\rho &= [\![G]\!]^\rho \\
&= [\![G]\!]^{\rho_{|\{p_1,\dots,p_{r-1}\}}} \\
&= g\left(\rho_{|\{p_1,\dots,p_{r-1}\}}\right) \\
&= f\left(\rho_{|\{p_1,\dots,p_{r-1}\}} \uplus (p_r \mapsto \boldsymbol{V})\right) \\
&= f(\rho)
\end{aligned}$$

— Si $\rho(p_r) = \boldsymbol{F}$, alors

$$\begin{aligned}
[\![A]\!]^\rho &= [\![H]\!]^\rho \\
&= [\![H]\!]^{\rho|\{p_1,\ldots,p_{r-1}\}} \\
&= h\left(\rho_{|\{p_1,\ldots,p_{r-1}\}}\right) \\
&= f\left(\rho_{|\{p_1,\ldots,p_{r-1}\}} \uplus (p_r \mapsto \boldsymbol{F})\right) \\
&= f(\rho)
\end{aligned}$$

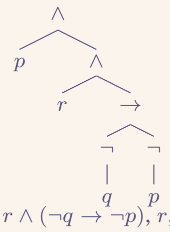
2 Définitions de cours : syntaxe

1. On considère la formule $H_1 = r \vee (p \wedge (\neg q \to r))$. Son arbre syntaxique est



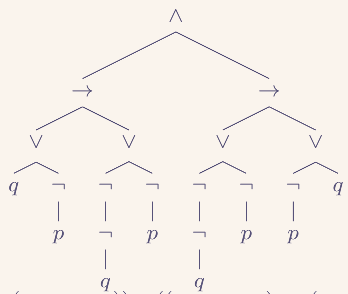
Ses sous-formules sont $r \vee (p \wedge (\neg q \to r))$, r, $p \wedge (\neg q \to r)$, p, $\neg q \to r$, $\neg q$, et q. Ses variables sont p, q et r.

2. On considère la formule $H_2 = p \wedge (r \wedge (\neg q \to \neg p))$. Son arbre syntaxique est



Ses sous-formules sont $p \wedge (r \wedge (\neg q \to \neg p))$, p, $r \wedge (\neg q \to \neg p)$, r, $\neg q \to \neg p$, $\neg q$, q, et $\neg p$. Ses variables sont p, q et r.

3. On considère la formule $H_3 = ((q \vee \neg p) \to (\neg\neg q \vee \neg p)) \wedge ((\neg\neg q \vee \neg p) \to (\neg p \vee q))$. Son arbre syntaxique est



Ses sous-formules sont $((q \vee \neg p) \to (\neg\neg q \vee \neg p)) \wedge ((\neg\neg q \vee \neg p) \to (\neg p \vee q))$, $(q \vee \neg p) \to (\neg\neg q \vee \neg p)$, $(\neg\neg q \vee \neg p) \to (\neg p \vee q)$, $q \vee \neg p$, $\neg\neg q \vee \neg p$, $\neg p \vee q$, q, $\neg p$, $\neg\neg q$, p, et $\neg q$. Ses variables sont p et q.

3 Formules duales

1. On définit par induction $(\cdot)^\star$ comme

— $\top^\star = \bot$;
— $\bot^\star = \top$;
— $(G \vee H)^\star = G^\star \wedge H^\star$;
— $(G \wedge H)^\star = G^\star \vee H^\star$;
— $(\neg G)^\star = \neg G^\star$;
— $p^\star = p$.

2. Soit $\rho \in \mathbb{B}^{\mathscr{P}}$. Montrons, par induction, $P(H)$: "$[\![H^\star]\!]^\rho = [\![\neg H]\!]^{\bar\rho}$" où $\bar\rho : p \mapsto \overline{\rho(p)}$.
   — On a $[\![\bot^\star]\!]^\rho = [\![\top]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$, et $[\![\neg\bot]\!]^{\bar\rho} = [\![\top]\!]^{\bar\rho} = \boldsymbol{V}$, d'où $P(\bot)$.
   — On a $[\![\top^\star]\!]^\rho = [\![\bot]\!]^\rho = \boldsymbol{F}$, et $[\![\neg\top]\!]^{\bar\rho} = [\![\bot]\!]^{\bar\rho} = \boldsymbol{F}$, d'où $P(\top)$.
   — Soit $p \in \mathscr{P}$. On a $[\![p^\star]\!]^\rho = [\![p]\!]^\rho = \rho(p)$, et $[\![\neg p]\!]^{\bar\rho} = \overline{[\![p]\!]^{\bar\rho}} = \overline{\bar\rho(p)} = \overline{\overline{\rho(p)}} = \rho(p)$, d'où $P(p)$.

   Soient F et G deux formules.
   — On a

$$\begin{aligned}[\![(F\wedge G)^\star]\!]^\rho &= [\![F^\star \vee G^\star]\!]^\rho\\ &= [\![F^\star]\!]^\rho + [\![G^\star]\!]^\rho\\ &= [\![\neg F]\!]^{\bar\rho} + [\![\neg G]\!]^{\bar\rho}\\ &= [\![\neg F \vee \neg G]\!]^{\bar\rho}\\ &= [\![\neg (F\wedge G)]\!]^{\bar\rho}\end{aligned}$$

   d'où $P(F \wedge G)$.
   — On a

$$\begin{aligned}[\![(F\vee G)^\star]\!]^\rho &= [\![F^\star \wedge G^\star]\!]^\rho\\ &= [\![F^\star]\!]^\rho \cdot [\![G^\star]\!]^\rho\\ &= [\![\neg F]\!]^{\bar\rho} \cdot [\![\neg G]\!]^{\bar\rho}\\ &= [\![\neg F \wedge \neg G]\!]^{\bar\rho}\\ &= [\![\neg (F\vee G)]\!]^{\bar\rho}\end{aligned}$$

   d'où $P(F \vee G)$.
   — On a
$$[\![(\neg F)^\star]\!]^\rho = [\![\neg(F^\star)]\!]^\rho = \overline{[\![F^\star]\!]^\rho} = \overline{[\![\neg F]\!]^{\bar\rho}} = [\![\neg(\neg F)]\!]^{\bar\rho}\,.$$
   d'où $P(\neg F)$.

   Par induction, on en conclut que $P(F)$ est vraie pour toute formule F.
3. Soit G une formule valide. Alors, par définition, $G \equiv \top$. Or, d'après la question précédente, $G^\star \equiv (\top)^\star = \bot$. Ainsi, $G^\star$ n'est pas satisfiable.

4 Conséquence sémantique

1. Soit $\rho \in \mathbb{B}^{\mathscr{P}}$. On suppose $[\![A \vee B]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$, $[\![A \to C]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$ et $[\![B \to C]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$.
   — Si $[\![A]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$, alors, comme $[\![A \to C]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$, $[\![C]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$.
   — Si $[\![B]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$, alors, comme $[\![B \to C]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$, $[\![C]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$.

   D'où $\{A \vee B, A \to C, B \to C\} \models C$.
2. Soit $\rho \in \mathbb{B}^{\mathscr{P}}$. On suppose $[\![A \to B]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$. Si $[\![B]\!]^\rho = \boldsymbol{F}$ (i.e. $[\![\neg B]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$), alors $[\![A]\!]^\rho = \boldsymbol{F}$, par implication. Et donc, $[\![\neg A]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$. On a donc bien $[\![\neg B \to \neg A]\!]^\rho$. On en déduit que $A \to B \models \neg B \to \neg A$.
3. oui
4. non
5. oui
6. non
7. oui
8. non
9. oui
10. non

5 Axiomatisation algèbre de Boole

1. On pose, pour $t \in \mathbb{T}$, $P(t)$: "$t \simeq 0$ ou $t \simeq 1$," et on démontre cette propriété par induction.
   — On a bien $P(\mathbf{0})$ et $P(\mathbf{1})$.
   — Soient $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$.

(a) Si $t_1 \simeq \mathbf{1}$, alors $\bar{t}_1 \simeq \bar{\mathbf{1}} \simeq \bar{\bar{\mathbf{0}}} \simeq \mathbf{0}$; si $t_1 \simeq \mathbf{0}$, alors $\bar{t}_1 \simeq \bar{\mathbf{0}} \simeq \mathbf{1}$.

(b) Si $t_1 \simeq \mathbf{0}$, alors $t_1 \cdot t_2 \simeq \mathbf{0} \cdot t_2 \simeq \mathbf{0}$; si $t_1 \simeq \mathbf{1}$, alors $t_1 \cdot t_2 \simeq \mathbf{1} \cdot t_2 \simeq t_2$ (qui est équivalent à $\mathbf{0}$ ou $\mathbf{1}$).

(c) Si $t_1 \simeq \mathbf{1}$, alors $t_1 + t_2 \simeq \mathbf{1} + t_2 \simeq \mathbf{1}$; si $t_1 \simeq \mathbf{0}$, alors $t_1 + t_2 \simeq \mathbf{0} + t_2 \simeq t_2$ (qui est équivalent à $\mathbf{0}$ ou $\mathbf{1}$)

2. En reprenant les relations trouvées dans la question précédente, on construit les tables ci-dessous.

t_1	t_2	$t_1 \cdot t_2$
0	**0**	**0**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

t_1	t_2	$t_1 + t_2$
0	**0**	**0**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**1**

t_1	$\bar{t}_1$
0	**1**
1	**0**

6 Exercice 6 : Barre de Scheffer

1. — $\neg H_1 \equiv H_1$ nand H_1 ;
   — $H_1 \wedge H_2 \equiv \neg(H_1$ nand $H_2) \equiv (H_1$ nand $H_1)$ nand $(H_2$ nand $H_2)$;
   — $H_1 \vee H_2 \equiv \neg H_1$ nand $\neg H_2 \equiv (H_1$ nand $H_1)$ nand $(H_2$ nand $H_2)$;
   — $H_1 \to H_2 \equiv H_1 \vee (\neg H_2) \equiv (H_1$ nand $H_1)$ nand H_2 ;
   — $H_1 \leftrightarrow H_2 \equiv (H_1 \to H_2) \wedge (H_2 \to H_1)$.
2. — $\neg H_1 \equiv H_1$ nor H_1 ;
   — $H_1 \vee H_2 \equiv \neg(H_1$ nor $H_2) \equiv (H_1$ nor $H_2)$ nor $(H_1$ nor $H_2)$;
   — $H_1 \wedge H_2 \equiv (\neg H_1)$ nor $(\neg H_2) \equiv (H_1$ nor $H_1)$ nor $(H_2$ nor $H_2)$;
   — $H_1 \to H_2 \equiv H_1 \vee (\neg H_2) \equiv \neg(H_1$ nor $(\neg H_2)) \equiv (H_1$ nor $(H_2$ nor $H_2))$ nor $(H_1$ nor $(H_2$ nor $H_2))$;
   — $H_1 \leftrightarrow H_2 \equiv (H_1 \to H_2) \wedge (H_2 \to H_1)$.

7 Énigmes en logique propositionnelle

7.1 Fraternité

1. Ou les deux mentent, ou les deux disent la vérité. D'où $(A_1 \wedge C_1) \vee (\neg A_1 \wedge \neg C_1)$.
2. On a $A_1 = G \vee R$, et $C_1 = \neg G$.
3. On développe l'expression trouvée dans la question 1. :

$$\begin{aligned}(A_1 \wedge C_1) \vee (\neg A_1 \wedge \neg C_1) \equiv & \big((G \vee R) \wedge \neg G\big) \vee \big(\neg(G \vee R) \wedge \neg\neg G\big) \\ \equiv & (G \wedge \neg G \vee R \wedge \neg G) \vee \big((\neg G \wedge \neg R) \wedge G\big) \\ \equiv & (\bot \vee R \wedge \neg G) \vee (\neg G \wedge G \wedge \neg R) \\ \equiv & (R \wedge \neg G) \vee (\bot \wedge \neg R) \\ \equiv & (R \wedge \neg G) \vee \bot \\ \equiv & R \wedge \neg G.\end{aligned}$$

La cérémonie se tiendra donc dans le réfectoire et non dans le gymnase.

4. $H = (A_2 \wedge B_2 \wedge C_2) \vee (\neg A_2 \wedge \neg B_2 \wedge \neg C_2)$.
5. $A_2 = E_1 \vee E_3$, $B_2 = E_2 \to \neg E_3$, $C_2 = E_1 \wedge \neg E_2$.
6.

E_1	E_2	E_3	A_2	B_2	C_2	H
F	***F***	***F***	***F***	***V***	***F***	***F***
F	***F***	***V***	***F***	***V***	***F***	***F***
F	***V***	***F***	***F***	***V***	***F***	***F***
F	***V***	***V***	***F***	***F***	***F***	***V***
V	***F***	***F***	***F***	***V***	***V***	***F***
V	***F***	***V***	***V***	***V***	***V***	***V***
V	***V***	***F***	***F***	***V***	***F***	***F***
V	***V***	***V***	***V***	***F***	***F***	***F***

L'escalier 3 conduit bien à l'intronisation.

7. Si les trois mentent, alors on peut aussi prendre l'escalier 2.

7.2 Alice au pays des merveilles

1. $I_R = \bar{J} \wedge B$, $I_J = \bar{R} \to \bar{B}$, et $I_B = B \wedge (\bar{R} \vee \bar{J})$.
2. Oui, la situation où le flacon jaune contient le poison ($\bar{J}$) satisfait ces formules.
3. Oui, on a $I_B \models I_R$.
4. Oui, les instructions sur le flacon rouge et le bleu sont fausses. En effet, le flacon jaune ne contient pas de poison, et il n'y a pas “au moins l'un des deux autres flacons contenant du poison.”
5. Oui, comme vu précédemment, la configuration où le poison est seulement dans le flacon jaune est valide. Si le flacon rouge contient du poison ou le flacon bleu contient du poison, on a une contradiction avec l'une des instructions. La configuration trouvée précédemment est la seule valide.
6. À cette condition, deux autres configurations sont possibles : le poison est dans les flacons jaune et rouge, ou le poison est dans les flacons rouge et bleu.

7.3 Socrate et Cerbère

1. On a $H = (I_1 \wedge I_2 \wedge I_3) \vee (\neg I_1 \wedge \neg I_2 \wedge \neg I_3)$.
2. On a $I_1 = C_1 \wedge C_3$, $I_2 = C_2 \to \bar{C}_3$, et $I_3 = C_1 \wedge \bar{C}_2$.
3.

C_1	C_2	C_3	I_1	I_2	I_3	H
F	***F***	***F***	***F***	***V***	***F***	***F***
V	***F***	***F***	***F***	***V***	***V***	***F***
F	***V***	***F***	***F***	***V***	***F***	***F***
V	***V***	***F***	***F***	***V***	***F***	***F***
F	***F***	***V***	***F***	***V***	***F***	***F***
V	***F***	***V***	***V***	***V***	***V***	***V***
F	***V***	***V***	***F***	***F***	***F***	***V***
V	***V***	***V***	***V***	***F***	***F***	***F***

   Socrate doit suivre le couloir 3.
4. En supposant que Cerbère ait menti, on suppose que les trois têtes ont menti, et donc que I_1, I_2 et I_3 sont fausses. On aurait aussi pu choisir le couloir 2.

8 Compléments de cours, en vrac

1. *Montrer que* $\models$ *est une relation d'ordre sur* $\mathscr{F}$.
   — Soit F une formule. On sait que $F \models F$. En effet, pour tout $\rho \in \mathbb{B}^{\mathscr{P}}$, si $[\![F]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$, alors $[\![F]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$. La relation $\models$ est donc reflective.
   — Soient F et G deux formules. On suppose $F \models G$ et $G \models H$. Montrons que $F \equiv G$. On reprend la démonstration du cours : soit $\rho \in \mathbb{B}^{\mathscr{P}}$. On suppose $[\![G]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$, alors $[\![F]\!] = \boldsymbol{V}$ car $G \models H$; et donc $[\![G]\!]^\rho = [\![F]\!]^\rho$. On suppose à présent que $[\![G]\!]^\rho = \boldsymbol{F}$, alors, par contraposée, $[\![F]\!]^\rho = \boldsymbol{F}$; on a donc $[\![G]\!]^\rho = [\![F]\!]^\rho$. On en déduit que $[\![G]\!] = [\![F]\!]$, i.e. $G \equiv F$. La relation est donc *quasi*–anti-symétrique.
   — Soient F, G et H trois formules. On suppose $F \models G$ et $G \models H$. Soit $\rho \in \mathbb{B}^{\mathscr{P}}$. Si $[\![F]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$, alors $[\![G]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$. Or, comme $G \models H$, si $[\![G]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$, alors $[\![H]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$. D'où $[\![F]\!]^\rho = \boldsymbol{V} \implies [\![H]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$. On a donc $F \models H$. La relation $\models$ est donc transitive.
2. Soit $A \in \mathscr{F}$, soit $\rho \in \mathbb{B}^{\mathscr{P}}$, et soit $\sigma \in \mathscr{P}^{\mathscr{F}}$. On pose, pour $p \in \mathscr{P}$, $\tau(p) = [\![\sigma(p)]\!]^\rho$. *Montrons que* $[\![A[\sigma]]\!]^\rho = [\![A]\!]^\tau$.