# Khôlle nº 16

**Exercice 1.**

1. Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $r(\vec{u}) = \vec{0} = \cos\theta \cdot \vec{0} + \sin\theta \cdot \vec{a} \wedge \vec{0}$. On suppose maintenant $\vec{u} \neq \vec{0}$. On pose $\vec{x} = \vec{u}/\|\vec{u}\|$. La famille $\mathscr{B} = (\vec{a}, \vec{x}, \vec{a} \wedge \vec{x})$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, dans cette base, la matrice de $r$ est

$$[\,r\,]_{\mathscr{B}} = \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \vec{a} \\ \vec{x} \\ \vec{a}\wedge\vec{x} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} r(\vec{a}) & r(\vec{x}) & r(\vec{a}\wedge\vec{x}) \end{array} & \end{array}.$$

Or, $\vec{u} = \vec{x} \cdot \|\vec{x}\|$, et donc

$$[\,r(\vec{u})\,]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \|\vec{u}\| \cdot \cos\theta \\ -\|\vec{u}\| \cdot \sin\theta \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{a} \\ \vec{x} \\ \vec{a}\wedge\vec{x} \end{array}.$$

D'où,

$$r(\vec{u}) = \|\vec{u}\| \cdot \cos\theta \cdot \vec{x} - \|\vec{u}\| \cdot \sin\theta \cdot \vec{a} \wedge \vec{x} = \cos\theta \cdot \vec{u} - \sin\theta \cdot \vec{a} \wedge \vec{u}.$$

2. On pose $f$ l'application $f : \vec{v} \mapsto \vec{v} - \langle \vec{v} \mid \vec{a} \rangle\, \vec{a}$. Soit $\mathscr{B} = (\vec{a}, \vec{x}, \vec{y})$ une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. Montrons que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$. On a

$$\begin{aligned} f(\vec{a}) &= \vec{a} - \langle \vec{a} \mid \vec{a} \rangle\, \vec{a} = \vec{a} - \vec{a} = \vec{0}, \\ f(\vec{x}) &= \vec{x} - \langle \vec{x} \mid \vec{a} \rangle\, \vec{a} = \vec{x}, \\ f(\vec{y}) &= \vec{y} - \langle \vec{y} \mid \vec{a} \rangle\, \vec{a} = \vec{y}, \end{aligned}$$

car $\vec{x} \perp \vec{a}$ et $\vec{y} \perp \vec{a}$. L'application $f$ est la projection orthogonale sur $\operatorname{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$. Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. On pose $\vec{u} = f(\vec{v}) \in \operatorname{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$, et $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u} \in \operatorname{Vect}(\vec{a})$. Ainsi,

$$\begin{aligned} r(\vec{v}) &= r(\vec{u} + \vec{w}) \\ &= r(\vec{u}) + r(\vec{w}) \\ &= \cos(\theta)\vec{u} + \sin(\theta)\vec{a} \wedge \vec{u} + \vec{w} \end{aligned}$$

**Exercice 2.**

1. On calcule

$$\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = 0 \quad \langle \vec{v} \mid \vec{w} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{12}} = 0 \quad \langle \vec{w} \mid \vec{u} \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1-1+2) = 0.$$

La famille $\mathscr{B} = (u, v, w)$ est donc une famille orthogonale. Comme cette famille orthogonale est composée de trois vecteurs non nuls, $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. De plus, $\|\vec{u}\|^2 = \frac{1}{3} \times 3 = 1$, $\|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ et $\|\vec{w}\|^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{4}{6} = 1$. On en déduit que la base $\mathscr{B}$ est orthonormée. Et,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}) = +\vec{w}.$$

La base orthonormée $\mathscr{B}$ est donc directe.
Dans cette base $\mathscr{B}$, la matrice de $f$ est

$$[\,f\,]_{\mathscr{B}} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(\vec{u}) & f(\vec{v}) & f(\vec{w}) \end{array} & \end{array}.$$

2. La matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ vers $\mathscr{B}$ est

$$P = P_{\mathscr{B}_0 \to \mathscr{B}} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{array} & \end{array}.$$

La matrice $P$ transforme une base orthonormée directe en une base orthonormée directe, d'où $P \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Ainsi, la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}_0$ est $P^{-1} = P^\top$ :

$$P^\top = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \end{array} \end{array}.$$

3. On procède par Analyse-Synthèse.