Khôlle n° 12

Exercice 2. Posons les événements P_n « le 1^er^ Pile apparaît au n-ième lancer, » et B « tirer une boule blanche. » Les événements $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment un système quasi-complet d'événements, d'où, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(B\cap P_n) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(B \mid P_n) \times P(P_n) \end{aligned}$$

Or, par équiprobabilité, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(P_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. De plus et aussi par équiprobabilité, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(B \mid P_n) = \frac{1}{n}$ car il y a une seule boule blanche, et $n-1$ boules noires. On en déduit donc que

$$P(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

On reconnaît le développement en série entière de $-\ln(1-x)$, dans le cas $x=\frac{1}{2}$. Or, le rayon de convergence de cette série est de 1, et $\frac{1}{2} \in \left]-1,1\right[$, la série numérique $\sum \frac{1}{n2^n}$ converge donc. On en déduit que

$$\boxed{P(B) = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2.}$$

Exercice 3.

1. Soit $x \in \left]-R,R\right[$. On calcule :

$$\begin{aligned} (1-x-x^2)\cdot f(x) &= (1-x-x^2)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} u_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} u_{n-2} x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (u_n - u_{n-1} - u_{n-2}) x^n + u_0 - u_1 + u_1 x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 0\cdot x^n + u_0 - u_1 + u_1 x \\ &= u_0 + u_1(x-1) \end{aligned}$$

   On en déduit que

$$\boxed{(1-x-x^2)\cdot f(x) = x-1.}$$

2. Prouvons le par récurrence forte : posons P_n le prédicat « $u_n \leqslant 2^n$. »
   - On a bien $u_0 = 0 \leqslant 2^0 = 1$, d'où P_0.
   - On a bien $u_1 = 1 \leqslant 2^1 = 1$, d'où P_0.
   - Soit $n\in\mathbb{N}$, avec $n \geqslant 1$. Supposons, pour $k \leqslant n$, P_k vrai. Montrons P_{n+1}. Par définition de la suite, on a

     $$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \leqslant 2^n + 2^{n-1} \leqslant 2^n + 2^n \leqslant 2^{n+1},$$

     d'où P_{n+1}.

Par récurrence forte, on en déduit que, <u>pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2^n$</u>. Or, la série entière $\sum 2^n x^n = \sum (2x)^n$ est une série géométrique, dont le rayon de convergence vaut $\frac{1}{2}$. On en déduit que

$$\boxed{R \geqslant \frac{1}{2}.}$$

3. Résolvons l'équation caractéristique de la suite (u_n) :

$$(C): \qquad z^2 - z - 1 = 0.$$

Le discriminant du polynôme $X^2 - X - 1$ vaut $\Delta = 5 > 0$; les solutions φ et ψ sont donc

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi, il existe A et B deux réels tels que, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = A\varphi^n + B\psi^n.$$

Or, $u_0 = A + B = 0$, et

$$u_1 = A\varphi + B\psi = \frac{A + B + \sqrt{5}(A-B)}{2} = (A-B)\cdot\frac{\sqrt{5}}{2} = 1.$$

D'où $B = -A$, et donc $A - B = 2A = 2/\sqrt{5}$. Ainsi, on en déduit que

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \text{et} \qquad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

On en déduit le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(\varphi^n - \psi^n).$$

D'où, $\sum u_n x^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum \varphi^n x^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\sum \psi^n x^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\sum(\varphi x)^n - \sum(\psi x)^n\big)$. La série entière $\sum(\varphi x)^n$ est géométrique, et a pour rayon de convergence $\frac{1}{\varphi}$; de même, la série entière $\sum(\psi x)^n$ a pour rayon de convergence $\frac{1}{\psi}$. Comme $\frac{1}{\varphi} \neq \frac{1}{\psi}$, on en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$ vaut

$$\boxed{R = \min\left(\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\psi}\right) = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}.}$$

Exercice 1.

1. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On sait que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Et, nous avons l'égalité

$$(\star) \qquad M = \underbrace{\frac{M - M^\top}{2}}_{\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{M + M^\top}{2}}_{\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}.$$

D'après le théorème de Pythagore,

$$\|M - S\|^2 = \left\|\frac{M-M^\top}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{M+M^\top}{2} - S\right\|^2 \leqslant \left\|\frac{M-M^\top}{2}\right\|^2.$$

Ainsi, comme la norme est positive ou nulle, et par croissance de la fonction racine carrée, on en déduit que

$$\boxed{\|M - S\| \leqslant \left\|\frac{M-M^\top}{2}\right\|.}$$

2. L'inéquation ci-dessus est vraie pour toute matrice symétrique S. En particulier, si $S = \frac{M-M^\top}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors

$$M - S = \frac{M-M^\top}{2} \qquad \text{d'où} \qquad \|M - S\| = \left\|\frac{M-M^\top}{2}\right\|,$$

d'après $(\star)$. Or, par définition $d\big(M, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big)$ est le minimum des normes $\|M - S\|$, d'où

$$\boxed{d\big(M, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big) = \left\|\frac{M-M^\top}{2}\right\|.}$$