Chapitre 6

Preuves

Hugo Salou MPI*
Dernière mise à jour le 13 mai 2023

Table des matières

L'objectif de ce chapitre, sera de "critiquer" le travail en logique fait précédement, puis d'apporter une solution à ce problème ; on finira par un peu de Hors-Programme.

0 Motivation

0.1 Tables de vérité

Pour l'instant, pour montrer $\Gamma \models G$ ou $G \equiv H$, nous devons encore utiliser une table de vérité. Par exemple, montrons

$$\underbrace{(p \to q) \land (q \to r)}_{G} \models \overbrace{p \to r}^{H}.$$

On réalise la table de vérité ci-dessous.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	G	H	
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	✓
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	✓
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	✓

À faire : Finir table de vérité

Table 1 – Table de vérité pour montrer $(p \to q) \land (q \to r) \models p \to r$

0.2 Équations

Supposons $[\![G]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$. Montrons que $[\![H]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$. On a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V} &= [\![G]\!]^\rho \\ &= [\![(p \to q) \land (q \to r)]\!]^\rho \\ &\vdots \\ &= \overline{[\![p]\!]^\rho} \cdot \overline{[\![q]\!]^\rho} + \overline{[\![p]\!]^\rho} \cdot \overline{[\![q]\!]^\rho} \cdot [\![r]\!]^\rho + [\![q]\!]^\rho \cdot [\![r]\!]^\rho \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [\![H]\!]^\rho &= [\![p \to r]\!]^\rho \\ &\vdots \\ &= \overline{[\![p]\!]^\rho} \cdot \overline{[\![q]\!]^\rho} + \overline{[\![p]\!]^\rho} \cdot \overline{[\![q]\!]^\rho} \\ &\quad + [\![r]\!]^\rho \cdot \overline{[\![q]\!]^\rho} \cdot \left([\![p]\!]^\rho + \overline{[\![p]\!]^\rho}\right) \\ &\quad + [\![r]\!]^\rho + ? \end{aligned}$$

À faire : finir le calcul

0.3 Raisonnement mathématiques

Supposons $(p \to q) \land (q \to r)$. Montrons que $p \to r$.

$\hookrightarrow$ Supposons donc p. Montrons r

- ↪ Montrons q.
  - ↪ Montrons p, qui est une hypothèse.
  - ↪ Montrons $p \to q$, qui est aussi une hypothèse.
- — Montrons $q \to r$, ce qui est vrai par hypothèse.

On reconnaît un arbre.

1 La déduction naturelle en logique propositionnelle

1.1 Séquents

Objectifs de preuves.

Exemple :
Montrons $P \land Q$ est vrai.
↪ Montrons P.
↪ Montrons Q.

Hypothèses courantes.

Exemple :
Montrons que $(n \in 4\mathbb{N} \to n \in 2\mathbb{N}) \land (n \in 4\mathbb{N} + 3 \to n \in 2\mathbb{N} + 1)$.

- ↪ Montrons $n \in 4\mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$.
  - ↪ $\underbrace{\text{Supposons } n \in 4\mathbb{N}}_{\text{local}}$. Montrons $n \in 2\mathbb{N}$.
- ↪ Montrons $n \in 4\mathbb{N} + 3 \to n \in 2\mathbb{N} + 1$.
  - ↪ Supposons $n \in 4\mathbb{N} + 3$. Montrons $n \in 2\mathbb{N} + 1$.

Définition (Séquent) : Un *séquent* est la donnée
- — d'un ensemble d'hypothèses Γ ;
- — d'un objectif G.

On le typographie $\Gamma \vdash G$.

Exemple :
Montrons $\varnothing \vdash (n \in 4\mathbb{N} \to n \in 2\mathbb{N}) \land (n \in 4\mathbb{N} + 3 \to n \in 2\mathbb{N} + 1)$
- ↪ $\varnothing \vdash (n \in 4\mathbb{N} \to n \in 2\mathbb{N})$
  - ↪ $\{n \in 4\mathbb{N}\} \vdash n \in 2\mathbb{N}$
- ↪ $\varnothing \vdash (n \in 4\mathbb{N} + 3 \to n \in 2\mathbb{N} + 1)$
  - ↪ $\{n \in 4\mathbb{N} + 3\} \to n \in 2\mathbb{N} + 1$

On typographie cette preuve sous forme d'un arbre.ăÀ faire : Arbre à faire

1.2 Preuves

Définition : On appelle *règle de construction de preuves* une règle de la forme :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \qquad \Gamma_2 \vdash \varphi_2 \qquad \Gamma_3 \vdash \varphi_3 \qquad \cdots \qquad \Gamma_n \vdash \varphi_n}{\Gamma \vdash \varphi}\ \text{nom}.$$

On appelle $\Gamma_1 \vdash \varphi_1, \Gamma_2 \vdash \varphi_2, \Gamma_3 \vdash \varphi_3, \ldots, \Gamma_n \vdash \varphi_n$ les *prémisses*, et $\Gamma \vdash \varphi$ la *conclusion*.

Si $n = 0$, on dit que c'est une *règle de base*.

Remarque (Notation) :
Γ est un ensemble. Alors, l'ensemble $\Gamma \cup \{\psi\}$ est noté Γ, ψ.

Exemple :
Un *axiome* est de la forme

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\ \text{Ax}.$$

Une preuve de la forme, appelée *introduction du* ET,

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \land \psi}\ \land\text{i}$$

permet de prouver un ET. Il correspond au raisonnement mathématique suivant : supposons Γ ; montrons $\varphi \land \psi$;

- $\hookrightarrow$ montrons φ ;
- $\hookrightarrow$ montrons ψ.

Définition (Arbre de preuve) : On appelle *arbre de preuve* un arbre étiqueté par des séquents, et dont les liens père–fils sont des liens autorisés par les règles du système de preuves. Un *système de preuves* étant un ensemble de règles.

Exemple (Système Jouet) :

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\ \text{Ax} \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \land \psi}\ \land\text{i} \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \lor \psi}\ \lor\text{i,g} \quad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \lor \psi}\ \lor\text{i,d}.$$

Exemple :
Avec le système précédent,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{P,Q,R\} \vdash P}\ \text{Ax}}{\{P,Q,R\} \vdash P \lor Q}\ \lor\text{i,g} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\{P,Q,R\} \vdash Q}\ \text{Ax}}{\{P,Q,R\} \vdash Q \lor \neg R}\ \lor\text{i,g}}{\{P,Q,R\} \vdash (P \lor Q) \land (Q \lor \neg R)}\ \land\text{i}}{\{P,Q,R\} \vdash (P \land X) \lor \big((P \lor Q) \land (Q \lor \neg R)\big)}\ \lor\text{i,d}\ .$$

Définition (Être prouvable) : On dit d'un séquent $\Gamma \vdash G$ qu'il est *prouvable* dans un système de preuve dès lors qu'il existe une preuve dont la racine est étiquetée par $\Gamma \vdash G$.

Rappel (objectifs) :
On veut trouver d'autres moyens de montrer $F \models G$. On veut que, si $F \vdash G$, alors $F \models G$ (correction). Mais, on veut aussi que, si $F \models G$, alors $G \vdash F$ (complétude). On veut aussi qu'il existe un algorithme qui vérifie $F \models G$ (décidabilité).

Définition (Correction) : On dit d'un système de preuve qu'il est *correct* dès lors que : pour tout Γ, pour tout G, si $\Gamma \vdash G$ admet une preuve, alors $\Gamma \models G$.

Exemple :

1. On pose la règle “Menteur” définie comme

$$\frac{}{\Gamma \vdash \bot}\ \text{Menteur}.$$

   Ce système de preuve n'est pas correct car $\{\top\} \not\models \bot$. Or,

$$\frac{}{\{\top\} \vdash \bot}\ \text{Menteur}.$$

2. Le système jouet est correct. Montrons cela par induction sur la preuve de $\Gamma \vdash G$.
   - Si la preuve de $\Gamma \vdash G$ est de la forme

$$\frac{}{\Gamma', G \vdash G}\ \text{Ax}.$$

     Montrons que $\Gamma' \cup \{G\} \models \{G\}$. Soit donc ρ un modèle de $\Gamma \cup \{G\}$. Alors $\forall \varphi \in \Gamma \cup \{G\}$, $[\![\varphi]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$. Montrons que ρ est un modèle de G. On pose $\varphi = G$; on a donc $[\![G]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$.
   - Si la preuve de $\Gamma \vdash G$ est de la forme

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}\ \wedge\text{i}.$$

     On appelle π_1 la branche gauche de l'arbre, et π_2 la branche de droite. Par hypothèse d'induction sur π_1, $\Gamma \vdash \varphi$ admet une preuve (qui est une sous-preuve), donc $\Gamma \models \varphi$. De même, $\Gamma \models \psi$ avec la branche π_2. On en déduit que $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$ d'après les résultats du chapitre 0.
   - De même pour les autres cas.

Définition (Complétude) : Un système de preuves est *complet* dès lors que, si $\Gamma \models G$, alors il existe un preuve de $\Gamma \vdash G$.

Exemple :
Le système de preuve ayant pour règle, pour tout Γ, et tout G,

$$\frac{}{\Gamma \vdash G}\ \text{OP}$$

est complet mais pas correct.

Exemple :
Le système de preuve ayant pour règle, pour tout Γ, et tout G tel que $\Gamma \models G$,

$$\frac{}{\Gamma \vdash G}$$

est complet et correct.

1.3 Déduction naturelle

On définit les différentes règles d'introduction et d'élimination suivantes.

Symbole	Règle d'introduction	Règle d'élimination
$\top$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top\mathrm{i}$	
$\bot$		$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash G}\ \bot\mathrm{e}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma, G \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg G}\ \neg\mathrm{i}$	$\dfrac{\Gamma \vdash G \quad \Gamma \vdash \neg G}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg\mathrm{e}$
$\to$	$\dfrac{\Gamma, G \vdash H}{\Gamma \vdash G \to H}\ {\to}\mathrm{i}$	$\dfrac{\Gamma \vdash H \to G \quad \Gamma \vdash H}{\Gamma \vdash G}\ {\to}\mathrm{e}$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash G \quad \Gamma \vdash H}{\Gamma \vdash G \wedge H}\ \wedge\mathrm{i}$	$\dfrac{\Gamma \vdash G \wedge H}{\Gamma \vdash G}\ \wedge\mathrm{e,g}$ $\dfrac{\Gamma \vdash G \wedge H}{\Gamma \vdash H}\ \wedge\mathrm{e,d}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash G \vee H}\ \vee\mathrm{i,g}$ $\dfrac{\Gamma \vdash H}{\Gamma \vdash G \vee H}\ \vee\mathrm{i,d}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash G \quad \Gamma, B \vdash G}{\Gamma \vdash G}\ \vee\mathrm{e}$

$$\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\ \mathrm{Ax}$$

Table 2 – Règles d'introduction et d'élimination

À ce stade, nous avons définis le système de preuves que l'on appellera *déduction naturelle intuitionniste*. Dans le chapitre 0, on a donné une notion de vérité. On a maintenant donné une notion de preuve. On souhaite maintenant montrer le séquent $\varnothing \vdash p \vee \neg p$, nommé *tiers exclu* : la variable p est, soit vrai, soit fausse. Avec le système de preuve actuel, on ne peut pas le montrer. Mais, on a bien $\varnothing \models p \vee \neg p$, car pour tout environnement propositionnel ρ, $[\![p \vee \neg p]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$. D'où la remarque suivante.

Remarque :
Ce système de preuve n'est pas complet vis à vis de la sémantique de la logique propositionnelle : on ne peut pas prouver le séquent $\varnothing \vdash p \vee \neg p$ malgré son caractère tautologique.

Exemple :
De plus, montrons le résultat : il existe deux irrationnels x et y tels que x^y soit rationnel. On considère le réel $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. S'il est rationnel, la preuve est terminée. S'il ne l'est pas, notons $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, et on remarque que $x^{\sqrt{2}} = 2$. Dans cette preuve, on utilise le tiers exclu : x est soit rationnel, soit irrationnel.

Ainsi, la *déduction naturelle classique* est le système de preuve obtenue en ajoutant la règle suivante :

$$\dfrac{}{\Gamma \vdash G \vee \neg G}\ \mathrm{TE}.$$

La déduction naturelle classique est un système de preuve complet.

Exemple (preuve en déduction naturelle classique) :
Montrons le séquent $\varnothing \vdash \neg\neg p \to p$. Une preuve de ce séquent n'était pas possible en déduction naturelle intuitionniste, mais elle est possible en déduction naturelle classique

à l'aide de la règle du tiers exclu TE.

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg p \vdash p \lor \neg p}\,\text{TE} \qquad \dfrac{}{\neg\neg p, p \vdash p}\,\text{Ax} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg p, \neg p \vdash \neg p}\,\text{Ax} \qquad \dfrac{}{\neg\neg p, \neg p \vdash p}\,\text{Ax}}{\neg\neg p, \neg p \vdash \bot}\,\neg\text{e}}{\neg\neg p, \neg p \vdash p}\,\bot\text{e}}{\dfrac{\neg\neg p \vdash p}{\varnothing \vdash \neg\neg p \to p}\,\to\text{i}}\,\lor\text{e}$$

Exemple (preuve en dédution naturelle intuitionniste) :
On montre maintenant l'implication inverse. S'il existe une preuve en déduction naturelle intuitionniste, elle reste valide dans le système de preuve de la déduction naturelle classique.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p, \neg p \vdash p}\,\text{Ax} \qquad \dfrac{}{p, \neg p \vdash \neg p}\,\text{Ax}}{p, \neg p \vdash \bot}\,\neg\text{e}}{p \vdash \neg\neg p}\,\neg\text{i}}{\vdash p \to (\neg\neg p)}\,\to\text{i}$$

Exemple :
On prouve le séquent introductif $\varnothing \vdash \big((p \to q) \land (q \to r)\big) \to (p \to r)$, à l'aide le la déduction naturelle intuitionniste. On nomme Γ l'ensemble $p, (p \to q) \land (q \to r)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (p \to q) \land (q \to r)}\,\text{Ax}}{\Gamma \vdash q \to r}\,\land\text{e,d} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (p \to q) \land (q \to r)}\,\text{Ax}}{\Gamma \vdash p \to q}\,\land\text{e,g} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash p}\,\text{Ax}}{\Gamma \vdash q}\,\to\text{e}}{p, (p \to q) \land (q \to r) \vdash r}\,\to\text{e}}{(p \to q) \land (q \to r) \vdash p \to r}\,\to\text{i}}{\varnothing \vdash \big((p \to q) \land (q \to r)\big) \to (p \to r)}\,\to\text{i} \quad .$$

Exemple :
Toujours en déduction naturelle intuitionniste, on prouve le séquent

$$\varnothing \vdash (p \to q) \to (\neg q \to \neg p).$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p, \neg q, p \to q \vdash \neg q}\,\text{Ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{p, \neg q, p \to q \vdash p \to q}\,\text{Ax} \qquad \dfrac{}{p, \neg q, p \to q \vdash p}\,\text{Ax}}{p, \neg q, p \to q \vdash q}\,\to\text{e}}{p, \neg q, p \to q \vdash \bot}\,\neg\text{e}}{\neg q, p \to q \vdash \neg p}\,\neg\text{i}}{p \to q \vdash \neg q \to \neg p}\,\to\text{i}}{\vdash (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)}\,\to\text{i} \quad .$$

Théorème : La déduction naturelle classique (respectivement intuitionniste) est correcte.

Preuve :
Par induction (longue) sur l'arbre de preuves (*c.f.* plus haut). □

Corollaire : Pour prouver $\Gamma \models G$, il suffit de construire un arbre de preuve de $\Gamma \vdash G$.

Remarque :
On aurait pu définir la déduction naturelle classique en ajoutant une des deux règles suivantes plutôt que le tiers exclus :

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg G}{\Gamma \vdash G}\ \neg\neg\mathrm{e} \qquad\qquad \frac{\Gamma, \neg G \vdash \bot}{\Gamma \vdash G}\ \mathrm{Abs}^{1}.$$

Exercice :
Refaire les preuves du séquent $\varnothing \vdash \neg\neg p \to p$ avec les règles $\neg\neg$e, et Abs.

2 La logique du premier ordre

On veut rajouter à la déduction naturelle des quantificateurs, tels que $\forall$ ou $\exists$. On considère la formule

$$G = \forall x,\ \Big(\big((x > 0) \land (\exists y,\ x = y + 1)\big) \lor (x = 0)\Big).$$

Cette formule peut être représentée sous forme d'arbre syntaxique, comme celui ci-dessous.

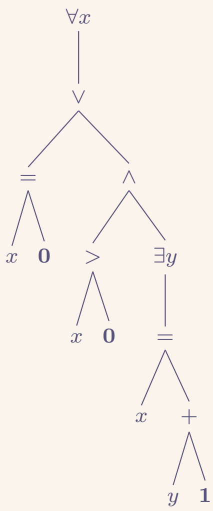


Figure 1 – Arbre syntaxique de la formule $G = \forall x,\ \Big(\big((x > 0) \land (\exists y,\ x = y + 1)\big) \lor (x = 0)\Big)$

2.1 Syntaxe de la logique du premier ordre

Définition : On appelle *signature du premier ordre* la donnée de deux ensembles $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$.[2] Ces symboles viennent avec une notion d'arité

$$\mathfrak{a} : \mathcal{S} \cup \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{N}.$$

On appelle l'ensemble des *constantes* la sous-partie des éléments c de $\mathcal{S}$ telle que $\mathfrak{a}(c) = 0$.

1. Abs correspond à absurde

Les autres symboles, non constantes, sont appelés *fonctions*. On appelle $\mathcal{P}$ l'ensemble des prédicats. On a toujours $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \varnothing$.

Définition : Étant donné un ensemble $\mathcal{S}$ de symboles de fonctions et de constantes, et un ensemble $\mathcal{V}$ de variables, on définit inductivement l'ensemble des *termes* sur $\mathcal{S}$ et $\mathcal{V}$, typographié $\mathcal{T}(\mathcal{S}, \mathcal{V})$, par

— $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{S}, \mathcal{V})$;

— si $f \in \mathcal{S}$, et $t_1, t_2, \dots, t_{\mathfrak{a}(f)} \in \big(\mathcal{T}(\mathcal{S}, \mathcal{V})\big)^{\mathfrak{a}(f)}$, alors $f\big(t_1, t_2, \dots, f_{\mathfrak{a}(f)}\big) \in \mathcal{T}(\mathcal{S}, \mathcal{V})$.

Exemple :

Si $\mathcal{S} = \{+, -, \mathbf{0}\}$, avec $\mathfrak{a}(+) = 2$, $\mathfrak{a}(-) = 1$ [3] et $\mathfrak{a}(\mathbf{0}) = 0$; si $\mathcal{V} \supseteq \{x, y, z\}$, alors

— $+(x, y)$

— $-(x)$

— $\mathbf{0}$

— $+\Big(x, -\big(+(z, \mathbf{0})\big)\Big)$

sont des termes.

Définition (Logique du premier ordre) : Étant donné une signature du premier ordre $(\mathcal{S}, \mathcal{P})$, et un ensemble $\mathcal{V}$ de variables, on définit l'ensemble des formules des *formules de la logique du premier ordre* typographié $\mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{V})$, par induction

— si $P \in \mathcal{P}$, et $t_1, \dots, t_{\mathfrak{a}(P)} \in \big(\mathcal{T}(\mathcal{S}, \mathcal{V})\big)^{\mathfrak{a}(P)}$, alors $P\big(t_1, \dots, t_{\mathfrak{a}(P)}\big) \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{V})$;

— $\bot, \top \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{V})$;

— si $(G, H) \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{V})^2$, alors

$$\begin{array}{lll} G \wedge H \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{V}), & G \to H \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{V}), & \neg G \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{V}) ; \\ G \vee H \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{V}), & G \leftrightarrow H \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{V}), & \end{array}$$

— Si $x \in \mathcal{V}$ et $G \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{V})$, alors

$$(\forall x,\ G) \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{V}) \qquad (\exists x,\ G) \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{V}).$$

On note un symbole $+$ avec son arité $\mathfrak{a}(+) = 2$ comme $+(2)$.

Exemple :

En choisissant $\mathcal{P} = \{>(2), =(2)\}$, $\mathcal{S} = \{+(2), \mathbf{0}(0), \mathbf{1}(0)\}$ et $\mathcal{V} \supseteq \{x, y\}$, on peut alors construire la formule de l'exemple précédent :

$$G = \forall x,\ \Big(\big((x > 0) \wedge (\exists y,\ x = y + 1)\big) \vee (x = 0)\Big).$$

Codons le en OCaml, comme montré ci-dessous.

```
type symbole_arite = string * int

type signature = {
  symbole_terme: symbole_arite list;
  symbole_predicat: symbole_arite list
```

2. $\mathcal{S}$ est l'ensemble des symboles utilisés pour construire des termes ; $\mathcal{P}$ est l'ensemble des symboles utilisés pour passer du monde des termes pour passer au monde des formules.

3. il s'agit du '$-$' dans l'expression $-x$.

```
}

type var = string

type terme =
  | V of var
  | T of symbole_arite * (terme list)

(* Quelques exemples *)

let ex0 = T(("0", 0), []);
let ex1 = T(("1", 0), []);
let ex2 =
  T(("+", 2), [
    V("x"),
    T(("-", 1), [
      T(("+", 2), [
        V("z"),
        T(("0", 0), [])
      ])
    ])
  ])

(* Definissons la logique du 1er ordre *)

type po_logique =
  | Pred    of symbole_arite * (terme list)
  | Top | Bottom
  | And     of po_logique * po_logique
  | Or      of po_logique * po_logique
  | Imp     of po_logique * po_logique
  | Equiv   of po_logique * po_logique
  | Not     of po_logique
  | Forall  of var * po_logique
  | Exists  of var * po_logique
```

CODE 1 – Définition des formules de premier ordre en OCAML

On définit, dans la suite de cette section, l'introduction et l'élimination de $\forall$ et $\exists$. Mais, nous devons réaliser des *substitutions*, et c'est ce que nous allons faire dans le reste de cette sous-section.

Définition : On définit vars inductivement sur $\mathcal{T}(\mathcal{S}, \mathcal{V})$ par :

— si $x \in \mathcal{V}$, $\mathrm{vars}(x) = \{x\}$;

— $\mathrm{vars}\big(f(t_1, \ldots, t_n)\big) = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{vars}(t_i)$.

Définition : On définit inductivement deux fonctions

$$\mathsf{FV} : \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{V}) \longrightarrow \wp(\mathcal{V})\,^4 \qquad \mathsf{BV} : \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{V}) \longrightarrow \wp(\mathcal{V})\,^5$$

par

— $\mathsf{FV}(\top) = \varnothing$,

— $\mathsf{FV}(\bot) = \varnothing$,

— $\mathsf{FV}(G \odot H) = \mathsf{FV}(G) \cup \mathsf{FV}(H)$ avec $\odot \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,

— $\mathsf{FV}(P(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{vars}(t_i)$,

— $\mathsf{FV}(\neg G) = \mathsf{FV}(G)$,

— $\mathsf{FV}(\forall x,\ G) = \mathsf{FV}(G) \setminus \{x\}$,

— $\mathsf{FV}(\exists x,\ G) = \mathsf{FV}(G) \setminus \{x\}$,

et

- $\mathsf{BV}(\top) = \varnothing$,
- $\mathsf{BV}(\bot) = \varnothing$,
- $\mathsf{BV}(P(t_1, \ldots, t_n)) = \varnothing$,
- $\mathsf{BV}(\neg G) = \mathsf{BV}(G)$,
- $\mathsf{BV}(G \odot H) = \mathsf{BV}(G) \cup \mathsf{BV}(H)$ avec $\odot \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,
- $\mathsf{BV}(\forall x,\ G) = \mathsf{BV}(G) \cup \{x\}$,
- $\mathsf{BV}(\exists x,\ G) = \mathsf{BV}(G) \cup \{x\}$,

Exemple :
À faire : Inclure exemple. $\mathsf{BV}(F) = \{x, y\}$ et $\mathsf{FV}(F) = \{y, z\}$.

Définition (α-renommage) : On appelle *α-renommage* l'opération consistant à renommer les occurrences liées des variables dans une formule.

Exemple :
On considère la formule

$$(\forall x,\ P(X)) \wedge (\forall x,\ \forall y,\ Q(x, x+y)).$$

Elle a pour α-renommage les formules
- $(\forall x,\ P(x)) \wedge (\forall x,\ \forall y,\ Q(x, x+y))$;
- $(\forall z,\ P(z)) \wedge (\forall x,\ \forall y,\ Q(x, x+y))$;
- $(\forall z,\ P(z)) \wedge (\forall z,\ \forall y,\ Q(z, z+y))$;
- $(\forall z,\ P(z)) \wedge (\forall x,\ \forall z,\ Q(x, x+z))$;
- $\cancel{(\forall z,\ P(z)) \wedge (\forall y,\ \forall y,\ Q(y, y+y))}$.

2.2 Substitution

Définition (Substitution) : Une *substitution* est une fonction de $\mathscr{V} \longrightarrow \mathscr{T}(\mathcal{S}, \mathscr{V})$ qui est l'identité partout, sauf sur un nombre fini de variables que l'on appelle *clé* de cette substitution.

Exemple :
On considère la substitution

$$\begin{aligned} \sigma : \mathscr{V} &\longrightarrow \mathscr{T}(\mathcal{S}, \mathscr{V}) \\ x &\longmapsto \begin{cases} y+y & \text{si } x = y \\ x & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des clés de cette substitution sont $\{y\}$; en effet, $\sigma(y) = y + y$, et $\sigma(z) = z$.

Définition (Application d'une substitution à un terme) : Étant donné une substitution σ, on définit inductivement la fonction

$$\begin{aligned} \cdot\,[\sigma] : \mathscr{T}(\Sigma, \mathscr{V}) &\longrightarrow \mathscr{T}(\mathcal{S}, \mathscr{V}) \\ t &\longmapsto t[\sigma] \end{aligned}$$

5. FV : *free variable*, variable libre
5. BV : *bound variable*, variable liée

par

— $x[\sigma] = \sigma(x)$ avec $x \in \mathscr{V}$;
— $\big(f(t_1, \dots, t_n)\big)[\sigma] = f\big(t_1[\sigma], \dots, t_n[\sigma]\big)$.

Définition (Application d'une substitution à une formule) **:** Étant donné une substitution σ, on définit inductivement l'application de la substitution σ à une formule par

— $\top[\sigma] = \top$;
— $\bot[\sigma] = \bot$;
— $P(t_1, \dots, t_n)[\sigma] = P\big(t_1[\sigma], \dots, t_n[\sigma]\big)$;
— $(G \odot H)[\sigma] = G[\sigma] \odot H[\sigma]$ avec $\odot \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$;
— $(\neg G)[\sigma] = \neg\big(G[\sigma]\big)$;
— $(\forall x,\ G)[\sigma] = \forall x,\ G\big[\sigma[x \mapsto x]\big]$
— $(\exists x,\ G)[\sigma] = \exists x,\ G\big[\sigma[x \mapsto x]\big]$

B On s'assurera que les variables apparaissent dans l'espace image de la substitution σ n'intersecte pas avec les variables liées de G lors du calcul de $G[\sigma]$. Ce peut-être assuré au moyen du α-renommage.

Exemple :
On considère la formule $P(x, y) \wedge \big(\forall x,\ Q(x, y)\big)$. On applique la substitution $\sigma : (x \mapsto x + y,\ y \mapsto 0)$.

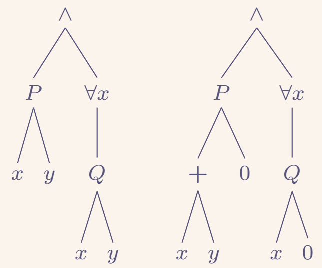
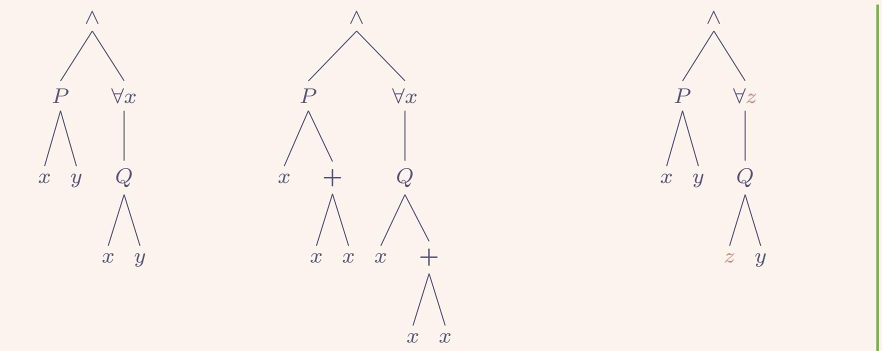


Figure 2 – Arbre de syntaxe de la formule $P(x, y) \wedge \big(\forall x,\ Q(x, y)\big)$, application de la substitution $\sigma = (x \mapsto x + y,\ y \mapsto 0)$

Exemple :
On considère la même formule, et la substitution $\sigma : (y \mapsto x + x)$.



formule originale — substitution sans α-renommage — substitution après α-renommage

Figure 3 – Arbre de syntaxe de la formule $P(x,y) \wedge \big(\forall x,\ Q(x,y)\big)$, application de la substitution $\sigma = (y \mapsto x + x)$ directement et avec α-renommage

2.3 Extension au premier ordre de la déduction naturelle

On ajoute les règles suivantes.

Symbole	Règle d'introduction	Règle d'élimination
$\forall$	$\dfrac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash \forall x,\ G}\ \forall\mathrm{i}$ $x \notin \mathsf{FV}(\Gamma)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \forall x,\ G}{\Gamma \vdash G\big[(x \mapsto t)\big]}\ \forall\mathrm{e}$ $\mathrm{vars}(t) \cap \mathsf{BV}(G) = \varnothing$
$\exists$	$\dfrac{\Gamma \vdash G\big[(x \mapsto t)\big]}{\Gamma \vdash \exists x,\ G}\ \exists\mathrm{i}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \exists x,\ H \qquad \Gamma, H \vdash G}{\Gamma \vdash G}\ \exists\mathrm{e}$ $x \notin \mathsf{FV}(\Gamma) \cup \mathsf{FV}(G)$

Table 3 – Extension au premier ordre de la déduction naturelle

Exemple :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x,\ P(\mathbf{0},x) \vdash \forall x,\ P(\mathbf{0},x)}\ \mathrm{Ax}}{\forall x,\ P(\mathbf{0},x) \vdash P(\mathbf{0},\mathbf{1})}\ \forall\mathrm{e}}{\forall x,\ P(\mathbf{0},x) \vdash \exists y,\ P(y,\mathbf{1})}\ \exists\mathrm{i}}{\vdash \big(\forall x,\ P(\mathbf{0},x)\big) \rightarrow \big(\exists y,\ P(y,\mathbf{1})\big)}\ \rightarrow\mathrm{i}$$

Exemple :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x,\ P(x) \vdash \forall x,\ P(x)}\ \mathrm{Ax}}{\forall x,\ P(x) \vdash P(x)}\ \forall\mathrm{e}}{\forall x,\ P(x) \vdash \exists x,\ P(x)}\ \exists\mathrm{i}}{\vdash \big(\forall x,\ P(x)\big) \rightarrow \big(\exists x,\ P(x)\big)}\ \rightarrow\mathrm{i}$$

Exemple :
On pose $F_1 = \exists x,\ P(x)$ et $F_2 = \forall x,\ \forall y,\ \big(P(x) \to Q(y)\big)$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$F_1, F_2 \vdash \exists x,\ P(x)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$F_1, F_2, P(x) \vdash \exists y,\ P(x) \to Q(y) \vdash \exists y,\ P(x) \to Q(y)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, P(x) \to Q(y), P(x) \vdash P(x) \to Q(y)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, P(x) \vdash P(x)$}
\RightLabel{$\to$e}
\BinaryInfC{$F_1, F_2, P(x), \big(\exists y\ P(x) \to Q(y)\big), P(x) \to Q(y) \vdash Q(y)$}
\RightLabel{$\exists$i}
\UnaryInfC{$F_1, F_2, P(x), \big(\exists y\ P(x) \to Q(y)\big), P(x) \to Q(y) \vdash \exists y,\ Q(y)$}
\RightLabel{$\exists$e}
\BinaryInfC{$F_1, F_2, P(x), \big(\exists y\ P(x) \to Q(y)\big) \vdash \exists z,\ Q(z)$}
\RightLabel{$\to$i}
\UnaryInfC{$F_1, F_2, P(x) \vdash \big(\exists y\ P(x) \to Q(y)\big) \to \big(\exists z,\ Q(z)\big)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$F_1, F_2, P(x) \vdash \forall x,\ \exists y,\ P(x) \to Q(y)$}
\RightLabel{$\forall$e}
\UnaryInfC{$F_1, F_2, P(x) \vdash \exists y,\ P(x) \to Q(y)$}
\RightLabel{$\to$e}
\BinaryInfC{$F_1, F_2, P(x) \vdash \exists z,\ Q(z)$}
\RightLabel{$\exists$e}
\BinaryInfC{$\exists x,\ P(x); \forall x,\ \exists y,\ \big(P(x) \to Q(y)\big) \vdash \exists z,\ Q(z)$}
\end{prooftree}
$$

Exemple (Paradoxe du buveur) :
On pose $\varphi = \exists x,\ \neg B(x)$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{TE}
\UnaryInfC{$\varnothing \vdash \varphi \vee \neg\varphi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\varphi \vdash \varphi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\varphi, \neg B(x), B(x) \vdash B(x)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\varphi, \neg B(x), B(x) \vdash \neg B(x)$}
\BinaryInfC{$\varphi, \neg B(x), B(x) \vdash \bot$}
\RightLabel{$\bot$e}
\UnaryInfC{$\varphi, \neg B(x), B(x) \vdash \forall y,\ B(y)$}
\RightLabel{$\to$i}
\UnaryInfC{$\varphi, \neg B(x) \vdash B(x) \to \forall y,\ B(y)$}
\RightLabel{$\exists$i}
\UnaryInfC{$\varphi, \neg B(x) \vdash \exists x,\ \big(B(x) \to \forall y,\ B(y)\big)$}
\RightLabel{$\exists$e}
\BinaryInfC{$\varphi \vdash \exists x,\ \big(B(x) \to \forall y,\ B(y)\big)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\neg\big(\exists x,\ \neg B(x)\big), B(x), \neg B(y) \vdash \neg\big(\exists x,\ \neg B(x)\big)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\neg\big(\exists x,\ \neg B(x)\big), B(x), \neg B(y) \vdash \neg B(y)$}
\RightLabel{$\exists$i}
\UnaryInfC{$\neg\big(\exists x,\ \neg B(x)\big), B(x), \neg B(y) \vdash \exists x,\ \neg B(x)$}
\RightLabel{$\neg$e}
\BinaryInfC{$\neg\big(\exists x,\ \neg B(x)\big), B(x), \neg B(y) \vdash \bot$}
\RightLabel{Abs}
\UnaryInfC{$\neg\big(\exists x,\ \neg B(x)\big), B(x) \vdash B(y)$}
\RightLabel{$\forall$i}
\UnaryInfC{$\neg\varphi, B(x) \vdash \forall y,\ B(y)$}
\RightLabel{$\to$i}
\UnaryInfC{$\neg\varphi \vdash B(x) \to \forall y,\ B(y)$}
\RightLabel{$\exists$i}
\UnaryInfC{$\neg\varphi \vdash \exists x,\ \big(B(x) \to \forall y,\ B(y)\big)$}
\RightLabel{$\vee$e}
\TrinaryInfC{$\varnothing \vdash \exists x,\ \big(B(x) \to \forall y,\ B(y)\big)$}
\end{prooftree}
$$

Théorème : L'ajout des quatre règles précédentes à la déduction naturelle, intuitionniste ou classique, maintient sa correction. □

Remarque (Hors-Programme) :
L'ajout de ces règles maintient également sa complétude vis-à-vis de la logique classique.

2.4 Règles dérivées

On définit de manière informelle la notion de *règle dérivée* comme des règles que l'on peut obtenir comme combinaison des règles déjà existantes.

Exemple :
On considère la règle nommée TE′ définie comme

$$\frac{\Gamma, H \vdash G \qquad \Gamma, \neg H \vdash G}{\Gamma \vdash G}\ \text{TE}'.$$

Elle se dérive des règles TE et $\vee$e :

$$\frac{\dfrac{}{\Gamma \vdash H \vee \neg H}\ \text{Ax} \qquad \Gamma, H \vdash G \qquad \Gamma, \neg H \vdash G}{\Gamma \vdash G}\ \vee\text{e}.$$

Remarque :
Si $\Gamma \vdash G$ est prouvable, et si $\Gamma \subseteq \Gamma'$, alors $\Gamma' \vdash G$ est prouvable. On ajoute donc parfois une règle dit d'*affaiblissement*, définie comme

$$\frac{\Gamma' \vdash G}{\Gamma \vdash G}\ \text{Aff} \qquad \Gamma' \subseteq \Gamma.$$

2.5 Sémantique

On considère la formule défini par l'arbre de syntaxe suivant. On a $\mathscr{P} = \{P(1), Q(1)\}$, $\mathscr{S} = \{\oplus(2), \tilde{0}(0), \tilde{1}(0), \ominus(3)\}$ et $\mathscr{V} \supseteq \{x, y, z\}$.

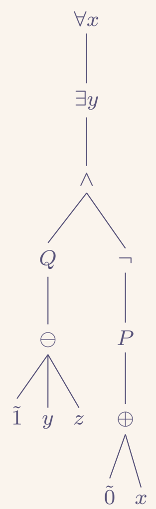


Figure 4 – Arbre de syntaxe exemple

Pour interpréter une formule de la logique du premier ordre, on doit définir le “monde” des variables, leur valeur, la valeur d'une constante et d'une fonction, la valeur des prédicats, et le sens des quantificateurs.

Définition (Domaine) **:** On appelle *domaine d'interprétation* des termes un ensemble non vide $\mathbf{M}$.

Exemple :
On peut choisir $\mathbf{M} = \mathbb{R}$, ou $\mathbf{M} = \mathbb{N}$, $\mathbf{M} = \mathbb{Z}$, $\mathbf{M} = \mathbb{B}$ ou $\mathbf{M} = \mathcal{T}(\mathcal{S}, \mathcal{V})$.

Dans toute la suite de cette section, on fixe les ensembles $\mathcal{S}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{P}$.

Définition (Environnement de variables) **:** On appelle *environnement de variable* sur $V \subseteq \mathcal{V}$ une fonction

$$\mu : V \longrightarrow \mathbf{M}.$$

Exemple :
On a par exemple $\mu = (x \mapsto 3)$.

Définition (Structure d'interprétation) **:** On appelle *structure d'interprétation* la donnée de

- un domaine $\mathbf{M}$;
- une fonction $f^M : \mathbf{M}^{\mathfrak{a}(f)} \longrightarrow \mathbf{M}$ pour chaque symbole $f \in \mathcal{S}$;
- une fonction $P^M : \mathbf{M}^{\mathfrak{a}(P)} \longrightarrow \mathbb{B}$ pour chaque symbole $P \in \mathcal{P}$.

On typographie une telle structure M.

Exemple :
Si $\mathcal{S} = \{\oplus(2), \ominus(2)\}$, $\mathcal{P} = \{\otimes(2), \circleddash(2)\}$, et $\mathbf{M} = \mathbb{N}$, alors on définit les fonctions

$$\begin{aligned} \oplus^M : \mathbb{N}^2 &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (m, n) &\longmapsto m + n, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \otimes^M : \mathbb{N}^2 &\longrightarrow \mathbb{B} \\ (n, m) &\longmapsto \begin{cases} \boldsymbol{V} & \text{si } n < m \\ \boldsymbol{F} & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \ominus^M : \mathbb{N}^2 &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\longmapsto \begin{cases} n - m & \text{si } n \geqslant m \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \circleddash^M : \mathbb{N}^2 &\longrightarrow \mathbb{B} \\ (n, m) &\longmapsto \begin{cases} \boldsymbol{V} & \text{si } n = m \\ \boldsymbol{F} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Définition : On définit la fonction `eval` prenant en argument
- un terme t,
- une structure d'interprétation,
- un environnement sur au moins les variables de t,

et s'évaluant dans $\mathbf{M}$, telle que $\texttt{eval}(x, M, \mu) = \mu(x)$ avec $x \in \mathcal{V}$, et que

$$\begin{aligned} &\texttt{eval}\big(f(t_1, t_2, \ldots, t_{\mathfrak{a}(f)}), M, \mu\big) \\ =& f^M\big(\texttt{eval}(t_1, M, \mu), \texttt{eval}(t_2, M, \mu), \ldots, \texttt{eval}(t_{\mathfrak{a}(f)}, M, \mu)\big) \end{aligned}$$

Exemple :
Avec la structure précédente, on a

$$\begin{aligned} \texttt{eval}\Big(\oplus(x, \ominus(x, y)), M, (x \mapsto 1, y \mapsto 2)\Big) &= \oplus^M\Big(\mu(x), \ominus^M\big(\mu(x), \mu(y)\big)\Big) \\ &= 1 + \ominus^M(1, 2) \\ &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Définition (Interprétation des formules) : On définit inductivement $[\![\cdot]\!]^{M,\mu}$ comme
- $[\![\top]\!]^{M,\mu} = \boldsymbol{V}$;
- $[\![\bot]\!]^{M,\mu} = \boldsymbol{F}$;
- $[\![\neg G]\!]^{M,\mu} = \overline{[\![G]\!]^{M,\mu}}$;
- $[\![G \land H]\!]^{M,\mu} = [\![G]\!]^{M,\mu} \cdot [\![H]\!]^{M,\mu}$;
- $[\![G \lor H]\!]^{M,\mu} = [\![G]\!]^{M,\mu} + [\![H]\!]^{M,\mu}$;
- $[\![G \to H]\!]^{M,\mu} = \overline{[\![G]\!]^{M,\mu}} + [\![H]\!]^{M,\mu}$;
- $[\![G \leftrightarrow H]\!]^{M,\mu} = \Big(\overline{[\![G]\!]^{M,\mu}} + [\![H]\!]^{M,\mu}\Big) \cdot \Big(\overline{[\![H]\!]^{M,\mu}} + [\![G]\!]^{M,\mu}\Big)$;
- $\big[\!\big[P(t_1, \ldots, t_{\mathfrak{a}(P)})\big]\!\big]^{M,\mu} = P^M\big(\texttt{eval}(t_1, M, \mu), \ldots, \texttt{eval}(t_{\mathfrak{a}(P)}, M, \mu)\big)$;
- $[\![\exists x,\ G]\!]^{M,\mu} = \displaystyle\sum_{v_x \in \mathbf{M}} [\![G]\!]^{M,\mu[x \mapsto v_x]}$;
- $[\![\forall x,\ G]\!]^{M,\mu} = \displaystyle\prod_{v_x \in \mathbf{M}} [\![G]\!]^{M,\mu[x \mapsto v_x]}$,

où on définit $+\,\mathcal{B} = \boldsymbol{V} \iff \boldsymbol{V} \in \mathcal{B}$, et $\bullet\,\mathcal{B} = \boldsymbol{F} \iff \boldsymbol{F} \in \mathcal{B}$ avec $\mathcal{B} \subseteq \{\boldsymbol{V}, \boldsymbol{F}\}$.

Exemple :
On pose $\mathcal{S} = \{\oplus(2), Z(0)\}$, $\mathcal{P} = \{\otimes(2), \ominus(2)\}$, et

$$G = \forall x,\ \Big(\exists y,\ \Big(\exists z, \ominus(x, \oplus(y, z)) \land \neg\ominus(z, Z)\Big)\Big).$$

On considère la structure M définie comme donnée de $\mathbf{M} = \mathbb{N}$, $\oplus^M = +$, $Z^M = 0$, $\ominus^M = \leqslant$, et $\ominus^M =$ " $=$ ". Ainsi,

$$[\![G]\!]^{M,()} = \bullet_{v_x \in \mathbb{N}} \Big(+_{v_y \in \mathbb{N}} \Big(+_{v_z \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{v_x = v_y + v_z} \cdot \overline{\mathbb{1}_{v_z = 0}} \Big)\Big),$$

où l'on définit $\mathbb{1}_G$ comme $\boldsymbol{V}$ si G est vrai, et $\boldsymbol{F}$ sinon. Pour $v_x = 0$, alors, pour tous $v_y \in \mathbb{N}$ et $v_z \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{1}_{v_x = v_y + v_z} \cdot \overline{\mathbb{1}_{v_z = 0}} = \boldsymbol{F}$. Ainsi, $[\![G]\!]^{M,\mu} = \boldsymbol{F}$. À faire : cas où $\mathbf{M} = \mathbb{Z}$

Définition : Une formule G de la logique du premier ordre est dite *satisfiable* dès lors qu'il existe une structure M, et un environnement de variables μ tel que $[\![G]\!]^{M,\mu} = \boldsymbol{V}$.

Une structure M est dit *modèle* de G dès lors que, pour tout environnement de variables μ, on a $[\![G]\!]^{M,\mu} = \boldsymbol{V}$.

Une formule G de la logique du premier ordre est dite *valide* dès lors que pour toute structure M, et tout environnement de variables μ, on a $[\![G]\!]^{M,\mu} = \boldsymbol{V}$.

Étant donné deux formules G et H, on dit que H est *conséquence sémantique* de G dès lors que, pour toute structure M et environnement de variables μ, si $[\![G]\!]^{M,\mu} = \boldsymbol{V}$, alors $[\![H]\!]^{M,\mu} = \boldsymbol{V}$. On le note $G \models H$.

On dit que deux formules G et H sont *équivalentes* dès lors que, $G \models H$ et $H \models G$. On le note $G \equiv H$.

Remarque :
- Une formule est dit *close* dès lors que $\mathsf{FV}(H) = \varnothing$.
- Une formule de ma forme $P(t_1, t_2, \dots, t_{\mathfrak{a}(P)})$ est appelée *formule atomique* ou *prédicat atomique*.
- Si $\mathsf{FV}(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$, la formule $\forall x_1, \dots, \forall x_n, G$ est appelée *cloture universelle* de G. La formule $\exists x_1, \dots, \exists x_n,\ G$ est appelée *cloture existentielle* de G.

3 Synthèse du chapitre

Symbole	Règle d'introduction	Règle d'élimination
$\top$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top\text{i}$	
$\bot$		$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash G}\ \bot\text{e}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma, G \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg G}\ \neg\text{i}$	$\dfrac{\Gamma \vdash G \qquad \Gamma \vdash \neg G}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg\text{e}$
$\to$	$\dfrac{\Gamma, G \vdash H}{\Gamma \vdash G \to H}\ \to\text{i}$	$\dfrac{\Gamma \vdash H \to G \qquad \Gamma \vdash H}{\Gamma \vdash G}\ \to\text{e}$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash G \qquad \Gamma \vdash H}{\Gamma \vdash G \wedge H}\ \wedge\text{i}$	$\dfrac{\Gamma \vdash G \wedge H}{\Gamma \vdash G}\ \wedge\text{e,g} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash G \wedge H}{\Gamma \vdash H}\ \wedge\text{e,d}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash G \vee H}\ \vee\text{i,g} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash H}{\Gamma \vdash G \vee H}\ \vee\text{i,d}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash G \qquad \Gamma, B \vdash G}{\Gamma \vdash G}\ \vee\text{e}$
$\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\ \text{Ax}$		

Table 4 – Règles d'introduction et d'élimination

$\dfrac{}{\Gamma \vdash G \vee \neg G}\ \text{TE}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg G}{\Gamma \vdash G}\ \neg\neg\text{e}$	$\dfrac{\Gamma, \neg G \vdash \bot}{\Gamma \vdash G}\ \text{Abs}$

Table 5 – Déduction naturelle classique

Symbole	Règle d'introduction	Règle d'élimination
$\forall$	$\dfrac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash \forall x,\ G}\ \forall\text{i}$ $x \notin \mathsf{FV}(\Gamma)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \forall x,\ G}{\Gamma \vdash G\big[(x \mapsto t)\big]}\ \forall\text{e}$ $\text{vars}(t) \cap \mathsf{BV}(G) = \varnothing$
$\exists$	$\dfrac{\Gamma \vdash G\big[(x \mapsto t)\big]}{\Gamma \vdash \exists x,\ G}\ \exists\text{i}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \exists x,\ H \qquad \Gamma, H \vdash G}{\Gamma \vdash G}\ \exists\text{e}$ $x \notin \mathsf{FV}(\Gamma) \cup \mathsf{FV}(G)$

Table 6 – Extension au premier ordre de la déduction naturelle