TD 16 : Équations différentielles

Exercice 1

1.

2. Résolvons l'équation $(E) : x' - 3x = (t+1)\mathrm{e}^{2t}$. On pose (E_0) l'équation homogène associée : $x' - 3x = 0$. Une fonction f est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E_0) si, et seulement si, il existe un réel K tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = K \cdot \mathrm{e}^{3t}$. On fait varier la constante K en posant $f(t) = k(t) \cdot \mathrm{e}^{3t}$ car $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{3t} \neq 0$. Ainsi, f est une solution de (E) si, et seulement si $k'(t) \cdot \mathrm{e}^{3t} + k(t) \cdot 3\mathrm{e}^{3t} - 3k(t) \cdot \mathrm{e}^{3t} = (t+1)\mathrm{e}^{2t}$ si, et seulement si, $k(t) = (t+1) \cdot \mathrm{e}^{-t}$ si, et seulement si, $k(t) = -(t+2) \cdot \mathrm{e}^{-t} + K$.

   On en déduit qu'une fonction f est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) si, et seulement si, il existe un réel K tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$f(t) = K \cdot \mathrm{e}^{3t} - (t+2) \cdot \mathrm{e}^{2t}.$$

Exercice 2

1. On considère l'équation différentielle (E) : $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = t\,\mathrm{e}^{2t}$, et on note (E_0) l'équation homogène associée : $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 0$.

   a. On résout l'équation caractéristique :
   $$r^2 - 3r + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r-1)\cdot(r-2) = 0.$$
   Donc x est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E_0) si, et seulement si, il existe deux réels K et L tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$x(t) = K \cdot \mathrm{e}^{1t} + L \cdot \mathrm{e}^{2t}.$$

   b. On recherche des solutions sous la forme $x(t) = \mathrm{e}^{rt}$: $t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$ est une solution de (E_0) si, et seulement si $r^2 - 3r + 2 = 0$. D'où, $\varphi_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{1t}$ et $\varphi_2 : t \mapsto \mathrm{e}^{2t}$ sont des solutions. Or, φ_1 et φ_2 sont libres. D'où, x est une solution de (E_0) si, et seulement si, il existe deux réels K et L tels que $x = K \cdot \varphi_1 + L \cdot \varphi_2$.

On résout maintenant l'équation (E) avec second membre. On peut procéder en utilisant 4 méthodes.

a. On trouve une solution particulière ψ : x est une solution de (E) si, et seulement si, il existe deux réels K et L tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = K \cdot \mathrm{e}^t + L \cdot \mathrm{e}^{2t} + \psi(t)$.

b. On fait varier la constante K : on cherche une solution particulière de la forme $x(t) = k(t) \cdot \mathrm{e}^{1t}$.

c. On fait varier la constante L : on cherche une solution particulière de la forme $x(t) = \ell(t) \cdot \mathrm{e}^{2t}$.

d. On fait varier les deux constantes K et L (▷ rappel 3.) : on cherche une solution particulière de la forme $x(t) = k(t) \cdot \mathrm{e}^{1t} + \ell(t) \cdot \mathrm{e}^{2t}$.

On choisit la méthode c : la fonction $t \mapsto \ell(t) \cdot \mathrm{e}^{2t}$ est une solution de (E) si, et seulement si,

$$\ell''(t)\mathrm{e}^{2t} + 4\ell'(t)\mathrm{e}^{2t} + 4\ell(t)\mathrm{e}^{2t} - 3(\ell'(t)\mathrm{e}^{2t} + 2\ell(t)\mathrm{e}^{2t}) + 2\ell(t)\mathrm{e}^{2t} = t\mathrm{e}^{2t}$$

si, et seulement si, $\ell''(t) + \ell'(t) = t$ si, et seulement si $s'(t) + s(t) = t$, en notant $s(t) = \ell'(t)$. On nomme (F) l'équation $s'(t) + s(t) = t$ et (F_O) l'équation homogène associée $s'(t) + s(t) = 0$.

Une fonction s est une solution de (F_O) si, et seulement si, il existe un réel M tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $s(t) = M\,\mathrm{e}^{-t}$. De plus, une solution particulière de (F) est $t \mapsto t - 1$. Une fonction s est une solution sur $\mathbb{R}$ de (F) si ; et seulement si, il existe un réel M tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $s(t) = M\,\mathrm{e}^{-t} + t - 1$. *Autre rédaction* : l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est

$$\{\, t \mapsto K\,\mathrm{e}^{-t} + t - 1 \mid K \in \mathbb{R} \,\}.$$

D'où, $t \mapsto t^2/2\ - 1$ est une solution particulière de l'équation différentielle $\ell''(t) + \ell'(t) = t$. D'où, $t \mapsto (t^2/2 - t) \cdot \mathrm{e}^{2t}$ est une solution particulière de (E).

On en déduit que x est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) si, et seulement si, il existe deux réels K et L tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = K \cdot \mathrm{e}^t + L \cdot \mathrm{e}^{2t} + \left(\frac{1}{2}t^2 - t\right) \cdot \mathrm{e}^{2t}.$$

Autre rédaction, sans briser l'équivalence : ℓ est une solution de $\ell''(t) + \ell'(t) = t$ si, et seulement si, il existe deux réels M et N tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\ell(t) = -M\,\mathrm{e}^{-t} + t^2/2\ - t + N$. D'où, x est une solution de (E) si, et seulement si, il existe deux réels M et N tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = K \cdot \mathrm{e}^t + L \cdot \mathrm{e}^{2t} + \left(\frac{1}{2}t^2 - t\right) \cdot \mathrm{e}^{2t}.$$

2. On considère (E_O), l'équation différentielle

$$(1+t^2)^2\,x''(t) + 2t(1+t^2)\,x'(t) + x(t) = 0.$$

On cherche d'abord une solution de la forme $(1+t^2)^\alpha$. Soit φ la fonction définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, comme $\varphi(t) = (1+t^2)^\alpha$. La fonction φ est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E_{O}) si, et seulement si, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(1+t^2)(2\alpha(1+t^2)^{\alpha-1} &+ 2\alpha\cdot 2(\alpha-1)t^2(1+t^2)^{\alpha-2})\\ &+ 2t(1+t^2)\cdot 2\alpha t(1+t^2)^{\alpha-1} + (1+t^2)^\alpha\\ &= (4\alpha^2t^2 + 2\alpha(1+t^2)+1)(1+t^2)^\alpha = 0\end{aligned}$$

si, et seulement si $4\alpha^2t^2 + 2\alpha(1+t^2)+1 = 0$, si, et seulement si, $2\alpha+1=0$ et $4\alpha^2+2\alpha=0$ (car deux polynômes sont égaux si, et seulement si, leurs coefficients sont égaux) si, et seulement si, $\alpha = -1/2$.

Exercice 5

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel :

$$\begin{cases} x' = y + z + \mathrm{e}^t \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$$

C'est un système à 3 inconnues avec 2nd membre. Les équations sont couplées, on change de base : on diagonalise la matrice A, où A est définie comme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note B le vecteur « second membre, » X le vecteur « inconnues. » Après calcul du polynôme caractéristique, on trouve $\operatorname{Sp} A = \{0,1,2\}$. Ainsi, le système est équivalent à résoudre $U'(t) = D\cdot U(t) + C(t)$, où $X(t) = P\cdot U(t)$, et $C(t) = P\cdot B(t)$, en notant P la matrice de changement de base.

Ainsi,

$$(E_{\text{O}}) \iff U'(t) = D\cdot U(t) \iff \begin{cases} u'(t) = 0\cdot u(t) \\ v'(t) = 1\cdot v(t) \\ w'(t) = 2\cdot w(t) \end{cases} \iff \begin{cases} u(t) = K\cdot \mathrm{e}^{0t} \\ v(t) = L\cdot \mathrm{e}^{1t} \\ w(t) = M\cdot \mathrm{e}^{2t} \end{cases}$$

$$\iff U(t) = \begin{pmatrix} K \\ L\mathrm{e}^t \\ M\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \iff X(t) = P\cdot U(t).$$

On cherche des vecteurs propres de A, associés aux valeurs propres 0, 1 et 2. On en déduit la matrice de passage P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Autre rédaction, on a

$$U(t) = K \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + L\,\mathrm{e}^{t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + M\,\mathrm{e}^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

et donc, après changement de base,

$$X(t) = K \cdot R_1 + L\,\mathrm{e}^{2t} \cdot R_2 + M\,\mathrm{e}^{2t} \cdot R_3,$$

où R_1, R_2 et R_3 sont trois vecteurs propres formant la base d'arrivée de la matrice de passage P.

On résout ensuite (E), le système avec 2^{nd} membre, en faisant varier les 3 constantes K, L et M.

▷ On n'a pas besoin d'inverser la matrice P.

▷ Attention à ne pas rompre l'équivalence : ne pas utiliser « je cherche les solutions de la forme $x(t) = k(t) \cdot f(t)$, » mais plutôt « je fais varier la constante car $f(t) \neq 0$, pour tout t dans un intervalle choisi. »

Exercice 6

1. On considère le système (E) : $\begin{cases} x'(t) = -\omega\, y(t) \\ y'(t) = +\omega\, x(t) \end{cases}$. Matriciellement, il est équivalent à $X'(t) = A \cdot X(t)$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$.

— $1^{\text{ère}}$ méthode : diagonaliser la matrice $\boldsymbol{A}$.

On réalise un changement de base $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$, de telle sorte à ce que l'équation $X'(t) = A \cdot X(t)$ soit équivalente à $U'(t) = D \cdot U(t)$, où D est diagonale. En notant P la matrice de passage, on a $X(t) = P \cdot U(t)$ (et $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$).

On commence par calculer le polynôme caractéristique χ_A de la matrice A. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & +\omega \\ -\omega & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 = (\lambda + i\,\omega) \cdot (\lambda - i\,\omega).$$

D'où, $\mathrm{Sp}(A) = \{-i\,\omega, +i\,\omega\}$, et A est diagonalisable. En effet, elle est de taille 2 et possède deux valeurs propres distinctes. Cherchons des vecteurs propres de A associé à chacune des valeurs propres. Soit $Z = (x \quad y)^\top \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$. On a

$$\begin{aligned}
& X \in \mathrm{SEP}_A(-i\,\omega) \\
\iff & AX = -i\,\omega\,X \\
\iff & \begin{cases} -\omega y = -i\omega x \\ +\omega x = -i\omega y \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} y = +ix \\ x = -ix \end{cases} \text{ car } \omega > 0 \text{ par hypothèse,} \\
\iff & y = ix \\
\iff & X = x \cdot (1 \quad i)^\top
\end{aligned}$$

De même, $X \in \mathrm{SEP}_A(+i\omega) \iff X = x \cdot (1 \quad -i)^\top$. Ainsi, la matrice de passage du changement de base $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ s'écrit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
(E) \iff & \begin{cases} u'(t) = -i\omega \cdot u(t) \\ v'(t) = +i\omega \cdot v(t) \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} u(t) = K \cdot \mathrm{e}^{-i\omega t} \\ v(t) = L \cdot \mathrm{e}^{+i\omega t} \end{cases} \text{ où } (K, C) \in \mathbb{C}^2, \\
\iff & \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & i \end{pmatrix}}_{P} \cdot \begin{pmatrix} K\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \\ L\,\mathrm{e}^{+i\omega t} \end{pmatrix} \\
\iff & \begin{cases} x(t) = K\,\mathrm{e}^{i\omega t} + L\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \\ y(t) = iK\,\mathrm{e}^{i\omega t} - iL\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x(t) = \overbrace{(K+L)}^{\alpha\in\mathbb{R}} \cos\omega t + \overbrace{(-iK+iL)}^{-\beta\in\mathbb{R}} \sin\omega t \\ y(t) = \underbrace{(iK-iL)}_{+\beta\in\mathbb{R}} \cos\omega t + \underbrace{(K+L)}_{\alpha\in\mathbb{R}} \sin\omega t \end{cases}
\end{aligned}$$

— 2nde méthode : poser $\boldsymbol{z = x + iy}$.

Alors, $(E) \iff z'(t) = i\omega\,z(t) \iff x'(t) + iy'(t) = i\omega\,\big(x(t) + y(t)\big)$. Il existe donc $K \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = K \cdot \mathrm{e}^{i\omega t}$. On pose donc $K = \alpha + i\beta$.

Alors,

$$\begin{aligned}
x(t) + i\,y(t) = z(t) &= (\alpha + i\,\beta) \cdot (\cos\omega t + i \sin\omega t) \\
&= (\alpha\cos\omega t - \beta\sin\omega t) + i\,(\beta\cos\omega t + \alpha\sin\omega t).
\end{aligned}$$

On résout à présent le système (F).

$$\begin{aligned}(F) &\iff \begin{cases} x' = -\omega y \\ y' = +\omega x \\ z' = V \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ +\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} (E) \\ z' = V \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (E) \\ z(t) = Vt + \gamma \end{cases}\end{aligned}$$

Donc, $(x \quad y \quad z)^\top$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de (F) si, et seulement s'il existe trois réels α, β et γ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x(t) = \alpha \cos \omega t - \beta \sin \omega t\,, \\ y(t) = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t\,, \\ z(t) = V\,t + \gamma. \end{cases}$$

Remarques (bientôt dans le rappel 2.1)

— La solution générale de (F) peut s'écrire matriciellement sous la forme

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\alpha \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{la solution générale du système homogène } (F_{\mathrm{O}})} + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V\,t \end{pmatrix}}^{\substack{\text{solution} \\ \text{particulière} \\ \text{de } (F)}}.$$

— La solution générale de (F_{O}) est de la forme $t \mapsto \alpha\,\varphi_1(t) + \beta\,\varphi_2(t) + \gamma\,\varphi_3(t)$, où $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de l'ensemble des solutions de (F_{O}), qui est donc un espace vectoriel de dimension 3, qui correspond au nombre d'équations.

— La solution générale de (F) est donc

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{rotation d'une rotation d'angle } \omega t} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V\,t \end{pmatrix}$$

2. On nomme (G) l'équation $\vec{x}\,'(t) = \vec{\omega} \wedge \vec{x}(t)$. On se place dans un espace euclidien orienté de dimension 3. On pose f et g les fonctions $f : E \ni \vec{x} \mapsto \|\vec{x}\|_2^2$ et $g : E \ni \vec{x} \mapsto \langle \vec{\omega} | \vec{x} \rangle$. Soit $M : I \to E$ une solution, sur l'intervalle I, de l'équation (G). Montrons que les deux fonctions $f \circ M$ et $g \circ M$ sont constantes sur I, *i.e.*, montrons qu'il existe deux réels α et β tels que, pour tout $t \in I$, $f\big(M(t)\big) = \alpha$ et $g\big(M(t)\big) = \beta$. La fonction M est dérivable car M est

une solution de l'équation différentielle (G). Et, la fonction $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (d'après les théorèmes généraux), et

$$\partial_1 f(x,y,z) = 2x, \quad \partial_2 f(x,y,z) = 2y, \quad \text{et} \quad \partial_3 f(x,y,z) = 2z,$$

i.e., $\nabla f(x,y,z) = 2\vec{x}$. D'après la règle de la chaîne, la fonction $f \circ M$ est dérivable et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(M(t)\big) = \langle M'(t) | \nabla f\big(M(t)\big)\rangle = \ 2\langle \vec{\omega} \wedge M(t) | M(t)\rangle = 0.$$

D'où, $f \circ M$ est constante sur I. De même, la fonction $g \circ M$ est dérivable et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g\big(M(t)\big) = \langle M'(t) | \nabla g\big(M(t)\big)\rangle.$$

Or, $g(x,y,z) = \omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z$ en notant $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, et alors $\nabla g(x,y,z) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \vec{\omega}$. D'où,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g\big(M(t)\big) = \langle \vec{\omega} \wedge M(t) | \vec{\omega}\rangle = 0.$$

La fonction $g \circ M$ est donc constante sur I.

On en déduit que les solutions de (G) sont à une distance constante de l'origine, leurs trajectoires sont incluses dans une sphère.

3. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors $A^\top = -A$. On suppose n impair.

   a. *Montrer que A n'est pas inversible et que, pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top AX = 0$.*

   Le déterminant est invariant par transposition, donc $\det A^\top = \det A$. Or, $A^\top = -A$ et donc $\det(-A) = (-1)^n \cdot \det A$ car le déterminant est *multilinéaire*. Et, comme n est impair, on a donc $\det A^\top = \det A = -\det A$. D'où, $\det A = 0$; la matrice A n'est donc pas inversible.

   <u>Remarque</u> : une matrice nilpotente n'est pas inversible ; en effet, si $N^k = 0$, alors $\det N^k = 0$; or, $\det N^k = (\det N)^k$ et donc $\det N = 0$.

   Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

   $$X^\top AX = (X^\top AX)^\top = X^\top A^\top X = -X^\top AX,$$

   et donc $X^\top AX = 0$.

   b. Montrer que si, pour tout $t \in I$, $X'(t) = A \cdot X(t)$, alors il existe $\Omega \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, pour tout $i \in I$,

Exercice 7

Soit (E) l'équation différentielle $x^2\, y''(x) - x(2x^2-1)\, y'(x) - (2x^2+1)\, y(x) = 0$.

1.
   (a) *On cherche une solution de (E) développable en série entière :*

   $$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

   et exprimer le coefficient a_n en fonction du coefficient a_1.

   (b) *Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$?*

   (c) *Calculer, pour tout $x \in]0, R[$, la somme $f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$.*

2. *Vérifier que $g : x \mapsto 1/x$ est une solution sur $]0, +\infty[$ de (E).*

3. *Déterminer la solution générale, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle de deux manières :*

   (a) *en utilisant la question 2 et la variation de la constante ;*

   (b) *en utilisant les questions 1 et 2.*

Cette équation différentielle est d'ordre 2, on la résout sur $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$. La solution générale est de la forme $y(x) = K\,\varphi_1(x) + L\,\varphi_2(x)$, où φ_1 est développable en série entière, et φ_2 ne l'est pas.

1. E

   (a) Soit R le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n x^n$. Et, soit, pour tout réel $x \in]-R, R[$, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

y est une solution de $(E) \iff \cdots$

$$\iff -a_0 + \sum_{n=2}^{\infty} [(n-1)(n+1)a_n - 2(n-1)a_{n-2}]x^n = 0$$

$$\iff \begin{cases} -a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad (n+1)a_n = 2a_{n-2} \end{cases} \quad \text{par unicité du DSE}$$

$$\iff \begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = 0, \\ \forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p+1} = a_1/(p+1)! \end{cases}$$

   (b) Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_p = |x^{2p+1}/(p+1)!\,|$. Alors la série $\sum |x^{2p+1}/(p+1)!\,| = \sum u_p$. Et,

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{|x|^2}{p+2} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0 = \ell.$$

D'où, $R = +\infty$.

(c) Pour tout réel positif $x \in]0,+\infty[$,

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{(p+1)!} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+2}}{(p+1)!} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(x^2)^{p+1}}{(p+1)!} = \frac{1}{x} \cdot \big(\mathrm{e}^{x^2} - 1\big).$$

Cette expression de $f(x)$ n'est pas définie en 0, mais elle est *prolongeable par continuité* en 0. En effet,

i. [Développement limité.]

$$\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x} = \frac{\big(x^2 - x^2\,\varepsilon(x)\big)}{x} = x + x\,\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

ii. [Utiliser le DSE.] La fonction f est développable en série entière, donc continue (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur l'intervalle $]-\infty,+\infty[$.

2. On vérifie que g est une solution de (E) sur $]0,+\infty[$.

3.

(a) On fait varier la constante en posant $y(x) = \ell(x)/x$...

(b) D'après le théorème de superposition, y est une solution de (E) sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, il existe un couple de réels $(K,L) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$y(x) = K \cdot \frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x} + L \cdot \frac{1}{x}.$$

Exercice 8

Résoudre sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ l'équation aux dérivées partielles

$$(E): \qquad x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

On passe en coordonnées polaires : on pose $M : (r, \varphi) \mapsto M(r, \varphi) = (r \cos \varphi\,, r \sin \varphi)$. On pose, de plus, $F = M \circ f$. Ainsi, en appliquant la règle de la chaîne,[1]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial r} = \dfrac{\partial x}{\partial r} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial r} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

On remplace avec les dérivées connues :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial r} = \cos \varphi \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin \varphi \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x} + r \cos \varphi \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

On reconnaît, à la 2[nde] ligne, l'équation (E) . Ainsi, (E) est équivalent à $\partial F / \partial \varphi (r, \varphi) = 0$ si, et seulement si, il existe une fonction k telle que $F(r, \varphi) = k(r)$ si, et seulement si, il existe une fonction $f(x, y) = k\big(\sqrt{x^2 + y^2}\big)$.

[1] pas à f, ce qui conduit à des calculs plus complexes comme dériver Arctan, mais à F

1 Rappels

1.1 Théorème de Cauchy-Lipchitz.

Définition : On dit que $x : t \mapsto x(t)$ est une *solution* sur un intervalle I de l'équation différentielle $x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$ si (i) la fonction x est dérivable sur I ; (ii) pour tout $t \in I$, $x'(t) = a(t) \times x(t) + b(t)$.

Remarque : la fonction x est à valeur dans E un espace vectoriel normé ; la fonction b est aussi à valeur dans F ; a est une application linéaire de l'espace vectoriel E vers F.

Remarque : Résoudre un système d'équations différentielles est équivalent à résoudre l'équation matricielle $X'(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t)$, où $X(t)$ est un vecteur de fonctions, et $A(t)$ est une matrice de fonctions. Pour un système

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t) \times x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t) \times x_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t) \times x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t) \times x_n(t) + b_1(t), \end{cases}$$

on pose la matrice A de coefficients (fonctions) $(a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$, et X le vecteur de coefficients $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$.

Exemple : Dans l'exercice 6, on doit résoudre $X' = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ +\omega & 0 \end{pmatrix} \cdot X$ dans $\mathbb{R}$. Ici, les coefficients sont constants et il n'y a pas de second membre.

Exemple : Le système $\begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t) + \mathrm{e}^t \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + z(t) \end{cases}$ est équivalent à l'équation matricielle à coefficients constants et avec second membre :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \exp \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème (Cauchy & Lipschitz) : Si I est un *intervalle*, et les fonctions $I \ni t \mapsto A(t)$ et $I \ni t \mapsto B(t)$ sont continues, si $t_0 \in I$ et si $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors il existe une unique solution sur I de l'équation matricielle $X'(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t)$ telle que $X(t_0) = X_0$ (condition initiale de l'équation différentielle).

On nomme $X'(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t)$ l'équation différentielle et $X(t_0) = X_0$ la condition initiale. Le problème est nommé un problème de Cauchy.

Bilan : Sous certaines conditions, tout système d'équations différentielles adjoint d'une condition initiale, il y a existence et unicité de la solution.

1.2 Principe de superposition.

Le théorème suivant est un corollaire du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème :

— **Avec second membre.** La solution générale de l'équation avec second membre est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. (L'ensemble des solutions d'une équation différentielle avec second membre est un espace affine.)

— **Sans second membre.** L'ensembles solution de l'équation sans second membre est un espace de vectoriel de dimension n, où n est le nombre d'équations différentielles (*i.e.*, la taille de la matrice A). *Autrement dit*, la solution générale de l'équation sans second membre est la superposition de n solutions linéairement indépendantes.

Preuve :

— On pose (E) une équation différentielle de la forme $X'(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t)$, où $A(t) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $X(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $B(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose de plus, (E_O) l'équation homogène associée : $X'(t) = A(t) \cdot X(t)$. Si X_1 et X_2 sont deux solutions de (E), alors $X_1 - X_2$ est solution de (E_O) car $X_1'(t) = A(t) \cdot X_1(t) + B(t)$ et $X_2'(t) = A(t) \cdot (X_1 - X_2)(t)$. Soit $X_0 = X_1 - X_2$, alors $X_1 = X_2 + X_0$ et X_2 est solution de (E) et X_0 est une solution de (E_O). Il reste à montrer qu'il existe une solution particulière. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, si $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto B(t)$ sont continues, alors il existe une solution de (E).

— Soit I un intervalle, et $A : I \ni t \mapsto A(t) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une application continue. Soit $t_0 \in I$. Soit, de plus, $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation (E_O). Montrons que $\dim \mathcal{S} = n$. On pose l'application

$$\Phi \ : \ \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & X(t_0) \end{array}.$$

Montrons que Φ est une application linéaire bijective. Par construction, Φ est linéaire. De plus, d'après le théorème de Cauchy & Lipschitz, il existe au moins une solution X qui vérifie la condition initiale $X(t_0) = X_0$, quel que soit $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. D'où, Φ est surjective. Également, toujours d'après le théorème de Cauchy & Lipschitz, cette solution est unique.

L'application Φ est surjective. On en déduit que Φ est linéaire et bijective. Ainsi, $\dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = n$.

1.3 Équations différentielles ≥ 1.

Une équation différentielle d'ordre n est de la forme

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t) \cdot x^{(n-1)}(t) + a_{n-2}(t) \cdot x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_2(t) \cdot x''(t) + a_1(t) \cdot x'(t) + a_0(t) \cdot x(t) + b(t).$$

Elle est équivalente à un système d'équations différentielles que l'on peut exprimer matriciellement comme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ x^{(n)}(t) \end{pmatrix}}_{X'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & \cdots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix}}_{A(t)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}}_{X(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}}_{B(t)}.$$

La matrice $A(t)$ est nommée la *matrice compagnon* de l'équation différentielle (E).[2]

Exemple : variation des deux constantes.

On résout sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : 1\, x''(t) + 4\, x'(t) + 4\, x(t) = \mathrm{e}^{-2t}/(1+t^2)$. On considère (E_O) l'équation homogène associé. [La solution générale de (E) est de la forme $x(t) = K\, \varphi_1(t) + L\, \varphi_2(t) + \psi(t)$, où les fonctions φ_1 et φ_2 sont des solutions de (E_O) linéairement indépendantes.] On cherche une solution de (E_O) de la forme $x(t) = \mathrm{e}^{rt}$:

$$(E_\mathrm{O}) \iff 1\, r^2 + 4\, r + 4 = 0 \iff (r+2)^2 = 0 \iff r = -2.$$

D'où, $\varphi_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{-2t}$ est une solution de (E_O). On fait varier la constante en posant $x(t) = k(t)\, \mathrm{e}^{-2t}$. Alors, $x'(t) = k'(t) \cdot \varphi_1(t) + k(t) \cdot \varphi_1'(t)$ et $x''(t) = 2 \cdot k'(t) \cdot \varphi_1'(t) + k''(t) \cdot \varphi_1(t) + k(t) \cdot \varphi_1''(t)$. D'où,

$$\begin{aligned} (E_\mathrm{O}) &\iff k(t) \cdot \big(\varphi''(t) + 4\varphi'(t) + 4\varphi(t)\big) + 4k'(t) \cdot \big(4\varphi_1(t) + 2\varphi_1'(t)\big) + k''(t) \cdot \varphi_1(t) = 0 \\ &\iff k''(t) = 0 \iff k'(t) = L \iff k(t) = Lt + K. \end{aligned}$$

[2] En lien avec la démonstration du théorème de Cayley & Hamilton.

Donc, x est une solution de $\mathbb{R}$ de (E_{O}) si, et seulement si, il existe deux réels K et L tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = (Lt + K) \cdot \mathrm{e}^{-2t}$. [Ainsi, on peut poser $\varphi_2 : t \mapsto t\mathrm{e}^{-2t}$. On a donc trouvé une base de l'espace vectoriel des solutions de (E_{O}).]

Pour résoudre (E), on fait varier les deux constantes en posant

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}}_{X(t)} = k(t) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}}_{\Phi_1(t)} + \ell(t) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} t \cdot \mathrm{e}^{-2t} \\ (1-2t)\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}}_{\Phi_2(t)}.$$

On cherche une solution de cette forme $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) & x'(t) \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$.

$$\begin{aligned}
(E) &\iff X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \cdot X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-2t}/(1+t^2) \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{matrix} k'(t)\,\Phi_{1(t)} + \ell'(t)\,\Phi_2(t) \\ \cancel{+k(t)\,\Phi_1'(t)} + \cancel{\ell'(t)\,\Phi_2(t)} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \left(\cancel{k(t)\,\Phi_1(t)} + \cancel{\ell(t)\,\Phi_2(t)}\right) + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-2t}/(1+t^2) \end{pmatrix} \\
&\iff k'(t)\,\Phi_1(t) + \ell'(t)\,\Phi_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-2t}/(1+t^2) \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} \mathrm{e}^{-2t}\,k'(t) + t\mathrm{e}^{-2t}\,\ell'(t) = 0 \\ -2\mathrm{e}^{-2t}\,k'(t) + (1-2t)\mathrm{e}^{-2t}\,\ell'(t) = \mathrm{e}^{-2t}/(1+t^2) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} k'(t) = -\frac{t}{1+t^2} \\ \ell'(t) = \frac{1}{1+t^2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} k(t) = -\frac{1}{2}\ln(1+t^2) + K \\ \ell(t) = \operatorname{Arctan} t + L \end{cases} \\
&\iff x(t) = (-\tfrac{1}{2}\ln(1+t^2) + K)\mathrm{e}^{2t} + (\operatorname{Arctan} t + L)t\mathrm{e}^{-2t}.
\end{aligned}$$

On en déduit que x est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) si, et seulement si, il existe deux réels K et L tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = K\,\underbrace{\mathrm{e}^{-2t}}_{\varphi_1(t)} + L\,\underbrace{t\mathrm{e}^{-2t}}_{\varphi_1(t)} + \underbrace{\left(t \operatorname{Arctan} t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right)\mathrm{e}^{-2t}}_{\psi(t)}.$$

Quel est l'intérêt de faire varier les *deux* constantes ? En faisant varier la constante k, on doit résoudre l'équation d'ordre deux, et on doit donc intégrer deux fois, ce qui peut être difficile. En faisant varier les deux constantes, on utilise une équation de 1er ordre, et on n'a qu'à intégrer une fois deux fonctions « simples. »

Le Wronskien

On suppose avoir une équation homogène $(E) : x''(t) = a(t)\, x'(t) + b(t)\, x(t)$ d'ordre 2. Elle est équivalente au système matriciel $X'(t) = A(t) \cdot X(t)$, où

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}.$$

En résolvant ce système de deux équations différentielles d'ordre 1, on trouve deux solutions $\Phi_1(t)$ et $\Phi_2(t)$. Ainsi, (E) est équivalent à $X(t) = K \cdot \Phi_1(t) + L \cdot \Phi_2(t)$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. D'où, (E) est équivalent à

$$x(t) = K \cdot \varphi_1(t) + L \cdot \varphi_2(t)$$

où les fonctions φ_1 et φ_2 sont libres, car Φ_1 et Φ_2 le sont. Cela signifie que si $\alpha\, \Phi_1 + \beta\, \Phi_2 = 0$ alors $\alpha = \beta = 0$. Cela signifie aussi que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad W(t) = \det(\Phi_1, \Phi_2) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2'(t) - \varphi_2(t) \cdot \varphi_1'(t) \neq 0.$$

Ce déterminant est appelé le *wronskien*. (Cadeau) La fonction W est dérivable car φ_1 et φ_2 sont de classe $\mathcal{C}^2$, et $W' = \varphi_1 \cdot \varphi_2''(t) - \varphi_2 \cdot \varphi_1''$. D'où, comme φ_1 et φ_2 sont solutions de l'équation différentielle (E), alors

$$W' = \varphi_1 \cdot (a \cdot \varphi_2 - b \cdot \varphi_2) - \varphi_2 \cdot (a \cdot \varphi_1' + b \cdot \varphi_2) = a \cdot (\varphi_1 \cdot \varphi_2' - \varphi_1' \cdot \varphi_2).$$

D'où, pour tout $t \in I$, $W'(t) = a(t) \cdot W(t)$. Or, on sait résoudre cette équation différentielle : il existe un réel K tel que, $\forall t \in I$, $W(t) = K \cdot \mathrm{e}^{A(t)}$, où A est une primitive de a. La solution peut être écrite comme

$$W(t) = K \cdot \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s}, \qquad \text{où } t_0 \in I.$$

En effet,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K\mathrm{e}^{A(t)} = K \cdot A'(t) \cdot \mathrm{e}^{A(t)} \overset{\Delta}{=} K \cdot a(t) \cdot \mathrm{e}^{A(t)} = a(t) \cdot \left(K \cdot \mathrm{e}^{a(t)}\right).$$

L'égalité Δ est vraie car $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s = a(t)$ par le théorème fondamental de l'analyse, comme la fonction a est continue.

2 Exemples

Résoudre l'équation de d'Alembert pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$(E): \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Montrer que $f(x,y) = a(x - vt) + b(x + vt) = a(\alpha) + b(\beta)$.

Soit le changement de variables $(\alpha, \beta) = (x - vt, x + vt)$, et $\gamma : (x,t) \mapsto (\alpha, \beta)$. Et, soit F une fonction de (α, β) telle que $f = F \circ \gamma$. En appliquant la règle de la chaîne, on trouve

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} \cdot \dfrac{\partial \alpha}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial \beta} \cdot \dfrac{\partial \beta}{\partial t} \\ \dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} \cdot \dfrac{\partial \alpha}{\partial t} + \dfrac{\partial F}{\partial \beta} \cdot \dfrac{\partial \beta}{\partial t} \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial F}{\partial \beta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial t} = -v \cdot \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} + v \cdot \dfrac{\partial F}{\partial \beta}. \end{cases}$$

En réappliquant la règle de la chaîne pour calculer la dérivée seconde de F par rapport à x, on trouve que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \beta}\right) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \beta}\right) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x},$$

d'où, en appliquant le théorème de Schwarz,

$$\frac{\partial f^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\, \partial \beta} + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}.$$

De même, on calcule la dérivée seconde de F par rapport à t, et on trouve que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^2}{\partial t^2} &= -v \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(-v \cdot \frac{\partial F}{\partial \alpha} + v \cdot \frac{\partial F}{\partial \beta}\right) + v \cdot \frac{\partial}{\partial \beta}\left(-v \cdot \frac{\partial F}{\partial \alpha} + v \cdot \frac{\partial F}{\partial \beta}\right) \\ &= v^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} - 2v^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\, \partial \beta} + v^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que

$$(E) \iff \frac{\partial F}{\partial \alpha\, \partial \beta} = 0 \iff \frac{\partial F}{\partial \beta} = u(\beta) \iff F(\alpha, \beta) = b(\beta) + a(\alpha).$$

Donc f est une solution de l'équation d'onde de d'Alembert si, et seulement si, il existe deux fonctions a et b de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$\forall x, \forall t, \qquad f(x,t) = a(x - vt) + b(x + vt).$$