Khôlle no 20

Exercice 1.

1. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, et pour tout $t \in]0,1]$, on a $|t^{2k} \ln t| \leqslant |\ln t| = -\ln t$. Et, l'intégrale $\int_0^1 |\ln t| \, \mathrm{d}t = -\int_0^1 \ln t \, \mathrm{d}t$ converge. D'où, l'intégrale $\int_0^1 |t^{2k} \ln t| \, \mathrm{d}t$ converge. On en déduit que l'intégrale I_k converge, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.
   Soit $x \in]0,1]$. On calcule
   $$\begin{aligned}\int_x^1 t^{2k} \ln t \, \mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1} \ln t\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^{2k+1}}{2k+1} \cdot \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t && \text{car ln et } t \mapsto t^{2k} \text{ sont } \mathscr{C}^1 \text{ par intégration par parties sur le segment } [x,1] \\ &= \frac{-x^{2k+1}}{2k+1} - \int_x^1 \frac{t^{2k}}{2k+1} \, \mathrm{d}t \\ &= -\frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \left[\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)^2}\right]_x^1 \\ &= -\frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)^2} \\ &\xrightarrow[x \to 0]{} -\frac{1}{(2k+1)^2}.\end{aligned}$$
   On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = -1/(2k+1)^2$.
2. La série de fonctions $\sum f_k$, où $f_k : t \mapsto t^{2k} \ln t$, converge simplement vers la fonction $t \mapsto \ln t/(1-t^2)$ sur $]0,1[$. Les fonctions f_k sont continues et intégrables :
   $$\int_0^1 |f_k(t)| \, \mathrm{d}t = -\int_0^1 t^{2k} \ln t \, \mathrm{d}t = -I_k.$$
   Et, la série $\sum(-I_k) = -\sum 1/(2k+1)^2$ converge car, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant 1/(2k+1)^2 \leqslant 1/k^2$ et la série $\sum 1/k^2$ converge. Ainsi, la fonction $g : t \mapsto \ln t/(1-t^2)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, donc $f = -g$ l'est aussi ; et,
   $$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1} \, \mathrm{d}t &= -\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 f_k(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-I_k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} && \text{par somme termes pairs/impairs pour la série } \textstyle\sum 1/k^2 \\ &= \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{\pi^2}{6}\left(1 - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

Exercice 2.

1. La fonction ln est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ donc deux fois dérivable sur cet intervalle et, pour tout $x > 0$, $\ln'' x = -1/x^2 < 0$. La fonction ln est donc concave sur $]0,+\infty[$. Soient a, b et c trois réels strictement positifs. Par concavité de la fonction ln, on a $\ln\big((a+b+c)/3\big) \leqslant (\ln a + \ln b + \ln c)/3$. D'où, $\ln\big((a+b+c)/3\big) \leqslant \ln(abc)/3 = \ln \sqrt[3]{abc}$. Par croissance de ln, on en déduit que
   $$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$

2. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_\star^+)^2$, donc différentiable sur $(\mathbb{R}_\star^+)^2$. On calcule $\nabla f(x,y) = \big(1 - {}^1\!/_{yx^2}, 1 - {}^1\!/_{xy^2}\big)$. On procède par analyse-synthèse.

   Analyse. On suppose que f atteint un extremum local en $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2$. Ainsi, $\nabla f(x,y) = 0$. D'où, $1 = 1/yx^2$ et $1 = 1/xy^2$. On en déduit que $yx^2 = xy^2$, d'où $x = y$. Or, $1 = 1/yx^2 = 1/x^3$, d'où $x = y = 1$. Ainsi, si un extremum est atteint, il sera en $(1,1)$.

   Synthèse. Montrons que f atteint un minimum en $(1,1)$. Montrons ainsi que $f(x,y) \geqslant f(1,1) = 3$ pour tout vecteur $(x,y) \in (\mathbb{R}_\star^+)^2$.

$$f(x,y) = x + y + \frac{1}{xy} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{xy}{xy}} = 3 = f(1,1).$$

   On en déduit que f atteint un minimum global en $(1,1)$, et n'a pas de maximum (local ou global) et n'a pas d'autres minima (locaux ou globaux).

Exercice 3.

1. L'univers Ω est l'ensemble des $(n+1)$-uplets d'éléments de $[\![1,n]\!]$: $\Omega = [\![1,n]\!]^{n+1}$. Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. L'événement $(X = k)$ n'est pas vide car le $(n+1)$-uplet

$$u_k = (1, 2, \dots, k-2, 1, 1, \dots, 1)$$

   est un élément de $(X = k)$. D'où, par croissance de la probabilité, $P(\{u_k\}) \leqslant P(X = k)$, car $\{u_k\} \subset (X = k)$. Or, par équiprobabilité, $P(\{u_k\}) = 1/\operatorname{Card}\Omega = 1/n^{n+1} > 0$. On en déduit que $P(X = k) > 0$.
2. Montrons $P(X > k) \neq 0$. On a $(X > k) = (X \geqslant k+1)$, d'où $P(X > k) = P(X \geqslant k+1) > 0$ car $k+1 \in [\![2,n]\!]$. On sait que $(X > k+1) \cap (X > k) = (X > k+1)$ car $(X > k) \subset (X > k+1)$. On a montré précédemment que $P(X > k) \neq 0$. On en déduit, par définition des probabilités conditionnelles,

$$P(X > k+1) = P\big((X > k+1) \cap (X > k)\big) = P(X > k+1 \mid X > k) \cdot P(X > k).$$

3. Au $(k+1)$-ième lancer, on choisit une boule parmi n avec équiprobabilité. Pour que $X > k+1$ sachant que $X > k$, il faut tirer une boule non tirée, il y en a $n-k$. D'où, $P(X > k+1 \mid X > k) = (n-k)/n$.
4. Montrons, par récurrence sur k, la propriété $\mathscr{P}(k)$: « $P(X > k) = n!/(n^k \cdot (n-k)!)$. »
   - Pour $k = 0$, on a $P(X > 0) = 1 = n!/(n^0 \cdot n!)$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - On suppose $\mathscr{P}(k)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est aussi vraie. En appliquant l'égalité des probabilités trouvées à la question précédente, qui est valide comme $k \in [\![1, n-1]\!]$, on calcule

$$\begin{aligned} P(X > k+1) &= P(X > k+1 \mid X > k) \cdot P(X > k) \\ &= \frac{n-k}{n} \cdot \frac{n!}{n^k \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n!}{n^{k+1} \cdot (n-k+1)!}. \end{aligned}$$

     Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   On en déduit, par récurrence, que $P(X > k) = n!/\big(n^k \cdot (n-k)!\big)$, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. De plus, pour $k = n$, on a $P(X > n) = 0$ car il n'y a que n boules dans l'urne.