Chapitre 6

Preuves

Hugo Salou MPI*

Dernière mise à jour le 31 mars 2023

Table des matières

L'objectif de ce chapitre, sera de "critiquer" le travail en logique fait précédement, puis d'apporter une solution à ce problème ; on finira par un peu de HORS-PROGRAMME.

0 Motivation

0.1 Tables de vérité

Pour l'instant, pour montrer $\Gamma \models G$ ou $G \equiv H$, nous devons encore utiliser une table de vérité. Par exemple, montrons

$$\underbrace{(p \to q) \land (q \to r)}_{G} \models \overbrace{p \to r}^{H}.$$

On réalise la table de vérité ci-dessous.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	G	H	
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	✓
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	✓
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	✓

À faire : Finir table de vérité

TABLE 1 – Table de vérité pour montrer $(p \to q) \land (q \to r) \models p \to r$

0.2 Équations

Supposons $[\![G]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$. Montrons que $[\![H]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$. On a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V} &= [\![G]\!]^\rho \\ &= [\![(p \to q) \land (q \to r)]\!]^\rho \\ &\;\vdots \\ &= \overline{[\![p]\!]^\rho} \cdot \overline{[\![q]\!]^\rho} + \overline{[\![p]\!]^\rho} \cdot \overline{[\![q]\!]^\rho} \cdot [\![r]\!]^\rho + [\![q]\!]^\rho \cdot [\![r]\!]^\rho \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [\![H]\!]^\rho &= [\![p \to r]\!]^\rho \\ &\;\vdots \\ &= \overline{[\![p]\!]^\rho} \cdot \overline{[\![q]\!]^\rho} + \overline{[\![p]\!]^\rho} \cdot \overline{[\![q]\!]^\rho} \\ &\quad + [\![r]\!]^\rho \cdot \overline{[\![q]\!]^\rho} \cdot \left([\![p]\!]^\rho + \overline{[\![p]\!]^\rho}\right) \\ &\quad + [\![r]\!]^\rho + ? \end{aligned}$$

À faire : finir le calcul

0.3 Raisonnement mathématiques

Supposons $(p \to q) \land (q \to r)$. Montrons que $p \to r$.

$\hookrightarrow$ Supposons donc p. Montrons r

- $\hookrightarrow$ Montrons q.
  - $\hookrightarrow$ Montrons p, qui est une hypothèse.
  - $\hookrightarrow$ Montrons $p \to q$, qui est aussi une hypothèse.
- — Montrons $q \to r$, ce qui est vrai par hypothèse.

On reconnaît un arbre.

1 La déduction naturelle en logique propositionnelle

1.1 Séquents

Objectifs de preuves.

Hypothèses courantes.

Définition (Séquent) **:** Un *séquent* est la donnée
- — d'un ensemble d'hypothèses Γ ;
- — d'un objectif G.

On le typographie $\Gamma \vdash G$.

1.2 Preuves

Définition : On appelle *règle de construction de preuves* une règle de la forme :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \qquad \Gamma_2 \vdash \varphi_2 \qquad \Gamma_3 \vdash \varphi_3 \qquad \cdots \qquad \Gamma_n \vdash \varphi_n}{\Gamma \vdash \varphi}\ \text{nom.}$$

On appelle $\Gamma_1 \vdash \varphi_1, \Gamma_2 \vdash \varphi_2, \Gamma_3 \vdash \varphi_3, \ldots, \Gamma_n \vdash \varphi_n$ les *prémisses*, et $\Gamma \vdash \varphi$ la *conclusion*.

Si $n = 0$, on dit que c'est une *règle de base*.

Remarque (Notation) **:**
Γ est un ensemble. Alors, l'ensemble $\Gamma \cup \{\psi\}$ est noté Γ, ψ.

Définition (Arbre de preuve) **:** On appelle *arbre de preuve* un arbre étiqueté par des séquents, et dont les liens père–fils sont des liens autorisés par les règles du système de preuves. Un *système de preuves* étant un ensemble de règles.

Définition (Être prouvable) **:** On dit d'un séquent $\Gamma \vdash G$ qu'il est *prouvable* dans un système de preuve dès lors qu'il existe une preuve dont la racine est étiquetée par $\Gamma \vdash G$.

Rappel (objectifs) :
On veut trouver d'autres moyens de montrer $F \models G$. On veut que, si $F \vdash G$, alors $F \models G$ (correction). Mais, on veut aussi que, si $F \models G$, alors $G \vdash F$ (complétude). On veut aussi qu'il existe un algorithme qui vérifie $F \models G$ (décidabilité).

Définition (Correction) **:** On dit d'un système de preuve qu'il est *correct* dès lors que : pour tout Γ, pour tout G, si $\Gamma \vdash G$ admet une preuve, alors $\Gamma \models G$.

Définition (Complétude) **:** Un système de preuves est *complet* dès lors que, si $\Gamma \models G$, alors il existe un preuve de $\Gamma \vdash G$.

1.3 Déduction naturelle

On définit les différentes règles d'introduction et d'élimination suivantes.

Symbole	Règle d'introduction	Règle d'élimination
$\top$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top\mathrm{i}$	
$\bot$		$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash G}\ \bot\mathrm{e}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma, G \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg G}\ \neg\mathrm{i}$	$\dfrac{\Gamma \vdash G \qquad \Gamma \vdash \neg G}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg\mathrm{e}$
$\to$	$\dfrac{\Gamma, G \vdash H}{\Gamma \vdash G \to H}\ {\to}\mathrm{i}$	$\dfrac{\Gamma \vdash H \to G \qquad \Gamma \vdash H}{\Gamma \vdash G}\ {\to}\mathrm{e}$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash G \qquad \Gamma \vdash H}{\Gamma \vdash G \wedge H}\ \wedge\mathrm{i}$	$\dfrac{\Gamma \vdash G \wedge H}{\Gamma \vdash G}\ \wedge\mathrm{e,g} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash G \wedge H}{\Gamma \vdash H}\ \wedge\mathrm{e,d}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash G \vee H}\ \vee\mathrm{i,g} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash H}{\Gamma \vdash G \vee H}\ \vee\mathrm{i,d}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash G \qquad \Gamma, B \vdash G}{\Gamma \vdash G}\ \vee\mathrm{e}$

$$\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\ \mathrm{Ax}$$

Table 2 – Règles d'introduction et d'élimination

À ce stade, nous avons définis le système de preuves que l'on appellera *déduction naturelle intuitionniste*. Dans le chapitre 0, on a donné une notion de vérité. On a maintenant donné une notion de preuve. On souhaite maintenant montrer le séquent $\varnothing \vdash p \vee \neg p$, nommé *tiers exclu* : la variable p est, soit vrai, soit fausse. Avec le système de preuve actuel, on ne peut pas le montrer. Mais, on a bien $\varnothing \models p \vee \neg p$, car pour tout environnement propositionnel ρ, $[\![p \vee \neg p]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$. D'où la remarque suivante.

Remarque :
Ce système de preuve n'est pas complet vis à vis de la sémantique de la logique propositionnelle : on ne peut pas prouver le séquent $\varnothing \vdash p \vee \neg p$ malgré son caractère tautologique.

Ainsi, la *déduction naturelle classique* est le système de preuve obtenue en ajoutant la règle suivante :

$$\frac{}{\Gamma \vdash G \vee \neg G}\ \text{TE}.$$

La déduction naturelle classique est un système de preuve complet.

Théorème : La déduction naturelle classique (respectivement intuitionniste) est correcte.

■

Corollaire : Pour prouver $\Gamma \models G$, il suffit de construire un arbre de preuve de $\Gamma \vdash G$.

Remarque :
On aurait pu définir la déduction naturelle classique en ajoutant une des deux règles suivantes plutôt que le tiers exclus :

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg G}{\Gamma \vdash G}\ \neg\neg\text{e} \qquad \frac{\Gamma, \neg G \vdash \bot}{\Gamma \vdash G}\ \text{Abs}^{1}.$$

2 La logique du premier ordre

On veut rajouter à la déduction naturelle des quantificateurs, tels que $\forall$ ou $\exists$. On considère la formule

$$G = \forall x,\ \Big(\big((x > 0) \wedge (\exists y,\ x = y + 1)\big) \vee (x = 0)\Big).$$

Cette formule peut être représentée sous forme d'arbre syntaxique, comme celui ci-dessous.

1. Abs correspond à absurde

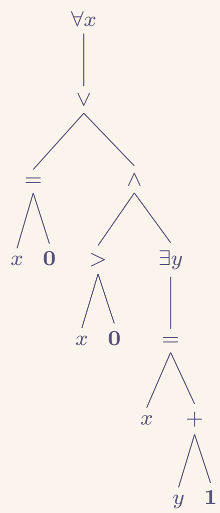

FIGURE 1 – Arbre syntaxique de la formule $G = \forall x,\ \big(((x > 0) \wedge (\exists y,\ x = y + 1)) \vee (x = 0)\big)$

2.1 Syntaxe de la logique du premier ordre

Définition : On appelle *signature du premier ordre* la donnée de deux ensembles $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$.[2] Ces symboles viennent avec une notion d'arité

$$\mathfrak{a} : \mathcal{S} \cup \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{N}.$$

On appelle l'ensemble des *constantes* la sous-partie des éléments c de $\mathcal{S}$ telle que $\mathfrak{a}(c) = 0$. Les autres symboles, non constantes, sont appelés *fonctions*. On appelle $\mathcal{P}$ l'ensemble des prédicats. On a toujours $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \varnothing$.

Définition : Étant donné un ensemble $\mathcal{S}$ de symboles de fonctions et de constantes, et un ensemble $\mathcal{V}$ de variables, on définit inductivement l'ensemble des *termes* sur $\mathcal{S}$ et $\mathcal{V}$, typographié $\mathcal{T}(\mathcal{S}, \mathcal{V})$, par

— $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{S}, \mathcal{V})$;

— si $f \in \mathcal{S}$, et $t_1, t_2, \dots, t_{\mathfrak{a}(f)} \in \big(\mathcal{T}(\mathcal{S}, \mathcal{V})\big)^{\mathfrak{a}(f)}$, alors $f\big(t_1, t_2, \dots, f_{\mathfrak{a}(f)}\big) \in \mathcal{T}(\mathcal{S}, \mathcal{V})$.

Définition (Logique du premier ordre) **:** Étant donné une signature du premier ordre $(\mathcal{S}, \mathcal{P})$, et un ensemble $\mathcal{V}$ de variables, on définit l'ensemble des formules des *formules de la logique du premier ordre* typographié $\mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{V})$, par induction

— si $P \in \mathcal{P}$, et $t_1, \dots, t_{\mathfrak{a}(P)} \in \big(\mathcal{T}(\mathcal{S}, \mathcal{V})\big)^{\mathfrak{a}(P)}$, alors $P\big(t_1, \dots, t_{\mathfrak{a}(P)}\big) \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{V})$;

— $\bot, \top \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{V})$;

— si $(G, H) \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{V})^2$, alors

2. $\mathcal{S}$ est l'ensemble des symboles utilisés pour construire des termes ; $\mathcal{P}$ est l'ensemble des symboles utilisés pour passer du monde des termes pour passer au monde des formules.

2. il s'agit du '$-$' dans l'expression $-x$.

$$G \land H \in \mathcal{F}(\mathcal{S},\mathcal{P},\mathcal{V}), \qquad G \to H \in \mathcal{F}(\mathcal{S},\mathcal{P},\mathcal{V}), \qquad \neg G \in \mathcal{F}(\mathcal{S},\mathcal{P},\mathcal{V})\,;$$
$$G \lor H \in \mathcal{F}(\mathcal{S},\mathcal{P},\mathcal{V}), \qquad G \leftrightarrow H \in \mathcal{F}(\mathcal{S},\mathcal{P},\mathcal{V}),$$

— Si $x \in \mathcal{V}$ et $G \in \mathcal{F}(\mathcal{S},\mathcal{P},\mathcal{V})$, alors

$$(\forall x,\ G) \in \mathcal{F}(\mathcal{S},\mathcal{P},\mathcal{V}) \qquad (\exists x,\ G) \in \mathcal{F}(\mathcal{S},\mathcal{P},\mathcal{V}).$$

On note un symbole $+$ avec son arité $\mathfrak{a}(+) = 2$ comme $+(2)$.

Codons le en OCaml, comme montré ci-dessous.

```
type symbole_arite = string * int

type signature = {
  symbole_terme: symbole_arite list;
  symbole_predicat: symbole_arite list
}

type var = string

type terme =
  | V of var
  | T of symbole_arite * (terme list)

(* Quelques exemples *)

let ex0 = T(("0", 0), []);
let ex1 = T(("1", 0), []);
let ex2 =
  T(("+", 2), [
    V("x"),
    T(("-", 1), [
      T(("+", 2), [
        V("z"),
        T(("0", 0), [])
      ])
    ])
  ])

(* Definissons la logique du 1er ordre *)

type po_logique =
  | Pred    of symbole_arite * (terme list)
  | Top | Bottom
  | And     of po_logique * po_logique
  | Or      of po_logique * po_logique
  | Imp     of po_logique * po_logique
  | Equiv   of po_logique * po_logique
  | Not     of po_logique
  | Forall  of var * po_logique
  | Exists  of var * po_logique
```

Code 1 – Définition des formules de premier ordre en OCaml

On définit, dans la suite de cette section, l'introduction et l'élimination de $\forall$ et $\exists$. Mais, nous devons réaliser des *substitutions*, et c'est ce que nous allons faire dans le reste de cette sous-section.

Définition : On définit vars inductivement sur $\mathcal{T}(\mathcal{S},\mathcal{V})$ par :

— si $x \in \mathcal{V}$, $\mathrm{vars}(x) = \{x\}$;

— $\mathrm{vars}\big(f(t_1,\ldots,t_n)\big) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{vars}(t_i)$.

Définition : On définit inductivement deux fonctions

$$\mathsf{FV} : \mathcal{F}(\mathcal{S},\mathcal{P},\mathcal{V}) \longrightarrow \wp(\mathcal{V})\,^{3} \qquad \mathsf{BV} : \mathcal{F}(\mathcal{S},\mathcal{P},\mathcal{V}) \longrightarrow \wp(\mathcal{V})\,^{4}$$

par

- $\mathsf{FV}(\top) = \varnothing$,
- $\mathsf{FV}(\bot) = \varnothing$,
- $\mathsf{FV}(G \odot H) = \mathsf{FV}(G) \cup \mathsf{FV}(H)$ avec $\odot \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,
- $\mathsf{FV}(P(t_1, \dots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{vars}(t_i)$,
- $\mathsf{FV}(\neg G) = \mathsf{FV}(G)$,
- $\mathsf{FV}(\forall x,\ G) = \mathsf{FV}(G) \setminus \{x\}$,
- $\mathsf{FV}(\exists x,\ G) = \mathsf{FV}(G) \setminus \{x\}$,

et

- $\mathsf{BV}(\top) = \varnothing$,
- $\mathsf{BV}(\bot) = \varnothing$,
- $\mathsf{BV}(P(t_1, \dots, t_n)) = \varnothing$,
- $\mathsf{BV}(\neg G) = \mathsf{BV}(G)$,
- $\mathsf{BV}(G \odot H) = \mathsf{BV}(G) \cup \mathsf{BV}(H)$ avec $\odot \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,
- $\mathsf{BV}(\forall x,\ G) = \mathsf{BV}(G) \cup \{x\}$,
- $\mathsf{BV}(\exists x,\ G) = \mathsf{BV}(G) \cup \{x\}$,

Définition (α-renommage) **:** On appelle α-*renommage* l'opération consistant à renommer les occurrences liées des variables dans une formule.

2.2 Substitution

Définition (Substitution) **:** Une *substitution* est une fonction de $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{T}(\mathcal{S},\mathcal{V})$ qui est l'identité partout, sauf sur un nombre fini de variables que l'on appelle *clé* de cette substitution.

Définition (Application d'une substitution à un terme) **:** Étant donné une substitution σ, on définit inductivement la fonction

$$\begin{aligned} \cdot\,[\sigma] : \mathcal{T}(\Sigma,\mathcal{V}) &\longrightarrow \mathcal{T}(\mathcal{S},\mathcal{V}) \\ t &\longmapsto t[\sigma] \end{aligned}$$

par

- $x[\sigma] = \sigma(x)$ avec $x \in \mathcal{V}$;
- $\big(f(t_1, \dots, t_n)\big)[\sigma] = f\big(t_1[\sigma], \dots, t_n[\sigma]\big)$.

Définition (Application d'une substitution à une formule) **:** Étant donné une substi-

4. FV : *free variable*, variable libre
4. BV : *bound variable*, variable liée

tution σ, on définit inductivement l'application de la substitution σ à une formule par

- $\top[\sigma] = \top$;
- $\bot[\sigma] = \bot$;
- $P(t_1, \ldots, t_n)[\sigma] = P\big(t_1[\sigma], \ldots, t_n[\sigma]\big)$;
- $(G \odot H)[\sigma] = G[\sigma] \odot H[\sigma]$ avec $\odot \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$;
- $(\neg G)[\sigma] = \neg\big(G[\sigma]\big)$;
- $(\forall x,\ G)[\sigma] = \forall x,\ G\big[\sigma[x \mapsto x]\big]$
- $(\exists x,\ G)[\sigma] = \exists x,\ G\big[\sigma[x \mapsto x]\big]$

⚠ On s'assurera que les variables apparaissent dans l'espace image de la substitution σ n'intersecte pas avec les variables liées de G lors du calcul de $G[\sigma]$. Ce peut-être assuré au moyen du α-renommage.

2.3 Extension au premier ordre de la déduction naturelle

On ajoute les règles suivantes.

Symbole	Règle d'introduction	Règle d'élimination
$\forall$	$\dfrac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash \forall x,\ G}\ \forall\mathsf{i}$ $x \notin \mathsf{FV}(\Gamma)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \forall x,\ G}{\Gamma \vdash G\big[(x \mapsto t)\big]}\ \forall\mathsf{e}$ $\mathrm{vars}(t) \cap \mathsf{BV}(G) = \varnothing$
$\exists$	$\dfrac{\Gamma \vdash G\big[(x \mapsto t)\big]}{\Gamma \vdash \exists x,\ G}\ \exists\mathsf{i}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \exists x,\ H \qquad \Gamma, H \vdash G}{\Gamma \vdash G}\ \exists\mathsf{e}$ $x \notin \mathsf{FV}(\Gamma) \cup \mathsf{FV}(G)$

Table 3 – Extension au premier ordre de la déduction naturelle

Théorème : L'ajout des quatre règles précédentes à la déduction naturelle, intuitionniste ou classique, maintient sa correction. $\square$

Remarque (Hors-Programme) :
L'ajout de ces règles maintient également sa complétude vis-à-vis de la logique classique.

2.4 Règles dérivées

On définit de manière informelle la notion de *règle dérivée* comme des règles que l'on peut obtenir comme combinaison des règles déjà existantes.

Remarque :
Si $\Gamma \vdash G$ est prouvable, et si $\Gamma \subseteq \Gamma'$, alors $\Gamma' \vdash G$ est prouvable. On ajoute donc parfois une règle dit d'*affaiblissement*, définie comme

$$\frac{\Gamma' \vdash G}{\Gamma \vdash G}\ \text{Aff} \qquad \Gamma' \subseteq \Gamma.$$

2.5 Sémantique

On considère la formule défini par l'arbre de syntaxe suivant. On a $\mathscr{P} = \{P(1), Q(1)\}$, $\mathscr{S} = \{\oplus(2), \tilde{0}(0), \tilde{1}(0), \ominus(3)\}$ et $\mathscr{V} \supseteq \{x, y, z\}$.

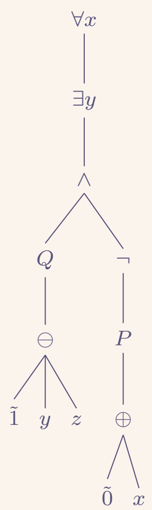

Figure 2 – Arbre de syntaxe exemple

Pour interpréter une formule de la logique du premier ordre, on doit définir le "monde" des variables, leur valeur, la valeur d'une constante et d'une fonction, la valeur des prédicats, et le sens des quantificateurs.

Définition (Domaine) **:** On appelle *domaine d'interprétation* des termes un ensemble non vide $\mathbf{M}$.

Dans toute la suite de cette section, on fixe les ensembles $\mathscr{S}$, $\mathscr{V}$ et $\mathscr{P}$.

Définition (Environnement de variables) **:** On appelle *environnement de variable* sur $V \subseteq \mathscr{V}$ une fonction

$$\mu : V \longrightarrow \mathbf{M}.$$

Définition (Structure d'interprétation) **:** On appelle *structure d'interprétation* la donnée de

- un domaine $\mathbf{M}$;
- une fonction $f^M : \mathbf{M}^{\mathfrak{a}(f)} \longrightarrow \mathbf{M}$ pour chaque symbole $f \in \mathscr{S}$;
- une fonction $P^M : \mathbf{M}^{\mathfrak{a}(P)} \longrightarrow \mathbb{B}$ pour chaque symbole $P \in \mathscr{P}$.

On typographie une telle structure M.

Définition : On définit la fonction `eval` prenant en argument

- un terme t,
- une structure d'interprétation,
- un environnement sur au moins les variables de t,

et s'évaluant dans $\mathbf{M}$, telle que $\texttt{eval}(x, M, \mu) = \mu(x)$ avec $x \in \mathscr{V}$, et que

$$\begin{aligned} &\texttt{eval}\big(f(t_1, t_2, \ldots, t_{\mathfrak{a}(f)}), M, \mu\big) \\ =&f^M\big(\texttt{eval}(t_1, M, \mu), \texttt{eval}(t_2, M, \mu), \ldots, \texttt{eval}(t_{\mathfrak{a}(f)}, M, \mu)\big) \end{aligned}$$

Définition (Interprétation des formules) **:** On définit inductivement $[\![\cdot]\!]^{M,\mu}$ comme

- $[\![\top]\!]^{M,\mu} = \boldsymbol{V}$;
- $[\![\bot]\!]^{M,\mu} = \boldsymbol{F}$;
- $[\![\neg G]\!]^{M,\mu} = \overline{[\![G]\!]^{M,\mu}}$;
- $[\![G \wedge H]\!]^{M,\mu} = [\![G]\!]^{M,\mu} \cdot [\![H]\!]^{M,\mu}$;
- $[\![G \vee H]\!]^{M,\mu} = [\![G]\!]^{M,\mu} + [\![H]\!]^{M,\mu}$;
- $[\![G \to H]\!]^{M,\mu} = \overline{[\![G]\!]^{M,\mu}} + [\![H]\!]^{M,\mu}$;
- $[\![G \leftrightarrow H]\!]^{M,\mu} = \Big(\overline{[\![G]\!]^{M,\mu}} + [\![H]\!]^{M,\mu}\Big) \cdot \Big(\overline{[\![H]\!]^{M,\mu}} + [\![G]\!]^{M,\mu}\Big)$;
- $\big[\!\big[P(t_1, \ldots, t_{\mathfrak{a}(P)})\big]\!\big]^{M,\mu} = P^M\big(\texttt{eval}(t_1, M, \mu), \ldots, \texttt{eval}(t_{\mathfrak{a}(P)}, M, \mu)\big)$;
- $[\![\exists x,\ G]\!]^{M,\mu} = \sum_{v_x \in \mathbf{M}} [\![G]\!]^{M,\mu[x \mapsto v_x]}$;

— $[\![\forall x,\ G]\!]^{M,\mu} = \underset{v_x \in \mathbf{M}}{\bullet} [\![G]\!]^{M,\mu[x \mapsto v_x]}$,

où on définit $+\mathscr{B} = \boldsymbol{V} \iff \boldsymbol{V} \in \mathscr{B}$, et $\bullet\ \mathscr{B} = \boldsymbol{F} \iff \boldsymbol{F} \in \mathscr{B}$ avec $\mathscr{B} \subseteq \{\boldsymbol{V}, \boldsymbol{F}\}$.

Définition : Une formule G de la logique du premier ordre est dite *satisfiable* dès lors qu'il existe une structure M, et un environnement de variables μ tel que $[\![G]\!]^{M,\mu} = \boldsymbol{V}$.

Une structure M est dit *modèle* de G dès lors que, pour tout environnement de variables μ, on a $[\![G]\!]^{M,\mu} = \boldsymbol{V}$.

Une formule G de la logique du premier ordre est dite *valide* dès lors que pour toute structure M, et tout environnement de variables μ, on a $[\![G]\!]^{M,\mu} = \boldsymbol{V}$.

Étant donné deux formules G et H, on dit que H est *conséquence sémantique* de G dès lors que, pour toute structure M et environnement de variables μ, si $[\![G]\!]^{M,\mu} = \boldsymbol{V}$, alors $[\![H]\!]^{M,\mu} = \boldsymbol{V}$. On le note $G \models H$.

On dit que deux formules G et H sont *équivalentes* dès lors que, $G \models H$ et $H \models G$. On le note $G \equiv H$.

Remarque :
— Une formule est dit *close* dès lors que $\mathsf{FV}(H) = \varnothing$.
— Une formule de ma forme $P(t_1, t_2, \ldots, t_{\mathfrak{a}(P)})$ est appelée *formule atomique* ou *prédicat atomique*.
— Si $\mathsf{FV}(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, la formule $\forall x_1, \ldots, \forall x_n,\ G$ est appelée *cloture universelle* de G. La formule $\exists x_1, \ldots, \exists x_n,\ G$ est appelée *cloture existentielle* de G.

3 Synthèse du chapitre

Symbole	Règle d'introduction	Règle d'élimination
$\top$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top\mathrm{i}$	
$\bot$		$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash G}\ \bot\mathrm{e}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma, G \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg G}\ \neg\mathrm{i}$	$\dfrac{\Gamma \vdash G \qquad \Gamma \vdash \neg G}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg\mathrm{e}$
$\rightarrow$	$\dfrac{\Gamma, G \vdash H}{\Gamma \vdash G \rightarrow H}\ {\rightarrow}\mathrm{i}$	$\dfrac{\Gamma \vdash H \rightarrow G \qquad \Gamma \vdash H}{\Gamma \vdash G}\ {\rightarrow}\mathrm{e}$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash G \qquad \Gamma \vdash H}{\Gamma \vdash G \wedge H}\ \wedge\mathrm{i}$	$\dfrac{\Gamma \vdash G \wedge H}{\Gamma \vdash G}\ \wedge\mathrm{e,g} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash G \wedge H}{\Gamma \vdash H}\ \wedge\mathrm{e,d}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash G \vee H}\ \vee\mathrm{i,g} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash H}{\Gamma \vdash G \vee H}\ \vee\mathrm{i,d}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash G \qquad \Gamma, B \vdash G}{\Gamma \vdash G}\ \vee\mathrm{e}$
$\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\ \mathrm{Ax}$		

Table 4 – Règles d'introduction et d'élimination

$\dfrac{}{\Gamma \vdash G \vee \neg G}\ \mathrm{TE}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg G}{\Gamma \vdash G}\ \neg\neg\mathrm{e}$	$\dfrac{\Gamma, \neg G \vdash \bot}{\Gamma \vdash G}\ \mathrm{Abs}$

Table 5 – Déduction naturelle classique

Symbole	Règle d'introduction	Règle d'élimination
$\forall$	$\dfrac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash \forall x,\ G}\ \forall\mathrm{i}$ $x \notin \mathsf{FV}(\Gamma)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \forall x,\ G}{\Gamma \vdash G\big[(x \mapsto t)\big]}\ \forall\mathrm{e}$ $\mathrm{vars}(t) \cap \mathsf{BV}(G) = \varnothing$
$\exists$	$\dfrac{\Gamma \vdash G\big[(x \mapsto t)\big]}{\Gamma \vdash \exists x,\ G}\ \exists\mathrm{i}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \exists x,\ H \qquad \Gamma, H \vdash G}{\Gamma \vdash G}\ \exists\mathrm{e}$ $x \notin \mathsf{FV}(\Gamma) \cup \mathsf{FV}(G)$

Table 6 – Extension au premier ordre de la déduction naturelle