

Td TS 1

Signaux périodique rappel

Hugo SALOU MPI*

Dernière mise à jour le 15 septembre 2022

Exercice 2

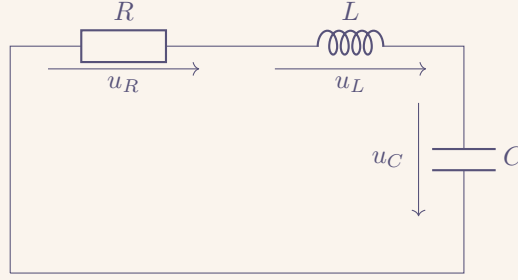


FIGURE 1 – Circuit électrique de l'exercice 2

1.

$$\begin{aligned}
 u_C &= -u_L - u_R \\
 &= -L \frac{di}{dt} - Ri \\
 &= -LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} - RC \frac{du_C}{dt} \\
 \text{i.e. } \ddot{u}_C + \frac{R}{L} \dot{u}_C + \frac{1}{LC} u_C &= 0.
 \end{aligned}$$

2. On a

$$\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = 0$$

d'où

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

On sait que la solution est de la forme

$$u(t) = e^{rt} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$$

où $r > 0$ et $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$.

3. On a, pour 10 périodes, $10T_p = 300 \cdot 10^{-6}$ s.
Or, d'après l'approximation des grands facteurs de qualité, on a

$$T_0 \cong T_p = 30 \mu\text{s}.$$

Comme $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, on a $\omega = 2,1 \times 10^5$ rad/s.

À l'aide de la méthode de la tangente à l'origine, on obtient $\tau \cong 60 \mu\text{s}$ et, avec l'approximation des grands facteurs de qualité, on obtient également $Q \cong 8$.

De ces deux résultats, on en déduit que

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} \doteq 2,3 \times 10^{-3} \text{ H}$$

et

$$R = \frac{\omega_0 L}{Q} \doteq 60 \Omega.$$

Exercice 4

On a

$$Z_1 = r + jL\omega \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega}.$$

1. On a

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_{AB} &= \underline{U}_{Z_1} + \underline{U}_{R_1} \\
 \underline{U}_{Z_1} &= \frac{Z_1}{R_2 + Z_1} \underline{e} \\
 \underline{U}_{R_1} &= \frac{R_1}{R_1 + Z_2} \underline{e}.
 \end{aligned}$$

D'où,

$$\underline{U}_{AB} = \left(\frac{Z_1}{R_2 + Z_1} - \frac{R_1}{R_1 + Z_2} \right) \underline{e}.$$

2. Comme la résistance du voltmètre est infinie,

on a $\underline{U}_{AB} = 0$ et donc,

$$\begin{aligned}
 \frac{Z_1}{R_2 + Z_1} &= \frac{R_1}{R_1 + Z_2} \implies Z_1(1 + Z_2) = R_1(R_2 + Z_1) \\
 &\implies \boxed{Z_1 Z_2 = R_1 R_2} \\
 &\quad \text{Équilibre du Pont de Mesure} \\
 &\implies Z_1 = \frac{R_1 R_2}{Z_2}.
 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$r + jL\omega = \frac{R_1 R_2}{R} (1 + jRC\omega)$$

et donc

$$\begin{cases} r = \frac{R_1 R_2}{R} \\ L = R_1 R_2 C. \end{cases}$$

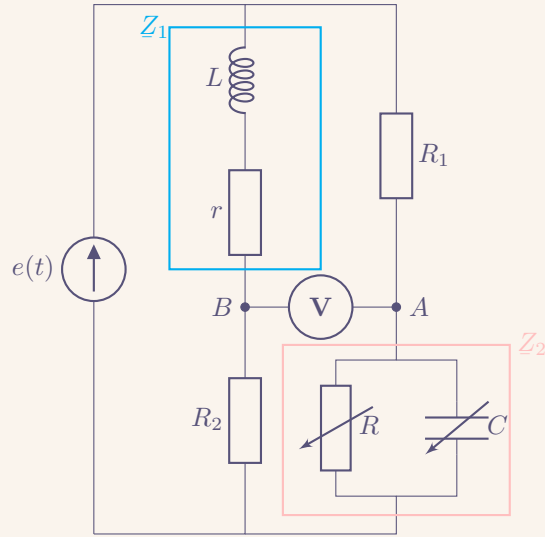


FIGURE 2 – Circuit électrique de l'exercice 4

Exercice 5

Le circuit étudié est un convertisseur courant-tension. car $\varepsilon = 0$ par hypothèse.

Or, $i_- = i_+ = 0$, d'où $i_R = I_p$ d'où

$$v_s = -RI_p.$$

$$\begin{aligned} \text{(LM)} : \quad & v_s + u_R + \varepsilon = 0 \\ \implies & v_s = -u_R = Ri_R \end{aligned}$$

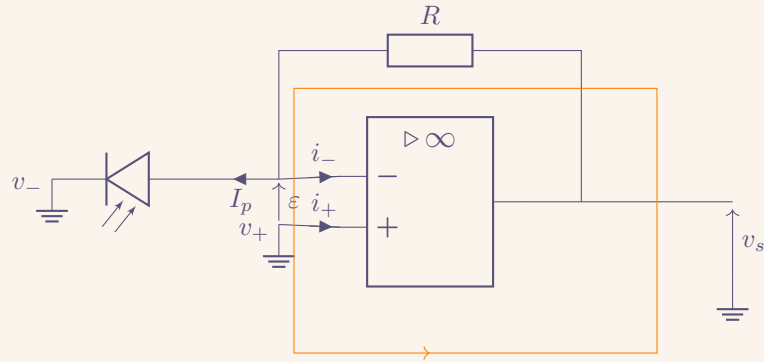


FIGURE 3 – Circuit électrique de l'exercice 5

Exercice 6

1. (a) Fausse car problème d'homogénéité : $[\frac{\omega}{RC}] = T^{-2} \neq [1]$;
- (b) OK à priori
- (c) Fausse car problème d'homogénéité : $[L\omega] = "\Omega" \neq [1]^a$;
- (d) Fausse car problème d'homogénéité : $[R] = [L\omega] = "\Omega" \neq [LC\omega^2] = [1]$.

a. Ici le “ Ω ” montre que c'est un résultat s'exprimant en Ω , ce qui est plus simple à écrire que $M \cdot L^2 \cdot T^{-3} \cdot I^{-2}$

2. On a $Z_1 = \frac{1}{jC\omega}$ et $Z_2 = 1 / \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} \right)$. D'où, d'après le pont diviseur de tension

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{1}{jC\omega} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} \right)} \\
 &= \frac{LC\omega^2}{LC\omega^2 - j\frac{L}{R}\omega - 1}
 \end{aligned}$$

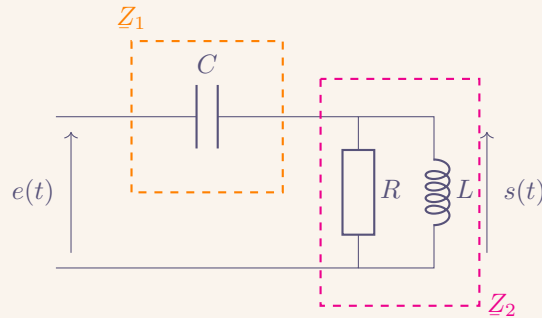


FIGURE 4 – Circuit électrique de l'exercice 6

Exercice 10

1. On a $u_6 \rightsquigarrow \hat{v}_e$, $u_3 \rightsquigarrow \hat{v}_c$ (composante continue), $u_2 \rightsquigarrow \hat{v}_d$ (discontinuités), $u_4 \rightsquigarrow \hat{v}_a$ (composante continue), $u_5 \rightsquigarrow \hat{v}_f$ (nombre de fréquences) et $u_1 \rightsquigarrow \hat{v}_b$.
2. Le filtre donnant le signal \hat{v}_g est un passe-bandes (les hautes et basses fréquences sont éliminées) et c'est un filtre non linéaire (de nouvelles fréquences apparaissent).
Le filtre donnant le signal \hat{v}_h est un filtre passe-bas.
Le filtre donnant le signal \hat{v}_i est un filtre passe-haut dont sa fréquence de coupure est inférieure à 1 kHz.

Exercice 14

1. Grâce aux impédances d'entrée infinies, on a $u_r = r i_D(t)$ et $u_1 = K_m r i_D(t) u_D(t)$. C'est un Wattmètre car le produit $i_D(t) \times u_D(t)$ correspond à la puissance reçue par D (car elle est positive). Ce Wattmètre est analogique car $i_D(t)$ et $u_D(t)$ sont des grandeurs qui varient dans un interval continu.
2. On a $\omega_c = \frac{1}{RC}$ d'où $f_c = \frac{1}{2\pi RC} \doteq \frac{1}{0,6} \text{ Hz} \doteq 2 \text{ Hz}$.
La fonction de ce circuit est de calculer la moyenne d'un signal (c'est donc un moyennneur) : il filtre les fréquences supérieures à quelques Hz. On n'obtient donc que la composante continue comme montré sur la figure ci-dessous.

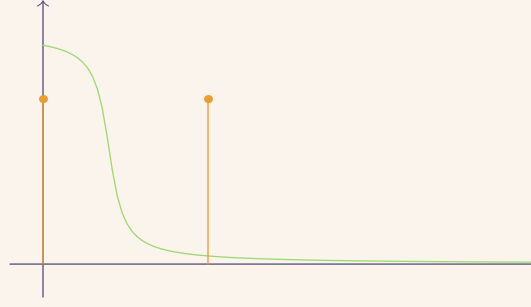


FIGURE 5 – Moyenneur

On ne passe pas par les complexes mais on revient aux définitions réelles d'un signal sinusoïdal :

$$\begin{aligned}
 u_1(t) &= K_m r i_D(t) u_D(t) \\
 &= K_m r I_D \cos(2\pi f + \varphi_i) U_D \cos(2\pi f t + \varphi_u) \\
 &= K_m r I_D U_D \times \frac{1}{2} \left(\cos(2\pi \times 2f t + \varphi_i + \varphi_u) - \cos(\varphi_u - \varphi_i) \right).
 \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$u_s(t) \sim K_m r \underbrace{\frac{1}{2} U_D I_D \cos(\varphi_u - \varphi_i)}_{\langle p(t) \rangle}.$$

3. • Si $D = R$, on a

$$\langle p(t) \rangle = \frac{1}{2} U_D I_D \cos(\overbrace{\varphi_u - \varphi_i}^0) = \frac{1}{2} R I_D^2 = \frac{U_D^2}{2R}.$$

- Si $D = C$, on a $\underline{u}_C = \underline{Z}_C \underline{i}_C = \frac{1}{jC\omega} \underline{i}_C$. Or, $\text{Arg}(\underline{Z}_C) = \text{Arg}\left(\frac{\underline{u}}{\underline{i}}\right) = \text{Arg}(\underline{u}) - \text{Arg}(\underline{i}) = \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$. On en conclut donc que $\langle p(t) \rangle = 0$.
- Si $D = L$, on a $\text{Arg}(\underline{Z}_L) = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$ et donc $\langle p(t) \rangle = 0$.

Exercice 19

1. On a $|H| = G = \left| \frac{1-jRC\omega}{1+jRC\omega} \right| = 1$, et $\varphi = 2 \text{Arg}(1+jRC\omega) = -2 \text{Arctan}(RC\omega)$. Or, on sait que $\varphi\left(\omega = \frac{1}{RC}\right) = -\frac{\pi}{2}$ donc, par lecture graphique, on a $\frac{1}{RC} \doteq 4 \times 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ d'où $RC \doteq 2,5 \times 10^{-5} \text{ s}$.
2. Par exemple, en traitement du son, on utilise une ligne de retard pour resynchroniser les signaux. Mais aussi, en tant que détecteur de front ascendant et descendant.
3. Si $\omega \ll \frac{1}{RC}$, le signal est inchangé. Si $\omega \gg \frac{1}{RC}$, le signal est en opposition de phases. Si $\omega \cong \frac{1}{RC}$, le signal est non-carré.