Chapitre 1

Langages réguliers et Automates

Hugo Salou MPI*

Dernière mise à jour le 27 octobre 2022

1 Motivation

1.1 1ère motivation

Il y a une grande différence entre les mathématiques et l'informatique : la gestion de l'infini. On n'a pas de mémoire infinie sur un ordinateur. Par exemple, pour représenter π ou $\sqrt{2}$, on ne peut pas stocker un nombre infini de décimales. Ce n'est pas une question de base, ces nombres ont aussi des décimales infinies dans une base 2.

Par exemple, si on ne veut utiliser $\sqrt{2}$ seulement pour plus tard le mettre au carré. On peut définir une structure en `C` comme celle qui suit

```c
typedef struct {
  int carre;
  bool sign;
};
```

Code 1 – $\sqrt{2}$ sous forme de structure

On a pu décrire $\sqrt{2}$ comme cela car il y a une certaine régularité dans ce nombre.

On définit des relations entre ces objets. Dans ce chapitre, on va commencer par étudier autre chose : les mots. Les mots sont utilisés, tout d'abord, pour entrer une liste de lettres mais aussi le programme lui-même. En effet, il y a une liste infinie de code possibles en `C`.

1.2 2nde motivation

Les ordinateurs sont complexes ; il peut être dans une multitude d'états. On représente une succession de tâches (le symbole ● représente une tâche) :

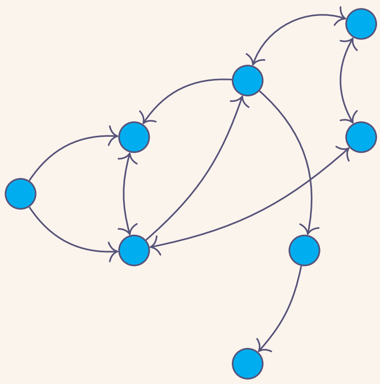


Figure 1 – États d'un ordinateur

Par exemple, pour une boucle infinie, on a un cycle dans le graphe ci-dessus. Ou, s'il atteint un certain nœud, on a un *bug*.

Mais, pour résoudre ce problème, on peut forcer le nombre d'état d'un ordinateur ; par exemple, dire qu'un ordinateur a 17 états.

On décide donc de représenter mathématiquement un ordinateur afin de pouvoir faire des preuves avec. Et, c'est l'objet de ce chapitre.

2 Mots et langages, rappels

Définition: On appelle *alphabet* un ensemble fini, d'éléments qu'on appelle *lettres*.

Définition: On appelle une *mot* sur Σ (où Σ est un alphabet) une suite finie de lettres de Σ.

La *longueur* d'un mot est le nombre de lettres, comptées avec leurs multiplicité. On la note $|w|$ pour un mot w. Si $|w| = n \in \mathbb{N}^*$, on indexe les lettres de w pour $(w_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et on écrit alors

$$w = w_1 w_2 w_3 \dots w_n.$$

Il existe un unique mot de longueur 0 appelé *mot vide*, on le note ε.

Définition: Si Σ est un alphabet, on note
- Σ^n les mots de longueur n ;
- Σ^* les mots de longueurs positives ou nulle ;
- Σ^+ les mots de longueurs strictement positives.

Remarque:

$$\Sigma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n \qquad \Sigma^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Sigma^n.$$

Définition: Soit Σ un alphabet. Soit x et y deux mots de Σ^*. Notons

$$x = x_1 x_2 x_3 \dots x_n$$
$$y = y_1 y_2 y_3 \dots y_n.$$

On définit alors *concaténation* notée $x \cdot y$ l'opération définie comme

$$x \cdot y = x_1 x_2 x_3 \dots x_n y_1 y_2 \dots y_n.$$

Remarque:
- $\cdot$ est une opération interne ;
- ε est neutre pour $\cdot$: $\forall n \in \Sigma^*,\ \varepsilon \cdot x = x \cdot \varepsilon = x.$
- $\cdot$ est associatif.

(On dit que c'est un monoïde.)

Remarque:
L'opération $\cdot$ n'est pas commutative.

Définition: Soit x et y deux mots sur l'alphabet Σ. On dit que
- x est un *préfixe* de y si $\exists v \in \Sigma^*,\ y = x \cdot v$;
- x est un *suffixe* de y si $\exists v \in \Sigma^*,\ y = v \cdot x$;
- x est un *facteur* de y si $\exists (v, w) \in \left(\Sigma^*\right)^2,\ y = v \cdot x \cdot w.$

Exemple:
- a est facteur de aa ;
- ε est un facteur de a.

Définition: On dit que x est un *sous-mot* de y si x est une suite extraite de y. Par exemple

$$a\,\cancel{b}\,a\,a\,\cancel{b}\,a \qquad \longrightarrow \qquad a\,a\,a\,a.$$

Définition: Un *langage* est un ensemble de mots. C'est donc un élément de $\wp(\Sigma^*)$.

Remarque (⚠):
$\varnothing \neq \{\varepsilon\}$.

3 Langage régulier

3.1 Opérations sur les langages

Remarque:
Les langages sont des ensembles. On peut donc leurs appliquer des opérations ensemblistes.

Définition: Soient $L_1, L_2 \in \wp(\Sigma^*)$ deux langages. On définit la *concaténation* de deux langages, notée $L_1 \cdot L_2$:

$$L_1 \cdot L_2 = \{u \cdot v \mid u \in L_1,\, v \in L_2\}.$$

Remarque: — L'opération $\cdot$ (langages) a $\{\varepsilon\}$ pour neutre.
— L'opération $\cdot$ (langages) a $\varnothing$ pour élément absorbant :

$$\forall L \in \wp(\Sigma^*),\ L \cdot \varnothing = \varnothing \cdot L = \varnothing.$$

— L'opération $\cdot$ est distributive : soient K, L, M trois langages ; on a

$$K \cdot (L \cup M) = (K \cdot L) \cup (K \cdot M);$$
$$(L \cup M) \cdot K = (L \cdot K) \cup (M \cdot K).$$

Définition: Étant donné un langage L, on définit par récurrence :
— $L^0 = \{\varepsilon\}$;
— $L^{n+1} = L^n \cdot L = L \cdot L^n$.[1]
On note alors

$$L^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^n \qquad \text{et} \qquad L^+ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^n.$$

Remarque:
On a $\Sigma^* = \Sigma^*$. On notera donc Σ^* dans tous les cas.

Remarque:
Si $\varepsilon \in L$, alors $L^* = L^+$. En effet, $L^* = L^+ \cup \{\varepsilon\}$.

Remarque:
On nomme l'application $L \mapsto L^*$ l'*étoile de* Kleene.

Remarque:
Avec L et K deux alphabets, on a

$$|L \cdot K| \leqslant |L|\,|K|.$$

En effet, avec $K = \{a, aa\}$, on a $K^2 = \{aa, aaa, aaaa\}$.

Exemple:
Avec $L = \{a, ab\}$, on a
— $L^1 = L$;
— $L^2 = \{aa,\ aab,\ aba\, abab\}$;
— $L^* \supseteq \{\varepsilon,\ a,\ ab,\ aa, \ldots, aaaaaaa\ldots\}$.

1. La deuxième égalité est assurée par l'associativité de l'opération $\cdot$.

> **Définition:** Soit Σ un alphabet. On appelle *ensemble des langages réguliers*, noté LR. Le plus petit ensemble tel que
> - $\varnothing \subset \mathrm{LR}$;
> - Si $a \in \Sigma$, alors $a \in \mathrm{LR}$;
> - Si $L_1 \in \mathrm{LR}$ et $L_2 \in \mathrm{LR}$, on a $L_1 \cup L_2 \in \mathrm{LR}$;
> - Si $L_1 \in \mathrm{LR}$ et $L_2 \in \mathrm{LR}$, on a $L_1 \cdot L_2 \in \mathrm{LR}$;
> - Si $L \in \mathrm{LR}$, alors $L^* \in \mathrm{LR}$.

Exemple: — Soit $\Sigma = \{t, o\}$. Est-ce que $\{toto\} \in \mathrm{LR}$? On sait déjà que $\{t\}$ et $\{o\}$ sont déjà des langages réguliers. Or,

$$\{toto\} = \{t\} \cdot \{o\} \cdot \{t\} \cdot \{o\}.$$

Et donc $\{toto\} \in \mathrm{LR}$.

- On a $\{\varepsilon\} = \varnothing^* \in \mathrm{LR}$.
- On a

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1,n_1} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2,n_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \dots & x_{m,n_m} \end{array} \right\} \in \mathrm{LR}$$

car $\{x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n_i}\} \in \mathrm{LR}$ et c'est stable par union finie.

- Avec $\Sigma = \{a, b\}$, on a

$$L = \{\varepsilon,\ a,\ aa,\ aaa, \dots\} = \underbrace{\Big(\overbrace{\{a\}}^{\in \mathrm{LR}}\Big)^*}_{\in \mathrm{LR}}.$$

- $\Sigma^* \in \mathrm{LR}$.
- Contre-exemple : $\{a^n \mid a \text{ premier }\} \notin \mathrm{LR}$.

3.2 Expressions régulières

On représente $\varnothing$ l'ensemble vide, $\_|\_$ l'union de deux expressions régulières, $\_ \cdot \_$ la concaténation de deux expression régulières, et, $\_^*$ l'étoile de Klein pour les expressions régulières.

On cherche à représenter informatiquement ces expressions à l'aide d'une règle de construction nommée.

> **Définition:** Étant donné un alphabet Σ, on définit $\mathrm{Reg}(\Sigma)$ défini par induction nommée à partir des règles :
> - $\varnothing\Big|^{0}$;
> - $|\,\Big|^{2}$;
> - $\cdot\Big|^{2}$;
> - $*\Big|^{1}$;
> - $L\Big|^{1}_{\Sigma}$;
> - $\varepsilon\Big|^{0}$.

Ces règles peuvent être définies en OCamL (douteux) de la façon suivante :

```
type regex =
  | ∅
  | | of regex * regex
  | · of regex * regex
  | * of regex
  | L of char
  | ε
```

Code 2 – Règles des expressions régulières en OCamL

On peut donc écrire

$$\big((\varnothing^*) \mid (a \cdot b)\big) \quad \longrightarrow \quad |(*(\varnothing()), \cdot(L(a), L(b))).$$

A-t-on $|(L(a), L(b)) =^? |(L(b), L(a))$? Non, sinon on risque d'avoir une boucle infinie au moment de l'évaluation de cette expression.

On peut simplifier la notation : au lieu d'écrire $|(*(\varnothing()), \cdot(L(a), L(b)))$, on note $\varnothing^* \mid (a \cdot b)$.

Définition: On définit

$$\begin{aligned} \mathscr{L} : \mathrm{Reg}(\Sigma) &\longrightarrow \wp(\Sigma^*) \\ \varnothing &\longmapsto \varnothing \\ a &\longmapsto \{a\} \\ \varepsilon &\longmapsto \{\varepsilon\} \\ e_1 \cdot e_2 &\longmapsto \mathscr{L}(e_1) \cdot \mathscr{L}(e_2) \\ e_1 \mid e_2 &\longmapsto \mathscr{L}(e_1) \cup \mathscr{L}(e_2) \\ e^* &\longmapsto \mathscr{L}(e)^* \end{aligned}$$

Exemple:
Deux expressions régulières peuvent donner le même langage : on a $\mathscr{L}(\varnothing) = \varnothing$ mais également $\mathscr{L}(\varnothing \mid \varnothing) = \mathscr{L}(\varnothing) \cup \mathscr{L}(\varnothing) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$. De même, $\mathscr{L}\big(a \mid (b \cdot b^*)\big) = \{a, b, bb, bbb, \ldots\} = \mathscr{L}\big((bb^*) \mid a\big)$.

Définition: On définit sur $\mathrm{Reg}(\Sigma)$ la fonction "vars" définie comme

$$\begin{aligned} \mathrm{vars} : \mathrm{Reg}(\Sigma) &\longrightarrow \wp(\Sigma) \\ \varnothing &\longmapsto \varnothing \\ \varepsilon &\longmapsto \varnothing \\ a \in \Sigma &\longmapsto \{a\} \\ e_1 \cdot e_2 &\longmapsto \mathrm{vars}(e_1) \cup \mathrm{vars}(e_2) \\ e_1 \mid e_2 &\longmapsto \mathrm{vars}(e_1) \cup \mathrm{vars}(e_2) \\ e^* &\longmapsto \mathrm{vars}(e). \end{aligned}$$

Propriété: Un langage L est régulier si et seulement s'il existe $e \in \mathrm{Reg}(\Sigma)$ telle que $\mathscr{L}(e) = L$.

Preuve: " $\Longleftarrow$ " Montrons que, pour toute expression régulière $e \in \mathrm{Reg}(\Sigma)$, P_e : "le langage $\mathscr{L}(e)$ est régulier." On procède par induction.
- $P_\varnothing : \mathscr{L}(\varnothing) = \varnothing \in \mathrm{LR}$;
- $P_\varepsilon : \mathscr{L}(\varepsilon) = \{\varepsilon\} = \varnothing^* \in \mathrm{LR}$;
- Soit $a \in \Sigma$. Montrons $P_a : \mathscr{L}(a) = \{a\} \in \mathrm{LR}$;
- Soient e_1 et e_2 deux expressions régulières telles que P_{e_1} et P_{e_2} soient vrais. Montrons $P_{e_1 \cdot e_2} : \mathscr{L}(e_1 \cdot e_2) = \underbrace{\mathscr{L}(e_1)}_{\in \mathrm{LR}} \cdot \underbrace{\mathscr{L}(e_2)}_{\in \mathrm{LR}} \in \mathrm{LR}$
- Soient e_1 et e_2 deux expressions régulières telles que P_{e_1} et P_{e_2} soient vrais. Montrons $P_{e_1 \mid e_2} : \mathscr{L}(e_1 \mid e_2) = \underbrace{\mathscr{L}(e_1)}_{\in \mathrm{LR}} \cup \underbrace{\mathscr{L}(e_2)}_{\in \mathrm{LR}} \in \mathrm{LR}$

" $\Longrightarrow$ " Montrons que, pour tout langage régulier L, il existe une expression régulière e de l'alphabet Σ telle que $\mathscr{L}(e) = L$. Soit X l'ensemble des langages L tels qu'il existent une expression régulière e de l'alphabet Σ telle que $\mathscr{L}(e) = L$. On a

$$X \supseteq \underset{\underset{\mathscr{L}(\varnothing)}{\|}}{\{\varnothing\}} \cup \Big\{\underset{\underset{\mathscr{L}(a)}{\|}}{\{a\}} \;\Big|\; a \in \Sigma\Big\}.$$

De plus, si deux langages L_1 et L_2 sont dans X, alors il existent e_1 et e_2 deux expressions régulières de Σ telle que $\mathscr{L}(e_1) = L_1$ et $\mathscr{L}(e_2) = L_2$. Or, $\mathscr{L}(e_1 \mid e_2) = \mathscr{L}(e_1) \cup \mathscr{L}(e_2) = L_1 \cup L_2$ et donc $L_1 \cup L_2$.
De même pour $L_1 \cdot L_2$.
Si un langage L est dans X, alors il existe une expression régulière e d'un alphabet Σ telle que $\mathscr{L}(e) = L$, alors $\mathscr{L}(e^*) = L^* \in X$.
X contient les langages $\varnothing$ et $\{a\}$ (avec $a \in \Sigma$) et X est stable par $\cup$, $\cdot$ et $*$. Or, LR est défini comme le plus petit ensemble vérifiant les propriétés et donc $\mathrm{LR} \subseteq X$.

□

Remarque (Notation):
Les notations $\mathrm{Reg}(\Sigma)$ et $\mathrm{Regexp}(\Sigma)$ sont équivalentes.

4 Automates finis (sans ε-transitions)

On considère l'automate représenté par les états suivants. L'entrée est représentée par la flèche sans nœud de départ et la sortie par celle sans nœud d'arrivée.

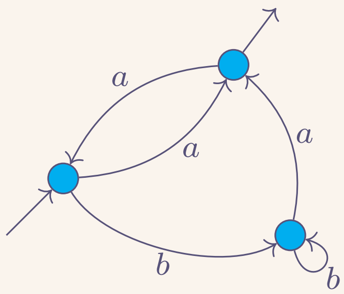


Figure 2 – Exemple d'automate

On représente une séquence d'état par un mot comme $aaba$ (qui correspond à une séquence valide) ou $bbab$ (qui n'est pas valide).

4.1 Définitions

Définition: Un *automate fini* (sans ε-transition) est un quintuplet $(Q, \Sigma, I, F, \delta)$ où
— Q est un ensemble d'états;
— Σ est son alphabet de travail;
— $I \subseteq Q$ est l'ensemble des états initiaux;
— $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états finaux.
— $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$.

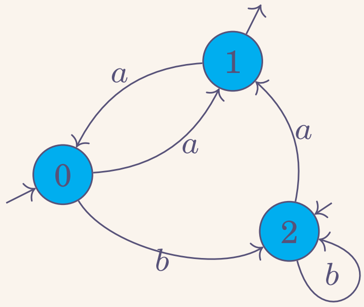


Figure 3 – Exemple d'automate (2)

Exemple:
L'automate ci-dessus est donc représenté mathématiquement par

$$\Big(\underbrace{\{0,1,2\}}_{Q}, \underbrace{\{a,b\}}_{\Sigma}, \underbrace{\{0,2\}}_{I}, \underbrace{\{1\}}_{F}, \underbrace{\{(0,a,1),(0,b,2),(1,a,0),(2,a,1),(2,b,2)\}}_{\delta}\Big).$$

Définition: On dit d'une suite $(q_0, q_1, q_2, \dots, q_n) \in Q^{n+1}$ qu'elle est *une suite de transition de l'automate* $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, I, F, \delta)$ dès lors qu'il existe $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \Sigma^n$ tels que, pour out $i \in [\![1, n]\!]$, $(q_{i-1}, a_i, q_i) \in \delta$. On note parfois une telle suite de transition par

$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \xrightarrow{a_3} q_3 \to \cdots \to q_n - 1 \xrightarrow{a_n} q_n.$$

Exemple:
$1 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{b} 2 \xrightarrow{b} 2$ est une suite de transitions de l'automate ci-avant.

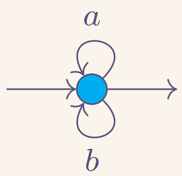
Définition: On dit qu'une suite $(q_0, q_1, \dots, q_n)$ est une *exécution* dans l'automate $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, I, F, \delta)$ si c'est une suite de transition de A telle que $q_0 \in I$. On dit également qu'elle est *acceptante* si $q_n \in F$.

Lorsque $q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \to \cdots \to q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n$ est une suite de transitions d'un automate $\mathscr{A}$, on dit que le mot $a_1 a_2 \dots a_n$ est l'*étiquette* de cette transition.

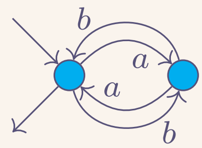
Définition (Langage reconnu par un automate)**:** On dit qu'un mot $w \in \Sigma^*$ est *reconnu* par un automate $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, I, F, \delta)$ s'il est l'étiquette d'une exécution acceptante de $\mathscr{A}$. On note alors $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ l'ensemble des mots reconnus par l'automate $\mathscr{A}$.

Définition: On dit d'un langage L qu'il est *reconnaissable* s'il existe un automate $\mathscr{A}$ tel que $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = L$. On note $\mathrm{Rec}(\Sigma)$ l'ensemble des mots reconnaissables.

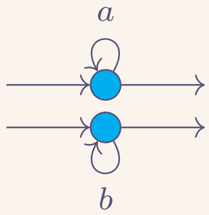
Exemple:
Avec $\Sigma = \{a, b\}$, on cherche $\mathscr{A}$ tel que
— $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = \Sigma^*$
— $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = (\Sigma^2)^*$



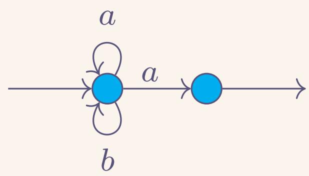
(a) Automate minimal pour $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = \Sigma^*$



(b) Automate minimal pour $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = (\Sigma^2)^*$



(c) Automate minimal pour $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = \{a\}^* \cup \{b\}^*$



(d) Automate minimal pour $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = \Sigma^* \cdot \{a\}$

FIGURE 4 – Automates minimaux pour différentes valeurs de $\mathscr{L}(\mathscr{A})$

Définition (Automate déterministe)**:** On dit d'un automate $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, I, F, \delta)$ qu'il est *déterministe* si

1. $|I| = 1$;
2. $\forall (q, q_1, q_2) \in Q^3,\ \forall a \in \Sigma,\ (q, a, q_1) \in \delta$ et $(q, a, q_2) \in \delta \implies q_1 = q_2$;

REMARQUE:
(2) est équivalent à

$$\forall (q, a) \in Q \times \Sigma,\ \left|\{q' \in Q \mid (q, a, q') \in \delta\}\right| \leqslant 1.$$

Définition (Automate complet)**:** On dit d'un automate $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, I, F, \delta)$ qu'il est *complet* si

$$\forall (q, a) \in Q \times \Sigma,\ \exists q' \in Q,\ (q, a, q') \in \delta.$$

EXEMPLE:
Les automates ci-avant sont

(a) complet et déterministe ;
(b) complet et déterministe ;
(c) non complet et non déterministe ;
(d) non complet et non déterministe.

4.2 Transformations en automates équivalents

On peut représenter le langage utilisé par l'automate ci-dessous avec une expression régulière : $a^* \cdot (a \mid bab)$. L'arbre ci-dessous n'est pas déterministe. On cherche à le rendre déterministe : pour cela, on trace un arbre contenant les nœuds accédés en fonctions de l'expression lue.

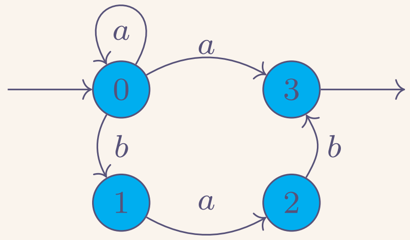


Figure 5 – Automate non déterministe ayant pour expression régulière $a^* \cdot (a \mid bab)$

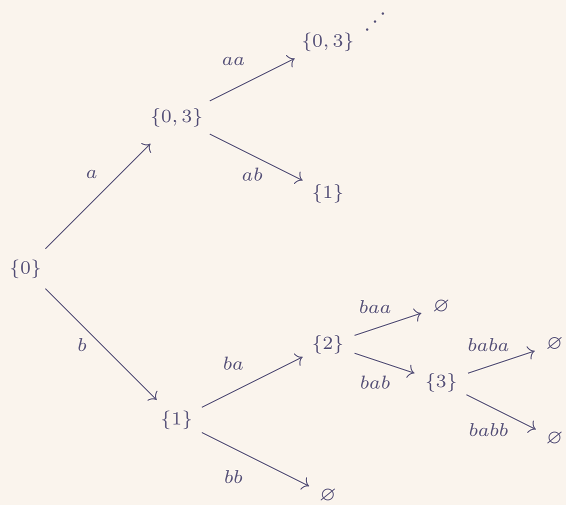


Figure 6 – Nœuds possibles par rapport à l'expression lue

À l'aide de cet arbre, on peut trouver un automate déterministe équivalent à l'automate précédent.

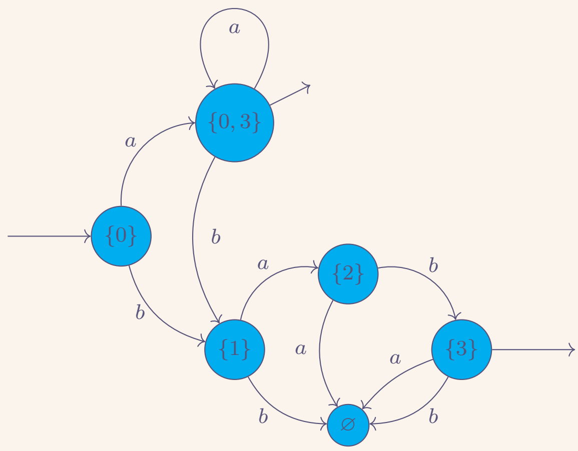


Figure 7 – Automate déterministe ayant pour expression régulière $a^* \cdot (a \mid bab)$

Définition: On dit de deux automates $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ qu'ils sont *équivalents* si $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = \mathscr{L}(\mathscr{A}')$.

Théorème: Pour tout automate $\mathscr{A}$, il existe un automate déterministe $\mathscr{A}'$ tel que $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = \mathscr{L}(\mathscr{A}')$.

Preuve:
Soit $\mathscr{A} = (\mathbb{Q}, \Sigma, I, F, \delta)$ un automate. On pose $\Sigma' = \Sigma$, $\mathbb{Q}' = \wp(\mathbb{Q})$, $I' = \{I\}$, $F = \{Q \in \wp(\mathbb{Q}) \mid Q \cap F \neq \varnothing\}$ et

$$\delta' = \Big\{(Q, a, Q') \in \mathbb{Q}' \times \Sigma \times \mathbb{Q}' \;\Big|\; Q' = \big\{q' \in \mathbb{Q} \mid \exists q \in Q,\ (q, a, q') \in \delta\big\}\Big\}.$$

On pose alors l'automate $\mathscr{A}' = (\mathbb{Q}', \Sigma', I', F', \delta')$. Montrons que $\mathscr{L}(\mathscr{A}') = \mathscr{L}(\mathscr{A})$. On procède par double-inclusion.

"$\subseteq$" Soit $w \in \mathscr{L}(\mathscr{A})$. Il existe donc une exécution acceptante $I \ni q_0 \xrightarrow{w_1} q_1 \xrightarrow{w_2} q_2 \to \cdots \to q_{n-1} \xrightarrow{w_n} q_n \in F$ telle que $w = w_1 w_2 \ldots w_n$. On pose $Q_0 = I$, et, pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$,

$$Q_i = \big\{q' \in \mathbb{Q} \mid \exists q \in Q_{i-1},\ (q, w_i, q') \in \delta\big\}.$$

Remarquons que, pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, on a $(Q_{i-1}, w_i, Q_i) \in \delta'$. On a donc $I' \ni Q_0 \xrightarrow{w_1} Q_1 \to \cdots \to Q_{n-1} \xrightarrow{w_n} Q_n$ est une exécution de $\mathscr{A}'$. Montrons que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a $q_i \in Q_i$ par récurrence finie.

— $q_0 \in I = Q_0$.
— Soit $p < n$ tel que $q_p \in Q_p$ alors q_{p+1} est tel que $(q_p, w_{p+1}, q_{p+1}) \in \delta$ et q_{p+1} est tel qu'il existe $q \in Q_p$ tel que $(q, w_{p+1}, q_{p+1}) \in \delta$. On en déduit $q_{p+1} \in Q_{p+1}$.

On a donc $q_n \in Q_n$ et $q_n \in F$ donc $Q_n \cap F \neq \varnothing$ et donc $Q_n \in F'$. L'exécution $Q_0 \xrightarrow{w_1} Q_1 \to \cdots \to Q_{n-1} \xrightarrow{w_n} Q_n$ est donc acceptante dans $\mathscr{A}'$ et donc $w = w_1 \ldots w_n \in \mathscr{L}(\mathscr{A}')$.

"$\supseteq$" Soit $w \in \mathscr{L}(\mathscr{A}')$. Soit donc $I' \ni Q_0 \xrightarrow{w_1} Q_1 \to \cdots \to Q_{n-1} \xrightarrow{w_n} Q_n \in F'$ une exécution acceptante de w dans $\mathscr{A}'$. $Q_n \cap F \neq \varnothing$. Soit donc $q_n \in Q_n \cap F$. Soit $q_{n-1} \in Q_{n-1}$ tel que $(q_{n-1}, w_n, q_n) \in \delta$ (par définition de $(Q_{n-1}, w_n, Q_n) \in \delta'$). "De proche en proche," il existe $q_0, q_1, \ldots, q_{n-2}$ tels que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(q_{i-1}, w_i, q_i) \in \delta$ et $q_i \in Q_i$. Or, $q_0 \in Q_0 \in I' = \{I\}$ donc $Q_0 = I$ et donc $q_0 \in I$. On rappelle que $q_n \in F$. On en déduit donc que $q_0 \xrightarrow{w_1} q_1 \to \cdots \to q_{n-1} \xrightarrow{w_n} q_n$ une exécution acceptante da ns $\mathscr{A}$ et donc $w \in \mathscr{L}(\mathscr{A}')$.

$\square$

Pour comprendre la construction de l'automate dans la preuve, on fait un exemple. On considère l'automate non-déterministe ci-dessous.

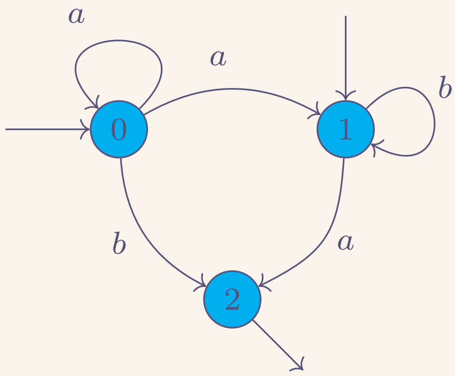


Figure 8 – Automate non déterministe

On construit la *table de transition* :

	a	b
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{0\}$	$\{0,1\}$	$\{2\}$
$\{1\}$		

Table 1 – Table de transition de l'automate ci-avant

À faire : Finir la table de transition

Remarque:
L'automate $\mathscr{A}'$ construit dans le théorème précédent est complet mais son nombre de nœud suit une exponentielle.

Propriété: Soit $\mathscr{A}$ un automate fini à n états. Il existe un automate $\mathscr{A}'$ ayant $n+1$ états tel que $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = \mathscr{L}(\mathscr{A}')$ avec $\mathscr{A}'$ complet.

Preuve:
Soit $\mathscr{A} = (\mathbb{Q}, \Sigma, I, F, \delta)$ un automate à n états. Soit $P \notin \mathbb{Q}$. On pose $\Sigma' = \Sigma$, $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q} \cup \{P\}$, $I' = I$, $F' = F$ et

$$\delta' = \delta \cup \left\{ \big(q, \ell, P\big) \in \mathbb{Q}' \times \Sigma \times \{P\} \;\middle|\; \forall q' \in \mathbb{Q}',\ \big(q, \ell, q'\big) \notin \delta \right\}.$$

Montrons que $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = \mathscr{L}(\mathscr{A}')$. À faire : Preuve à faire

□

Définition: Soit $\mathscr{A} = (\mathbb{Q}, \Sigma, I, F, \delta)$ un automate. On dit d'un état $q \in \mathbb{Q}$ qu'il est
- *accessible* s'il existe une exécution $I \ni q_0 \xrightarrow{w_1} q_1 \to \cdots \to q_{n-1} \xrightarrow{w_n} q_n = q$.
- *co-accessibles*'il existe une suite de transitions $q \xrightarrow{w_1} q_1 \to \cdots \to q_{n-1} \xrightarrow{w_n} q_n \in F$.

Dans l'automate ci-dessous, l'état 0 n'est pas accessible et l'état 2 n'est pas co-accessible.

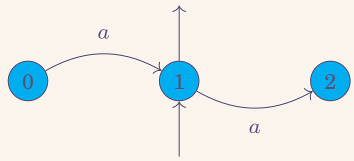


Figure 9 – Non-exemples d'états accessibles et co-accessibles

Définition: On dit d'un automate $\mathscr{A}$ qu'il est *émondé* dès lors que chaque état est accessible et co-accessible.

Propriété: Soit $\mathscr{A}$ un automate. Il existe $\mathscr{A}'$ un automate émondé tel que $\mathscr{L}(\mathscr{A}') = \mathscr{L}(\mathscr{A})$.

Preuve:
Soit $\mathscr{A} = (\mathbb{Q}, \Sigma, I, F, \delta)$. On pose $\Sigma' = \Sigma$, $\mathbb{Q}' = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \text{ accessible ou co-accessible }\}$, $I' = I \cap R'$, $F' = F \cap R'$ et

$$\delta = \big\{(q, \ell, q') \in \mathbb{Q}' \times \Sigma \times \mathbb{Q}' \;\big|\; (q, \ell, q') \in \delta\big\} = (\mathbb{Q}', \Sigma, \mathbb{Q}') \cap \delta.$$

Montrons que $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = \mathscr{L}(\mathscr{A}')$. On procède par double inclusion. On vérifie aisément que $\mathscr{L}(A') \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A})$. On montre maintenant $\mathscr{L}(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A}')$. Soit $w \in \mathscr{L}(\mathscr{A}')$. Soit $q_0, \dots, q_n$ tels que $q_0 \xrightarrow{w_1} q_1 \to \cdots \to q_{n-1} \xrightarrow{w_n} q_n$ est une exécution acceptante. Or, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, q_i est accessible et co-accessible donc $q_i \in \mathbb{Q}'$. De plus, $q_0 \in I'$ et $q_n \in F'$. De plus, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $(q_i, w_{i+1}, q_{i+1}) \in \delta'$. Donc, $q_0 \xrightarrow{w_1} q_1 \to \cdots \to q_{n-1} \xrightarrow{w_n} q_n$ est une exécution acceptante de $\mathscr{A}'$. □

Parfois, on veut pouvoir "sauter" d'un état à un autre dans un automate. On utilise pour cela des ε-transitions.

5 Automates finis avec ε-transitions

Définition: On dit d'un automate sur l'alphabet $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$ que c'est un automate avec ε-transition.

Exemple:
L'automate ci-dessous est un automate avec ε-transitions.

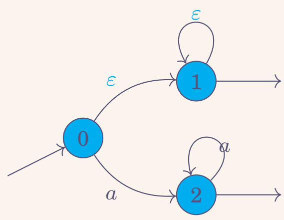


Figure 10 – Exemple d'automate avec ε-transition

Définition: Soit $w \in \left(\Sigma \cup \{\varepsilon\}\right)^*$. On définit alors $\tilde{w}$ le mot obtenu en supprimant les occurrences de ε dans w.

Exemple:
Avec $\Sigma = \{a, b\}$ et $w = ab\varepsilon aa\varepsilon\varepsilon a$, on a $\tilde{w} = abaaa$.

On a également $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$; pour deux mots w_1 et w_2, on a $\widetilde{w_1 \cdot w_2} = \tilde{w}_1 \cdot \tilde{w}_2$; on a également $\tilde{a} = a$ pour $a \in \Sigma$ et $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$.

Définition: Soit $\mathscr{A}$ un automate avec ε-transition. On pose $\tilde{\mathscr{L}}(\mathscr{A})$ est le langage de l'automate sur l'alphabet $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$. On appelle *langage* de A, l'ensemble À faire : retrouver la formule.

Exemple:
On peut trouver un automate reconnaissant la concaténation des langages des deux automates ci-dessous.

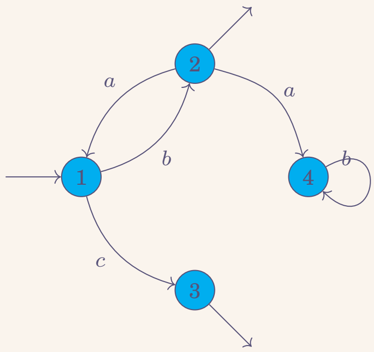


Figure 11 – Automate reconnaissant le langage $(ba)^* \cdot (c \mid a(ba)^*)$

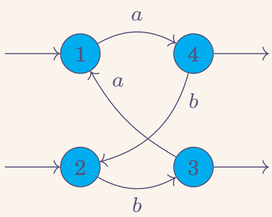


Figure 12 – Automate reconnaissant le langage $(a \mid baa)(bbaa)^* \mid (b \mid abb)(aabb)^*$

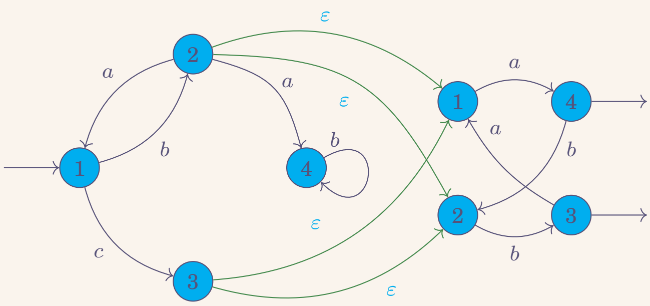


Figure 13 – Automate reconnaissant la concaténation des deux précédents

5.1 Cloture par concaténation

Propriété: Soient $\mathscr{A} = (\Sigma, Q, I, F, \delta)$ et $\mathscr{A}' = (\Sigma', Q', I', F', \delta')$ deux automates avec $Q \cap Q' = \varnothing$. Alors $\mathscr{L}(\mathscr{A}) \cdot \mathscr{L}(\mathscr{A}')$ est un langage reconnaissable. Il est d'ailleurs reconnu par l'automate $\mathscr{A}^{\cdot} = (\Sigma^{\cdot}, Q^{\cdot}, I^{\cdot}, F^{\cdot}, \delta^{\cdot})$ défini avec $\Sigma^{\cdot} = \Sigma \cup \Sigma'$, $Q^{\cdot} Q \cup Q'$, $I^{\cdot} = I$, $F^{\cdot} = F'$ et

$$\delta^{\cdot} = \{(q, \varepsilon, q) \mid q \in F,\ q' \in I'\}.$$

Preuve:
Montrons que $\mathscr{L}(\mathscr{A}^{\cdot}) = \mathscr{L}(\mathscr{A}) \cdot \mathscr{L}(\mathscr{A}')$. On procède par double inclusion.

"$\subseteq$" Soit $w \in \mathscr{L}(\mathscr{A}^{\cdot})$ et soit

$$Q \supseteq I = I^{\cdot} \ni q_0 \xrightarrow{u_1} q_1 \xrightarrow{u_2} q_2 \to \cdots \to q_{n-1} \xrightarrow{u_n} q_n \in F^{\cdot} = F' \subseteq Q$$

une exécution acceptante de $\mathscr{A}^{\cdot}$ telle que $\tilde{u} = w$. On pose $i_0 = \min\{i \in [\![1, n]\!] \mid q_i \in Q\}$. On a alors, $\forall i \in [\![1, i_0 - 1]\!]$, $q_i \in Q$. Montrons que $\forall i \in [\![i_0, n]\!]$, $q_i \in Q'$ par récurrence finie. On a $q_{i_0} \in Q'$. De plus, si $q_i \in Q'$ et $(q_i, u_{i+1}, q_{i+1}) \in \delta^{\cdot}$ donc $q_{i+1} \in Q'$. Inspectons $(Q \ni q_{i_0-1}, u_{i_0}, q_{i_0} \in Q') \in \delta^{\cdot}$. On sait que $(q_{i_0-1}, u_{i_0}, q_{i_0}) \notin \delta$ car $q_{i_0} \in Q'$; de même, $(q_{i_0-1}, u_{i_0}, q_{i_0}) \notin \delta'$ car $q_{i_0-1} \in Q$ donc $(q_{i_0-1}, u_{i_0}, q_{i_0}) \in \{(q, \varepsilon, q') \mid q \in F n q' \in I'\}$. On a donc que $q_{i_0-1} \in F$ et $q_{i_0} \in I$. Ainsi

$$I \ni \underbrace{q_0 \xrightarrow{u_1} q_1 \to \cdots \to \overset{F}{\overset{\ni}{q_i}}} \xrightarrow{\varepsilon} \underbrace{\overset{I'}{\overset{\ni}{q_{i_0}}} \xrightarrow{u_{i_0}} \to \cdots \to q_n} \in F$$

est une exécution acceptante de $\mathscr{A}$ d'étiquette $\widetilde{u_1 \dots u_{i_0-1}}$.

est une exécution acceptante de $\mathscr{A}'$ d'étiquette $\widetilde{u_{i_0+1} \dots u_n}$.

donc $\widetilde{u_{|[\![1,i_0-1]\!]}} \in \mathscr{L}(\mathscr{A})$ et $\widetilde{u_{|[\![i_0+1,n]\!]}} \in \mathscr{L}(\mathscr{A}')$.

$$\begin{aligned} w = \tilde{u} &= u_{|[\![1,i_0-1]\!]} \cdot \widetilde{u_{i_0} \cdot u}_{|[\![i_0+1,n]\!]} \\ &= \widetilde{u_{|[\![1,i_0+1]\!]}} \cdot \widetilde{u_{|[\![i_0+1,n]\!]}} \end{aligned}$$

"$\supseteq$" Montrons que $\mathscr{L}(\mathscr{A}) \cdot \mathscr{L}(\mathscr{A}') \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A}^*)$. Soit $w \in \mathscr{L}(\mathscr{A}) \cdot \mathscr{L}(\mathscr{A}^{\cdot})$, il existe donc

$$I \ni q_0 \xrightarrow{u_1} q_1 \to \cdots \to q_n \in F$$

une exécution acceptante dans $\mathscr{A}$ d'étiquette $\widetilde{u_1 \dots u_n}$. Il existe également

$$I' \ni q_{n+1} \xrightarrow{u_{n+2}} q_{n+1} \to \cdots \to q_m \in F$$

une exécution acceptante dans $\mathscr{A}'$ d'étiquette $\widetilde{u_{n+2} \dots u_m}$. Or, $\delta \subseteq \delta^{\cdot}$ et $\delta' \subseteq \delta^{\cdot}$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $(q_{i-1}, u_i, q_i) \in \delta^{\cdot}$ et $\forall i \in [\![n+2, m]\!]$, $(q_{i-1}, u_i, q_i) \in \delta^{\cdot}$. Or, $q_n \in F$ et $q_{n+1} \in I'$ donc $(q_n, \varepsilon, q_{n+1}) \in \delta^{\cdot}$. Finalement À faire : recopier.

□

5.2 Cloture par étoile

Propriété: Soit $\mathscr{A} = (\Sigma, Q, I, F, \delta)$ un automate fini. Alors $\mathscr{L}(\mathscr{A})^*$ est un automate reconnaissable, il est de plus reconnu par l'automate $\mathscr{A}_* = (\Sigma_*, Q_*, I_*, F_*, \delta_*)$ défini avec $\Sigma_* = \Sigma$, $Q_* = Q \cup \{V\}$ où $V \notin Q$. À faire : recopier ici...

Exemple:

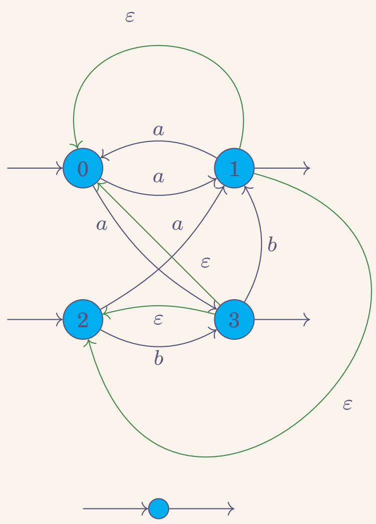


Figure 14 – Automate reconnaissant $\mathscr{L}(\mathscr{A})^*$

5.3 Cloture par union

Propriété: Soit $\mathscr{A} = (\Sigma, Q, I, F, \delta)$ et $\mathscr{A}' = (\Sigma', Q', I', F', \delta')$ deux automates avec $Q \cap Q' = \varnothing$. Alors, $\mathscr{L}(\mathscr{A}) \cup \mathscr{L}(\mathscr{A}')$ est un langage reconnaissable. Il est, de plus, reconnu par $\mathscr{A}^\cup = (\Sigma^\cup, Q^\cup, I^\cup, F^\cup, \delta^\cup)$ avec $\Sigma^\cup = \Sigma \cup \Sigma'$, $Q^\cup = Q \cup Q'$, $I^\cup = I \cup I'$, $F^\cup = F \cup F'$ et $\delta^\cup = \delta \cup \delta'$.

Preuve:
Montrons que $\mathscr{L}(\mathscr{A}^\cup) \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A}) \cup \mathscr{L}(\mathscr{A}')$. Supposons, sans perte de généralité que les automates $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont sans ε-transitions. Soit $w \in \mathscr{L}(\mathscr{A}^\cup)$. Il existe une exécution acceptante

$$I^\cup \ni q_0 \xrightarrow{w_1} q_1 \to \cdots \to q_{n-1} \xrightarrow{w_n} q_n \in F^\cup$$

avec $w = w_0 \ldots w_n$.

Montrons que, en supposant $q_0 \in I$ sans perte de généralité, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $q_i \in Q$ de proche en proche.

On a donc $q_n \in Q \cap F^\cup = F$ et on a alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(q_{i-1}, w_i, q_i) \in \delta^\cup$. Or, $q_{i-1} \in Q$ et $(q_{i-1}, w_i, q_i) \in \delta'$ donc $(q_{i-1}, w_i, q_i) \in \delta$.

Finalement, $q_0 \xrightarrow{w_1} q_1 \to \cdots \to q_n$ est un exécution acceptante de $\mathscr{A}$ donc $w \in \mathscr{L}(\mathscr{A})$. □

Remarque:
Pour tout $a \in \Sigma$, $\{a\}$ est reconnaissable : par exemple,

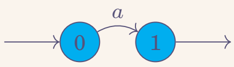


Figure 15 – Automate reconnaissant $\{a\}$ avec $a \in \Sigma$

Remarque:
$\varnothing$ est reconnaissable : par exemple,

Figure 16 – Automate reconnaissant $\varnothing$

> **Propriété:** De ce qui précède, on en déduit que l'ensemble des langages reconnaissables par automates avec ε-transition est au moins l'ensemble des langages réguliers.

> **Théorème:** Si $\mathscr{A}$ est un automate avec ε-transitions, alors il existe un automate $\mathscr{A}'$ sans ε-transition tel que $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = \mathscr{L}(\mathscr{A}')$.

Exemple:

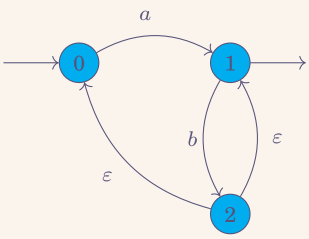


Figure 17 – Automate avec ε-transition

L'automate avec ε-transition ci-dessus peut être transformé en automate sans ε-transition comme celui ci-dessous.

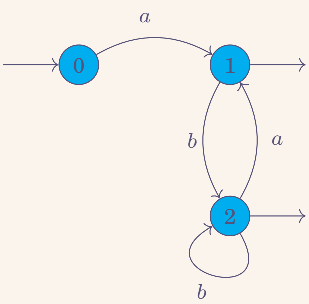


Figure 18 – Automate sans ε-transition

> **Propriété:** Soit $\mathscr{A} = (\Sigma, \mathbb{Q}, I, F, \delta)$ un automate avec ε-transitions. Soit $q_r \in \mathbb{Q}$ un état de l'automate. Alors, l'automate $\mathscr{A}' = (\Sigma', \mathbb{Q}', I', F', \delta')$ défini par $\Sigma' = \Sigma$, $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$,

$I' = I,$

$$F' = F \cup \begin{cases} \{q \in \mathbb{Q} \mid (q, \varepsilon, q_r) \in \delta\} & \text{si } q_r \in F \\ \varnothing & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \delta' = (\delta \setminus \{(q, \varepsilon, q_r) \in \delta \mid q \in \mathbb{Q}\}) \\ \cup \{(q, a, q') \mid (q, \varepsilon, q_r) \in \delta \,\text{et}\, (q_r, a, q') \in \delta \,\text{et}\, a \in \Sigma\} \\ \cup \{(q, \varepsilon, q') \mid (q, \varepsilon, q_r) \in \delta \text{ et } (q_r, \varepsilon, q') \in \delta \text{ et } q_r \neq q' \in \mathbb{Q}\}, \end{aligned}$$

est tel que
- il n'y a pas d'ε-transitions entrant en q_r ;
- $\mathscr{L}(\mathscr{A}') = \mathscr{L}(\mathscr{A})$;
- si $q \in \mathbb{Q}$ n'a pas d'ε-transition entrante dans $\mathscr{A}$, il n'en a pas dans $\mathscr{A}'$.

Algorithme 1 Suppression des ε-transitions

Entrée un automate $\mathscr{A} = (\Sigma, \mathbb{Q}, I, F, \delta)$
Sortie un automate équivalent à $\mathscr{A}$ sans ε-transitions

$\delta' \leftarrow \delta$
$F' \leftarrow F$
$\mathbb{Q}' \leftarrow \mathbb{Q}$
tant que il existe $q \in \mathbb{Q}'$ avec une ε-transition entrante dans δ' **faire**
    $(\Sigma', \mathbb{Q}', I', F', \delta') \leftarrow$ résultat de la proposition précédente avec $q_R = q$
retourner $(\Sigma', \mathbb{Q}', I', F', \delta')$

On a donc démontré que tout langage régulier peut être reconnu par un automate.

Exemple:
On veut, par exemple, reconnaître le langage $(a \cdot b)^* \cdot (a \mid b)$. À faire : Faire les automates

6 Théorème de Kleene

On s'intéresse à un autre ensemble de langages, les *langages locaux*.

6.1 Langages locaux

6.1.1 Définitions, propriétés

Définition (lettre préfixe, lettre suffixe, facteur de taille 2, non facteur)**:** Soit L un langage. On note l'ensemble $P(L)$ des lettres préfixes défini comme

$$\begin{aligned} P(L) &= \{\ell \in \Sigma \mid \exists w \in \ell, \exists v \in \Sigma^*, w = \ell \cdot v\} \\ &= \{\ell \in \Sigma, \ \{\ell\} \cdot \Sigma^* \cap L = \varnothing\}. \end{aligned}$$

On note l'ensemble $S(L)$ des lettres suffixes défini comme

$$S(L) = \{w_{|w|} \mid w \in L\} = \{\ell \in \Sigma \mid \Sigma^* \cdot \{\ell\} \cap L \neq \varnothing\}.$$

On note l'ensemble $F(L)$ des facteurs de taille 2 défini comme

$$F(L) = \{\ell_1 \cdot \ell_2 \in \Sigma^2 \mid \Sigma^* \cdot \{\ell_1, \ell_2\} \cdot \Sigma^* \cap L \neq \varnothing\}.$$

On note l'ensemble $N(L)$ des non-facteurs défini comme

$$N(L) = \Sigma^2 \setminus F(L).$$

On défini également l'ensemble

$$\Lambda(L) = L \cap \{\varepsilon\}.$$

Définition: Soit L un langage. On définit le langage local engendré par L comme étant

$$\rho(L) = \Lambda(L) \cup \Big(P(L) \cdot \Sigma^* \cap \Sigma^* \cdot S(L)\Big) \setminus \Sigma^* N(L) \Sigma^*.$$

Exemple:
Avec $L = \{aab, \varepsilon\}$, on a $P(L) = \{a\}$, $S(L) = \{b\}$, $F(L) = \{aa, ab\}$, $N(L) = \{ba, bb\}$, $\Lambda(L) = \{\varepsilon\}$. Et donc, on en déduit que

$$\rho(L) = \{\varepsilon\} \cup \{ab\} \cup \{aab\} \cup \cdots \{\varepsilon\} \cup \{a^n \cdot b \mid n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Définition: Un langage est dit local s'il est son propre langage engendré i.e. $\rho(L) = L$.

Propriété: Soit L un langage. Alors, $\rho(L) \supseteq L$.

Preuve:
Soit $w \in L$. Montrons que $w \in \rho(L)$.
- Si $w = \varepsilon$, alors $\Lambda(L) = L \cap \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}$ donc $w \in \rho(L)$.
- Sinon, notons $w = w_1 w_2 \ldots w_n$. On doit montrer que $w_1 \in P(L)$, $w_n \in S(L)$, et $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $w_i w_{i+1} \in F(L)$. Par définition de ces ensembles, c'est vrai.

□

Propriété: Soit L de la forme

$$\Lambda \cup (P\Sigma^* \cap \Sigma^* S) \setminus (\Sigma^* N \Sigma^*)$$

avec $\Lambda \subseteq \{\varepsilon\}$, $P \subseteq \Sigma$, $S \subseteq \Sigma$, et $N \subseteq \Sigma^2$. Alors $\rho(L) = L$.

Preuve:
On a $L \subseteq \rho(L)$. Montrons donc $\rho(L) \subseteq L$.

- Montrons que $\Lambda(L) \subseteq L$.
  - Si $\Lambda(L) = \varnothing$, alors ok.
  - Sinon, $\Lambda(L) = \{\varepsilon\} = L \cap \{\varepsilon\}$ donc $\varepsilon \in L$ et donc $\varepsilon \in \Lambda$ parce que ce n'est possible.
- Montrons que $P(L) \subseteq P$. Soit $\ell \in P(L)$. Soient $v \in \Sigma^*$, et $w \in L$ tels que $w = \ell v$. On a donc $w \notin \Lambda$, donc $w \in (P\Sigma^* \cap \Sigma^* S)$ et donc $\ell v = w \in P\Sigma^*$ et donc $\ell \in P$.
- De même, $S(L) \subseteq L$
- À faire à la maison : $N \subseteq N(L)$ (ou $F(L) \subseteq F$)

□

Corollaire: On a $\rho^2 = \rho$.

À faire : Figure ensembles langages locaux, réguliers, ...

Preuve:
$\rho(\varnothing) = \varnothing$ et $\rho(\Sigma^*) = \Sigma^*$. □

Remarque:
Un langage L est local si et seulement s'il existe $S \subseteq \Sigma$, $P \subseteq \Sigma$, $N \subseteq \Sigma^2$ tel que

$$L \setminus \{\varepsilon\} = (P\Sigma^* \cap \Sigma^* S) \setminus \Sigma^* N \Sigma^*.$$

Exemple:
Le langage $L = \{a\}$ est local avec $S = \{a\}$, $P = \{a\}$, $F = \varnothing$ et $\Lambda = \varnothing$.

Le langage $L = \{a, ab\}$ est local avec $S = \{b, a\}$, $P = \{a\}$, $F = \{ab\}$ et $\Lambda = \varnothing$.

Le langage $L = (ab)^*$ est local avec $S = \{b\}$, $P = \{a\}$, $F = \{ab, ba\}$. Soit $w \in \rho(L)$. Si $w = \varepsilon$, alors ok. Sinon, $w = abw_1$ et $w_1 \in \rho(L)$. Par récurrence, on montre que le langage est local.

Le langage $L = a \cdot (ab)^*$ n'est pas local.

6.1.2 Stabilité

Intersection

Propriété: Si L_1 et L_2 sont deux langages locaux, alors $L_1 \cap L_2$ est un langage local.

Preuve:
Soit $L_1 = \Lambda_1 \cup \big(P_1\Sigma^* \cap \Sigma^* S_1\big) \setminus \big(\Sigma^* N_1 \Sigma^*\big)$, et $L_2 = \Lambda_2 \cup \big(P_2\Sigma^* \cap \Sigma^* S_2\big) \setminus \big(\Sigma^* N_2 \Sigma^*\big)$. On pose $F_1 = \Sigma^2 \setminus N_1$ et $F_2 = \Sigma^2 \setminus N_2$. On pose alors $\Lambda_\cap = \Lambda_1 \cap \Lambda_2$; $P_\cap = P_1 \cap P_2$; $S_\cap = S_1 \cap S_2$; $F_\cap = F_1 \cap F_2$; $N_\cap = \Sigma^2 \setminus F_\cap$. On a

$$L_1 \cap L_2 = \Lambda_\cap \cup \big(P_\cap \Sigma^* \cap \Sigma^* S_\cap\big) \setminus \Sigma^* N_\cap \Sigma^*.$$

En effet,

$$\begin{aligned} L_1 \cap L_2 = {} & (\Lambda_1 \cap \Lambda_2) \\ & \cap (\Lambda_1 \cap (P_2\Sigma^* \cap \Sigma^* S_2) \setminus \Sigma^* N_2 \Sigma^*) \\ & \cap \big(((P_1\Sigma^* \cap \Sigma^* S_1) \setminus \Sigma^* N_1 \Sigma^*) \cap \Lambda_2\big) \\ & \cap \big(((P_1\Sigma^* \cap \Sigma^* S_1) \setminus \Sigma^* N_1 \Sigma^*) \cap (P_2\Sigma^* \cap (P_2\Sigma^* \cap \Sigma^* S_2) \setminus \Sigma^* N_2 \Sigma^*\big) \\ = {} & (\Lambda_1 \cap \Lambda_2)\big((P_1 \cap P_2)\Sigma^* \cap \Sigma^*(S_1 \cap S_2)\big) \setminus \Sigma^*(N_1 \cap N_2)\Sigma^* \end{aligned}$$

□

Union

Contre-exemple:
Avec $L_1 = ab$ et $L_2 = ba$, on a $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \varnothing$, $P_1 = \{a\}$, $P_2 = \{b\}$, $S_1 = \{b\}$, $S_2 = \{b\}$, $F_1 = \{ab\}$ et $F_2 = \{ba\}$. Le langage $L_1 \cup L_2 = \{ab, ba\}$ n'est pas local : en effet, on a $\Lambda = \varnothing$, $P = \{a, b\}$, $S = \{a, b\}$, et $F = ab, ba$. Le mot aba est donc dans le langage local engendré.

On doit donc ajouter une contrainte afin d'éviter ce type de contre-exemples. L'intersection des alphabets est vide.

Propriété: Soient L_1 un langage local sur un alphabet Σ_1 et L_2 un langage local sur un alphabet Σ_2 avec $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$. Alors $L_1 \cup L_2$ est local.

Preuve:
Soient $\Lambda_1, S_1, P_1, N_1, F_1$ tels que L_1 soit défini par $(\Lambda_1, S_1, P_1, N_1, F_1)$. De même, soient Λ_2, S_2, P_2, N_2, F_2 tels que L_2 soit défini par $(\Lambda_2, S_2, P_2, N_2, F_2)$. Construisons alors $\Lambda_\cup = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, $P_\cup = P_1 \cup P_2$, $S_\cup = S_1 \cup S_2$, $F_\cup = F_1 \cup F_2$ et $N_\cup = (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^2 \setminus F_\cup$. On note $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Montrons alors que

$$L_1 \cup L_2 = \underbrace{\Lambda_\cup \cup (P_\cup \Sigma^* \cap \Sigma^* S_\cup) \setminus (\Sigma^* N_\cup \Sigma^*)}_{L_\cup}.$$

On procède par double-inclusion.

"$\subseteq$" Soit $w \in L_1 \cup L_2$.

- Cas 1 $w = \varepsilon$, alors $\Lambda_1 = \{\varepsilon\}$ ou $\Lambda_2 = \{\varepsilon\}$ donc $L_1 \cup L_2 = \{\varepsilon\}$ et donc $w \in L_\cup$.
- Cas 2 $w \neq \varepsilon$. On pose $w = w_1 \dots w_n$. Sans perte de généralité, on suppose $w \in L_1$ et $w \notin L_2$. D'où $w_1 \in P_1$ et $w_n \in S_1$. Et, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, $w_i w_{i+1} \in F_1$ donc $w_1 \in P_1 \cup P_2$, $w_n \in S_1 \cup S_2$ et $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $w_i w_{i+1} \in F_1 \cup F_2$. D'où $w \in L_\cup$.

"$\supseteq$"

- Cas 1 $w = \varepsilon$ alors $w \in \Lambda_\cup = L_1 \cup L_2$ donc $w \in \Lambda_1$ ou $w \in \Lambda_2$ donc $w \in L_1$ ou $w \in L_2$.
- Cas 2 $w \neq \varepsilon$. On pose $w = w_1 w_2 \dots w_n$ avec $w_1 \in P_\cup$, $w_n \in S_\cup$ et $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $w_i w_{i+1} \in F_\cup$. Alors, sans perte de généralité, on suppose $w_1 \in \Sigma_1$. Montrons par récurrence que $\forall p \in [\![1, n]\!]$, $w_p \in \Sigma_1$.
  - On sait que $w_1 \in \Sigma_1$ par hypothèse.
  - On suppose que $w_p \in \Sigma_1$ avec $p < n$. Alors, $w_p w_{p+1} \in F_\cup = F_1 \cup F_2$. Or, $F_2 \subseteq (\Sigma_2)^2$ et $w_p \in \Sigma_1$ avec $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$ donc $w_{p+1} \in \Sigma_1$.

  On conclut par récurrence que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $w_i \in \Sigma_i$. Or, $w_n \in S_1 \cup S_2$ et $S_2 \cap \Sigma_1 = \varnothing$ donc $w_n \in S_1$. De plus, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, $w_i w_{i+1} \in F_1 \cup F_2$ donc $w_i w_{i+1} \in F_1$ et donc $w \in L_1$.

□

Concaténation

Contre-exemple:
Avec $L_1 = \{ab\}$ et $L_2 = \{ab\}$, deux langages locaux, alors $L_1 \cdot L_2 = \{abba\}$ n'est pas local. En effet, $P = \{a\}$, $S = \{a\}$, $F = \{ab, bb, ba\}$; or $aba \notin L_1 \cdot L_2$.

Propriété: Soient L_1 un langage local sur un alphabet Σ_1 et L_2 un langage local sur un alphabet Σ_2, avec $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$. Alors $L_1 \cdot L_2$ est un langage local.

Preuve:
Soient Λ_1, S_1, P_1, N_1, F_1 définissant L_1 et soient Λ_2, S_2, P_2, N_2, F_2 définissant L_2. Construisons $\Lambda_\bullet = \Lambda_1 \cap \Lambda_2$, $P_\bullet = P_1 \cup \Lambda_1 \cdot P_2$, $S_\bullet = S_2 \cup \Lambda_2 \cdot S_1$, $F_\bullet = F_1 \cup F_2 \cup S_1 \cdot P_2$, $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Montrons que

$$L_1 \cdot L_2 = \underbrace{\Lambda_\bullet \cup (P_\bullet \Sigma^* \cap \Sigma^* S_\bullet) \setminus \Sigma^* N_\bullet \Sigma^*}_{L^\bullet}.$$

On procède par double inclusion.

"$\subseteq$" Soit $w \in L_1 \cdot L_2$.

- Si $w = \varepsilon$, alors $\varepsilon \in L_1$ et $\varepsilon \in L_2$ donc $w = \varepsilon \in \Lambda_\bullet \subseteq L^\bullet$.
- Sinon, $w = u \cdot v$ avec $u \in L_1$ et $v \in L_2$. On sait que $|u| > 0$ ou $|v| > 0$.
  - Si $u \neq \varepsilon$, alors $u = u_1 \dots u_p$ avec $p \geqslant 1$. On sait que $u_1 \in P_1$, $u_p \in S_1$ et, pour $i \in [\![1, p-1]\!]$, $u_1 u_{i+1} \in F_1$.
    Sous-cas 1 Si $v = \varepsilon$, alors $\Lambda_2 = \{\varepsilon\}$, et donc $S_1 \subseteq S_\bullet$. Or, $P_1 \subseteq P_\bullet$ et $F_1 \subseteq F_\bullet$. On en déduit que $w = u \in L^\bullet$.
    Sous-cas 2 $v \neq \varepsilon$, alors $v = v_1 \dots v_q$ avec $v_1 \in P_2$, $v_q \in S_2$ et, pour $i \in [\![1, nq-1]\!]$, $v_i v_{i+1} \in F_2$. Or, $u_p v_1 \in S_1 \cdot P_2$ et donc $w = u \cdot v \in L^\bullet$.
  - Si $u = \varepsilon$, on procède de la même manière.

"$\supseteq$" Soit $w \in L^\bullet$.

- Si $w = \varepsilon$, alors $\varepsilon \in \Lambda_\bullet$ et donc $\varepsilon \in L_1$ et $\varepsilon \in L_2$. D'où $\varepsilon \in L_1 \cdot L_2$.

— Sinon, on pose $w = w_1 \dots w_n$.

Sous-cas 1 Si $\{i \in [\![1, n]\!] \mid w_i \in \Sigma_2\} = \varnothing$, on a donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $w_i \in \Sigma_1$. De plus, $w_1 \in P_\bullet$, $w_n \in S_\bullet$ et, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, $w_i w_{i+1} \in F_\bullet$. Or, $P_\bullet \cap \Sigma_1 = P_1$, $S_\bullet \cap \Sigma_1 = S_1$, $\Lambda_2 = \{\varepsilon\}$ et $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$ $w_i w_{i+1} \in F_1$. On en déduit que $w = w_1 \dots w_n \cdot \varepsilon \in L_1 \cdot L_2$.

Sous-cas 2 Si $M = \{i \in [\![1, n]\!] \mid w_i \in \Sigma_2\} \neq \varnothing$. Soit $i_0 = \min(M)$. D'où

$$w = \underbrace{w_1 \dots w_{i_0 - 1}}_{\in \Sigma_1} \cdot \underbrace{w_{i_0}}_{\in \Sigma_2} \dots w_n.$$

Si, $\ell_1, \ell_2 \in F_\bullet$, et $\ell_1 \in \Sigma_2$, alors $\ell_2 \in \Sigma_2$. De proche en proche, on en déduit que $\forall i \in [\![i_0, n]\!]$, $w_i \in \Sigma_2$.

— Si $i_0 = 1$, alors $w_1 \in \Sigma_2$, $w_1 \in P_\bullet$, $w_1 \in P_2$, $w_1 \in P_2$, $\Lambda_1 = \{\varepsilon\}$, et $w_n \in S_\bullet \cap \Sigma_2$, et $w_n \in S_2$. De plus, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, $w_i w_{i+1} \in F_\bullet \cap (\Sigma_2)^2$ donc $w_i w_{i+1} \in F_2$. D'où $w = \varepsilon \cdot w_1 \dots w_n \in L_1 \cdot L_2$.

— Si $i_0 > 1$, alors $w_1 \in \Sigma_1 \cap P^\bullet = P_1$, $w_n \in \Sigma_2 \cap S^\bullet = S_2$, et $\forall i \in [\![1, i_0 - 2]\!]$, $w_i w_{i+1} \in F^\bullet \cap (\Sigma_1)^2 = F_1$. D'où $w_{i_0 - 1} w_{i_0} \in F^\bullet \cap \Sigma_1 \Sigma_2 = S_1 P_2$ donc $w_{i_0 - 1} \in S_1$ et $w_{i_0} \in P_2$ donc $w_1 \dots w_{i_0 - 1} \in L_1$. Finalement, $\forall i \in [\![i_0, n-1]\!]$, $w_i w_{i_1 \in F_\bullet \cap (\Sigma)^2}$ donc À faire : Finir la preuve.

□

Étoile

Propriété: Soit L un langage local, alors L^* est un langage local.

Preuve:
Soient Λ, P, S, F et N définissant L. Alors $\Lambda_* = \{\varepsilon\}$, $P_* = P$, $S_* = S$ et $F_* = F \cup S \cdot P$.
À faire : preuve à faire à la maison. □

Exemple:
Avec $L = \{a, b\}$, un langage local, on a $\Lambda_* = \{\varepsilon\}$, $P_* = S_* = \{a, b\}$ (car $P = \{a, b\} = S$), et $S_* = \{ab, ba, aa, bb\}$.

6.2 Expressions régulières linéaires

Définition: Un expression régulière est dite *linéaire* si chacune de ses lettres apparaît une fois au plus dans l'expression.

Exemple:

Oui	Non
a	aa
$a \mid b$	$a \mid ba$

Table 2 – Exemples et non-exemples d'expressions régulières linéaires

Exemple:
On définit une fonction booléenne permettant de vérifier si une expression régulière est linéaire :

$$\text{linéaire} : \left(\begin{array}{rcl} \varnothing & \mapsto & \top \\ \varepsilon & \mapsto & \top \\ a \in \Sigma & \mapsto & \top \\ e_1 \cdot e_2 & \mapsto & (\text{vars}(e_1) \cap \text{vars}(e_2) = \varnothing) \text{ et linéaire}(e_1) \text{ et linéaire}(e_2) \\ e_1 \mid e_2 & \mapsto & (\text{vars}(e_1) \cap \text{vars}(e_2) = \varnothing) \text{ et linéaire}(e_1) \text{ et linéaire}(e_2) \\ {e_1}^* & \mapsto & \text{linéaire}(e_1) \end{array} \right).$$

Propriété: Le langage d'une expression régulière est local.

Preuve:
Il nous suffit de montrer le résultat sur le cas de base.

$\mathcal{L}(\varnothing) : \varnothing$ qui correspond à $\Lambda = \varnothing$, $S = \varnothing$, $P = \varnothing$, $F = \varnothing$.

$\mathcal{L}(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$ qui correspond à $\Lambda = \{\varepsilon\}$ et $S = P = F = \varnothing$.

$\mathcal{L}(a) = \{a\}$ qui correspond à $\Lambda = \varnothing$, $S = \{a\}$, $P = \{a\}$ et $F = \varnothing$. □

Remarque:
Les grandeurs Λ, P, S et F sont de plus définies individuellement par la table suivante.

e	Λ	P	S	F
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
ε	$\{\varepsilon\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
a	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\varnothing$
${e_1}^*$	$\{\varepsilon\}$	$P(e_1)$	$S(e_1)$	$F(e_1) \cup S(e_1) \cdot P(e_1)$
$e_1 \cdot e_2$	$\Lambda(e_1) \cap \Lambda(e_1)$	$P(e_1) \cup \Lambda(e_2) \cdot P(e_2)$	$S(e_2) \cup \Lambda(e_2) \cdot S(e_1)$	$F(e_1) \cup F(e_2) \cup S(e_1) \cdot P(e_2)$
$e_1 \mid e_2$	$\Lambda(e_1) \cup \Lambda(e_2)$	$P(e_1) \cup P(e_2)$	$S(e_1) \cup S(e_2)$	$F(e_1) \cup F(e_2)$

Table 3 – Construction de Λ, P, S et F dans différents cas

Remarque (Notation):
Si Σ_1 et Σ_2 sont deux alphabets et $\varphi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$, alors on note $\tilde{\varphi}$ l'extension de φ aux mots de Σ_1^* :

$$\tilde{\varphi}(w_1 \dots w_n) = \varphi(w_1) \dots \varphi(w_n)$$

et, de plus, on note

$$\tilde{\varphi}(L) = \{\tilde{\varphi}(w) \mid w \in L\}.$$

Remarque:
On a $\tilde{\varphi}(L \cup M) = \tilde{\varphi}(L \cup M) = \tilde{\varphi}L \cup \tilde{\varphi}(M)$.

Propriété:

$$\tilde{\varphi}(L \cdot M) = \tilde{\varphi}(L) \cdot \tilde{\varphi}(M)$$

Preuve:

$$\begin{aligned} w \in \tilde{\varphi}(L \cdot M) &\iff \exists u \in L \cdot M,\ w = \tilde{\varphi}(u) \\ &\iff \exists (v,t) \in L \times M,\ w = \tilde{\varphi}(v \cdot t) \\ &\iff \exists (v,t) \in L \times M,\ w = \tilde{\varphi}(v) \cdot \tilde{\varphi}(t) \\ &\iff w \in \tilde{\varphi}(L) \cdot \tilde{\varphi}(M). \end{aligned}$$

□

Définition: Soient $e \in \mathrm{Reg}(\Sigma_1)$, $\varphi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$. On définit alors inductivement e_φ comme étant

$$\varnothing_\varphi = \varnothing \qquad a_\varphi = \varphi(a) \text{ si } a \in \Sigma_1 \qquad (e_1 \mid e_2)_\varphi = (e_1)_\varphi \mid (e_2)_\varphi$$
$$\varepsilon_\varphi = \varepsilon \qquad (e_1 \cdot e_2)_\varphi = (e_1)_\varphi \cdot (e_2)_\varphi \qquad (e_1^*)_\varphi = ((e_1)_\varphi)^*.$$

Propriété: Si $\varphi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ et $e \in \mathrm{Reg}(\Sigma_1)$, alors
$$\mathscr{L}(e_\varphi) = \tilde{\varphi}(\mathscr{L}(e)).$$

Preuve (par incuction sur $e \in \mathrm{Reg}(\Sigma_1)$): cas $\varnothing$ $\mathscr{L}(\varnothing_\varphi) = \mathscr{L}(\varnothing) = \varnothing = \tilde{\varphi}(\varnothing) = \tilde{\varphi}(\mathscr{L}(\varnothing))$
cas ε $\mathscr{L}(\varepsilon_\varphi) = \mathscr{L}(\varepsilon) = \{\varepsilon\} = \tilde{\varphi}($ À faire : recopier ici
cas $e_1 \cdot e_2$ $\mathscr{L}((e_1 \cdot e_2)_\varphi) = \mathscr{L}((e_1)_\varphi \cdot (e_2)_\varphi)) = \mathscr{L}((e_1)_\varphi) \cdot \mathscr{L}((e_2)_\varphi) = \tilde{\varphi}(\mathscr{L}(e_1)) \cdot \tilde{\varphi}(\mathscr{L}(e_2)) = \tilde{\varphi}(\mathscr{L}(e_1) \cdot \mathscr{L}(e_2)) = \tilde{\varphi}(\mathscr{L}(e_1 \cdot e_2))$.
De même pour les autres cas

□

Propriété: Soit $e \in \mathrm{Reg}(\Sigma_1)$. Il existe $f \in \mathrm{Reg}(\Sigma)$ et $\varphi : \Sigma \to \Sigma_1$ tel que f est linéaire et $e = f_\varphi$.

Preuve:
Il suffit de numéroter les lettres (c.f. exemple ci-dessous). □

Exemple:
Avec $e = c^*((a \cdot a) \mid \varepsilon) \cdot ((a \mid c \mid \varepsilon)^*))^* \cdot b \cdot a \cdot a^*$, on a
$$f = c_1^*((a_1 \cdot a_2) \mid \varepsilon) \cdot (b_1((a_3 \mid c_2 \mid \varepsilon)^*))^* \cdot b_2 \cdot a_4 \cdot a_5$$
et
$$\varphi : \begin{pmatrix} a_1 & \mapsto & a \\ a_2 & \mapsto & a \\ a_3 & \mapsto & a \\ a_4 & \mapsto & a \\ a_5 & \mapsto & a \\ b_1 & \mapsto & b \\ b_2 & \mapsto & b \\ c_1 & \mapsto & c \\ c_2 & \mapsto & c \end{pmatrix}.$$

6.3 Automates locaux

Définition (automate local, local standard)**:** Un automate $\mathscr{A} = (\Sigma, \mathbb{Q}, I, F, \delta)$ est dit local dès lors que pour out $\forall(q_1, q_2, \ell, q_3, q_4) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \Sigma \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$,
$$(q_1, \ell, q_3) \in \delta \quad \text{et} \quad (q_2, \ell, q_4) \in \delta \qquad \Longrightarrow \qquad q_3 = q_4.$$
L'automate $\mathscr{A}$ est dit, de plus, standard lorsque $\mathrm{Card}(I) = 1$ et qu'il n'existe pas de transitions entrante en l'unique état initial q_0.

Propriété: Un langage est local si et seulement s'il est reconnu par un automate local standard.

Exemple:

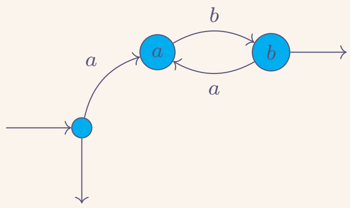


Figure 19 – Automate local reconnaissant le langage $(ab)^*$

Preuve: " $\Longrightarrow$ " Soit L un langage local. Soit (Λ, S, P, F, N) tels que

$$L = \Lambda \cup (P\Sigma^* \cap \Sigma^*) \setminus (\Sigma^* N \Sigma^*).$$

Soit alors l'automate $\mathbb{Q} = \Sigma \uplus \{\varepsilon\}$, $I = \{\varepsilon\}$, $F_{\mathscr{A}} = S \cup \Lambda$, et

$$\begin{aligned}\delta = \quad & \{(q, \ell, q') \in \mathbb{Q} \times \Sigma \times \mathbb{Q} \mid qq' \in F \text{ et } q' = \ell\} \\ & \cup\{(\varepsilon, \ell, q) \in \mathbb{Q} \times \Sigma \times \mathbb{Q} \mid \ell = q \text{ et } q \in P\}.\end{aligned}$$

On pose $\mathscr{A} = (\Sigma, \mathbb{Q}, I, F_{\mathscr{A}}, \delta)$. Montrons que $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = L$.
"$\subseteq$" Soit $w \in \mathscr{L}(\mathscr{A})$. Soit donc

$$q_1 \xrightarrow{w_1} q_2 \to \cdots \to q_{n-1} \xrightarrow{w_n} q_n$$

une exécution acceptante dans $\mathscr{A}$. Montrons que $w_1 \dots w_n \in L$.

Cas 1 $w = \varepsilon$ et $n = 0$. Ainsi $q_0 = q_n = \varepsilon$ et $F \cap I = \varnothing$. Or $F_{\mathscr{A}} = S \cup \Lambda$, et donc $\Lambda = \{\varepsilon\}$, d'où $\varepsilon \in L$.

Cas 2 $w \neq \varepsilon$. On sait que $w_1 \in P$; en effet, $(\varepsilon, w_1, q_1) \in \delta$ donc $w_1 = q_1 \in P$. De même, $(q_{n-1}, w_n, q_n) \in \delta$, d'où $S \ni w_n = q_n$. De plus, $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $(q_{i-1}, w_i, q_i) \in \delta$ et $(q_i, w_{i+1}, q_{i+1}) \in \delta$. Ainsi, $w_i = q_i$ et $w_{i+1} = q_{i+1}$ avec $q_i q_{i+1} \in F$, d'où $w_i w_{i+1} \in F$. Donc $w \in L$.

"$\supseteq$" Soit $w = w_1 \dots w_n \in L$.

Cas 1 $w = \varepsilon$. On a $\Lambda = \{\varepsilon\}$, et donc ε est final (ou initial). On en déduit que $\varepsilon \in \mathscr{L}(\mathscr{A})$.

Cas 2 $w \neq \varepsilon$. Montrons, par récurrence finie sur $p \leqslant n$, qu'il existe une exécution

$$q_0 \xrightarrow{w_1} q_1 \to \cdots \to q_{n-1} \xrightarrow{w_p} q_p$$

dans $\mathscr{A}$.

- Avec $p = 1$, on a $w_1 \in P$ donc $(\varepsilon, w_1, w_1) \in \delta$. Ainsi, $\varepsilon \xrightarrow{w_1} w_1$ est une exécution dans $\mathscr{A}$.
- Supposons construit $\varepsilon \xrightarrow{w_1} q_1 \to \cdots \xrightarrow{w_p} q_p = w_p$ avec $p < n$. Or, $w_p w_{p+1} \in F$ donc $(w_p, w_{p+1}, w_{p+1}) \in \delta$. Ainsi,

$$\varepsilon \xrightarrow{w_1} q_1 \to \cdots \xrightarrow{w_p} q_p \xrightarrow{w_{p+1}} w_{p+1}$$

est une exécution acceptante de $\mathscr{A}$.

De proche en proche, on a

$$\varepsilon \xrightarrow{w_1} q_1 \to \cdots \to q_{n-1} \xrightarrow{w_n} w_n$$

une exécution dans $\mathscr{A}$. Or, $w_n \in S = F_{\mathscr{A}}$ et donc l'exécution est acceptante dans $\mathscr{A}$, et $w \in \mathscr{L}(\mathscr{A})$.

" $\Longleftarrow$ " Soit $\mathscr{A} = (\Sigma, \mathbb{Q}, I, F_{\mathscr{A}}, \delta)$ un automate localement standard. Montrons que $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ est local. Il suffit de montrer que $\rho(\mathscr{L}(\mathscr{A})) = \mathscr{L}(\mathscr{A})$. Or $\mathscr{L}(\mathscr{A}) \subseteq \rho(\mathscr{L}(\mathscr{A}))$. On montre donc $\rho(\mathscr{L}(\mathscr{A})) \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A})$.

Soit $w \in \rho(\mathscr{L}(\mathscr{A}))$. Ainsi,

$$w \in \Lambda(\mathscr{L}(\mathscr{A})) \cup \Big(P(\mathscr{L}(\mathscr{A}))\Sigma^* \cap \Sigma^* S(\mathscr{L}(\mathscr{A}))\Big) \setminus \Big(\Sigma^* N(\mathscr{L}(\mathscr{A}))\Sigma^*\Big).$$

Montrons que $w \in \mathscr{L}(\mathscr{A})$.

— Si $w \in \Lambda(\mathscr{L}(\mathscr{A}))$, alors $w = \varepsilon$. Or, $\Lambda(\mathscr{L}(\mathscr{A})) = \mathscr{L}(\mathscr{A}) \cap \{\varepsilon\}$. Ainsi $w \in \mathscr{L}(\mathscr{A})$.

— Sinon, $w = w_1 \dots w_n$ avec $w_1 \in P(\mathscr{L}(\mathscr{A}))$, donc il existe $u \in \Sigma^*$ tel que $w_1 \cdot u \in \mathscr{L}(\mathscr{A})$. Il existe donc une exécution acceptante

$$I \ni q_0 \xrightarrow{w_1} q_1 \overset{u}{- - \rightarrow} q_s \in F_{\mathscr{A}}.$$

Il existe donc une exécution $q_0 \xrightarrow{w_1} q_1$.

Supposons construit $q_1 \xrightarrow{w_1} q_1 \to \cdots \xrightarrow{w_p} q_p$ avec $p < n$. Or, $w_p w_{p+1} \in F(\mathscr{L}(\mathscr{A}))$, donc il existe $w \in \Sigma^*$ et $y \in \Sigma^*$ tels que $x \cdot w_p \cdot w_{p+1} \cdot y \in \mathscr{L}(\mathscr{A})$. Il existe donc une exécution acceptante

$$r_0 \overset{x}{- - \rightarrow} r_{p-1} \xrightarrow{w_p} r_p \xrightarrow{w_{p+1}} r_{p+1} \overset{y}{- - \rightarrow} r_s.$$

Or, par localité de l'automate, $q_p = r_p$. Il existe donc q_{p+1} $(= r_{p+1})$ tel que $(q_p, w_{p+1}, q_{p+1}) \in \delta$. On a donc une exécution

$$q_0 \xrightarrow{w_1} q_1 \to \cdots \to q_p \xrightarrow{w_{p+1}} q_{p+1}.$$

De proche en proche, il existe une exécution

$$q_0 \xrightarrow{w_1} q_1 \to \cdots \to q_n.$$

Or, $w_n \in S(\mathscr{L}(\mathscr{A}))$, il existe donc $v \in \Sigma^*$ tel que $v \cdot w_n \in \mathscr{L}(\mathscr{A})$, donc il existe un exécution acceptante

$$I \ni r_0 \overset{v}{- - \rightarrow} r_{s-1} \xrightarrow{w_n} r_s \in F_{\mathscr{A}}.$$

Par localité, $r_s = q_n \in F_{\mathscr{A}}$.
Donc $\rho(\mathscr{L}(\mathscr{A})) \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A})$ et donc $\rho(\mathscr{L}(\mathscr{A})) = \mathscr{L}(\mathscr{A})$. On en déduit que $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ est local.

$\square$

Exemple:
Dans le langage local $(ab)^* \mid c^*$, on a $\Lambda = \{\varepsilon\}$, $S = \{c, b\}$, $P = \{a, c\}$ et $F = \{ab, ba, cc\}$. L'automate local reconnaissant ce langage est celui ci-dessous.

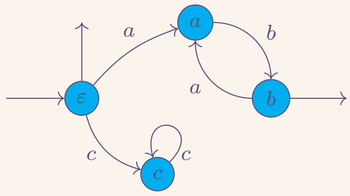


Figure 20 – Automate local reconnaissant $(ab)^* \mid c^*$

Propriété: Soit $\mathscr{A} = (\Sigma, \mathbb{Q}, I, F, \delta)$ un automate et $\varphi : \Sigma \to \Sigma_1$. On pose

$$\delta' = \{(a, \varphi(\ell), q') \mid (q, \ell, q') \in \delta\}.$$

On pose $\mathscr{A}' = (\Sigma, \mathbb{Q}, I, F, \delta')$. On a $\mathscr{L}(\mathscr{A}') = \tilde{\varphi}(\mathscr{L}(\mathscr{A}))$.

Exercice:
Montrons que $\mathrm{LR} \subsetneq \wp(\Sigma^*)$ i.e. il existe des langages non reconnaissables.

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. On écrit un nombre réel comme une suite infinie

$$0{,}10110010101\ldots1010110\ldots$$

On pose $\Sigma = \{a\}$, on crée le langage L, associé au nombre ci-dessus comme l'ensemble contenant a, aaa, $aaaa$,...

Remarque (Notation):
On note A_φ, l'automate $(\varphi(E), \mathbb{Q}, I, F, \delta')$ où $\delta' = \{(q, \varphi(\ell), q') \mid (q, \ell, q') \in \delta\}$.

6.4 Algorithme de Berry-Sethi : les langages réguliers sont reconnaissables

Exemple:
On considère l'expression régulière $aab(a \mid b)^*$. On numérote les lettres : $a_1a_2b_1(a_3 \mid b_2)^*$, avec

$$\varphi : \begin{pmatrix} a_1 & \mapsto & a \\ a_2 & \mapsto & a \\ a_3 & \mapsto & a \\ b_1 & \mapsto & b \\ b_2 & \mapsto & b \end{pmatrix}.$$

	Λ	S	P	F
a_1	$\varnothing$	a_1	a_1	$\varnothing$
a_2	$\varnothing$	a_2	a_2	$\varnothing$
$a_1 \cdot a_2$	$\varnothing$	a_2	a_1	a_1a_2
b_1	$\varnothing$	b_1	b_1	$\varnothing$
$a_1a_2b_1$	$\varnothing$	b_1	a_1	a_1a_2, a_2b_1
a_3	$\varnothing$	a_3	a_3	$\varnothing$
b_2	$\varnothing$	b_2	b_2	$\varnothing$
$a_3 \mid b_2$	$\varnothing$	a_3, b_2	a_3, b_2	$\varnothing$
$(a_3 \mid b_2)^*$	ε	a_3, b_2	a_3, b_2	$a_3b_2, b_2a_3, a_3a_3, b_2b_2$
$a_1a_2b_1(a_3 \mid b_2)^*$	$\varnothing$	a_3, b_2ab_1	a_1	$a_3b_2, b_2a_3, a_3a_3, b_2b_2, a_1a_2, a_2b_1, b_1a_3, b_1b_2$

Table 4 – Λ, S, P et F pour les différents mots reconnus

On crée donc l'automate ci-dessous.

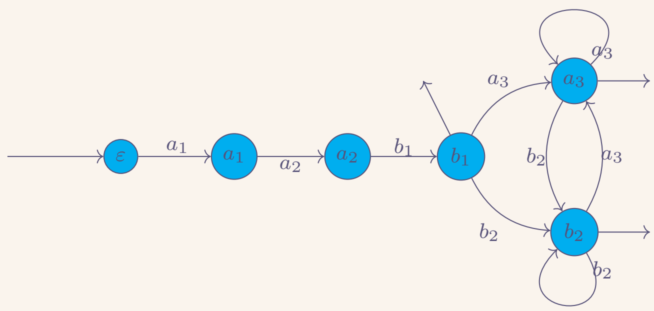


Figure 21 – Automate déduit de la table 4

On applique la fonction φ a tous les états et transitions pour obtenir l'automate ci-dessous. Cet algorithme reconnaît le langage $aab(a \mid b)^*$.

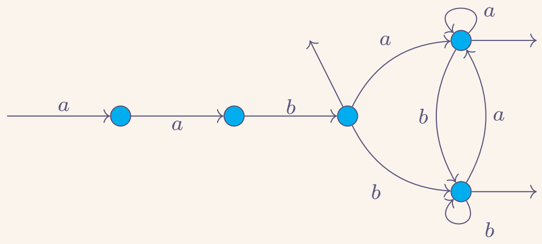


FIGURE 22 – Application de φ à l'automate de la figure 21

Théorème: Tout langage régulier est reconnaissable. De plus, on a un algorithme qui calcule un automate le reconnaissant, à partir de sa représentation sous forme d'expression régulière.

Algorithme (BERRY-SETHI)**:** Entrée : Une expression régulière e
Sortie : Un automate reconnaissant $\mathscr{L}(e)$

1. On linéarise e en f avec une fonction φ telle que $f_\varphi = e$.
2. On calcule inductivement $\Lambda(f)$, $S(f)$, $P(f)$, et $F(f)$.
3. On fabrique $\mathscr{A} = (\Sigma, \mathbb{Q}, I, F, \delta)$ un automate reconnaissant $\mathscr{L}(f)$.
4. On retourne $\mathscr{A}_\varphi$.

À faire : refaire la mise en page pour les algorithmes

6.5 Les langages reconnaissables sont réguliers

On fait le « sens inverse » : à partir d'un automate, comment en déduire le langage reconnu par cet automate ?

L'idée est de supprimer les états un à un. Premièrement, on rassemble les états initiaux en les reliant à un état i, et de même, on relie les états finaux à f. Pour une suite d'états, on concatène les lettres reconnus sur chaque transition :

FIGURE 23 – Succession d'états

De même, lors de « branches » en parallèles, on les concatène avec un $|$. En appliquant cet algorithme à l'automate précédent, on a

$$(aab) \cdot \Big((\varepsilon \mid aa^*) \mid (b \mid aa^* b) \cdot (b \mid aa^* b)^* (aa^* \mid \varepsilon) \Big).$$

Définition: Un automate généralisé est un quintuplet $(\Sigma, \mathbb{Q}, I, F, \delta)$ où
- Σ est un alphabet ;
- $\mathbb{Q}$ est un ensemble fini ;
- $I \subseteq \mathbb{Q}$;
- $F \subseteq \mathbb{Q}$;

— $\delta \subseteq \mathbb{Q} \times \mathrm{Reg}(\Sigma) \times \mathbb{Q}$, avec

$$\forall r \in \mathrm{Reg}(\Sigma),\ \forall (q, q') \in \mathbb{Q}^2,\ \mathrm{Card}(\{(q, r, q') \in \delta\}) \leqslant 1.$$

Définition (Langage reconnu par un automate généralisé)**:** Soit $(\Sigma, \mathbb{Q}, I, F, \delta)$ un automate généralisé. On dit qu'un mot w est reconnu par l'automate s'il existe une suite

$$q_0 \xrightarrow{r_1} q_1 \xrightarrow{r_2} q_2 \to \cdots \to q_{n-1} \xrightarrow{r_n} q_n$$

et $(u_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ tels que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $u_i \in \mathscr{L}(r_i)$ et $w = u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n$.

Définition: Un automate généralisé $(\Sigma, \mathbb{Q}, I, F, \delta)$ est dit « bien détouré[2] » si $I = \{i\}$ et $F = \{f\}$, avec $i \neq f$, tels que i n'a pas de transitions entrantes et f n'a pas de transitions sortantes.

Lemme: Tout automate généralisé est équivalent à un automate généralisé « bien détouré. » En effet, soit $\mathscr{A} = (\Sigma, \mathbb{Q}, I, F, \delta)$ un automate généralisé. Soit $i \notin \mathbb{Q}$ et $f \notin \mathbb{Q}$. On pose $\Sigma' = \Sigma$, $I' = \{i\}$, $F' = \{f\}$, $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q} \cup \{i, f\}$ et

$$\delta' = \delta \cup \{(i, \varepsilon, q) \mid q \in I\} \cup \{(q, \varepsilon, f) \mid q \in F\}.$$

Alors, l'automate $\mathscr{A}' = (\Sigma', \mathbb{Q}', I', F', \delta')$ est équivalent à $\mathscr{A}$ et « bien détouré. »

Lemme: Soit $\mathscr{A} = (\Sigma, \mathbb{Q}, I, F, \delta)$ un automate généralisé « bien détouré » tel que $|\mathbb{Q}| \geqslant 3$. Alors il existe un automate généralisé « bien détouré » $\mathscr{A}' = (\Sigma, \mathbb{Q}', I, F, \delta')$ avec $\mathbb{Q}' \subsetneq \mathbb{Q}$ et $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = \mathscr{L}(\mathscr{A}')$.

Preuve:
Étant donné qu'il existe au plus une transition entre chaque pair d'état $(q, q') \in \mathbb{Q}^2$, il est possible de le représenter au moyen d'une fonction de transition

$$T : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{Reg}(\Sigma).$$

À faire : Recopier la def de T Soit $q \in \mathbb{Q} \setminus \{i, f\}$. Soit alors T' défini, pour $(q_a, q_b) \in \mathbb{Q} \setminus \{q\}$, par

$$T'(q_a, q_b) = T(q_a, q_b) \mid T(q_a, q) \cdot T(q, q)^* \cdot T(q, q_b).$$

On considère l'automate $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q} \setminus \{q\}$ et δ' construit à partir de T'. □

Exemple:
On considère l'automate ci-dessous.

2. Cette notation n'est pas officielle.

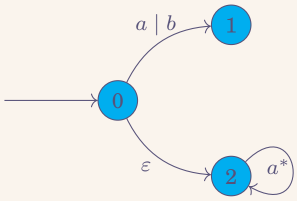


Figure 24 – Automate exemple

La fonction T peut être représentée dans la table ci-dessous.

	0	1	2
0	$\varnothing$	$a \mid b$	ε
1	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
2	$\varnothing$	$\varnothing$	a^*

Table 5 – Fonction T équivalente à l'automate de la figure 24

Exemple:
On applique l'algorithme à l'automate suivant.

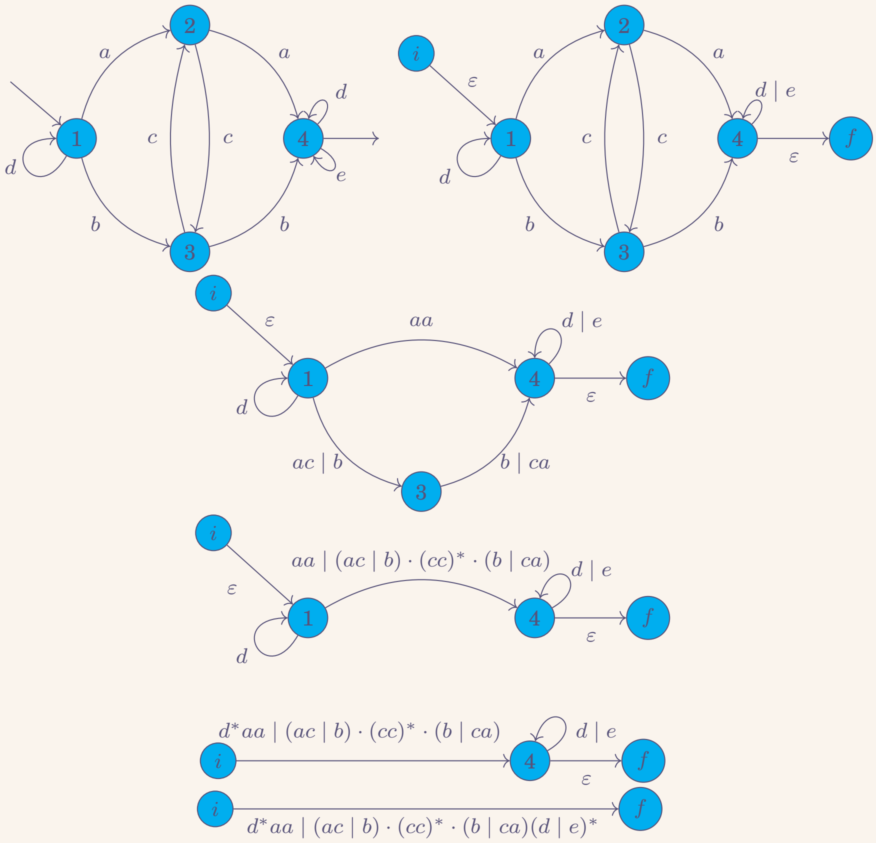


Figure 25 – Application de l'algorithme à un exemple

On a donc que le langage de l'automate initial est

$$\mathscr{L}(d^*(aa) \mid (ac \mid b)(cc)^*(b \mid ca)(d \mid e)^*).$$

Théorème: Un langage reconnaissable est régulier.

Preuve:
On itère le lemme précédent depuis un automate généralisé $\mathscr{A}$ jusqu'à obtention d'un automate comme celui ci-dessous.

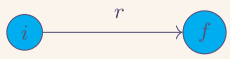


Figure 26 – Automate résultat de l'application du lemme

On a alors $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = \mathscr{L}(r)$. □

Théorème (Kleene)**:** Un langage est régulier si et seulement s'il est reconnaissable. Et, on a donné un algorithme effectuant ce calcul dans les deux sens.

7 La classe des langages réguliers

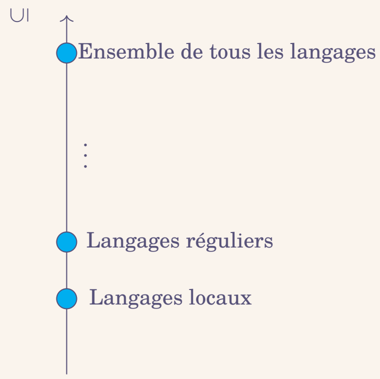


Figure 27 – Ensembles de langages

Propriété: La classe des langages réguliers/reconnaissables est stable par passage au complémentaire.

Preuve:
Soit $L \in \mathrm{LR}$. Soit $\mathscr{A} = (\Sigma, \mathbb{Q}, I, F, \delta)$ un automate reconnaissant le langage L. Soit $\mathscr{A}' = (\Sigma, \mathbb{Q}', I', F', \delta')$ un automate déterministe et complet équivalent à $\mathscr{A}$. Soit $\mathscr{A}'' = (\Sigma, \mathbb{Q}', I', \mathbb{Q}' \setminus F', \delta')$. Alors (à prouver à la maison) $\mathscr{L}(\mathscr{A}'') = \Sigma^* \setminus \mathscr{L}(\mathscr{A}) = \Sigma^* \setminus L$ et donc $\Sigma^* \setminus L$ est reconnaissable/régulier. □

Corollaire: On a la stabilité par intersection. En effet,

$$L \cap L' = \left(L^{\mathrm{c}} \cup (L')^{\mathrm{c}}\right)^{\mathrm{c}}$$

où L^{c} est le complémentaire de L.

Corollaire: Si L et L' sont deux langages réguliers (quelconques), alors $L \setminus L'$ est un langage régulier. En effet,

$$L \setminus L' = L \cap (L')^{\mathrm{c}}.$$

Corollaire: Si L et L' sont deux langages réguliers. Alors $L \bigtriangleup L'$ [3] est un langage régulier. En effet

$$L \bigtriangleup L' \overset{\text{(def)}}{=} (L \cup L') \setminus (L \cap L').$$

7.1 Limite de la classe/Lemme de l'étoile

Théorème (Lemme de l'étoile)**:** Soit L un langage reconnu par un automate à n états. Pour tout mot $u \in L$ de longueur supérieure ou égale à n, il existe trois mots x, y et z tels que

$$u = x \cdot y \cdot z, \qquad |x \cdot y| \leqslant n, \qquad y \neq \varepsilon, \qquad \text{et} \qquad \forall p \in \mathbb{N},\ x \cdot y^p \cdot z \in L.$$

Preuve:
Soit L un langage reconnu par un automate $\mathcal{A} = (\Sigma, \mathbb{Q}, I, F, \delta)$ à n états. Soit u un mot d'un alphabet Σ de longueur supérieure ou égale à n ($u \in \Sigma^{\geqslant n}$) tel que $u \in L$. Alors, il existe un exécution acceptante

$$q_0 \xrightarrow{u_1} q_1 \xrightarrow{u_2} q_2 \to \cdots \to q_{m-1} \xrightarrow{u_m} q_m$$

avec $m \geqslant n$. Par principe des tiroirs, l'ensemble $\{(i,j) \in [\![0,m]\!]^2 \mid i < j \text{ et } q_i = q_j\}$ est non vide. Et donc $A = \{j \in [\![0,m]\!] \mid \exists i \in [\![0, j-1]\!],\ q_i = q_j\}$ est non vide. Soit alors $j_0 = \min A$ bien défini. Alors, par définition de A, il existe $i_0 \in [\![0, j_0 - 1]\!]$ tel que $q_{i_0} = q_{j_0}$ et $j_0 \leqslant n$. On pose donc

$$\underbrace{q_0 \xrightarrow{u_1} q_1 \xrightarrow{u_2} \cdots \xrightarrow{u_{i_0}}}_{x} q_{i_0} \underbrace{\xrightarrow{u_{i_0+1}} q_{i_0+1} \to \cdots \xrightarrow{u_{j_0}}}_{y} q_{j_0} \underbrace{\xrightarrow{u_{j_0+1}} q_{j_0+1} \to \cdots \xrightarrow{u_m}}_{z} q_m \ :$$

$x = u_1 u_2 \ldots u_{i_0}$, $y = u_{i_0+1} \ldots u_{j_0}$ et $z_{j_0+1} \ldots u_m$. On a donc $y \neq \varepsilon$: en effet $i_0 < j_0$. Également, on a $|x \cdot y| = j_0 \leqslant n$ et $u = x \cdot y \cdot z$. Montrons alors que $\forall p \in \mathbb{N},\ x \cdot y^p \cdot z \in L$. La suite de transitions

$$q_0 \xrightarrow{u_1} q_1 \to \cdots \xrightarrow{u_{i_0}} q_{i_0} \xrightarrow{u_{j_0+1}} q_{j_0+1} \to \cdots \xrightarrow{u_m} q_m$$

est une exécution acceptante donc $x \cdot z \in L$. De proche en proche, on en déduit que $x \cdot y^p \cdot z \in L$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. □

Corollaire: Il y a des langages non réguliers/reconnaissables.

3. $\bigtriangleup$ est la différence symétrique

> *Preuve:*
> Soit $L = \{a^n \cdot b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Montrons que L n'est pas régulier par l'absurde. Supposons L reconnaissable par un automate $\mathscr{A}$ à n états, et soit $u = a^n \cdot b^n$. Alors $|u| \geqslant n$. D'où, d'après le lemme de l'étoile, il existe un triplet $(x, y, z) \in (\Sigma^*)^3$ tel que $y \neq \varepsilon$, $u = x \cdot y \cdot z$, $|x \cdot y| \leqslant n$ et $x \cdot y^* \cdot z \subseteq L$ $(*)$. Il existe donc $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $y = a^p$. De même, il existe $q \in [\![0, n-p]\!]$ tel que $x = a^q$ et $z = a^{n-p-q} \cdot b^n$. Donc, d'après $(*)$, $x \cdot y \cdot y \cdot z \in L$ et donc $a^q \cdot a^p \cdot a^p \cdot a^{n-p-q} \cdot b^n \in L$, d'où $a^{n+p} \cdot b^n \in L$. Or, comme $p \neq 0$, $n + p \neq n$: une contradiction. □

Exercice:
On considère le langage $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$. *Le langage L_2 est-il régulier ?* La même démonstration fonction en remplaçant L par L_2. Mais, nous allons procéder autrement, par l'absurde : on suppose L_2 régulier. Or, on sait que, d'après la preuve précédente, $L = L_2 \cap a^* \cdot b^*$, et $a^* \cdot b^*$ est régulier. D'où L régulier, ce qui est absurde.

Exercice:
On considère le langage $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \equiv |w|_b \ [3]\}$. *Le langage L est-il régulier ?* Oui, l'automate de la figure suivante reconnait le langage L (les états représentent la différence $|w|_a - |w|_b \bmod 3$).

Montrons à présent qu'un automate à moins de trois états n'est pas possible : si $\delta^*(i_0, a^x) = \delta^*(i_0, a^y)$ avec $[\![0, 2]\!] \ni x < y \in [\![0, 2]\!]$, alors pour tout $z \in \mathbb{N}$, $\delta^*(i_0, a^{x+z}) = \delta^*(i_0, a^{y+z})$. On pose $z = 3 - y$. Alors

$$\underset{\notin F}{\delta^*(i_0, a^{x+3-y})} = \underset{\in F}{\delta^*(i_0, a^3)}.$$

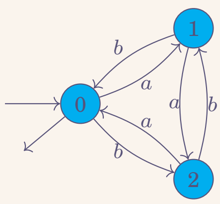


Figure 28 – Automate reconnaissant le langage $\{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \equiv |w|_b \ [3]\}$

Exercice:
Soit $\Sigma = \{0, 1, \text{‘(’}, \text{‘)’}, \text{‘\{’}, \text{‘\}’}, \text{‘,’}\}$. On écrit en OCaml la fonction `to_string` définie telle que si (`affiche` $\mathscr{A}$) et (`affiche` $\mathscr{A}'$) donnent le même affichage, alors $\mathscr{A} = \mathscr{A}'$.

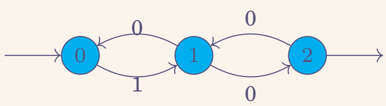


Figure 29 – Codage d'un automate par une chaîne de caractères

Par exemple, on représente l'automate ci-dessus par

$$\text{“}(\{0, 1, 10\}, \{0\}, \{10\}, \{(0, 0, 1), (1, 0, 10), (10, 0, 1), (1, 1, 0)\}).\text{”}$$

```
let affiche (Q,I,F,δ) =
```

Code 3 – Fonction `affiche` affichant un automate

À faire : Recopier le code

Exercice:
Supposons que tout langage est reconnaissable. Soit $L = \{w \in \Sigma^* \mid \exists \mathscr{A},\ w \leftarrow \texttt{affiche}\ \mathscr{A}$ et $w \notin \mathscr{L}(\mathscr{A})\}$. Soit B un automate tel que $L = \mathscr{L}(B)$. Soit $w \in$ `affiche` B. Si $w \in L$, alors il existe un automate tel que $w =$ `affiche` $\mathscr{A}$ et $w \notin \mathscr{L}(\mathscr{A})$. D'où $\mathscr{A} = B$ par injectivité et donc $w \notin \mathscr{L}(B) = L$, ce qui est absurde. Sinon, si $w \notin L$, alors $w =$ `affiche` B avec $w \notin \mathscr{L}(B)$ et $w \in L$, ce qui est absurde.

Annexe A. Comment prouver la correction d'un programme ?

Avec $\Sigma = \{a, b\}$. Comment montrer qu'un mot a au moins un a et un nombre pair de b.

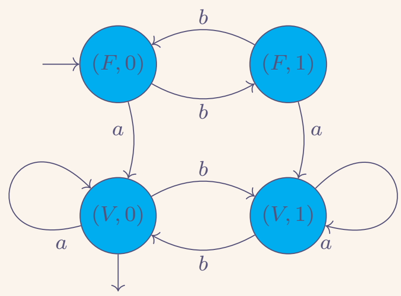


Figure 30 – Automate reconnaissant les mots valides

On veut montrer que

$$P_w : \text{« } \forall w \in \Sigma^*,\ \forall q \in \mathbb{Q},\ (\text{il existe une exécution par } w \text{ menant à } q) \iff w \text{ satisfait } I_q \text{ »}$$

où

$$I_{(\underset{\mathbb{B}}{\underset{\cap}{v}},\ \underset{\{0,1\}}{\underset{\cap}{r}})} \quad : \quad (|w|_a \geqslant 1 \iff v) \text{ et } (r = |w|_b \bmod 2).$$

On le montre par récurrence sur la longueur de w :

“ $\Longrightarrow$ ” — Pour $w = \varepsilon$, alors montrons que $\forall q \in \mathbb{Q}$, il existe un exécution menant à q étiquetée par w (noté $\xrightarrow[\mathscr{A}]{w} q$) si et seulement si w satisfait I_q.

- $\xrightarrow[\mathscr{A}]{\varepsilon} (\boldsymbol{F}, 0)$ est vrai, de plus ε satisfait $I_{(\boldsymbol{F},0)}$;
- sinon si $q \neq (\boldsymbol{F}, 0)$, alors $\xrightarrow[\mathscr{A}]{\varepsilon} q$ est fausse, de plus ε ne satisfait pas I_q.

— Supposons maintenant P_w vrai pour tout mot w de taille n. Soit $w = w_1 \dots w_n w_{n+1}$ un mot de taille $n + 1$. Notons $\underset{\sim}{w} = w_1 \dots w_n$. Montrons que P_w est vrai. Soit $q \in \mathbb{Q}$. Supposons $\xrightarrow[\mathscr{A}]{w} q$.

- Si $q = (\boldsymbol{F}, 0)$ et $w_{n+1} = b$. On a donc $\xrightarrow[\mathscr{A}]{\underset{\sim}{w}} (\boldsymbol{F}, 1)$, et, par hypothèse de récurrence, $\underset{\sim}{w}$ satisfait. Donc $|\underset{\sim}{w}|_a = 0$ et $|\underset{\sim}{w}|_b \equiv 1\ [2]$ donc $|w|_a = 0$ et $|w|_b \equiv 0\ [2]$ donc w satisfait $I_{(\boldsymbol{F},0)}$.
- De même pour les autres cas.

“ $\Longleftarrow$ ” Réciproquement, supposons que w satisfait I_q.

— Si $w = (\boldsymbol{V}, 0)$ et $w_{n+1} = a$. Alors,

- si $|\underset{\sim}{w}|_a = 0$, alors $\underset{\sim}{w}$ satisfait $I_{(\boldsymbol{F},0)}$. Par hypothèse de récurrence, on a donc $\xrightarrow[\mathscr{A}]{\underset{\sim}{w}} (\boldsymbol{F}, 0)$ et donc $\xrightarrow[\mathscr{A}]{w} (\boldsymbol{V}, 0)$.
- si $|\underset{\sim}{w}|_b \geqslant 1$, alors $\underset{\sim}{w}$ satisfait $I_{(\boldsymbol{V},0)}$ donc $\xrightarrow[\mathscr{A}]{\underset{\sim}{w}} (\boldsymbol{V}, 0)$ et donc $\xrightarrow[\mathscr{A}]{w} (\boldsymbol{V}, 0)$.

— De même pour les autres cas.

On a donc bien

$$\forall w \in \Sigma^*, \forall q \in \mathbb{Q},\ \xrightarrow[\mathscr{A}]{w} q \iff w \text{ satisfait } I_q.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(\mathscr{A}) &= \{w \in \Sigma^* \mid \exists f \in F,\ \xrightarrow[\mathscr{A}]{w} f\}\\
&= \{w \in \Sigma^* \mid \xrightarrow[\mathscr{A}]{w} (\boldsymbol{V}, 0)\}\\
&= \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ satisfait } I_{(\boldsymbol{V},0)}\}\\
&= \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \geqslant 1 \text{ et } |w|_b \equiv 0\ [2]\}
\end{aligned}$$

Annexe B. Hors-programme

Définition: On appelle monoïde un ensemble M muni d'une loi "$\cdot$" interne associative admettant un élément neutre 1_M.

Définition: Étant donné deux monoïdes M et N, on appelle morphisme de monoïdes une fonction $\mu : M \to N$ telle que

1. $\mu(1_M) = 1_N$;
2. $\mu(x \cdot_M y) = \mu(x) \cdot_N \mu(y)$.

Exemple:
$|\cdot| : (\Sigma^*, \cdot) \to (\mathbb{N}, +)$ est un morphisme de monoïdes.

Définition: Un langage L est dit reconnu par un monoïde M, un morphisme $\mu : \Sigma^* \to M$ et un ensemble $P \subseteq M$ si $L = \mu^{-1}(P)$.

Exemple:
L'ensemble $\{a^{n^3} \mid n \in \mathbb{N}\}$ est reconnu par le morphisme $|\cdot|$ et l'ensemble $P = \{n^3 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Théorème: Un langage est régulier si et seulement s'il est reconnu par un monoïde fini.

Exemple:
L'ensemble $\{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un langage régulier. En effet, on a $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $P = \{0\}$ et

$$\begin{aligned}
\mu : \Sigma^* &\longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\\
w &\longmapsto |w| \bmod 2.
\end{aligned}$$

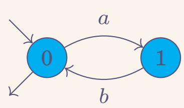


Figure 31 – Automate reconnaissant $\mu^{-1}(P) = L$

Preuve: "$\Longrightarrow$" Soit $L \in \wp(\Sigma^*)$ reconnu par un monoïde M fini, un morphisme μ et un ensemble $P : L = \mu^{-1}(P)$. Posons $\mathscr{A} = (\Sigma', \mathbb{Q}, I, F, \delta)$ avec

$$\Sigma' = \Sigma \qquad \mathbb{Q} = M \qquad I = \{1_M\} \qquad F = P$$
$$\delta = \{(q, \ell, q') \in \mathbb{Q} \times \Sigma \times \mathbb{Q} \mid q \cdot \mu(\ell) = q'\}.$$

Montrons que $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = L$. Soit $w \in \mathscr{L}(\mathscr{A})$. Il existe une exécution acceptante

$$1_M = q_0 \xrightarrow{w_1} q_1 \to \cdots \xrightarrow{w_n} q_n \in P.$$

Or, $\mu(w_1 \dots w_n) = \prod_{i=1}^n \mu(w_i) = q_0 \prod_{i=1}^n \mu(w_i) = q_0\mu(w_1)\cdot\prod_{i=1}^n \mu(w_i) = q_1 \prod_{i=1}^n \mu(w_i) = q_n \in P$.

$\square$