Chapitre 2

Algèbre linéaire

Hugo Salou MPI*

Dernière mise à jour le 25 octobre 2022

Première partie

Cours

Rappel:
La *dimension* d'un espace vectoriel est le nombre de vecteurs dans une base de cet espace vectoriel.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, n. On a

$$P = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vec{\varepsilon}_1 & \vec{\varepsilon}_2 & \dots & \vec{\varepsilon}_n \end{matrix} & \end{array}.$$

Vielle base | Nouvelle base

$$\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) \xrightarrow[P]{\qquad\qquad} \mathscr{B}' = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$$

$$[\vec{x}]_{\mathscr{B}} = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \boxed{X = PX'} \qquad [\vec{x}]_{\mathscr{B}'} = X = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Figure 1 – Formule de passage (vecteurs)

On considère maintenant un endomorphisme f.

Vielle base | Nouvelle base

$$\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) \xrightarrow[P]{\qquad\qquad} \mathscr{B}' = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$$

$$[f]_{\mathscr{B}} = A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \qquad \boxed{A' = P^{-1}X'P} \qquad [f]_{\mathscr{B}'} = A' \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$$

Figure 2 – Formule de passage (endomorphismes)

On a

$$A = [f]_{\mathscr{B}} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \dots & f(\vec{e}_n) \end{matrix} & \end{array}.$$

Exercice 1:
On doit montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$. On appelle la vielle base $\mathscr{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et la nouvelle $\mathscr{B}' = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$. On a

$$A = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \end{matrix} \\ \begin{matrix} f(\vec{\imath}) & f(\vec{\imath}) \end{matrix} & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{\varepsilon}_1 \\ \vec{\varepsilon}_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} f(\vec{\varepsilon}_1) & f(\vec{\varepsilon}_2) \end{matrix} & \end{array}.$$

La question devient donc de trouver $\vec{\varepsilon}_1$ et $\vec{\varepsilon}_2$.

On a $f(\vec{\varepsilon}_1) = \vec{\varepsilon}_1$ et $f(\vec{\varepsilon}_2) = \vec{\varepsilon}_2$. L'endomorphisme f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(\vec{\varepsilon}_1)$ où $\vec{\varepsilon}_1 = \binom{\cos \theta/2}{\sin \theta/2}$. On représente la situation dans la FIGURE ci-dessous.

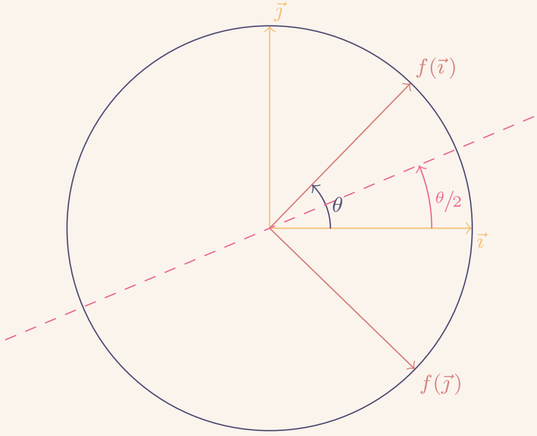

FIGURE 3 – Schéma représentant l'EXERCICE 1

On en déduit la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice n'est, par contre, pas unique : elle peut être multipliée par un réel non nul sur chacune des colonnes et répondre quand même au problème. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 8\cos \frac{\theta}{2} & -3\sin \frac{\theta}{2} \\ 8\sin \frac{\theta}{2} & 3\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

est aussi une matrice valide.

Autre méthode. On “sort les expressions des vecteurs d'un chapeau” : soient $\vec{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$ et $\vec{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta \, \cos \frac{\theta}{2} + \sin\theta \, \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin\theta \cos \frac{\theta}{2} - \cos\theta \, \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où, $f(\vec{\varepsilon}_1) = \vec{\varepsilon}_1$. De la même manière, on vérifie $f(\vec{\varepsilon}_2) = -\vec{\varepsilon}_2$.

Avant de quitter l'EXERCICE 1 : on vérifie que la matrice P est inversible. On rappelle qu'une matrice est inversible si et seulement si $\det(P) \neq 0$, si et seulement si les colonnes de P forment une base (ou les lignes), si et seulement si le rang de P est le même que la taille de P.

La trace est une opération linéaire : $\mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \,\mathrm{tr}\, A + \beta \,\mathrm{tr}\, B$. Attention, ce n'est pas vrai pour le déterminent : $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A \neq \alpha \det A$ où n est la taille de A. Il est cependant linéaire par rapport à chacune de ses colonnes.

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \neq \operatorname{tr} A \times \operatorname{tr} B \qquad \text{mais} \qquad \det(AB = \det(BA) = \det A \times \det B.$$

Le trace et le déterminant sont invariants par changement de base (par des opérations sur les lignes et les colonnes) : on dit que ces opérations sont invariantes par similitude.

Le noyau de f, noté $\operatorname{Ker} f$ est l'ensemble des x pour lesquels $f(x) = 0_F$. L'image de f, noté $\operatorname{Im} f$ est l'ensemble des $f(x)$ pour x dans E.

On a

$$\operatorname{Ker} f = \{0_E\} \iff f \text{ injective} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} f = F \iff f \text{ surjective.}$$

On rappelle le théorème du rang :

$$\boxed{\dim E = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = \dim \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{rg}(f).}$$

Dans le cas particulier où $\dim E = \dim F$, on a

$$\boxed{f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective.}}$$

Exercice 2:
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit

$$\begin{aligned} u : E &\overset{\text{linéaire}}{\longrightarrow} E \\ \vec{x} &\longmapsto u(\vec{x}). \end{aligned}$$

On considère S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$: $\operatorname{Ker} u \oplus S = E$. Ce supplémentaire existe d'après le théorème de la base incomplète. On montre que S est isomorphe à $\operatorname{Im} u$. On pose

$$\begin{aligned} f : S &\longrightarrow \operatorname{Im} u \\ \vec{x} &\longmapsto u(\vec{x}) \end{aligned}$$

On montre aisément que f est linéaire car u est, elle-même, linéaire.

Soit $\vec{x} \in S$.

$$\begin{aligned} \vec{x} \in \operatorname{Ker} f &\iff f(\vec{x}) = \vec{0} = u(\vec{x}) \\ &\iff \vec{x} \in \operatorname{Ker}(u) \cap S \\ &\iff \vec{x} = \vec{0} \end{aligned}$$

Donc f est injective.

Soit $\vec{y} \in \operatorname{Im} u$. Soit $\vec{x} \in E$ tel que $u(\vec{x}) = \vec{y}$. Soient $\vec{a} \in S$ et $\vec{b} \in \operatorname{Ker} u$ tels que $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$. On a $u(\vec{x}) = u(\vec{a}) = f(\vec{a}) = y$. On en déduit que f est surjective.

On en déduit donc que $\dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Im} u) = \dim E$: le théorème du rang.

Exercice 3:
Une forme linéaire φ est une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dans $\mathbb{K}$.

1. Montrons que φ est, ou bien nulle, ou bien surjective. On vérifie aisément le cas où φ est nulle. Si φ n'est pas nulle, il existe $\vec{x} \in E$ tel que $\varphi(\vec{x}) \neq 0_{\mathbb{K}}$. Alors, on sait que $\varphi(\vec{x}/\varphi(x)) = 1$ par linéarité. Donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on peut trouver un antécédent $\vec{y} = \frac{\lambda}{\varphi(\vec{x})}\vec{x}$ de λ : $\varphi(\vec{y}) = \lambda$.

   On rappelle également que le noyau d'une forme linéaire non nulle est un *hyperplan* (la dimension vue l'année dernière d'un hyperplan comme un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ n'est pas valable en dimension finie ; cette nouvelle définition est valable en dimension infinie). C'est ce que nous allons montrer dans les deux prochaines questions.

2. Soit H un hyperplan. On sait donc que $H = \operatorname{Ker}\varphi$ où φ est une forme linéaire non nulle (par définition). Ainsi, d'après le théorème du rang, $\dim E = \dim \operatorname{Ker}(\varphi) + \dim \operatorname{Im}(\varphi)$. Ainsi, d'après la question 1., comme φ est non nulle, elle est surjective et donc $\dim \operatorname{Im}(\varphi) = 1$. On en conclut que
$$\dim E = \dim H + 1 \qquad \text{i.e.} \qquad \dim H = n - 1.$$
3. Réciproquement, on suppose $\dim H = n-1$. Montrons que H est un hyperplan i.e. montrons qu'il existe une forme linéaire φ telle que $H = \operatorname{Ker}\varphi$. Je choisi une base $(\vec\varepsilon_1, \vec\varepsilon_2, \dots, \vec\varepsilon_{n-1})$ de H. Par le théorème de la base incomplète, soit $\vec\varepsilon_n$ tel que $(\vec\varepsilon_1, \dots, \vec\varepsilon_n)$ soit une base de E. Soit φ une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ définie comme
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \vec x = x_1\vec\varepsilon_1 + x_2\vec\varepsilon_2 + \dots + x_{n-1}\vec\varepsilon_{n-1} + x_{n-1}\vec\varepsilon_n & \longmapsto & x_n. \end{array}$$
φ n'est pas nulle car $\varphi(\vec\varepsilon_n) = 1 \neq 0$. On a donc $\operatorname{Ker}\varphi = H$.
4. L'application tr est une forme linéaire de $\mathscr{M}_{nn}(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$. Soit $M \in \mathscr{M}_{nn}(\mathbb{K})$. On pose
$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
On sait que $M \in \operatorname{Ker}\varphi$ si et seulement si $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = 0$ i.e. $a_{nn} = -a_{11} - a_{22} - \dots - a_{n-1,n-1}$. Il y a donc $n-1$ contraintes (i.e. coordonnées). Ainsi,
$$M \in \operatorname{Ker}\operatorname{tr} \iff M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n-1,n-1} & k \end{pmatrix}$$
où $k = -a_{11} - a_{22} - \dots - a_{n-1,n-1}$. D'où,
$$M \in \operatorname{Ker}\varphi \iff M = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} + \cdots.$$
Donc, ces $n^2 - 1$ matrices forment une base de $\operatorname{Ker}\operatorname{tr}$.

Exercice 4:
Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1. On veut montrer que $\bigcap_{i\in I} F_i$ est aussi un sous-espace vectoriel. On sait que $\forall i \in I$, $0_E \in F_i$ car F_i est un sous-espace vectoriel de E. Montrons que $\bigcap_{i\in I} F_i$ est stable par combinaisons linéaires (i.e. superpositions). Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $\vec x, \vec y \in \bigcap_{i\in I} F_i$. On veut montrer que $\alpha\vec x + \beta\vec y \in \bigcap_{i\in I} F_i$. Pour tout $i \in I$, F_i est stable par combinaisons linéaires d'où $\alpha\vec x + \beta\vec y \in F_i$. Donc, comme ceci est vrai pour tout i, on en déduit que $\alpha\vec x + \beta\vec y \in \bigcap_{i\in I} F_i$.
2. On donne un contre-exemple. On se place dans le cas $E = \mathbb{R}^2$. On pose $G = \operatorname{Vect}(\vec\jmath)$ et $H = \operatorname{Vect}(\vec\imath)$. On a $\vec\imath + \vec\jmath \notin F \cup G$ car $\vec\imath + \vec\jmath \notin F$ et $\vec\imath + \vec\jmath \notin G$.

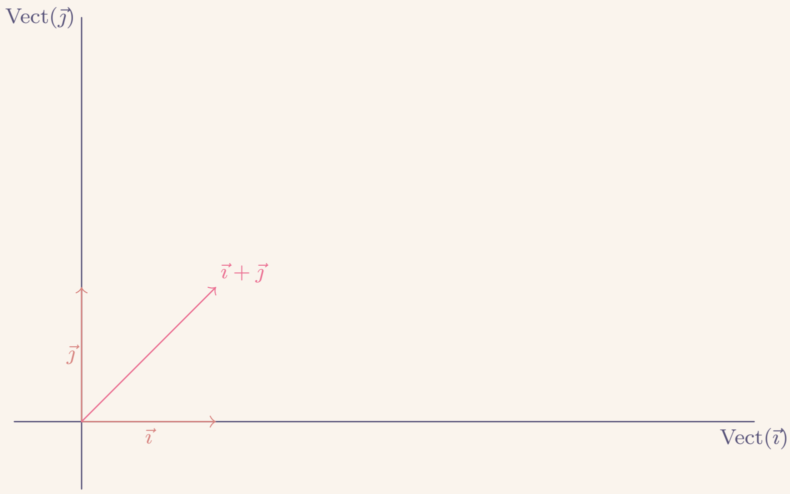

Figure 4 – Contre-exemple : union de sous-espaces vectoriels n'en est pas un

3. (a) On montre d'abord que si $F \subset G$ ou $G \subset F$, alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E. Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$ qui est un sous-espace vectoriel de E. Si $G \subset F$, alors $F \cup G = F$ qui est un sous-espace vectoriel de E.

   (b) On montre que si $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$, alors $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel. On sait donc, par hypothèse, qu'il existe $\vec{g} \in G$ tel que $\vec{g} \notin F$; et, qu'il existe $\vec{f} \in F$ tel que $\vec{f} \notin G$. Or, $\vec{f} + \vec{g} \notin F$ et $\vec{f} + \vec{g} \notin G$ et donc $\vec{f} + \vec{g} \notin F \cup G$. On en déduit que $F \cup G$ n'est pas stable par combinaisons linéaires.

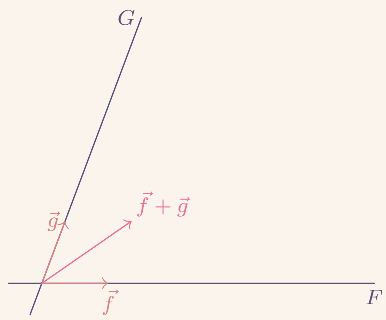

Figure 5 – L'union de deux sous-espaces vectoriels non inclus n'est pas un sous-espace vectoriel

4. On le fait dans le cas où $r = 2$. On peut ensuite procéder à une récurrence pour le faire pour tout r. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies respectivement d_1 et d_2. Soient $\vec{x}_1 \in F_1$ et $\vec{x}_2 \in F_2$. On sait que $\alpha(\vec{x}_1, \vec{x}_2) + \beta(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{y}_1, \alpha\vec{x}_2 + \beta\vec{y}_2)$. Montrons que $\dim(F_1 \times F_2) = d_1 + d_2 = \dim F_1 + \dim F_2$. Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{d_1})$ une base de F_1 et $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_{d_2})$ une base de F_2. On décompose $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ dans ces bases :

$$F_1 \ni \vec{x}_1 = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \cdots + \alpha_{d_1}\vec{e}_{d_1}$$
et
$$F_2 \ni \vec{x}_2 = \beta_1\vec{f}_1 + \beta_2\vec{f}_2 + \cdots + \beta_{d_2}\vec{f}_{d_2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}F_1 \times F_2 \ni (\vec{x}_1, \vec{x}_2) &= (\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \cdots, \beta_1\vec{f}_1 + \beta_2\vec{f}_2 + \cdots) \\ &= \alpha_1(\vec{e}_1, \vec{0}) + \alpha_2(\vec{e}_2, \vec{0}) + \cdots + \beta_1(\vec{0}, \vec{f}_1) + \beta_2(\vec{0}, \vec{f}_2) + \cdots .\end{aligned}$$

Rappel:
Comment montrer que $x \in \bigcap_{i\in I} F_i$? On montre que, pour tout $i \in I$, on a $x \in F_i$.

Comment montrer que $x \in \bigcup_{i\in I} F_i$? On montre qu'il existe $i \in I$, tel que $x \in F_i$.

Définition 5:
Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. La *somme* des sous-espaces vectoriels F_i est S si, pour tout $v \in E$,

$$v \in S \iff \exists(v_1, \ldots, v_r) \in F_1 \times \cdots \times F_r,\ v = v_1 + \cdots + v_r.$$

On note alors $S = \sum_{i\in I} F_i$. La somme est *directe* si

$$\forall v \in S,\ \exists!(v_1, \ldots, v_r) \in F_1 \times \cdots \times F_r,\ v = v_1 + \cdots + v_r.$$

On note alors $S = \bigoplus_{i\in I} F_i$.

Exercice 6:
On a $E = \mathbb{R}_3[X]$. On veut d'abord montrer $F + G + H$, puis que cette somme est directe et enfin que F, G et H sont supplémentaires. C'est à dire, on veut montrer que tout vecteur de E (3) peut s'écrire de manière unique (2) comme la somme d'un vecteur de F, d'un vecteur de G et d'un vecteur de H.

Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$P = \underbrace{\alpha X(X-1)(X-2)}_{\in F} + \underbrace{\beta(X-1)(X-2)(X-3)}_{\in G} + \underbrace{\gamma + \delta X^2}_{\in H}$$

$$\iff (\heartsuit) : \begin{cases} -6\beta + \gamma = a \\ 2\alpha + 11\beta = b \\ -3\alpha + 6\beta + \delta = c \\ \alpha + \beta = d \end{cases}$$

Montrons que le système $(\heartsuit)$ a une unique solution.

1$^{\text{ère}}$ méthode : on applique la méthode du pivot de Gauß. On a

$$(\heartsuit) \iff \begin{cases} \delta - 6\beta - 3\alpha = c \\ \gamma - 3\beta = a \\ \beta + \alpha = d \\ 11\beta + 2\alpha = b \end{cases}.$$

Le système est triangulaire, il a donc une unique solution.

2$^{\text{nde}}$ méthode : on calcule le rang du système $(\heartsuit)$. La matrice A la matrice des coefficients :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 1 & 0 \\ 2 & 11 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut montrer que $\operatorname{rg} A = 4$ ou montrer que A est inversible i.e. $\det A \neq 0$.

Proposition 7:
1. La somme des sous-espaces vectoriels F_i est un sous-espace vectoriel de E.
2. Si la dimension des sous-espaces vectoriels F_i est finie, alors $\dim\left(\sum_{i\in I} F_i\right) \leqslant \sum_{i\in I} \dim F_i$.
3. La somme est directe si et seulement si $\dim\left(\sum_{i\in I} F_i\right) = \sum_{i\in I} \dim F_i$.

Preuve:
Soit φ l'application linéaire définie ci-dessous :

$$\begin{aligned}\varphi : F_1 \times \cdots \times F_r &\longrightarrow E \\ (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r) &\longmapsto \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_r.\end{aligned}$$

1. $\operatorname{Im}\varphi$ est un sous-espace vectoriel de E car φ est une application linéaire (cf. cours de première année). Or, $\operatorname{Im}\varphi = F_1 + \cdots + F_r$ d'après la définition 5.
2. On applique le théorème du rang à φ :

$$\dim(F_1 \times \cdots \times F_r) = \dim(\operatorname{Ker}\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi).$$

Or, d'après l'exercice 4, $\dim(F_1 \times \cdots F_r) = \dim F_1 + \cdots + \dim F_r$; et, $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim(F_1 + \cdots + F_r)$ d'après la question 1. Comme $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) \geqslant 0$, on a donc

$$\sum_{i=1}^{r} \dim F_i \geqslant \dim\Big(\sum_{i=1}^{r} F_i\Big).$$

3. La somme $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_1 + \cdots + F_r$ est directe si et seulement si φ est injective si et seulement si $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_E\}$ si et seulement si $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 0$. On en déduit donc, en reprenant l'expression de 2., on a

$$\sum_{i=1}^{r} \dim F_i = \dim\Big(\sum_{i=1}^{r} F_i\Big).$$

Exercice 8 (somme de **deux** espaces vectoriels):
On pose $E = \mathbb{R}^2$, et $n = 3$. Soient F_1, F_2 et F_3 trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

On a $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \{\vec{0}\}$: $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$, $F_2 \cap F_3 = \{\vec{0}\}$ et $F_1 \cap F_3 = \{\vec{0}\}$. Mais, la somme $F_1 + F_2 + F_3$ n'est pas directe car $\vec{\imath} + \vec{\jmath} = \vec{0} + \vec{0} + (\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{0}$.

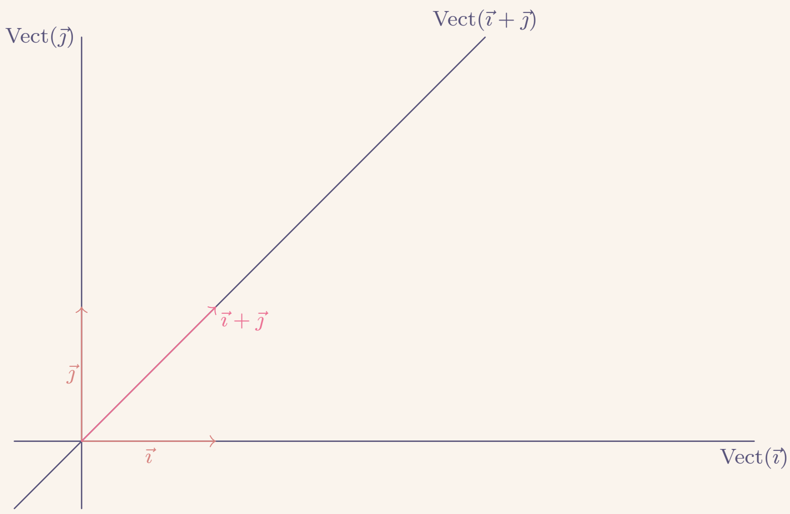

Figure 6 – Contre-exemple des propriétés de la somme dans de trois sous-espaces vectoriels

Néanmoins, pour $r = 2$, on a bien la formule de Grassmann :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

On pose l'application linéaire φ comme définie ci-dessous :

$$\begin{aligned}\varphi : F \times G &\longrightarrow E \\ (\vec{x}_1, \vec{x}_2) &\longmapsto \vec{x}_1 + \vec{x}_2.\end{aligned}$$

On a, d'après le théorème du rang,

$$\dim(F \times G) = \dim(\operatorname{Ker}\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi).$$

Or, $\dim(F \times G) = \dim F + \dim G$ d'après l'EXERCICE 4 ; et, comme $\operatorname{Im}\varphi = F + G$ et donc $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim(F+G)$. Il reste à montrer que $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = \dim(F \cap G)$.

On sait que $\operatorname{Ker}\varphi = \{(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in F \times G \mid \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{0}\} = \{(\vec{x}, -\vec{x}) \in F \times G\}$. Or, on sait que $\forall \vec{x} \in F$, $-\vec{x} \in F$ et on en déduit donc que $\operatorname{Ker}\varphi = \{(\vec{x}, -\vec{x}) \in (F \cap G)^2\}$. D'où, l'application

$$\begin{aligned} h : F \cap G &\longrightarrow \operatorname{Ker}\varphi \\ \vec{x} &\longmapsto (\vec{x}, -\vec{x}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme par construction.

La somme est directe si et seulement si $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$ donc si et seulement si $\dim(F \cap G) = 0$ et donc si et seulement si $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

REMARQUE 9:
Il est important de vérifier que $E = F \oplus G$. On dit que p est un projecteur et que $p(\vec{x})$ est le projeté de $\vec{x}$ sur F parallèlement à G. Du dessin du polycopié, on en déduit que, pour tout vecteur $\vec{x}$, on a $\vec{x} + s(\vec{x}) = 2p(\vec{x})$; d'où, $\mathrm{id}_E + s = 2p$. Un projecteur p projette sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$. Une symétrie s est une symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

EXERCICE 10:
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux supplémentaires dans E. Soit p un projecteur sur F parallèlement à G. Sans perte de généralité, on peut se placer dans une base particulière, adaptée au problème (à la somme directe $F \oplus G$) car tr et rg sont, ou bien invariants par changement de base, ou bien invariants de similitude. Soit $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r, \vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E telle que $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r)$ est une base de F et $(\vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de G. Une telle base $\mathscr{B}$ existe car F et G sont supplémentaires.

$$[p]_{\mathscr{B}} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_r \\ \vec{e}_{r+1} \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{array} \\ \begin{array}{cc} p(\vec{e}_1) \ldots p(\vec{e}_r) & p(\vec{e}_{r+1}) \ldots p(\vec{e}_n) \end{array} \end{array}.$$

DÉFINITION 11:
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. On dit que F est stable par f si $\forall \vec{x} \in F$, $f(\vec{x}) \in F$ i.e. $f(F) \subset F$.

Si F est stable par f, alors l'application

$$\begin{aligned} f\big|_F = g : F &\longrightarrow F \\ \vec{x} &\longmapsto f(\vec{x}) \end{aligned}$$

existe et on dit que c'est l'*endomorphisme induit* par f sur F.

RAPPEL:
On dit que $f(F)$ est l'*image directe* de F par f.

EXEMPLE 12:
1. $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par l'application D définie comme

$$\begin{aligned} D : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P(X) &\longmapsto P'(X). \end{aligned}$$

2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans un espace vectoriel E. Alors F et G sont stables par le projecteur p sur F parallèlement à G. Et, aussi par la symétrie s par rapport à F parallèlement à G. On a aussi

$$p\big|_F = \mathrm{id}_F\,; \qquad p\big|_G = \tilde{0}\,; \qquad s\big|_F = \mathrm{id}_F\,; \qquad s\big|_G = -\,\mathrm{id}_G.$$

Exercice 13:
On pose (i, j, k) une base de $\mathbb{R}^3$. Et, on pose

$$A = [f]_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'application f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(\vec{\imath}+\vec{\jmath}, \vec{k})$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(\vec{\imath}-\vec{\jmath})$. Les droites vectorielles $\mathrm{Vect}(\vec{\imath}-\vec{\jmath})$, $\mathrm{Vect}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$ et $\mathrm{Vect}(\vec{k})$ sont stables par f.

On cherche maintenant une base $\mathscr{C}$ telle que f soit diagonale. Avec $\mathscr{C} = (\vec{\imath}-\vec{\jmath}, \vec{\imath}+\vec{\jmath}, \vec{k})$, on a

$$[\mathscr{C}]_{\mathscr{C}} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{\varepsilon}_1 \\ \vec{\varepsilon}_2 \\ \vec{\varepsilon}_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} f(\vec{\varepsilon}_1) & f(\vec{\varepsilon}_2) & f(\vec{\varepsilon}_3) \end{matrix} \end{array}$$

car $f(\vec{\varepsilon}_1) = -\vec{\varepsilon}_1$ car $f(\vec{\imath}-\vec{\jmath}) = -(\vec{\imath}-\vec{\jmath})$ car

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On procède de même pour ε_2 et ε_3.

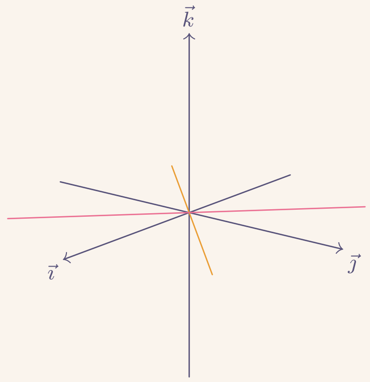

Figure 7 – Dessin pour l'application f

Proposition 14:
Soient $u : E \to E$ et $v : E \to E$ deux endomorphismes tels que $u \circ v = v \circ u$, alors le noyau $\mathrm{Ker}\, u$ $(\star)$ et l'image $\mathrm{Im}\, u$ $(\star\star)$ sont des sous-espaces vectoriels stables par v.

Preuve: $(\star)$: On veut montrer que $\forall \vec{x} \in \mathrm{Ker}\, u$, $v(\vec{x}) \in \mathrm{Ker}\, u$. Soit $\vec{x} \in \mathrm{Ker}\, u$. On a $u(\vec{x}) = \vec{0}$ d'où $v(u(\vec{x})) = v(\vec{0}) = \vec{0}$ i.e. $v \circ u(\vec{x}) = \vec{0}$ d'où $u \circ v(\vec{x}) = \vec{0}$ i.e. $u(v(\vec{x})) = \vec{0}$ d'où $v(\vec{x}) \in \mathrm{Ker}\, u$.

$(\star\star)$: On veut montrer que $\forall \vec{y} \in \mathrm{Im}\, u$, $v(\vec{y}) \in \mathrm{Im}\, u$. Soit $\vec{y} \in \mathrm{Im}\, u$. D'où, il existe $\vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = u(\vec{x})$. Alors, $v(\vec{y}) = v(u(\vec{x})) = v \circ u(\vec{x})$ d'où $v(\vec{y}) = u \circ v(\vec{x}) = u(v(\vec{x}))$.

Exercice 15:
Soient u et v deux endomorphismes tels que $u \circ v = v \circ u$. L'ensemble des vecteurs invariants par u est $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ car

$$u(\vec{x}) = \vec{x} \iff u(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{0} \iff (u - \mathrm{id}_E)(\vec{x}) = \vec{0} \iff \vec{x} \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E).$$

Comme cet ensemble est un noyau, c'est un sous-espace vectoriel de E. Or, $u - \mathrm{id}_E$ et v commutent d'après la démonstration qui suit, d'où $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ est stable par v.

$$\begin{aligned}\forall \vec{x} \in E,\ (u - \mathrm{id}_E) \circ v(\vec{x}) &= (u - \mathrm{id}_E)\big(v(\vec{x})\big)\\ &= u(v(\vec{x})) - v(\vec{x})\\ &= u \circ v(\vec{x}) - v(\vec{x})\\ &= v \circ u(\vec{x}) - v(\vec{x})\end{aligned}$$

car $u \circ v$ commutent par hypothèse. D'où $(u - \mathrm{id}_E) \circ v(\vec{x}) = v \circ (u - \mathrm{id}_E)(\vec{x})$ donc $(u - \mathrm{id}_E) \circ v = v \circ (u - \mathrm{id}_E)$.

Méthode 16:
c.f. poly

Exercice 17:
c.f. poly

Définition 18:
Soit $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme.

Avec $P(X) = X^k$, alors $P(A) = A^k = \overbrace{A \times A \times \cdots \times A}^{k \text{ fois}}$, et $P(u) = u^k = \overbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}^{k \text{ fois}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Avec $k = 0$, on a $P(X) = X^0$, et donc $P(A) = A^0 = I_n$, et $P(u) = u^0 = \mathrm{id}_E$.

Avec $P(X) = 2 + 8X + 4X^7$, on a donc $P(A) = 2I_n + 8A + 4A^7$ et $P(u) = 2\,\mathrm{id}_E + 8u + 4u^7$.

Si E est de dimension finie, on a $\big[P(u)\big]_{\mathscr{B}} = P\big([u]_{\mathscr{B}}\big)$.

Proposition 19:
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a

$$(\alpha P + \beta Q)(u) = \alpha P(u) + \beta Q(u) \qquad \text{et} \qquad (P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u).$$

De même, on a

$$(\alpha P + \beta Q)(A) = \alpha P(A) + \beta Q(A) \qquad \text{et} \qquad (P \times Q)(A) = P(A) \cdot Q(A).$$

Exemple:
On pose $P(X) = 2 + 3X^4$ et $Q(X) = 7 + 8X^2$, on a $P(X) \times Q(X) = 14 + 16X^2 + 21X^4 + 24X^6$, d'où, d'après la définition 18, on a, d'une part,

$$P \times Q(u) = 14\,\mathrm{id} + 16u^2 + 21u^4 + 24u^6.$$

D'autre part, en évaluant P en u, on a $P(u) = 2\,\mathrm{id} + 3u^4$ et $Q(u) = 7\,\mathrm{id} + 8u^2$, et donc

$$P(u) \circ Q(u) = (2\,\mathrm{id} + 3u^4) \circ (7\,\mathrm{id} + 8u^2) = 14\,\mathrm{id} + 16u^2 + 21u^4 + 24u^6.$$

Exercice 20:
Soient A et B deux matrices semblables et P un polynôme. Montrer que $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables et $P(A^\top) = P(A)^\top$.

Il existe un matrice $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = Q^{-1}AQ$. D'où $B^2 = (Q^{-1}AQ)(Q^{-1}AQ) = Q^{-1}A^2Q$. On peut démontrer que $B^k = Q^{-1}A^kQ$ par récurrence avec cette même méthode pour $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d$. On calcule

$$\begin{aligned}Q^{-1}P(B)Q &= Q^{-1}(a_0I_n + a_1B + \cdots + a_dB^d)Q\\ &= Q^{-1}I_nQ + a_1Q^{-1}BQ + a_2Q^{-1}B^2Q + \cdots + a_dQ^{-1}B^dQ\\ &= P(A).\end{aligned}$$

Se rappeler que $(AB)^\top = B^\top \cdot A^\top$. Ainsi, $(A^2)^\top = (A \cdot A)^\top = (A^\top)^2$. D'où $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(A^k)^\top = (A \times \cdots \times A)^\top = A^\top \cdots A^\top = (A^\top)^k$. De plus, $(A^0)^\top = I_n^\top = I_n = (A^\top)^0$. Et, comme la transposition est linéaire ($\forall \alpha, \beta, \forall A, B, (\alpha A + \beta B)^\top = \alpha A^\top + \beta B^\top$), on en déduit que

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(A^\top) = \big(P(A)\big)^\top.$$

Définition 21:
On dit qu'un polynôme P est *annulateur* de A si $P(A) = 0_{\mathscr{M}_{nn}(\mathbb{K})}$.

On dit qu'un polynôme P est *annulateur* de u si $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Et donc $\forall x \in E$, $P(u)(x) = 0_E$ (attention, ce n'est pas $P\big(u(x)\big)$.

Exemple 22:
On sait que p un projecteur si et seulement $p \circ p = p$. Autrement dit, si et seulement si $p \circ p - p = 0_{\mathscr{L}(E)}$, si et seulement si $Q(p) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ avec $Q(X) = X^2 - X$.

On sait que $\mathscr{s}$ est un symétrie si et seulement si $\mathscr{s} \circ \mathscr{s} = \mathrm{id}_E$, si et seulement si $\mathscr{s} \circ \mathscr{s} - \mathrm{id} = 0$, si et seulement si $\mathscr{s}^2 - \mathscr{s} = 0$ et donc $Q(\mathscr{s}) = 0$ où $Q(X) = X^2 - 1$.

Exercice 23:
On a

$$(I_n + J)^2 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} n & \dots & n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n & \dots & n \end{pmatrix} = n(I_n + J).$$

On rappelle que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ mais pour des matrices A et B, on a $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ car la multiplication n'est pas commutative en général. (Mais, c'est le cas dans cet exercice.)

Or, $(I_n + J)^2 = I_n + 2J + J^2$ car I_n et J commutent. D'où $I_n + 2J + J^2 = nI_n + nJ$. Donc $J^2 - (n-2)J - (n-1)I_n = 0_{\mathscr{M}_{nn}(\mathbb{K})}$ donc le polynôme

$$P(X) = X^2 - (n-2)X - (n-1)$$

est annulateur de la matrice J.

Méthode 24 (Inverser une matrice):
On applique cette méthode que si le polynôme annulateur n'a pas un terme constant nul. Sinon, on divise par 0.

Exercice 25:
On a montré que $J^2 - (n-2)J - (n-1)I_n = 0$. D'où $J^2 - (n-2)J = (n-1)I_n$. Donc $\frac{1}{n-1}J^2 - \frac{n-2}{n-1}J = I_n$ car $n - 1 \neq 0$. D'où $J \times \Big(\frac{1}{n-1}J - \frac{n-2}{n-1}I_n\Big) = I_n$. On en déduit que J est inversible et

$$J^{-1} = \frac{1}{n-1}J - \frac{n-2}{n-1}I_n.$$

Méthode 26 (Calculer les puissances d'une matrice):
On veut calculer $J^k = P(J)$ où $P = X^k \in \mathbb{K}[X]$. De plus, si on possède un polynôme annulateur de J : $Q(J) = 0$ (où, dans l'exemple $Q = X^2 - (n-2)X - (n-1)$). On réalise la division euclidienne $X^k \div Q$. On obtient un quotient $\mathcal{Q}_k$ et un reste $R_k = \alpha_k + \beta_k X$ car $\deg R_k < 2$. Ainsi, on a $J^k = Q(J) \times \mathcal{Q}_k(J) + R_k(J) = R_k(J)$.

Or, on sait calculer le polynôme R_k sans calculer le quotient (voir Annexe A.) Comment ? On a $X^k = Q(X) \times \mathcal{Q}(X) + R_k(X)$. Or, $Q(-1) = 0 = Q(n-1)$. D'où $(-1)^k = \alpha_k - \beta_k$ et $(n-1)^k = \alpha_k + \beta_k(n-1)$. On résout ce système pour déterminer α_k et β_k ; et donc $R_k(J) = \alpha_k I_n + \beta_k J$.

Exercice 27:
On sait que $J^2 - (n-2)J - (n-1)I_n = 0$. D'où $J^2 = (n-2)J + (n-1)I_n$. Or, en multipliant par J, et en utilisant l'expression de J^2, on en déduit que $J^3 \in \mathrm{Vect}(I_n, J)$. Et, de "proche en proche," on a $\forall k$, $J^k \in \mathrm{Vect}(I_n, J)$. Mais bof car on n'a pas la formule pour $J^k = \alpha I_n + \beta_k J$. Pour avoir ces coefficients, on utilise la méthode 26.

Proposition – Définition 28:
Toute matrice A possède un polynôme annulateur non nul. L'unique polynôme annulateur de A qui est unitaire et de degré minimal est appelé **le** *polynôme minimal* de A et est noté μ_A ou π_A.

Preuve:
On sait que $\dim \mathscr{M}_{nn}(\mathbb{K}) = n^2$. Soit $A \in \mathscr{M}_{nn}(\mathbb{K})$. On considère la famille $(A^0, A^1, A^2, A^3, \dots, A^{n^2})$ qui contient $n^2 + 1$ vecteurs. D'où cette famille est liée : il existe $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n^2}$ non nuls tels que

$$\alpha_0 A^0 + \alpha_1 A^1 + \dots + \alpha_{n^2} A^{n^2} = 0.$$

D'où $P(A) = 0$ où $P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \cdots + \alpha_{n^2} X^{n^2}$.

Ainsi, $\alpha + P(A) + \beta Q(A) = 0$ est un polynôme annulateur de A. D'où, l'ensemble $\mathcal{I}_A$ des polynômes annulateurs de A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

D'où $(\mathcal{I}_A, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$. Par ailleurs, si un polynôme $P \in \mathcal{I}_A$ et un autre polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$, alors le produit $P \times Q \in \mathcal{I}_A$ car $(P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A) = 0 \times Q(A) = 0$. On en déduit que $\mathcal{I}_A$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Or, tout idéal de l'ensemble des polynôme, d'après l'annexe A, est de la forme $P \cdot \mathbb{K}[X]$ i.e. l'ensemble des multiples d'un polynôme P. Il existe donc un unique polynôme unitaire P tel que $\mathcal{I}_A = P \cdot \mathbb{K}[X]$.

Exercice 29: 1. *Déterminer le polynôme minimal de la matrice J.*

2. *Montrer que la dérivation*
$$\begin{aligned} D : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$
ne possède pas de polynôme annulateur non nul.

3. *Montrer que deux matrices semblables ont la même polynômes annulateurs et donc le même polynôme minimal.*

1. Il n'existe pas de polynôme unitaire annulateur de J
   — de degré n (par l'absurde) : si $Q(J) = 1J + aI_n = 0$ alors $J = -aI_n$ et c'est absurde.
   — de degré 0 (par l'absurde) : si $Q(J) = aI_n = 0$ avec $a \neq 0$, ce qui est absurde.
   Donc $X^2 - (n-2)X - (n-1)$ est déjà le polynôme minimal de J.
2. On sait que D est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ de dimension infinie (en effet, on a $\mathbb{R}[X] \subset \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$). On procède par l'absurde. Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ (avec $a_n \neq 0$) un polynôme annulateur non nul de D. Alors, $\forall f \in \mathscr{C}^\infty$, $\big(a_0 \,\mathrm{id} + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_n D^n\big)(f) = 0$. Or, $\big(a_0 \,\mathrm{id} + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_n D^n\big)(f) = a_0 f + a_1 f' + a_2 f'' + \cdots + a_n f^{(n)}$. Ce qui est absurde car, avec $f : x \mapsto x^n$, on a $P(D)(f)(0) = a_n \times n! \neq 0$.
3. On démontre que le polynôme minimal est un *invariant de similitude*. Si $P(A) = 0$ et $A' = Q^{-1}AQ$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $P(A') = P(Q^{-1}AQ) = Q^{-1}P(A)Q = 0$ (c.f. exercice 20). Donc, l'ensemble des polynômes annulateurs de A est aussi celui de A'. *A fortiori*, A et A' ont le même polynôme minimal.

Remarque 30:
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. L'application
$$\begin{aligned} e_A : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \\ P &\longmapsto P(A) \end{aligned}$$
évalue chaque polynôme P en A. C'est un morphisme d'anneaux, d'espaces vectoriels et même d'algèbres.

Définition 31:
On dit qu'un endomorphisme u est *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$; on dit qu'une matrice carrée A est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$.

Exercice 32:
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice r : $A^r = 0$ mais $A^{r-1} \neq 0$.

1. Alors $\mu_A = X^r$: $\mu_A(A) = A^r = 0$ d'où μ_A est annulateur. Le polynôme μ_A est unitaire. Il n'existe pas de polynôme annulateur unitaire P de degré strictement inférieur à r car, sinon, $P \mid X^r$ d'où il existe $n < r$, $P = X^k$, or, si $P(A) = A^k = 0$, alors A est nilpotente d'indice $k < r$, ce qui est absurde.
2. (Tarte à la crème) On veut montrer que $r \leqslant n$. On pose $f : E \to E$ telle que $[f]_{\mathscr{B}} = A$ où E est un espace de dimension n, et ayant une base $\mathscr{B}$. On a $A^r = 0$ si et seulement si $f^r = 0$; et, $A^{r-1} \neq 0$ si et seulement si $f^{r-1} \neq 0$. On veut donc montrer que $r \leqslant \dim E$. Or, comme $f^{r-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, il existe $x \in E$ tel que $f^{r-1}(x) \neq 0_E$. Considérons maintenant $\big(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{r-1}(x)\big)$, une famille de r vecteurs, et cette partie est libre car : si (Hyp) : $\alpha_0 + \alpha_1 f(x) + \alpha_2 f^2(x) + \cdots + \alpha_{r-1} f^{r-1}(x) = 0$, alors f^{r-1}(Hyp)

donne $\alpha_0 f^{r-1}(x) = 0$ (grâce à la nilpotence de f), or $f^{r-1}(x) \neq 0$ d'où $\alpha_0 = 0$. On applique maintenant f^{r-2}, on a $\alpha_1 = 0$. De proche en proche, on a

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n.$$

D'où $\operatorname{Vect}\big(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x)\big)$ est un sous-espace vectoriel de dimension r. Or, $\dim E = n$ et donc $r \leqslant n$.

3. On a A^r et $r \leqslant n$ d'où $A^n = A^r \cdot A^{n-r} = 0 \times A^{n-r} = 0$.

Lemme 33 (des noyaux):
Soit u un endomorphisme de E. On considère un polynôme P annulateur de u. On factorise ce polynôme en r polynômes : $P(X) = \prod_{k=1}^r P_k(X)$. Alors,

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} P_k(u).$$

Si le polynôme n'est pas annulateur, on remplace E par $\operatorname{Ker} P(u)$ dans l'expression précédente (même si la plupart du temps, en TD, on utilise le cas où P est annulateur).

Preuve (par récurrence):
On initialise avec deux polynômes P_1 et P_2, premiers entre-eux. D'où, d'après le théorème de Bézout, il existe deux polynômes A_1 et A_2 de $\mathbb{K}[X]$ tels que $A_1(X) \times P_1(X) + A_2(X) \times P_2(X) = 1$. En particulier, $A_1(u) \circ P_1(u) + A_2(u) \circ P_2(u) = \mathrm{id}_E$. D'où, pour $x \in E$, $\big(A_1(u) \circ P_1(u)\big)(x) + \big(A_2(u) \circ P_2(u)\big)(x) = x$ $(*)$. On veut montrer que $\operatorname{Ker}\big((P_1 \times P_2)(u)\big) = \operatorname{Ker}\big(P_1(u)\big) \oplus \operatorname{Ker}\big(P_2(u)\big)$.

— Montrons que $\operatorname{Ker}\big(P_1(u)\big) \cap \operatorname{Ker}\big(P_2(u)\big) = \{0_E\}$. Soit $x \in \operatorname{Ker}\big(P_1(u)\big) \cap \operatorname{Ker}\big(P_2(u)\big)$. Alors $P_1(u)(x) = 0_E$, et, de même, $P_2(u)(x) = 0_E$. Or,

$$\big(A_1(u) \circ \underbrace{P_1(u)\big)(x)}_{0_E} + \big(A_2(u) \circ \underbrace{P_2(u)\big)(x)}_{0_E} = x.$$

D'où $x = 0_E$.

— Montrons que $\operatorname{Ker} P_1(u) + \operatorname{Ker} P_2(u) \subset \operatorname{Ker}(P_1P_2)(u)$. Soit $x \in \operatorname{Ker} P_1(u) + \operatorname{Ker} P_2(u)$. Alors, il existe $x_1 \in \operatorname{Ker} P_1(u)$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} P_2(u)$ tels que $x = x_1 + x_2$. Or, $\big(P_1(u) \circ P_2(u)\big)(x_2) = P_1(u)\big(P_2(u)(x_2)\big) = 0_E$ et $\big(P_2(u) \circ P_1(u)\big)(x_1) = P_2(u)\big(P_1(u)(x_1)\big) = 0_E$. D'où $\big(P_1(u) \circ P_2(u)\big)(x) = 0_E$. D'où $P_1P_2(u)(x) = 0_E$ et donc $x \in \operatorname{Ker}(P_1P_2)(x)$.

— Montrons que $\operatorname{Ker} P_1(u) + \operatorname{Ker} P_2(u) \supset \operatorname{Ker}(P_1P_2)(u)$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(P_1P_2)(u)$. D'après $(*)$, $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 = \big(A_1(u) \circ P_1(u)\big)(x)$ et $x_2 = \big(A_2(u) \circ P_2(u)\big)(x)$. Alors

$$\begin{aligned} P_2(u)(x_1) &= P_2(u)\Big(\big(A_1(u) \circ P_1(u)\big)(x)\Big) \\ &= P_2(u) \circ A_1(u) \circ P_1(u)(x) = A_1(u) \circ P_1(u) \circ P_2(u)(x) \\ &= A_1(u) \circ \underbrace{P_1(u) \circ P_2(u)(x)}_{0_E} \\ &= 0_E \end{aligned}$$

De même, $P_1(u)(x_2) = 0_E$. D'où $x \in \operatorname{Ker} P_1(u) + \operatorname{Ker} P_2(u)$.

Exercice 34:
Soit $u : E \to E$ un endomorphisme tel que $u^3 = u$. Montrons que $\operatorname{Ker}(u + \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker} u = E$.

2. De $u^3 = u$, il résulte que le polynôme $P = X^3 - X$ est annulateur de u. Or, $X^3 - X = (X-1)(X+1)$ et ces facteurs sont deux à deux premiers entre-eux. D'où $E = \operatorname{Ker} P(u) = \operatorname{Ker}(u + \mathrm{id}) \oplus \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}) \oplus \operatorname{Ker} u$.

1. On procède, comme demandé dans l'énoncé, à une analyse-synthèse. Soit $x \in E$.
   Analyse On suppose que $x = a+b+c$ et que $a \in \operatorname{Ker}(u+\mathrm{id})$, $b \in \operatorname{Ker}(u-\mathrm{id})$ et $c \in \operatorname{Ker} u$. D'où $u(a) = -a$, $u(b) = b$ et $u(c) = 0$. On a $u(x) = u(a) + u(b) + u(c) = b - a$, d'où $b = u(x) - a$ et donc $u(b) = b = u^2(x) + u(a) = u^2(x) - a$ et donc $b = u^2(x) - b + u(x)$. On en déduit que

$$b = \frac{1}{2}\left(u^2(x) + u(x)\right) \qquad a = \frac{1}{2}\left(u^2(x) - u(x)\right) \qquad c = x - u^2(x).$$

— Soient $a = \frac{1}{2}u^2(x) - \frac{1}{2}u(x)$, $b = \frac{1}{2}u^2(x) + \frac{1}{2}u(x)$ et $c = x - u^2(x)$. On remarque que, *a fortiori*, $a + b + c = x$. On a $a \in \operatorname{Ker}(u + \mathrm{id}_E)$; en effet,

$$u(a) = \frac{1}{2}u^3(x) - \frac{1}{2}u^2(x) = \frac{1}{2}u(x) - \frac{1}{2}u^2(x) = -1$$

car $u^3 = u$. De même, on a $b \in \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $c \in \operatorname{Ker} u$.

On en conclut qu'il existe une unique solution (a, b, c).

Annexe I : Bilan de la khôlle n°2

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & -x_0 & x_0^2 \end{pmatrix}.$$

Préciser si la matrice A est inversible, si oui l'inverser, sinon déterminer son noyau.

Méthode 1

On calcule le déterminant de A :

$$\begin{aligned} \det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & -x_0 & x_0^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 1 & x_0 & x_0^2 \\ 2 & 0 & 2x_0^2 \end{vmatrix} \text{ avec } L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ &= x_0 \begin{vmatrix} 2 & 2/3 \\ 2 & 2x_0^2 \end{vmatrix} \\ &= 4x_0 \left(x_0^2 - \frac{1}{3} \right) \\ &= 4x_0 \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

On remarque qu'il y a 4 cas : si $x = 0$, si $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, si $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, et sinon.

Méthode 2

On peut aussi ne pas utiliser le déterminant : soit $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker} A \iff AX = 0 &\iff \begin{cases} 2x + \frac{2}{3} z = 0 \\ x + x_0 y + x_0^2 z = 0 \\ x - x_0 y + x_0^2 z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -\frac{1}{3} z \\ x_0 y = 0 \\ x + x_0^2 z = 0 \end{cases} \quad \text{avec } L_2 \leftarrow \frac{L_1 - L_2}{2} \text{ et } L_3 \leftarrow \frac{L_1 + L_3}{2} \\ &\iff \begin{cases} x = -\frac{1}{3} z \\ x_0 y = 0 \\ \left(x_0^2 - \frac{1}{3} \right) z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Et, on distingue alors les cas si $x_0 = 0$, si $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, si $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, et sinon.

Deuxième partie

T.D.

Exercice 1

1. On sait que $f(e_1) = e_1 - 3e_2 - 2e_3$, $f(e_2) = e_1 - 3e_2 - 2e_3$ et $f(e_3) = -e_1 + 3e_2 + 2e_3$. On remarque que $f(e_1) = f(e_2) = -f(e_3)$ et donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1 - 3e_2 - 2e_3)$. Or, d'après le théorème du rang, on sait donc que $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$. Or, on remarque que $f(e_1 - e_2) = f(e_1) - f(e_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et, $f(e_1 + e_3) = f(e_1) - f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Comme $e_1 - e_2$ et $e_1 + e_3$ ne sont pas colinéaires (car (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$), ils forment donc une base de $\operatorname{Ker} f$. On en déduit que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(e_1 - e_2, e_1 + e_3)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^3$. On pose $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. On cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = a(e_1 - 3e_2 - 2e_3) + b(e_1 - e_2) + c(e_1 + e_3)$. Comme (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, on peut identifier et on résout donc

$$\left.\begin{aligned} a + b + c &= \alpha \\ -3a - b &= \beta \\ -2a + c &= \gamma \end{aligned}\right\} \iff \begin{cases} a = \alpha - b - c \\ 2b + 3c - 2\alpha = \gamma \\ -3a - b = \beta \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \alpha - b - c \\ c = \frac{1}{3}(\gamma - 2b - 2\alpha) \\ 2b + 3c = 3\alpha + \beta \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \alpha - b - c \\ c = \frac{1}{3}(\gamma - 2b - 2\alpha) \\ 2b + \gamma - 2b - 2\alpha = 3\alpha + \beta \end{cases}$$

$$\implies \gamma = 5\alpha + \beta.$$

   On en déduit que $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f \neq \mathbb{R}^3$. Ils ne sont donc pas supplémentaires.
3. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \big((1,0,0), (1,-3,-2), (1,0,1)\big)$ est libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. De plus, $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$, $f(\varepsilon_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $f(\varepsilon_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$ d'où

$$\big[f\big]_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   On en déduit que P est la matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, qui est inversible, d'où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 (Projecteurs)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soient p et q deux endomorphismes de E tels que $p \circ q = q \circ p$.
   (a) Montrons que $\operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker}(p \circ q)$. Soit $\vec{x} \in \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$. Soient $\vec{\alpha} \in \operatorname{Ker} p$ et $\vec{\beta} \in \operatorname{Ker} q$ deux vecteurs tels que $\vec{x} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$. On a donc

$$(p \circ q)(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = (p \circ q)(\vec{\alpha}) + (p \circ q)(\vec{\beta}) = q(p(\vec{\alpha})) + p(q(\vec{\beta})) = q(\vec{0}) + p(\vec{0}) = \vec{0}.$$

   (b) On sait que $\operatorname{Im}(p \circ q) \subset \operatorname{Im}(p)$ et $\operatorname{Im}(q \circ p) \subset \operatorname{Im}(q)$. Or, comme $p \circ q = q \circ p$, on a $\operatorname{Im}(p \circ q) = \operatorname{Im}(q \circ p)$ et donc $\operatorname{Im}(p \circ q) \subset \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

2. (a) On montre que $(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ q$.

$$\begin{aligned}(p \circ q) \circ (p \circ q) &= (p \circ q) \circ (q \circ p) \\ &= p \circ q \circ p \\ &= q \circ p \circ p \\ &= q \circ p \\ &= p \circ q.\end{aligned}$$

(b) On veut montrer que $\operatorname{Im}(p \circ q) = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$. Soit $\vec{x} \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$. Soient $\vec{a}, \vec{b} \in E$ tels que $p(\vec{a}) = \vec{x}$ et $q(\vec{b}) = \vec{x}$. On a donc

$$\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q \ni \vec{x} = p(\vec{x}) = p(p(\vec{a})) = p(q(\vec{b})) = p(\vec{a}) = (p \circ q)(\vec{b}) \in \operatorname{Im}(p \circ q).$$

On a donc $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q = \operatorname{Im}(p \circ q)$.

On veut maintenant montrer $\operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q \supset \operatorname{Ker}(p \circ q)$. Soit $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(q \circ p)$. On sait que $\vec{x} = p(\vec{x}) - \big(\vec{x} - p(\vec{x})\big)$. Mais, comme $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(q \circ p)$, alors $p(\vec{x}) \in \operatorname{Ker}(q)$. Également, comme $p(\vec{x} - p(\vec{x})) = p(\vec{x}) - p \circ p(\vec{x}) = 0_E$, on en déduit que $\vec{x} - p(\vec{x}) \in \operatorname{Ker}(p)$. On a donc $\operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker}(p \circ q)$ par double inclusion.
On en déduit que $p \circ q$ est un projecteur sur $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$.