KHÔLLE N° 14

Exercice 1.

1. On note A l'événement « X est pair. » On a $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X = 2n)$, et cette union est disjointe. D'où,

$$\begin{aligned} P(A) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = 2n) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

   Or, la série entière $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} x.$$

   D'où, $P(A) = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \operatorname{ch} \lambda$.
   On pose B l'événement « X est impair. » On a $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X = 2n+1)$, et cette union est disjointe. D'où,

$$\begin{aligned} P(B) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = 2n+1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

   Or, la série entière $\sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$, et,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sh} x.$$

   D'où, $P(B) = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \operatorname{sh} \lambda$.
   Or, pour tout réel x, $\operatorname{ch} x \geqslant \operatorname{sh} x$. Ainsi, $P(A) \geqslant P(B)$.
2. Soit $n > \lambda - 1$. On sait que $(X \geqslant n) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (X = i + n)$, et cette union est disjointe. D'où,

$$\begin{aligned} P(X \geqslant n) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X = i+n) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{i+n}}{(i+n)!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda^n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i+n)!} \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{n! \times (n+1)^i} \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\lambda}{n+1} \right)^i \end{aligned}$$

   Et, la série entière $\sum x^n$ est géométrique, son rayon de convergence est 1, et

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

   Or, par hypothèse, $0 < \lambda < n+1$, donc $0 < \frac{\lambda}{n+1} < 1$. D'où,

$$P(X \geqslant n) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{n+1}}.$$

3. D'une part, on a $P(X \geqslant n) \geqslant P(X = n)$ car $(X \geqslant n) \supset (X = n)$. D'autre part, $P(X \geqslant n) \leqslant P(X = n)/(1 - \frac{\lambda}{n+1})$, et
$$\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$
D'où, $P(X \geqslant n) \sim_{n\to+\infty} P(X = n)$.
On a donc $P(X \geqslant n) = P(X = n) + o\left(P(X = n)\right)$. Or, $(X \geqslant n) = (X = n) \cup (X > n)$, et cette union est disjointe, d'où,
$$\begin{aligned} P(X > n) = P(X \geqslant n) - P(X = n) &= P(X = n) + o\left(P(X = n)\right) - P(X = n) \\ &= o\left(P(X = n)\right) \end{aligned}$$

Exercice 2.

0. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, et soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$\left|\frac{\sqrt{n+1}\, x^{n+1}}{\sqrt{n}\, x^n}\right| = |x|\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$$
D'après le critère de d'Alembert, la série entière $\sum \sqrt{n}\, x^n$ a pour rayon de convergence 1.
1. Soit $x \in]0,1[$. On a $\sqrt{n}\, x^n \geqslant x^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. D'où,
$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\, x^n \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$
Comme $|x| < 1$, on en déduit que
$$g(x) \geqslant \frac{1}{1-x} \geqslant \frac{x}{1-x}.$$
Et, $\frac{x}{1-x} \xrightarrow[x\to1^-]{} +\infty$, d'où $g(x) \xrightarrow[x\to1^-]{} +\infty$.
2. Soit $x \in]-1,1[$. On calcule
$$\begin{aligned} f(x) = (1-x)g(x) = g(x) - x\, g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\, x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\, x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\, x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\, x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n-1} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) x^n \end{aligned}$$
3. On calcule, pour $N \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{n=1}^{N} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{n} = \sqrt{N} - \sqrt{0} = \sqrt{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$$
par télescopage. D'où, la série $\sum(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ diverge. On pose, $h : x \mapsto \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$, dérivable sur $]1, +\infty[$, et
$$\forall x > 1, \quad h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} < 0$$

car $2\sqrt{x} > 2\sqrt{x-1}$, et par décroissance de la fonction inverse. Et,

$$\forall n > 1, \quad \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

d'où $\sqrt{n-1} = \sqrt{n} + o(n)$. Ainsi, $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = o(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. D'où, la suite $(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ tend vers 0 en décroissant. D'après le théorème des séries alternées, on en déduit que la série $\sum(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \cdot (-1)^n$ converge.

4. On en déduit que le rayon de convergence de la série $\sum\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$ est 1 (d'après la question précédente).
5. D'après la question 3, la série $\sum(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})\,(-1)^n$ converge. D'après le théorème radial d'Abel, on en déduit que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})x^n \xrightarrow[x\to -1^+]{} \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(-1)^n = f(-1).$$

Or, $g(x) = f(x)/(1-x) \xrightarrow[x\to -1^+]{} f(-1)/2$. On en déduit que $g(x)$ admet une limite finie en -1^+.

Exercice 3. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\left|\frac{S_{n+1}x^{n+1}}{S_n x^n}\right| = |x| \cdot \frac{a_n + S_n}{S_n} = |x| \cdot \left(1 + \frac{a_n}{S_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|.$$

D'où, par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de la série $\sum S_n x^n$ est donc 1.

Et, $a_n > 0$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \sum a_n x^n \leqslant \sum S_n x^n$, et la série $\sum S_n x^n$ converge pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, la série $\sum a_n x^n$ converge aussi pour tout $x \in \left]-1,1\right[$. On en déduit que le rayon de convergence de cette série entière est supérieur ou égal à 1. De plus, la série $\sum a_n$ diverge car (S_n) diverge, d'où le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est inférieur ou égal à 1. Le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est donc égal à 1.