Khôlle n° 5

Exercice 1

1. L'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arcsin}\left(1/\sqrt{t}\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$. Et, on sait que $\forall t \in [-1,1]$, $|\operatorname{Arcsin} t\,| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. D'où $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)}{t^2}\right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ qui converge par critère de Riemann. Ainsi, l'intégrale I converge absolument ; elle converge donc.
2. On a

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arcsin}\left(1/\sqrt{t}\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{x}{\frac{1}{\sin^2 x}} \times \left(-\frac{2\cos x}{\sin^3 x}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x \sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[x\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\left[\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On calcule

$$\begin{aligned}
-\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_3 - M) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & a \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -\lambda \times \lambda^2 + a(1+\lambda) \\
&= -\lambda^3 + a\lambda + a.
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\chi_M(X) = X^3 - aX - a.$$

2. On suppose $a = 0$. On a donc $\chi_M(X) = X^3$. Comme le polynôme caractéristique est scindé mais pas à racines simples, la matrice M n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.
3. On suppose $a = \dfrac{1}{2}$. On a donc $\chi_M(X) = X^3 - \frac{1}{2}X^3 - \frac{1}{2}$. On remarque que 1 est racine de ce polynôme. D'où, en utilisant l'algorithme de Horner, on trouve une factorisation :

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ \hline 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array} \qquad \text{d'où} \qquad \chi_M(X) = (X-1)\underbrace{\left(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right)}_{P}.$$

Le discriminant du trinôme P vaut $\Delta = \frac{1}{4} + 2 > 0$. On en déduit que χ_M est scindé et a trois racines simples. D'où M est diagonalisable.

4. On suppose $a = \frac{27}{4}$. Ainsi, $\chi_M(X) = X^3 - \frac{27}{4}X - \frac{27}{4}$, et $\chi_M'(X) = 3X^2 - \frac{27}{4}$. On cherche les racines de $\chi_M'(X)$: soit $x \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\chi_M'(x) = 0 &\iff 3x^2 - \frac{27}{4} = 0\\ &\iff x^2 - \frac{9}{4} = 0\\ &\iff x = \pm\frac{3}{2}\end{aligned}$$

On remarque que $\frac{3}{2}$ est également racine de χ_M. On en déduit que la racine $\frac{3}{2}$ a une multiplicité supérieure ou égale à 2. Ainsi, χ_M n'est pas un polynôme scindé à racines simples. La matrice M n'est donc pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

5.