Khôlle n° 11

Exercice 2

1. Soient P et Q deux polynômes. On pose $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ et $Q = b_0 + b_1 X + \cdots + b_m X^m$. Ainsi, $P \times Q = c_0 + c_1 X + \cdots + c_p X^p$ où $p = n \times m$ et, pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $c_k = \sum_{j=0}^{p} a_j b_k$. Par linéarité de l'intégrale, si chacune des intégrales $\int_0^{+\infty} c_k t^k \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$ converge, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t) \cdot Q(t) \cdot \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$ converge. Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} c_k \, t^k \, \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$ est impropre en 0. On a

$$\begin{aligned} \int_0^a c_k \, t^k \, \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t &= [c_k t^k \mathrm{e}^{-t}]_0^a + \int_0^a c_k \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t \\ &= c_k \, a^k \, \mathrm{e}^{-a} - [c_k \, \mathrm{e}^{-t}]_0^a \\ &= c_k \, a^k \, \mathrm{e}^{-a} + c_k - c_k \, \mathrm{e}^{-a} \end{aligned}$$

qui converge quand $a \to +\infty$ par croissances comparées. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t) Q(t) \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$ converge.

2. Symétrie Par commutativité du produit de polynôme, on a bien

$$\langle P \mid Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t) \, Q(t) \, \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} Q(t) \, P(t) \, \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = \langle Q \mid P \rangle.$$

Biinéarité Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned} \langle \alpha A + \beta B \mid Q \rangle &= \int_0^{+\infty} \big(\alpha \, A(t) + \beta \, B(t)\big) \, Q(t) \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} A(t) \, Q(t) \, \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t + \beta \int_0^{+\infty} B(t) \, Q(t) \, \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t \\ &= \alpha \langle A \mid Q \rangle + \beta \langle B \mid Q \rangle, \end{aligned}$$

d'où la linéarité à gauche. Par symétrie, on conclut que l'application $\varphi : (P, Q) \mapsto \langle P \mid Q \rangle$ est bilinéaire.

Positivité On a, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $P^2(t) \, \mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$. D'où, par croissance de l'intégrale, on a

$$\langle P \mid P \rangle = \int_0^{+\infty} P^2(t) \, \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{+\infty} 0 \,\mathrm{d}t = 0.$$

Définition On suppose $\int_0^{+\infty} P^2(t) \, \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = 0$. Or, la fonction $t \mapsto P^2(t) \, \mathrm{e}^{-t}$ est positive, et continue (par produit de fonctions continues). On en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \; P^2(t) \, \mathrm{e}^{-t} = 0.$$

Mais, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\mathrm{e}^{-t} > 0$. On en déduit que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $P(t) = 0$. Le polynôme P a donc une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

On en déduit que l'application $\varphi : (P, Q) \mapsto \langle P \mid Q \rangle$ est un produit scalaire.

3.