Annexe B. Exercice 7.

Soit E un espace vectoriel normé.

(a) On considère $(K_i)_{i \in I}$ une famille de compacts de E.

Montrons que $\bigcap_{i \in I} K_i = K$ est un compact.

Soit $(\vec{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de K.

Pour tout $i \in I$, la suite $(\vec{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs de K_i et K_i est un compact.

Il existe donc $\varphi_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(\vec{u}_{\varphi_i(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\vec{l_i} \in K_i$.

~~On considère l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \vec{u}_n \in K\}$.~~

Or, K est fermé par intersection de fermés.

Ainsi, par la caractérisation séquentielle d'un fermé, on en déduit que $\vec{l_i} \in K$, pour tout $i \in I$.

On choisit un certain $i \in I$.

Ainsi, la suite $(\vec{u}_{\varphi_i(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est extraite de $(\vec{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et converge vers $\vec{l_i} \in K$.

On en déduit que K est un compact.

Une intersection de compacts est donc un compact.

(b) Soient K_1 et K_2 deux compacts de E. Montrons que $K_1 \cup K_2$ est un compact.

Soit $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $K_1 \cup K_2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\vec{u}_n \in K_1$ ou $\vec{u}_n \in K_2$.

On note $A = \{n \in \mathbb{N} \,/\, \vec{u}_n \in K_1\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \,/\, \vec{u}_n \in K_2\}$.

Les deux ensembles A et B ne peuvent pas être finis tous les deux. On supposera donc, sans perte de généralité, que A est infini.

On peut donc extraire de la suite $(\vec{u}_n)$ la suite $(\vec{u}_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de K_1. (Ainsi, $A = \varphi(\mathbb{N})$.)

Or, K_1 est un compact, et donc, il existe $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(\vec{u}_{\varphi(\psi(n))})$ converge vers $\vec{l} \in K_1$.

De la suite $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a pu extraire $(\vec{u}_{\varphi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $K_1 \cup K_2$ qui converge vers $\vec{l} \in K_1 \cup K_2$.

On en déduit donc que $K_1 \cup K_2$ est un compact.

~~Par une récurrence similaire à celle de la question précédente, permet de conclure qu'une union finie de compacts est un compact.~~