Khôlle n° 0

Exercice 1 Cette limite est, à première vue, une forme indéterminée. On procède à un développement limité après avoir réarrangés les différents termes de l'expression. Soit x un réel non nul. On a

$$\begin{aligned}
\frac{(1+x)^{\frac{\ln x}{x}}-x}{x(x^x-1)} &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(x)\ln(1+x)}-x}{x^{x+1}-x} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(x)\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}-x}{x^{x+1}-x} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\ln(x)\times\left(1+\frac{x}{2}+o(x)\right)}-x}{x^{x+1}-x} \\
&= \frac{\cancel{x}(x^{\frac{x}{2}+o(x)}-1)}{\cancel{x}(x^x-1)} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\left(\frac{x}{2}+o(x)\right)\ln x}-1}{\mathrm{e}^{x\ln x}-1} \\
&= \frac{\frac{x}{2}\ln x+o(x\ln x)+1-1}{x\ln x+1-1+o(x\ln x)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}+o(1)}{1+o(1)} \\
&\xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. Comme $\frac{\ln n}{n^2-1} \sim \frac{\ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{n^{0,5}} \times \frac{1}{n^{1,5}} = o\left(\frac{1}{n^{1,5}}\right)$ et $\sum \frac{1}{n^{1,5}}$ converge par critère de Riemann, la série $\sum b_n$ converge donc.
2. Soit $x \in [0,1]$. On procède par récurrence. Soit P, le prédicat défini par

$$P(n): \quad \text{“} x+\cdots+x^{n-1} \geqslant (n-1)\,x^{n+1}.\text{”}$$

   - On suppose $n=2$. On a bien, comme $x \in [0,1]$, $x \geqslant x^2$. D'où $P(2)$.
   - On suppose que le prédicat P est vrai jusqu'à un certain rang $n \geqslant 2$. Soit $n \geqslant 2$ tel que $P(n)$ soit vrai i.e.

     $$x+\cdots+x^{n-1} \geqslant (n-1)\,x^{n+1}.$$

     On a donc, en multipliant par x de chaque côtés de l'inégalité

     $$x^2+\cdots+x^n \geqslant (n-1)x^{n+2}.$$

     On ajoute x à chacun des membres et on utilise l'inégalité $x \geqslant x^{n+2}$:

     $$x+x^2+\cdots+x^n \geqslant (n-1)\,x^{n+2}+x^{n+2} \geqslant n(x^{n+2}.$$

     D'où, $P(n+1)$.

   On conclut, par récurrence, que, pour tout $n \geqslant 2$, $x+\cdots+x^{n-1} \geqslant (n-1)\,x^{n+1}$. Soit $n \geqslant 2$. On en déduit que

   $$\frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}} \leqslant \frac{x^n}{1+(n-1)x^{n+1}}.$$

   Et, par croissance de l'intégrale, on a donc

   $$\boxed{a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+(n-1)x^{n+1}}\,\mathrm{d}x.}$$

3. Soit $k \in [\![2, n]\!]$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^k}{1+(k-1)x^{k+1}}\,\mathrm{d}x &= \left[\ln\left(1+(k-1)\times x^{k+1}\right)\times\frac{1}{k+1}\times\frac{1}{k-1}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{k^2-1}\Big(\ln(1+(k-1))-\ln 1\Big)\\ &= \frac{\ln k}{k^2-1}\end{aligned}$$

Or, d'après la question 1., on sait que la série $\sum \frac{\ln n}{n^2-1}$ converge. Et, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$. D'où, par le théorème des gendarmes, $\boxed{\sum a_n \text{ converge.}}$

Exercice 3

1. Prouvons ce résultat par récurrence. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(n): \quad \text{“}\, C_n + iS_n = \mathrm{e}^{in\theta/2}\times\frac{\sin\big((n+1)\theta/2\big)}{\sin\big(\theta/2\big)}.\text{”}$$

— On pose $n = 1$. On a

$$C_1 + iS_1 = 1+\cos\theta + i\sin\theta$$

et,

$$\mathrm{e}^{i\theta/2}\times\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right) = i\sin\theta+\sin\theta\times\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2} = i\sin\theta+1+\cos\theta$$

car

$$\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}.$$

—