Cadeaux du 14/09/22

Cadeau 1 :
Soit A un anneau commutatif et soit $x \in A$. On dit que x est nilpotent (ou nihilpotent) si

$$\exists n \in \mathbb{N},\ x^n = 0_A.$$

1. *Montrer que, si x est nilpotent, alors x n'est pas inversible mais $1_A - x$ est inversible.*
2. *Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents de A est un idéal de A.*

Réponse du cadeau 1 :

1. On procède par l'absurde. On suppose que x est nilpotent. Soit $n \in \mathbb{N}$ le plus petit possible tel que $x^n = 0_A$. On suppose qu'il existe $y \in A$ tel que $x \cdot y = 1_A$. D'où, $(xy)^n$ est, d'une part $x^n \cdot y^n = 0_A \cdot y^n = 0_A$ par commutativité, et d'autre part, $(xy)^n = {1_A}^n = 1_A \neq 0_A$. Ce qui est absurde.
   On suppose à présent $x \neq 1_A$. On sait que $A \ni \sum_{k=0}^{n-1} x^k = (1-x^n)/(1-x) = 1/(1-x)$. On a donc trouvé l'inverse de $1-x$.
2. Soit x un élément nilpotent de A, et y un élément de A. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0_A$. $x \cdot y$ est aussi un élément nilpotent de A. En effet, $(xy)^n = x^n \cdot y^n = 0_A \cdot y^n = 0_A$. On nomme $\mathcal{I}$ l'ensemble des éléments nilpotents de A. Montrons que $(\mathcal{I}, +)$ est un sous-groupe additif de $(A, +)$. On a bien $0 \in \mathcal{I}$ car $0^k = 0$. Soient x et y deux éléments nilpotents. Montrons que $x - y \in \mathcal{I}$. Soient n_1 et $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $x^{n_1} = 0$ et $y^{n_2} = 0$. On veut montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(x-y)^n = 0$. Soit $n = n_1 + n_2$. On a

$$(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n_1} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^y y^{n-k}}_{(1)} + \underbrace{\sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^y y^{n-k}}_{(2)}.$$

   Or, dans la somme (1), $n - k = n_1 + n_2 - k = n_2 + (n_1 - k) \geqslant n_2$ et, dans la somme (2), $k \geqslant n_1$.

Cadeau 2 :
Soit F l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & y \\ -5y & x+4y \end{pmatrix}$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On note $J = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et que (I_2, J) est une base de F.*
2. *Calculer J^2 puis $(x\, I_2 + yJ) \cdot (x'\, I + y'\, J)$ pour tout $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$. Qu'en déduire ?*

Réponse du cadeau 2 :

1. On cherche à trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ tels que $\begin{pmatrix} x & y \\ -5 & x+4y \end{pmatrix} = \alpha I_2 + \beta J$. On a

$$\begin{aligned} \alpha I_2 + \beta J &\iff \begin{pmatrix} x & y \\ -5y & x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\beta & \beta \\ -5\beta & 2\beta \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x = \alpha - 2\beta \\ y = \beta \\ -5\beta = -5y \\ 2\beta + \alpha = x + y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \beta = y \\ \alpha = x + 2y \end{cases} \end{aligned}$$

2. On a $J^2 = -I_2$ et, en calculant minutieusement, on trouve, pour tout $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$, $(x\, I_2 + y\, J) \cdot (x'\, I_2 + y'\, J) = \cdots = (xx' - yy')\, I_2 + (x'y + xy')\, J$. On remarque que $(F, +, \cdot)$ est isomorphe à $(\mathbb{C}, +, \times)$. C'est un isomorphisme d'anneaux. Or, comme l'anneau $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps donc F l'est aussi.

Cadeau du 19/09/22

Cadeau :
Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. On pose $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorphisme défini tel que

$$A = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(\vec{\imath}) & f(\vec{\jmath}) & f(\vec{k}) \end{array} \end{array} = [f]_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})}.$$

Interpréter géométriquement f.

Réponse du cadeau :
Soit $\mathscr{B}$ une base et $A = [f]_{\mathscr{B}}$, alors $f(\vec{\imath}) = \vec{\jmath}$, $f(\vec{\jmath}) = \vec{k}$, et $f(\vec{k}) = \vec{\imath}$. f est la rotation d'angle $2\pi/3$ autour de $\mathrm{Vect}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k})$.

On peut également le montrer en décomposant $f = g \circ h$, où g est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(\vec{\imath} + \vec{\jmath}, \vec{k})$ et parallèlement à $\mathrm{Vect}(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$; et h la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(\vec{\imath} + \vec{k}, \vec{\jmath})$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(\vec{\imath}, \vec{k})$.

Cadeaux du 22/09/22

Cadeau 1 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite positive, telle que la suite* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ *diverge. En calculant* $\ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$*, montrer que la série* $\sum \frac{u_n}{S_n}$ *diverge.*

Cadeau 2 :
On pose

$$D(x) = \begin{vmatrix} 7-x & 14-x & 3-x \\ 8-x & 2-x & -x \\ 13-x & -1-x & 2-x \end{vmatrix}.$$

Montrer qu'il existe deux réels α *et* β *tels que, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $D(x) = \alpha x + \beta$. *Déterminer* α *et* β.

Cadeau du 23/09/22

Cadeau :
Montrer qu'il n'existe pas $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *telle que,* $A' = P^{-1}AP$ *où*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textit{et} \qquad A' = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Réponse du cadeau :

Analyse On suppose $P^{-1}AP = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$. Alors, $\det A = \det A'$, d'où $0 = \lambda \cdot \mu$. Et, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A'$, d'où $\lambda + \mu = 0$. On en déduit donc que $\lambda = 0 = \mu$.

Synthèse On a

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

D'où, en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, on a

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On en conclut que la matrice A n'est pas diagonalisable.

Cadeaux du 28/09/22

Cadeau 1 :
On considère la matrice

$$M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(\vec{\imath}) & f(\vec{\jmath}) & f(\vec{k}) \end{array} \end{array} = \Big[\, f \,\Big]_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}.$$

Trouver et interpréter un vecteur propre et une valeur propre de M (et, de même, de f).

Indication :
On a $M\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$ est un vecteur directeur de l'axe de rotation. Montrer que les seuls vecteurs propres sont colinéaire au vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Cadeaux du 06/10/22

Cadeau :
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Quel est le spectre de la matrice A ?*
2. *Déterminer une base de chaque sous-espace propre de la matrice A.*
3. *Montrer que la matrice A est trigonalisable mais pas diagonalisable.*
4. *Soit T la matrice ci-dessous. Déterminer une matrice P telle que $P^{-1} \cdot A \cdot P = T$:*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système d'équation différentielle (Σ) ci-dessous :*

$$(\Sigma) : \begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t) \\ y'(t) = -x(t) + y(t) + z(t) \\ z'(t) = -x(t) + y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

Réponse au cadeau 1 :

1. On calcule

$$\begin{aligned} \chi_A(x) = \det(xI_3 - A) &= \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ 1 & x-1 & -1 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= x \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ x-1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= x\big((x-1)(x-2) - 1\big) - (2-x) - 1 + (-1 + x - 1) \\ &= x(x^2 - 3x + 1) - 2 + 2x \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ &= (x-1)^3 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1\}.}$$

2. On cherche une base de SEP(1) : on cherche $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, tel que $AX = X$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} y + z = x \\ -x + y + z = y \\ -x + y + 2z = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases} \\ &\iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff X \in \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, la base $\mathscr{B} = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

3. La matrice A n'est pas diagonalisable : en effet, on a $\dim \mathbb{R}^3 = 3 \neq \dim(\mathrm{SEP}(1)) = 1$. Mais, le polynôme χ_A est scindé donc la matrice A est trigonalisable.
4. On cherche $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = T = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2. \\ \varepsilon_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) \end{array} & \end{array}$$

On cherche donc $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{cases} f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 & (1) \\ f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 & (2) \\ f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 & (3). \end{cases}$$

On choisit $\varepsilon_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, d'après la question 2. Puis, on calcule

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ -x + z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\iff \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On choisit donc $\varepsilon_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ (en choisissant $x = 0$). De même, on choisit $\varepsilon_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Donc, si

$$P = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{array} & \end{array}$$

alors $P^{-1} \cdot A \cdot P$, et on a bien $\det P = 1$.
5.

$$(\Sigma) \iff X'(t) = A \cdot X(t) \text{ où } X(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$\iff U'(t) = T \cdot U(t) \text{ où } U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot X(t)$$

$$\iff \begin{cases} u'(t) = u(t) + v(t) & (1) \\ v'(t) = v(t) + w(t) & (2) \\ w'(t) = w(t) & (3) \end{cases}$$

D'où

$$(3) \iff \exists K \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ w(t) = K\mathrm{e}^t,$$

et

$$(2) \iff v'(t) - v(t) = K\mathrm{e}^t.$$

On résout l'équation homogène associé :

$$v'(t) = v(t) \iff \exists L \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ v(t) = L\mathrm{e}^t.$$

On pose $v(t) = \ell(t)\,\mathrm{e}^t$, et donc

$$\begin{aligned}(2) \iff &\ell'(t)\,\mathrm{e}^t + \ell(t)\,\mathrm{e}^t - \ell(t)\,\mathrm{e}^t = K\mathrm{e}^t\\ \iff &\ell'(t) = K\\ \iff &\ell(t) = K\,t + L\\ \iff &v(t) = (Kt + L)\,\mathrm{e}^t\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}(1) \iff &u'(t) = u(t) + v(t) = u(t) + (Kt + L)\,\mathrm{e}^t\\ \iff &u(t) - u(t) = (Kt + L)\,\mathrm{e}^t\end{aligned}$$

On résout l'équation homogène associée :

$$u'(t) - u(t) = 0 \iff \exists M \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}\ u(t) = M\mathrm{e}^t.$$

On pose $u(t) = m(t)\,\mathrm{e}^t$.

$$\begin{aligned}(2) \iff &m'(t)\,\mathrm{e}^t - m(t) = (Kt + L)\,\mathrm{e}^t\\ \iff &m'(t) = Kt + L\\ \iff &m(t) = \frac{1}{2}Kt^2 + Lt + M\\ \iff &u(t) = \left(\frac{1}{2}Kt^2 + Lt + M\right)\,\mathrm{e}^t\end{aligned}$$

Ainsi,

$$(\Sigma) \iff \exists (K, L, M) \in \mathbb{R}^3,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} u(t) = \left(\frac{1}{2}Kt^2 + Lt + M\right)\,\mathrm{e}^t\\ v(t) = (Kt + L)\,\mathrm{e}^t\\ w(t) = K\,\mathrm{e}^t.\end{cases}$$

Or, $X(t) = P \cdot U(t)$, et donc

$$\begin{aligned}(2) &\iff \exists (K, L, M) \in \mathbb{R}^3,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x(t) = u(t)\\ y(t) = v(t) - w(t)\\ z(t) = u(t) + w(t)\end{cases}\\ &\iff \exists (K, L, M) \in \mathbb{R}^3,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x(t) = \left(\frac{1}{2}Kt^2 + LT + M\right)\mathrm{e}^t\\ y(t) = (Kt + L - K)\,\mathrm{e}^t\\ z(t) = \left(\frac{1}{2}Kt^2 + Lt + M + K\right)\mathrm{e}^t\end{cases}\end{aligned}$$

Cadeau 2 (matrices stochastiques) :
Soit une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!]\,,\ a_{i,j} \geqslant 0 \qquad \textit{et} \qquad \forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

1. *Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}(A)$.*
2. *Montrer que, si λ est une valeur propre de A, alors $|\lambda| \leqslant 1$.*

Cadeau 3 (matrices à diagonale strictement dominante) :
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ |a_{i,j}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

Cadeau du 12/10/22

Cadeau :
Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tell que $A^2 = -I_2$. Montrer qu'il existe P une matrice inversible telle que

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M.$$

Réponse au cadeau

On remarque que $A \sim \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)$. D'où, il existe $\varepsilon \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$, tel que $A \cdot \varepsilon = i\varepsilon$. Également, $A \cdot \bar{\varepsilon} = -i\bar{\varepsilon}$. Soient $U = \varepsilon + \bar{\varepsilon} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, et $V = i(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, puis on calcule

$$\begin{aligned} A \cdot U &= A \cdot \varepsilon + A \cdot \bar{\varepsilon} \\ &= i\varepsilon - i\bar{\varepsilon} \\ &= i(\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \\ &= V. \end{aligned}$$

Cadeau du 19/10/22

Cadeau :

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$, telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1. *Montrer que ça n'implique pas que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.*
2. *Montrer que, si $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $\ell = 0$.*
3. *Montrer que, si f est uniformément continue, alors $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.*

Réponse du cadeau :

1. c.f. remarque 7 du cours
2. Quitte à remplacer ℓ par $-\ell$, on suppose $\ell > 0$. Ainsi, il existe $X \geqslant 0$ tel que
$$\forall x \geqslant X,\ f(x) \geqslant \frac{\ell}{2}.$$
Or, l'intégrale
$$\int_X^{+\infty} \frac{\ell}{2}\,\mathrm{d}x$$
diverge. D'où
$$\int_X^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$
diverge également. Ce qui est absurde. On en déduit que $\ell = 0$.
3. On suppose f uniformément continue. Par l'absurde, supposons que $f(x) \not\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, d'où
$$\exists \varepsilon > 0,\ \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tendant vers } +\infty,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) \geqslant \varepsilon.$$
Or, comme f est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad |x - u_n| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
D'où,
$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{d}t$$
qui diverge. Ce qui est absurde.

Cadeau du 21/10/22

Théorème d'interpolation de Lagrange

Cadeau :
Soient $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ une suite de $n+1$ réels distincts deux à deux. Soient aussi $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ une suite de $n+1$ réels (qui peuvent être égales). Alors,

$$\exists! P \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ P(a_k) = b_k.$$

Réponse du cadeau :

Méthode 1 Soient $n+1$ réels a_0, a_1, …, a_n distincts deux à deux. L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\longmapsto \Big(P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)\Big) \end{aligned}$$

est linéaire et la dimension de l'espace vectoriel de départ est égale à la dimension de l'espace vectoriel d'arrivée. Soit P un polynôme réel de degré au plus n.

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker} f &\iff f(P) = (0, 0, \dots, 0) \\ &\implies P(a_1) = P(a_2) = \cdots = P(a_n) = 0 \\ &\implies P \text{ a au moins } n+1 \text{ racines} \\ &\implies P = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \text{ car } \#\text{racines} > \deg(P) \end{aligned}$$

D'où $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$. On en déduit que f est injective. Et, d'après le théorème du rang, f est surjective (car $\dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \mathbb{R}^{n+1}$).

Méthode 2 On reprend la fonction f de la méthode 1. Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X] : \mathscr{B} = (1, X, \dots, X^n)$; et, soit $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1} : \mathscr{C} = (e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$. On a

$$[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^n & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^n & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^n & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{matrix} \\ \begin{matrix} f(1) & f(X) & f(X^2) & \dots & f(X^n) \end{matrix} & \end{array} = V.$$

On reconnaît un déterminant de Vandermonde :

$$\begin{aligned} \det V = {} & (a_n - a_{n-1}) \cdots (a_n - a_1)(a_n - a_0) \\ & \times (a_{n-1} - a_{n-2}) \cdots (a_{n-1} - a_{n-2}) \cdots (a_{n-1} - a_0) \\ & \times \\ & \vdots \\ & \times (a_2 - a_1) \cdot (a_2 - a_0) \\ & \times (a_1 - a_0) \\ & = \prod_{i>j} (a_i - a_j) \end{aligned}$$

D'où $\det V \neq 0$ car les (a_i) sont distincts deux à deux. Donc V est inversible, et d'où f est bijective.

Méthode 3 On va prouver la surjectivité en déterminant **un** polynôme P tel que $P(a_0) = b_0$, $P(a_1) = b_1$, …, $P(a_n) = b_n$. Le voilà :

$$\begin{aligned} P = b_0 & \frac{(X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_n)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\cdots(a_0-a_n)} \\ + b_1 & \frac{(X-a_0)(X-a_1)\cdots(X-a_n)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)\cdots(a_1-a_n)} \\ \vdots & \\ + b_n & \frac{(X-a_0)(X-a_1)\cdots(X-a_{n-1})}{(a_n-a_0)(a_n-a_1)\cdots(a_n-a_{n-1})}. \end{aligned}$$

Ce polynôme interpole les $n+1$ points et $\deg P \leqslant n$.