Exercice 1

1. On sait que $f(e_1) = e_1 - 3e_2 - 2e_3$, $f(e_2) = e_1 - 3e_2 - 2e_3$ et $f(e_3) = -e_1 + 3e_2 + 2e_3$. On remarque que $f(e_1) = f(e_2) = -f(e_3)$ et donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1 - 3e_2 - 2e_3)$. Or, d'après le théorème du rang, on sait donc que $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$. Or, on remarque que $f(e_1 - e_2) = f(e_1) - f(e_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et, $f(e_1 + e_3) = f(e_1) - f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Comme $e_1 - e_2$ et $e_1 + e_3$ ne sont pas colinéaires (car (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$), ils forment donc une base de $\operatorname{Ker} f$. On en déduit que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(e_1 - e_2, e_1 + e_3)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^3$. On pose $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. On cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = a(e_1 - 3e_2 - 2e_3) + b(e_1 - e_2) + c(e_1 + e_3)$. Comme (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, on peut identifier et on résout donc

$$
\left.\begin{aligned} a + b + c &= \alpha \\ -3a - b &= \beta \\ -2a + c &= \gamma \end{aligned}\right\}
\iff \begin{cases} a = \alpha - b - c \\ 2b + 3c - 2\alpha = \gamma \\ -3a - b = \beta \end{cases}
$$
$$
\iff \begin{cases} a = \alpha - b - c \\ c = \frac{1}{3}(\gamma - 2b - 2\alpha) \\ 2b + 3c = 3\alpha + \beta \end{cases}
$$
$$
\iff \begin{cases} a = \alpha - b - c \\ c = \frac{1}{3}(\gamma - 2b - 2\alpha) \\ 2b + \gamma - 2b - 2\alpha = 3\alpha + \beta \end{cases}
$$
$$
\implies \gamma = 5\alpha + \beta.
$$

   On en déduit que $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f \neq \mathbb{R}^3$. Ils ne sont donc pas supplémentaires.
3. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \big((1,0,0), (1,-3,-2), (1,0,1)\big)$ est libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. De plus, $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$, $f(\varepsilon_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $f(\varepsilon_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$ d'où

$$
\big[f\big]_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

   On en déduit que P est la matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, qui est inversible, d'où

$$
P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.
$$