Khôlle n° 17

Exercice 1.

1. — Soient u et v deux suites de ℓ^1, et soient α et β deux réels. Pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant |\alpha u_n + \beta v_n| \leqslant |\alpha| \cdot |u_n| + |\beta| \cdot |v_n|$. Or, les séries $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ convergent. D'où, $\sum |\alpha u_n + \beta v_n|$ converge. Ainsi, $(\alpha u + \beta v) \in \ell^1$. De plus, $(0)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, donc $\ell^1 \neq \varnothing$. L'ensemble ℓ^1 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

   — Soient u et v deux suites de ℓ^2, et soient α et β deux réels. Pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant (\alpha u_n + \beta v_n)^2 \leqslant \alpha^2 \cdot {u_n}^2 + \beta^2 \cdot {v_n}^2$. Or, les séries $\sum {u_n}^2$ et $\sum {v_n}^2$ convergent. D'où, $\sum (\alpha u_n + \beta v_n)^2$ converge. Ainsi, $(\alpha u + \beta v) \in \ell^2$. De plus, $(0)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, donc $\ell^2 \neq \varnothing$. L'ensemble ℓ^2 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

   — Soient u et v deux suites de ℓ^∞, et soient α et β deux réels. Soient m et m' deux réels tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant m$ et $|v_n| \leqslant m'$. Or, pour $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire :
   $$|\alpha u_n + \beta v_n| \leqslant |\alpha| \cdot |u_n| + |\beta| \cdot |v_n| \leqslant |\alpha| \cdot m + |\beta| \cdot m',$$
   qui est un majorant. D'où, $(\alpha u + \beta v) \in \ell^\infty$. De plus, $(0)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, donc $\ell^\infty \neq \varnothing$. L'ensemble ℓ^∞ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

   — Soit u une suite de ℓ^1. La série $\sum |u_n|$ converge donc la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Il existe donc un certain rang N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n| \leqslant 1$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n| \geqslant |u_n|^2 \geqslant 0$. Or, la série $\sum |u_n|$ converge. On en déduit que la série $\sum |u_n|^2 = \sum {u_n}^2$ converge. D'où $u \in \ell^2$. On en déduit $\ell^1 \subset \ell^2$.

   — Soit u une suite de ℓ^2. La série $\sum {u_n}^2$ converge, donc la suite $({u_n}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, elle est donc majorée. On pose $M > 0$ un majorant et $m = \sqrt{M}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|{u_n}^2| \leqslant M$, donc $|u_n|^2 \leqslant m^2$ et donc $0 \leqslant |u_n| \leqslant m$. La suite u est donc majorée par m, d'où $u \in \ell^\infty$. On en déduit $\ell^2 \subset \ell^\infty$.

2. (a) Soit $u \in \ell^1$. Montrons que $\|u\|_\infty \leqslant \|u\|_1$. La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Ainsi $\sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| = \max_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. On pose $i \in \mathbb{N}$ tel que $|u_i| = \max_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
   $$\|u\|_\infty = |u_i| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| = \|u\|_1$$
   car les termes de la somme de la série $\sum |u_n|$ sont positifs. On a donc montré que $\alpha \leqslant 1$. Cette valeur de α est la plus petite. En effet, on considère la suite $u \in \ell^1$ définie par $u_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 0$. On a $\|u\|_\infty = 1$ et $\|u\|_1 = 1$. D'où, $1 \leqslant \alpha \cdot 1$. On en déduit que $\alpha = 1$.

   (b) Non, il n'existe pas un réel β tel que, pour toute suite $u \in \ell^1$, $\|u\|_\infty \beta \geqslant \|u\|_1$. En effet, par l'absurde, supposons que ce réel β existe. On considère la suite $u(m)$ définie par, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $u(m)_i = 0$, et pour tout $i > m$, $u(m)_i = 0$. Pour tout entier m, on a $\|u(m)\|_\infty = 1$, et $\|u(m)\|_1 = m$. D'où, pour tout entier m, $\beta \geqslant m$, ce qui est absurde.

   (c) Non. En effet, il n'existe pas de réel β tel que, pour toute suite $u \in \ell^1$, $\|u\|_1 \leqslant \beta \|u\|_2$. On considère la suite $u(m)$ définie à la question précédente. On a $\|u(m)\|_1 = m$, et $\|u(m)\|_2 = \sqrt{n}$. D'où, pour tout entier m, $m \leqslant \beta\sqrt{m}$, et donc $\beta \geqslant \sqrt{m}$, pour tout entier m, ce qui est absurde.

Exercice 2. Montrons que l'application f est linéaire et continue en 0.

— Soient P et Q deux polynômes, et soient α et β deux réels. On pose $n = \max(\deg P, \deg Q)$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$. Ainsi,
$$f(\alpha P + \beta Q) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha a_k + \beta b_k}{k+1} = \alpha \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} + \beta \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k+1} = \alpha f(P) + \beta f(Q),$$
l'application f est donc linéaire.

— Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergent vers 0. Montrons que $|f(P_n)| \to 0$ quand $n \to \infty$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \sum_{k=0}^{\deg P_n} a_{k,n} X^k$; de plus, pour $k \geqslant \deg P_n$, on pose $a_{k,n} = 0$. Ainsi, $\|P_n\| = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n}^2$. Cette somme converge car elle est finie : les termes sont tous nuls à partir d'un certain rang. Or, $\|P_n\| \to 0$ quand $n \to \infty$, et la somme n'est composée que de termes positifs ou nuls. On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{k,n}^2 \to 0$, et donc $a_{k,n} \to 0$ quand

$n \to \infty$. Et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \left|a_{k,n}/(k+1)\right| \leqslant |a_{k,n}| \to 0$. Par le théorème des gendarmes, chaque terme de la somme

$$f(P_n) = \sum_{k=0}^{\deg P_n} \frac{a_{k,n}}{k+1}$$

tend vers 0, donc la somme tend vers 0. Ainsi, on a bien $|f(P_n)| \to 0$ quand $n \to \infty$. La fonction f est donc continue en 0.

On en déduit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3.

— Soit $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si $N(\vec{u}) = 0$, alors $\sup_{t\in[0,1]} |x + ty| = 0$. Or, $|x + ty| \geqslant 0$. On en déduit que, pour tout $t \in [0, 1]$, $x + ty = 0$. En particulier, pour $t = 0$, on a $x = 0$; puis, pour $t = 1$, on a $x + y = y = 0$. Ainsi, $\vec{u} = \vec{0}$.

— Soit $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et soit α un réel. Pour $t \in [0, 1]$, $|\alpha x + t\alpha y| = |\alpha| \cdot |x + ty| \leqslant |\alpha| \cdot N(\vec{u})$, qui est un majorant. D'où, $N(\alpha\vec{u}) = \sup_{t\in[0,1]} |\alpha| \cdot |x + ty| = |\alpha| \cdot N(\vec{u})$.

— Soient $\vec{u} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{v} = (c, d) \in \mathbb{R}^2$. Pour $t \in [0, 1]$, on a $|(a + c) + t(b + d)| = |(a + tb) + (c+td)| \leqslant |a+tb|+|c+td| \leqslant N(\vec{u})+N(\vec{v})$, qui est un majorant. D'où, $N(\vec{u}+\vec{v}) \leqslant N(\vec{u})+N(\vec{v})$.

On en déduit que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Pour dessiner la boule $\bar{B}(\vec{0}, 1)$, on procède par analyse–synthèse.

Analyse Soit $\vec{u} = (x, y) \in \bar{B}(\vec{0}, 1)$. Ainsi, $N(\vec{u}) = \sup_{t\in[0,1]} |x + ty| \leqslant 1$, d'où, pour tout $t \in [0, 1]$, $|x + ty| \leqslant 1$. En particulier, pour $t = 0$, on a $|x| \leqslant 1$, donc $-1 \leqslant x \leqslant 1$; de plus, en $t = 1$, on a $|x + y| \leqslant 1$, d'où $-1 \leqslant x + y \leqslant 1$.

Synthèse Soit $x \in [-1, 1]$, et soit $y \in [-1-x, 1-x]$. On pose $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que $N(\vec{u}) \leqslant 1$. La fonction $f : t \mapsto |x + ty|$ est continue sur $[0, 1]$, donc $N(\vec{u}) = \max_{t\in[0,1]} |x + ty|$. Montrons que ce maximum est atteint en $t = 0$ ou $t = 1$. Ce résultat est clairement vrai si la fonction f est monotone. On suppose maintenant que cette fonction n'est pas monotone. Ainsi, la fonction $t \mapsto x + ty$ change de signe sur $[0, 1]$. Cette fonction s'annule une fois en un point d'abscisse $\alpha \in]0, 1[$ Sur $[0, \alpha]$, f est monotone et le maximum est atteint en 0 ou en α ; or, f est positive, et $f(\alpha) = 0$; le maximum est donc atteint en 0, sur cet intervalle. Sur $[\alpha, 1]$, f est monotone, et le maximum est atteint en 1 ou en α. Comme f est positive, on en déduit que le maximum est atteint en 1 sur cet intervalle. Ainsi, le maximum est atteint en 0 ou en 1 sur l'intervalle $[0, 1]$.

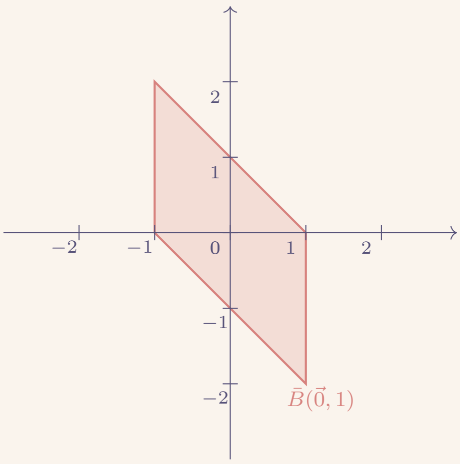

Figure 1 – Boule fermée centrée en $\vec{0}$ de rayon 1, pour la norme N