Khôlle 21.

Hugo
Salou
MPI*

Exercice 1:

(1) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $t \in \mathbb{R}$.
La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$, on peut appliquer le théorème de Taylor-Young au point (x, y) avec le vecteur (t, t):

$$f(x+t, y+t) = f(x,y) + t \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + t\frac{\partial f}{\partial y} + o((t,t)).$$

Or, comme f est solution de $(*)$, $f(x+t, y+t) = f(x, y)$.
D'où,

$$t \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + t \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \underbrace{o((t,t))}_{t \cdot o(1)} = 0.$$

En supposant t non nul, on en déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \underset{t \to 0}{o}(1) = 0.$$

Par unicité de la limite, quand $t \to 0$, on obtient donc que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0, \qquad (E)$$

et ceci pour tout vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(2) On réalise le changement de variables $(\alpha, \beta) = (x-y, x+y)$.
On pose $M : (x, y) \mapsto (\alpha, \beta)$ et $F : (\alpha, \beta) \mapsto f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2}\right)$.
Les fonctions M et F sont de classe $\mathcal{C}^1$, et $f = F \circ M$.
D'où, d'après la règle de la chaîne,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial M}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial M}{\partial y} \end{cases} \text{ et donc } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \beta} - \frac{\partial F}{\partial \alpha}. \end{cases}$$

En sommant les deux lignes du système, on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2\,\frac{\partial F}{\partial \beta}.$$

Ainsi,

f solution de (E) $\iff 2\,\frac{\partial F}{\partial \beta} = 0$

$\iff \exists k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(\alpha,\beta) = k(\alpha)$

$\iff \exists k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = k(x-y).$

On en déduit donc que les fonctions de la forme $f : (x,y) \mapsto k(x-y)$ sont solutions de (E).

Montrons que ce sont aussi des solutions de $(*)$:

$f(x+t, y+t) = k(x+t-y-t) = k(x-y) = f(x,y),$

et ce pour tout vecteur $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $t \in \mathbb{R}$.

On en déduit que l'ensemble $\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \mid \exists k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = k(x-y)\}$ est l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^1$ de $(*)$.

Exercice 2:

(1) a. L'application $\det : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est multilinéaire et $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est de dimension finie; c'est donc une application continue sur $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

De plus, $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ et $\mathbb{R}^*$ est un ouvert.

D'où, $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

b. L'application det est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. En effet, c'est un polynôme des coefficients de la matrice:

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

De plus, et par un raisonnement similaire, la transposée

Hugo
Salou
MPI*
Khôlle 21.

et la comatrice com sont de classe $\mathcal{C}^1$, car $(\mathrm{com}A)_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{j,i}$ où $\Delta_{j,i}$ est le mineur d'indices (i,j), c'est le déterminant de la matrice A en supprimant la j-ème ligne et la i-ème colonne.

D'où, par composition et produit, l'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $GL_n(\mathbb{R})$ car $f(A) = (\mathrm{com}\,A)^T/\det A$.

(2) On considère la matrice $B = (-t)\cdot E_{ij}$.

a. En prenant $|t|$ suffisamment petit ($|t| < 1/\|E_{ij}\|_{sm}$), on peut supposer $\|B\|_{sm} < 1$, où $\|\cdot\|_{sm}$ est une norme sous multiplicative. Ainsi, en considérant la série entière $\sum x^n$ géométrique de rayon de convergence 1, alors

$$(I_n - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-t)^k \cdot E_{ij}^k$$

D'où, $$(I_n + tE_{ij})^{-1} = I_n - tE_{ij} + o(t).$$

Le terme $-tE_{ij}$ étant linéaire en E_{ij}, on en déduit donc que $df(I_n)\cdot E_{ij} = -E_{ij}$.

(b). Soit $H \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. On pose $H = (h_{ij})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}$.
Ainsi, $H = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} h_{ij}E_{ij}$.

Dans la question précédente, aucune hypothèse sur E_{ij} n'a été faite, on applique donc un même raisonnement pour la matrice $B = -H$, en supposant $\|H\|_{sm} < 1$:

$$(I_n + H)^{-1} = (I_n - B)^{-1} = I_n - H + \sum_{k=2}^{\infty} H^k = I_n - H + o(H).$$

Le terme $-H$ étant linéaire en H, on en déduit que

$$df(I_n)\cdot H = -H.$$

► c.f. en fin de copie.

c. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

$$(A+H)^{-1} = (A + A\cdot(A^{-1}H))^{-1}$$
$$= [A(I_n + A^{-1}H)]^{-1}$$
$$= (I_n + A^{-1}\cdot H)^{-1}\cdot A^{-1}$$
$$= I_n - A^{-1}HA^{-1} + \underbrace{o(H)\cdot A^{-1}}_{o(H)}$$

Le terme $-A^{-1}\cdot H\cdot A^{-1}$ est linéaire en H ; on en déduit donc que $df(A)\cdot H = -A^{-1}HA^{-1}$.

(3) a. Comme g est différentiable en A,

$$g(A+H) = g(A) + dg(A)\cdot H + o(H).$$

Ainsi,

$$G(A+H) = (A+H)\cdot g(A+H)$$
$$= (A+H)\cdot(g(A) + dg(A)\cdot H + o(H))$$
$$= Ag(A) + A\cdot dg(A)\cdot H + o(AH)$$
$$+ Hg(A) + H\,dg(A)\cdot H + o(H^2)$$
$$= Ag(A) + \underbrace{A\,dg(A)\cdot H + H\,g(A)}_{\text{linéaire en } H} + o(H)$$

D'où, G est différentiable en A et $dG(A)\cdot H = A\,dg(A)\cdot H + Hg(A)$.

b. On pose $g = f$ et $G : A \mapsto A\cdot f(A) = A\cdot A^{-1} = I_n$.
La fonction G est donc constante sur $GL_n(\mathbb{R})$,
d'où, pour toute matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$dG(A)\cdot H = 0.$$

Or, d'après la question précédente,

$$dG(A)\cdot H = A\,df(A)\cdot H + H\,f(A).$$

D'où, $A\,df(A)\cdot H = -HA^{-1}$

et donc $df(A)\cdot H = -A^{-1}HA^{-1}$.

Hugo
Dalou
MPI*

Khôlle 21.

(2) b. La différentielle $df(I_n)$ étant linéaire, on peut ainsi écrire que $df(I_n)\cdot H = df(I_n)\cdot\left(\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} h_{ij} E_{ij}\right)$

$$= \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} h_{ij}\cdot df(\,)\cdot E_{ij}$$

$$= \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} (-h_{ij}\cdot E_{ij})$$

$$= -H.$$

Ainsi, par unicité de la différentielle,

~~$f(A+H) - f(A) = H + o(H)$~~.

$f(I_n+H) = (I_n+H)^{-1} = I_n - H + o(H)$.