DM$_4$ Mathématiques

Problème 1

1. Les événements E_1 et E_2 sont certains. Au 1^{er} et au 2^{nd} duel, le gagnant n'est pas encore désigné, peu importe les gagnants de ces duels. Pour calculer la probabilité de l'événement E_3, on passe au complémentaire : l'événement $\bar{E}_3$ correspond à « le joueur 0 ou le joueur 1 ne gagne pas le duel. » Ainsi, en notant G_k^i l'événement « le joueur A_k gagne le i-ème duel, » on a $\bar{E}_3 = (G_0^1 \cap G_0^2 \cap G_0^3) \cup (G_1^1 \cap G_1^2 \cap G_1^3)$, et cette union est disjointe. D'où

$$\begin{aligned} P(\bar{E}_3) &= P(G_0^1 \cap G_0^2 \cap G_0^3) + P(G_1^1 \cap G_1^2 \cap G_1^3) \\ &= \quad P(G_0^1) \times P(G_0^2 \mid G_0^1) \times P(G_0^3 \mid G_0^1 \cap G_0^2) \\ &\quad + P(G_1^1) \times P(G_1^2 \mid G_1^1) \times P(G_1^3 \mid G_1^1 \cap G_1^2) \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

   On en déduit que $P(E_3) = 1 - P(\bar{E}_3) = \frac{3}{4}$. On a bien $\frac{1}{2}P(E_2) + \frac{1}{4}P(E_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = P(E_3)$.

2. Soit $n \geqslant 3$. On pose U_k l'événement « il n'y a pas encore de gagnant désigné et le joueur A_k remporte le duel k, » et V_k l'événement « il n'y a pas encore de gagnant désigné et le joueur A_{k-1} remporte le duel k. » Ainsi, $E_n = U_n \cup V_n$ et cette union est disjointe. Ainsi, $P(E_n) = P(U_n) + P(V_n)$. D'une part, on a que $U_n = E_{n-1} \cap G_k^k$, donc $P(U_n) = P(E_{n-1}) \times P(G_k^k \mid E_{n-1}) = \frac{1}{2}P(E_{n-1})$. D'autre part, on a $V_n = E_{n-2} \cap G_{k-1}^{k-1} \cap G_{k-1}^k$, d'où $P(V_n) = P(E_{n-2}) \times P(G_{k-1}^{k-1} \mid E_{n-2}) \times P(G_{k-1}^k \mid E_{n-2} \cap G_{k-1}^{k-1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times P(E_{n-2})$. On en déduit donc que
$$\forall n \geqslant 3, \quad P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2}). \tag{$\mathscr{R}_1$}$$

3. On pose, pour $n \geqslant 3$, $u_n = P(E_n)$. Ainsi, d'après $(\mathscr{R}_1)$,
$$\forall n \geqslant 3, \quad u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{4}u_{n-2}.$$
   L'équation caractéristique de $(\mathscr{R}_1)$ est $x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. On résout donc $4x^2 - 2x - 1 = 0$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 20 > 0$. On en déduit que les racines de cette équation caractéristique sont
$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{20}}{8} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2 + \sqrt{20}}{8} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}.$$
   Ainsi, il existe deux constantes réelles λ et μ que l'on peut déterminer à l'aide de u_1 et u_2, telles que
$$P(E_n) = u_n = \lambda \times {x_1}^n + \mu \times {x_2}^n.$$

4. L'événement E_{n+1} est inclus dans E_n, ainsi la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (au sens de l'inclusion). Ainsi, par continuité décroissante, on a
$$P\Big(\bigcap_{n=2}^{\infty} E_n\Big) = \lim_{n\to\infty} P(E_n) = 0$$
   comme $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$. L'événement, que l'on notera W, « le tournoi désignera un vainqueur » est le complémentaire de l'événement $\bigcap_{n=2}^{\infty} E_n$. Ainsi, $P(W) = 1 - P\big(\bigcap_{n=2}^{\infty} E_n\big) = 0$.

Problème 2

1. Soient $u, v \in \exists$. On a

$$\begin{aligned}
\det\big(G(u,v)\big) &= \langle u \mid u\rangle\ \langle v \mid v\rangle - \langle v \mid u\rangle\ \langle u \mid v\rangle \\
&= \|u\|^2\ \|v\|^2 - \langle u \mid v\rangle^2 \ \text{ par symétrie} \\
&= \big(\|u\|\ \|v\| - \langle u \mid v\rangle\big)\big(\|u\|\ \|v\| + \langle u \mid v\rangle\big) \\
&= \big(\|u\|\ \|v\| - \langle u \mid v\rangle\big)\big(\|-u\|\ \|v\| - \langle (-u) \mid v\rangle\big) \\
&\geqslant 0 \text{ par inégalité de Cauchy-Schwarz.}
\end{aligned}$$

Ce déterminant est nul si, et seulement si u et v sont colinéaires (d'après l'égalité de Cauchy-Scharz). Ainsi, u et v non colinéaires est un condition nécessaire et suffisante pour que $\det G(u, v)$ soit strictement positif.

2. (a) On calcule, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}
\big(G(v_1,\dots,v_n)\big)_{i,j} &= \langle v_i \mid v_j\rangle \\
&= \Big\langle \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} e_k \ \Big|\ \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} e_k \Big\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} \Big\langle e_k \ \Big|\ \sum_{p=1}^{n} a_{p,j} e_p \Big\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} a_{k,i} a_{p,j}\ \langle e_k \mid e_p\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j} \ \text{ car la base } (e_1,\dots,e_n) \text{ est orthonormée} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (A^\top)_{i,k}\ (A)_{k,j} \\
&= (A^\top \cdot A)_{i,j}
\end{aligned}$$

D'où $G(v_1, \dots, v_n) = A^\top \cdot A$.

(b) On a $\det G(v_1, \dots, v_n) = \det(A^\top \cdot A) = \det A^\top \times \det A = \det^2 A \geqslant 0$.

(c) On cherche à montrer que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} G(v_1, \dots, v_n)$. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrons que $A \cdot X = 0$ si, et seulement si $A^\top \cdot A \cdot X = 0$, d'après (a). On remarque que, si $A \cdot X = 0$, alors $A^\top \cdot (A \cdot X) = 0$. Réciproquement, si $A^\top \cdot A \cdot X = 0$, alors $(A \cdot X)^\top \cdot A \cdot X = X^\top \cdot A^\top \cdot A^\top \cdot X = 0$. Mais, avec le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, on a $\langle AX \mid AX\rangle = 0$, d'où $AX = 0$. D'après (a), $\operatorname{Ker} G(v_1, \dots, v_n) = A^\top \cdot A$. Ainsi, d'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg} A = \dim(\operatorname{Im} A) &= \dim \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \dim(\operatorname{Ker} A) \\
&= \dim \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \dim G(v_1,\dots,v_n) \\
&= \dim\big(\operatorname{Im} G(v_1,\dots,v_n)\big) \\
&= \operatorname{rg} G(v_1,\dots,v_n)
\end{aligned}$$

(d) On sait que, pour $j \in [\![1, n]\!]$, $v_j = \sum_{i=0}^{n} a_{i,j} e_j$. On a donc bien $\dim(\operatorname{Im} A) = \dim \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_n)$. D'où, d'après la question précédente,

$$\dim \operatorname{Vect}(v_1,\dots,v_n) = \dim\big(\operatorname{Im} G(v_1,\dots,v_n)\big).$$

3. (a) On a

$$G(v_1, \dots, v_n, z) = \begin{pmatrix} \langle v_1 \mid v_1 \rangle & \dots & \langle v_1 \mid v_n \rangle & \langle v_1 \mid z \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle v_n \mid v_1 \rangle & \dots & \langle v_n \mid v_n \rangle & \langle v_n \mid z \rangle \\ \langle z \mid v_1 \rangle & \dots & \langle z \mid v_n \rangle & \langle z \mid z \rangle \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \langle v_1 \mid v_1 \rangle & \dots & \langle v_1 \mid v_n \rangle & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle v_n \mid v_1 \rangle & \dots & \langle v_n \mid v_n \rangle & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \|z\|^2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice diagonale par blocs est le produit des déterminants de chaque bloc, d'où

$$\det G(v_1, \dots, v_n, z) = \det G(v_1, \dots, v_n) \cdot \|z\|^2.$$

(b) On exprime $y \in F$ dans la base $(v_1, \dots, v_n)$: soient $y_1, \dots, y_n$ tels que $y = \sum_{i=0}^{n} y_i v_i$.

$$G(v_1, \dots, v_n, y+z) = \begin{pmatrix} \langle v_1 \mid v_1 \rangle & \dots & \langle v_1 \mid v_n \rangle & \langle v_1 \mid y+z \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle v_n \mid v_1 \rangle & \dots & \langle v_n \mid v_n \rangle & \langle v_n \mid y+z \rangle \\ \langle y+z \mid v_1 \rangle & \dots & \langle y+z \mid v_n \rangle & \langle y+z \mid y+z \rangle \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \langle v_1 \mid v_1 \rangle & \dots & \langle v_1 \mid v_n \rangle & \langle v_1 \mid z \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle v_n \mid v_1 \rangle & \dots & \langle v_n \mid v_n \rangle & \langle v_n \mid z \rangle \\ \langle y+z \mid v_1 \rangle & \dots & \langle y+z \mid v_n \rangle & \langle z \mid y+z \rangle \end{pmatrix}$$

en appliquant soustrayant les p premières colonnes, multipliées par y_i : $C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} y_i\, C_i$, où les C_i sont les colonnes de la matrice. Ainsi, on a

$$G(v_1, \dots, v_n, y+z) = \begin{pmatrix} \langle v_1 \mid v_1 \rangle & \dots & \langle v_1 \mid v_n \rangle & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle v_n \mid v_1 \rangle & \dots & \langle v_n \mid v_n \rangle & 0 \\ \langle y+z \mid v_1 \rangle & \dots & \langle y+z \mid v_n \rangle & \langle z \mid z \rangle \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire par blocs, d'où,

$$\det G(v_1, \dots, v_n, y+z) = \det G(v_1, \dots, v_n) \cdot \|z\|^2.$$

(c) Soit $x \in E$. On pose $y = p(x) \in F$ et $z = x - p(x) \in F^{\perp}$. D'où, d'après la question précédente,

$$\mathrm{d}(x, F) = \|z\| = \sqrt{\frac{\det G(v_1, \dots, v_n, x)}{\det G(v_1, \dots, v_n)}}.$$

La racine carrée est bien définie d'après la question (2b).

4. (a) On remarque que, pour tout couple $(i, j) \in [\![0, n-1]\!]^2$, on a

$$\left\langle X^i \mid X^j \right\rangle = \int_0^1 t^i \cdot t^j \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{i+j+1}}{i+j+1}\right]_0^1 = \frac{1}{i+j+1} = (H_n)_{i,j}.$$

Ainsi, la matrice H_n est donc la matrice de Gram pour le produit scalaire dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$: $H_n = G(1, X, \dots, X^{n-1})$. La famille $(1, X, \dots, X^{n-1})$ étant une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, elle est libre, d'où $\det G(1, X, \dots, X^n) \neq 0$, d'après la question (2a) car $\det A = \det_{\mathscr{B}}(1, X, \dots, X^n)$, pour une base orthonormalisée $\mathscr{B}$. La matrice H_n est donc inversible.

(b) D'après le théorème des moindres carrés, la fonction $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mapsto \|X^n - P\|$ atteint un minimum pour $P = p(X^n)$, où p est la projection orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'où, en posant $p(X^n) = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$, la fonction f admet un minimum avec $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, les coefficients de $p(X^n)$. Avec ces coefficients, la valeur de f est alors $\|X^n - p(X^n)\|^2$. Or, $\|X^n - p(X^n)\| = \mathrm{d}(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X])$, et, d'après la question (3c), on a,

$$\|X^n - p(X^n)\|^2 = \frac{\det G(1, X, \ldots, X^{n-1}, X^n)}{\det G(1, X, \ldots, X^{n-1})} = \frac{\det H_{n+1}}{\det H_n}.$$

Problème 3

1. (a) On considère la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$, dont la somme vaut la fonction exp. La série $\sum \frac{1}{n!}$ converge, d'où $(\mathscr{P}_1)$. La limite $\lim_{x\to 1^-} \exp x$ existe et est finie ; elle vaut e, d'où $(\mathscr{P}_2)$.

   (b) On considère la série entière $\sum(-x)^n$, qui converge vers la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$. La série $\sum(-1)^n$ diverge, elle ne vérifie donc pas $(\mathscr{P}_1)$. Mais, f admet une limite finie en 1 : $f(1) = \frac{1}{2}$, d'où $(\mathscr{P}_2)$.

   (c) On considère la série entière $\sum \frac{x^n}{n}$, qui converge vers la fonction $f : x \mapsto \ln(1-x)$. La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, elle ne vérifie donc pas $(\mathscr{P}_1)$. Et, $\lim_{x\to 1^-} \ln(1-x) = -\infty$, elle ne vérifie donc pas $(\mathscr{P}_2)$.

   (d)