TD n° 1

Ordre & Induction

Hugo Salou MPI*

Dernière mise à jour le 31 octobre 2022

1 Listes, listes, listes !

1. On a $\forall \ell \in \mathscr{L},\ @([\,], \ell) = \ell$; $\forall \ell_1, \ell \in \mathscr{L},\ @\big(::(x, \ell_1), \ell\big) = ::\big(x, @(\ell_1, \ell)\big)$.
2. On fait une induction. Comme dans l'énoncé, on passe le '@' en infixe. Notons P_ℓ : "$\ell \ @ \ [\,] = \ell$".
   Montrons $P_{[\,]}$: on sait que $[\,] \ @ \ [\,] = [\,]$ par définition de @.
   On suppose P_ℓ est vraie pour une certaine liste $\ell \in \mathscr{L}$. Montrons que, $\forall x \in \mathbb{N}$, $P_{::(x,\ell)}$ vrai. Soit $x \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\big(::(x,\ell)\big) \ @ \ [\,] &\overset{\text{(def)}}{=} ::(x, \ell \ @ \ [\,]) \\ &\overset{(P_\ell)}{=} ::(x, \ell).\end{aligned}$$

3. Notons P_{ℓ_1} : "$\forall \ell_2, \ell_3 \in \mathscr{L},\ (\ell_1 \ @ \ \ell_2) \ @ \ \ell_3 = \ell_1 \ @ \ (\ell_2 \ @ \ \ell_3)$", où $\ell_1 \in \mathscr{L}$ est une liste.
   Soient $\ell_2, \ell_3 \in \mathscr{L}$ deux listes. On a, par définition de @, $([\,] \ @ \ \ell_2) \ @ \ \ell_3 = \ell_2 \ @ \ \ell_3$ et $[\,] \ @ \ (\ell_2 \ @ \ \ell_3) = \ell_2 \ @ \ \ell_3$.
   Soit $\ell_1 \in \mathscr{L}$ une liste telle que P_{ℓ_1}. Soient $\ell_2, \ell_2 \in \mathscr{L}$ deux listes. Soit $x \in \mathbb{N}$. Montrons que $P\big(::(x, \ell_1)\big)$:

$$\begin{aligned}\big(::(x,\ell_1) \ @ \ \ell_2\big) \ @ \ \ell_3 &= ::(x, \ell_1 \ @ \ \ell_2) \ @ \ \ell_3 \\ &= ::\big(x, (\ell_1 \ @ \ \ell_2) \ @ \ \ell_3\big) \\ &\overset{(H)}{=} ::\big(x, \ell_1 \ @ \ (\ell_2 \ @ \ \ell_3)\big) \\ &= ::(x, \ell_1) \ @ \ (\ell_2 \ @ \ \ell_3).\end{aligned}$$

4. Notons P_{ℓ_1} : "$\forall \ell_2 \in \mathscr{L},\ \texttt{rev}(\ell_1 \ @ \ \ell_2) = \texttt{rev}(\ell_2) \ @ \ \texttt{rev}(\ell_1)$. Soit $\ell_2 \in \mathscr{L}$.
   On a $\texttt{rev}([\,] \ @ \ \ell_2) = \texttt{rev}(\ell_2) = \texttt{rev}(\ell_2) \ @ \ \texttt{rev}([\,])$.
   On suppose P_{ℓ_1} vraie pour une certaine liste $\ell_1 \in \mathscr{L}$. Soit $x \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\texttt{rev}(::x, \ell_1) \ @ \ \ell_2) &= \texttt{rev}(::(x, \ell_1 \ @ \ \ell_2) \\ &= \texttt{rev}(\ell_1 \ @ \ \ell_2) \ @ \ ::(x, [\,]) \\ &= \big(\texttt{rev}(\ell_2) \ @ \ \texttt{rev}(\ell_1)\big) \ @ \ ::(x, [\,]) \\ &= \texttt{rev}(\ell_2) \ @ \ \big(\texttt{rev}(\ell_1) \ @ \ ::(x, [\,])\big) \\ &= \texttt{rev}(\ell_2) \ @ \ \texttt{rev}\big(::(x, \ell_1)\big)\end{aligned}$$

5. Notons, pour toute liste $\ell \in \mathscr{L}$, P_ℓ : "$\texttt{rev}\big(\texttt{rev}(\ell)\big) = \ell$".
   Montrons que $P_{[\,]}$ est vraie : $\texttt{rev}(\texttt{rev}([\,])) = \texttt{rev}([\,]) = [\,]$.
   Soit une liste $\ell \in \mathscr{L}$ telle que P_ℓ soit vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $P_{::(x,\ell)}$ vraie :

$$\begin{aligned}\texttt{rev}(\texttt{rev}(::(x, \ell))) &= \texttt{rev}(\texttt{rev}(\ell) \ @ \ ::(x, [\,])) \\ &= \texttt{rev}(::(x, [\,])) \ @ \ ::(x, \ell) \ @ \ \ell \\ &= [\,] \ @ \ ::(x, [\,]) \ @ \ \ell \\ &= ::(x, [\,]) \ @ \ \ell \\ &= ::(x, \ell).\end{aligned}$$

2 Ensembles définis inductivement

La correction est disponible sur *cahier-de-prepa*.

3 Arbres, Arbres, Arbres !

1. On pose $R = \left\{ V\big|^0, N\big|^2_{\mathbb{N}} \right\}$. Ainsi, par induction nommée, on crée l'ensemble $\mathscr{A}$ des arbres.
2. On pose

$$\begin{aligned} h : \mathscr{A} &\longrightarrow \mathbb{N} \cup \{-1\} \\ V &\longmapsto -1 \\ N(x, f_1, f_2) &\longmapsto 1 + \max\big(h(f_1), h(f_2)\big) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} t : \mathscr{A} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ V &\longmapsto 0 \\ N(x, f_1, f_2) &\longmapsto 1 + t(f_1) + t(f_2) \end{aligned}$$

3. On rappelle les relations taille/hauteur (vues l'année dernière) :

$$h(a) + 1 \leqslant t(a) \leqslant 2^{h(a)+1} - 1.$$

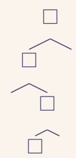
Soit, pour tout arbre $a \in \mathscr{A}$, P_a la propriété ci-dessus. Montrons que P_a est vraie pour tout arbre $a \in \mathscr{A}$ par induction.
Montrons que P_V vraie : on a $h(V) + 1 = 1 - 1 = 0$, $t(V) = 0$ et $2^{h(V)+1} - 1 = 1 - 1 = 0$ d'où $h(V) + 1 \leqslant t(V) \leqslant 2^{h(V)+1} - 1$.
Supposons P_g vraie et P_d vraie pour deux arbres $g, d \in \mathscr{A}$. Soit $x \in \mathbb{N}$. Montrons que $P_{N(x,g,d)}$ est vraie :

$$\begin{aligned} h\big(N(x, g, d)\big) - 1 &= 1 + \max\big(h(g), h(d)\big) + 1 \\ &\leqslant \max(t(g) - 1, t(d) - 1) + 2 \\ &\leqslant \max\big(t(g), t(d)\big) + 1 \\ &\leqslant t(g) + t(d) + 1 \\ &= t\big(N(x, g, d)\big) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} t\big(N(x, g, d)\big) &= t(g) + t(d) + 1 \\ &\leqslant 2^{h(g)+1} + 2^{h(d)+1} - 1 \\ &\leqslant 2 \times 2^{\max(h(g),h(d))+1} - 1 \\ &\leqslant 2^{\max(h(g),h(d))+2} - 1 \\ &\leqslant 2^{h(N(x,g,d))+1} - 1. \end{aligned}$$

4. Je pense qu'il y a une erreur d'énoncé : les arbres crées sont de la forme



où $\square$ représente un nœud. Il ne sont pas de la forme “peigne.”

4 Ordre sur *powerset*

1. Soient A et B deux parties d'un ensemble ordonné $(S, \preccurlyeq)$. Si $A = B$, alors $A \mathrel{\dot\preccurlyeq} B$ et donc A et B sont comparables. Si $A \neq B$, alors $A \bigtriangleup B \neq \varnothing$, et donc $A \bigtriangleup B$ admet un plus petit élément m. Par définition de $\bigtriangleup$, on a $m \in A$ (et donc $A \mathrel{\dot\succcurlyeq} B$) ou $m \in B$ (et donc $A \mathrel{\dot\preccurlyeq} B$). On en déduit que A et B sont comparables. La relation $\mathrel{\dot\preccurlyeq}$ est donc totale.

2. On a
$$\varnothing \precneqq \{2\} \precneqq \{1\} \precneqq \{1,2\} \precneqq \{0\} \precneqq \{0,2\} \precneqq \{0,1\} \precneqq \{0,1,2\}.$$

3. Non, l'ordre $(\wp(S), \precneqq)$ n'est pas forcément bien fondé. Par exemple, on pose $(S, \preccurlyeq) = (\mathbb{N}, \leqslant)$. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet bien un plus petit élément. Mais, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\{n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante : en effet, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \triangle u_{n+1} = \{n, n+1\}$ qui admet pour élément minimal $n \in A$, d'où $u_n \succneqq u_{n+1}$.

5 Ordres bien fondés en vrac

1. Non, l'ensemble $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$ n'est pas un ensemble ordonné. En effet, en posant $n = 4$ et $m = 8$, on a $\forall i \in \mathbb{N}$, $\frac{n}{2^i} \pmod 2 = 0$, et $\forall i \in \mathbb{N}$, $\frac{m}{2^i} \pmod 2 = 0$. Ainsi, on a $n \sqsubseteq m$, et $m \sqsubseteq n$, mais comme $n \neq m$, la relation "$\sqsubseteq$" n'est pas anti-symétrique, ce n'est donc pas une relation d'ordre (et donc encore moins un ordre bien fondé).
2. Non, l'ensemble $(\Sigma^*, \sqsubseteq)$ n'est pas un ensemble ordonné. En effet, en posant $\Sigma = \{a, b\}$, et $u = aa$ et $v = ab$ deux mots de Σ, on a $|u| = |v|$ et donc $u \sqsubseteq v$ et $u \sqsupseteq v$ mais comme $u \neq v$, la relation "$\sqsubseteq$" n'est pas anti-symétrique, ce n'est donc pas une relation d'ordre (et donc encore moins un ordre bien fondé).
3. Oui, l'ensemble $(\Sigma^*, \sqsubseteq)$ est un ensemble ordonné, et cet ordre est total. En effet, soit u, v et w trois mots. On a bien $u \sqsubseteq u$ (avec $\phi = \mathrm{id}_{[\![0,|u|-1]\!]}$). Également, si $u \sqsubseteq v$ et $v \sqsubseteq u$, alors $|u| = |v|$, et par stricte croissance de ϕ, on a bien $u = v$. Aussi, si $u \sqsubseteq v$ et $v \sqsubseteq w$, alors soit ϕ l'extractrice de la suite v de u, et soit φ l'extractrice de la suite w de v. Alors, la fonction $\phi \circ \varphi$ est strictement croissante, et $\forall i \in [\![|u| - 1]\!]$, $u_i = v_{\phi(i)} = w_{\phi(\varphi(i))}$, et donc $u \sqsubseteq w$. Ainsi, la relation "$\sqsubseteq$" est une relation d'ordre.
   Montrons à présent que l'ordre est bien fondé. Soit L une partie non vide de Σ^*. Soit $x \in L$. Si $\varepsilon \in L$, alors $x \sqsupseteq \varepsilon$.
4. Non, l'ensemble $(\wp(E), \sqsubseteq)$ n'est pas un ensemble ordonné. En effet, on pose $E = \mathbb{N}$. Soit A une partie finie de E. On sait que son plus grand élément existe, et on le note m. Par définition du maximum, $\forall y \in A$, $y \preccurlyeq m$. Et donc $A \not\sqsubseteq A$. La relation "$\sqsubseteq$" n'est donc pas une relation d'ordre (et donc encore moins un ordre bien fondé).

6 Définition inductive des mots et ordre préfixe

1. On pose $X_0 = \{\varepsilon\}$, et pour $n \in \mathbb{N}$,
$$X_{n+1} = X_n \cup \Big(\bigcup_{a\in\Sigma} \{a \cdot w \mid w \in X_n\} \Big).$$
   Ainsi, on définit par induction l'ensemble des mots Σ^*.
2. Soient u et v deux mots. Montrons $u \preccurlyeq_1 v \iff u \preccurlyeq_2 v$.
   "$\implies$" Supposons $u \preccurlyeq_1 v$. Soit $w \in \Sigma^*$ tel que $v = uw$. Par définition de $\preccurlyeq_2$, on a bien $\varepsilon \preccurlyeq_2 w$. On décompose u en $u = u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n \cdot \varepsilon$ (avec la définition de mot de la question précédente). D'où, toujours par définition de $\preccurlyeq_2$, on a $u_n \cdot \varepsilon \preccurlyeq_2 u_n \cdot w$, puis $u_{n-1} \cdot u_n \cdot \varepsilon \preccurlyeq_2 u_{n-1} \cdot u_n \cdot w$. En itérant ce procédé, on obtient
$$\underbrace{u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n \cdot \varepsilon}_{u} \preccurlyeq_2 \overbrace{\underbrace{u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n}_{u} \cdot w}^{v}.$$
   Et donc $u \preccurlyeq_2 v$.
   "$\impliedby$" Supposons à présent que $u \preccurlyeq_2 v$. On pose $u = u_1 u_2 \ldots u_n$, et $v = v_1 v_2 \ldots v_m$. Par définition de $\preccurlyeq_2$, on a $u_1 \cdot (u_2 \ldots u_n) \preccurlyeq_2 u_1 \cdot (v_2 \ldots v_m)$. Puis, toujours par définition de $\preccurlyeq_2$, on a $u_1 \cdot u_2 \cdot (u_3 \ldots u_n) \preccurlyeq u_1 \cdot u_2 \cdot (v_3 \ldots v_n)$. En itérant ce procédé, on a $u \cdot \varepsilon \preccurlyeq u \cdot (v_n \ldots v_m)$. On pose $w = v_n \ldots v_m$, et on a bien $v = uw$. D'où $v \succcurlyeq_1 u$.

7 $\mathcal{N}$

1. On définit par induction la fonction suivante

$$\begin{aligned} \oplus : \mathcal{N}^2 &\longrightarrow \mathcal{N} \\ (\boldsymbol{S}(x), y) &\longmapsto \oplus(x, \boldsymbol{S}(y)) \\ (\mathbf{0}, x) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

2. Soit $(x, y) \in \mathcal{N}^2$.
   — Si $f(x) = 0$, alors $\oplus(x, y) = y$ et donc $f(\oplus(x, y)) = f(y) = f(x) + f(y)$.
   — Si $f(x) \geqslant 1$, alors $x = \boldsymbol{S}(z)$ avec $z \in \mathcal{N}$. Ainsi, $\oplus(x, y) = \oplus(z, \boldsymbol{S}(y))$. Or, $f(z) = f(x) - 1 \leqslant f(x)$. Et donc, par définition de $\oplus$ puis par hypothèse d'induction, on a $f(\oplus(x, y)) = f(\oplus(z, \boldsymbol{S}(y)) = f(z) + f(\boldsymbol{S}(y))$. On en déduit que $f(\oplus(x, y)) = f(x) - 1 + f(y) + 1 = f(x) + f(y)$.

   Par induction, on a bien $\forall(x, y) \in \mathcal{N}^2,\ f\big(\oplus(x, y)\big) = f(x) + f(y)$.
3. On définit par induction la fonction suivante

$$\begin{aligned} \otimes : \mathcal{N}^2 &\longrightarrow \mathcal{N} \\ (\boldsymbol{S}(x), y) &\longmapsto \oplus\big(y, \otimes(x, y)\big) \\ (\mathbf{0}, y) &\longmapsto \mathbf{0}. \end{aligned}$$

4. Soit $(x, y) \in \mathcal{N}^2$.
   — Si $f(x) = 0$, alors $\otimes(x, y) = \mathbf{0}$, et donc $f(\otimes(x, y)) = 0 = f(x) \times f(y)$.
   — Si $f(x) \geqslant 1$, alors $x = \boldsymbol{S}(z)$ avec $z \in \mathcal{N}$. Ainsi, par définition de $\otimes$, on a $\otimes(x, y) = \oplus(y, \otimes(z, y))$. Or, par hypothèse d'induction, $f(\otimes(z, y)) = f(z) \times f(y)$ (car $f(z) < f(x)$), et donc $f(\otimes(x, y)) = f(y) + f(\otimes(z, y)) = f(y) + f(z) \times f(y) = f(y) \times (1 + f(z)) = f(y) \times f(x)$.

   Par induction, on a bien $\forall(x, y) \in \mathcal{N}^2,\ f\big(\otimes(x, y)\big) = f(x) \times f(y)$.
5. On définit par induction la fonction suivante

$$\begin{aligned} ! : \mathcal{N} &\longrightarrow \mathcal{N} \\ \mathbf{0} &\longmapsto \boldsymbol{S}(\mathbf{0}) \\ \boldsymbol{S}(x) &\longmapsto \otimes\big(\boldsymbol{S}(x), !(x)\big). \end{aligned}$$

6. Soit $x \in \mathcal{N}$.
   — Si $f(x) = 0$, alors $!(x) = \boldsymbol{S}(\mathbf{0})$ par définition, et donc $f(!(x)) = 1 = 0! = f(x)!$.
   — Si $f(x) \geqslant 1$, alors $x = \boldsymbol{S}(z)$ avec $z \in \mathcal{N}$. Ainsi, par définition de $!$, on a $!(x) = \otimes(x, !(z))$, et donc, par hypothèse de récurrence, $f(!(x)) = f(x) \times f(!(z)) = f(x) \times \big(f(z)!\big)$. Or, comme $f(z) = f(x) - 1$, on a donc $f(!(x)) = f(x) \times \big(f(x) - 1\big)! = f(x)!$.

   Par induction, on a bien $\forall x \in \mathcal{N},\ f\big(!(x)\big) = f(x)!$.

8 Résultats manquants du cours