Exercice 6

Quelle est la nature de l'intégrale

$$A = \int_0^{+\infty} \left(x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x + 1}\right) \,\mathrm{d}x \text{ ?}$$

L'intégrale A est impropre en $+\infty$. On calcule donc $a(M) = \int_0^M \left(x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x + 1}\right) \mathrm{d}x$ et on étudie sa limite quand M tend vers $+\infty$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $f : x \mapsto x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 1}$, et on effectue un développement limité :

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 2 - \left(1 + (x^2 + 4x)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= x + 2 - 1 - \frac{1}{2}(x^2 + 4x) + o(x) \\ &= \frac{x^2}{2} + 1 + -x + o(x) \\ &= \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

Or, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{2} \,\mathrm{d}x$ diverge par critère de Riemann, et $\int_0^{+\infty} o(x^2) \,\mathrm{d}x$ aussi, et donc

$$\boxed{\text{l'intégrale } A \text{ diverge.}}$$