Exercice 8

1. Soit un vecteur non nul $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(\lambda \mathrm{id} - u \circ v)$. Ainsi, $u(v(\vec{x})) = \lambda \vec{x}$. Et, donc $v(u(v(\vec{x}))) = \lambda v(\vec{x})$. On a donc $v(\vec{x}) \in \operatorname{Ker}(\lambda \mathrm{id} - v \circ u)$. Or, si $\lambda \neq 0$, on a $v(\vec{x}) \neq \vec{0}$; en effet, si $v(\vec{x}) = \vec{0}$, alors $u \circ v(\vec{x}) = \vec{0} = \lambda \vec{x}$ et donc $\vec{x} = \vec{0}$, ce ne serait donc pas un vecteur propre de $u \circ v$: une contradiction. On en déduit que $v(\vec{x})$ est un vecteur propre de $u \circ v$ associé à la valeur propre λ.
2. On pose donc $\lambda = 0$, une valeur propre de $u \circ v$. L'endomorphisme $u \circ v$ n'est donc pas injectif, donc bijectif. On sait donc, comme E est de dimension finie, que $\det(u \circ v) = 0$. Or $\det(u \circ v) = \det u \times \det v = \det(v \circ u)$. Et donc $\det(v \circ u) = 0$, $v \circ u$ n'est donc pas bijectif, donc injectif. Et donc, on a $0 \in \operatorname{Sp}(v \circ u)$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, et soit Q une primitive de P.

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker}(u \circ v) &\iff \left(\int_0^X P(t) \ \mathrm{d}t \right)' = 0 \\ &\iff \big(Q(X) - Q(0)\big)' = 0 \\ &\iff Q'(X) = 0 \\ &\iff P(X) = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $\operatorname{Ker}(u \circ v) = \{0\}$.
Également,

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker}(v \circ u) &\iff \int_0^X P'(t) \ \mathrm{d}t = 0 \\ &\iff P(X) - P(0) = 0 \\ &\iff P(X) = P(0) \\ &\iff \deg P \leqslant 0 \\ &\iff P \in \mathbb{R}_0[X] \end{aligned}$$

On en déduit que $\operatorname{Ker}(v \circ u) = \mathbb{R}_0[X]$.