TD 16 : Équations différentielles

# Exercice 1

1. Résolvons l’équation . On pose l’équation homogène associée : . Une fonction est une solution sur de si, et seulement si, il existe un réel tel que, pour tout , . On fait varier la constante en posant car , . Ainsi, est une solution de si, et seulement si si, et seulement si, si, et seulement si, .

|  |
| --- |
| On en déduit qu’une fonction est une solution sur de si, et seulement si, il existe un réel tel que, pour tout , |

# Exercice 2

1. On considère l’équation différentielle , et on note l’équation homogène associée : .
   1. On résout l’équation caractéristique :

Donc est une solution sur de si, et seulement si, il existe deux réels et tels que, pour tout ,

* 1. On recherche des solutions sous la forme  : est une solution de si, et seulement si . D’où, et sont des solutions. Or, et sont libres. D’où, est une solution de si, et seulement si, il existe deux réels et tels que .

On résout maintenant l’équation avec second membre. On peut procéder en utilisant 4 méthodes.

1. On trouve une solution particulière  : est une solution de si, et seulement si, il existe deux réels et tels que, pour tout , .
2. On fait varier la constante  : on cherche une solution particulière de la forme .
3. On fait varier la constante : on cherche une solution particulière de la forme .
4. On fait varier les deux constantes et ( rappel 3.) : on cherche une solution particulière de la forme .

On choisit la méthode c : la fonction est une solution de si, et seulement si,

si, et seulement si, si, et seulement si , en notant . On nomme l’équation et l’équation homogène associée .

Une fonction est une solution de si, et seulement si, il existe un réel tel que, pour tout , . De plus, une solution particulière de est . Une fonction est une solution sur de si ; et seulement si, il existe un réel tel que, pour tout , . Autre rédaction : l’ensemble des solutions sur est

D’où, est une solution particulière de l’équation différentielle . D’où, est une solution particulière de .

On en déduit que est une solution sur de si, et seulement si, il existe deux réels et tels que, pour tout ,

Autre rédaction, sans briser l’équivalence : est une solution de si, et seulement si, il existe deux réels et tels que, pour tout , . D’où, est une solution de si, et seulement si, il existe deux réels et tels que, pour tout ,

1. On considère , l’équation différentielle

On cherche d’abord une solution de la forme . Soit la fonction définie, pour tout , comme . La fonction est une solution sur de si, et seulement si, ,

si, et seulement si , si, et seulement si, et (car deux polynômes sont égaux si, et seulement si, leurs coefficients sont égaux) si, et seulement si, .

# Exercice 5

Déterminer les solutions sur du système différentiel :

C’est un système à 3 inconnues avec 2nd membre. Les équations sont couplées, on change de base : on diagonalise la matrice , où est définie comme

On note le vecteur « second membre, » le vecteur « inconnues. » Après calcul du polynôme caractéristique, on trouve . Ainsi, le système est équivalent à résoudre , où , et , en notant la matrice de changement de base.

Ainsi,

On cherche des vecteurs propres de , associés aux valeurs propres 0, 1 et 2. On en déduit la matrice de passage  :

Autre rédaction, on a

et donc, après changement de base,

où , et sont trois vecteurs propres formant la base d’arrivée de la matrice de passage .

On résout ensuite , le système avec 2nd membre, en faisant varier les 3 constantes , et .

On n’a pas besoin d’inverser la matrice .

Attention à ne pas rompre l’équivalence : ne pas utiliser « je cherche les solutions de la forme **,** » mais plutôt « je fais varier la constante car , pour tout dans un intervalle choisi. »

# Exercice 6

1. On considère le système . Matriciellement, il est équivalent à où et .

* 1ère méthode : diagonaliser la matrice .

On réalise un changement de base , de telle sorte à ce que l’équation soit équivalente à , où est diagonale. En notant la matrice de passage, on a (et ).

On commence par calculer le polynôme caractéristique de la matrice . Soit . On a

D’où, , et est diagonalisable. En effet, elle est de taille 2 et possède deux valeurs propres distinctes. Cherchons des vecteurs propres de associé à chacune des valeurs propres. Soit . On a

car par hypothèse,

De même, . Ainsi, la matrice de passage du changement de base s’écrit

D’où,

où ,

* 2nde méthode : poser .

Alors, . Il existe donc tel que, pour tout , . On pose donc .

Alors,

On résout à présent le système .

Donc, est une solution sur de si, et seulement s’il existe trois réels , et tels que, pour tout ,

Remarques (bientôt dans le rappel 2.1)

* La solution générale de peut s’écrire matriciellement sous la forme
* La solution générale de est de la forme , où est une base de l’ensemble des solutions de , qui est donc un espace vectoriel de dimension 3, qui correspond au nombre d’équations.
* La solution générale de est donc

1. On nomme l’équation . On se place dans un espace euclidien orienté de dimension 3. On pose et les fonctions et . Soit une solution, sur l’intervalle , de l’équation . Montrons que les deux fonctions et sont constantes sur , *i.e.*, montrons qu’il existe deux réels et tels que, pour tout , et . La fonction est dérivable car est une solution de l’équation différentielle . Et, la fonction est de classe (d’après les théorèmes généraux), et

*i.e.*, . D’après la règle de la chaîne, la fonction est dérivable et

D’où, est constante sur . De même, la fonction est dérivable et

Or, en notant et alors . D’où,

La fonction est donc constante sur .

On en déduit que les solutions de sont à une distance constante de l’origine, leurs trajectoires sont incluses dans une sphère.

1. Soit , alors . On suppose impair.
   1. Montrer que n’est pas inversible et que, pour tout vecteur colonne , .

Le déterminant est invariant par transposition, donc . Or, et donc car le déterminant est *multilinéaire*. Et, comme est impair, on a donc . D’où,  ; la matrice n’est donc pas inversible.

Remarque : une matrice nilpotente n’est pas inversible ; en effet, si , alors  ; or, et donc .

Soit  :

et donc .

* 1. Montrer que si, pour tout , , alors il existe , pour tout ,

# Exercice 7

Soit l’équation différentielle .

* 1. On cherche une solution de développable en série entière :

et exprimer le coefficient en fonction du coefficient .

* 1. Quel est le rayon de convergence de la série entière  ?
  2. Calculer, pour tout , la somme .

1. Vérifier que est une solution sur de .
2. Déterminer la solution générale, sur l’intervalle , de l’équation différentielle de deux manières :
   1. en utilisant la question 2 et la variation de la constante ;
   2. en utilisant les questions 1 et 2.

Cette équation différentielle est d’ordre 2, on la résout sur ou . La solution générale est de la forme , où est développable en série entière, et ne l’est pas.

1. E
   1. Soit le rayon de convergence d’une série entière . Et, soit, pour tout réel , .

par unicité du DSE

* 1. Soit la suite définie par . Alors la série . Et,

D’où, .

* 1. Pour tout réel positif ,

Cette expression de n’est pas définie en , mais elle est *prolongeable par continuité* en 0. En effet,

* + 1. [Développement limité.]
    2. [Utiliser le DSE.] La fonction est développable en série entière, donc continue (et même ) sur l’intervalle .

1. On vérifie que est une solution de sur .
   1. On fait varier la constante en posant …
   2. D’après le théorème de superposition, est une solution de sur si, et seulement si, il existe un couple de réels tel que, pour tout ,

# Exercice 8

Résoudre sur l’équation aux dérivées partielles

On passe en coordonnées polaires : on pose . On pose, de plus, . Ainsi, en appliquant la règle de la chaîne,[[1]](#footnote-2)

On remplace avec les dérivées connues :

On reconnaît, à la 2nde ligne, l’équation . Ainsi, est équivalent à si, et seulement si, il existe une fonction telle que si, et seulement si, il existe une fonction .

# Rappels

## Théorème de Cauchy-Lipchitz.

Définition : On dit que est une *solution* sur un intervalle de l’équation différentielle si la fonction est dérivable sur  ; pour tout , .

Remarque : la fonction est à valeur dans un espace vectoriel normé ; la fonction est aussi à valeur dans  ; est une application linéaire de l’espace vectoriel vers .

Remarque : Résoudre un système d’équations différentielles est équivalent à résoudre l’équation matricielle , où est un vecteur de fonctions, et est une matrice de fonctions. Pour un système

on pose la matrice de coefficients (fonctions) , et le vecteur de coefficients .

Exemple : Dans l’exercice 6, on doit résoudre dans . Ici, les coefficients sont constants et il n’y a pas de second membre.

Exemple : Le système est équivalent à l’équation matricielle à coefficients constants et avec second membre :

Théorème (Cauchy & Lipschitz) : Si est un intervalle, et les fonctions et sont continues, si et si , alors il existe une unique solution sur de l’équation matricielle telle que (condition initiale de l’équation différentielle).

On nomme l’équation différentielle et la condition initiale. Le problème est nommé un problème de Cauchy.

Bilan : Sous certaines conditions, tout système d’équations différentielles adjoint d’une condition initiale, il y a existence et unicité de la solution.

## Principe de superposition.

Le théorème suivant est un corollaire du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème :

* **Avec second membre.** La solution générale de l’équation avec second membre est la somme de la solution générale de l’équation sans second membre et d’une solution particulière de l’équation avec second membre. (L’ensemble des solutions d’une équation différentielle avec second membre est un espace affine.)
* **Sans second membre.** L’ensembles solution de l’équation sans second membre est un espace de vectoriel de dimension , où est le nombre d’équations différentielles (*i.e.*, la taille de la matrice ). Autrement dit, la solution générale de l’équation sans second membre est la superposition de solutions linéairement indépendantes.

*Preuve* :

* On pose une équation différentielle de la forme , où , et . On pose de plus, l’équation homogène associée : . Si et sont deux solutions de , alors est solution de car et . Soit , alors et est solution de et est une solution de . Il reste à montrer qu’il existe une solution particulière. D’après le théorème de Cauchy-Lipschitz, si et sont continues, alors il existe une solution de .
* Soit un intervalle, et une application continue. Soit . Soit, de plus, l’ensemble des solutions de l’équation . Montrons que . On pose l’application

Montrons que est une application linéaire bijective. Par construction, est linéaire. De plus, d’après le théorème de Cauchy & Lipschitz, il existe au moins une solution qui vérifie la condition initiale , quel que soit . D’où, est surjective. Également, toujours d’après le théorème de Cauchy & Lipschitz, cette solution est unique. L’application est surjective. On en déduit que est linéaire et bijective. Ainsi, .

## Équations différentielles .

Une équation différentielle d’ordre est de la forme

Elle est équivalente à un système d’équations différentielles que l’on peut exprimer matriciellement comme

La matrice est nommée la *matrice compagnon* de l’équation différentielle .[[2]](#footnote-3)

#### Exemple : variation des deux constantes.

On résout sur l’équation : On considère l’équation homogène associé. [La solution générale de est de la forme , où les fonctions et sont des solutions de linéairement indépendantes.] On cherche une solution de de la forme  :

D’où, est une solution de . On fait varier la constante en posant . Alors, et . D’où,

Donc, est une solution de de si, et seulement si, il existe deux réels et tels que, pour tout , . [Ainsi, on peut poser . On a donc trouvé une base de l’espace vectoriel des solutions de .]

Pour résoudre , on fait varier les deux constantes en posant

On cherche une solution de cette forme .

|  |
| --- |
| On en déduit que est une solution sur de si, et seulement si, il existe deux réels et tels que, pour tout , |

Quel est l’intérêt de faire varier les *deux* constantes ? En faisant varier la constante , on doit résoudre l’équation d’ordre deux, et on doit donc intégrer deux fois, ce qui peut être difficile. En faisant varier les deux constantes, on utilise une équation de 1er ordre, et on n’a qu’à intégrer une fois deux fonctions « simples. »

#### Le Wronskien

On suppose avoir une équation homogène d’ordre 2. Elle est équivalente au système matriciel , où

En résolvant ce système de deux équations différentielles d’ordre 1, on trouve deux solutions et . Ainsi, est équivalent à , d’après le théorème de Cauchy-Lipschitz. D’où, est équivalent à

où les fonctions et sont libres, car et le sont. Cela signifie que si alors . Cela signifie aussi que

Ce déterminant est appelé le *wronskien*. (Cadeau) La fonction est dérivable car et sont de classe , et . D’où, comme et sont solutions de l’équation différentielle , alors

D’où, pour tout , . Or, on sait résoudre cette équation différentielle : il existe un réel tel que, , , où est une primitive de . La solution peut être écrite comme

En effet,

L’égalité est vraie car par le théorème fondamental de l’analyse, comme la fonction est continue.

# Exemples

Résoudre l’équation de d’Alembert pour des fonctions de classe dans  :

Montrer que .

Soit le changement de variables , et . Et, soit une fonction de telle que . En appliquant la règle de la chaîne, on trouve

En réappliquant la règle de la chaîne pour calculer la dérivée seconde de par rapport à , on trouve que

d’où, en appliquant le théorème de Schwarz,

De même, on calcule la dérivée seconde de par rapport à , et on trouve que

Ainsi, on en déduit que

|  |
| --- |
| Donc est une solution de l’équation d’onde de d’Alembert si, et seulement si, il existe deux fonctions et de classe telles que |

1. pas à , ce qui conduit à des calculs plus complexes comme dériver , mais à [↑](#footnote-ref-2)
2. En lien avec la démonstration du théorème de Cayley & Hamilton. [↑](#footnote-ref-3)