Ejercicio semanal 1

Teoría de Conjuntos III, 2026-2

Profesor: Luis Jesús Turcio Cuevas.
Ayudante: Hugo Víctor García Martínez.

Instrucciones. *Esta tarea es **individual** y deberá ser entregada **presencial y personalmente** el día **martes 11 de febrero** al inicio la clase.*

Ej. 1 (10 pts) Sean $\mathbb{P} = (P, \leq)$ un forcing y $p, q \in P$. Considere:

$$D := \{x \in P \mid x \perp p \vee x \perp q \vee (x \leq p \wedge x \leq q)\}$$

i) Pruebe que D es denso en $\mathbb{P}$. **(5 pts)**

ii) De un ejemplo de orden parcial $\mathbb{P}$ donde el conjunto D sea más que numerable. **(5 pts)**

Demostración. ***(i)*** Sea $y \in P$ cualquiera. Sin pérdida de generalidad $y \notin D$, seguido de esto, se obtiene que $y \parallel p$ y existe $r \in P$ con $r \leq y, p$. Si $r \in D$, entonces $D \cap L(y) \neq \varnothing$. Por otro lado, $r \notin D$ implica que $r \parallel q$ y, así, existe $s \in P$ con $s \leq r, q$. Nótese que, como $r \leq y, p$, entonces $s \leq y$ y $s \leq p, q$, por tanto $s \in D$; en este caso, $D \cap L(y)$ tampoco es vacío. Por tanto, D es denso. ■

Solución. ***(ii)*** Sea $\kappa \geq \aleph_1$, es vacuo que $\varnothing$ es un orden parcial en κ. Cualesquiera dos elementos (distintos) de $\mathbb{P} := (\kappa, \varnothing)$ son incompatibles. Consecuentemente, para $p = q = 0 \in \kappa$ se tiene que $D = \kappa$ es más que numerable. ⊠