

# 0 Preliminares

*En este capítulo se establecen las bases conceptuales y la notación que se utilizarán a lo largo de este trabajo. Se asume que el lector posee un conocimiento fundamental de la teoría de conjuntos axiomática y de la topología general, todo al nivel de cursos estándar de licenciatura. El propósito de este capítulo no es ser un tratado exhaustivo, sino fijar la terminología, los convenios y los resultados clásicos que se darán por sentados. Para una revisión más profunda, se remite al lector a textos de referencia como:*

## 0.1. Teoría de Conjuntos

### 0.1.1. Notación y convenciones básicas

Sea adoptará como marco axiomático a la teoría usual de conjuntos; ZFC. Se comprenden, por tanto, los axiomas de: existencia, extensionalidad, buena fundación, esquema de separación, par, unión, infinito, esquema de reemplazo y el axioma de elección (*denotado a partir de ahora por AC*); mismos que pueden consultarse en [3, p. xv].

Se asume que el lector está familiarizado con los objetos clásicos de la teoría de conjuntos, conviniendo las notaciones pertinentes a: los símbolos lógicos  $\forall$ ,  $\exists$ ,  $\neg$ ,  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$  y  $\exists!$  para existencia y unicidad; el conjunto vacío  $\emptyset$ ; la pertenencia  $\in$ , la contención  $\subseteq$  y contención propia  $\subset$ ; la diferencia de conjuntos  $X \setminus Y$ ; el par ordenado  $(x, y)$ , el conjunto potencia  $\mathcal{P}(X)$ ; y claro, las operaciones conjuntistas: unión, intersección, producto cartesiano  $\cup$ ,  $\cap$  y  $\times$ ; junto con sus homólogos unarios:  $\bigcup$ ,  $\bigcap$  y  $\prod$ , respectivamente). A lo largo del presente texto se jerarquizarán las operaciones anteriores de la siguiente manera: se aplicarán siempre de

izquierda a derecha, priorizando la diferencia de conjuntos, el producto cartesiano y la unión e intersección, en tal orden.

Dado un conjunto  $A$ , se denotará por  $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$  al conjunto de todos los elementos  $x$  de  $A$  que satisfacen la fórmula  $\varphi(x)$  (siendo tal colección un conjunto, debido al esquema de separación [3, p. xv]). Una *clase* es una “colección” del estilo  $\mathcal{C} = \{x \mid \varphi(x)\}$ , se dice  $\mathcal{C}$  es *conjunto* si y sólo si se satisface:

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$$

en caso contrario, ésta se denomina *clase propia*. Como abuso de notación, si un conjunto  $x$  hace verdadera la fórmula  $\varphi(x)$ , se escribirá  $x \in \mathcal{C}$ . Se denotará por  $\mathcal{V}$  a la clase  $\{x \mid x = x\}$ .

Se dará por sentado el conocimiento de la teoría elemental de relaciones y funciones, manteniéndose al margen de las notaciones típicas para: el dominio  $\text{dom}(f)$  e imagen  $\text{ima}(f)$ ; la imagen directa  $f[A]$  e inversa  $f^{-1}[A]$  y las funciones identidad  $\text{Id}_X$ . La composición de funciones (o relaciones) será denotada por yuxtaposición  $fg$  y, la restricción de una función (o relación)  $f$  a un subconjunto  $A \subseteq \text{dom}(f)$ , por  $f \upharpoonright A$ . Se señala además el uso ocasional de la expresión “ $A \rightarrow B$  dada por  $x \mapsto f(x)$ ” (o simplemente “ $x \mapsto f(x)$ ”) para hacer referencia a la regla de correspondencia de la función  $f : A \rightarrow B$ , en caso su nombre carezca de interés.

### 0.1.2. Órdenes parciales

Los órdenes parciales reflexivos y antirreflexivos serán denotados por los símbolos  $\leq$  y  $<$ , respectivamente y el término *orden parcial* hará referencia a cualquiera de ellos; la posible diferencia no es sustancial, pues ambas versiones son fácilmente intercambiables al añadir o eliminar la identidad del conjunto sobre el cual se definen. Un *conjunto parcialmente ordenado* se concibe como un par  $(P, R)$ , donde  $R$  es un orden parcial en  $P$ . En lo que sigue, fúese conjunto parcialmente ordenado  $(P, \leq)$ .

Para cada  $A \subseteq P$ :  $\text{mín}(A)$ ,  $\text{máx}(A)$ ,  $\text{sup}(A)$  e  $\text{ínf}(A)$  denotarán el máximo, mínimo, supremo e ínfimo de  $A$ , respectivamente (en caso de existir). Además, cierto  $p \in P$  es *R-minimal* de  $A$  si  $p \in A$  y no existe  $q \in A$  tal que  $q < p$ , definiendo el concepto *R-maximal* de forma dual.

Se conviene que dos elementos  $p, q \in P$  son *comparables* si y sólo si  $p \leq q$  o  $q \leq p$ ; en caso contrario, son *incomparables*. Así mismo,  $p$  y  $q$  serán *compatibles* ( $p \parallel q$ ) cuando exista  $r \in P$  de modo que  $r \leq p$  y  $r \leq q$ ; en caso contrario, serán *incompatibles* ( $p \perp q$ ). Una  $(P, \leq)$ -cadena (*anticadena*, *respectivamente*) es un subconjunto de  $P$  de elementos comparables (incompatibles, *respectivamente*) dos a dos; y cuando el contexto lo permita, se omitirá el prefijo  $(P, \leq)$ .

La caracterización típica para AC es clave:

**Teorema 0.1.1** (Principio de Maximalidad de Hausdorff). *AC se satisface si y sólo si todo conjunto parcialmente ordenado  $(P, \leq)$ , no vacío, posee una  $(P, \leq)$ -cadena  $\subseteq$ -maximal (del conjunto de cadenas de  $P$ ).*

Se dice que  $\leq$  ( $(P, \leq)$  o  $(P, <)$ , indistintamente) es: *total* si cualesquiera dos elementos de  $P$  son comparables, *buen orden* (*bien fundado*, o *completo*, *respectivamente*) si y sólo si cada  $A \in \mathcal{P}(P) \setminus \{\emptyset\}$  tiene elemento mínimo (minimal, o supremo si  $A$  es acotado superiormente, *respectivamente*). Nótese que todo buen orden es total, bien fundado y completo.

Dados dos ordenes parciales  $(P, R)$  y  $(Q, S)$ , se dice que una función  $f : P \rightarrow Q$  es: *S-creciente* (*decreciente*, *respectivamente*) si y sólo si dados  $p, q \in P$ , se tiene que  $p R q$  implica  $f(p) S f(q)$  (o  $f(p) S f(q)$ , *respectivamente*). En cualquier caso, se dice que  $f$  es un *morfismo de orden*; y, si además  $f$  es biyectiva, se dice que  $f$  es un *isomorfismo* y que los órdenes  $(P, R)$  y  $(Q, S)$  son *isomorfos*, denotado  $(P, R) \cong (Q, S)$ .

### 0.1.3. Ordinales y Cardinales

Siguiendo la hoy conocida como construcción de John von Neumann, se declara que un conjunto  $\alpha$  es: *ordinal* si es transitivo (esto es,  $\alpha \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$ ) y  $(\alpha, \in)$  es un buen orden; y, *natural* si es un ordinal tal que  $(\alpha, \in)$  es un buen orden. Se denota por ON a la clase (propia) de todos los ordinales.

Los ordinales se denotan, típicamente, por las primeras letras griegas minúsculas:  $\alpha, \beta, \gamma$ , etcétera; y, los naturales por:  $m, n, k$ , etcétera. Se seguirá esta convención, salvo que se indique lo contrario.

## Preeliminaries

Si  $\alpha$  y  $\beta$  son ordinales, se conviene que  $\alpha$  es menor que  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ ) cuando  $\alpha \in \beta$ ; en este sentido, es un hecho que toda clase no vacía de ordinales,  $X$ , tiene un mínimo (a saber,  $\bigcap X$ ). Y consecuentemente, todo conjunto de ordinales  $A$  tiene supremo (a saber,  $\bigcup A$ ). Un ordinal  $\alpha$  es: *cero* si  $\alpha = 0 := \emptyset$ ; *sucesor* cuando existe otro ordinal  $\beta$  de modo que  $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$  (en cuyo caso se denota  $\alpha = \beta + 1$ ); y *límite* en caso no ocurra ninguna de las dos anteriores. El primer ordinal límite se denotará por  $\omega$ . Es un hecho que  $\omega$  es el conjunto de todos los números naturales.

**Teorema 0.1.2** (Inducción transfinita). *Si  $\varphi(x)$  es una fórmula de la teoría de conjuntos y:*

- i)  $\varphi(0)$  se satisface.*
- ii) Para cada ordinal  $\alpha$ , la satisfacción de  $\varphi(\alpha)$  implica la satisfacción de  $\varphi(\alpha + 1)$ .*
- iii) Para cada ordinal límite  $\gamma$ , la satisfacción de  $\forall \alpha \in \gamma (\varphi(\alpha))$  implica la satisfacción de  $\varphi(\gamma)$ .*

*entonces, para cualquier ordinal  $\alpha$ , se satisface  $\varphi(\alpha)$ .*

*Se obtiene la misma conclusión sustituyendo las condiciones (i)-(iii) por el enunciado: Para todo ordinal  $\gamma$ , la satisfacción de  $\forall \alpha \in \gamma (\varphi(\alpha))$  implica la satisfacción de  $\varphi(\gamma)$ .*

Dadas clases  $\mathcal{C} = \{x \mid \varphi(x)\}$  y  $\mathcal{C}' = \{x \mid \varphi'(x)\}$ , se dice que un *funcional* de  $\mathcal{C}$  en  $V$  es una clase  $F$  de pares ordenados; a saber  $F = \{(x, y) \mid \varphi(x) \wedge \psi(x, y)\}$ , de forma que  $\forall x(\varphi(x) \rightarrow \exists! y(\varphi'(y) \wedge \psi(x, y)))$ . En cuyo caso, se denota  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ , y, para cada  $x$  en  $\mathcal{C}$ , se denota por  $F(x)$  al único  $y$  en  $\mathcal{C}'$  tal que  $\psi(x, y)$ . Siendo claro además que, si  $A$  es un conjunto cualquiera,  $F[A] = \{F(a) \mid a \in A\}$ .

**Teorema 0.1.3** (Recursión transfinita). *Para cualesquiera funcionales*

$F, G : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  y todo conjunto  $A$ , existe un único funcional  $G : ON \rightarrow \mathcal{V}$  de manera que:

- i)  $G(0) = A$ .
- ii) Para cada ordinal  $\alpha$ ,  $G(\alpha + 1) = F(G(\alpha))$ .
- iii) Para cada ordinal límite  $\gamma$ ,  $G(\gamma) = H(G[\alpha])$ .

Además, existe un único funcional  $K : ON \rightarrow \mathcal{V}$  de manera que para todo ordinal  $\alpha$  se satisface:

$$K(\alpha) = F(K[\alpha])$$

Los teoremas anteriores se restringen a cualquier otro ordinal, consiguiéndose así las versiones clásicas para los teoremas de inducción y recursión (cada uno de ellos con dos versiones) para  $\omega$  (o cualquier otro ordinal  $\alpha$ ). Siendo tales restricciones las justificaciones rigurosas para ciertas técnicas y construcciones de las que se echa mano en este trabajo (véase **tal tal tal**). Haciendo uso del Teorema de Recursión Transfinita, se pueden definir las operaciones binarias entre ordinales:  $\alpha + \beta$ ,  $\alpha \cdot \beta$  y  $\alpha^\beta$ , respectivamente. En caso se lleguen a utilizar durante la presente tesis, se indicará que tales símbolos corresponden a aritmética es ordinal (para evitar confusión con la aritmética cardinal) y seguirá la definición expuesta en [4, p.XXX].

**Teorema 0.1.4** (de enumeración). *Para cualquier buen orden  $(P, <)$  existe un único ordinal  $\alpha$  para el cual  $(P, <) \cong (\alpha, \in)$ .*

Tomando en cuenta que; bajo AC, cualquier conjunto admite un buen orden [2, Teo. 5.1, p. 48], se desprende de lo anterior que todo conjunto  $X$  es biyectable con algún ordinal, al mínimo de tales ordinales se le denomina *cardinalidad de  $X$*  y se denota por  $|X|$ . Se conviene además que  $X$  es: *finito* si existe  $n \in \omega$  tal que  $|X| = n$ ; *infinito* si  $|X| \geq \omega$ ; *numerable* si  $|X| = \omega$ ; *a lo más numerable* si  $|X| \leq \omega$ ; y, *más que numerable* (indistintamente, *no numerable*) si  $|X| > \omega$ .

## Preeliminaries

Cualquier ordinal  $\kappa$  que sea la cardinalidad de un conjunto tiene la virtud de no ser biyectable con ningun ordinal anterior a él, a estos ordinales se les llama *cardinales*. Los cardinales se suelen denotar por letras griegas intermedias:  $\kappa$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ , etcétera. Se seguirá tal convención y además se denotará por CAR a la clase de cardinales mayores o iguales a  $\omega$ . Es un hecho que la intersección de una familia de cardinales, es un cardinal. En consecuencia, cualquier clase no vacía de cardinales tiene mínimo; y, cualquier conjunto de cardinales, supremo.

Dados dos cardinales  $\kappa$  y  $\lambda$ , se definen:  $\kappa + \lambda := |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|$ ,  $\kappa \cdot \lambda := |\kappa \times \lambda|$  y  $\kappa^\lambda := |\{f \mid f : \lambda \rightarrow \kappa\}|$ ; siendo las versiones generales de las dos primeras operaciones:

$$\sum_{\alpha \in I} \kappa_\alpha := \left| \bigcup_{\alpha \in I} (\kappa_\alpha \times \{\alpha\}) \right| \quad \text{y} \quad \prod_{\alpha \in I} \kappa_\alpha := \left| \prod_{\alpha \in I} \kappa_\alpha \right|$$

(cuando  $\{\kappa_\alpha \mid \alpha \in I\}$  es un conjunto no vacío de cardinales).

Se dará por sentado que el lector está familiarizado con la aritmética cardinal básica (véase [2, Cap. 1, § 3]). Más allá de tal comportamiento elemental, se hace hincapié en los siguientes teoremas de suma relevancia para la aritmética cardinal:

**Teorema 0.1.5** (suma y producto cardinal). *Si  $\{\kappa_\alpha \mid \alpha \in I\}$  es conjunto no vacío de cardinales:*

- i)  $\sum_{\alpha \in I} \kappa_\alpha = |I| \cdot \sup_{\alpha \in I} \kappa_\alpha$ .
- ii) Si ningun  $\kappa_\alpha$  es 0 y para cualesquiera  $\alpha, \beta \in I$ ,  $\alpha \leq \beta$  implica  $\kappa_\alpha \leq \kappa_\beta$ , entonces:  $\prod_{\alpha \in I} \kappa_\alpha = \left( \sup_{\alpha \in I} \kappa_\alpha \right)^{|I|}$ .

**Teorema 0.1.6** (Lema de König). *Sean  $\{\kappa_\alpha \mid \alpha \in I\}$  y  $\{\lambda_\alpha \mid \alpha \in I\}$  conjuntos no vacíos de cardinales de modo que para todo  $\alpha \in I$  se*

satisface  $\kappa_\alpha < \lambda_\alpha$ . Entonces:

$$\sum_{\alpha \in I} \kappa_\alpha < \prod_{\alpha \in I} \kappa_\alpha$$

Particularmente,  $\kappa = \sum_{\alpha \in \kappa} 1 < \prod_{\alpha \in \kappa} 2 = 2^\kappa$  (Teorema de Cantor).

Del Lema anterior se desprende que si  $\kappa \in \text{CAR}$ , existe  $\lambda \in \text{CAR}$  con  $\kappa < \lambda$ . Luego, se puede ordenar la clase CAR como:

**Definición 0.1.7.** Se define recursivamente; para cualquier ordinal  $\alpha$ , el número  $\aleph_\alpha$ , de la siguiente manera:

- i)  $\aleph_0 := \omega$ .
- ii) Para cada ordinal  $\alpha$ ,  $\aleph_{\alpha+1} := \min\{\lambda \in \text{CAR} \mid \aleph_\alpha < \lambda\}$ .
- iii) Para cada ordinal límite  $\gamma$ ,  $\aleph_\gamma := \sup_{\alpha < \gamma} \aleph_\alpha$ .

Además, para cada ordinal  $\alpha$ , se denota  $\omega_\alpha := \aleph_\alpha$ .

Siempre que  $X$  sea un conjunto y  $\kappa$  un cardinal, se escribirá por  $[X]^\kappa$  al conjunto de todos los subconjuntos de  $X$  de cardinalidad  $\kappa$ ;  $[X]^{<\kappa}$  al conjunto de todos los subconjuntos de  $X$  de cardinalidad estrictamente menor que  $\kappa$ ; definiéndose análogamente a los conjuntos  $[X]^{\leq \kappa}$ ,  $[X]^{>\kappa}$  y  $[X]^{\geq \kappa}$ . Además, en caso no se confunda con la notación de aritmética cardinal,  $X^\kappa$  será el conjunto de funciones de  $\kappa$  en  $X$ ; y,  $X^{<\kappa}$  el conjunto de funciones de funciones  $f : \alpha \rightarrow X$  (con  $\alpha < \kappa$ ).

Es un hecho que si  $X$  es infinito, entonces  $|[X]^\kappa| = |X|^\kappa$  y  $|[X]^{<\omega}| = |X|$ ; además,  $|X^\mu| = |X|^\mu$  y  $|X^{<\omega}| = |X|$ .

### 0.1.4. Árboles

Un *árbol* es un orden parcial  $(T, \leq)$  (denotado simplemente por  $T$  si no hay lugar a ambigüedades) tal que para cualquier  $x \in T$ , el conjunto  $<_x := <^{-1}[\{x\}] = \{y \in T \mid y < x\}$  es un buen orden. Dado el REF, para cada

## Preeliminaries

$x \in T$  existe un único ordinal, denotado  $o(x)$  para el cual  $(\prec_x, \prec) \cong (o(x), \in)$ . Tal ordinal  $o(x)$  es nombrado el *orden de  $x$  en el árbol  $T$* . La *altura* de  $T$  es el ordinal  $h(T, \leq) := \sup\{o(x)+1 \mid x \in T\}$ . Para cada ordinal  $\alpha$  se define el  $\alpha$ -ésimo nivel de  $(T, \leq)$  como el conjunto  $T_\alpha := \{x \in T \mid o(x) = \alpha\}$ . Y, finalmente, un subconjunto  $R \subseteq T$  se dice que es *rama* si y sólo si es una  $(T, \leq)$ -cadena  $\subseteq$ -maximal (del conjunto de  $(T, \leq)$ -cadenas).

Dentro de la vasta variedad de árboles, será de especial interés el *árbol de ramas de  $2^\omega$*   $= \{f \mid f : \omega \rightarrow 2\}$ ; esto es, el conjunto  $2^{<\omega}$  ordenado por contención. Tal árbol es numerable, todos sus elementos tienen orden finito y su altura es exactamente  $\omega$ .

En efecto, si  $f \upharpoonright n \in 2^{<\omega}$ , entonces  $(n, \in) \cong (f, \subsetneq_f)$  debido al isomorfismo de orden  $n \rightarrow \subsetneq_f$ , dado por  $n \mapsto f \upharpoonright n$ . Por lo tanto  $T$  es un árbol, y el orden de cada  $f \in T$  es su dominio; como  $2^{<\omega}$  contiene a todas las funciones de naturales en 2, se sigue que la altura de  $T$  es  $\omega = \sup\{n+1 \mid n \in \omega\}$ .

Además  $T$  es numerable, ya que:

$$\omega \leq |2^{<\omega}| = \left| \bigcup_{n \in \omega} 2^n \right| \leq \sum_{n \in \omega} |2^n| = \omega$$

Lo cual demuestra lo que se requería respecto al árbol  $(2^{<\omega}, \subseteq)$ .

## 0.2. Topología

### 0.2.1. Convenios generales y propiedades topológicas

Una *topología* para un conjunto  $X$  es un conjunto  $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$  que tiene por elementos a  $\emptyset$  a  $X$ ; es cerrado bajo uniones (arbitrarias); y, cerrado bajo intersecciones finitas. El par  $(X, \tau)$  (con frecuencia confundido con su conjunto subyacente,  $X$ ) se denomina *espacio topológico* (o simplemente *espacio*). Los elementos de  $\tau$  se denominan *abiertos (de  $X$ )* y sus complementos respecto a  $X$ , *cerrados (de  $X$ )*.

Dados dos espacios  $X$  y  $Y$ , se dice que una función  $f : X \rightarrow Y$  es *continua* si para cada  $U \subseteq Y$  abierto en  $Y$ , se tiene que  $f^{-1}[U] \subseteq X$  es abierto en  $X$ . Un *homomorfismo entre  $X$  y  $Y$*  es una función continua



$f : X \rightarrow Y$ , biyectiva, cuya inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  es también continua. Cuando exista un homeomorfismo entre  $X$  y  $Y$ , esto se denotará  $X \cong Y$ .

Dados un espacio  $(X, \tau)$  y  $A \subseteq X$  se define la *topología de subespacio (de  $A$  respecto  $X$ )* como la colección  $\tau_A := \{U \cap A \mid U \in \tau\}$  (que, claramente, es topología para  $A$ ). Cuando  $(X, \eta), (Y, \tau)$  sean espacios topológicos, se dice que una función  $f : X \rightarrow Y$  es un *encaje* si y sólo si  $f$  es un homeomorfismo entre  $(X, \eta)$  y  $(f[X], \tau_{f[X]})$ . En caso ocurra lo último, se convendrá que  $X$  es un *subespacio* de  $Y$  (o bien, que  $X$  se *encaja en*  $Y$ ) y, ocasionalmente, esto se denotará  $X \hookrightarrow Y$ . En este contexto, la notación “ $A \subseteq X$ ” significará que  $A$  está contenido en  $X$  como conjunto y que  $A \hookrightarrow X$  por medio del encaje  $A \rightarrow X$  dado por  $a \mapsto a$ .

Una *base* para un espacio topológico  $(X, \tau)$  es una colección  $\mathcal{B} \subseteq \tau$  de forma que para cualquier abierto  $U$  de  $X$  y cada  $x \in U$  existe cierto  $B \in \mathcal{B}$  de forma que  $x \in B \subseteq U$ .

Si  $x \in X$ , una *vecindad de  $x$  (en  $X$ )* es un subconjunto  $V \subseteq X$  de modo que existe un abierto  $U$  de  $X$  tal que  $x \in U \subseteq V$ . Además, se convendrá que una colección  $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{P}(X)$  es una *base local (de vecindades, respectivamente)* de  $x$  en  $X$  si y sólo si para cada elemento de  $\mathcal{B}_x$  es una vecindad abierta (vecindad, respectivamente) de  $x$ ; y, para todo abierto  $U$  de  $X$  con  $x \in U$ , existe  $B \in \mathcal{B}_x$  de forma que  $x \in B \subseteq U$ .

Para cada  $A \subseteq X$  se denotarán por  $\text{int}(A), \text{cl}(A), \text{ext}(A), \text{fr}(A), \text{der}(A)$  a los *operadores*: interior, clausura, exterior, frontera, y derivado de  $A$ , respectivamente. Sus definiciones se pueden consultar en [1, Cap. 2]. Los elementos de  $\text{der}(A)$  se denominan *puntos de acumulación de  $A$* ; y, los elementos en  $A \setminus \text{der}(A)$  se llaman *puntos aislados de  $A$* . Un subconjunto  $D \subseteq X$  se dice *denso (en  $X$ )* si y sólo si  $\text{cl}(D) = X$ .

Dado un conjunto no vacío de espacios topológicos  $\{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ , se denotarán por  $\prod_{\alpha \in \kappa} X_\alpha$  y  $\coprod_{\alpha \in \kappa} X_\alpha$  a su *producto topológico* (o, *de Tychonoff*) y *suma topológica*, respectivamente; siguiéndolo las definiciones de estos espacios acorde al estándar, expuesto en textos como [1, 5], entre otros. Al momento de trabajar con productos topológicos, será usual, para cada  $\alpha \in \kappa$  denotar por  $\pi_\alpha$  a la  $\alpha$ -ésima proyección cartesiana ( $\prod_{\beta \in \kappa} X_\beta \rightarrow X_\alpha$  dada por  $f \mapsto f(\alpha)$ ).

Una propiedad  $\varphi(X)$  (pensada como fórmula de la teoría de conjun-

tos) es: *topológica* si es invariante bajo homeomorfismos; esto es, si  $(X, \tau)$  y  $(Y, \eta)$  son homeomorfos, entonces  $\varphi(X)$  se satisface únicamente cuando  $\varphi(Y)$  se satisface; *hereditaria* (*débilmente hereditaria*, respectivamente) cuando  $\varphi(X)$  implica que para cualquier subespacio (subespacio cerrado, respectivamente)  $A$  de  $X$ ,  $\varphi(A)$  se satisface; *factorizable* si para cualquier conjunto no vacío de espacios topológicos  $\{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$  se tiene que, si  $\varphi(\prod_{\alpha \in \kappa} X_\alpha)$  se cumple, entonces  $\forall \alpha \in \kappa (\varphi(X_\alpha))$  se satisface; *productiva* (*finitamente productiva*, respectivamente) si para cualquier cardinal  $\kappa$  (natural  $\kappa \in \omega$ , respectivamente) no cero y familia  $\{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$  de espacios, la satisfacción de  $\forall \alpha \in \kappa (\varphi(X_\alpha))$  implica la satisfacción de  $\varphi(\prod_{\alpha \in \kappa} X_\alpha)$ . Además, si un espacio  $X$  es tal que todos sus subespacios tienen una propiedad (a saber,  $P$ ),  $X$  se denomina *hereditariamente P*.

Las siguientes propiedades topológicas serán utilizadas a lo largo del texto. Un espacio  $X$  se dice: *Primero Numerable* (o 1AN) si cada uno de sus puntos admite una base local (equivalentemente, de vecindades) a lo más numerable; *Segundo Numerable* (o 2AN) si admite una base a lo más numerable; *Separable* si tiene un subconjunto denso y a lo más numerable;  $T_0$  si para cualesquiera  $x, y \in X$  distintos existe un abierto  $U$  de forma que  $U \cap \{x, y\} \in \{\{x\}, \{y\}\}$ ;  $T_1$  si para cada  $x \in X$  el conjunto  $\{x\}$  es cerrado,  $T_2$  (o *de Hausdorff*) si para cualesquiera  $x, y \in X$  distintos existen abiertos ajenos  $U, V$  tales que  $x \in U$  y  $y \in V$ ; *regular* si para cualquier cerrado  $F \subseteq X$  y cualquier  $x \in X \setminus F$  existen abiertos  $U, V$  ajenos de modo que  $F \subseteq U$  y  $x \in V$ ;  $T_3$  si es regular y  $T_1$ ; *completamente regular* si para cualquier cerrado  $F$  y punto  $x \in X \setminus F$  existe una función continua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  de modo que  $f(x) = 0$  y  $f[F] \subseteq \{1\}$ ;  $T_{3\frac{1}{2}}$  (o *de Tychonoff*) si es completamente regular y  $T_1$ ; *normal* si para cualesquiera cerrados  $F, G$  ajenos, existen abiertos ajenos  $U, V$  de modo que  $F \subseteq U$  y  $G \subseteq V$ ;  $T_4$  si es normal y  $T_1$ .

### 0.3. Pruebas de Consistencia Relativa

#### 0.3.1. Preludio de Lógica

#### 0.3.2. Axioma de Martin

Un conjunto parcialmente ordenado  $(P, \leq)$  es *c.c.c.* (o bien, cuenta con la *propiedad de anticadena contable*) si y sólo si cualquier  $(P, \leq)$ -anticadena es a lo más numerable.

Un *filtro* de  $(P, \leq)$  es un subconjunto  $F \subseteq P$  no vacío, cerrado por arriba (es decir, si  $x \in F$  y  $y \geq x$ , entonces  $y \in F$ ) y de elementos compatibles en  $F$  (es decir, para cualesquiera  $x, y \in F$  existe  $r \in F$  de modo que  $r \leq x$  y  $r \leq y$ ). La noción de *ideal* es dual a la de filtro; y, un filtro (o ideal) es *propio* si y sólo si es distinto de  $P$ .

**Observación 0.3.1.** Sea  $X$  es conjunto, entonces  $F \subseteq \mathcal{P}(X)$  es filtro (ideal) de  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$  si y sólo si  $F$  es no vacío, cerrado bajo *superconjuntos* (subconjuntos) y bajo *intersecciones* (uniones) dos a dos.

Se conviene que un subconjunto  $D \subseteq P$  es: *denso* si y sólo si para cualquier  $x \in P$  existe un elemento  $d \in D$  de modo que  $d \leq x$ ; *denso bajo*  $p \in P$  cuando para cada  $x \leq p$  existe  $d \in D$  de modo que  $d \leq x$ .

Dada una colección  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(P)$  de subconjuntos densos de  $(P, \leq)$ , se dice que un filtro  $G$  de  $(P, \leq)$  es  $\mathcal{D}$ -*genérico* si es propio y tiene intersección no vacía con cada elemento de  $\mathcal{D}$ . Un filtro  $G$  es *genérico* si es  $\mathcal{D}$ -genérico, donde  $\mathcal{D}$  es la colección de todos los subconjuntos densos de  $(P, \leq)$ .

El Axioma de Martin<sup>1</sup> se formula de la siguiente manera:

**Definición 0.3.2.** Para cada cardinal infinito  $\kappa$ ,  $MA(\kappa)$  es el enunciado: “Para todo conjunto parcialmente ordenado  $(P, \leq)$  c.c.c. y cada colección  $\mathcal{D}$  de conjuntos densos de  $(P, \leq)$ , con  $|\mathcal{D}| \leq \kappa$ , existe un filtro  $\mathcal{D}$ -genérico”.

<sup>1</sup>que surgió como fruto del estudio de la *Hipótesis de Souslin* (véase la discusión correspondiente en [3])

### *Preeliminaries*

*El enunciado MA se definee como: “Para cada cardinal infinito  $\kappa < \mathfrak{c}$  se satisface  $MA(\kappa)$ ”.*

Es un reesultado estándar y bien conocido que; en ZFC,  $MA(\omega)$  es verdadero y  $MA(\mathfrak{c})$  es falso; en consecuencia, MA se suele utilizar junto con la negación de la hipótesis del continuo (para no obtener resultados siempre vacuos). Además, a razón de ello, está bien definido:

$$\mathfrak{m} := \min\{\kappa \geq \omega \mid \neg MA(\kappa)\}$$

Claramente  $\aleph_1 \leq \mathfrak{m} \leq \mathfrak{c}$ .

### **0.3.3. Forcing**

# Índice Simbólico

$(P, <) \cong (Q, \sqsubset)$ , 3	$\text{MA}(\kappa)$ , 11	$\kappa \cdot \lambda$ , 6
0 (cero), 3	ON, 3	$\kappa^\lambda$ , 6
$<_x$ , 7	$\aleph_\alpha$ , 7	$\mapsto$ , 2
$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ , 4	$\alpha + \beta$ , 5	$\mathfrak{m}$ , 12
$X^\kappa$ , 7	$\alpha < \beta$ , 3	$\omega$ , 3
$X^{<\kappa}$ , 7	$\alpha \cdot \beta$ , 5	$\omega_\alpha$ , 7
$[X]^\kappa$ , 7	$\alpha^\beta$ , 5	$\prod_{\alpha \in I} \kappa_\alpha$ , 6
$[X]^{<\kappa}$ , 7	$\alpha + 1$ , 3	$\sum_{\alpha \in I} \kappa_\alpha$ , 6
$[X]^{>\kappa}$ , 7	$\text{cl}(A)$ , 9	ZFC, 1
$[X]^{\geq \kappa}$ , 7	$\text{der}(A)$ , 9	$h(T, \leq)$ , 7
$[X]^{\leq \kappa}$ , 7	$\text{ext}(A)$ , 9	$o(x)$ , 7
AC, 1	$\text{fr}(A)$ , 9	$p \parallel q$ , 2
CAR, 5	$\text{int}(A)$ , 9	$p \perp q$ , 2
MA, 11	$\kappa + \lambda$ , 6	



# Índice Alfabético

- anticadena, 2
- Axioma
  - de Martin, 11
- base, 9
  - de vecindades, 9
  - local, 9
- cadena, 2
- Cantor
  - Teorema de, 6
- cardinal, 5
  - exponenciación, 6
  - producto, 6
  - producto general, 6
  - suma, 6
  - suma general, 6
- cardinalidad, 5
- clase, 2
  - conjunto, 2
  - propia, 2
- conjunto
  - a lo más numerable, 5
  - abierto, 8
  - cerrado, 8
  - denso, 9
  - finito, 5
  - infinito, 5
  - más que numerable, 5
  - no numerable, 5
  - numerable, 5
- elementos
  - comparables, 2
  - compatibles, 2
  - incomparables, 2
  - incompatibles, 2
- encaje, 9
- enumeración
  - Teorema de, 5
- espacio, 8
  - topológico, 8
- filtro, 11
  - $\mathcal{D}$ -genérico, 11
  - genérico, 11
  - propio, 11
- funcional, 4
- función
  - continua, 8
  - creciente, 3
  - decreciente, 3
  - homeomorfismo, 8
- Hausdorff

## ÍNDICE ALFABÉTICO

- Principio de Maximalidad de,  
3
- ideal, 11
  - propio, 11
- isomorfismo(de orden), 3
- König
  - Lema de, 6
- Lema
  - de König, 6
- Martin
  - Axioma de, 11
- morfismo (de orden), 3
- natural, 3
- operador
  - clausura, 9
  - derivado, 9
  - exterior, 9
  - frontera, 9
  - interior, 9
- orden
  - c.c.c., 11
  - bien fundado, 3
  - bueno, 3
  - completo, 3
  - isomorfo a otro, 3
  - total, 3
- ordinal, 3
  - cero, 3
  - exponenciación, 5
  - límite, 3
- producto, 5
- sucesor, 3
- suma, 5
- Principio
  - de Maximalidad de Hausdorff, 3
- producto
  - de Tychonoff, 9
  - topológico, 9
- propiedad
  - débilmente hereditaria, 9
  - factorizable, 9
  - finitamente productiva, 9
  - hereditaria, 9
  - productiva, 9
  - topológica, 9
- punto
  - aislado, 9
  - de acumulación, 9
- subbase, 9
- subconjunto
  - denso (de un orden parcial), 11
  - denso bajo  $p$  (de un orden parcial), 11
- subespacio, 9
- suma topológica, 9
- Teorema
  - de Cantor, 6
  - de enumeración, 5
  - de Inducción transfinita, 4
  - de la suma cardinal, 6



## *ÍNDICE ALFABÉTICO*

de Recursión transfinita, 4  
del producto cardinal, 6  
topología, 8  
de subespacio, 9  
transfinita  
Inducción, 4  
Recursión, 4

vecindad, 9

árbol, 7  
orden de un elemento de un,  
7  
rama de un, 7



# Referencias

- [1] Fidel Casarrubias y Angel Tamariz. *Elementos de Topología General*. 1.<sup>a</sup> ed. Aportaciones Matemáticas, 2019.
- [2] Thomas Jech y Thomas Jech. *Set theory: The third millennium edition, revised and expanded*. Vol. 3. Springer, 2006.
- [3] Kenneth Kunen. *Set theory an introduction to independence proofs*. Vol. 102. Elsevier, 1980.
- [4] José Alfredo Amor Montaña, Gabriela Campero Arena y Favio Ezequiel Miranda Perea. *Teoría de los conjuntos, Curso intermedio*. Las prensas de Ciencias, 2011.
- [5] James R. Munkres. *Topology*. 2.<sup>a</sup> ed. Noida: Pearson, 2000.