0 Preeliminares

En este capítulo se establecen las bases conceptuales y la notación que se utilizarán a lo largo de este trabajo. Se asume que el lector posee un conocimiento fundamental de la teoría de conjuntos axiomática y de la topología general, todo al nivel de cursos estándar de licenciatura. El propósito de este capítulo no es ser un tratado exhaustivo, sino fijar la terminología, los convenios y los resultados clásicos que se darán por sentados. Para una revisión más profunda, se remite al lector a textos de referencia como:

0.1. Teoría de Conjuntos

0.1.1. Notación y convenciones básicas

Sea adopatará como marco axiomático a la teoría usual de conjuntos; ZFC. Se comprenden, por tanto, los axiomas de: existencia, extensionalidad, buena fundación, esquema de separación, par, unión, infinito, esquema de reemplazo y el axioma de elección (*denotado a partir de ahora por AC*); mismos que pueden consultarse en [**kunenSet**].

Se asume que el lector está familiarizado con los objetos clásicos de la teoría de conjuntos, conviniendo las notaciones pertinentes a: los símbolos lógicos $\forall$, $\exists$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ y $\exists!$ para existencia y unicidad; el conjunto vacío $\varnothing$; la pertenencia $\in$, la contención $\subseteq$ y contención propia $\subsetneq$; la diferencia de conjuntos $X \setminus Y$; el par ordenado (x, y), el conjunto potencia $\mathscr{P}(X)$; y claro, las operaciones conjuntistas: unión, intersección, producto cartesiano ($\cup$, $\cap$ y $\times$; junto con sus homólogos unarios: $\bigcup$, $\bigcap$ y $\prod$, respectivamente). A lo largo del presente texto se jerarquizarán las operaciones anteriores de la siguiente manera: se aplicarán siempre de izquierda a derecha, priorizando la diferencia de conjuntos, el producto cartesiano y la unión e intersección, en tal orden.

Dado un conjunto A, se denotará por $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$ al conjunto de todos los elementos x de A que satisfacen la fórmula $\varphi(x)$ (siendo tal colección un conjunto, debido al esquema de separación [**kunenSet**]). Una *clase* es una "coleccion" del estilo $\mathcal{C} = \{x \mid \varphi(x)\}$, se dice $\mathcal{C}$ *es conjunto* si y sólo si se satisface:

$$\exists y \forall x \, (x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$$

en caso contrario, ésta se denomina *clase propia*. Como abuso de notación, si un conjunto x hace verdadera la fórmula $\varphi(x)$, se escribirá $x \in \mathcal{C}$. Se denotará por $\mathcal{V}$ a la clase $\{x \mid x = x\}$.

Se dará por sentado el conocimiento de la teoría elemental de relaciones y funciones, manteniéndose al margen de las notaciones típicas para: el dominio $dom(f)$ e imagen $ima(f)$; la imagen directa $f[A]$ e inversa $f^{-1}[A]$ y las funciones identidad Id_X. La composición de funciones (o relaciones) será denotada por yuxtaposición fg y, la restricción de una función (o relación) f a un subconjunto $A \subseteq dom(f)$, por $f \restriction A$. Se señala además el uso ocasional de la expresion "$A \to B$ *dada por* $x \mapsto f(x)$" (o simplemente "$x \mapsto f(x)$") para hacer referencia a la relga de correspondencia de la función $f : A \to B$, en caso su nombre carezca de interés.

0.1.2. Órdenes parciales

Los órdenes parciales reflexivos y antirreflexivos serán denotados por los símbolos $\leq$ y $<$, respectivamente y el término *orden parcial* hará referencia a cualquiera de ellos; la posible diferencia no es sustancial, pues ambas versiones son fácilmente intercambiables al añadir o eliminar la identidad del conjunto sobre el cual se definen. Un *conjunto parcialmente ordenado* se concive como un par (P, R), donde R es un orden parcial en P. En lo que sigue, fiíese conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$.

Para cada $A \subseteq P$: $mín(A)$, $máx(A)$, $sup(A)$ e $ínf(A)$ denotarán el máximo, mínimo, supremo e ínfimo de A, respectivamente (en caso de existir). Además, cierto $p \in P$ es *R-minimal* de A si $p \in A$ y no existe $q \in A$ tal que $q < p$, definiendo el concepto *R-maximal* de forma dual.

Se conviene que dos elementos $p, q \in P$ son *comparables* si y sólo si $p \leq q$ o $q \leq p$; en caso contrario, son *incomparables*. Así mismo, p y q serán *compatibles* ($p \parallel q$) cuando exista $r \in P$ de modo que $r \leq p$ y $r \leq q$; en caso contrario, serán *incompatibles* ($p \perp q$). Una $(P, \leq)$*-cadena* (*anticadena, respectivamente*) es un subconjunto de P de elementos comparables (incompatibles, respectivamente) dos a dos; y cuando el contexto lo permita, se omitirá el prefijo $(P, \leq)$.

La caracterización típica para AC es clave:

Teorema 0.1.1 (Principio de Maximalidad de Hausdorff). *AC se satsiface si y sólo si todo conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$, no vacío, posee una $(P, \leq)$-cadena $\subseteq$-maximal (del conjunto de cadenas de P).*

Se dice que $\leq$ ($(P, \leq)$ o $(P, <)$, indistintamente) es: *total* si cualesquiera dos elementos de P son comparables, *buen orden* (*bien fundado, o completo, respectivamente*) si y sólo si cada $A \in \mathscr{P}(P) \setminus \{\varnothing\}$ tiene elemento mínimo (minimal, o supremo si A es acotado superiormente, respectivamente). Nótese que todo buen orden es total, bien fundado y completo.

Dados dos ordenes parciales (P, R) y (Q, S), se dice que una función $f : P \to Q$ es: *S-creciente* (*decreciente*, respectivamente) si y sólo si dados $p, q \in P$, se tiene que $p \mathrel{R} q$ implica $f(p) \mathrel{S} f(q)$ (o $f(p) \mathrel{S} f(q)$, respectivamente). En cualquier caso, se dice que f es un *morfismo de orden*; y, si además f es biyectiva, se dice que f es un *isomorfismo* y que los órdenes (P, R) y (Q, S) son *isomorfos*, denotado $(P, R) \cong (Q, S)$.

0.1.3. Ordinales y Cardinales

Siguiendo la hoy conocida como construccion de John von Neumann, se declara que un conjunto α es: *ordinal* si es transitivo (esto es, $\alpha \subseteq \mathscr{P}(\alpha)$) y $(\alpha, \in)$ es un buen orden; y, natural si es un ordinal tal que $(\alpha, \ni)$ es un buen orden. Se denota por ON a la clase (propia) de todos los ordinales.

Los ordinales se denotan, típicamente, por las primeras letras griegas minúsculas: α, β, γ, etcétera; y, los naturales por: m, n, k, etcétera. Se seguirá esta convención, salvo que se indique lo contrario.

Si α y β son ordinales, se conviene que α es menor que β ($\alpha < \beta$) cuando $\alpha \in \beta$; en este sentido, es un hecho que toda clase no vacía de ordinales, X, tiene un mínimo (a saber, $\bigcap X$). Y consecuentemente, todo conjunto de ordinales A tiene supremo (a saber, $\bigcup A$). Un ordinal α es: *cero* si $\alpha = 0 := \emptyset$; *sucesor* cuando existe otro ordinal β de modo que $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$ (en cuyo caso se denota $\alpha = \beta + 1$); y *límite* en caso no ocurra ninguna de las dos anteriores. El primer ordinal límite se denotará por ω. Es un hecho que ω es el conjunto de todos los números naturales.

Teorema 0.1.2 (Inducción transfinita). *Si $\varphi(x)$ es una fórmula de la teoría de conjuntos y:*

i) *$\varphi(0)$ se satisface.*

ii) *Para cada ordinal α, la satisfacción de $\varphi(\alpha)$ implica la satisfacción de $\varphi(\alpha + 1)$.*

iii) *Para cada ordinal límite γ, la satisfacción de $\forall \alpha \in \gamma(\varphi(\alpha))$ implica la satisfacción de $\varphi(\gamma)$.*

entonces, para cualquier ordinal α, se satisface $\varphi(\alpha)$.

Se obtiene la misma conclusión sustituyendo las condiciones (i)-(iii) por el enunciado: Para todo ordinal γ, la satisfacción de $\forall \alpha \in \gamma(\varphi(\alpha))$ implica la satisfacción de $\varphi(\gamma)$.

Dadas clases $\mathcal{C} = \{x \mid \varphi(x)\}$ y $\mathcal{C}' = \{x \mid \varphi'(x)\}$, se dice que un *funcional de $\mathcal{C}$ en V* es una clase F de pares ordenados; a saber $F = \{(x, y) \mid \varphi(x) \wedge \psi(x, y)\}$, de forma que $\forall x(\varphi(x) \to \exists! y(\varphi'(y) \wedge \psi(x, y)))$. En cuyo caso, se denota $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, y, para cada x en $\mathcal{C}$, se denota por $F(x)$ al único y en $\mathcal{C}'$ tal que $\psi(x, y)$. Siendo claro además que, si A es un conjunto cualquiera, $F[A] = \{F(a) \mid a \in A\}$.

Teorema 0.1.3 (Recursión transfinita). *Para cualesquiera funcionales $F, G : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ y todo conjunto A, existe un único funcional $G : \mathit{ON} \to \mathcal{V}$ de manera que:*

i) $G(0) = A$.

ii) *Para cada ordinal* α, $G(\alpha + 1) = F(G(\alpha))$.

iii) *Para cada ordinal límite* γ, $G(\gamma) = H(G[\alpha])$.

Además, existe un único funcional $K : \mathsf{ON} \to \mathcal{V}$ *de manera que para todo ordinal* α *se satisface:*

$$K(\alpha) = F(K[\alpha])$$

Los teoremas anteriores se restringen a cualquier otro ordinal, consiguiéndose así las versiones clásicas para los teoremas de inducción y recursión (cada uno de ellos con dos versiones) para ω (o cualquier otro odrinal α). Siendo tales restricciones las justificaciones rigurosas para ciertas técnicas y construcciones de las que se echa mano en este trabajo (véase **tal tal tal**). Haciendo uso del Teorema de Recursión Transfinita, se pueden definir las operaciones binarias entre ordinales: $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$ y α^{β}, respectivamente. En caso se lleguen a utilizar durante la presente tesis, se indicará que tales símbolos corresponden a artimética es ordinal (para evitar confusión con la aritmética cardinal) y seguirá la definición expuesta en [**amorIntermedio**].

Teorema 0.1.4 (de enumeración). *Para cualquier buen orden* $(P, <)$ *existe un único ordinal* α *para el cual* $(P, <) \cong (\alpha, \in)$.

Tomando en cuenta que; bajo AC, cualquier conjunto admite un buen orden [**jechSet**], se desprende de lo anterior que todo conjunto X es biyectable con algún ordinal, al mínimo de tales ordinales se le denomina *cardinalidad de* X y se denota por $|X|$. Se conviene además que X es: *finito* si existe $n \in \omega$ tal que $|X| = n$; *infinito* si $|X| \geq \omega$; *numerable* si $|X| = \omega$; *a lo más numerable* si $|X| \leq \omega$; y, *más que numerable* (indistintamente, *no numerable*) si $|X| > \omega$.

Cualquier ordinal κ que sea la cardinalidad de un conjunto tiene la virtud de no ser biyectable con ningun ordinal anterior a él, a estos ordinales se les llama *cardinales*. Los cardinales se suelen denotar por letras griegas intermedias: κ, λ, μ, etcétera. Se seguirá tal convención y además se denotará por CAR a la clase de cardinales mayores o iguales a ω. Es un hecho que la intersección de una familia de cardinales, es un cardinal. En consecuencia, cualquier clase no vacía de cardinales tiene mínimo; y, cualquier conjunto de cardinales, supremo.

Dados dos cardinales κ y λ, se definen: $\kappa + \lambda := |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|$, $\kappa \cdot \lambda := |\kappa \times \lambda|$ y $\kappa^\lambda := |\{f \mid f : \lambda \to \kappa\}|$; siendo las versiones generales de las dos primeras operaciones:

$$\sum_{\alpha \in I} \kappa_\alpha := \left| \bigcup_{\alpha \in I} (\kappa_\alpha \times \{\alpha\}) \right| \quad \text{y} \quad \prod_{\alpha \in I} \kappa_\alpha := \left| \prod_{\alpha \in I} \kappa_\alpha \right|$$

(cuando $\{\kappa_\alpha \mid \alpha \in I\}$ es un conjunto no vacío de cardinales).

Se dará por sentado que el lector está familiarizado con la aritmética cardinal básica (véase [**jechSet**]). Más allá de tal comportamiento elemental, se hace hincapié en los siguientes teoremas de suma relevancia para la aritmética cardinal:

Teorema 0.1.5 (suma y producto cardinal). *Si* $\{\kappa_\alpha \mid \alpha \in I\}$ *es conjunto no vacío de cardinales:*

i) $\sum_{\alpha \in I} \kappa_\alpha = |I| \cdot \sup_{\alpha \in I} \kappa_\alpha$.

ii) Si ningun κ_α *es* 0 *y para cualesquiera* $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \leq \beta$ *implica* $\kappa_\alpha \leq \kappa_\beta$, *entonces:* $\prod_{\alpha \in I} \kappa_\alpha = \left(\sup_{\alpha \in I} \kappa_\alpha \right)^{|I|}$.

Teorema 0.1.6 (Lema de König). *Sean* $\{\kappa_\alpha \mid \alpha \in I\}$ *y* $\{\lambda_\alpha \mid \alpha \in I\}$ *conjuntos no vacíos de cardinales de modo que para todo* $\alpha \in I$ *se satisface* $\kappa_\alpha < \lambda_\alpha$. *Entonces:*

$$\sum_{\alpha \in I} \kappa_\alpha < \prod_{\alpha \in I} \kappa_\alpha$$

Particularmente, $\kappa = \sum_{\alpha\in\kappa} 1 < \prod_{\alpha\in\kappa} 2 = 2^\kappa$ *(Teorema de Cantor).*

Del Lema anterior se desprende que si $\kappa \in \mathsf{CAR}$, existe $\lambda \in \mathsf{CAR}$ con $\kappa < \lambda$. Luego, se puede ordenar la clase CAR como:

Definición 0.1.7. *Se define recursivamente; para cualquier ordinal α, el número $\aleph_\alpha$, de la siguiente manera:*

i) $\aleph_0 := \omega$.

ii) Para cada ordinal α, $\aleph_{\alpha+1} := mín\{\lambda \in CAR \mid \aleph_\alpha < \lambda\}$. $int, cl, ext.$ $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.

iii) Para cada ordinal límite γ, $\aleph_\gamma := sup_{\alpha<\gamma} \aleph_\alpha$.

Además, para cada ordinal α, se denota $\omega_\alpha := \aleph_\alpha$.

Siempre que X sea un conjunto y κ un cardinal, se escribirá por $[X]^\kappa$ al conjunto de todos los subconjuntos de X de cardinalidad κ; $[X]^{<\kappa}$ al conjunto de todos los subconjuntos de X de cardinalidad estrictamente menor que κ; definéndose análogamente a los conjuntos $[X]^{\leq\kappa}$, $[X]^{>\kappa}$ y $[X]^{\geq\kappa}$. Además, en caso no se confunda con la notación de aritmética cardinal, X^κ será el conjunto de funciones de κ en X; y, $X^{<\kappa}$ el conjunto de funciones de funciones $f : \alpha \to X$ (con $\alpha < \kappa$).

Es un hecho que si X es infinito, entonces $|[X]^\kappa| = |X|^\kappa$ y $|[X]^{<\omega}| = |X|$; además, $|X^\mu| = |X|^\mu$ y $|X^{<\omega}| = |X|$.

0.1.4. Árboles

Un *árbol* es un orden parcial $(T, \leq)$ (denotado simplemente por T si no hay lugar a ambigüedades) tal que para cualquier $x \in T$, el conjunto $<_x := <^{-1}[\{x\}] = \{y \in T \mid y < x\}$ es un buen orden. Dado el **??**, para cada $x \in T$ existe un único ordinal, denotado $o(x)$ para el cual $(<_x, <) \cong (o(x), \in)$. Tal ordinal $o(x)$ es nombrado el *orden de x en el árbol T*. La *altura* de T es el ordinal $h(T, \leq) := sup\{o(x)+1 \mid x \in T\}$. Para cada ordinal α se define el *α-ésimo nivel* de $(T, \leq)$ como el conjunto $T_\alpha := \{x \in T \mid o(x) = \alpha\}$. Y, finalmente, un subconjunto $R \subseteq T$ se dice que es *rama* si y sólo si es una $(T, \leq)$-cadena $\subseteq$-maximal (del conjunto de $(T, \leq)$-cadenas).

Dentro de la basta variedad de árboles, será de especial interés el *árbol de ramas de* $2^{\omega} = \{f \mid f : \omega \to 2\}$; esto es, el conjunto $2^{<\omega}$ ordenado por contención. Tal árbol es numerable, todos sus elementos tienen orden finito y su altura es exactamente ω.

En efecto, si $f \restriction n \in 2^{<\omega}$, entonces $(n, \in) \cong (f, \subsetneq_f)$ debido al isomorfismo de orden $n \to \subsetneq_f$, dado por $n \mapsto f \restriction n$. Por lo tanto T es un árbol, y el orden de cada $f \in T$ es su dominio; como $2^{<\omega}$ contiene a todas las funciones de naturales en 2, se sigue que la altura de T es $\omega = sup\{n+1 \mid n \in \omega\}$.

Además T es numerable, ya que:

$$\omega \leq |2^{<\omega}| = \Big|\bigcup_{n\in\omega} 2^n\Big| \leq \sum_{n\in\omega} |2^n| = \omega$$

Lo cual demuestra lo que se requería respecto al árbol $(2^{<\omega}, \subseteq)$.

0.2. Topología

0.2.1. Convenios generales y propiedades topológicas

Una *topología* para un conjunto X es un conjunto $\tau \subseteq \mathscr{P}(X)$ que tiene por elementos a $\varnothing$ a X; es cerrado bajo uniones (arbitrarias); y, cerrado bajo intersecciones finitas. El par (X, τ) (con frecuencia confundido con su conjunto subyacente, X) se denomina *espacio topológico* (o simplemente *espacio*). Los elementos de τ se denominan *abiertos* (*de* X) y sus complementos respecto a X, *cerrados* (*de* X).

Dados dos espacios X y Y, se dice que una función $f : X \to Y$ es *continua* si para cada $U \subseteq Y$ abierto en Y, se tiene que $f^{-1}[U] \subseteq X$ es abierto en X. Un *homemorfismo entre* X *y* Y es una función continua $f : X \to Y$, biyectiva, cuya inversa $f^{-1} : Y \to X$ es también continua. Cuando exista un homeomorfismo entre X y Y, esto se denotará $X \cong Y$.

Dados un espacio (X, τ) y $A \subseteq X$ se define la *topología de subespacio* (*de* A *respecto* X) como la colección $\tau_A := \{U \cap A \mid U \in \tau\}$ (que, claramente, es topología para A). Cuando $(X,\eta),(Y,\tau)$ sean espacios topológicos, se dice que una función $f : X \to Y$ es un *encaje* si y sólo si f es un homeomorfismo entre (X,η) y $(f[X],\tau_{f[X]})$. En caso ocurra lo último, se convendrá que X es un *subespacio* de Y (o bien, que X *se encaja en* Y) y, ocasionalmente, esto se denotará $X \hookrightarrow Y$. En este contexto, la notación "$A \subseteq X$" significará que A está contenido en X como conjunto y que $A \hookrightarrow X$ por medio del encaje $A \to X$ dado por $a \mapsto a$.

Una *base* para un espacio topológico (X,τ) es una coleccion $\mathcal{B} \subseteq \tau$ de forma que para cualquier abierto U de X y cada $x \in U$ existe cierto $B \in \mathcal{B}$ de forma que $x \in B \subseteq U$.

Si $x \in X$, una *vecindad de* x (*en* X) es un subconjunto $V \subseteq X$ de modo que existe un abierto U de X tal que $x \in U \subseteq V$. Además, se convendrá que una coleccion $\mathcal{B}_x \subseteq \mathscr{P}(X)$ es una *base local* (*de vecindades*, respectivamente) de x en X si y sólo si para cada elemento de $\mathcal{B}_x$ es una vecindad abierta (vecindad, respectivamente) de x; y, para todo abierto U de X con $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}_x$ de forma que $x \in B \subseteq U$.

Para cada $A \subseteq X$ se denotarán por $int(A), cl(A), ext(A), fr(A), der(A)$ a los *operadores*: interior, clausura, exterior, frontera, y derivado de A, respectivamente. Sus definiciones se pueden consultar en [**fidelElementos**]. Los elementos de $der(A)$ se denominan *puntos de acumulación de* A; y, los elementos en $A \setminus der(A)$ se llaman *puntos aislados de* A. Un subconjunto $D \subseteq X$ se dice *denso* (*en* X) si y sólo si $cl(D) = X$.

Dado un conjunto no vacío de espacios topológicos $\{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$, se denotarán por $\prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$ y $\coprod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$ a su *producto topológico* (o, *de Tychonoff*) y *suma topológica*, respectivamete; siguiéndo las definiciones de estos espacios acorde al estándar, expuesto en textos como [**fidelElementos**, **munkresTopology**], entre otros. Al momento de trabajar con productos topológicos, será usual, para cada $\alpha \in \kappa$ denotar por π_α a la α-ésima proyección cartesiana ($\prod_{\beta\in\kappa} X_\beta \to X_\alpha$ dada por $f \mapsto f(\alpha)$).

Una propiedad $\varphi(X)$ (pensada como fórmula de la teoría de conjuntos) es: *topológica* si es invariante bajo homeomorfismos; esto es, si (X,τ) y (Y,η) son homeomorfos, entonces $\varphi(X)$ se satisface únicamente cuando $\varphi(Y)$ se satisface; *hereditaria* (*débilmente hereditaria*, respectivamente) cuando $\varphi(X)$ implica que para cualquier subespacio (subespacio cerrado, respectivamente) A de X, $\varphi(A)$ se satisface; *factorizable* si para cualquier conjunto no vacío de espacios topológicos $\{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ se tiene que, si $\varphi(\prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha)$ se cumple, entonces $\forall\alpha \in \kappa(\varphi(X_\alpha))$ se satisface; *productiva* (*finitamente productiva*, respectivamente) si para cualquier cardinal κ (natural $\kappa \in \omega$, respectivamente) no cero y familia $\{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ de espacios, la satisfacción de $\forall\alpha \in \kappa(\varphi(X_\alpha))$ implica la satisfacción de $\varphi(\prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha)$. Además, si un espacio X es tal que todos sus subespacios tienen una propiedad (a saber, P), X se denomina *hereditariamente P*.

Las siguientes propiedades topológicas serán utilizadas a lo largo del texto. Un espacio X se dice: *Primero Numerable* (o 1AN) si cada uno de sus puntos admite una base local (equivalentemente, de vecindades) a lo más numerable; *Segundo Numerable* (o 2AN) si admite una base a lo más numerable; *Separable* si tiene un subconjunto denso y a lo más numerable; T_0 si para cualesquiera $x, y \in X$ distintos existe un abierto U de forma que $U \cap \{x, y\} \in \{\{x\}, \{y\}\}$; T_1 si para cada $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es cerrado, T_2 (o *de Hausdorff*) si para cualesquiera $x, y \in X$ distintos existen abiertos ajenos U, V tales que $x \in U$ y $y \in V$; *regular* si para cualquier cerrado $F \subseteq X$ y cualquier $x \in X \backslash F$ existen abiertos U, V ajenos de modo que $F \subseteq U$ y $x \in V$; T_3 si es regular y T_1; *completamente regular* si para cualquier cerrado F y punto $x \in X \setminus F$ existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ de modo que $f(x) = 0$ y $f[F] \subseteq \{1\}$; $\mathsf{T}_{3\frac{1}{2}}$ (o *de Tychonoff*) si es completamente regular y T_1; *normal* si para cualesquiera cerrados F, G ajenos, existen abiertos ajenos U, V de modo que $F \subseteq U$ y $G \subseteq U$; T_4 si es normal y T_1.

0.3. Pruebas de Consistencia Relativa

0.3.1. Preludio de Lógica

0.3.2. Axioma de Martin

Un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ es *c.c.c.* (o bien, cuenta con la *propiedad de anticadena contable*) si y sólo si cualquier $(P, \leq)$-anticadena es a lo más numerable.

Un *filtro* de $(P, \leq)$ es un subconjunto $F \subseteq P$ no vacío, cerrado por arriba (es decir, si $x \in F$ y $y \geq x$, entonces $y \in F$) y de elementos compatibles en F (es decir, para cualesquiera $x, y \in F$ existe $r \in F$ de modo que $r \leq x$ y $r \leq y$). La noción de *ideal* es dual a la de filtro; y, un filtro (o ideal) es *propio* si y sólo si es distinto de P.

Observación 0.3.1. *Sea X es conjunto, entonces $F \subseteq \mathscr{P}(X)$ es filtro (ideal) de $(\mathscr{P}(X), \subseteq)$ si y sólo si F es no vacío, cerrado bajo superconjuntos (subconjuntos) y bajo intersecciones (uniones) dos a dos.*

Se conviene que un subconjunto $D \subseteq P$ es: *denso* si y sólo si para cualquier $x \in P$ existe un elemento $d \in D$ de modo que $d \leq x$; *denso bajo* $p \in P$ cuando para cada $x \leq p$ existe $d \in D$ de modo que $d \leq x$.

Dada una colección $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{P}(P)$ de subconjuntos densos de $(P, \leq)$, se dice que un filtro G de $(P, \leq)$ es *$\mathscr{D}$-genérico* si es propio y tiene intersección no vacía con cada elemento de $\mathscr{D}$. Un filtro G es *genérico* si es $\mathscr{D}$-genérico, donde $\mathscr{D}$ es la colección de todos los subconjuntos densos de $(P, \leq)$.

El Axioma de Martin[1] se formula de la siguiente manera:

Definición 0.3.2. *Para cada cardinal infinito κ, $\mathsf{MA}(\kappa)$ es el enunciado: "Para todo conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ c.c.c. y cada colección $\mathscr{D}$ de conjuntos densos de $(P, \leq)$, con $|\mathscr{D}| \leq \kappa$, existe un filtro $\mathscr{D}$-genérico".*

[1]que surgió como fruto del estudio de la *Hipótesis de Souslin* (véase la discusión correspondiente en [**kunenSet**])

El enunciado MA se definee como: "Para cada cardinal infinito $\kappa < \mathfrak{c}$ se satisface MA(κ)".

Es un reesultado estándar y bien conocido que; en ZFC, MA(ω) es verdadero y MA($\mathfrak{c}$) es falso; en consecuencia, MA se suele utilizar junto con la negación de la hipótesis del continuo (para no obtener resultados siempre vacuos). Además, a razón de ello, está bien definido:

$$\mathfrak{m} := \mathit{mín}\{\kappa \geq \omega \mid \neg \mathsf{MA}(\kappa)\}$$

Claramente $\aleph_1 \leq \mathfrak{m} \leq \mathfrak{c}$.

0.3.3. Forcing

1 Prueba Adicional

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Un concepto importante en matemáticas es la definición de límite. Dado $f(x)$ definida en un entorno de a, se dice que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

1.1. Álgebra y ecuaciones

Consideremos la ecuación cuadrática general

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0. \tag{1.1}$$

Su discriminante es $\Delta = b^2 - 4ac$, y entonces:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetuer.

1.2. Series y sucesiones

Las series infinitas juegan un rol importante. Por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{1.2}$$

De hecho, una sucesión (a_n) converge a L si para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $n > N \implies |a_n - L| < \varepsilon$.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

1.3. Cálculo diferencial

Si $f(x) = x^3$, entonces su derivada es $f'(x) = 3x^2$. Más generalmente, si $f(x) = x^n$, se tiene

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}. \tag{1.3}$$

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Donec odio elit, dictum in, hendrerit sit amet, egestas sed, leo. Praesent feugiat sapien aliquet odio. Integer vitae justo. Aliquam vestibulum fringilla lorem. Sed neque lectus, consectetuer at, consectetuer sed, eleifend ac, lectus. Nulla facilisi. Pellentesque eget lectus. Proin eu metus. Sed porttitor. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse eu lectus. Ut mi mi, lacinia sit amet, placerat et, mollis vitae, dui. Sed ante tellus, tristique ut, iaculis eu, malesuada ac, dui. Mauris nibh leo, facilisis non, adipiscing quis, ultrices a, dui.

Otra fórmula útil es la de integración por partes:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Morbi luctus, wisi viverra faucibus pretium, nibh est placerat odio, nec commodo wisi enim eget quam. Quisque libero justo, consectetuer a, feugiat vitae, porttitor eu, libero. Suspendisse sed mauris vitae elit sollicitudin malesuada. Maecenas ultricies eros sit amet ante. Ut venenatis velit. Maecenas sed mi eget dui varius euismod. Phasellus aliquet volutpat odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque sit amet pede ac sem eleifend consectetuer. Nullam elementum, urna vel imperdiet sodales, elit ipsum pharetra ligula, ac pretium ante justo a nulla. Curabitur tristique arcu eu metus. Vestibulum lectus. Proin mauris. Proin eu nunc eu urna hendrerit faucibus. Aliquam auctor, pede consequat laoreet varius, eros tellus scelerisque quam, pellentesque hendrerit ipsum dolor sed augue. Nulla nec lacus.

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis.

Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetuer odio sem sed wisi.

1.4. Probabilidad y estadística

Sea X una variable aleatoria discreta con distribución binomial,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

La esperanza es

$$\mathbb{E}[X] = np, \tag{1.4}$$

y la varianza es $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.

Sed feugiat. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Ut pellentesque augue sed urna. Vestibulum diam eros, fringilla et, consectetuer eu, nonummy id, sapien. Nullam at lectus. In sagittis ultrices mauris. Curabitur malesuada erat sit amet massa. Fusce blandit. Aliquam erat volutpat. Aliquam euismod. Aenean vel lectus. Nunc imperdiet justo nec dolor.

Etiam euismod. Fusce facilisis lacinia dui. Suspendisse potenti. In mi erat, cursus id, nonummy sed, ullamcorper eget, sapien. Praesent pretium, magna in eleifend egestas, pede pede pretium lorem, quis consectetuer tortor sapien facilisis magna. Mauris quis magna varius nulla scelerisque imperdiet. Aliquam non quam. Aliquam porttitor quam a lacus. Praesent vel arcu ut tortor cursus volutpat. In vitae pede quis diam bibendum placerat. Fusce elementum convallis neque. Sed dolor orci, scelerisque ac, dapibus nec, ultricies ut, mi. Duis nec dui quis leo sagittis commodo.

1.5. Conclusión

Aliquam lectus. Vivamus leo. Quisque ornare tellus ullamcorper nulla. Mauris porttitor pharetra tortor. Sed fringilla justo sed mauris. Mauris tellus. Sed non leo. Nullam elementum, magna in cursus sodales, augue est scelerisque sapien, venenatis congue nulla arcu et pede. Ut suscipit enim vel sapien. Donec congue. Maecenas urna mi, suscipit in, placerat ut, vestibulum ut, massa. Fusce ultrices nulla et nisl.

Etiam ac leo a risus tristique nonummy. Donec dignissim tincidunt nulla. Vestibulum rhoncus molestie odio. Sed lobortis, justo et pretium lobortis, mauris turpis condimentum augue, nec ultricies nibh arcu pretium enim. Nunc purus neque, placerat id, imperdiet sed, pellentesque nec, nisl. Vestibulum imperdiet neque non sem accumsan laoreet. In hac habitasse platea dictumst. Etiam condimentum facilisis libero. Suspendisse in elit quis nisl aliquam dapibus. Pellentesque auctor sapien. Sed egestas sapien nec lectus. Pellentesque vel dui vel neque bibendum viverra. Aliquam porttitor nisl nec pede. Proin mattis libero vel turpis. Donec rutrum mauris et libero. Proin euismod porta felis. Nam lobortis, metus quis elementum commodo, nunc lectus elementum mauris, eget vulputate ligula tellus eu neque. Vivamus eu dolor.

Ahora consideremos las fuentes `\mathscr`:

$$\mathscr{A}, \mathscr{D}, \mathscr{K}, \omega, \mathscr{A}^{\omega}$$

Índice Simbólico

Índice Alfabético