Índice general

1 Espacios de Mrówka

Los Ψ-espacios; o espacios de Mrówka, cuentan con un lugar privilegiado en la topología de conjuntos; esto se debe a que son, entre otras cosas, espacios idóneos para la búsqueda de ejemplos. Esta virtud tiene por motivo las múltiples caracterizaciones que existen para sus propiedades topológicas.

La intención primordial del presente capítulo es presentar aspectos; en primer lugar, cubrir la definición de los Ψ-espacios y exhibir sus propiedades topológicas elementales; y en segundo lugar, dar una caracterización para los espacios de Mrówka en términos de propiedades topológicas, el hoy conocido como Teorema de Kannan y Rajagopalan.

1.1. Ψ-espacios y caracterizaciones elementales

Dada $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$, se satisface que $\omega \cap \mathscr{A} = \varnothing$. Por cómo se define la topología de Isbell-Mrókwa (en un conjunto N, dada $\mathscr{A} \subseteq [\mathsf{N}]^{\omega}$), es conveniente establecer lo siguiente.

Consideración 1.1.1. *A partir de ahora, siempre que N sea un conjunto numerable y $\mathscr{A} \subseteq [\mathsf{N}]^{\omega}$, se asumirá que $\mathsf{N} \cap \mathscr{A} = \varnothing$.*

En el espacio (de ordinales) $X = \omega + 1$, cada punto de ω es aislado, pero el punto $\omega \in X$; situado "en la periferia" de X, se mantiene cercano al subconjunto $\omega \subseteq X$ del espacio.

Los Ψ-espacios tienen por conjunto subyacente a $\omega \cup \mathscr{A}$; y pueden ser vistos como una forma generalizada de $\omega + 1$. Se configura su topología de modo que ω es una masa de puntos aislados, y cada punto $\omega \cup \mathscr{A}$ "en la periferia del espacio" permanece cercano al subconjunto $a \subseteq \omega \cup \mathscr{A}$ del espacio.

Proposición 1.1.2. *Sean* N *un conjunto numerable y* $\mathscr{A} \subseteq [N]^{\omega}$. *La siguiente colección es una topología para* $N \cup \mathscr{A}$.

$$\mathscr{T}_{N,\mathscr{A}} := \{U \subseteq N \cup \mathscr{A} \mid \forall x \in U \cap \mathscr{A}\ (x \subseteq^* U)\}$$

Demostración. Resulta evidente que $\varnothing, N \cup \mathscr{A} \in \mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$. Ahora, dados $U, V \in \mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$ y $x \in (U \cap V) \cap \mathscr{A}$ cualquiera, $x \subseteq^* U$ y $x \subseteq^* V$, de donde $x \subseteq^* U \cap V$ y $U \cap V \in \mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$. Finalmente, dados $\mathcal{U} \subseteq \mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$ y $x \in \bigcup \mathcal{U} \cap \mathscr{A}$ arbitrarios, existe $U_0 \in \mathcal{U}$ con $x \in U_0$; así que $x \subseteq^* U_0$ y consecuentemente $x \setminus U_0$ es finito. Como $x \setminus \bigcup \mathcal{U} \subseteq x \setminus U_0$, resulta que $x \subseteq^* \bigcup \mathcal{U}$ y así $\bigcup \mathcal{U} \in \mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$. ■

Definición 1.1.3. *Sean* N *un conjunto numerable y* $\mathscr{A} \subseteq [N]^{\omega}$.

i) La colección $\mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$ *de la Proposición anterior es la* ***Topología de Mrówka (de Isbell-Mrókwa) generada por*** $\mathscr{A}$.

ii) El Ψ-***espacio generado por*** $\mathscr{A}$ *se denota por* $\Psi_N(\mathscr{A})$, *y consta del conjunto* $N \cup \mathscr{A}$ *dotado con su topología* $\mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$.

Si $N = \omega$, *se denotarán* $\mathscr{T}_{\mathscr{A}} := \mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$ *y* $\Psi(\mathscr{A}) = \Psi_N(\mathscr{A})$.

Previo a abordar otros temas, se mostrará por qué; a efectos topológicos, bastará considerar familias de subconjuntos de ω.

Proposición 1.1.4. *Sean* N, M *conjuntos numerables,* $\mathscr{A} \subseteq [N]^{\omega}$ *arbitraria y* $h : N \to M$ *una biyección. Entonces* $\Psi_N(\mathscr{A}) \cong \Psi_M(\Phi_h(\mathscr{A}))$.

Demostración. Sea $f : \Psi_N(\mathscr{A}) \to \Psi_M(\Phi_h(\mathscr{A}))$ definida por medio de $f(x) = h(x)$ si $x \in N$ y $f(x) = h[x]$ si $x \in \mathscr{A}$. Nótese que; por la Consideración 1.1.1, f es biyectiva. Además, por definición de f, y como $\Psi_h^{-1} = \Phi_{h^{-1}}$, basta verificar únicamente la continuidad de f.

Sea U abierto en $\Psi_M(\Phi_h(\mathscr{A}))$ y supóngase que $x \in f^{-1}[U] \cap \mathscr{A}$. Entonces $f(x) = h[x] \in U \cap \Phi_h(\mathscr{A})$. Como U es abierto en $\Psi_M(\Phi_h(\mathscr{A}))$, entonces $f(x) \setminus U$ es finito. Así que $f^{-1}[f(x) \setminus U] = h^{-1}[h(x)] \setminus f^{-1}[U] = x \setminus f^{-1}[U]$ es finito y así $x \subseteq^* f^{-1}[U]$, probando $f^{-1}[U]$ es abierto en $\Psi_N(\mathscr{A})$. ■

La siguiente manera de describir la topología de Mrówka es la más cumún en la literatura (como ejemplo están [3] o [2]).

Proposición 1.1.5. *Sea* $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^\omega$*, entonces:*

i) Cada $B \subseteq \omega$ *es abierto en* $\Psi(\mathscr{A})$*, en particular, cada* $n \in \omega$ *es punto aislado.*

ii) Si $x \in \mathscr{A}$*, el conjunto* $\mathcal{B}_x := \{\{x\} \cup x \setminus F \mid F \in [x]^{<\omega}\}$ *es base local de* x *en* $\Psi(\mathscr{A})$*.* $\mathcal{B}_x$ *es la* ***base local estándar de*** x ***en*** $\Psi_N(\mathscr{A})$*.*

Demostración. (i) Si $B \subseteq \omega$, es vacuo que $B \in \mathscr{T}_{\mathscr{A}}$, pues $B \cap \mathscr{A} = \varnothing$.

(ii) Sea $x \in \mathscr{A}$, entonces $\mathcal{B}_x \subseteq \mathscr{T}_{\mathscr{A}}$. En efecto, si $G \subseteq x$ es finito y $y \in \big(\{x\} \cup x \setminus G\big) \cap \mathscr{A}$, necesariamente $y = x$, de donde $y \subseteq^* \{x\} \cup x \setminus G$ pues G es finito, así $\{x\} \cup x \setminus G \in \mathscr{T}_{\mathscr{A}}$. Ahora, si $U \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es abierto y $x \in U$, $F := x \setminus U \subseteq x$ es finito y $x \in \{x\} \cup x \setminus F \subseteq U$. ■

Corolario 1.1.6. *Si* N *es numerable y* $\mathscr{A} \subseteq [N]^\omega$*, entonces:*

i) $\Psi(\mathscr{A})$ *es 1AN.*

ii) $\mathcal{B}_{\mathscr{A}} := \bigcup\{\mathcal{B}_x \mid x \in \mathscr{A}\} \cup \big\{\{n\} \mid n \in N\big\}$*; denominado la* ***base estándar de*** $\Psi_N(\mathscr{A})$*, es una base de* $\Psi_N(\mathscr{A})$ *de tamaño* $\aleph_0 + |\mathscr{A}|$*.*

iii) $w(\Psi_N(\mathscr{A})) = \aleph_0 + |\mathscr{A}|$*. Por ello,* $\Psi(\mathscr{A})$ *es 2AN si y sólo si* $|\mathscr{A}| \leqslant \aleph_0$*.*

Demostración. (i), (ii) y $w(\Psi_N(\mathscr{A})) \leqslant \aleph_0 + |\mathscr{A}|$ son claros.

Para $\aleph_0 + |\mathscr{A}| \leqslant w(\Psi_N(\mathscr{A}))$ basta observar que $\omega, \mathscr{A} \subseteq \Psi(\omega)$ son subespacios discretos de tamaño (y por tanto, peso) $\aleph_0$ y $|\mathscr{A}|$, respectivamente. Por consiguiente, el peso de $\Psi(\omega)$ debe ser mayor o igual que ambos. ■

Si $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^\omega$ y $X \subseteq \Psi(\mathscr{A})$, dado que cada punto de ω es aislado, se tiene que $\mathrm{der}(X) \subseteq \mathscr{A}$. Por otra parte, si $a \in \mathscr{A}$, la única forma de que cada $a \setminus F$ (con $F \in [a]^{<\omega}$) tenga intersección no vacía con X es que $X \cap a$ sea infinito.

Debido a 1.1.5, la discusión recién dada prueba el primer inciso (y con ello todos los restantes) del siguiente útil Lema.

Lema 1.1.7. *Sea* $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$*, entonces:*

i) *Si* $X \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ *, entonces* $\operatorname{der}(X) = \{y \in \mathscr{A} \mid X \cap y \neq^{*} \varnothing\}$.

ii) $\mathscr{A} = \operatorname{der}(\Psi(\mathscr{A}))$ *y* ω *es discreto, denso en* $\Psi(\mathscr{A})$.

iii) *Cada* $B \subseteq \mathscr{A}$ *es un subespacio cerrado y discreto de* $\Psi(\mathscr{A})$.

iv) $B \subseteq \omega$ *es cerrado en* $\Psi(\mathscr{A})$ *sólo si es casi ajeno con cada elemento de* $\mathscr{A}$.

Proposición 1.1.8. *Todo* Ψ*-espacio es separable, primero numerable,* T_1*, disperso y desarrollable.*

Demostración. Sea $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$ cualquiera. El Ψ-espacio generado por $\mathscr{A}$ es separable pues ω es denso en $\Psi(\mathscr{A})$ y numerable; además, éste espacio es primero numerable debido al Corolario 1.1.6.

(Axioma T_1) Si $x \in \mathscr{A}$, del Lema 1.1.7 se desprende la igualdad $\operatorname{der}(\{x\}) = \{y \in \mathscr{A} \mid \{x\} \cap y \neq^{*} \varnothing\} = \varnothing$, lo cual implica que $\{x\}$ es cerrado.

(Dispersión) Supóngase que $X \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es cualquier subconjunto no vacío. Si $X \subseteq \mathscr{A}$, cualquier $x \in X$ es aislado en X, pues X es discreto (véase 1.1.7). En caso contrario, existe un elemento $x \in X \cap \omega$ y x es aislado en X, pues $\{x\}$ es abierto al ser x elemento de ω.

(Desarrollabilidad) Defínase $\mathcal{U}_n := \{\{a\} \cup a \setminus n \mid a \in \mathscr{A}\} \cup \{\{y\} \mid y \in \omega\}$ para cada $n \in \omega$. Resulta claro que cada colección $\mathcal{U}_n$ es cubierta abierta de $\Psi(\mathscr{A})$. Sean $x \in \Psi(\mathscr{A})$ y U un abierto tal que $x \in U$.

Si $x \in \omega$, entonces $\{x\} = \operatorname{St}(x, \mathcal{U}_{x+1})$; en efecto, sea $V \in \mathcal{U}_{x+1}$ con $x \in V$, entonces $V = \{x\}$; pues de lo contrario $V = \{a\} \cup a \setminus (x+1)$ para cierto $a \in \mathscr{A}$, implicando esto que $x \notin x+1$, lo cual es imposible ya que $x \in \omega$. Por tanto, $x \in \{x\} = \operatorname{St}(x, \mathcal{U}_{x+1}) \subseteq U$.

Si $x \in \mathscr{A}$, entonces $x \subseteq^{*} U$ y $x \setminus U \subseteq \omega$ es finito y por ello existe $n_0 \in \omega$ tal que $x \setminus U \subseteq n_0$. Como $\{x\} \cup x \setminus n_0 \in \mathcal{U}_{n_0}$ es el único abirto de $\mathcal{U}_{n_0}$ al cual x pertenece, $x \in \{x\} \cup x \setminus n_0 = \operatorname{St}(x, \mathcal{U}_{n_0}) \subseteq U$.

Así pues, para cada $n \in \omega$, la colección $\{\operatorname{St}(x, \mathcal{U}_n) \mid n \in \omega\}$ es base local de x. Así que $\{\mathcal{U}_n \mid n \in \omega\}$ es un desarrollo para $\Psi(\mathscr{A})$. ■

Como se probó recién, todo Ψ-espacio es T_1, sin embargo, cuando la familia $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$ no es casi ajena, el espacio $\Psi(\mathscr{A})$ no satisface el axioma de separación T_2. Por esta razón, en la literatura se suele dar la definición 1.1.3 partiendo directamente de una familia casi ajena (el lector podrá corroborar esto en textos como [2, 3, 4]).

Proposición 1.1.9. *Para cualquier $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$ son equivalentes las siguientes condiciones:*

i) $\mathscr{A}$ *es familia casi ajena.*

ii) $\Psi(\mathscr{A})$ *es cero-dimensional.*

iii) $\Psi(\mathscr{A})$ *es de Tychonoff.*

iv) $\Psi(\mathscr{A})$ *es de Hausdorff.*

Demostración. (i) $\to$ (ii) Si $\mathscr{A}$ es familia casi ajena, como $\Psi(\mathscr{A})$ es T_1, basta verificar que cada elemento de la base estándar $\mathscr{B}_{\mathscr{A}}$ (definida en el Corolario 1.1.6) es cerrado. En efecto, cada $\{n\}$ con $n \in \omega$ es cerrado pues $\Psi(\mathscr{A})$ es T_1. Y dados $x \in \mathscr{A}$ y $F \subseteq x$ finto, haciendo uso de 1.1.7 se tiene que por ser $\mathscr{A}$ familia casi ajena, $\mathrm{der}(\{x\} \cup x \setminus F) = \{x\} \subseteq \{x\} \cup x \setminus F$. Así que $\{x\} \cup x \setminus F$ es cerrado, mostrando que $\Psi(\mathscr{A})$ es cero-dimensional, pues es T_1 y contiene una base de abiertos y cerrados (**resultado R**).

(ii) $\to$ (iii) $\to$ (iv) Si $\Psi(\mathscr{A})$ es cero-dimensional, al ser espacio T_1, resulta que entonces es espacio de Tychonoff (**resultado R**). Por su parte, si $\Psi(\mathscr{A})$ es de Tychonoff, entonces es de Hausdorff.

(iv) $\to$ (i) Si $\Psi(\mathscr{A})$ es de Hausdorff y $x, y \in \mathscr{A}$ son distintos, existen abiertos ajenos $U, V \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ abiertos tales que $x \in U$ y $y \in V$. De donde $x \subseteq^* U$, $y \subseteq^* V$ y por consiguiente $x \cap y \subseteq^* U \cap V = \varnothing$. ■

La Proposición anterior es el motivo por el cual el presente trabajo se enfocará únicamente la siguiente clase de espacios:

Definición 1.1.10. *Un* ***espacio de Mrówka (o, de Isbell-Mrówka)*** *es un Ψ-espacio generado por una familia casi ajena.*

Corolario 1.1.11. *Todo espacio de Mrókwa es separable, primero numerable, de Tychonoff, cero-dimensional, disperso y de Moore.*

La siguiente es sólo una de las múltiples relaciones importantes que existen entre los espacios de Mrówka y el conjunto de Cantor. Su demostración se basa en un hecho conocido en topología general; todo espacio cero-dimensional de peso κ se encaja en 2^κ (véase [1, Teo. 8.5.11, p. 299]).

Corolario 1.1.12. *Todo espacio de Mrówka* $\Psi(\mathscr{A})$ *se encaja en* $2^{\aleph_0+|\mathscr{A}|}$. *Particularmente, si* $|\mathscr{A}| \leqslant \aleph_0$, *el espacio* $\Psi(\mathscr{A})$ *se encaja en* 2^ω *y es metrizable.*

1.2. Compacidad y local compacidad

Como el lector puede advertir, cada vez surgen más traducciones con las cuales maniobrar al momento de estudar los Ψ-espacios. El ideal generado por cierta $\mathscr{A} \in \mathsf{AD}(\omega)$ es clave para distinguir cuáles subespacios de $\Psi(\mathscr{A})$ son compactos, y cuales no.

Proposición 1.2.1. *Sean* $\mathscr{A} \in \mathsf{AD}(\omega)$ *y* $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$. *Entonces* K *es compacto si y sólo si* $K \cap \omega \subseteq^* \bigcup(K \cap \mathscr{A})$ *y* $K \cap \mathscr{A}$ *es finito.*

Demostración. Supóngase que $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es subespacio compacto, como la colección $\mathcal{U} := \{\{n\} \mid n \in K \cap \omega\} \cup \{\{x\} \cup x \mid x \in K \cap \mathscr{A}\}$ es cubierta abierta para K en $\Psi(\mathscr{A})$, existen $F \subseteq K \cap \omega$ y $G \subseteq K \cap \mathscr{A}$ finitos tales que $\{\{n\} \mid n \in F\} \cup \{\{x\} \cup x \mid x \in G\}$ es subcubierta de $\mathcal{U}$. Luego, es necesario que $K \cap \mathscr{A} = G$, así que $K \cap \mathscr{A}$ es finito. Además $(K \cap \omega) \setminus \bigcup G = K \setminus \bigcup G \subseteq F$ es finito y con ello $K \cap \omega \subseteq^* \bigcup(K \cap \mathscr{A})$.

Conversamente, supóngase que $K \cap \omega \subseteq^* \bigcup(K \cap \mathscr{A})$ y que $K \cap \mathscr{A}$ es finito. Resulta claro que; si $y \in \mathscr{A}$, entonces $\{y\} \cup y$ es un subespacio compacto de $\Psi(\mathscr{A})$; consecuentemente $L := \bigcup\{\{y\} \cup y \mid y \in K \cap \mathscr{A}\}$ es un subespacio compacto de $\Psi(\mathscr{A})$.

Nótese que $K \cap L$ es cerrado en L; pues $L \setminus K \subseteq \omega$; consecuentemente $K \setminus L$ es compacto. Como $K \setminus L = (K \cap \omega) \setminus \bigcup(K \cap \mathscr{A})$ es finito por hipótesis, $K \setminus L$ es compacto. Así, $K = (K \setminus L) \cup (K \cap L)$ es unión de subsespacios compactos de $\Psi(\mathscr{A})$; por tanto, es compacto. ■

Así, los los subespacios compactos de $\Psi(\mathscr{A})$ son únicamente aquellos de la forma $M \cup H$; donde $H \subseteq \mathscr{A}$ es finito y $M \subseteq^* \bigcup H$. Esto es, si $\mathcal{K}$ el conjunto de los subespacios compactos de $\Psi(\mathscr{A})$:

$$\mathcal{K} = \bigcup_{H\in[\mathscr{A}]^{<\omega}} \{F \cup M \cup H \mid (F, M) \in [\omega]^{<\omega} \times \mathscr{P}(H)\}$$

Por ello $|\mathscr{A}| \cdot \aleph_0 \leqslant |\mathcal{K}| \leqslant \sum\{(\aleph_0 \cdot \mathfrak{c}) \mid H \in [\mathscr{A}]^{<\omega}\} \leqslant |\mathscr{A}| \cdot \mathfrak{c} \leqslant \mathfrak{c}$; asi que todo espacio de Mrówka tiene; a lo sumo, $\mathfrak{c}$ subespacios compactos.

La discusión sobre cuántos subsespacios compactos *importantes* (esto es, los que determinan el carácter topológico de su extensión unipuntual) tiene $\Psi(\mathscr{A})$ se retomará en la **??**.

Corolario 1.2.2. *Sean $\mathscr{A}$ una familia casi ajena y $A \subseteq \omega$ cualquiera. Entonces son equivalentes las siguientes condiciones:*

i) $A \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$

ii) Existe $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ compacto tal que $A \subseteq K$.

iii) Existe $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ compacto tal que $A \subseteq^* K$.

Demostración. (i) $\to$ (ii) Si $A \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$, existe $H \subseteq \mathscr{A}$ finito tal que $A \subseteq^* \bigcup H$. De la Proposición anterior se desprende que $K := A \cup H$ es un subespacio compacto de $\Psi(\mathscr{A})$ tal que $A \subseteq K$.

La implicación (ii) $\to$ (iii) es clara, procédase con la restante.

(iii) $\to$ (i) Supóngase que K es un subcespacio compacto de $\Psi(\mathscr{A})$ tal que $A \subseteq^* K$. Consecuentemente $A \setminus \bigcup(K \cap \mathscr{A}) \subseteq^* A \setminus (K \cap \omega) = A \setminus K =^* \varnothing$, en virtud de la Proposición previa. Lo anterior; dado que $K \cap \mathscr{A}$ es finito, muestra que $A \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$. ■

Proposición 1.2.3. *Sea $\mathscr{A} \in \mathsf{AD}(\omega)$, entonces son equivalentes:*

i) $\Psi(\mathscr{A})$ es compacto.

ii) $\Psi(\mathscr{A})$ es numerablemente compacto.

iii) $\mathscr{A}$ es finita y maximal.

Demostración. La implicación (i) $\to$ (ii) es evidente.

(ii) $\to$ (iii) Supóngase que $\Psi(\mathscr{A})$ es numerablemente compacto. Dado que $\mathscr{A} \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es subespacio cerrado y discreto de $\Psi(\mathscr{A})$ (véase 1.1.7), entonces $\mathscr{A}$ es numerablemente compacto y discreto; por ello, es finito. De esta forma, $\mathcal{U} := \big\{\{n\} \mid n \in \omega\big\} \cup \big\{\{x\} \cup x \mid x \in \mathscr{A}\big\}$ es una cubierta numerable para $\Psi(\mathscr{A})$ y en consecuencia, existe $F \subseteq \omega$ finito de tal modo que la colección $\big\{\{n\} \mid n \in F\big\} \cup \big\{\{x\} \cup x \mid x \in \mathscr{A}\big\}$ es subcubierta de $\mathcal{U}$. Por ende $\omega \subseteq^* \bigcup \mathscr{A}$, al ser $\mathscr{A}$ y F finitos. Así, $\mathscr{A}$ es maximal en virtud del Corolario **??**.

(iii) $\to$ (i) Si $\mathscr{A}$ es finita y maximal, se desprende del Corolario **??** que $\omega \subseteq^* \bigcup \mathscr{A}$. Así, $\Psi(\mathscr{A}) \cap \omega \subseteq^* \bigcup (\Psi(\mathscr{A}) \cap \mathscr{A})$ y $\Psi(\mathscr{A}) \cap \mathscr{A} = \mathscr{A}$ es finito, siguiéndose dela Proposición 1.2.1 la compacidad de $\Psi(\mathscr{A})$. ■

La siguiente Proposición para nada carece de importancia, pues los espacios de Isbell-Mrówka son los únicos (dentro de cierta clase) con tal propiedad.

Proposición 1.2.4. *Todo espacio de Mrówka es hereditariamente localmente compacto, y en consecuencia, es espacio de Baire.*

Demostración. Supóngase que $\mathscr{A} \in \mathsf{AD}(\omega)$ y sea $X \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ cualquiera. Como $\Psi(\mathscr{A})$ es de Hausdorff (recuérdese 1.1.11), X es de Hausdorff y basta verificar que cada punto de X tiene una vecindad en X compacta.

Sea $x \in X$ arbitrario. Si $x \in \omega$, entonces $\{x\}$ es vecindad compacta de x en X. Ahora, si $x \in \mathscr{A}$, entonces $K := X \cap (\{x\} \cup x) \subseteq \{x\} \cup x$ es vecindad de x en X. Además K es compacto, en virtud del Corolario 1.2.2, pues $K \cap \mathscr{A} = \{x\}$ es finito y $K \cap \omega \subseteq x \subseteq^* \bigcup \{x\} = \bigcup (K \cap \mathscr{A})$. Así, X es localmente compacto y $\Psi(\mathscr{A})$ hereditariamente localmente compacto.

Consecuentemente, $\Psi(\mathscr{A})$ es localmente compacto y de Hausdorff, siendo esto suficiente para ser de Baire **(Teorema de Categoría de Baire)**. ■

1.3. Metrizabilidad y Pseudocompacidad

El Corolario 1.1.12 evidencía que la numerabilidad de una familia casi ajena $\mathscr{A}$ es suficiente para concluir la metrizabilidad de su espacio de Mrówka asociado, no resulta dificil notar que el recíproco también ocurre (dados 1.1.6 y que $\Psi(\mathscr{A})$ es separable); sin embargo, se tienen más equivalencias:

Proposición 1.3.1. *Sea* $\mathscr{A} \in \mathsf{AD}(\omega)$*, entonces son equivalentes:*

i) $\mathscr{A}$ *es a lo más numerable*

ii) $\Psi(\mathscr{A})$ *es metrizable.*

iii) $\Psi(\mathscr{A})$ *es segundo numerable.*

iv) $\Psi(\mathscr{A})$ *es* σ*-compacto.*

v) $\Psi(\mathscr{A})$ *es de Lindelöf.*

Demostración. (i) $\to$ (ii) $\to$ (iii) Si $|\mathscr{A}| \leqslant \omega$, se obtiene de 1.1.12 que $\Psi(\mathscr{A})$ es metrizable. Por otro lado, si $\Psi(\mathscr{A})$ es metrizable, al ser éste un espacio separable, se tiene garantizado que es 2AN **(MtzEq)**.

(iii) $\to$ (iv) $\to$ (v) Si $\Psi(\mathscr{A})$ es 2AN, entonces al localmente compacto, resulta que es σ-compacto **(Resultado R)**. Además; todo espacio σ-compacto, es también de Lindelöf. **(Resultado R)**

(v) $\to$ (i) Por último, supóngase que $\Psi(\mathscr{A})$ es de Lindelöf y sea $\mathcal{B}_{\mathscr{A}}$ la base estándar de $\Psi(\mathscr{A})$ (definida en 1.1.6). Luego $\mathcal{B}_{\mathscr{A}}$ es una cubierta abierta de $\Psi(\mathscr{A})$, y deben existir $\mathscr{A}' \subseteq \mathscr{A}$ y $N \subseteq \omega$ a lo más numerables tales que $\bigcup \left\{ \left\{ \{x\} \cup x \setminus F \mid F \in [x]^{<\omega} \right\} \mid x \in \mathscr{A}' \right\} \cup \left\{ \{n\} \mid n \in N \right\}$ es subcubierta de $\mathcal{B}_{\mathscr{A}}$. Resulta así que $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}'$ y $|\mathscr{A}| \leqslant \aleph_0$. ■

Como fue mostrado en **??**, ninguna familia casi ajena numerable es maximal. Así que si $\mathscr{A}$ es una familia casi ajena numerable, por 1.2.3, $\Psi(\mathscr{A})$ no es compacto. Consecuentemente (por 1.3.1), si $\mathscr{A}$ es numerable, $\Psi(\mathscr{A})$ es Lindelöf y σ-compacto, pero no compacto.

Observación 1.3.2. *Si* $\Psi(\mathscr{A})$ *es metrizable (o cualquiera de sus equivalentes planteados en 1.3.1) y no compacto, no necesariamente* $\mathscr{A}$ *es numerable. Esto responde al sencillo motivo de que* $\mathscr{A}$ *podría ser maximal o no; la Proposición 1.3.1 no toma en cuenta este aspecto.*

La observación recíen hecha da constancia de que falta establecer una relación entre $\Psi(\mathscr{A})$ y la maximalidad de la familia $\mathscr{A}$. En la **??** se ahondará con mucha más profundidad en el estudio de las sucesiones convergentes; pero de momento, es necesario considerar el siguiente Lema, en orden de dar una caracterización completa para $\mathscr{A} \in \mathsf{MAD}(\omega)$.

Lema 1.3.3. *Sean* $\mathscr{A} \in AD(\omega)$, $x \in \mathscr{A}$ *y* $B \subseteq [\omega]^\omega$ *cualesquiera. Entonces* $B \to x$ *en* $\Psi(\mathscr{A})$ *si y sólo si* $B \subseteq^* x$.

Demostración. Supóngase que $B \to x$ en $\Psi(\mathscr{A})$. Entonces, como $x \cup \{x\}$ es un abierto de $\Psi(\mathscr{A})$ que contiene a x, se tiene que $B \subseteq^* x \cup \{x\}$, mostrando que $B \subseteq^* x$. Y recíprocamente, si $B \subseteq^* x$ y $U \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es cualquier abierto con $x \in U$, entonces $x \subseteq^* U$, y por tanto, $B \subseteq^* U$. ■

Proposición 1.3.4. *Sea* $\mathscr{A} \in AD(\omega)$, *son equivalentes:*

i) $\Psi(\mathscr{A})$ *es pseudocompacto.*

ii) $\mathscr{A}$ *es maximal.*

iii) Todo subespacio discreto, abierto y cerrado de $\Psi(\mathscr{A})$ *es finito.*

iv) Toda sucesión en ω *tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. (i) $\to$ (ii). Si $\mathscr{A}$ no es maximal, existe $B \subseteq \omega$ infinito y casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$. Por 1.1.5 y 1.1.7, B es discreto, abierto y cerrado, y de **(Ree A)** se sigue que $\Psi(\mathscr{A})$ no es pseudocompacto.

(ii) $\to$ (iii) Por contrapuesta, supóngase que $B \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es infinito, discreto, abierto y cerrado de $\Psi(\mathscr{A})$. Sin pérdida de generalidad $B \subseteq \omega$ (de lo contrario cada $a \in B \cap \mathscr{A}$ cumple que $a \cap B = B \cap (\{a\} \cup a) \subseteq \omega$ es infinito, cerrado, abierto y discreto). Luego, de 1.1.7 se desprende que B casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$.

(iii) $\to$ (iv) Supóngase (iii) y sea $B \in [\omega]^\omega$. Así, B es discreto, infinito y abierto. Por hipótesis, debe existir $x \in \mathrm{der}(B) \setminus B$ y por 1.1.11, $x \in \mathscr{A}$ y $B \cap x$ es infinito. Siguiéndose del Lema 1.1.7 que $B \cap x \to x$.

(iv) $\to$ (i) Por contrapuesta, supóngase que $f : \Psi(\mathscr{A}) \to \mathbb{R}$ es continua y no acotada. Entonces; por densidad de ω, para cada $n \in \omega$ se puede fijar $m_n \in \omega \cap f^{-1}[(n, \infty)]$. Así, $B = \{m_n \mid n \in \omega\}$ es infinito, y no admite subsucesiones convergentes en $\Psi(\mathscr{A})$, pues ningún $C \in [B]^\omega$ tiene imagen no acotada bajo f. ■

Combinando 1.2.3, 1.3.1 y 1.3.4 se obtienen ejemplos muy concretos. Por ejemplo, si un espacio de Mrówka $\Psi(\mathscr{A})$ no es pseudocompacto pero sí es metrizable, necesariamente $\mathscr{A}$ es numerable. Otro ejemplo responde con una negativa a lo que en su momento fue un problema popular: £la pseudo-compacidad equivale a la compacidad numerable en espacios Tychonoff?, resultado se sabía cierto en la clase de espacios T_4 (**Reee R**) y falso dentro de la clase de espacios que no son T_1. En virtud de 1.2.3, y considerando cualquier familia maximal infinita, se obtiene

Corolario 1.3.5. *Existe un espacio de Tychonoff, que es pseudocompacto pero no numerablemente compacto.*

La siguiente es una caracterización conocida (véase [5, p. 39, 45]) y; entre tanto, desvela que el comportamiento súmamente organizado y *amigable* de $\Psi(\mathscr{A})$ se rompe bruscamente cuando $\mathscr{A}$ deja de ser numerable. Por tal motivo, no suelen ser de tanto interés los Ψ-espacios generados por familias casi ajenas a lo más numerables.

Proposición 1.3.6. *Sea $\mathscr{A}$ una familia casi ajena con cardinalidad κ, entonces*[1] *se satisface:*

i) *Si $\kappa = 0$, entonces $\Psi(\mathscr{A}) \cong \omega$.*

ii) *Si $\kappa \in \omega$ y $\mathscr{A}$ no es maximal, $\Psi(\mathscr{A}) \cong \omega \cdot (\kappa + 1)$.*

iii) *Si $\kappa \in \omega$ y $\mathscr{A}$ es maximal, $\Psi(\mathscr{A}) \cong \omega \cdot (\kappa + 1) + 1$.*

iv) *Si $\kappa = \omega$, entonces $\Psi(\mathscr{A}) \cong \omega^2$.*

v) *Si $\kappa > \omega$, entonces $\Psi(\mathscr{A})$ no homeomorfo a ningún espacio de ordinales; más aún, $\Psi(\mathscr{A})$ no es linealmente ordenable.*

Se derivan conclusiones de interés moderado, como puede ser que ω^2 (como producto ordinal) es el único espacio de Mrówka metrizable, no compacto. Una consecuencia *curiosa* en relación a éste espacio; y que además, surge como fruto del Teorema principal de la Sección 1.4, es el Corolario 1.4.10.

La peculiaridad recién comentada, sugiere que todas las familias casi ajenas numerables son muy *esencialmente iguales* (conviniendo que $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son *esencialmente iguales* cuando $\Psi(\mathscr{A})$ y $\Psi(\mathscr{B})$ son homeomorfos).

[1]En los incisos (i)-(iv), los espacios homeomorfos a $\Psi(\mathscr{A})$ están escritos en aritmética ordinal y dotados de su topología de orden.

1.4. Teorema de Kannan y Rajagopalan

La meta primordial en lo que resta del capítulo será caracterizar aquellos espacios que son homeomorfos a algún espacio de Mrówka. Como fué mostrado en la Proposición 1.2.4, todos los espacios de Mrówka son hereditariamente localmente compactos, una propiedad cuanto menos peculiar. Tal propiedad será la que los caracterizará dentro de la clase de espacios infinitos, de Hausdorff y separables.

Lema 1.4.1. *Sea* X *un espacio de Hausdorff y localmente compacto. Si* X *contiene un denso* D*, abierto y a lo más numerable, entonces* $N := X \setminus \operatorname{der}(X) \subseteq X$ *discreto y denso en* X.

Demostración. Claramente N es discreto. Por el Teorema de Categoría De Baire (**TCB**), resulta que X es un espacio de Baire.

Ahora, si $x \in D$ es aislado en D, entonces $\{x\} = D \cap U$ para cierto abierto U de X y dado que D es denso y X es un espacio T_1, es necesario que $U = \{x\}$. Lo anterior prueba que $X \setminus \operatorname{der}_D(D) \subseteq N$.

Por otra parte, si $x \in \operatorname{der}_D(D) \subseteq \operatorname{der}(X)$, entonces $X \setminus \{x\}$ es abierto y denso en X. Luego $X \setminus \operatorname{der}_D(D) = \bigcap\{X \setminus \{x\} \mid x \in \operatorname{der}_D(D)\}$ es denso, debido a que X es de Baire. Lo cual basta para mostrar que N es denso. ■

Lema 1.4.2. *Sean* X *un espacio topológico y* $N := X \setminus \operatorname{der}(X)$*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) N *es denso y para cada* $y \in \operatorname{der}(X)$, $N \cup \{y\}$ *es abierto.*

ii) $\operatorname{der}(X)$ *es discreto.*

Demostración. (i) $\to$ (ii) Supóngase (i) y sea $y \in \operatorname{der}(X)$ cualquier elemento. $N \cup \{y\}$ es abierto en X, en consecuencia $y \in U \subseteq N \cup \{y\}$, para cierto abierto U. Seguido de lo anterior, $y = U \setminus N = U \cap \operatorname{der}(X)$. Mostrando que $\operatorname{der}(X)$ es discreto.

(ii) $\to$ (i) Supóngase que $\operatorname{der}(X)$ es discreto. Si N no es denso, existen $x \in X$ y un abierto U de modo tal que $x \in U \subseteq \operatorname{der}(X)$. Pero al ser $\operatorname{der}(X)$ discreto, $\{x\} = W \cap \operatorname{der}(X)$ para cierto abierto W, de donde $U \cap W = \{x\}$ y $x \in N$, esto es imposible. Así que N es denso en X.

Ahora, si $y \in \mathrm{der}(X)$ es arbitrario, existe un abierto U de modo que se da $\{y\} = U \cap \mathrm{der}(X)$, pues $\mathrm{der}(X)$ es discreto. De lo anterior se obtiene que $N \cup \{y\} = (N \cup U) \cap (N \cup \mathrm{der}(X)) = N \cup U$ es abierto en X. ■

La siguiente caracterización es debida a Varadachariar Kannan y a Minakshisundaram Rajagopalan, quienes en 1970 (consúltese [4]) dieron con el resultado.

Teorema 1.4.3 (Kannan, Rajagopalan). *Para cualquier espacio topológico X infinito, de Hausdorff y separable son equivalentes:*

i) *X es hereditariamente localmente compacto.*

ii) *X es localmente compacto* $\mathrm{der}(X)$ *es discreto.*

iii) *X es homeomorfo a un espacio de Mrówka.*

Demostración. Supóngase que X es cualquier espacio infinito, de Hausdorff, separable y sea $N := X \setminus \mathrm{der}(X)$.

(i) $\to$ (ii) Supóngase que X es hereditariamente localmente compacto. Por separabilidad de X, existe $D \subseteq X$ denso y a lo más numerable. Se sigue de la hipótesis que D es localmente compacto y por ello, es abierto en su cerradura, X. Debido al Lema 1.4.1, N es denso en X.

Por otro lado, si $y \in \mathrm{der}(X)$ es cualquiera, $N \cup \{y\} \subseteq X$ es localmente compacto, y por ende, es abierto en su cerradura. Pero N es denso, así que $N \cup \{y\}$ es abierto en $X = \mathrm{cl}(N \cup \{y\})$. Por lo tanto, de 1.4.2 se obtiene que $\mathrm{der}(X)$ es discreto.

(ii) $\to$ (iii) Supóngase que X es localmente compacto y que $\mathrm{der}(X)$ es discreto. Por el Lema 1.4.2 resulta que N es denso en X y que $N \cup \{y\}$ es abierto siempre que $y \in \mathrm{der}(X)$. Por ser X infinito y separable, se tiene que N es numerable. Utilizando la compacidad local de X, para cada $x \in \mathrm{der}(X)$ fíjese (utilizando AC) una vecindad compacta V_x de x en X contenida en $N \cup \{x\}$. Se afirma que $\mathscr{A} = \{V_x \setminus \{x\} \subseteq N \mid x \in \mathrm{der}(X)\} \in \mathsf{AD}(N)$.

En efecto, si $x \in \mathrm{der}(X)$ es cualquiera, entonces $V_x \setminus \{x\}$ no es finito. De lo contrario, $\{x\} = (N \cup \{x\}) \setminus (V_x \setminus \{x\})$ sería abierto en X (que es espacio T_1) y se contradiría que $x \in \mathrm{der}(X)$. Por tanto, $\mathscr{A} \subseteq [N]^{\omega}$. Además, si $x, y \in \mathrm{der}(X)$ son distintos, se tiene que $V_x \cap V_y \subseteq N$. Así $V_x \cap V_y$ es subespacio compacto del discreto N, lo cual obliga a que sea finito. Como consecuencia, $\mathscr{A}$ es familia casi ajena en N.

Defínase $f : X \to \Psi_N(\mathscr{A})$ por medio de $f(n) = n$ si $n \in N$ y $f(x) = V_x$ si $x \in \mathrm{der}(X)$. Claramente f es función biyectiva; además, como N es el conjunto de puntos aislados de X, para verificar que f es homeomorfismo basta verificar lo siguiente.

Afirmación. Un subconjunto $U \subseteq X$ es abierto si y sólo si para cada $x \in U \cap \mathrm{der}(X)$ se tiene $V_x \setminus \{x\} \subseteq^* U$.

Demostración. Sea $U \subseteq X$. Si U es abierto y $x \in U \cap \mathrm{der}(X)$ es cualquiera, entonces $V_x \setminus U \subseteq N$ es cerrado en X, así en V_x y como V_x es compacto; $V_x \setminus U$ es subespacio compacto del discreto N, por tanto finito. Así que $V_x \setminus \{x\} \subseteq^* U$.

Recíprocamente, supóngase que para cada $x \in U \cap \mathrm{der}(X)$ se tiene que $V_x \setminus \{x\} \subseteq^* U$, es decir, que $V_x \setminus U$ es finito. Sea $y \in U$ cualquiera, si $y \in N$ entonces $\{y\}$ es abierto en X y U es vecindad de y. Ahora, si $y \in \mathrm{der}(X)$ entonces $V_y \setminus U$ es finito y con ello $V_y \setminus (V_y \setminus U) \subseteq U$, de donde U es vecindad de y (usando que X es espacio T_1). Luego, U es vecindad de todos sus puntos, y por tanto, es abierto. ⊠

(iii) $\to$ (i) Si X es homeomorfo a un espacio de Mrówka, las propiedades topológicas del último se satisfacen en X, siguéndose de 1.2.4 que X es hereditariamente localmente compacto. ■

Del resultado anterior es casi inmediata la obtención de las siguientes condiciones equivalentes.

Corolario 1.4.4. *Sea X cualquier espacio infinito, de Hausdorff y separable. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *X es pseudocompacto y hereditariamente localmente compacto.*

ii) *X es regular, $\mathrm{der}(X)$ es subespacio discreto de X y cualquier subespacio discreto, abierto y cerrado a la vez en X es finito.*

iii) *X es homeomorfo a un espacio de Mrówka generado por una familia casi ajena maximal.*

Demostración. Por el Teorema de Kannan y Rajagopalan, lo demostrado en 1.3.4 y como todo espacio de Mrówka es de Tychonoff (véase 1.1.11);

particularmente regular, bastará demostrar que si X satisface (ii) entonces X es localmente compacto. Supóngase (ii), claramente cada punto aislado de X tiene una vecindad compacta en X.

Sea $x \in \mathrm{der}(X)$ arbitrario, como $\mathrm{der}(X)$ es discreto, existe $U \subseteq X$ abierto con $\{x\} = U \cap \mathrm{der}(X)$. Por regularidad de X, fíjese un abierto V tal que $x \in V \subseteq \mathrm{cl}(V) \subseteq U$ y nótese que entonces $\{x\} = \mathrm{cl}(V) \cap \mathrm{der}(X)$.

Si W es una vecindad abierta de x, entonces $\mathrm{cl}(V) \setminus W$ es discreto y abierto (por ser subespacio de $X \setminus \mathrm{der}(X)$) y cerrado (por ser intersección de cerrados). De (ii) se sigue la finitud de $\mathrm{cl}(V) \setminus W$, y de esto, la compacidad de $\mathrm{cl}(V)$, siendo tal subespacio, una vecindad compacta de x en X. ■

Corolario 1.4.5. *Sea X un espacio topológico infinito, entonces X es homeomorfo a un espacio de Mrówka si y sólo si es homeomorfo a un subespacio abierto de un espacio de Mrówka.*

Demostración. Basta probar la necesidad. Supóngase que $\mathscr{A}$ es una familia casi ajena y que $U \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es un abierto tal que $X \cong U$. Como X es infinito, U es infinito, además por ser $\Psi(\mathscr{A})$ de Hausdorff y hereditariamente localmente compacto, se tiene que U es de Hausdorff y hereditariamente localmente compacto. Por último, como ω es denso en $\Psi(\mathscr{A})$ y U es abierto en $\Psi(\mathscr{A})$, se tiene que $U \cap \omega$ es denso en U; así que U es separable. De lo anterior U, y por tanto X, es homeomorfo a un espacio de Mrówka; a saber $\Psi_{U\cap\omega}(U \cap \mathscr{A})$. ■

Corolario 1.4.6. *Sea $\{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ una familia no vacía de espacios topológicos infinitos; sin pérdida de generalidad ajenos dos a dos, entonces son equivalentes:*

i) $Y := \coprod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$ *es homeomorfo a un espacio de Mrówka.*

ii) κ *es contable y cada* X_α *es homeomorfo a un espacio de Mrówka.*

Demostración. (i) $\rightarrow$ (ii) Supóngase que Y es espacio de Mrówka. Como cada $X_\alpha \subseteq Y$ es infinito y abierto en Y, se sigue del Corolario anterior que X_α es de Mrówka. Por otro lado, si κ fuese más que numerable, Y no podía ser separable, pues es la suma de κ espacios no vacíos; así que κ es a lo más numerable.

(ii) $\to$ (i) Supóngase que κ es a lo más numerable y para cada $\alpha \in \kappa$, el espacio X_α es homeomorfo a un espacio de Mrówka. Entonces, del Sección 1.4, cada X_α es (infinito) de Hausdorff, separable, localmente compacto y además el subespacio $\mathrm{der}_{X_\alpha}(X_\alpha) \subseteq X_\alpha$ es discreto.

La suma de espacios de Hausdorff (localmente compactos, respectivamente) es de Hausdorff (localmente compacta, respectivamente); además, por ser cada X_α separable y κ a lo más numerable, resulta que Y es infinito, de Hausdorff, localmente compacto y separable.

Sea $y \in \mathrm{der}_Y(Y)$ cualquiera, por definición de Y, para el único elemento $\alpha \in \kappa$ tal que $y \in X_\alpha$, se tiene $y \in \mathrm{der}_{X_\alpha}(X_\alpha)$. Y como tal subespacio de X_α es discreto, existe $V \subseteq X_\alpha$ abierto tal que $\{y\} = U \cap \mathrm{der}_{X_\alpha}(X_\alpha)$, pero U es abierto también en Y y además $\{y\} = U \cap \mathrm{der}_Y(Y)$. De lo contrario, existe $x \in V \cap \mathrm{der}_Y(Y) \setminus \{y\}$ y consecuentemente $x \notin \mathrm{der}_{X_\alpha}(X_\alpha)$, mostrando que $\{x\}$ es abierto en X_α y por tanto en Y, lo cual es absurdo dada la elección de X. Lo anterior prueba que $\mathrm{der}_Y(Y)$ es discreto, finalizando la prueba en virtud del Teorema 1.4.3. ■

Se explotará mucho la siguiente observación durante el subsecuente Corolario, pues nuevamente, se hará uso del inciso (ii) del Teorema 1.4.3.

Observación 1.4.7. *Sea* X *un espacio topológico,* $\mathrm{der}(X)$ *es discreto si y sólo si* $\mathrm{der}^2(X) := \mathrm{der}(\mathrm{der}(X)) = \varnothing$.

Efectivamente; como $X \setminus \mathrm{der}(X)$ *es abierto,* $\mathrm{der}(X)$ *es discreto si y sólo si es discreto y cerrado. Esto último sucede únicamente cuando* $\mathrm{der}_{\mathrm{der}(X)}(\mathrm{der}(X)) = \mathrm{der}(X) \cap \mathrm{der}^2(X) = \varnothing$. *Sin embargo, cualquier punto aislado en* X*, es aislado en* $\mathrm{der}(X)$*, así que* $\mathrm{der}^2(X) \subseteq \mathrm{der}(X)$*; por lo tanto,* $\mathrm{der}(X)$ *es discreto si y sólo si* $\mathrm{der}^2(X) = \varnothing$.

Lema 1.4.8. *Sean* X *y* Y *espacios topológicos infinitos, entonces* $X \times Y$ *es homeomorfo a un espacio de Mrówka si y sólo si* X *y* Y *son de Mrówka y además* $X \cong \omega$ *o* $Y \cong \omega$

Demostración. Obsérvese la igualdad:

$$\begin{aligned}\mathrm{der}^2_{X\times Y}(X \times Y) &= \mathrm{der}_{X\times Y}\Big(\mathrm{der}_X(X) \times \mathrm{cl}_Y(Y) \cup \mathrm{cl}_X(X) \times \mathrm{der}_Y(Y)\Big)\\ &= \mathrm{der}_{X\times Y}\Big(\mathrm{der}_X(X) \times Y \cup X \times \mathrm{der}_Y(Y)\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{der}_{X\times Y}\Big(\mathrm{der}_X(X)\times Y\Big)\cup \mathrm{der}_{X\times Y}\Big(X\times \mathrm{der}_Y(Y)\Big)\\
&= \mathrm{der}_X(\mathrm{der}_X(X))\times \mathrm{cl}_Y(Y)\cup \mathrm{cl}_X(\mathrm{der}_X(X))\times \mathrm{der}_Y(Y)\cup\\
&\cup \mathrm{der}_X(X)\times \mathrm{cl}_Y(\mathrm{der}_Y(Y))\cup \mathrm{cl}_X(X)\times \mathrm{der}_Y(\mathrm{der}_Y(Y))\\
&= \mathrm{der}^2_X(X)\times Y\cup \mathrm{der}_X(X)\times \mathrm{der}_Y(Y)\cup X\times \mathrm{der}^2_Y(Y)
\end{aligned}
$$

Puesto que $X, Y \neq \varnothing$, resulta que $\mathrm{der}^2_{X\times Y}(X\times Y)$ es vacío si y sólo si $\mathrm{der}^2_X(X) = \mathrm{der}^2_Y(Y) = \mathrm{der}_X(X)\times \mathrm{der}_Y(Y) = \varnothing$. Esto es, el subespacio $\mathrm{der}_{X\times Y}(X\times Y)\subseteq X\times Y$ es discreto si y sólo si los subespacios $\mathrm{der}_X(X)$ de X y $\mathrm{der}_Y(Y)$ de Y son discretos y además X es discreto o Y es discreto.

Como X, Y son infinitos, $X\times Y$ es infinito, además las propiedades de separabilidad, axioma de separación de Hausdorff y local compacidad son propiedades finitamente productivas y finitamente factorizables. De esto último, lo comentado en el párrafo anterior, el hecho de que el único espacio de Mrówka discreto es ω y el inciso (ii) del Teorema 1.4.3, se obtiene el resultado. ■

Corolario 1.4.9. *Sea $\{X_\alpha \mid \alpha\in\kappa\}$ una familia no vacía de espacios topológicos infinitos; sin pérdida de generalidad ajenos dos a dos, entonces son equivalentes:*

i) $Y := \displaystyle\prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$ *es homeomorfo a un espacio de Mrówka.*

ii) κ *es finito, cada* X_α *es homeomorfo a un espacio de Mrówka y existe* $\beta_0\in\kappa$ *tal que si* $\alpha\in\kappa\setminus\{\beta_0\}$*, se tiene* $X_\alpha\cong\omega$*.*

Demostración. Sin perder generalidad, tómese κ como un cardinal.

(i) $\to$ (ii) Supóngase que Y es homeomorfo a un espacio de Mrówka, entonces Y es de Hausdorff, Separable y hereditariamente localmente compacto. Todas las propiedades anteriores son factorizables, así que por el por el Teorema de Kannan y Rajagopalan (1.4.3), cada X_α es homeomorfo a un espacio de Mrówka.

Ahora, por contradicción, supóngase $\kappa\geqslant\omega$. Entonces, existen $P, Q\subseteq\kappa$ ajenos e infinitos, de donde:

$$
Y = \prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha \cong \prod_{\alpha\in P} X_\alpha \times \prod_{\alpha\in Q} X_\alpha
$$

siguiéndose del Lema previo que; sin pérdida de generalidad, $\prod_{\alpha\in P} X_\alpha \cong \omega$. Lo anterior conduce a un absurdo, pues como P es infinito y cada X_α también, resulta que:

$$\left|\prod_{\alpha\in P} X_\alpha\right| = \prod_{\alpha\in P} |X_\alpha| \geqslant \prod_{\alpha\in P} \aleph_0 = \aleph_0^{|P|} \geqslant \aleph_0^{\aleph_0} > \aleph_0$$

imposibilitando que $\prod_{\alpha\in P} X_\alpha \cong \omega$ sea biyectable con ω. Así, $\kappa < \omega$.

Finalmente, si cada X_α es homeomorfo a ω, o $\kappa = 1$, (ii) se satisface. Supóngase pues que $\kappa \geqslant 2$ y que existe $\beta_0 \in \kappa$ con $X_{\beta_0} \ncong \omega$. Dado que:

$$Y = \prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha \cong X_{\beta_0} \times \prod_{\alpha\in\kappa\setminus\{\beta_0\}} X_\alpha$$

se sigue del Lema Previo que $\prod_{\alpha\in\kappa\setminus\{\beta_0\}} X_\alpha \cong \omega$. Siendo así, cada X_α (con $\alpha \in \kappa\setminus\{\beta_0\}$) infinito, numerable y discreto; esto es, homeomorfo a ω.

(ii) $\to$ (i) Supóngase que κ es finito, que cada X_α es homeomorfo a un espacio de Mrówka y que $\beta_0 \in \kappa$ es un elemento tal que si $\alpha \in \kappa\setminus\{\beta_0\}$, entonces $X_\alpha \cong \omega$. Como $\kappa\setminus\{\beta\}$ es finito, entonces:

$$Y = \prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha \cong X_\beta \times \prod_{\alpha\in\kappa\setminus\{\beta\}} X_\alpha \cong X_\beta \times \prod_{\alpha\in\kappa\setminus\{\beta\}} \omega = X_\beta \times \omega$$

y a consecuencia del Lema previo, Y es de Mrówka. ■

El siguiente Corolario del Teorema de Kannan y Rajagopalan (1.4.3), es un resultado sencillo (y sumamente particular) de metrización.

Corolario 1.4.10. *Si X es infinito, separable, de Hausdorff y hereditariamente localmente compacto. Entonces son equivalentes:*

i) *X es hereditariamente separable.*

ii) *X es metrizable.*

Demostración. Dado el Teorema 1.4.3 y la caracterización 1.3.1, basta ver que si $\mathscr{A} \in \mathsf{AD}(\omega)$, entonces $\Psi(\mathscr{A})$ es hereditariamente separable si y sólo si $\mathscr{A}$ es a lo más numerable.

Para la suficiencia procédase por contrapuesta suponiendo que $\mathscr{A}$ es más que numerable, entonces $\mathscr{A}$ es un subespacio de $\Psi(\mathscr{A})$ discreto y más que numerable, con lo que, no puede ser serparable. Para la necesidad, si $\mathscr{A}$ es a lo más numerable, cada subespacio de $\Psi(\mathscr{A})$ es a lo más numerable, y con ello, separable. ■

La *curiosidad* (comentada posteriormente a 1.3.6) en relación al espacio de ordinales ω^2 tiene su justificación en el anterior Corolario.

Se finalizará la sección; y con ello el actual capítulo, dando un Corolario importante en relación a las imagenes continuas de los espacios de Mrówka pseudocompactos.

Corolario 1.4.11. *Sea X infinito y de Hausdorff. Son equivalentes:*

i) Existe un denso $D \subseteq X$ de X numerable tal que cada sucesión en D tiene una subsucesión convergente en X.

ii) X es imagen continua de un espacio de Mrówka generado por una familia maximal.

Demostración. (i) $\rightarrow$ (ii) Supóngase (ii) y sea $S \subseteq \mathsf{AD}(D)$ el conjunto de familias casi ajenas en D tales que para cada $\mathscr{B} \in S$, cada elemento de $\mathscr{B}$ es imagen de una sucesión en D convergente en X. Como D es numerable, existe una biyección $f_0 : \omega \rightarrow D$ biyectiva, misma que admite una subsucesión convergente, a saber $g_0 : \omega \rightarrow D$ convergente en X. Se desprende que $\{\text{ima}(g_0)\} \in S$ y por tanto S es no vacío, siguiéndose de una aplicación del Principio de Maximalidad de Hausdorff (similar al utilizado en **??**) la existencia de una familia casi ajena en D, $\mathscr{A} \subseteq \bigcup S$ tal que si $\mathscr{B} \in S$ y $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, entonces $\mathscr{A} = \mathscr{B}$.

Afirmación. $\mathscr{A}$ es familia casi ajena maximal sobre D.

Demostración. Obsérvese primero que si $A \in \mathscr{A}$, existe $\mathscr{C} \in S$ tal que $A \in \mathscr{C}$ tal que $A \in \mathscr{C}$; consecuentemente A es imagen de una sucesión en D convergente en X; es decir $A \in \mathscr{A}$. Ahora, si $B \subseteq D$ infinito, entonces existe una biyección $f : \omega \rightarrow B$ y, por hipótesis, existe $g : \omega \rightarrow B \subseteq D$ subsucesión de f, convergente en X y con ello $\{\text{ima}(g)\} \in S$.

Por un lado, si $\mathscr{A} \cup \{\text{ima}(g)\}$ no es casi ajena, existe $A \in \mathscr{A}$ de modo que $A \cap \text{ima}(g)$ es infinito, y con ello $A \cap B$ es infinito. De otro modo, $\mathscr{A} \cup \{\text{ima}(g)\} \in S$ y por la construcción de A se tiene

$\mathscr{A} \cup \{\text{ima}(g)\} = \mathscr{A}$, siendo $A := \text{ima}(g) \in \mathscr{A}$ tal que $A \cap B$ es infinito (pues g es subsucesión de f). Lo anterior prueba que $\mathscr{A}$ es maximal sobre D. $\boxtimes$

Para cada $A \in \mathscr{A}$ fíjese (AC) una sucesión $f_A : \omega \to D$ convergente a x_A en X tal que $A = \text{ima}(f_A)$. Nótese que, como X es de Hausdorff tal elemento x_A es el único al cual f_A converge. Además, dado que los elementos de $\mathscr{A}$ son casi ajenos dos a dos, y de nuevo por ser X de Hausdorff, cada vez que $A, B \in \mathscr{A}$ sean distintos, se tendrá que $f_A \neq f_B$ y $x_A \neq x_B$. Defínase la función $p : \Psi_D(\mathscr{A}) \to X$ como $p(d) = d$ si $d \in D$ y $p(A) = x_A$ si $A \in \mathscr{A}$, veamos que p es continua y sobreyectiva.

Sea $U \subseteq X$ abierto en X y supóngase que $A \in p^{-1}[U] \cap \mathscr{A}$ es cualquiera, entonces $p(A) = x_A \in U$ y $A = \text{ima}(f_A)$. Como U es un abierto de X y f_A converge a x_A en X, resulta que $\text{ima}(f_A) \subseteq^* U$ y con ello $A \subseteq^* p^{-1}[U]$; así que $p^{-1}[U]$ es abierto en $\Psi_D(\mathscr{A})$, y por tanto p es continua.

Ahora, sea $x \in X \setminus D$ cualquier elemento. Por contradicción, supóngase que $x \notin \text{ima}(p)$, entonces si $s : \omega \to D$ es cualquiera, s no puede converger a a en X; de lo contrario, existe $A \in \mathscr{A}$ tal que $A \cap \text{ima}(s)$ es infinito y con ello f_A converge a x en X, con lo que $x = p(A)$. Sin embargo

AQUÍ ESTO YA NO SALE

(ii) $\to$ (i) SALE FÁCIL ■

Corolario 1.4.12. *Todo espacio metrizable, separable y compacto es imagen continua de un espacio de Mrówka; en particular, el cubo de Hilbert $[0,1]^\omega$ y el conjunto de Cantor 2^ω.*

Índice Simbólico

Índice Alfabético

Referencias

[1] Fidel Casarrubias y Angel Tamariz. *Elementos de Topología General*. 1.ª ed. Aportaciones Matemáticas, 2019.

[2] Michael Hruák. «Almost disjoint families and topology». En: *Recent Progress in General Topology III*. Springer, 2013, págs. 601-638.

[3] Michael Hruák y Fernando Hernández. «Topology of Mrówka-Isbell Spaces». En: *Pseudocompact topological spaces, Gainesville*. Springer. 2018, págs. 253-289.

[4] Varadachariar Kannan y Minakshisundaram Rajagopalan. «Hereditarily locally compact separable spaces». En: *Categorical Topology: Proceedings of the International Conference, Berlin*. Springer. 1979, págs. 185-195.

[5] Georgina Noriko. «Algunas propiedades de los espacios de Mrówka». Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias, UNAM, 2009.