Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Redes de subconjuntos y algunas generalizaciones

TESIS

que para obtener el título de:

Matemática

presenta:

Mara Jazmín Cruz Barrena

Director de tesis:

Dr. Fidel Casarrubias Segura

Ciudad Universitaria, CD. MX. Julio 2025

Introducción

Uno de los primeros aprendizajes en materia de topología es el concepto de base de un espacio. Resulta interesante hacer un análisis de los espacios basado en la cantidad mínima de elementos para que un conjunto sea base de un espacio dado; este número (cardinal) es identificado como *el peso del espacio* y lleva consigo información crucial sobre su espacio asociado. El peso se comporta bien bajo homeomorfismos y subespacios y, cuando se combina con los axiomas de separación, es posible desarrollar resultados muy interesantes sobre la cardinalidad de un espacio o su metrizabilidad. Por supuesto que esta herramienta también tiene detalles y uno de los más difíciles de pasar por alto es que no es finito aditivo: por ejemplo, en general no es cierto que la unión finita de espacios con peso numerable (los cuales se denominan *segundo-numerables* o *2AN*) vuelva a tener peso numerable. En 1951 Arkhangel'skii demostró que para los espacios compactos y Hausdorff la finito-aditividad es posible. En su demostración, Arkhangel'skii introdujo el concepto de *red de subconjuntos* que generaliza la noción de base y, de manera completamente análoga, este viene acompañado de un *peso de red* que se define como la cantidad mínima de elementos para que un conjunto sea red (de subconjuntos) de un espacio dado.

Es de esperarse que, por su similitud con las bases, las redes de subconjuntos tengan propiedades análogas. En este trabajo, a lo largo de 6 capítulos, estudiamos el comportamiento de las redes de subconjuntos y del peso de red, exhibimos resultados que involucran la cardinalidad de un espacio, su peso o su densidad y, posteriormente, se muestran otras generalizaciones de este concepto que generan clases de espacios muy interesantes como los espacios Lindelöf-Σ.

El capítulo de preliminares está dedicado únicamente a recolectar la notación, términos y resultados que usaremos a lo largo de este documento. En la última sección se muestra todo el desarrollo para concluir la proposición que le da su nombre a dicha sección. Posteriormente, en el segundo capítulo, se introducen formalmente las definiciones de redes de subconjuntos y de peso de red y, desarrollamos sus propiedades con el objetivo de demostrar el teorema que motivó a Arkhangel'skii a definir estos conjuntos en primer lugar. Cerramos este capítulo con la introducción de una clase de espacios topológicos que se caracterizan por tener peso de red numerable: los espacios cósmicos. Aprovechamos el capítulo 3 para desarrollar un poco de Cp-teoría y demostrar otro teorema importante: el de dualidad del peso de red de Arkhangel'skii. En el capítulo 4 enfrentamos una primera generalización de las redes de subconjuntos: las redes respecto de cubiertas; lo que nos lleva a la introducción de los espacios Lindelöf-Σ y al número de Nagami. Este capítulo se concluye con la demostración del Teorema de Tkachenko para espacios Tychonoff: $w(X) \leq |C(X)| \leq nw(X)^{Nag(X)}$. En el penúltimo capítulo presentamos una caracterización que relaciona a los espacios hereditariamente Lindelöf-Σ con su peso de red. Y para finalizar este trabajo, en el último capítulo se mencionan brevemente dos generalizaciones más de las redes de subconjuntos: las redes externas y las redes de funciones.

Índice general

Introducción **3**

1. Preliminares **7**
1.1. Espacios topológicos. 7
1.2. Bases, subbases, bases locales y axiomas de numerabilidad. 10
1.3. Funciones continuas y topología producto. 12
1.4. La cardinalidad de un compacto Hausdorff 1AN es numerable o igual a $\mathfrak{c}$ . . 13

2. Las redes de Arkhangel'skii. **21**
2.1. Redes de subconjuntos 21
2.2. El Teorema de Arkhangel'skii sobre aditividad del peso. 25

3. El teorema de dualidad del peso de red. **31**
3.1. El espacio $Cp(X)$. 31
3.2. Dualidad en $Cp(X)$: $nw(X) = nw(Cp(X))$. 34

4. Redes respecto de cubiertas. **39**
4.1. Los espacios Lindelöf-Σ y el número de Nagami. 39
4.2. El Teorema de Tkachenko. 53

5. El Teorema de Hodel. **61**

6. Redes externas y redes de funciones. **67**

Bibliografía **71**

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se hace un compendio de algunas definiciones, resultados y notación de topología que usaremos con frecuencia en este documento. Se da por hecho que el lector ya ha tomado un curso de la materia, por lo que muchos detalles son omitidos.

En lo que sigue, el conjunto potencia de un conjunto X es denotado por: $\mathscr{P}(X)$. El conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, mientras que el conjunto $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$. El símbolo $\mathfrak{c}$ representa la cardinalidad del conjunto $\mathbb{R}$.

Además, diremos que un conjunto X *numerable* si existe una función inyectiva $f : X \longrightarrow \mathbb{N}$; es decir, un conjunto es considerado numerable si es finito ó infinito numerable. También daremos por hecho resultados básicos de Teoría de Conjuntos como que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable, el teorema de Cantor sobre la potencia de un conjunto, el teorema de Cantor-Schröder-Bernstein, entre otros.

Dado un conjunto A y un número cardinal κ, denotamos por $[A]^{\leq\kappa}$ al conjunto formado por todos los subconjuntos de A que tienen a lo más κ elementos. De manera similar se definen los conjuntos $[A]^{<\kappa}$ y $[A]^{=\kappa}$.

1.1. Espacios topológicos.

Definición 1.1.1. *Sea X un conjunto. Una colección $\tau \subseteq \mathscr{P}(X)$ es una topología para X si cumple las siguientes condiciones:*

1. $X, \emptyset \in \tau$
2. *Para todos $A, B \in \tau$, $A \cap B \in \tau$*
3. *Para todo $\mathscr{U} \subseteq \tau$, $\bigcup \mathscr{U} \in \tau$.*

El par ordenado (X, τ) recibe el nombre de *espacio topológico* y los elementos de τ son llamados *conjuntos abiertos*. Los conjuntos que son complementos de abiertos se llaman *cerrados* y, naturalmente, sus propiedades cumplen una dualidad respecto a las propiedades de los abiertos. Por otra parte, dado un subconjunto $C \subseteq X$, se denota el conjunto de los abiertos de (X, τ) que contienen a C como: $\tau(C, X) = \{U \in \tau : C \subseteq U\}$. Cuando $C = \{x\}$ para algún $x \in X$, escribiremos: $\tau(x, X)$.

En la mayoría de las ocasiones, cuando no haya peligro de confusión respecto a la topología que posee el conjunto X, simplemente escribiremos las frases "X es un espacio topológico" o "X es un espacio". Debido a que el conjunto vacío sólo tiene una topología (a saber $\tau = \{\emptyset\}$), siempre asumiremos que los espacios topológicos son no vacíos; es decir, que $X \neq \emptyset$. También es importante mencionar que cuando decimos que X es un espacio finito o infinito, hacemos referencia a la cardinalidad de X, no de su topología.

Otros conjuntos a los que haremos mención en repetidas ocasiones son las vecindades para un punto. Estos conjuntos se definen de la siguiente manera:

Definición 1.1.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. A un subconjunto V de X se le denomina vecindad de x en (X, τ) si y sólo si existe $U \in \tau(x, X)$ tal que $U \subseteq V$.*

Al conjunto formado por todas las vecindades de x lo llamamos *filtro de vecindades de x en (X, τ)* y lo denotamos por $\mathscr{V}(x)$. Cuando mencionamos la frase "vecindad abierta", es para referirnos a que un conjunto, además de ser una vecindad para un punto, también es un abierto. Evidentemente, todo elemento $U \in \tau(x, X)$ es vecindad de x en (X, τ). De hecho, un conjunto es abierto si y sólo si es vecindad de cada uno de sus elementos.

Ejemplos 1.1.3 (Algunas topologías importantes)**.**

1. *Sea X un conjunto. Los conjuntos $\{\emptyset, X\}$ y $\mathscr{P}(X)$ son siempre topologías en X y reciben los nombres de «topología indiscreta» y «topología discreta» respectivamente.*

2. *Sea (X, d) un espacio pseudométrico*[1]*. Para todo $x \in X$ y $r > 0$ se define la «bola abierta con centro en x y radio r» como el conjunto: $B_d(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$*

   Resulta que para todo espacio pseudométrico (X, d), la colección

   $$\tau_d = \{U \subseteq X : \forall x \in U\,(\exists r > 0(B_d(x, r) \subseteq U))\}$$

   es una topología en X. La topología τ_d recibe el nombre de «topología en X generada por d».

3. *En el caso de $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidiana $e((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$, la topología τ_e suele denotarse como $\tau_{\mathbb{R}^n}$ y se le conoce como «topología usual de $\mathbb{R}^n$». Cuando no especificamos la topología que tiene $\mathbb{R}^n$, se asume que está dotado con su topología usual.*

4. *El espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_S)$ donde $\tau_S = \{U \subseteq \mathbb{R} : \forall x \in U(\exists r > 0([x, x + r) \subseteq U))\}$ es conocido como «línea o recta de Sorgenfrey».*

---

[1] Recuerde que dado un conjunto Y, una pseudométrica en Y es una función $\rho : Y \times Y \longrightarrow [0, \infty)$ que cumple las siguientes condiciones: Para todos $x, y, x \in Y$

a) $\rho(x, x) = 0$, *b)* $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, *c)* $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Cuando ρ es una pseudométrica en Y, la pareja ordenada (Y, ρ) recibe el nombre de *espacio pseudométrico*.

5. *De manera natural, un espacio topológico* (X, τ) *puede proveer de una topología a cada uno de sus subconjuntos de la siguiente manera: dado* $Y \subseteq X$*, el conjunto* $\tau \restriction Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$ *es siempre una topología en* Y*. La topología* $\tau \restriction Y$ *recibe el nombre de topología de subespacio y diremos que* $(Y, \tau \restriction Y)$ *es un subespacio de* (X, τ)*.*

A pesar de que la topología de los espacios métricos y pseudométricos se define de la misma manera, los espacios métricos se distinguen porque para cualesquiera dos puntos distintos, siempre es posible encontrar un abierto que los "separe". Kolmogorov extrajo esta propiedad de los espacios métricos y la enunció de manera general como *axioma de separación* T_0. De esta manera se creó una primera estratificación de la clase de los espacios topológicos. Más adelante, se introdujeron propiedades más rigurosas para "separar" topológicamente a los elementos de un espacio, las cuales crean diferentes niveles de estratificación. Por supuesto, estas propiedades en conjunto son referidas como *axiomas de separación*.

Definición 1.1.4 (Axiomas de separación)**.** *Sea* (X, τ) *un espacio topológico.*

T_0: *Diremos que* X *es* T_0 *si para todo par de elementos distintos* $x, y \in X$*, existe* $U \in \tau$ *tal que* $|U \cap \{x, y\}| = 1$*.*

T_1: X *es* T_1 *si para todo par de elementos distintos* $x, y \in X$*, existen abiertos* $U, V \in \tau$ *tales que* $x \in U \setminus V$ *y* $y \in V \setminus U$*.*

T_2: X *es* T_2 *o Hausdorff si para todo par de elementos distintos* $x, y \in X$*, existen abiertos ajenos* $U, V \in \tau$ *tales que* $x \in U$ *y* $y \in V$*.*

T_3:
- a) *Decimos que* X *es regular si para todo cerrado* $F \subseteq X$ *y todo* $x \in X \setminus F$*, existen dos abiertos ajenos* $U, V \in \tau$ *de modo que* $x \in U$ *y* $F \subseteq V$*.*
- b) X *es un espacio* T_3 *si es un espacio regular y* T_0*.*

$T_{3\frac{1}{2}}$:
- a) *Decimos que* X *es completamente regular si para todo cerrado* $F \subseteq X$ *y todo* $x \in X \setminus F$*, existe una función continua*[2] $f : X \longrightarrow [0, 1]$ *de modo que* $f(x) = 0$ *y* $f[F] \subseteq \{1\}$*.*
- b) X *es* $T_{3\frac{1}{2}}$ *o Tychonoff si* X *es completamente regular y* T_0*.*

T_4:
- a) *Decimos que* X *es normal si para todo par de cerrados ajenos* $F, G \subseteq X$*, existen dos abiertos ajenos* $U, V \in \tau$ *de modo que* $F \subseteq U$ *y* $G \subseteq V$*.*
- b) X *es un espacio* T_4 *si* X *es normal y* T_1*.*

Para finalizar esta sección, recordemos que en todo espacio existen subconjuntos que están presentes en todo abierto no vacío: los conjuntos *densos*. A saber, un subconjunto D de un espacio (X, τ) es *denso en* X si y sólo si para todo $U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ se cumple que $U \cap D \neq \emptyset$. Resulta interesante analizar la cantidad mínima de elementos que puede tener un conjunto denso en un espacio, por eso introducimos la siguiente definición.

[2] Una función $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios X y Y es continua si y sólo si para todo abierto U de Y se cumple que $f^{-1}[U]$ es abierto en X.

Definición 1.1.5. *Sea X un espacio topológico.*

1. *Se define la densidad de X como el número cardinal:*

$$d(X) = \text{mín}\{|D| : D \text{ es denso en } X\}.$$

2. *Decimos que X es separable si y sólo si $d(X) \leq \omega$. Es decir, un espacio es separable si contiene un subconjunto denso numerable.*

De esta manera tenemos lo siguiente: para todo espacio topológico X, $d(X) \leq |X|$. Como consecuencia, todo espacio numerable es separable.

Para espacios Hausdorff, es posible acotar la cardinalidad del espacio usando su densidad. En la siguiente proposición se enuncia y se demuestra este hecho.

Proposición 1.1.6. *Para todo espacio Hausdorff X, $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$.*

Demostración: Fijemos un subconjunto denso D de X de modo que $|D| = d(X)$. Para cada $x \in X$, definamos el conjunto $D_x = \{A \subseteq D : x \in \overline{A}\} \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(D))$. Dado que X es Hausdorff, si $x, y \in X$ son distintos, podemos fijar abiertos ajenos U y V de modo que $x \in U$ y $y \in V$. Resulta que $x \in \overline{U \cap D}$ porque si W es cualquier vecindad abierta de x en X, entonces $W \cap U$ es un abierto no vacío, por lo que $W \cap (U \cap D) \neq \emptyset$. Por otra parte, $y \notin \overline{U \cap D}$ puesto que V es una vecindad abierta de y para la cual $V \cap (U \cap D) = \emptyset$. Entonces el conjunto $U \cap D \in D_x$ pero $U \cap D \notin D_y$, y de esta manera, $D_x \neq D_y$ para todo par de elementos distintos x y y. Para finalizar, considere la función inyectiva $f : X \longrightarrow \mathscr{P}(\mathscr{P}(D))$ definida por medio de la regla: $f(x) = D_x$ $(x \in X)$. Por lo tanto, $|X| \leq |\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))| = 2^{2^{d(X)}}$. ■

1.2. Bases, subbases, bases locales y axiomas de numerabilidad.

En un espacio vectorial siempre es posible hallar por lo menos un conjunto que contenga toda la información del espacio. En los espacios topológicos ocurre algo similar y, al igual que en los espacios vectoriales, estos conjuntos reciben el nombre de *bases*. Una de las ventajas de la estructura de los espacios topológicos es que en ellos también existen colecciones de subconjuntos que pueden definir a una base; estos son llamados *subbases*.

Definición 1.2.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

- *Un conjunto $\mathscr{B} \subseteq \tau$ es base para (X, τ) (o simplemente base para τ) si y sólo si para todo $U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ y para todo $x \in U$ existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$. Los elementos de una base son llamados abiertos básicos.*

- *Por otra parte, un conjunto $\mathcal{S} \subseteq \tau$ es una subbase de τ si y sólo si la colección $\mathscr{B} = \{\bigcap F : F \subseteq \mathcal{S}$ es finito y no vacío$\}$ es una base para τ.*

Observe que toda topología es base para sí misma, de hecho, es la base más grande (en cardinalidad) que tiene. Esto nos lleva a preguntarnos si una base para un espacio debe tener un número mínimo de elementos. Con esto en mente es que se define el peso de un espacio.

Definición 1.2.2. *Sea X un espacio topológico.*

1. *Se define el peso de X como el número cardinal:*

$$w(X) = \text{mín}\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \text{ es base para } X\}.$$

2. *Además, diremos que un espacio X es segundo numerable (o 2AN) si y sólo si $w(X) \leq \omega$. En otras palabras, X es segundo numerable si tiene una base numerable.*

Es inmediato notar que todo espacio finito es 2AN; más aún, todo espacio cuya topología es finita es 2AN.

Por otra parte, si suponemos que (X, τ) es cualquier espacio, $Y \subseteq X$ está dotado con la topología de subespacio $\tau \upharpoonright Y$ y $\mathscr{B}$ es una base para X, entonces el conjunto $\mathscr{B} \upharpoonright Y = \{B \cap Y : B \in \mathscr{B}\}$ es una base para Y. En particular, si $\mathscr{B}$ es tal que $|\mathscr{B}| = w(X)$, lo anterior implica que $w(Y) \leq |\mathscr{B} \upharpoonright Y| \leq |\mathscr{B}| = w(X)$; esto nos dice que *el peso es monótono*. Ahora, ya que sabemos que el peso es monótono, si además agregamos la suposición de que X es 2AN, tenemos que cualquiera de sus subespacios también lo es. Es decir, la clase de los espacios 2AN es cerrada bajo subespacios.

Otra propiedad interesante sobre el peso es que es *invariante bajo homeomorfismos* [3]; esto es, si X y Y son espacios homeomorfos, entonces $w(X) = w(Y)$. Esto nos lleva a que la clase de espacios 2AN es cerrada bajo homeomorfismos.

En vista de que toda base de un espacio induce un subconjunto denso que no sobrepasa su cardinalidad, obtenemos que la densidad del espacio está acotada por su peso. Dicho de otro modo, para todo espacio X: $d(X) \leq w(X)$. Esta es la razón de todo espacio 2AN sea separable. No es difícil verificar que en el caso de los espacios métricos estas dos condiciones son equivalentes.

A lo largo de este trabajo se hace uso de manera recurrente de la siguiente proposición que nos dice que un conjunto que cumple ciertas propiedades es candidato a ser base o subbase para una topología.

Proposición 1.2.3. *Sea $X \neq \emptyset$.*

1. *Si $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ es tal que:*

   a) $\bigcup \mathscr{B} = X$;

   b) *Para todo par de elementos $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ y para todo $x \in B_1 \cap B_2$ existe $B_3 \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$*

   entonces existe una única topología en X para la cual $\mathscr{B}$ es base. La topología en X para la cual $\mathscr{B}$ es base es llamada topología generada por $\mathscr{B}$.

[3] Recuerde que un homeomorfismo entre espacios es una función biyectiva, continua y con inversa continua; lo que es equivalente a que la función sea biyectiva, continua y abierta (o cerrada).

2. *Si $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{P}(X)$ es una cubierta de X, entonces existe una única topología en X para la cual $\mathcal{S}$ es subbase.*

Al inicio de esta sección mencionamos que las bases son colecciones que contienen toda la información de un espacio. También es posible encontrar colecciones que contengan información del espacio de manera local: las bases de vecindades.

Definición 1.2.4. *Sean (X, τ) un espacio topológico, $x \in X$ y $\mathscr{B}(x) \subseteq \mathscr{V}(x)$.*

1. *Decimos que $\mathscr{B}(x)$ es una base de vecindades de x en (X, τ) si y sólo si para todo $U \in \mathscr{V}(x)$ existe $B \in \mathscr{B}(x)$ de modo que $B \subseteq U$.*

2. *$\mathscr{B}(x)$ es una base local de x en (X, τ) si y sólo si $\mathscr{B}(x)$ es una base de vecindades de x en (X, τ) formada únicamente de conjuntos abiertos.*

Por último, diremos que un espacio (X, τ) es *primero-numerable (o 1AN)* si todo elemento de X tiene una base de vecindades numerable (o equivalentemente, una base local numerable). Nótese que todo espacio segundo-numerable es primero-numerable. La implicación contraria no siempre es verdadera; por ejemplo, la recta de Sorgenfrey es 1AN pero no es 2AN (de hecho, $w(\mathbb{R}, \tau_S) = \mathfrak{c}$).

1.3. Funciones continuas y topología producto.

En esta sección recordamos brevemente la definición de continuidad, así como la construcción de la topología producto.

Definición 1.3.1 (Continuidad)**.** *Sean (X, τ) y (Y, θ) espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función.*

1. *Decimos que f es continua en un punto $x \in X$ si y sólo si para toda vecindad V de $f(x)$ en (Y, θ) existe una vecindad U de x en (X, τ) tal que $f[U] \subseteq V$.*

2. *Adicionalmente, diremos que f es continua si y sólo si f es continua para todo $x \in X$.*

La anterior definición de continuidad es equivalente a que f regresa abiertos de (Y, θ) en abiertos de (X, τ).

Además, una función entre espacios es *abierta* (o *cerrada*) si la imagen directa de todo conjunto abierto(respectivamente cerrado) del dominio es un conjunto abierto (respectivamente cerrado) en el contradomio. Un *homeomeomorfismo* es una función biyectiva, continua y con inversa continua; o equivalentemente, una función biyectiva, continua y abierta (o cerrada). Una *inmersión* o *encaje* es una función tal que, al restringir el contradomio a su imagen (con su topología de subespacio), es un homeomorfismo.

A continuación, recordamos la construcción de la topología producto.

Definición 1.3.2. *Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in J\}$ una colección no vacía de espacios topológicos no vacíos y, para $\beta \in J$, sea $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \longrightarrow X_\beta$ la función proyección asociada a la coordenada β, cuya regla de asociación es: $\pi_\beta(f) = f(\beta)$. Se define en $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ a la topología producto de Tychonoff τ_{Tych} (o simplemente topología producto) como la topología generada por la subbase $\mathcal{S} = \{\pi_\alpha^{-1}[U_\alpha] : \alpha \in J \wedge U_\alpha \in \tau_\alpha\}$.*

La base canónica para $\left(\prod_{\alpha \in J} X_\alpha, \tau_{Tych}\right)$ es:

$$\mathscr{B} = \left\{\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[U_{\alpha_i}] : n \in \mathbb{N}, \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subseteq J \text{ y } U_{\alpha_i} \in \tau_{\alpha_i} \text{ para todo } i = 1, ..., n\right\}$$

y sus elementos son llamados *abiertos básicos canónicos.*

Por último, recuerde que un espacio X es compacto si toda cubierta abierta X tiene una subcubierta finita. El siguiente teorema es crucial en topología.

Teorema 1.3.3 (Tychonoff)**.** *Si $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in J\}$ es una colección no vacía de espacios compactos, entonces el producto topológico $\left(\prod_{\alpha \in J} X_\alpha, \tau_{Tych}\right)$ es compacto.*

1.4. La cardinalidad de un compacto Hausdorff 1AN es numerable o igual a $\mathfrak{c}$

El objetivo de esta sección, como su nombre lo indica, es demostrar que todo espacio compacto Hausdorff 1AN, tiene cardinalidad numerable o exactamente $\mathfrak{c}$. La razón de agregar esta sección es que este material no suele ser conocido y muchos de estos resultados son usados en el capítulo: "El teorema de Hodel". Cabe mencionar que todo el material de esta sección está basado en [27], [28] y [29].

Lema 1.4.1. *Suponga que X es un espacio Hausdorff 1AN. Si $A \subseteq X$ tiene cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$, entonces $|\overline{A}| \leq \mathfrak{c}$.*

Demostración: Como X es 1AN, para cada elemento $x \in \overline{A}$ podemos fijar una sucesión $f_x : \omega \longrightarrow A$ de modo que $\lim_{n \longrightarrow \infty} f_x(n) = x$. Ahora definamos la función $\phi : \overline{A} \longrightarrow A^\omega$ por medio de la regla $\phi(x) = f_x$. Por último, de la hipótesis de que X es Hausdorff se sigue que el espacio es de convergencia única, lo que implica que la función ϕ es inyectiva. Por lo tanto, $|\overline{A}| \leq |A^\omega| \leq \mathfrak{c}$. ■

Es fácil darse cuenta de que el lema anterior es válido para espacios Frechet-Urysohn de convergencias únicas.

Proposición 1.4.2. *(Arkhangel'skii) Si X es un espacio Lindelöf, Hausdorff y 1AN, entonces $|X| \leq \mathfrak{c}$.*[4]

[4] El resultado de Arkhangel'skii es más general. Este dice que si X es un espacio Hausdorff, entonces $|X| \leq 2^{L(X) \cdot \chi(X)}$.

Demostración: Como X es primero numerable, para cada elemento $x \in X$ fijemos una base local numerable $\mathscr{B}(x) = \{B(x,n) : n \in \omega\}$. Entonces, dado que el espacio es T_1, para todo $x \in X$ se cumple lo siguiente: $\{x\} = \bigcap \mathscr{B}(x) = \bigcap_{n\in\omega} B(x,n)$.

A continuación vamos a construir por medio de recursión transfinita sobre el ordinal ω_1, un conjunto $\{X_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de cerrados de X que cumple las siguientes propiedades:

(1) $\{X_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es creciente; es decir, $X_\gamma \subseteq X_\beta$ para todos $\gamma < \beta < \omega_1$;

(2) $|X_\alpha| \leq \mathfrak{c}$ para todo $\alpha < \omega_1$.

Construcción del conjunto $\{X_\alpha : \alpha < \omega_1\}$*:*

- Para el ordinal $\alpha = 0$, fijemos un punto $x_0 \in X$ y definamos el conjunto $X_0 = \{x_0\}$. Claramente X_0 es un cerrado de X y cumple que $|X_0| \leq \mathfrak{c}$.

- Ahora supongamos que para un ordinal $\alpha < \omega_1$ con $\alpha > 0$ tenemos construida una colección de conjuntos cerrados $\{X_\beta : \beta < \alpha\}$ de X de tal manera que: $|X_\beta| \leq \mathfrak{c}$ y, si $\gamma < \beta < \alpha$, entonces $X_\gamma \subseteq X_\beta$.

  Para el ordinal α tenemos los siguientes casos:

  - *Caso 1:* α es un ordinal límite.
    En este caso, definimos $X_\alpha = \overline{\bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta}$. Es claro que X_α es un subconjunto cerrado de X. Además, si $\gamma < \alpha$, entonces $X_\gamma \subseteq X_\alpha$. Por último, como $|\bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta| \leq \omega_1 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$, del lema anterior se sigue que $|X_\alpha| \leq \mathfrak{c}$.

  - *Caso 2:* α es un ordinal sucesor.
    Sea $\beta < \alpha$ tal que $\alpha = \beta + 1$. Y consideremos el conjunto:

    $$\mathscr{B} = \bigcup_{x\in X_\beta} \mathscr{B}(x) = \{B(x,n) : x \in X_\beta \wedge n \in \omega\}.$$

    Por hipótesis de inducción $|X_\beta| \leq \mathfrak{c}$; por lo que $|\mathscr{B}| \leq \mathfrak{c} \cdot \omega = \mathfrak{c}$.
    Ahora definimos el conjunto:

    $$\mathscr{F} = \{D \in [\mathscr{B}]^{\leq\omega} : X_\beta \subseteq \bigcup D \wedge X \setminus \bigcup D \neq \emptyset\}.$$

    Para $\mathscr{F}$ tenemos los siguientes casos:

    - $\mathscr{F} = \emptyset$: En este caso, se afirma que $X_\beta = X$. Efectivamente: si existiera un elemento $y \in X \setminus X_\beta$, entonces, es claro que para todo $x \in X_\beta$: $y \notin \{x\} = \bigcap_{n\in\omega} B(x,n)$; es decir que, para todo $x \in X_\beta$ existe $n(x) \in \omega$ de modo que $y \notin B(x, n(x))$. Por otra parte, como X_β es cerrado en X, X_β es Lindelöf. Así que para la cubierta abierta $\{B(x,n(x)) : x \in X_\beta\}$ de X_β, debe existir una subcubierta numerable $D = \{B(x_m, n(x_m)) : x_m \in X_\beta \wedge m \in \omega\}$. Ahora, por la suposición de que $\mathscr{F} = \emptyset$, necesariamente $X \setminus \bigcup D = \emptyset$; lo

que implica que $X = \bigcup D$. Entonces, dado que $y \in X = \bigcup D$, existe un $x_m \in X_\beta$ tal que $y \in B(x_m, n(x_m))$ lo cual contradice la elección de los conjuntos $B(x, n(x))$. Por lo tanto, debe ocurrir que $X = X_\beta$.
Para finalizar este subcaso, definimos $X_\alpha = X = X_\beta$ el cual es cerrado en X, de cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$ y tal que $X_\gamma \subseteq X_\alpha$ para todo $\gamma < \alpha$.

- $\mathscr{F} \neq \emptyset$: Para cada colección numerable $D \in \mathscr{F}$ fijemos un elemento $x_D \in X \setminus \bigcup D$ y definamos $Y = \{x_D : D \in \mathscr{F}\}$. Debido a que $\mathscr{B}$ tiene cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$, el conjunto $[\mathscr{B}]^{\leq\omega}$ también tiene cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$; por lo que $|\mathscr{F}| \leq \mathfrak{c}$ y, en consecuencia, $|Y| \leq \mathfrak{c}$. Por último, definamos $X_\alpha = \overline{X_\beta \cup Y}$. Es evidente que X_α es cerrado en X y $X_\gamma \subseteq X_\alpha$ para todo $\gamma < \alpha$. Además, $|X_\beta \cup Y| \leq \mathfrak{c}$, lo que implica, por el lema anterior, que $|X_\alpha| \leq \mathfrak{c}$.

Con esto terminamos la construcción recursiva de los conjuntos $\{X_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.

Ahora definamos $X^* = \bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$. Es fácil darse cuenta de que $|X^*| \leq \mathfrak{c}$. Para finalizar, demostraremos que $X = X^*$, para lo cual demostraremos que X^* es un cerrado de X.

Supongamos que x es un punto de acumulación de X^* en X. Por la hipótesis de que X es 1AN, existe una sucesión $f : \omega \longrightarrow X^*$ de modo que $\lim_{n\longrightarrow\infty} f(n) = x$. Para cada $n \in \omega$ podemos fijar un ordinal $\alpha(n) < \omega_1$ tal que $f(n) \in X_{\alpha(n)}$. Sea $\alpha = \sup\{\alpha(n) : n \in \omega\}$. Entonces $\{f(n) : n \in \omega\} \subseteq X_{\alpha+1}$ y, como $X_{\alpha+1}$ es cerrado, obtenemos que $x \in X_{\alpha+1} \subseteq X^*$. De aquí se concluye que X^* es cerrado en X.

Para demostrar que $X = X^*$, supongamos para generar una contradicción que existe un elemento $y \in X \setminus X^*$. Entonces, para todo $x \in X^*$: $y \notin \{x\} = \bigcap_{n\in\omega} B(x, n)$; por lo cual, para todo $x \in X^*$ existe $n(x) \in \omega$ tal que $y \notin B(x, n(x))$. Como el espacio X^* es Lindelöf (por ser cerrado en X), para la cubierta abierta $\{B(x, n(x)) : x \in X^*\}$ existe una subcubierta numerable $\{B(x_m, n(x_m)) : x_m \in X^* \wedge m \in \omega\}$. Ahora, debido a que la colección $\{x_m \in X^* : m \in \omega\}$ es numerable, existe un ordinal $\beta < \omega_1$ de modo que $\{x_m \in X^* : m \in \omega\} \subseteq X_\beta$. Consideremos al ordinal sucesor $\alpha = \beta + 1$ y a la familia $D = \{B(x_m, n(x_m)) : x_m \in X_\beta \wedge m \in \omega\}$. Observe que $X_\beta \subseteq X^* \subseteq \bigcup D$ y $X \setminus \bigcup D \neq \emptyset$ (porque $y \in X \setminus \bigcup D$); así que, por lo ya hecho en el caso (2) subcaso $\mathscr{F} \neq \emptyset$, podemos considerar al respectivo elemento $x_D \in X \setminus \bigcup D$. Entonces $x_D \in X_\beta \cup Y \subseteq X^*$ pero $x_D \notin \bigcup D \supseteq X^*$ lo cual es una contradicción. Así, $X = X^*$ y por lo tanto, $|X| \leq \mathfrak{c}$. ■

Corolario 1.4.3. *Todo espacio compacto Hausdorff primero-numerable tiene cardinalidad menor o igual que* $\mathfrak{c}$.

Podemos demostrar que cualquier espacio compacto Hausdorff con puntos G_δ tiene cardinalidad $\leq \mathfrak{c}$. Para ello, necesitamos probar que estos espacios son 1AN y, después, aplicar la proposición 1.4.2. Es por esto que necesitamos el siguiente lema.

Lema 1.4.4. *Todo espacio X numerablemente compacto, T_3 y cuyos puntos son G_δ, es 1AN.*

Demostración: Como X es G_δ, para cada $x \in X$ fijemos una colección numerable $\mathscr{U}(x) = \{U(x,n) : n \in \omega\}$ de abiertos tales que $\{x\} = \bigcap_{n\in\omega} U(x,n)$.

Sea $x \in X$ arbitrario pero fijo. Por la regularidad de X, para el abierto $U(x,0)$ podemos fijar un abierto $W(x,0)$ que cumple: $x \in W(x,0) \subseteq \overline{W(x,0)} \subseteq U(x,0)$. Supongamos ahora que $n > 0$ y que tenemos construidos los abiertos $W(x,0), \ldots, W(x,n-1)$ tales que para todo $j = 1, ..., n-1$:

$$x \in W(x,j) \subseteq \overline{W(x,j)} \subseteq W(x,j-1) \cap U(x,j).$$

Nuevamente, por la regularidad de X, podemos fijar un abierto $W(x,n)$ tal que:

$$x \in W(x,n) \subseteq \overline{W(x,n)} \subseteq W(x,n-1) \cap U(x,n).$$

Entonces:

- $\{x\} = \bigcap_{n\in\omega} \overline{W(x,n)} = \bigcap_{n\in\omega} W(x,n) = \bigcap_{n\in\omega} U(x,n)$;
- $W(x,0) \supseteq W(x,1) \supseteq \cdots \supseteq W(x,n) \supseteq \cdots$

Se afirma que la colección $\{W(x,n) : n \in \omega\}$ es una base local de x. Para probarlo, vamos a suponer lo contrario. Entonces, existe un abierto U con $x \in U$ tal que para todo $n \in \omega$: $W(x,n) \nsubseteq U$; así que para cada $n \in \omega$ podemos fijar un elemento $z_n \in W(x,n) \setminus U$. Si el conjunto $\{z_n : n \in \omega\}$ fuera finito, existiría $k \in \omega$ de modo que para todo $m \geq k$: $z_m = z_k$; lo que implica que para todo $m \geq k$: $z_k \in W(x,m)$. Pero por la construcción de la familia $\{W(x,n) : n \in \omega\}$, tenemos que: $z_k \in W(x,k) \subseteq W(x,k-1) \subseteq \cdots \subseteq W(x,0)$. Y entonces, $z_k \in \bigcap_{n\in\omega} W(x,n) = \{x\}$ lo que es imposible porque $z_k \notin U$ y $x \in U$. Por ello, $\{z_n : n \in \omega\}$ debe ser infinito. Dado que el espacio X es numerablemente compacto y T_1, el conjunto infinito $\{z_n : n \in \omega\}$ debe tener un punto de acumulación y. Es fácil darse cuenta de que para todo $m \in \omega$, y también es punto de acumulación del conjunto $\{z_n : n \geq m\} \subseteq W(x,m)$; y por lo tanto, $y \in \overline{W(x,m)}$. Entonces, $y \in \bigcap_{m\in\omega} \overline{W(x,m)} = \{x\}$ con lo que $y = x$. Ahora note que U es un abierto que tiene a x y, siendo x un punto de acumulación de $\{z_n : n \in \omega\}$, debe existir un elemento $z_k \in U \setminus \{x\}$ lo que contradice la elección de z_k. Por lo tanto, debe existir $m \in \omega$ tal que $W(x,m) \subseteq U$. Esto termina la prueba de que $\{W(x,n) : n \in \omega\}$ es una base local de x.

Por último, como x fue arbitrario, podemos concluir que X es un espacio 1AN. ∎

Corolario 1.4.5. *Todo espacio compacto Hausdorff con puntos G_δ es 1AN.*

En el siguiente corolario se aplica la proposición 1.4.2.

Corolario 1.4.6. *Todo compacto Hausdorff con puntos G_δ, tiene cardinalidad menor o igual que $\mathfrak{c}$.*

El objetivo ahora es probar que todo compacto Hausdorff 1AN o tiene cardinalidad numerable o tiene cardinalidad exactamente $\mathfrak{c}$. Con este objetivo en mente es que exponemos las siguientes nociones y resultados.

Definición 1.4.7. *Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Diremos que un elemento $x \in X$ es un punto de acumulación completa especial de A si y sólo si para cualquier abierto U de X con $x \in U$, se tiene que $U \cap A$ es no numerable.*

Lema 1.4.8. *Sea X un espacio Lindelöf no numerable. Entonces X tiene un punto de acumulación completa especial.*

Demostración: Supongamos por el contrario que ningún punto de X es de acumulación completa especial. Entonces, para todo $x \in X$ podemos fijar un abierto U_x con $x \in U_x$ y $U_x \cap X = U_x$ numerable. Consideremos la cubierta abierta de X, $\mathscr{U} = \{U_x : x \in X\}$. Por la hipótesis de que el espacio es Lindelöf, existe $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq X$ de modo que el conjunto $\mathscr{V} = \{U_{x_n} : n \in \omega\}$ es una subcubierta numerable de $\mathscr{U}$. De este modo, $X = \bigcup \mathscr{V} = \bigcup_{n\in\omega} U_{x_n}$ es una unión numerable de conjuntos numerables, y por lo tanto, X es numerable. Esto último contradice la cardinalidad de X.

Por lo tanto, X tiene al menos un punto de acumulación completa especial. ■

Lema 1.4.9. *Sea X un espacio no numerable, Lindelöf, T_1 y 1AN. Entonces X tiene al menos dos puntos de acumulación completa especiales.*

Demostración: Por el lema anterior, X tiene al menos un punto de acumulación completa especial, digamos x. Fijemos una base local numerable $\mathscr{B}(x) = \{B_n : n \in \omega\}$ de x. Dado que el espacio es T_1, $\{x\} = \bigcap_{n\in\omega} B_n$. Ahora, como $X \setminus \{x\}$ es no numerable y $X \setminus \{x\} = \bigcup_{n\in\omega} X \setminus B_n$, existe $m \in \omega$ de modo que $X \setminus B_m$ es no numerable. Note que $X \setminus B_m$ es cerrado y, por lo tanto, es Lindelöf. Haciendo uso de la proposición anterior (1.4.8), el subespacio $X \setminus B_m$ tiene un punto de acumulación completa, supongamos y. Finalmente, bastará argumentar que y también es punto de acumulación completa especial de X; pero esto es sencillo porque si suponemos que U es cualquier abierto de X que tiene a y, entonces $U \cap (X \setminus B_m)$ es infinito no numerable, lo que implica que $U = U \cap X$ también lo es. Por lo tanto, x y y son puntos de acumulación completa especiales de X. ■

Lema 1.4.10. *Si X es un espacio no numerable, compacto, Hausdorff y 1AN, entonces X tiene dos subespacios compactos no numerables y ajenos.*

Demostración: Por el lema anterior, X tiene dos puntos de acumulación completa especial, supongamos x y y. Usando el hecho de que X es compacto Hausdorff, podemos fijar dos abiertos U y V de X tales que: $x \in U$, $y \in V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Por la suposición de que x y y son puntos de acumulación completa especial, los abiertos U y V deben ser no numerables, lo que implica que los compactos $\overline{U}$ y $\overline{V}$ también lo son. ■

En la prueba de la siguiente proposición usaremos la construcción del conjunto de Cantor. A continuación introducimos la notación.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, S_n denota el conjunto de sucesiones de longitud n de ceros y unos. Es decir,

$S_1 = \{0, 1\}$, $S_2 = \{00, 01, 10, 11\}$, $S_3 = \{000, 001, 010, 100, 011, 110, 101, 111\}$, etc.

Si g es cualquier elemento de S_n, entonces g define a dos elementos de S_{n+1}, a saber, $g0$ y $g1$; donde $g0$ y $g1$ son las concatenaciones adjuntando al final de g un 0 o un 1 respectivamente. Por ejemplo: si $g = \underbrace{000001\ldots001}_{n}$, entonces $g0 = \underbrace{000001\ldots0010}_{n+1}$ y $g1 = \underbrace{000001\ldots0011}_{n+1}$.

Si $f \in 2^\omega$ es cualquiera y $n \in \mathbb{N}$, entonces f_n denotará a la sucesión de longitud n formada por los ceros y unos obtenidos al evaluar a f en los primeros n valores; es decir, $f_n = f(0)f(1)f(2)\ldots f(n-1)$.

Proposición 1.4.11. *Si X es un espacio no numerable, compacto, Hausdorff y 1AN, entonces X tiene un subespacio compacto K tal que $|K| = \mathfrak{c}$.*

Demostración: El corolario 1.4.3 menciona que la cardinalidad de todo espacio compacto Hausdorff primero numerable, es a lo más $\mathfrak{c}$; por lo que probaremos que existe un subespacio compacto K de X de modo que $|K| \geq \mathfrak{c}$.

Dado que X es no numerable, compacto, Hausdorff y 1AN, usaremos el lema 1.4.10 para construir una sucesión de subconjuntos no numerables de X que son compactos y ajenos. Comenzamos la construcción de dicha sucesión:

Aplicando el lema 1.4.10 a X, fijamos dos subconjuntos B_0 y B_1 de X que son no numerables, compactos y ajenos. Note que B_0 y B_1 como subespacios de X son no numerables, compactos, Hausdorff y 1AN; por lo que es natural pensar en volver a usar el lema 1.4.10 en ambos conjuntos. Supongamos entonces que $B_{00}, B_{01} \subseteq B_0$ y $B_{10}, B_{11} \subseteq B_1$ son fijos, no numerables, compactos y ajenos dos a dos. Ahora supongamos que $n \in \mathbb{N}$ es arbitrario y que para cada $g \in S_n$ tenemos construido al conjunto B_g que es no numerable, compacto y ajeno con B_j (para todo $j \in S_n \setminus \{g\}$). Entonces, dada $g \in S_n$, podemos aplicar el lema 1.4.10 al conjunto B_g y fijar a los conjuntos B_{g0} y B_{g1} contenidos en B_g de manera que: son no numerables, compactos y ajenos entre sí.

Definamos $A_0 = X$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $A_n = \bigcup\limits_{g \in S_n} B_g$. Como cada S_n es finito, estos conjuntos resultan ser cerrados en X. Ahora definamos a $K = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} A_n$, el cual es cerrado y, por lo tanto, es compacto.

Finalmente, para demostrar que $|K| \geq \mathfrak{c}$, exhibiremos una función inyectiva $\phi : 2^\omega \longrightarrow K$. Para cada elemento $f \in 2^\omega$, la sucesión $\{B_{f_n} : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión decreciente de cerrados no vacíos (porque son no numerables), por lo que tal sucesión cumple la propiedad de intersección finita. Usando la hipótesis de que X es compacto, tenemos que: para todo $f \in 2^\omega$, $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} B_{f_n} \neq \emptyset$. Así que para cada $f \in 2^\omega$ podemos fijar un elemento $x_f \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} B_{f_n}$, y como $B_{f_n} \subseteq A_n$ (para todo $n \in \mathbb{N}$), se sigue que $x_f \in K$. Entonces definamos $\phi : 2^\omega \longrightarrow K$ por medio de la regla: $\phi(f) = x_f$. Para argumentar que ϕ es inyectiva, podemos suponer que $f, g \in 2^\omega$ son distintos y que $n \in \omega$ es tal que $f(n) \neq g(n)$. Esto último implica que $f_{n+1} \neq g_{n+1}$ y, como consecuencia, $B_{f_{n+1}} \cap B_{g_{n+1}} = \emptyset$, con lo que $\phi(f) = x_f \neq x_g = \phi(g)$.

Por lo tanto, $|K| \geq |2^\omega| = \mathfrak{c}$. ■

Corolario 1.4.12. *Todo espacio compacto Hausdorff 1AN, tiene cardinalidad numerable ó tiene cardinalidad exactamente* $\mathfrak{c}$.

Demostración: Sea X un espacio que cumple las hipótesis. Es claro que respecto a la cardinalidad de X podemos considerar los siguientes casos: X es numerable ó X es no numerable. Si se da el primer caso, terminamos.

Por otra parte, si X es no numerable, por la proposición anterior existe $K \subseteq X$ compacto tal que $|K| = \mathfrak{c}$, con lo que $|X| \geq \mathfrak{c}$. Además, por el corolario 1.4.3, $|X| \leq \mathfrak{c}$. En este caso, $|X| = \mathfrak{c}$. ■

Capítulo 2

Las redes de Arkhangel'skii.

Una de las nociones más básicas en topología es el concepto de base. Como sabemos, todo espacio topológico X tiene una cantidad mínima de elementos para que un conjunto sea una base, esta cantidad mínima recibe el nombre de *peso de* X y se denota: $w(X)$. La clase de los espacios segundo-numerables (2AN) cumple muy buenas propiedades: es cerrada bajo subespacios, homeomorfismos y también bajo productos numerables. Sin embargo, en general no es cierto que: si X es un espacio tal que $X = A \cup B$ y los subespacios A y B son segundo-numerables, entonces X también lo es. En 1951 Arkhangel'skii demostró que cuando X es compacto y Hausdorff, se cumple una finito-aditividad del peso para cualquier cardinal infinito; esto es, si X es un espacio compacto Hausdorff tal que $X = A \cup B$ y κ es un cardinal infinito con $w(A), w(B) \leq \kappa$, entonces $w(X) \leq \kappa$. En su demostración, Arkhangel'skii introdujo una noción que generaliza el concepto de base de un espacio: la noción de red.

En este capítulo introducimos formalmente este concepto y analizamos sus propiedades más básicas. Posteriormente, demostramos el teorema de Arkhangel'skii sobre la aditividad del peso de espacios compactos Hausdorff.

2.1. Redes de subconjuntos

Como ya se mencionó, el concepto de red surge de generalizar el concepto de base para una topología. Recordando la definición de base: dado un espacio topológico (X, τ), diremos que $\mathscr{B} \subseteq \tau$ es base para τ si y sólo si para todo $x \in X$ y todo $U \in \tau(x, X)$ existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$. Cuando quitamos la condición «$\mathscr{B} \subseteq \tau$» obtenemos el concepto de red.

Definición 2.1.1 (Arkhangel'skii)**.** *Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que una colección $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{P}(X)$ es una red de subconjuntos de (X, τ) (o red de X) si para todo $x \in X$ y todo $U \in \tau(x, X)$ existe $N \in \mathscr{N}$ tal que $x \in N \subseteq U$.*

El *peso de red* (o *peso red*) de un espacio (X, τ) es el número cardinal:

$$nw(X, \tau) = \text{mín}\{|\mathscr{N}| : \mathscr{N} \text{ es red de } (X, \tau)\}.$$

Cuando no haya peligro de confusión respecto a la topología de X, a su peso red lo escribiremos como: $nw(X)$.

Es claro que toda base para una topología es una red de subconjuntos, razón por la cual el peso de red es un número cardinal bien definido. Más aún, para todo espacio X se cumple la desigualdad: $nw(X) \leq w(X)$. Por otra parte, para cualquier espacio X, la colección $\mathcal{N} = \{\{x\} : x \in X\}$ es siempre una red de subconjuntos de X[1]; por ello, $nw(X) \leq |X|$.

Las desigualdades $nw(X) \leq |X|$ y $nw(X) \leq w(X)$ implican que los espacios de cardinalidad a lo más numerable, y los espacios que son segundo-numerables, tienen una red a lo más numerable. De hecho, todo espacio con una red numerable, es separable. Esta es la razón de por qué son separables los espacios finitos, los espacios numerables y los espacios segundo-numerables. Este hecho es consecuencia de la siguiente proposición.

Proposición 2.1.2. *Para cualquier espacio topológico (X, τ) se cumplen las siguientes desigualdades:*

$$d(X) \leq nw(X) \leq w(X) \quad y \quad nw(X) \leq |X|.$$

Recuerde que $d(X) = \text{mín}\{|D| : D$ es denso en $X\}$.

Demostración: El lector se dará cuenta de que sólo queda por probar la desigualdad: $d(X) \leq nw(X)$. Para ello, supongamos que $\mathscr{N}$ es una red en X tal que $|\mathscr{N}| = nw(X)$. Para cada $N \in \mathscr{N} \setminus \{\emptyset\}$, fijemos un único elemento $x_N \in N$; y definamos el conjunto $D = \{x_N : N \in \mathscr{N} \setminus \{\emptyset\}\}$. Es claro que $|D| \leq |\mathscr{N}|$. Además, si U es un abierto no vacío de X y x es un elemento de U; entonces, como $\mathscr{N}$ es red, existe $M \in \mathscr{N}$ tal que $x \in M \subseteq U$. Así que el correspondiente x_M cumple lo siguiente: $x_M \in D$ y $x_M \in M \subseteq U$; con lo que $U \cap D \neq \emptyset$. Esto prueba que D es denso en X. Por último, $d(X) \leq |D| \leq |\mathscr{N}| = nw(X)$. ■

Es natural preguntarse si hay espacios en los que las desigualdades de la proposición anterior sean estrictas o en los que se dé la igualdad. A continuación se dan algunos ejemplos.

Ejemplos 2.1.3.

1. *Cualquier espacio X de cardinalidad a lo más numerable que no sea primero numerable cumple que $nw(X) < w(X)$. El abanico numerable cumple esta condición. Recuerde que este espacio se define como el cociente del producto $Y \times \mathbb{N}$ generado por la relación de equivalencia $(x, y) \sim (w, z)$ si y sólo si $(x = 0 = w)$ ó $(x = w \neq 0 \wedge y = z)$; donde el conjunto $Y = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ tiene la topología de subespacio respecto de $\mathbb{R}$ con su topología usual y $\mathbb{N}$ tiene la topología discreta.*

2. *En la línea de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \tau_S)$ sucede que $nw(\mathbb{R}, \tau_S) = w(\mathbb{R}, \tau_S) = \mathfrak{c}$.*

   En efecto: el conjunto $\mathcal{B} = \{[x, x + \frac{1}{n}) : x \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}\}$ es una base para $(\mathbb{R}, \tau_S)$ tal que $|\mathcal{B}| = \mathfrak{c}$, lo que implica que $nw(\mathbb{R}, \tau_S) \leq w(\mathbb{R}, \tau_S) \leq \mathfrak{c}$. Así que sólo queda probar la desigualdad: $\mathfrak{c} \leq nw(\mathbb{R}, \tau_S) = \text{mín}\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N}$ es red de $(\mathbb{R}, \tau_S)\}$; es decir,

[1] Si $x \in X$ y U es cualquier abierto con $x \in U$, entonces $\{x\} \in \mathcal{N}$ y $x \in \{x\} \subseteq U$.

debemos verificar que toda red de subconjuntos de este espacio tiene cardinalidad mayor o igual que $\mathfrak{c}$. *Supongamos, para generar una contradicción, que existe una red* $\mathcal{N}$ *de* $(\mathbb{R}, \tau_S)$ *tal que* $|\mathcal{N}| < \mathfrak{c}$. *Supongamos también que* $\emptyset \notin \mathcal{N}$ *y definamos a los conjuntos* $\mathcal{N}_a = \{N \in \mathcal{N} : N$ *es acotado inferiormente en* $(\mathbb{R}, \leq)\}$ *y* $\mathcal{N}_{na} = \{N \in \mathcal{N} : N$ *no es acotado inferiormente en* $(\mathbb{R}, \leq)\}$. *Si ocurriera que* $\mathcal{N}_a = \emptyset$, *entonces para el abierto* $[0, 1)$ *no existe un elemento* $N \in \mathcal{N}$ *tal que* $0 \in N \subseteq [0, 1)$ *puesto que los elementos de* $\mathcal{N}_{na}$ *son no acotados inferiormente y* $[0, 1)$ *sí lo es; lo que contradice que* $\mathcal{N}$ *es una red de* $(\mathbb{R}, \tau_S)$. *Por el argumento anterior,* $\mathcal{N}_a \neq \emptyset$. *Para cada* $N \in \mathcal{N}_a$ *definimos* $x_N = \text{ínf}(N)$ *y* $A = \{x_N : N \in \mathcal{N}_a\}$. *Es claro que* $|A| \leq |\mathcal{N}_a| \leq |\mathcal{N}| < \mathfrak{c}$, *por lo que* $\mathbb{R} \setminus A \neq \emptyset$. *Fijemos un elemento* $x \in \mathbb{R} \setminus A$ *y observe que para el abierto* $[x, x+1)$ *no existe un elemento* $N \in \mathcal{N}_{na}$ *tal que* $x \in N \subseteq [x, x+1)$. *Como* $\mathcal{N}$ *es red en* $(\mathbb{R}, \tau_S)$ *entonces debe existir* $M \in \mathcal{N}_a$ *tal que* $x \in M \subseteq [x, x+1)$, *pero esta última contención implica que* $x \leq m$ *para todo* $m \in M$, *en particular* $x \leq x_M$, *y como* $x \in \mathbb{R} \setminus A$ *necesariamente debe ocurrir que* $x < x_M$; *así que* $x \in M$ *y* $x < x_M = \text{ínf}(M)$ *lo cual es un absurdo. Por lo tanto, para toda red* $\mathcal{N}$ *de* $(\mathbb{R}, \tau_S)$ *se satisface la desigualdad* $|\mathcal{N}| \geq \mathfrak{c}$ *lo que termina la prueba.*

Por otra parte, sabemos que $(\mathbb{R}, \tau_S)$ *es separable (*$\mathbb{Q}$ *es denso numerable); así que* $d(\mathbb{R}, \tau_S) = \omega$. *Entonces,* $d(\mathbb{R}, \tau_S) < nw(\mathbb{R}, \tau_S)$.

3. *Para todo espacio métrico* (X, τ_d) *se cumple que:* $d(X) = nw(X) = w(X)$.

   Para argumentarlo consideremos los siguientes casos:

   Caso 1: X *es finito.*

   En este caso, X *al ser* T_1, *debe ser un espacio discreto; y por lo tanto,* $d(X) = |X| = w(X)$. *Esto último nos lleva a la igualdad deseada.*

   Caso 2: X *es infinito.*

   Por la proposición anterior: $d(X) \leq nw(X) \leq w(X)$. *Así que, si demostramos la desigualdad* $d(X) \geq w(X)$, *habremos terminado.*

   Sabemos que para todo espacio Hausdorff Y *se satisface la desigualdad:* $|Y| \leq 2^{2^{d(Y)}}$ *(vea la prueba en 1.1.6). Por lo que* X *al ser infinito y Hausdorff, debe tener densidad infinita; es decir,* $d(X) \geq \omega$. *Fijemos a* $D \subseteq X$ *denso en* (X, τ_d) *de modo que* $|D| = d(X)$ *y consideremos el conjunto* $\mathcal{B} = \left\{B_d\left(x, \frac{1}{n}\right) : x \in D \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$. *Es claro que* $\mathcal{B}$ *es base para* (X, τ_d); *y además,* $|\mathcal{B}| = |D| \cdot |\mathbb{N}| \leq |D| = d(X)$, *lo que implica que* $w(X) \leq d(X)$.

   Por lo tanto, $d(X) = nw(X) = w(X)$.

   En el caso particular de $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$: $d(\mathbb{R}) = nw(\mathbb{R}) = w(\mathscr{R}) = \omega < |\mathbb{R}|$.

4. *Si* X *es un espacio indiscreto de cardinalidad* ≥ 2, *entonces* $nw(X) = 1 < |X|$. *Esto muestra que hay clases grades de espacios donde se cumple la desigualdad estricta. Contrario a lo anterior, si tomamos un espacio discreto* Y, *resulta que* $nw(Y) = |Y|$ *porque toda red debe contener al conjunto* $\{\{y\} : y \in Y\}$.

Por cómo se definen las redes de subconjuntos, es de esperarse que su comportamiento pueda ser similar al de las bases. Por ejemplo: una red de un espacio puede definir una red en cada uno de sus subespacios. Efectivamente, si $\mathscr{N}$ es una red de subconjuntos en un espacio (X, τ) y $(Y, \tau \upharpoonright Y)$ es un subespacio cualquiera, entonces, para $y \in Y$ y $U \in \tau \upharpoonright Y(y, Y)$ arbitrarios, es posible fijar un abierto V de X de modo que $U = V \cap Y$. Resulta que $V \in \tau(y, X)$, lo que implica la existencia de un $N \in \mathscr{N}$ tal que $y \in N \subseteq V$. De esta manera, $y \in N \cap Y \subseteq U$. Como y y U fueron arbitrarios, el argumento anterior nos permite concluir que $\mathscr{N} \upharpoonright Y = \{N \cap Y : N \in \mathscr{N}\}$ es una red del subespacio $(Y, \tau \upharpoonright Y)$, tal como sucede con una base. Es relevante mencionar que en el caso de que $\mathscr{N}$ sea una red tal que $|\mathscr{N}| = nw(X)$, entonces, para todo subespacio Y de X: $nw(Y) \leq |\mathscr{N} \upharpoonright Y| \leq |\mathcal{N}| = nw(X)$. Y, por lo tanto, **el peso de red es monótono**.

En cuanto a funciones, las redes de subconjuntos parecen tener mejores características; pues sólo basta con que una función sea continua y suprayectiva para que la imagen directa de una red también sea una red. El argumento es el siguiente: supongamos que $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva entre espacios (X, τ) y (Y, θ) y, que $\mathscr{N}$ es una red de subconjuntos de X. Dados $y \in Y$ y $U \in \theta(y, Y)$ arbitrarios, fijamos $x \in X$ de modo que $f(x) = y$ y es inmediato que $f^{-1}[U] \in \tau(x, X)$ porque f es continua. Entonces existe $N \in \mathscr{N}$ con $x \in N \subseteq f^{-1}[U]$; por lo que $y = f(x) \in f[N] \subseteq U$. En vista de que y y U fueron arbitrarios, lo anterior prueba que el conjunto $f[\mathscr{N}] = \{f[N] : N \in \mathscr{N}\}$ es una red en (Y, θ). Bajo este argumento, si $\mathscr{N}$ tiene la propiedad: $|\mathscr{N}| = nw(X)$; entonces, $nw(Y) \leq |f[\mathscr{N}]| \leq nw(X)$. En otras palabras, **el peso de red no incrementa bajo imágenes continuas**. Por supuesto que cuando X y Y son homeomorfos: $nw(X) = nw(Y)$, y así, **el peso de red es invariante bajo homeomorfismos** (al igual que el peso).

El siguiente resultado nos dice que para espacios que satisfacen el axioma de separación T_0 es posible acotar su cardinalidad por medio de su peso de red.

Proposición 2.1.4. *Sea (X, τ) un espacio T_0. Entonces $|X| \leq 2^{nw(X)}$.*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{N}$ es una red de X con $|\mathcal{N}| = nw(X)$. Para cada $x \in X$ definimos al conjunto $\mathcal{N}_x = \{N \in \mathcal{N} : x \in N\}$. Es claro que $\mathcal{N}_x \in \mathscr{P}(\mathcal{N})$ para todo $x \in X$. Definimos ahora a la función $f : X \longrightarrow \mathscr{P}(\mathcal{N})$ por medio de la regla: $f(x) = \mathcal{N}_x$. Para demostrar que f es inyectiva supongamos que $x, y \in X$ son distintos y arbitrarios. Por el axioma de separación T_0, existe un abierto U de X tal que $|U \cap \{x, y\}| = 1$; entonces $x \in U$ y $y \notin U$, ó $x \notin U$ y $y \in U$. Supongamos que $x \in U$ y $y \notin U$. Como $\mathcal{N}$ es red de X, existe $M \in \mathcal{N}$ tal que $x \in M \subseteq U$. Entonces $y \notin M$. Luego $M \in \mathcal{N}_x$ y $M \notin \mathcal{N}_y$, y por tanto $\mathcal{N}_x \neq \mathcal{N}_y$. El caso $x \notin U$ y $y \in U$ es completamente análogo. Por último, la inyectividad de f implica que $|X| \leq |\mathscr{P}(\mathcal{N})| = 2^{nw(X)}$. ■

Una consecuencia de la proposición anterior es que es equivalente que un espacio T_0 sea infinito con que su peso de red también lo sea. Por ejemplo, $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ tiene peso de red infinito porque es T_0 y $|\mathbb{R}|$ es infinito. La desigualdad no siempre se cumple si se omite el axioma de separación T_0 como ocurre en el caso del espacio $(\mathbb{R}, \{\emptyset, \mathbb{R}\})$ cuyo peso de red es 1.

Observe que la desigualdad $nw(X) \leq w(X)$ implica que el peso también acota la cardinalidad de los espacios T_0. De hecho, el párrafo anterior también es verdadero si cambiamos las palabras "peso de red" por "peso".

2.2. El Teorema de Arkhangel'skii sobre aditividad del peso.

Para demostrar que el peso es finito aditivo en espacios compactos y Hausdorff, necesitaremos el siguiente lema.

Lema 2.2.1. *Para todo espacio Hausdorff (X, τ) existe una familia de abiertos $\mathscr{B}$ que tiene las siguientes propiedades:*

1. $|\mathscr{B}| \leq nw(X, \tau)$,
2. *$\mathscr{B}$ es base de una topología Hausdorff θ de X,*
3. $\theta \subseteq \tau$,
4. $w(X, \theta) \leq nw(X, \tau)$.

Demostración: Supongamos que (X, τ) es un espacio Hausdorff arbitrario. Para X tenemos los siguientes casos:

Si X es finito, por ser Hausdorff y en particular T_1 esto implica que (X, τ) es discreto. En este caso tomamos $\mathscr{B} = \{\{x\} : x \in X\} \subseteq \tau$. Entonces $\mathscr{B}$ es base para la topología $\theta = \tau = \mathscr{P}(X)$ y cumple las propiedades $1 - 4$.

Si X es infinito, por la proposición anterior $nw(X, \tau)$ es infinito. Fijemos una red $\mathscr{N}$ de (X, τ) tal que $nw(X, \tau) = |\mathscr{N}|$ y consideramos el conjunto

$$\mathscr{D} = \{(N_1, N_2) \in \mathscr{N} \times \mathscr{N} : (\exists (U_1, U_2) \in \tau \times \tau)(N_1 \subseteq U_1, N_2 \subseteq U_2 \ \& \ U_1 \cap U_2 = \emptyset)\}.$$

Para probar que $\mathscr{D}$ es no vacío, supongamos que $x, y \in X$ son distintos. Por la hipótesis de que (X, τ) es Hausdorff, existen dos abiertos ajenos U_1 y U_2 tales que $x \in U_1$ y $y \in U_2$; y como $\mathscr{N}$ es red, existen elementos $N_1, N_2 \in \mathscr{N}$ que cumplen que $x \in N_1 \subseteq U_1$ y $y \in N_2 \subseteq U_2$. Así, la pareja $(N_1, N_2) \in \mathscr{D}$. Observe que por la definición de $\mathscr{D}$ se sigue que $|\mathscr{D}| \leq |\mathscr{N} \times \mathscr{N}| = |\mathscr{N}| = nw(X, \tau)$.

Para cada pareja $(N, M) \in \mathscr{D}$ fijamos un solo elemento $(U(N), U(M)) \in \tau^2$ tal que $N \subseteq U(N), M \subseteq U(M)$ y $U(N) \cap U(M) = \emptyset$ y definimos

$$\mathscr{V} = \{U(N), U(M) : (N, M) \in \mathscr{D}\}.$$

Entonces $\mathscr{V}$ está contenido en τ y además $|\mathscr{V}| \leq |\mathscr{D}| \leq nw(X, \tau)$. Definamos a $\mathscr{B}$ como el conjunto formado por todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathscr{V}$. Es claro que $\mathscr{B}$ es cerrado bajo intersecciones finitas, que $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{B}$ y que $|\mathscr{B}| \leq nw(X, \tau)$ [2].

[2] Vea la prueba de la cardinalidad de los subconjuntos finitos de un conjunto infinito

Se afirma que $\mathscr{B}$ es base para una topología Hausdorff θ de X con $\theta \subseteq \tau$. En efecto: Supongamos que $x \in X$ es arbitrario. Como X es infinito, podemos tomar $y \in X$ con $y \neq x$, y debido a que (X, τ) es Hausdorff existen abiertos ajenos V, W tales que $x \in V$ y $y \in W$. También existen elementos $N, M \in \mathscr{N}$ que cumplen que $x \in N \subseteq V$, $y \in M \subseteq W$; entonces la pareja (N, M) está en $\mathscr{D}$ y así podemos considerar a los respectivos conjuntos $U(N), U(M)$ que son elementos de $\mathscr{V}$. Entonces $x \in U(N)$ y $U(N) \in \mathscr{B} \subseteq \bigcup \mathscr{B}$. Como x fue arbitrario, se sigue que $X \subseteq \bigcup \mathscr{B}$. Luego, $X \subseteq \bigcup \mathscr{B}$ junto con el hecho de que $\mathscr{B}$ es cerrado bajo intersecciones finitas implican que $\mathscr{B}$ es base para una topología θ de X. Observe que por construcción $\mathscr{B} \subseteq \tau$ y consecuentemente $\theta \subseteq \tau$.

Para probar que (X, θ) es Hausdorff supongamos que $a, b \in X$ son distintos y arbitrarios. Análogo a un razonamiento anterior, por la propiedad de que (X, τ) es Hausdorff podemos garantizar la existencia de conjuntos ajenos $A, B \in \tau$ y elementos $R, S \in \mathscr{N}$ tales que $a \in R \subseteq A$ y $b \in S \subseteq B$. Consideramos a los respectivos conjuntos $U(R), U(S) \in \mathscr{V}$ los cuales tienen las propiedades: $U(R), U(S) \in \mathscr{B} \subseteq \theta$, $a \in U(R)$, $b \in U(S)$ y $U(R) \cap U(S) = \emptyset$. Por lo tanto (X, θ) es Hausdorff.

Finalmente, debido a que $\mathscr{B}$ es base para θ, $w(X, \theta) \leq |\mathscr{B}| \leq nw(X, \tau)$. ∎

Una consecuencia importante de la proposición anterior es que en espacios compactos Hausdorff el peso y el peso de red coinciden. A continuación se demuestra este resultado.

Proposición 2.2.2 (Arkhangel'skii)**.**

1. *Si (X, τ) es un espacio Hausdorff, entonces existen un espacio Hausdorff (Y, θ) y una condensación (es decir, una función continua y biyectiva) $f : X \longrightarrow Y$ tal que $w(Y, \theta) \leq nw(X, \tau)$.*

2. *Si X es Hausdorff compacto, entonces $w(X) = nw(X)$.*

Demostración:

1. Como (X, τ) es Hausdorff, existe una colección $\mathscr{B} \subseteq \tau$ que es base para una topología θ en X de modo que: $\theta \subseteq \tau$, (X, θ) es Hausdorff y $w(X, \theta) \leq nw(X, \tau)$. Definamos $(Y, \theta) = (X, \theta)$ y a $f = Id_X : (X, \tau) \longrightarrow (X, \theta)$. Es claro que f es una función biyectiva, y por la contención $\theta \subseteq \tau$ también es continua.

2. Por el inciso anterior, existen un espacio Hausdorff (Y, θ) y una condensación $f : X \longrightarrow Y$ tal que $w(Y, \theta) \leq nw(X, \tau)$. Además, debido a que X es compacto, Y es Hausdorff y f es continua, f es una función cerrada, y por lo tanto, un homeomorfismo. Entonces $w(X, \tau) = w(Y, \theta) \leq nw(X, \tau)$. Como la desigualdad $nw(X, \tau) \leq w(X, \tau)$ siempre es verdadera concluimos que $w(X, \tau) = nw(X, \tau)$.

∎

Ahora ya estamos en posición para demostrar el siguiente resultado sobre la aditividad del peso de espacios compactos y Hausdorff.

Teorema 2.2.3 (de Arkhangels'kii sobre la aditividad del peso)**.** *Sea κ un cardinal infinito. Si X es un espacio compacto Hausdorff tal que $X = A \cup B$ con $w(A) \leq \kappa$ y $w(B) \leq \kappa$ (ambos con la topología de subespacio respecto de X), entonces $w(X) \leq \kappa$.*

Demostración: Al ser X un espacio compacto y Hausdorff, por el inciso (2) de la proposición anterior se tiene la igualdad $w(X) = nw(X)$, así que probaremos que $nw(X) \leq \kappa$. Para los subespacios A y B fijamos bases $\mathscr{B}_A$ y $\mathscr{B}_B$ de modo que $|\mathscr{B}_A| = w(A) \leq \kappa$ y $|\mathscr{B}_B| = w(B) \leq \kappa$. Definamos a $\mathscr{N} = \mathscr{B}_A \cup \mathscr{B}_B \subseteq \mathscr{P}(X)$ y veamos que $\mathscr{N}$ es una red del espacio X: supongamos que U es cualquier abierto no vacío de X y que $u \in U$. Por la hipótesis $X = A \cup B$, $u \in A$ o $u \in B$. Si $u \in A$, entonces $u \in U \cap A$ el cual es un abierto del subespacio A; y al ser $\mathscr{B}_A$ una base para dicho subespacio, existe un elemento $V_u \in \mathscr{B}_A$ tal que $u \in V_u \subseteq U \cap A$. En este caso, existe $V_u \in \mathscr{N}$ de modo que $u \in V_u \subseteq U$. El caso $u \in B$ es similar. Por lo tanto $\mathscr{N}$ es una red de subconjuntos de X.

Por último, observe que $nw(X) \leq |\mathscr{N}| \leq \kappa + \kappa = \kappa$ como se deseaba probar. ∎

Observación 2.2.4. En la prueba sobre la aditividad del peso en espacios compactos Hausdorff se demuestra implícitamente que el peso de red es una función cardinal finito aditiva; esto es, si κ es un cardinal infinito y X es un espacio tal que $X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ donde $n \in \mathbb{N}$ y A_i es un subespacio de X con $nw(A_i) \leq \kappa$ para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces $nw(X) \leq \kappa$. De manera más general: si κ es un cardinal infinito y X es un espacio de modo que $X = \bigcup_{\alpha \in \mathscr{C}} A_\alpha$ donde cada subespacio A_α tiene peso de red $\leq \kappa$, entonces $nw(X) \leq |\mathscr{C}| \cdot \kappa = \max\{|\mathscr{C}|, \kappa\}$.

Como una aplicación del teorema de Arkhangels'kii sobre la aditividad del peso tenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.2.5. *Si X es un espacio compacto Hausdorff y es la unión finita de subespacios segundo numerables, entonces X es segundo numerable, y por lo tanto, metrizable.*

En el lema 2.2.1 se demostró que para cualquier espacio (X, τ) Hausdorff existe otra topología θ en X que también es Hausdorff, es más gruesa que τ (es decir, $\theta \subseteq \tau$) y tal que el peso del nuevo espacio (X, θ) es menor o igual que el peso de red del espacio original (X, τ). En el siguiente lema demostramos un resultado similar para espacios T_3, en este se garantiza la existencia de otra topología que también es T_3, cuyo peso es menor o igual que el peso de red del espacio original pero con la diferencia de que esta nueva topología es más fina (es decir, la topología original está contenida en esta nueva topología).

Lema 2.2.6. *Si (X, τ) es un espacio T_3, entonces existe una familia $\mathscr{B}$ de cerrados en X tal que:*

1. $|\mathscr{B}| \leq nw(X, \tau)$,
2. *$\mathscr{B}$ es base para una topología θ en X,*
3. $w(X, \theta) \leq nw(X, \tau)$,
4. $\tau \subseteq \theta$,
5. *$\mathscr{B}$ está formada por subconjuntos que son abiertos y cerrados (a la vez) en (X, θ),*

6. el espacio (X,θ) es T_3.

Demostración: Para X tenemos los siguientes casos:

Si X es finito, al ser un espacio T_3 y en particular T_1, se sigue que (X,τ) es un espacio discreto. En este caso definimos $\mathscr{B} = \mathscr{P}(X)$ que claramente es una familia de cerrados de (X,τ). Así $(X,\theta) = (X, \mathscr{P}(X)) = (X,\tau)$ y se cumplen las condiciones $1-6$.

Si X es infinito, entonces $nw(X,\tau)$ es infinito porque (X,τ) es un espacio T_0. Supongamos que $\mathscr{N}$ es una red de (X,τ) tal que $|\mathscr{N}| = nw(X,\tau)$ y definamos $\mathscr{M} = \{\overline{N} : N \in \mathscr{N}\}$. Resulta que $\mathscr{M}$ también es una red en (X,τ). Efectivamente: supongamos que U es un abierto no vacío de X y que $x \in U$. Por la regularidad de X, existe un abierto V de modo que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$; y usando el hecho de que $\mathscr{N}$ es red, tenemos que existe $N_x \in \mathscr{N}$ tal que $x \in N_x \subseteq V$. Así el elemento $\overline{N_x} \in \mathscr{M}$ y cumple que $x \in \overline{N_x} \subseteq U$, lo que prueba que $\mathscr{M}$ es red en X.

Definamos a $\mathscr{B}$ como la colección formada por las intersecciones finitas de elementos de $\mathscr{M}$. Es claro que $\mathscr{B}$ es un conjunto de cerrados de (X,τ) y además $|\mathscr{B}| \leq |\mathscr{M}| \leq |\mathscr{N}| = nw(X,\tau)$. También es fácil notar que $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{B}$[3], y por ello, $\mathscr{B}$ también es una red de subconjuntos de X.

Veamos que $\mathscr{B}$ es base para una topología θ en X: Supongamos que $x \in X$ es cualquier elemento. Debido a que X es abierto y $\mathscr{B}$ es una red en X, existe $C \in \mathscr{B}$ que satisface: $x \in C \subseteq X$. Más aún, $x \in C \subseteq \bigcup \mathscr{B}$, lo que implica que $X \subseteq \bigcup \mathscr{B}$. Por otra parte, por la propia definición de $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}$ es cerrado bajo intersecciones finitas; esto aunado a lo anterior nos permite concluir que $\mathscr{B}$ es base para una topología θ en X. Además, debido a que la colección $\mathscr{B}$ genera a θ tenemos las siguientes desigualdades: $w(X,\theta) \leq |\mathscr{B}| \leq nw(X,\tau)$.

Para probar la contención $\tau \subseteq \theta$ supongamos que $W \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ [4] es arbitrario. Usando el hecho de que $\mathscr{B}$ es red en (X,τ), para cada $y \in W$ podemos seleccionar un elemento $B_y \in \mathscr{B}$ tal que $y \in B_y \subseteq W$. Así $W = \bigcup_{y \in W} B_y \in \theta$ y se prueba lo deseado.

Una característica evidente sobre $\mathscr{B}$ es que está formado de abiertos de θ, veamos que sus elementos también son cerrados de θ: Sea $B \in \mathscr{B}$ cualquier elemento. Entonces B es un cerrado de τ; es decir $X \setminus B \in \tau \subseteq \theta$, y en consecuencia B es un cerrado de θ. De este modo, $\mathscr{B}$ está formado de conjuntos abiertos y cerrados a la vez en (X,θ).

El lector notará que la contención "$\tau \subseteq \theta$" implica que el espacio (X,θ) también es T_0. Así que sólo queda por verificar que (X,θ) es un espacio regular. Para ello supongamos que $U \in \theta$ y $u \in U$. Como $\mathscr{B}$ es base para θ, existe $Bu \in \mathscr{B}$ tal que $u \in B_u = \overline{B_u} \subseteq U$. Esto prueba que (X,θ) es un espacio regular, y por lo tanto, es T_3 . ■

Corolario 2.2.7. *Si (X,τ) es un espacio T_3, entonces existe un espacio (Y,θ) que es T_3 y tiene una base de abiertos y cerrados (a la vez) y existe una condensación $f : X \longrightarrow Y$ tales que $w(Y,\theta) \leq nw(X,\tau)$.*

[3]Porque para todo $M \in \mathscr{M}$: $M = \cap\{M\}$ y $\{M\}$ es un subconjunto finito de $\mathscr{M}$.

[4]Trivialmente $W = \emptyset \in \theta$

E. Michael definió en [7] a los **espacios cósmicos** como espacios T_3 cuyo peso de red es numerable. Respecto al término «cósmico» (en inglés «cosmic»), este se debe a la siguiente proposición que caracteriza a estos espacios como aquellos que son imágenes continuas de espacios metrizables separables (en inglés «Continuous-image Of Separable Metric»).

Corolario 2.2.8. *Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier espacio X T_3:*

1. $nw(X) \leq \omega$;
2. *X es imagen continua de un espacio T_3 segundo-numerable;*
3. *X es imagen continua de un espacio metrizable separable.*

Capítulo 3

El teorema de dualidad del peso de red.

Una de las cualidades más interesantes sobre el peso de red es que, cuando se trata de un espacio Tychonoff infinito, se cumple una dualidad entre el peso de red del espacio en cuestión y el de su Cp. En este capítulo, como su nombre lo dice, demostraremos este resultado, mismo que se le atribuye a Arkhangel'skii.

Comenzamos introduciendo las herramientas básicas de la Cp-teoría y su notación. Antes de empezar, aclaramos que, a menos que se diga explícitamente lo contrario, todos los espacios en este capítulo son considerados Tychonoff.

3.1. El espacio $Cp(X)$.

Definición 3.1.1. *Sea X un espacio. El conjunto $C(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} | f$ es continua$\}$ es un subconjunto del producto topológico $\mathbb{R}^X$ [1]; por lo cual podemos considerar en $C(X)$ a su correspondiente topología de subespacio. Si este es el caso, el espacio así construido es denotado por: $Cp(X)$. La topología de $Cp(X)$ es llamada «topología de la convergencia puntual».*

Definimos $Cp(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Supongamos que X es no vacío. Denotemos para cada $x \in X$, a la función proyección asociada a la coordenada x respecto del producto $\mathbb{R}^X$ como: π_x[2]. Para todos $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $U_1, \ldots, U_n \subseteq \mathbb{R}$, definimos a los conjuntos $(x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n)$ y $[x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n]$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n) &= \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{x_i}^{-1}[U_i] \\ &= \{f \in \mathbb{R}^X : (\forall i = 1, \ldots, n)(f(x_i) \in U_i)\}\end{aligned}$$

y

[1] $\mathbb{R}$ es considerado con su topología usual $\tau_{\mathbb{R}}$

[2] Es decir, $\pi_x : \mathbb{R}^X \longrightarrow \mathbb{R}$ y tiene por regla de asociación: $\pi_x(f) = f(x)$ (para todo $f \in \mathbb{R}^X$).

$$\begin{aligned}[x_1,\dots,x_n;U_1,\dots,U_n] &= \left(\bigcap_{i=1}^{n}\pi_{x_i}^{-1}[U_i]\right)\cap C(X)\\ &= \{f\in C(X):(\forall i=1,\dots,n)(f(x_i)\in U_i)\}\end{aligned}$$

En particular, si $U_1,\dots,U_n\in\tau_{\mathbb{R}}$, los conjuntos $(x_1,\dots,x_n;U_1,\dots,U_n)$ y $[x_1,\dots,x_n;U_1,\dots,U_n]$ son abiertos de $\mathbb{R}^X$ y $Cp(X)$ respectivamente. Por lo anterior, la base canónica del producto $\mathbb{R}^X$ puede escribirse de la siguiente manera:

$$\mathscr{B}=\{(x_1,\dots,x_n;U_1,\dots,U_n):n\in\mathbb{N},x_1,\dots,x_n\in X \text{ y } U_1,\dots,U_n\in\tau_{\mathbb{R}}\}.$$

En consecuencia, la colección

$$\mathscr{C}=\{[x_1,\dots,x_n;U_1,\dots,U_n]:n\in\mathbb{N},x_1,\dots,x_n\in X \text{ y } U_1,\dots,U_n\in\tau_{\mathbb{R}}\}$$

es una base para $Cp(X)$ y es llamada «base canónica para $Cp(X)$».

Por la construcción de $Cp(X)$, es claro que $w(Cp(X))\le w(\mathbb{R}^X)$. Cuando X es finito, este es discreto y $Cp(X)=\mathbb{R}^X$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ (donde $n=|X|$). En este caso, $w(Cp(X))=w(\mathbb{R}^n)=\omega$. En el caso en que X es infinito, tenemos más información sobre el peso de $Cp(X)$ y es que resulta que $w(Cp(X))=w(\mathbb{R}^X)=|X|$. En seguida se demuestra esta afirmación.

Proposición 3.1.2. *Para todo espacio infinito X: $w(Cp(X))=w(\mathbb{R}^X)=|X|$.*

Demostración: Consideremos una base numerable $\mathscr{D}$ de $\tau_{\mathbb{R}}$[3]. Se afirma que el conjunto $\beta_0=\{(x_1,\dots,x_n;D_1,\dots,D_n):n\in\mathbb{N},x_1,\dots,x_n\in X \text{ y } D_1,\dots,D_n\in\mathscr{D}\}$ es una base para $\mathbb{R}^X$. Para ello, es suficiente probar que para todo $B\in\mathscr{B}$ y para todo $f\in B$ existe un $D_f\in\beta_0$ tal que $f\in D_f\subseteq B$. Entonces, supongamos que $B\in\mathscr{B}$ y $f\in B$ son arbitrarios. Como $B\in\mathscr{B}$ podemos suponer que $B=(x_1,...,x_m;U_1,...,U_m)$ para algunos $m\in\mathbb{N}$, $\{x_1,...,x_m\}\subseteq X$ y $\{U_1,...,U_m\}\subseteq\tau_{\mathbb{R}}$. Por la suposición de que $\mathscr{D}$ es base de $\tau_{\mathbb{R}}$, para cada índice $i=1,...,m$ fijamos un $D_i\in\mathscr{D}$ tal que $f(x_i)\in D_i\subseteq U_i$. De este modo, $f\in D_f=(x_1,...,x_m;D_1,...,D_m)\subseteq(x_1,...,x_m;U_1,...,U_m)=B$. Así, β_0 es base para $\mathbb{R}^X$; pero además, $|\beta_0|\le|[X]^{<\omega}|\cdot|[\mathscr{D}]^{<\omega}|=|X|\cdot\omega=|X|$. Con esto, obtenemos que:

$$w(Cp(X))\le w(\mathbb{R}^X)\le|X|.$$

Para lograr las igualdades, mostraremos que $|X|\le w(Cp(X))$. Supongamos por el contrario que $|X|>w(Cp(X))$ y fijemos una base $\mathcal{C}$ de $Cp(X)$ de tal manera que $|\mathcal{C}|=w(Cp(X))\ge\omega$. Consideremos a la función constante de valor cero $\bar{0}:X\longrightarrow\mathbb{R}\in C(X)$ y definamos a $\mathcal{C}(\bar{0})=\{C\in\mathcal{C}:\bar{0}\in C\}$. Es claro que $\mathcal{C}(\bar{0})$ es una base local de $\bar{0}$ en $Cp(X)$ y que $|\mathcal{C}(\bar{0})|\le|\mathcal{C}|<|X|$. Ahora, para cada elemento $C\in\mathcal{C}(\bar{0})$ podemos fijar un $U(C)=\left[x_1^c,...,x_{m_c}^c;U_1^c,...,U_{m_c}^c\right]\in\mathscr{C}$ de modo que $\bar{0}\in U(C)\subseteq C$. Más aún, dado que el conjunto $\{(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}):n\in\mathbb{N}\}$ es una base local del 0 en $\mathbb{R}$, para cada $C\in\mathcal{C}(\bar{0})$ es posible encontrar un $\hat{n}_c\in\mathbb{N}$ de modo que $\bar{0}\in\left[x_1^c,...,x_{m_c}^c;\left(-\frac{1}{\hat{n}_c},\frac{1}{\hat{n}_c}\right),...,\left(-\frac{1}{\hat{n}_c},\frac{1}{\hat{n}_c}\right)\right]\subseteq$

[3]Por ejemplo: $\mathscr{D}=\{(p,q):p,q\in\mathbb{Q}\}$.

$U(C) \subseteq C$. Definamos $Y = \bigcup_{C \in \mathcal{C}(\bar{0})} \{x_1^c, ..., x_{m_c}^c\}$. Claramente $Y \subseteq X$ y $|Y| < |X|$. Dicho lo anterior, podemos seleccionar un elemento $y \in X \setminus Y$ y definir el abierto de $Cp(X)$ $W = [y; (-1,1)]$, el cual cumple que $\bar{0} \in W$. Ahora observe que si $C \in \mathcal{C}(\bar{0})$ es arbitrario, entonces y no pertenece al cerrado (de X) $\{x_1^c, ..., x_{m_c}^c\} \subseteq Y$. Dado que X es Tychonoff, sabemos de la existencia de una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ de modo que $f(y) = 1$ y $f[\{x_1^c, ..., x_{m_c}^c\}] \subseteq \{0\}$. Entonces, $f \in \left[x_1^c, ..., x_{m_c}^c; \left(-\frac{1}{\hat{n_c}}, \frac{1}{\hat{n_c}}\right), ..., \left(-\frac{1}{\hat{n_c}}, \frac{1}{\hat{n_c}}\right)\right] \subseteq C$ pero $f \notin W$, por lo que $C \nsubseteq W$. Como $C \in \mathcal{C}(\bar{0})$ fue cualquiera, hemos argumentado que no existe ningún elemento de $\mathcal{C}(\bar{0})$ que esté contenido en W, lo que contradice que $\mathcal{C}(\bar{0})$ sea base local del $\bar{0}$ en $Cp(X)$ porque W es una vecindad abierta del $\bar{0}$. Por lo tanto, debe ocurrir que $|X| \leq w(Cp(X))$. En consecuencia:

$$w(Cp(X)) = w(\mathbb{R}^X) = |X|.$$

■

En la demostración de la proposición 3.1.2 implícitamente se demuestran las siguientes propiedades. El lector se dará cuenta que este resultado es un caso particular de un ejercicio clásico de los productos topológicos.

Proposición 3.1.3. *Sean X un espacio Tychonoff, $\mathcal{D}$ una base para $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ y, para cada elemento $y \in \mathbb{R}$, sea $\mathcal{B}(y)$ una base local de y.*

1. *La familia $\{(x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n) : n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in X \text{ y } U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{D}\}$ es una base para $\mathbb{R}^X$. Consecuentemente, la colección $\{[x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n] : n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in X \text{ y } U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{D}\}$ es una base para $Cp(X)$.*

2. *Sea $f \in \mathbb{R}^X$. Para todos $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $V_i \in \mathcal{B}(f(x_i))$ se definen los conjuntos:*

   - $(f; x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n) = \{g \in \mathbb{R}^X : (\forall i = 1, \ldots, n)(g(x_i) \in V_i)\}$ *y*
   - $[f; x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n] = \{g \in Cp(X) : (\forall i = 1, \ldots, n)(g(x_i) \in V_i)\}$.

   Entonces, la familia

   $$\{(f; x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n) : n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in X \text{ y } V_i \in \mathcal{B}(f(x_i))\}$$

   es una base local de f en $\mathbb{R}^X$ y, consecuentemente, el conjunto

   $$\{[f; x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n] : n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in X \text{ y } V_i \in \mathcal{B}(f(x_i))\}$$

   es una base local de f en $Cp(X)$.

   Nota: *cuando los conjuntos V_i son de la forma: $V_i = (f(x_i) - \epsilon, f(x_i) + \epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$, simplemente escribiremos: $(f; x_1, ..., x_n; \epsilon)$ y $[f; x_1, ..., x_n; \epsilon]$.*

3.2. Dualidad en $Cp(X)$: $nw(X) = nw(Cp(X))$.

La clave para la demostración del teorema de dualidad es demostrar que X es homeomorfo a un subespacio de $Cp(Cp(X))$ como lo indica la siguiente proposición.

Proposición 3.2.1. *Sea X un espacio Tychonoff. Existe un homeomorfismo entre X y un subespacio de $Cp(Cp(X))$.*

Demostración: Primero, para cada $x \in X$, definimos la función $e_x = \pi_x \restriction Cp(X) : Cp(X) \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces, e_x es una función continua para todo $x \in X$, y por lo tanto, $e_x \in Cp(Cp(X))$. Ahora, consideremos a la función $i : X \longrightarrow Cp(Cp(X))$ definida por medio de la regla: $i(x) = e_x$ (para todo $x \in X$). A continuación, se demuestra que i es una inmersión:

- i es inyectiva: Supongamos que $x, y \in X$ son distintos. Como X es Tychonoff, existe una función $f \in C(X)$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$. Entonces $e_x(f) = f(x) \neq f(y) = e_y(f)$, con lo que $e_x \neq e_y$. Así, $i(x) \neq i(y)$ y, por lo tanto, i es inyectiva.

- i es continua: Tomemos $x \in X$ y supongamos que $W \subseteq Cp(Cp(X))$ es un abierto tal que $i(x) \in W$. Podemos fijar elementos $n \in \mathbb{N}$, $g_1, \ldots, g_n \in Cp(X)$ y $\epsilon > 0$ de modo que $[i(x); g_1, \ldots, g_n; \epsilon] \subseteq W$. Definamos $V = \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}[(g_i(x) - \epsilon, g_i(x) + \epsilon)]$. Por la continuidad de las funciones g_i, es claro que V es un abierto en X y, además $x \in V$. Ahora veamos que $i[V] \subseteq [i(x); g_1, \ldots, g_n; \epsilon]$. Para $v \in V$ arbitrario e $i = 1, \ldots, n$ sucede lo siguiente:

$$|i(x)(g_i) - i(v)(g_i)| = |e_x(g_i) - e_v(g_i)| = |g_i(x) - g_i(v)| < \epsilon;$$

  y así, $i(v) \in [i(x); g_1, \ldots, g_n; \epsilon]$. Entonces, V es una vecindad abierta de $x \in X$ tal que $i[V] \subseteq W$, lo que prueba la continuidad de i en x. Por lo tanto, i es continua en todo X.

  Dado que $i : X \longrightarrow i[X]$ es biyectiva, existe su función inversa $i^{-1} : i[X] \longrightarrow X$. Para terminar la demostración, bastará verificar que i^{-1} es continua.

- i^{-1} es continua: Consideremos un elemento cualquiera $z = i(x) \in i[X]$ y un abierto $U \subseteq X$ tal que $i^{-1}(z) = x \in U$. Es claro que $x \notin X \setminus U$. Por la hipótesis de que X es Tychonoff, existe una función $f \in C(X)$ de modo que $f(x) = 0$ y $f[X \setminus U] \subseteq \{1\}$. Definamos $V = [z; f; \frac{1}{2}] \cap i[X]$, que es un abierto de $i[X]$ y tiene a z. Resulta que $i^{-1}[V] \subseteq U$. Efectivamente, si existiera $h \in i^{-1}[V] \setminus U$, entonces $i(h) \in V$ y $h \in X \setminus U$. De $i(h) \in V = [z; f; \frac{1}{2}]$ se sigue que $i(h)(f) \in (z(f) - \frac{1}{2}, z(f) + \frac{1}{2})$; es decir, que

$|z(f) - i(h)(f)| < \frac{1}{2}$. Sin embargo,

$$\begin{aligned} |z(f) - i(h)(f)| &= |i(x)(f) - i(h)(f)| \\ &= |e_x(f) - e_h(f)| \\ &= |f(x) - f(h)| \\ &= |f(h)| \\ &= 1 \\ &< \frac{1}{2} \end{aligned}$$

lo cual es imposible. Por ello, $i^{-1}[V] \subseteq U$ y, en consecuencia, i^{-1} es continua en z. De esta manera, i^{-1} es continua.

Por lo tanto, X es homeomorfo al subespacio $i[X] \subseteq Cp(Cp(X))$. ■

Si X es un espacio finito, entonces X es discreto y $nw(X) = |X| < \omega$. Por otra parte, $Cp(X)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ donde $n = |X|$; así que $nw(Cp(X)) = nw(\mathbb{R}^n) \leq w(\mathbb{R}^n) = \omega$. Pero, dado que $\mathbb{R}^n$ es infinito y T_0, no puede ocurrir que $nw(\mathbb{R}^n) < \omega$. Lo anterior implica que $nw(X) < \omega = nw(Cp(X))$. En otras palabras, cuando X es Tychonoff finito [4], $nw(X)$ y $nw(Cp(X))$ no coinciden. Sin embargo, cuando X es un Tychonoff infinito, $nw(X)$ y $nw(Cp(X))$ siempre coinciden. A continuación, demostramos este hecho.

Teorema 3.2.2 (de dualidad de Arkhangel'skii)**.** *Para cualquier espacio Tychonoff infinito X ocurre que $nw(X) = nw(Cp(X))$.*

Demostración: Primero observe que, dadas las hipótesis, $nw(X) \geq \omega$. Ahora consideremos una red $\mathscr{N}$ de subconjuntos de X de tal manera que $|\mathscr{N}| = nw(X) \geq \omega$ y una base numerable $\mathcal{B}$ de $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $N_1, \ldots, N_n \in \mathscr{N}$ y $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ definimos el conjunto:

$$[N_1, \ldots, N_n; B_1, \ldots, B_n] = \{g \in Cp(X) : \forall i \in \{1, \ldots, n\}(g[N_i] \subseteq B_i)\}.$$

Se afirma que la familia

$$\mathscr{M} = \{[N_1, \ldots, N_n; B_1, \ldots, B_n] : n \in \mathbb{N}, N_1, \ldots, N_n \in \mathscr{N} \text{ y } B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}\}$$

es una red en $Cp(X)$. Para demostrar esta afirmación, supongamos que $f \in Cp(X)$ es arbitrario y que $U \subseteq Cp(X)$ es cualquier abierto que tiene a f. Fijemos un abierto básico $[f; x_1, \ldots, x_m; \epsilon]$ de modo que $[f; x_1, \ldots, x_m; \epsilon] \subseteq U$. Ahora, dado que $\mathcal{B}$ es base de $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$, para cada índice $i \in \{1, \ldots, m\}$, podemos elegir un elemento $B_i \in \mathcal{B}$ que satisfaga la condición: $f(x_i) \in B_i \subseteq (f(x_i) - \epsilon, f(x_i) + \epsilon)$. Luego, por la continuidad de la función f, los conjuntos $f^{-1}[B_i]$ son abiertos en X y tales que $x_i \in f^{-1}[B_i]$ (con $i \in \{1, \ldots, m\}$). Usando el hecho de que $\mathscr{N}$ es red en X, para cada índice $i \in \{1, ..., m\}$, seleccionamos un

[4] Es importante mencionar que sin importar la cardinalidad de X, el espacio $Cp(X)$ siempre es infinito (porque la siguiente función es inyectiva: $f : \mathbb{R} \longrightarrow Cp(X)$ definida por $f(r) = c_r$, donde $c_r : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función constante de valor r), por lo que, en cualquier caso $nw(Cp(X)) \geq \omega$.

elemento $N_i \in \mathscr{N}$ tal que: $x_i \in N_i \subseteq f^{-1}[B_i]$. Es claro que $f \in [N_1, ..., N_m; B_1, ..., B_m]$. Por otro lado, si $g \in [N_1, ..., N_m; B_1, ..., B_m]$, entonces, para $i \in \{1, \ldots, m\}$ sucede que: $g(x_i) \in g[N_i] \subseteq B_i \subseteq (f(x_i) - \epsilon, f(x_i) + \epsilon)$, por lo que $g \in [f; x_1, \ldots, x_m; \epsilon]$; es decir, $[N_1, ..., N_m; B_1, ..., B_m] \subseteq [f; x_1, \ldots, x_m; \epsilon]$. Por lo tanto, hemos encontrado un elemento $[N_1, ..., N_m; B_1, ..., B_m] \in \mathscr{M}$ tal que $f \in [N_1, ..., N_m; B_1, ..., B_m] \subseteq U$, lo que prueba que $\mathscr{M}$ es red en $Cp(X)$.

De lo anterior, obtenemos que:

$$nw(Cp(X)) \leq |\mathscr{M}| = |[\mathscr{N}]^{<\omega}| \cdot |[\mathcal{B}]^{<\omega}| = |\mathscr{N}| \cdot \omega = |\mathscr{N}| = nw(X).$$

El lector estará de acuerdo que hasta ahora se ha demostrado la siguiente afirmación: Para todo espacio Tychonoff infinito Z, se cumple que $nw(Cp(Z)) \leq nw(Z)$.

Finalmente, para obtener la desigualdad contraria recurrimos al hecho de que el espacio $Cp(X)$ es Tychonoff infinito; lo que implica que $nw(Cp(Cp(X))) \leq nw(Cp(X))$. Ahora recuerde de la proposición anterior que X es homeomorfo a un subespacio de $Cp(Cp(X))$ y, por la monotonía del peso de red tenemos que $nw(X) \leq nw(Cp(Cp(X)))$. En consecuencia:

$$nw(X) \leq nw(Cp(X)).$$

Por lo tanto, $nw(X) = nw(Cp(X))$. ■

En 2.1.3 (1) dimos un ejemplo de un espacio (a saber, el abanico numerable) que cumple la desigualdad estricta: $nw(X) < w(X)$; más aún, este espacio es cósmico pero no es segundo numerable. Usando la proposición anterior podemos dar otro ejemplo, un poco más complicado, de un espacio cósmico que no es segundo numerable: el espacio $Cp(\mathbb{R})$. Efectivamente, por el teorema de dualidad de Arkhangel'skii, $nw(Cp(\mathbb{R})) = nw(\mathbb{R}) = \omega$ porque $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ es segundo numerable e infinito. Sin embargo, por la proposición 3.1.2, $w(Cp(\mathbb{R})) = |\mathbb{R}| > \omega$.

Definición 3.2.3. *(Los espacios $C_{p,n}(X)$ iterados) Si X es un espacio Tychonoff, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definimos recursivamente a los espacios $Cp, n(X)$ de la siguiente manera:*

1. $C_{p,0}(X) = X$;

2. *Para* $n \in \mathbb{N}$: $C_{p,n}(X) = C_p(C_{p,n-1}(X))$.

Entonces, por el teorema de dualidad de Arkhangel'skii tenemos que, si X es finito:

$$nw(X) < nw(C_p(X)) = nw(C_{p,2}(X)) = nw(C_{p,3}(X)) = \cdots,$$

Y si X es infinito:

$$nw(X) = nw(C_p(X)) = nw(C_{p,2}(X)) = nw(C_{p,3}(X)) = \cdots.$$

Ejemplos 3.2.4.

1. *Si X es un espacio Tychonoff tal que $|X| = \omega$, entonces:*

$$nw(C_{p,n}(X)) = nw(X) = \omega = |X| = w(Cp(X)).$$

En particular,

$$w(C_p(\mathbb{Q})) = nw(C_{p,n}(\mathbb{Q})) = w(C_p(\mathbb{N})) = nw(C_{p,n}(\mathbb{N})) = \omega.$$

2. *Si κ es un número cardinal infinito y $X = D(\kappa)$ es el espacio discreto de cardinalidad κ, entonces:*

$$nw(C_{p,n}(X)) = nw(X) = \kappa = |X| = w(C_p(X)).$$

3. *Si Z es el espacio discreto $(\mathbb{R}, \mathscr{P}(\mathbb{R}))$ y $X = \mathbb{R}^Z$ es el producto topológico de $|Z|$-copias del espacio $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$, entonces:*

$$nw(X) = nw(\mathbb{R}^Z) = nw(C_p(Z)) = nw(Z) = |Z| = \mathfrak{c}.$$

Luego,

$$nw(C_{p,n}(X)) = nw(X) = \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}} = |\mathbb{R}^Z| = |X| = w(C_p(X)).$$

4. *Si $X = (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{S}})$ es la recta de Sorgenfrey, entonces:*

$$nw(C_{p,n}(X)) = nw(X) = \mathfrak{c} = |X| = w(C_p(X)).$$

Capítulo 4

Redes respecto de cubiertas.

Como hemos visto, las redes de subconjuntos surgen de una generalización del concepto de base de un espacio; así mismo, las redes de subconjuntos pueden ser vistas como un caso particular de otra noción mucho más general: la noción de *red módulo una cubierta*. Las redes numerables módulo una cubierta compacta en espacios T_3 generan una nueva clase de espacios: la clase de los *espacios Lindelöf-*Σ.

En este capítulo se exploran algunas de las características de esta nueva clase de espacios. Pero además, hablaremos del *número de Nagami* el cual surge a partir de la definición de los espacios Lindelöf-Σ pero para cualquier cardinal $\kappa \geq \omega$. El número de Nagami tiene un comportamiento muy parecido al peso de red (de hecho, hay una relación entre ambos) porque además de cumplir las mismas propiedades, este también nos proporciona una cota para el peso de los espacios que cumplen el axioma de separación T_3. En el caso de los espacios Tychonoff, Tkachenko demostró que el número de Nagami no sólo acota su peso, sino que también la cardinalidad del conjunto de funciones continuas de estos espacios en $\mathbb{R}$.

4.1. Los espacios Lindelöf-Σ y el número de Nagami.

Definición 4.1.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathscr{C}$ una cubierta para X. Una red respecto de la cubierta $\mathscr{C}$ es un conjunto $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{P}(X)$ que cumple la siguiente propiedad: para todo $C \in \mathscr{C}$ y para todo $U \in \tau(C, X)$, existe $N \in \mathscr{N}$ tal que $C \subseteq N \subseteq U$.*

Observe que si $\mathscr{N}$ es una red de subconjuntos de un espacio topológico X, entonces $\mathscr{N}$ es una red respecto de la cubierta $\mathscr{C} = \{\{x\} : x \in X\}$. De esta forma, toda red de subconjuntos es una red módulo una cubierta.

De ahora en adelante, al hablar de cubiertas compactas (o cerradas), nos referimos a que los elementos de la cubierta son subconjuntos compactos (respectivamente cerrados) del espacio.

Definición 4.1.2. *Un espacio topológico X T_3 es llamado Lindelöf- Σ si existe una cubierta compacta $\mathscr{C}$ para X y una red módulo $\mathscr{C}$ a lo más numerable.*

La razón de llamar a estos espacios «Lindelöf-Σ»es porque son espacios Lindelöf y también son espacios Σ en el sentido de Nagami.

En la definición de Nagami de un espacio Σ se pide que el espacio sea Hausdorff y no T_3; sin embargo, una ventaja de pedir que el espacio sea T_3 en la definición anterior es que cuando se agrega la propiedad de Lindelöf se obtiene que el espacio es T_4. Más adelante se enuncia dicha definición de espacio Σ y se demuestra que en la clase de espacios Hausdorff la propiedad de ser un espacio Σ junto con la propiedad de Lindelöf equivalen a la existencia de una cubierta compacta para el espacio y de una red módulo esa cubierta que es a lo más numerable.

Definición 4.1.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Una familia discreta es una colección $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(X)$ de modo que para todo $x \in X$ existe una vecindad W de x en (X, τ) tal que $|\{U \in \mathscr{U} : W \cap U \neq \emptyset\}| \leq 1$. Por otro lado, una colección $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{P}(X)$ es σ-discreta si es la unión numerable de familias discretas.*

Nota 4.1.4. Si X es un espacio Lindelöf, entonces toda familia discreta de subconjuntos de X es a lo más numerable.

Efectivamente: supongamos que $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(X)$ es discreta. Para cada $x \in X$ fijamos una vecindad abierta W_x de modo que el conjunto $\{U \in \mathscr{U} : W_x \cap U \neq \emptyset\}$ tiene cardinalidad a lo más 1. Entonces el conjunto $\mathscr{W} = \{W_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta para X. Usando la propiedad de Lindelöf, tenemos la existencia de un conjunto numerable $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_{x_n}$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos el conjunto $\mathscr{U}_n = \{U \in \mathscr{U} : W_{x_n} \cap U \neq \emptyset\}$, el cual tiene a lo más un elemento. Entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{U}_n$ es a lo más numerable y además $\mathscr{U} \setminus \{\emptyset\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{U}_n$. Para demostrar esta última igualdad, supongamos que $U \in \mathscr{U} \setminus \{\emptyset\}$ es cualquiera, entonces podemos elegir un elemento $u \in U$. Debido a que $\{W_{x_n} : n \in \mathbb{N}\}$ es cubierta para X, existe x_n tal que $u \in W_{x_n}$. Así $U \cap W_{x_n} \neq \emptyset$, y por ello $U \in \mathscr{U}_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{U}_n$. La otra contención es inmediata. Por lo tanto, $\mathscr{U}$ es numerable.

A continuación damos la definición de Nagami de espacio Σ:

Definición 4.1.5. *Un espacio topológico Hausdorff X es llamado espacio Σ si existe una cubierta cerrada $\mathscr{C}$ de X formada por subconjuntos numerablemente compactos y también existe una familia σ-discreta $\mathscr{N}$ que es red módulo $\mathscr{C}$.*

La siguiente proposición muestra que los espacios Lindelöf Σ son espacios Σ con la propiedad de Lindelöf.

Proposición 4.1.6. *Sea X un espacio Hausdorff. X es un espacio Σ y Lindelöf a la vez si y sólo si existe una cubierta compacta $\mathscr{C}$ de X y existe $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{P}(X)$ numerable y tal que $\mathscr{N}$ es red módulo $\mathscr{C}$.*

Demostración:

$\Rightarrow\rfloor$ Como X es un espacio Σ, podemos fijar una cubierta cerrada $\mathscr{C}$ cuyos elementos son numerablemente compactos y una familia σ-discreta $\mathscr{N}$ que es una red módulo $\mathscr{C}$. Debido a que X es Lindelöf y que esta propiedad se hereda a subconjuntos cerrados, tenemos que cada uno de los elementos de $\mathscr{C}$ también es un espacio Lindelöf. Entonces cada elemento de $\mathscr{C}$ es Lindelöf y numerablemente compacto; y por lo tanto,

compacto.
Por otra parte, $\mathscr{N}$ es la unión numerable de familias discretas de X, y además cada una de estas familias resulta ser numerable puesto que X es Lindelöf. Por ello, $\mathscr{N}$ es numerable.

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos ahora que existe una cubierta compacta $\mathscr{C}$ de X y $\mathscr{N}$ una red numerable módulo $\mathscr{C}$. Como X es Hausdorff, $\mathscr{C}$ es una cubierta cerrada; además es evidente que sus elementos son numerablemente compactos. También es claro que $\mathscr{N}$ es una familia σ-discreta por ser un conjunto numerable. En consecuencia, X es un espacio Σ.
Para verificar que X es Lindelöf, supongamos que $\mathscr{U}$ es cualquier cubierta abierta de X. Definamos a $\mathscr{U}_f$ como la colección de uniones finitas de elementos de $\mathscr{U}$. Por la definición de $\mathscr{U}_f$, bastará con encontrar una subcolección numerable de $\mathscr{U}_f$ que sea cubierta para X. Llamaremos a un elemento $N \in \mathscr{N}$ "marcado" si existe $U \in \mathscr{U}_f$ tal que $N \subseteq U$. Se afirma que el conjunto $A = \{N \in \mathscr{N} : N \text{ es marcado}\}$ es no vacío y numerable. En efecto: para probar que A es no vacío, supongamos que $C \in \mathscr{C}$ es fijo y arbitrario. Dado que $\mathscr{U}$ es cubierta abierta y C es compacto, existe $U \in \mathscr{U}_f$ tal que $C \subseteq U$; y como $\mathscr{N}$ es red módulo $\mathscr{C}$, existe $N \in \mathscr{N}$ con la propiedad: $C \subseteq N \subseteq U$. Luego $N \in A$, y en consecuencia $A \neq \emptyset$. Ahora, para cada $N \in A$ fijamos un elemento $U_N \in \mathscr{U}_f$ de modo que $N \subseteq U_N$. Resulta que $\{U_N : N \in A\} \subseteq \mathscr{U}_f$ es numerable y es tal que $X = \bigcup_{N\in A} U_N$. El argumento de la última igualdad es el siguiente: por un lado, la contención $\bigcup_{N\in A} U_N \subseteq X$ es clara. Y por otro lado, si suponemos que $x \in X$ es cualquiera, fijamos un elemento $C_x \in \mathscr{C}$ tal que $x \in C_x$; y ahora usamos el mismo razonamiento de la prueba de que $A \neq \emptyset$ para encontrar un elemento $M \in A$ que cumple: $x \in C_x \subseteq M$, lo que implica que $x \in M \subseteq U_M \subseteq \bigcup_{N\in A} U_N$.

Por lo tanto, X es un espacio Lindelöf.

■

Es sencillo argumentar que un espacio X que es σ-compacto y T_3 es un espacio Lindelöf-Σ porque $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ donde cada X_n es compacto; por lo que $\mathscr{N} = \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una red numerable módulo la cubierta compacta $\mathscr{C} = \mathscr{N}$.

De manera natural también se infiere que todo espacio T_3 con peso de red numerable es Lindelöf-Σ. La razón de esto es que si elegimos una red (de subconjuntos) $\mathscr{N}$ tal que $|\mathscr{N}| = nw(X) \leq \omega$ donde X es el espacio T_3 en cuestión, entonces $\mathscr{N}$ es numerable y es una red módulo la cubierta compacta $\{\{x\} : x \in X\}$.

A continuación se enuncian y demuestran dos propiedades sobre las redes módulo una cubierta compacta en espacios con algún axioma de separación. Ambas se usarán a menudo en las siguientes secciones.

Lema 4.1.7. *Sea X un espacio topológico y $\mathscr{N}$ una red módulo una cubierta compacta $\mathscr{C}$.*

1. *Si X es regular, entonces $\overline{\mathscr{N}} = \{\overline{N} : N \in \mathscr{N}\}$ también es red módulo $\mathscr{C}$.*

2. *Si X es T_1 y $C \in \mathscr{C}$ es fijo, entonces $\bigcap\{M \in \mathscr{N} : C \subseteq M\} = C$.*

Demostración:

1. Supongamos que $C \in \mathscr{C}$ arbitrario y que U es cualquier abierto que contiene a C. Por la regularidad de X, para cada $c \in C$ podemos fijar un abierto V_c tal que $c \in V_c \subseteq \overline{V_c} \subseteq U$; así el conjunto $\{V_c : c \in C\}$ es una cubierta abierta para C. Como C es compacto, existe una cantidad finita de elementos $c_1, ..., c_m \in C$ de modo que $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_{c_i}$. Luego, aplicando la hipótesis de que $\mathscr{N}$ es red módulo $\mathscr{C}$, existe $N \in \mathscr{N}$ con $C \subseteq N \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_{c_i}$, y entonces $C \subseteq \overline{N} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \overline{V_{c_i}} \subseteq U$.

2. La contención $C \subseteq \bigcap\{M \in \mathscr{N} : C \subseteq M\}$ es inmediata; por lo que sólo queda verificar la contención contraria. Para ello, suponga que existe $x \in (\bigcap\{M \in \mathscr{N} : C \subseteq M\}) \setminus C$. Entonces $C \subseteq X \setminus \{x\}$ y, dado que $X \setminus \{x\}$ es abierto y $\mathscr{N}$ es red módulo $\mathscr{C}$, existe $N \in \mathscr{N}$ con $C \subseteq N \subseteq X \setminus \{x\}$. Luego, $N \in \{M \in \mathscr{N} : C \subseteq M\}$ pero $x \notin N$ lo que contradice la elección de x. Entonces, debe ocurrir que $\bigcap\{M \in \mathscr{N} : C \subseteq M\} \subseteq C$; y por lo tanto son iguales.

■

El número de Nagami generaliza el concepto de espacio Lindelöf-Σ para cardinales más grandes que ω, este es definido a continuación.

Definición 4.1.8. *Sea X un espacio topológico. Se define el número de Nagami de X ($Nag(X)$) como el mínimo número cardinal infinito κ para el cual existe una cubierta compacta $\mathscr{C}$ de X y existe $\mathscr{N}$ una red módulo $\mathscr{C}$ tal que $|\mathscr{N}| \leq \kappa$; dicho de otro modo, que $|\mathscr{N}| + \omega = \kappa$.*

Como ya hemos comentado, para todo espacio X el conjunto $\mathscr{N} = \{\{x\} : x \in X\}$ es una red módulo la cubierta compacta $\mathscr{C} = \mathscr{N}$, es por eso que $Nag(X)$ es un número bien definido. De hecho, por el mismo argumento, resulta que $Nag(X) \leq |X| + \omega$ para todo espacio X. Más aún, si X es discreto, se cumple la igualdad: $Nag(X) = |X| + \omega$. En efecto: sólo queda corroborar que $|X| + \omega \leq Nag(X)$. Por una parte, si X es un conjunto finito, entonces $|X| + \omega = \omega \leq Nag(X)$ puesto que el Nagami de X es un cardinal infinito. Por el contrario, si X es infinito, es evidente que $|X| + \omega = |X|$, así que mostraremos que $|X| \leq Nag(X)$. Para ello, supongamos que $\mathscr{L}$ es una red módulo una cubierta compacta $\mathscr{D}$ de X tal que $|\mathscr{L}| + \omega = Nag(X)$. Entonces, dado que el espacio es discreto, se cumple que $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{L}$ (ya que para todo $D \in \mathscr{D}$ existe $L \in \mathscr{L}$ con $D \subseteq L \subseteq D$, lo que implica que $D = L$) con lo que $|\mathscr{D}| \leq |\mathscr{L}|$. Además, como los elementos de $\mathscr{D}$ son compactos, estos deben ser finitos; esto junto con el hecho de que X es infinito y $X = \bigcup_{D \in \mathscr{D}} D$, implican que $\mathscr{D}$ es un conjunto infinito. Así, $|X| \leq \sum_{D \in \mathscr{D}} |D| \leq \omega \cdot |\mathscr{D}| = |\mathscr{D}| \leq |\mathscr{L}| \leq |\mathscr{L}| + \omega = Nag(X)$ como buscábamos.

Al inicio de esta sección se hizo el comentario de que si $\mathscr{M}$ es una red de subconjuntos de X, resulta que $\mathscr{M}$ también es una red módulo la cubierta compacta $\mathscr{C} = \{\{x\} : x \in X\}$. Esto implica que $Nag(X) \leq |\mathscr{M}|+\omega$; en particular, $Nag(X) \leq nw(X)+\omega$. De esto último es inmediato que para todo espacio X T_0 infinito, la siguiente desigualdad es verdadera: $Nag(X) \leq nw(X)$.

Usando esta nueva definición, un espacio X T_3 es Lindelöf-Σ si y sólo si $Nag(X) = \omega$. Recordemos que todo espacio σ-compacto T_3 es Lindelöf-Σ, esta es la razón por la cual su número de Nagami debe ser ω.

El siguiente lema se usará para demostrar propiedades básicas sobre el número de Nagami.

Lema 4.1.9. *Sean X y Y espacios topológicos. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función perfecta*[1] *de X a Y, entonces: para todo subespacio compacto C de Y, $f^{-1}[C]$ es compacto en X.*

Demostración: Supongamos que $C \subseteq Y$ es compacto y que $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ es una cubierta para $f^{-1}[C]$ formada de abiertos de X. Sea $[A]^{<\omega}$ el conjunto de subconjuntos finitos de A, y para cada $F \in [A]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, definamos $U_F = \bigcup_{\alpha\in F} U_\alpha$. Dado que f tiene fibras compactas, para cada $c \in C$ existe $F_c \in [A]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ de modo que $f^{-1}[\{c\}] \subseteq U_{F_c}$. Aplicando ahora el hecho de que f es una función cerrada, obtenemos que, para cada $c \in C$ el conjunto $f[X \setminus U_{F_c}]$ es cerrado en Y; más aún, $Y \setminus f[X \setminus U_{F_c}]$ es abierto y $c \in Y \setminus f[X \setminus U_{F_c}]$. Por ello, el conjunto $\{Y \setminus f[X \setminus U_{F_c}] : c \in C\}$ es una cubierta abierta para C. Luego, por la compacidad de C, existe una cantidad finita de elementos $c_1, ..., c_n \in C$ de modo que $C \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} Y \setminus f[X \setminus U_{F_{c_i}}]$. Esta última contención implica lo siguiente:

$$\begin{aligned} f^{-1}[C] &\subseteq f^{-1}[\bigcup_{i=1}^{n} Y \setminus f[X \setminus U_{F_{c_i}}]] \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} X \setminus f^{-1}[f[X \setminus U_{F_{c_i}}]] \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} X \setminus [X \setminus U_{F_{c_i}}] \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} U_{F_{c_i}} \end{aligned}$$

Así que, si definimos $\mathscr{V} = \{U_\alpha : \exists i \in \{1, ..., n\}(\alpha \in F_{c_i})\} \subseteq \mathscr{U}$, entonces $\mathscr{V}$ es finito y además $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{F_{c_i}} = \bigcup \mathscr{V}$.

Por lo tanto, $f^{-1}[C] \subseteq \bigcup \mathscr{V}$ con lo que se demuestra su compacidad. ■

[1] Recuerde que una función perfecta es una función que es continua, suprayectiva, cerrada y con fibras compactas.

El número de Nagami cumple muy buenas propiedades. A continuación se demuestran algunas de ellas; pero antes, recuerde que el *grado de Lindelöf* $L(X)$ de un espacio X es el mínimo número cardinal κ para el cual toda cubierta abierta de X contiene una subcubierta de cardinalidad a lo más κ.

Proposición 4.1.10. *Sean X y Y espacios topológicos.*

1. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces $Nag(Y) \leq Nag(X)$; en particular, toda imagen continua T_3 de un espacio Lindelöf-Σ es un espacio Lindelöf-Σ.*
2. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función perfecta entre espacios, entonces $Nag(X) = Nag(Y)$.*
3. *Si Y es un subespacio cerrado de X, entonces $Nag(Y) \leq Nag(X)$; en particular, todo subespacio cerrado de un espacio Lindelöf-Σ es un espacio Lindelöf-Σ.*
4. *$L(X) \leq Nag(X) \leq nw(X) + \omega$*
5. *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una colección no vacía de espacios topológicos y $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Si κ es un cardinal infinito tal que $|A| \leq \kappa$ y $Nag(X_\alpha) \leq \kappa$ para toda $\alpha \in A$, entonces $Nag(X) \leq \kappa$.*

Demostración:

1. Fijemos una cubierta compacta $\mathscr{C}$ de X y a $\mathscr{N}$ una red módulo $\mathscr{C}$ con $|\mathscr{N}| + \omega = Nag(X)$. Dado que f es continua y suprayectiva, el conjunto $\mathscr{D} = \{f[C] : C \in \mathscr{C}\}$ es una cubierta compacta de Y. De manera natural mostraremos que $\mathscr{M} = \{f[N] : N \in \mathscr{N}\}$ es una red módulo $\mathscr{D}$. Para hacer esto, supongamos que $D \in \mathscr{D}$, $U \subseteq Y$ es un abierto con $D \subseteq U$ y que $C \in \mathscr{C}$ es tal que $D = f[C]$. Por la continuidad de f, $f^{-1}[U]$ es un abierto en X y además contiene a C, así que existe $N \in \mathscr{N}$ con $C \subseteq N \subseteq f^{-1}[U]$; lo que implica que $f[N] \in \mathscr{M}$ es tal que $D \subseteq f[N] \subseteq f[f^{-1}[U]] = U$.

   Por último, dese cuenta de que $|\mathscr{M}| \leq |\mathscr{N}|$ y que sto implica lo siguiente: $Nag(Y) \leq |\mathscr{M}| + \omega \leq |\mathscr{N}| + \omega = Nag(X)$.

2. Por el inciso anterior $Nag(Y) \leq Nag(X)$, así que sólo queda demostrar la desigualdad contraria. Fijemos a una cubierta compacta $\mathscr{D}$ de Y y a $\mathscr{M}$ una red módulo $\mathscr{D}$ tal que $|\mathscr{M}| + \omega = Nag(Y)$. Como f es perfecta, aplicamos el lema anterior para obtener que los elementos de $\mathscr{C} = \{f^{-1}[D] : D \in \mathscr{D}\}$ son compactos en X. Además $\mathscr{C}$ es cubierta de X porque:

$$\begin{aligned}\bigcup \mathscr{C} &= \bigcup_{D\in\mathscr{D}} f^{-1}[D]\\ &= f^{-1}[\bigcup_{D\in\mathscr{D}} D]\\ &= f^{-1}[\bigcup \mathscr{D}]\\ &= f^{-1}[Y]\\ &= X.\end{aligned}$$

Consideremos el conjunto $\mathscr{N} = \{f^{-1}[M] : M \in \mathscr{M}\}$ y note que $|\mathscr{N}| \leq |\mathscr{M}| \leq Nag(Y)$. Ahora veamos que $\mathscr{N}$ es red módulo $\mathscr{C}$: Supongamos que $C \in \mathscr{C}$, V es un abierto en X con $C \subseteq V$ y que $D \in \mathscr{D}$ es tal que $C = f^{-1}[D]$. Entonces $X \setminus V \subseteq X \setminus C = f^{-1}[Y \setminus D]$. Usando la hipótesis de que la función es cerrada, obtenemos que $f[X \setminus V]$ es cerrado en Y; y además, es tal que $f[X \setminus V] \subseteq Y \setminus D$, de donde se sigue que $D \subseteq Y \setminus f[X \setminus V]$. Ahora, debe existir $M \in \mathscr{M}$ con la propiedad: $D \subseteq M \subseteq Y \setminus f[X \setminus V]$. Lo anterior implica que $f^{-1}[M] \in \mathscr{N}$ y que:

$$\begin{aligned} C = f^{-1}[D] &\subseteq f^{-1}[M] \\ &\subseteq f^{-1}[Y \setminus f[X \setminus V]] \\ &= X \setminus f^{-1}[f[X \setminus V]] \\ &\subseteq X \setminus (X \setminus V) \\ &= V \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathscr{N}$ es una red en X módulo la cubierta compacta $\mathscr{C}$, lo que prueba que $Nag(X) \leq |\mathscr{N}| + \omega \leq Nag(Y)$.

3. Nuevamente supongamos que $\mathscr{C}$ es una cubierta compacta de X y que $\mathscr{N}$ es una red módulo $\mathscr{C}$ tal que $|\mathscr{N}| + \omega = Nag(X)$. De la hipótesis de que Y es un subespacio cerrado de X se obtiene que $\mathscr{C} \restriction Y = \{C \cap Y : C \in \mathscr{C}\}$ es una familia de subespacios compactos de Y que además es cubierta. No es difícil darse cuenta de que $\mathscr{N} \restriction Y = \{N \cap Y : N \in \mathscr{N}\}$ es red módulo $\mathscr{C} \restriction Y$ en Y; con lo que $Nag(Y) \leq |\mathscr{N} \restriction Y| + \omega \leq |\mathscr{N}| + \omega = Nag(X)$.

4. Al inicio de la sección se argumentó por qué $Nag(X) \leq nw(X) + \omega$. Así que sólo queda demostrar que $L(X) \leq Nag(X)$. El lector notará que la demostración de esta desigualdad es una modificación del regreso de 4.1.6, por lo cual se omiten algunos detalles.

   Comenzamos fijando una cubierta compacta $\mathscr{C}$ de X y a $\mathscr{N}$ una red módulo $\mathscr{C}$ tal que $|\mathscr{N}| \leq Nag(X)$. Supongamos que $\mathscr{U}$ es cualquier cubierta abierta de X y definamos a $\mathscr{U}_f$ como la colección de uniones finitas de elementos de $\mathscr{U}$.

   Llamaremos a un elemento $N \in \mathscr{N}$ como "marcado" si existe $U \in \mathscr{U}_f$ tal que $N \subseteq U$. Y definamos el conjunto $A = \{N \in \mathscr{N} : N \text{ es marcado}\}$. Resulta que A es no vacío y $|A| \leq |\mathscr{N}| \leq Nag(X)$. Ahora, para cada $N \in A$, fijemos un elemento $U_N \in \mathscr{U}_f$ de modo que $N \subseteq U_N$. Entonces el conjunto $\{U_N : N \in A\} \subseteq \mathscr{U}_f$ es de cardinalidad a lo más $Nag(X)$ y es una cubierta abierta para X.

   Finalmente, para cada $N \in A$, fijemos un subconjunto finito $W_N \subseteq \mathscr{U}$ de modo que $U_N = \bigcup W_N$ y definamos a $\mathscr{V} = \{U \in \mathscr{U} : \exists N \in A(U \in W_N)\}$. Como $\{U_N : N \in A\}$ es cubierta de X, también lo es $\mathscr{V}$. Además, $|\mathscr{V}| \leq |A| \cdot \omega \leq Nag(X) \cdot \omega = Nag(X)$. Por lo tanto, $L(X) \leq |\mathscr{V}| \leq Nag(X)$.

5. Para cada $\alpha \in A$, fijemos una cubierta compacta $\mathscr{C}_\alpha$ de X_α y también fijemos a $\mathscr{N}_\alpha$ una red módulo $\mathscr{C}_\alpha$ de cardinalidad a lo más $Nag(X_\alpha)$. Por el teorema de Tychonoff,

$\mathscr{C} = \left\{ \prod_{\alpha \in A} C_\alpha : (\forall \alpha \in A)(C_\alpha \in \mathscr{C}_\alpha) \right\}$ es una familia de subconjuntos compactos de X. Más aún, $\mathscr{C}$ es cubierta para X. En efecto: supongamos que $x \in X$ es cualquiera. Para cada $\alpha \in A$, fijamos un elemento $C_\alpha \in \mathscr{C}_\alpha$ de modo que $x(\alpha) \in C_\alpha$. Entonces $x \in \prod_{\alpha \in A} C_\alpha$, por lo que $\mathscr{C}$ sí cubre a X.

Consideremos al conjunto $M = \bigcup_{\alpha \in A} \{\pi_a^{-1}[N_\alpha] : N_\alpha \in \mathscr{N}_\alpha\}$ y observe que, las hipótesis $|A| \leq \kappa$ y $|\mathscr{N}_\alpha| \leq Nag(X_\alpha) \leq \kappa$ (para toda $\alpha \in A$) implican que:

$$|M| \leq |A| \cdot sup\{|\mathscr{N}_\alpha| : \alpha \in A\} \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa.$$

Ahora definamos a $\mathscr{N} = \{\bigcap F : F \in [M]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\}$ y note que $|\mathscr{N}| \leq \kappa$. Para concluir, a continuación probaremos que $\mathscr{N}$ es red módulo $\mathscr{C}$ en el producto topológico:

Supongamos que $C = \prod_{\alpha \in A} C_\alpha \in \mathscr{C}$ es arbitrario y que $U \subseteq X$ es un abierto que contiene a C. Para todo $c \in C$, fijemos a V_c un abierto básico canónico del producto de modo que:

*) $c \in V_c \subseteq U$

**) $V_c = \bigcap_{\alpha \in F_c} \pi_\alpha^{-1}[V_\alpha^c]$, donde $F_c \subseteq A$ es finito y, para todo $\alpha \in F_c$, el conjunto V_α^c es abierto en X_α. De hecho, podemos decir que $V_c = \prod_{\alpha \in A} W_\alpha^c$, en donde
$$W_\alpha^c = \begin{cases} V_\alpha^c & si \quad \alpha \in F_c \\ X_\alpha & si \quad \alpha \in A \setminus F_c \end{cases}$$

Entonces $\{V_c : c \in C\}$ es una cubierta abierta para C, de donde debe existir $B \subseteq C$ finito y tal que $C \subseteq \bigcup_{c \in B} V_c$. Además $\bigcup_{c \in B} V_c \subseteq U$.

Definimos $F = \bigcup_{c \in B} F_c$ el cual es un subconjunto finito de A. Entonces, para cada $\alpha \in F$ tenemos que:

$$\begin{aligned} C_\alpha = \pi_\alpha[C] &\subseteq \pi_\alpha[\bigcup_{c \in B} V_c] \\ &= \bigcup_{c \in B} \pi_\alpha[V_c] \\ &= \bigcup_{c \in B} W_\alpha^c \end{aligned}$$

Dado que $\bigcup_{c \in B} W_\alpha^c$ es abierto en X_α y $\mathscr{N}_\alpha$ es red módulo $\mathscr{C}_\alpha$, existe $N_\alpha \in \mathscr{N}_\alpha$ tal que $C_\alpha \subseteq N_\alpha \subseteq \bigcup_{c \in B} W_\alpha^c$.

Entonces, para toda $\alpha \in F$:

$$C \subseteq \pi_\alpha^{-1}[C_\alpha] \subseteq \pi_\alpha^{-1}[N_\alpha]$$

Así que definamos a $N = \bigcap_{\alpha \in F} \pi_\alpha^{-1}[N_\alpha] \in \mathscr{N}$. Es claro que $C \subseteq N$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} N = \bigcap_{\alpha \in F} \pi_\alpha^{-1}[N_\alpha] &\subseteq \bigcap_{\alpha \in F} \pi_\alpha^{-1}\left[\bigcup_{c \in B} W_\alpha^c\right] \\ &= \bigcap_{\alpha \in F} \bigcup_{c \in B} \pi_\alpha^{-1}[W_\alpha^c] \\ &= \bigcup_{c \in B} \bigcap_{\alpha \in F} \pi_\alpha^{-1}[W_\alpha^c] \\ &= \bigcup_{c \in B} \bigcap_{\alpha \in F_c} \pi_\alpha^{-1}[V_\alpha^c] \\ &= \bigcup_{c \in B} V_c \end{aligned}$$

De esta manera, obtenemos que $N \subseteq U$, con lo que se concluye que $\mathscr{N}$ es red módulo $\mathscr{C}$; y por lo tanto $Nag(X) \leq |\mathscr{N}| + \omega \leq \kappa + \omega = \kappa$.

■

De manera natural se sigue el siguiente corolario:

Corolario 4.1.11. *La clase de espacios Lindelöf-Σ es cerrada bajo imágenes continuas T_3, subespacios cerrados y productos numerables.*

En [11] Tkachenko demostró que el peso de cualquier espacio Tychonoff infinito es menor o igual que su peso de red elevado a su número de Nagami. Casarrubias, García y Rojas ampliaron este resultado a la clase de espacios T_3.

Teorema 4.1.12 (Casarrubias - García - Rojas [4])**.** *Para todo espacio (X, τ) T_3:*

$$w(X) \leq nw(X)^{Nag(X)}.$$

Demostración:

Si X es un conjunto finito, entonces el espacio (X, τ) es discreto y compacto; y así $w(X) = nw(X)$ y $Nag(X) = \omega$, con lo que la desigualdad $w(X) \leq nw(X)^{Nag(X)}$ es verdadera.

Por el contrario, si X es infinito, entonces tanto $w(X)$ como $nw(X)$ son infinitos porque X es T_0 [2]. Fijemos una cubierta compacta $\mathscr{C}$ de (X, τ) y a $\mathscr{N}$ una red módulo $\mathscr{C}$ con $|\mathscr{N}| \leq Nag(X)$. Fijemos también una colección $\mathscr{B}$ de abiertos de τ tal que: $|\mathscr{B}| \leq nw(X)$

[2] Vea 2.1.4 y también recuerde que $nw(X) \leq w(X)$

y $\mathscr{B}$ es base para una topología Hausdorff θ de X con $\theta \subseteq \tau$ [3]. Como el espacio (X, θ) es un T_0 infinito, necesariamente $\mathscr{B}$ debe ser infinito. De esto obtenemos que el conjunto $\mathscr{B}_0 = \{X\} \cup \{\bigcap A : A \in [\mathscr{B}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\} \cup \{\bigcup A : A \in [\mathscr{B}]^{<\omega}\}$ también es infinito; de hecho, $|\mathscr{B}_0| = |\mathscr{B}|$. Observe que $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}_0 \subseteq \theta$, de donde se sigue que $\mathscr{B}_0$ también es base para θ.

Como $|\mathscr{B}_0^{\mathscr{N}}| \leq nw(X)^{Nag(X)}$, será suficiente probar que $w(X, \tau) \leq |\mathscr{B}_0^{\mathscr{N}}|$. Para ello, primero definimos para toda función $f \in \mathscr{B}_0^{\mathscr{N}}$, al abierto (de τ) $W_f = X \setminus \overline{\left(\bigcup_{N \in \mathscr{N}} [N \setminus f(N)] \right)}^{\tau}$.
Entonces el conjunto $\mathscr{W} = \{W_f : f \in \mathscr{B}_0^{\mathscr{N}}\}$ tiene a lo más $|\mathscr{B}_0^{\mathscr{N}}|$ elementos. A continuación probamos que $\mathscr{W}$ es base para (X, τ):

Es claro que $\mathscr{W} \subseteq \tau$. Por otra parte, supongamos que $U \in \tau$ y $x \in U$ son cualesquiera elementos. Para U tenemos los siguientes casos:

Caso 1: $U = X$.
En este caso consideramos a la función $f : \mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{B}_0$ definida por: $f(N) = X$ para toda $N \in \mathscr{N}$. Es decir, f es la función constante de valor X. Es claro que $W_f = X \setminus \overline{(\emptyset)}^{\tau} = X$ satisface que $x \in W_f \subseteq U$.

Caso 2: $U \neq X$.
Sea $\kappa = |X \setminus U| > 0$. Por la regularidad de (X, τ) podemos fijar un abierto $V \in \tau$ tal que $x \in V \subseteq \overline{V}^{\tau} \subseteq U$. Construiremos por medio de recursión colecciones $\{N_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq \mathscr{N}$ y $\{B_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq \mathscr{B}_0$ para algún $\lambda \leq \kappa$ de modo que: $X \setminus U \subseteq \bigcup_{\alpha<\lambda} (N_\alpha \setminus B_\alpha)$.

Primer paso de la recursión: Fijemos un elemento $y_0 \in X \setminus U$. Como $\mathscr{C}$ es una cubierta compacta de X, podemos fijar un elemento $C_0 \in \mathscr{C}$ tal que $y_0 \in C_0$. Resulta que $C_0 \setminus U$ y $C_0 \cap \overline{V}^{\tau}$ son subespacios compactos y ajenos de (X, τ). Es fácil notar que la contención $\theta \subseteq \tau$ implica que $C_0 \setminus U$ y $C_0 \cap \overline{V}^{\tau}$ también son compactos ajenos en (X, θ). Recordando que un espacio Hausdorff, dos subconjuntos compactos ajenos pueden ser separados por medio de abiertos ajenos, entonces para $C_0 \setminus U$ y $C_0 \cap \overline{V}^{\tau}$ existen $K_0, L_0 \in \theta$ tales que $C_0 \setminus U \subseteq K_0$, $C_0 \cap \overline{V}^{\tau} \subseteq L_0$ y $K_0 \cap L_0 = \emptyset$. Además, para cada $c \in C_0 \setminus U$ existe $B_c \in \mathscr{B}$ con la propiedad: $c \in B_c \subseteq K_0$; por lo que el conjunto $\{B_c : c \in C_0 \setminus U\}$ es una cubierta abierta de $C_0 \setminus U$ en (X, θ), y por la compacidad de $C_0 \setminus U$, existe $F \subseteq C_0 \setminus U$ finito y tal que $\{B_c : c \in F\}$ cubre a $C_0 \setminus U$. Definamos $A_0 = \bigcup \{B_c : c \in F\}$; entonces, es claro que $A_0 \in \mathscr{B}_0$ y $C_0 \setminus U \subseteq A_0 \subseteq K_0$. De manera similar, podemos encontrar otro abierto $B_0 \in \mathscr{B}_0$ tal que $C_0 \cap \overline{V}^{\tau} \subseteq B_0 \subseteq L_0$. De lo anterior, hemos obtenido dos abiertos ajenos $A_0, B_0 \in \mathscr{B}_0$ que contienen a $C_0 \setminus U$ y $C_0 \cap \overline{V}^{\tau}$ respectivamente. A continuación, hacemos algunas observaciones sobre estos conjuntos:

i) Debido a que $y_0 \in X \setminus U$ y $y_0 \in C_0$, entonces $y_0 \in C_0 \setminus U \subseteq A_0$. Por lo que $y_0 \notin B_0$.

ii) De la contención $\overline{V}^{\tau} \subseteq U$, tenemos que $C_0 \setminus U = C_0 \cap (X \setminus U) \subseteq X \setminus \overline{V}^{\tau}$. Y como $C_0 \setminus U \subseteq A_0$, entonces:

$$C_0 \setminus U \subseteq A_0 \cap (X \setminus \overline{V}^{\tau}) = A_0 \setminus \overline{V}^{\tau}. \tag{1}$$

[3] Vea 2.2.1

Por otra parte, como $C_0 \cap U = [(C_0 \cap U) \setminus \overline{V}^\tau] \cup [(C_0 \cap U) \cap \overline{V}^\tau]$ tenemos que:

$$C_0 \cap U \subseteq [U \setminus \overline{V}^\tau] \cup [(C_0 \cap \overline{V}^\tau) \cap U] \subseteq [U \setminus \overline{V}^\tau] \cup [B_0 \cap U]. \tag{2}$$

De (1) y (2) obtenemos lo siguiente:

$$C_0 = (C_0 \setminus U) \cup (C_0 \cap U) \subseteq (A_0 \setminus \overline{V}^\tau) \cup (U \setminus \overline{V}^\tau) \cup (B_0 \cap U). \tag{3}$$

Observe ahora que el conjunto $(A_0 \setminus \overline{V}^\tau) \cup (U \setminus \overline{V}^\tau) \cup (B_0 \cap U)$ mencionado en (3) es un abierto de (X, τ); y dado que $\mathscr{N}$ es red módulo $\mathscr{C}$ (en (X, τ)), debe existir $N_0 \in \mathscr{N}$ tal que:

$$C_0 \subseteq N_0 \subseteq (A_0 \setminus \overline{V}^\tau) \cup (U \setminus \overline{V}^\tau) \cup (B_0 \cap U). \tag{4}$$

iii) De los incisos anteriores se sigue que $y_0 \in N_0 \setminus B_0$.

Si ocurre que $X \subseteq N_0 \setminus B_0$, definimos $\lambda = 1$ y terminamos la construcción. En el caso contrario, continuamos con dicha construcción.

Segundo paso de la recursión: Supongamos que α es un ordinal positivo y menor o igual que κ para el cual tenemos construidos los conjuntos $\{y_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq X \setminus U$, $\{N_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq \mathscr{N}$ y $\{B_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq \mathscr{B}_0$ de modo que $y_\beta \in N_\beta \setminus B_\beta$ para todo $\beta < \alpha$. Si ocurre que $X \setminus U \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} (N_\beta \setminus B_\beta)$, definimos $\lambda = \alpha$ y terminamos la construcción. En el caso contrario, procedemos de la siguiente manera:

Fijamos un elemento $y_\alpha \in (X \setminus U) \setminus \left(\bigcup_{\beta<\alpha} (N_\beta \setminus B_\beta) \right)$. Como $\mathscr{C}$ es una cubierta compacta para X, fijamos también un $C_\alpha \in \mathscr{C}$ tal que $y_\alpha \in C_\alpha$. Entonces, los conjuntos $C_\alpha \setminus U$ y $C_\alpha \cap \overline{V}^\tau$ son subespacios compactos y ajenos de (X, θ). Resulta que:

1) Existen abiertos ajenos $A_\alpha, B_\alpha \in \mathscr{B}_0$ de modo que: $C_\alpha \setminus U \subseteq A_\alpha$ y $C_\alpha \cap \overline{V}^\tau \subseteq B_\alpha$

2) $C_\alpha \subseteq (A_\alpha \setminus \overline{V}^\tau) \cup (U \setminus \overline{V}^\tau) \cup (B_\alpha \cap U)$, y dado que el conjunto $(A_\alpha \setminus \overline{V}^\tau) \cup (U \setminus \overline{V}^\tau) \cup (B_\alpha \cap U)$ es abierto en (X, τ) y $\mathscr{N}$ es red módulo $\mathscr{C}$, existe $N_\alpha \in \mathscr{N}$ tal que:

$$C_\alpha \subseteq N_\alpha \subseteq (A_\alpha \setminus \overline{V}^\tau) \cup (U \setminus \overline{V}^\tau) \cup (B_\alpha \cap U). \tag{4.1}$$

3) $y_\alpha \in N_\alpha \setminus B_\alpha$.

Si ocurre que $X \setminus U \subseteq \left(\bigcup_{\beta<\alpha} (N_\beta \setminus B_\beta) \right) \cup (N_\alpha \setminus B_\alpha)$, tomamos $\lambda = \alpha + 1$ y termina el proceso. De lo contrario, continuamos.

Esta construcción termina en a lo más κ pasos.

Supongamos que $\lambda \leq \kappa$ es tal que dicha construcción termina en λ pasos, que las colecciones $\{y_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq X \setminus U$, $\{N_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq \mathscr{N}$ y $\{B_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq \mathscr{B}_0$ son tales que $y_\alpha \in N_\alpha \setminus B_\alpha$ para todo $\alpha < \lambda$ y $X \setminus U \subseteq \bigcup_{\alpha<\lambda} (N_\alpha \setminus B_\alpha)$. Por la construcción de estos conjuntos, la ecuación en (4.1) es válida para todo $\alpha < \lambda$, lo que implica que, para todo $\alpha < \lambda$:

$$N_\alpha \setminus B_\alpha \subseteq (A_\alpha \setminus \overline{V}^\tau) \cup (U \setminus \overline{V}^\tau) \subseteq X \setminus V \tag{5}$$

y

$$y_\alpha \in (N_\alpha \setminus B_\alpha) \setminus U = N_\alpha \setminus (B_\alpha \cup U) = (N_\alpha \cap A_\alpha) \setminus U = N_\alpha \setminus U. \tag{6}$$

Por otra parte, si $\beta, \gamma < \lambda$ son elementos distintos, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\beta < \gamma$; así que, por construcción, tenemos lo siguiente:

$$y_\gamma \in [(N_\gamma \setminus B_\gamma) \setminus U] \setminus [(N_\beta \setminus B_\beta) \setminus U]$$

y por la ecuación en (6) se sigue que:

$$y_\gamma \in (N_\gamma \setminus U) \setminus (N_\beta \setminus U)$$

con lo que se concluye que $N_\gamma \neq N_\beta$ para todo $\gamma \neq \beta$.

Por el argumento anterior, la función $f : \mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{B}_0$ definida por medio de la regla:

$$f(N) = \begin{cases} B_\alpha & \text{si } N = N_\alpha \text{ para alguna } \alpha < \lambda \\ X & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

es una función bien definida.

Observe ahora que la ecuación en (5) implica que:

$$X \setminus U \subseteq \bigcup_{N \in \mathscr{N}} (N \setminus f(N)) \subseteq X \setminus V,$$

lo que a su vez implica que:

$$X \setminus U = \overline{X \setminus U}^\tau \subseteq \overline{\bigcup_{N \in \mathscr{N}} (N \setminus f(N))}^\tau \subseteq \overline{X \setminus V}^\tau = X \setminus V;$$

y en consecuencia,

$$x \in V \subseteq W_f = X \setminus \overline{\bigcup_{N \in \mathscr{N}} (N \setminus f(N))}^\tau \subseteq U;$$

es decir, hemos encontrado un elemento $W_f \in \mathscr{W}$ tal que $x \in W_f \subseteq U$ lo que termina la prueba de que $\mathscr{W}$ es base para (X, τ).

Por lo tanto, $w(X,\tau) \leq |\mathscr{W}| \leq nw(X,\tau)^{Nag(X,\tau)}$. ■

El número de Nagami se comporta muy bien en espacios Tychonoff. La siguiente proposición es una caracterización del Nagami en estos espacios.

Proposición 4.1.13. *Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier espacio Tychonoff X y cualquier cardinal infinito κ:*

1. *$Nag(X) \leq \kappa$;*

2. *existen un espacio Tychonoff M con $w(M) \leq \kappa$, un espacio compacto Hausdorff K y un subespacio cerrado Y de $M \times K$ tales que X es imagen continua de Y;*

3. *existen un espacio Tychonoff L con $w(L) \leq \kappa$, un espacio Tychonoff Z y funciones $g : Z \longrightarrow L$ y $f : Z \longrightarrow X$ tales que g es una función perfecta y f es una función continua y suprayectiva.*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \\ L & \end{tikzcd}$$

Demostración:

$1 \Rightarrow 2$: Sea $\mathscr{N}$ una red módulo una cubierta compacta $\mathscr{C}$ de X de modo que $|\mathscr{N}| \leq Nag(X) \leq \kappa$. Definamos $K = \beta X$ (la compactación de Stone-Čech de X) y definamos también a la familia $\mathscr{F} = \{\overline{N}^K : N \in \mathscr{N}\}$. Claramente $|\mathscr{F}| \leq |\mathscr{N}| \leq \kappa$, por lo que podemos fijar una enumeración (tal vez con repeticiones) $\{F_\iota : \iota \in \kappa\}$ del conjunto $\mathscr{F}$.

Consideremos en κ a la topología discreta, en κ^κ a la topología producto y definamos al conjunto $M = \{m \in \kappa^\kappa : \bigcap\{F_{m(\iota)} : \iota \in \kappa\} \subseteq X\}$. Para verificar que $M \neq \emptyset$, supongamos que $C \in \mathscr{C}$ es fijo y no vacío. Es claro que $C \subseteq X$, lo que implica la existencia de un $N \in \mathscr{N}$ que contiene a C; razón por la cual el conjunto $A = \{N \in \mathscr{N} : C \subseteq N\}$ es no vacío. Como el espacio X es T_1, por el lema 4.1.7 (2) tenemos que $C = \bigcap A$. Más aún, resulta que $C = \bigcap\{\overline{N}^K : N \in A\}$. En efecto: la contención $C \subseteq \{\overline{N}^K : N \in A\}$ es inmediata. Para probar la contención contraria, supongamos que existe $x \in (\bigcap\{\overline{N}^K : N \in A\}) \setminus C$. Debido a que C es compacto en X, C es compacto en K; y al ser K un espacio Hausdorff, C es cerrado en K. Entonces, $\{x\}$ y C son cerrados ajenos en K. Por la normalidad de K, sabemos de la existencia de abiertos ajenos de K, digamos U y V, tales que $\{x\} \subseteq U$ y $C \subseteq V$. Lo anterior implica que $x \notin \overline{V}^K$. Por otra parte, C está contenido en el abierto $V \cap X$ de X, de donde existe $N \in \mathscr{N}$ con $C \subseteq N \subseteq V \cap X$. Entonces $N \in A$, $C \subseteq \overline{N}^K \subseteq \overline{V}^K$ y $x \notin \overline{N}^K$ lo cual contradice la elección de x. Por lo tanto, no existe tal elemento x; y en consecuencia, $C = \bigcap\{\overline{N}^K : N \in A\}$. Ahora, como $\{\overline{N}^K : N \in A\} \subseteq \mathscr{F} = \{F_\iota : \iota \in \kappa\}$, existe una función $m \in \kappa^\kappa$ (posiblemente no inyectiva) de modo que $\{\overline{N}^K : N \in A\} = \{F_{m(\iota)} : \iota \in \kappa\}$. Entonces $m \in M$, y por lo tanto M es no vacío.

Dotando a M de la topología de subespacio respecto del producto κ^κ obtenemos un espacio Tychonoff tal que $w(M) \leq w(\kappa^\kappa) \leq \kappa$. Para cada $m \in M$, definamos $C(m) = \bigcap\{F_{m(\iota)} : \iota \in \kappa\}$. Definamos también al conjunto $Y = \{(m, x) \in M \times K : x \in C(m)\}$. Para probar que Y es cerrado, supongamos que $(m, x) \in (M \times K) \setminus Y$ es cualquiera. Por la definición de Y, $x \notin C(m)$, de donde existe un elemento $\iota \in \kappa$ tal que $x \notin F_{m(\iota)}$; es decir, x es elemento del abierto $K \setminus F_{m(\iota)}$. Consideremos al conjunto $U = \pi_\iota^{-1}[\{m(\iota)\}] \cap M = \{f \in \kappa^\kappa : f(\iota) = m(\iota)\} \cap M$, donde $\pi_\iota : \kappa^\kappa \longrightarrow \kappa$ es la ι-ésima función proyección. Entonces U es abierto en M y cumple que $m \in U$. Es claro que $(m, x) \in U \times (K \setminus F_{m(\iota)})$ y $U \times (K \setminus F_{m(\iota)})$ es abierto en $M \times K$. Además, si $(n, y) \in U \times (K \setminus F_{m(\iota)})$ es cualquiera, entonces $n(\iota) = m(\iota)$ y $y \notin F_{m(\iota)} = F_{n(\iota)}$, lo que implica que $y \notin C(n)$ y a su vez que $(n, y) \notin Y$; esto prueba que $U \times (K \setminus F_{m(\iota)}) \subseteq (M \times K) \setminus Y$. Por lo tanto, Y es cerrado en $M \times K$.

Finalmente, para probar que X es imagen continua de Y, consideremos a la función proyección $\pi_K : M \times K \longrightarrow K$ que es continua. Si $(n, y) \in Y$, entonces $\pi_K(n, y) = y \in C(n) \subseteq X$ por la propia definición de M, y así $\pi_K[Y] \subseteq X$. Por otra parte, si $x \in X$, podemos fijar un elemento $C \in \mathscr{C}$ de modo que $x \in C$. Entonces $\{N \in \mathscr{N} : C \subseteq N\} \neq \emptyset$ lo que implica que $\mathscr{G} = \{\overline{N}^K : N \in \mathscr{N} \text{ y } C \subseteq N\} \neq \emptyset$. Por lo ya demostrado líneas arriba, $C = \bigcap \mathscr{G}$. Como $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F} = \{F_\iota : \iota \in \kappa\}$, fijamos una función $m \in \kappa^\kappa$ (posiblemente no inyectiva) tal que $\mathscr{G} = \{F_{m(\iota)} : \iota \in \kappa\}$. Entonces $C = \cap \mathscr{G} = C(m)$; por lo que $m \in M$. De hecho, $(m, x) \in Y$ y $\pi_K(m, x) = x$ lo que prueba que $X \subseteq \pi_K[Y]$.

$2 \Rightarrow 3$: Como X es imagen continua de Y, supongamos que $f : Y \longrightarrow X$ es continua y suprayectiva. Por la hipótesis de que K es compacto Hausdorff, la proyección $\pi_M : M \times K \longrightarrow M$ es una función cerrada [13, 3.1.16]. Es fácil notar que π_M tiene fibras compactas porque $\pi_M^{-1}[\{m\}] = \{m\} \times K$ es compacto para todo $m \in M$; y así, π_M es perfecta. Luego, debido a que Y es un subespacio cerrado de $M \times K$, la restricción $\pi_M \restriction Y : Y \longrightarrow \pi_M[Y]$ también es perfecta. Observe que tanto Y como $\pi_M[Y]$ son espacios Tychonoff y $w(\pi_M[Y]) \leq w(M) \leq \kappa$. Finalmente, definamos a los espacios $Z = Y$, $L = \pi_M[Y]$ y a la función $g = \pi_M \restriction Y : Y \longrightarrow \pi_M[Y]$.

$3 \Rightarrow 1$: Primero observe que $Nag(L) \leq nw(L) + \omega \leq w(L) + \omega \leq \kappa + \omega = \kappa$. Ahora, dado que $g : Z \longrightarrow L$ es perfecta, invocamos a la proposición 4.1.10 inciso (2) para obtener que $Nag(Z) = Nag(L) \leq \kappa$. Por otra parte, dado que $f : Z \longrightarrow X$ es continua y suprayectiva, de la misma proposición inciso (1) se sigue que $Nag(X) \leq Nag(Z) \leq \kappa$.

■

El inciso (3) de la proposición anterior es la generalización a cualquier cardinal $\kappa \geq \omega$ de una caracterización de los espacios Lindelöf-Σ que será enunciada en el siguiente corolario.

Para poder enunciar tal caracterización, a continuación introducimos dos definiciones que pueden ser consultadas en [17, p. 25] y [18, p. 19] respectivamente.

1. Dado un espacio topológico X, una familia $\mathcal{U} \subseteq \mathscr{P}(X)$ y un conjunto $A \subseteq X$, se define la estrella de A respecto de $\mathcal{U}$ como el conjunto: $St(A,\mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : A \cap U \neq \emptyset\}$. Si $A = \{x\}$, escribimos $St(x,\mathcal{U})$ en lugar de $St(\{x\},\mathcal{U})$.

2. Un espacio Tychonoff X es un *espacio-p* si existe una sucesión $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ de cubiertas abiertas de X en el espacio βX tal que: para cada $x \in X$, el conjunto $\bigcap\limits_{n \in \omega} St(x,\mathcal{U}_n)$ está contenido en X.

Los espacios-p que adicionalmente tienen la propiedad de Lindelöf, son llamados *espacios Lindelöf-p* y se caracterizan por ser espacios Tychonoff que son preimágenes perfectas de espacios metrizables y separables; es decir, un espacio Tychonoff X es Lindelöf-p si y sólo si existe un espacio Y que es metrizable y separable y existe una función perfecta $f : X \longrightarrow Y$.

Corolario 4.1.14. *Un espacio Tychonoff X es un espacio Lindelöf-Σ si y sólo si es imagen continua de un espacio Lindelöf-p.*

Es claro que cualquier espacio Lindelöf-p es imagen continua de sí mismo, por lo que todo espacio Lindelöf-p es Lindelöf-Σ. Sin embargo, no es verdadero que todo espacio Lindelöf-Σ sea Lindelöf-p; por ejemplo, el subespacio $N = \omega \cup \{x\}$ de $\beta\omega$ donde $x \in \beta\omega \setminus \omega$ es fijo (vea el ejemplo 231 del libro [18].

4.2. El Teorema de Tkachenko.

Como mencionamos en la sección anterior, Tkachenko demostró que para todo espacio Tychonoff infinito X, se cumplen las desigualdades:

$$w(X) \leq |C(X)| \leq nw(X)^{Nag(X)}.$$

En la demostración de que $|C(X)| \leq nw(X)^{Nag(X)}$ Tkachenko usó técnicas de la Cp-teoría y otras herramientas que a continuación se introducen. Comenzamos con el con la noción de i-peso.

Dado un espacio Tychonoff X, se denota el i-peso de X como $iw(X)$ y de define como el mínimo número cardinal κ para el cual existe un espacio Tychonoff Y y una condensación (es decir, una función biyectiva y continua) $f : X \longrightarrow Y$ tal que $w(Y) \leq \kappa$.

Observe que para todo espacio Tychonoff X la función identidad $id_X : X \longrightarrow X$ es una condensación, por lo que $iw(X) \leq w(X)$. De hecho, para todo espacio Tychonoff X se satisface la desigualdad: $iw(X) \leq nw(X)$. A continuación se demuestra este hecho.

Proposición 4.2.1. *Para todo espacio Tychonoff X: $iw(X) \leq nw(X)$.*

Demostración: Para X tenemos los siguientes casos:

Caso 1: X es finito.

En este caso, X al ser T_1 debe ser un espacio discreto, y por ello, $nw(X) = |X|$. Por otra parte, si Y es un espacio Tychonoff y $f : X \longrightarrow Y$ es una condensación, entonces $|Y| = |X|$ lo que implica que Y también debe ser finito y discreto, y entonces, $w(Y) = |Y|$. Así, $w(Y) \leq nw(X)$ con lo que $iw(X) \leq nw(X)$.

Caso 2: X es infinito.

Dado que X es T_0, $nw(X)$ también debe ser infinito (vea la proposición 2.1.4). Supongamos que $nw(X) = \kappa$. Fijemos una red $\mathscr{N}$ de subconjuntos de X tal que $|\mathscr{N}| = \kappa > \omega$. Se afirma lo siguiente:

Afirmación: Existe una familia de funciones continuas $\mathscr{F} \subseteq C(X,[0,1])$ que separa puntos de X[4] y tal que $|\mathscr{F}| \leq \kappa$.

Demostración de la afirmación: Considere el conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{(N,M) \in \mathscr{N} \times \mathscr{N} : \exists f \in C(X,[0,1]) \left(f[N] \subseteq \left[0,\frac{1}{3}\right) \wedge f[M] \subseteq \left(\frac{2}{3},1\right]\right)\right\}.$$

Para probar que $\mathcal{B} \neq \emptyset$, supongamos que $x,y \in X$ son distintos. Por la hipótesis de que X es Tychonoff, sabemos que existe $f \in C(X,[0,1])$ tal que $f(x)=0$ y $f(y)=1$. Entonces $x \in f^{-1}\left[\left(0,\frac{1}{3}\right]\right]$, $y \in f^{-1}\left[\left(\frac{2}{3},1\right]\right]$ y los conjuntos $f^{-1}\left[\left(0,\frac{1}{3}\right]\right]$ y $f^{-1}\left[\left(\frac{2}{3},1\right]\right]$ son abiertos de X. Dado que $\mathscr{N}$ es red, tenemos la existencia de elementos $N,M \in \mathscr{N}$ que cumplen: $x \in N \subseteq f^{-1}\left[\left(0,\frac{1}{3}\right]\right]$ y $y \in M \subseteq f^{-1}\left[\left(\frac{2}{3},1\right]\right]$. Lo anterior implica que $f[N] \subseteq \left(0,\frac{1}{3}\right]$ y $f[M] \subseteq \left(\frac{2}{3},1\right]$; es decir, el par (N,M) es elemento de $\mathcal{B}$.

Para cada $(N,M) \in \mathcal{B}$, fijemos una función $f_{(N,M)} \in C(X,[0,1])$ tal que $f_{(N,M)}[N] \subseteq \left[0,\frac{1}{3}\right)$ y $f_{(N,M)}[M] \subseteq \left(\frac{2}{3},1\right]$. Y definamos $\mathscr{F} = \left\{f_{(N,M)} : (N,M) \in \mathcal{B}\right\}$.

Es claro que $|\mathscr{F}| \leq |\mathcal{B}| \leq |\mathscr{N} \times \mathscr{N}| = \kappa \cdot \kappa = \kappa$.

Finalmente, para verificar que $\mathscr{F}$ separa puntos de X, se usará un razonamiento similar a un argumento utilizado líneas arriba. Supongamos que $x,y \in X$ son arbitrarios y distintos. Entonces existe $f \in C(X,[0,1])$ tal que $f(x)=0$ y $f(y)=1$. Esto implica la existencia de elementos $N,M \in \mathscr{N}$ con $x \in N \subseteq f^{-1}\left[\left[0,\frac{1}{3}\right)\right]$ y $y \in M \subseteq f^{-1}\left[\left(\frac{2}{3},1\right]\right]$. Luego, $(N,M) \in \mathcal{B}$; por lo que podemos considerar a la respectiva función $f_{(N,M)} \in \mathscr{F}$. Entonces $f_{(N,M)}(x) \in f_{(N,M)}[N] \subseteq \left[0,\frac{1}{3}\right)$ y $f_{(N,M)}(y) \in f_{(N,M)}[M] \subseteq \left(\frac{2}{3},1\right]$, con lo que $f_{(N,M)}(x) \neq f_{(N,M)}(y)$ lo que termina la afirmación. $\square$

Consideremos ahora a la función producto diagonal $\Delta\mathscr{F} : X \longrightarrow [0,1]^{\mathscr{F}}$ cuya regla de correspondencia es: $\Delta\mathscr{F}(x)(g) = g(x)$ para todo $x \in X$ y todo $g \in \mathscr{F}$. Al conjunto $[0,1]^{\mathscr{F}}$ se le supone con la topología producto.

Supongamos que para cada $g \in \mathscr{F}$, la función $\pi_g : [0,1]^{\mathscr{F}} \longrightarrow [0,1]$ es la proyección asociada a la coordenada g. Entonces, para cada $g \in \mathscr{F}$ se cumple lo siguiente:

$$(\pi_g \circ \Delta\mathscr{F})(x) = \pi_g(\Delta\mathscr{F}(x)) = \Delta\mathscr{F}(x)(g) = g(x);$$

por lo que $\pi_g \circ \Delta\mathscr{F} = g$ y es continua. Por tanto, la función producto diagonal $\Delta\mathscr{F}$ es continua.

Por otra parte, como $\mathscr{F}$ se para puntos de X, $\Delta\mathscr{F}$ resulta ser inyectiva. En efecto: para ello, supongamos que $w,z \in X$ y $w \neq z$. Sabemos que existe $f \in \mathscr{F}$ tal que $f(w) \neq f(z)$; esto implica que $\Delta\mathscr{F}(w)(f) = f(w) \neq f(z) = \Delta\mathscr{F}(z)(f)$ y, por lo tanto, $\Delta\mathscr{F}(w) \neq \Delta\mathscr{F}(z)$ lo que prueba la inyectividad del producto diagonal.

Ahora, supongamos que $\Delta\mathscr{F}[X]$ tiene la topología de subespacio respecto del producto $[0,1]^{\mathscr{F}}$. Entonces $\Delta\mathscr{F}[X]$ es un Tychonoff y además $w(\Delta\mathscr{F}[X]) \leq w([0,1]^{\mathscr{F}}) \leq \kappa$.

Por último, observe que la función $\Delta\mathscr{F} : X \longrightarrow \Delta\mathscr{F}[X]$ es una condensación. De esto se sigue que: $iw(X) \leq w(\Delta\mathscr{F}[X]) \leq \kappa = nw(X)$. $\blacksquare$

[4]Es decir, que para todo par de puntos $x,y \in X$ distintos, existe $f \in \mathscr{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Una propiedad sencilla de verificar sobre el i-peso es que es monótono; es decir, no incrementa bajo subespacios. El argumento es el siguiente: si suponemos que X es Tychonoff y Y es un subespacio de X, podemos fijar un espacio Tychonoff Z y a una función $f : X \longrightarrow Z$ tales que $w(Z) = iw(X)$ y f es una condensación. Entonces $f \restriction Y : Y \longrightarrow f[Y]$ también es una condensación, y así: $iw(Y) \leq w(f[Y]) \leq w(Z) = iw(X)$.

Además de la proposición anterior, otra manera de relacionar el i-peso de un espacio Tychonoff X con su peso de red es que, cuando X es infinito, se da la igualdad: $nw(X) = iw(X) \cdot Nag(X)$. Para probar esto último, haremos uso del siguiente lema.

Lema 4.2.2 (Arkhangel'skii)**.** *Sean $f : X \longrightarrow Y$, $g : X \longrightarrow Z$ y $h : Z \longrightarrow T$ funciones continuas suprayectivas con X, Y, Z, T espacios Hausdorff. Si f es perfecta y h es una condensación, entonces Z es imagen continua de un subespacio cerrado F de $T \times Y$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[rr, "h"] & & T \\ Y & & F \subseteq T \times Y \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

Demostración: Definamos $\psi = h \circ g : X \longrightarrow T$ y consideremos a los productos diagonales $\psi^* = \psi \Delta f : X \longrightarrow T \times Y$ y $g^* = g \Delta f : X \longrightarrow Z \times Y$. Por [13, 3.7.11], las funciones ψ^* y g^* son perfectas. Definamos también a la función $p : Z \times Y \longrightarrow T \times Y$ por medio de la regla: $p(z, y) = (h(z), y)$, entonces p es continua y, además, $\psi^* = p \circ g^*$. De hecho, de la hipótesis de que h es condensación, p también lo es. Así que, si consideramos a $\rho = p \restriction g^*[X] : g^*[X] \longrightarrow T \times Y$, trivialmente ρ es continua, inyectiva y satisface la igualdad: $\psi^* = \rho \circ g^*$.

Se afirma que ρ es una función cerrada. En efecto: supongamos que $F \subseteq g^*[X]$ es cerrado. Entonces $F = g^*[g^{*-1}[F]]$. Por la continuidad de g^*, $g^{*-1}[F]$ es cerrado en X. Por otra parte, como ψ^* es cerrada, lo anterior implica que $\psi^*[g^{*-1}[F]]$ es cerrado en $T \times Y$. Por último, $\psi^*[g^{*-1}[F]] = (\rho \circ g^*)[g^{*-1}[F]] = \rho[g^*[g^{*-1}[F]] = \rho[F]$, por lo que ρ sí envía cerrados en cerrados.

Como consecuencia de lo anterior, ρ es un encaje. Entonces ρ mapea homeomórfamente a $g^*[X]$ sobre $\psi^*[X] = \rho[g^*[X]]$ [5]. Definamos a $F = \psi^*[X]$, que es un subconjunto cerrado de $T \times Y$ porque ψ^* es cerrada.

Consideremos ahora a la función proyección $\pi_Z : Z \times Y \longrightarrow Z$. Es claro que $\pi_Z[g^*[X]] \subseteq Z$. Por otra parte, si $z \in Z$; por la suprayectividad de g, podemos fijar un elemento $x \in X$ de modo que $g(x) = z$. Entonces, $g^*(x) = (g(x), f(x)) = (z, f(x)) \in g^*[X]$ y $\pi_Z(g^*(x)) = z$, lo que muestra que $z \in \pi_Z[g^*[X]]$. Por lo tanto $\pi_Z[g^*[X]] = Z$; es decir, Z es imagen continua de $g^*[X]$. Y por transitividad, Z es imagen continua de F.

■

[5] La prueba es muy sencilla. Para la contención "$\supseteq$" suponga que $(t, y) \in \rho[g^*[X]]$; de donde existe $(z, \bar{y}) \in g^*[X]$ de modo que $\rho(z, \bar{y}) = (t, y)$. Sin embargo, $\rho(z, \bar{y}) = p(z, \bar{y}) = (h(z), \bar{y})$, por lo que $t = h(z)$ y $y = \bar{y}$. Luego, como $(z, y) \in g^*[X]$, existe $x \in X$ tal que $g^*(x) = (g(x), f(x)) = (z, y)$; y así, $z = g(x)$ y $y = f(x)$. Entonces $t = h(g(x)) = \psi(x)$ y $y = f(x)$; es decir, $(t, y) = (\psi(x), f(x)) = \psi^*(x) \in \psi^*[X]$. La contención contraria es similar.

Proposición 4.2.3. *Si X es un espacio Tychonoff infinito, entonces:*

$$nw(X) = iw(X) \cdot Nag(X).$$

Demostración: Primero hay que notar que dadas las hipótesis de X, $nw(X)$ debe ser un cardinal infinito. De hecho, $iw(X)$ también es infinito, ya que, si suponemos que Y es un Tychonoff de modo que $w(Y) = iw(X)$ y $f : X \longrightarrow Y$ es una condensación, entonces: $|Y| = |X| \geq \omega$ y al ser T_0, necesariamente $w(Y) \geq \omega$.

Definamos $\kappa = iw(X) \cdot Nag(X) \geq \omega$. Es claro que $iw(X) = w(Y) \leq \kappa$ y $Nag(X) \leq \kappa$. Usando la proposición 4.1.13, podemos fijar espacios Tychonoff A y B con $w(A) \leq \kappa$ y funciones $g : B \longrightarrow A$ y $h : B \longrightarrow X$ tales que g es perfecta y h es continua y suprayectiva. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \\ A & & \end{tikzcd}$$

En vista de las hipótesis del lema de Arkhangel'skii (4.2.2), sabemos de la existencia de un subespacio cerrado F del producto $Y \times A$ de modo que X es imagen continua de F. Observe que, como $w(Y) \leq \kappa$ y $w(A) \leq \kappa$, entonces $w(Y \times A) \leq \kappa$. Y por la monotonía del peso, se satisface que $w(F) \leq \kappa$; lo que implica $nw(F) \leq \kappa$. Recordando ahora que el peso de red no incrementa bajo imágenes continuas, se tiene la desigualdad:

$$nw(X) \leq nw(F) \leq \kappa = iw(X) \cdot Nag(X).$$

Por otra parte, ya se ha demostrado que $iw(X) \leq nw(X)$. Además, como $nw(X)$ es infinito, $Nag(X) \leq nw(X)$. Por lo tanto,

$$iw(X) \cdot Nag(X) \leq nw(X).$$

■

Como último requerimiento para la demostración del teorema de Tkachenko, necesitamos la noción de espacio κ-monolítico y de espacio κ-estable. A continuación, se hablará un poco sobre estos conceptos.

Dado κ un cardinal infinito, diremos que un espacio X es *κ-monolítico* si para todo subespacio Y de X con $|Y| \leq \kappa$, se cumple que $nw\left(\overline{Y}\right) \leq \kappa$.

Arkhangel'skii introdujo la noción de espacio κ-monolítico y ha sido de gran utilidad en la topología general. Un ejemplo claro de esto es el teorema en 4.2.4 sobre la dualidad de la κ-monoliticidad en el ámbito de la Cp-teoría, mismo que fue demostrado por Arkhangel'skii.

Para un cardinal κ, diremos que un espacio Tychonoff X es *κ-estable* si para todo espacio Tychonoff Y que es imagen continua de X y que su i-peso es menor o igual que κ ($iw(Y) \leq \kappa$), se cumple que $nw(Y) \leq \kappa$.

Teorema 4.2.4. *Para cualquier cardinal infinito κ, se tiene que un espacio Tychonoff X es κ-estable si y sólo si $Cp(X)$ es κ-monolítico.*

La demostración puede ser consultada en [1].

En seguida demostraremos que todo espacio Tychonoff X es siempre un espacio κ-estable para $\kappa = Nag(X)$.

Proposición 4.2.5. *Todo espacio Tychonoff es κ-estable para $\kappa = Nag(X)$.*

Demostración: Supongamos que $\kappa = Nag(X)$ y que Y es cualquier espacio Tychonoff que es imagen continua de X y satisface que $iw(Y) \leq \kappa$. Ahora fijemos un espacio Tychonoff Z tal que $w(Z) = iw(Y) \leq \kappa$ y una condensación $f : Y \longrightarrow Z$.

Recordando las propiedades del número de Nagami en 4.1.10, sabemos que este no incrementa bajo imágenes continuas, por lo cual, $Nag(Y) \leq \kappa$. De la caracterización del Nagami en 4.1.13, sabemos de la existencia de espacios Tychonoff A y B con $w(A) \leq \kappa$ y funciones $g : B \longrightarrow A$ y $h : B \longrightarrow Y$ tales que g es perfecta y h es continua y suprayectiva. Entonces, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[r, "f"] & Z \\ A & & \end{tikzcd}$$

Ahora estamos en posición de invocar el lema de Arkangel'skii (4.2.2) que garantiza la existencia de un subespacio cerrado F de $Z \times A$ tal que Y es imagen continua de F. Pero dése cuenta que $w(Z \times A) \leq \kappa$, lo que implica, por la monotonía del peso, que $w(F) \leq \kappa$; razón por la cual $nw(F) \leq \kappa$. Finalmente, como el peso de red no se incrementa bajo imágenes continuas, se tiene la desigualdad: $nw(Y) \leq \kappa$, y con esto se termina la prueba. ■

Una consecuencia inmediata del resultado anterior es que todo espacio Lindelöf-Σ es ω-estable. De hecho, la técnica usada en la demostración anterior permite demostrar algo más fuerte.

Corolario 4.2.6. *Todo espacio Lindelöf-Σ es un espacio estable; es decir, es un espacio κ-estable para cualquier cardinal κ infinito.*

Demostración: Supongamos que X es Lindelöf-Σ y que κ es cualquier cardinal infinito. Supongamos también que Y es un Tychonoff que es imagen continua de X e $iw(Y) \leq \kappa$. Fijemos un espacio Tychonoff Z y una condensación $f : Y \longrightarrow Z$ de modo que $w(Z) = iw(Y)$.

Por otra parte, dado que Y es imagen continua de X, se cumple la desigualdad: $Nag(Y) \leq Nag(X) = \omega \leq \kappa$. Usando ahora la proposición 4.1.13 para $Nag(Y) \leq \kappa$, podemos fijar dos espacios Tychonoff A y B con $w(A) \leq \kappa$ y funciones $g : B \longrightarrow A$ y $h : B \longrightarrow Y$ tales que g es perfecta y h es continua y suprayectiva. El diagrama es el siguiente:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[r, "f"] & Z \\ A & & \end{tikzcd}$$

En vista del cumplimiento de las hipótesis del lema 4.2.2, existe F subespacio cerrado de $Z \times A$ tal que X es imagen continua de F. Ahora, como $w(Z) \leq \kappa$ y $w(A) \leq \kappa$, entonces $w(Z \times A) \leq \kappa$; y por la monotonía del peso y la desigualdad: $nw(F) \leq w(F)$, se sigue que $nw(F) \leq \kappa$. Por último, usando el hecho de que X es imagen continua de F, tenemos que $nw(X) \leq nw(F) \leq \kappa$, como se quería probar. ■

Finalmente estamos en posición de enunciar y demostrar el teorema de Tkachenko.

Recuerde que la *estrechez de un espacio topológico* X en un punto $x \in X$ se define como el número cardinal infinito:

$$t(X,x) = \min\left\{\kappa \geq \omega : \left(\forall A \subseteq X \left[x \in \overline{A} \to \left(\exists B \subseteq A(x \in \overline{B} \wedge |B| \leq \kappa)\right)\right]\right)\right\}.$$

La *estrechez* del espacio X se define como: $t(X) = \sup\{t(X,x) : x \in X\}$.

Teorema 4.2.7 (Tkachenko). *Si X es un espacio Tychonoff infinito, entonces*

$$w(X) \leq |C(X)| \leq nw(X)^{Nag(X)}.$$

Demostración: Considere a la colección $\mathscr{B} = \{X \setminus f^{-1}[\{0\}] : f \in C(X)\}$. En seguida se demuestra que $\mathscr{B}$ es base para la topología de X:

Claramente los elementos de $\mathscr{B}$ son abiertos de X. Por otra parte, si suponemos que $U \subseteq X$ es abierto y $x \in U$, trivialmente x no pertenece al cerrado $X \setminus U$. Usando la hipótesis de que X es Tychonoff, fijamos una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f[X \setminus U] \subseteq \{0\}$. Entonces: $x \in X \setminus f^{-1}[\{0\}] \in \mathscr{B}$ y

$$X \setminus f^{-1}[\{0\}] \subseteq X \setminus f^{-1}[f[X \setminus U]] \subseteq X \setminus (X \setminus U) = U,$$

con lo que se concluye que $\mathscr{B}$ sí es base de X. Por tanto, $w(X) \leq |\mathscr{B}| \leq |C(X)|$.

Para demostrar la desigualdad $|C(X)| \leq nw(X)^{Nag(X)}$, primero definamos $\kappa = Nag(X)$. Por la hipótesis de que X es Tychonoff (y en particular T_0) infinito, sabemos que $nw(X) \geq \omega$. Además, por el teorema de dualidad del peso de red, $nw(X) = nw(Cp(X))$ (3.2.2). Entonces, $d(Cp(X)) \leq nw(X)$, por lo que podemos fijar un subconjunto denso e infinito D de $Cp(X)$ tal que $|D| \leq nw(X)$ [6].

Por otra parte, de la proposición 4.1.10 sabemos que para toda $n \in \mathbb{N}$:

$$L(X^n) \leq Nag(X^n) = Nag(X) = \kappa,$$

[6]Vea 1.1.6 y dese cuenta que como el $Cp(X)$ es infinito, no puede ocurrir que D sea finito.

lo que implica, por el teorema de Arkhangel'skii-Pytkeev [1, II.1.1], que $t(Cp(X)) \leq \kappa$. Esto significa que para todo $f \in Cp(X) = \overline{D}$, existe $A \subseteq D$ tal que $f \in \overline{A}$ y $|A| \leq \kappa$; es decir, $Cp(X) = \overline{D} \subseteq \bigcup\{\overline{A} : A \in [D]^{\leq\kappa}\}$. La contención contraria es evidente, con lo que

$$Cp(X) = \overline{D} = \bigcup\{\overline{A} : A \in [D]^{\leq\kappa}\}. \tag{1}$$

Por último, recuerde que X es κ-estable (proposición 4.2.5), por lo que $Cp(X)$ es κ-monolítico (proposición 4.2.4). Esto es, para todo $B \subseteq Cp(X)$ con $|B| \leq \kappa$, implica que $nw(\overline{B}) \leq \kappa$. Entonces, si $B \subseteq Cp(X)$ cumple lo anterior, al ser $\overline{B}$ un espacio T_0, debe ocurrir que $|\overline{B}| \leq 2^{nw(\overline{B})} \leq 2^\kappa$. Esto último, junto con el hecho de que $|[D]^{\leq\kappa}| = |D|^\kappa$ y la igualdad en (1), conlleva lo siguiente:

$$\begin{aligned}
|C(X)| &= |\bigcup\{\overline{A} : A \in [D]^{\leq\kappa}\}| \\
&\leq \sum_{A\in[D]^{\leq\kappa}} |\overline{A}| \\
&\leq \sum_{A\in[D]^{\leq\kappa}} 2^\kappa \\
&\leq |[D]^{\leq\kappa}| \cdot 2^\kappa \\
&= |D|^\kappa \cdot 2^\kappa \\
&\leq nw(X)^\kappa \cdot nw(X)^\kappa \\
&= nw(X)^{Nag(X)}
\end{aligned}$$

■

Para concluir este capítulo, se presentan los siguientes resultados que son consecuencia inmediata del teorema anterior.

Corolario 4.2.8. *Si X es un espacio Tychonoff infinito y Y es un subespacio denso de X, entonces $|C(X)| \leq nw(Y)^{Nag(Y)}$ y $w(X) \leq nw(Y)^{Nag(Y)}$.*

Demostración: Como $w(X) \leq |C(X)|$ será suficiente demostrar que $|C(X)| \leq nw(Y)^{Nag(Y)}$. Para hacer esto, consideremos el mapeo restricción $\pi_Y : C(X) \longrightarrow C(Y)$ definido por medio de la regla: $\pi_Y(f) = f \restriction Y$. Resulta que π_Y es inyectivo puesto que Y es denso en X; y en consecuencia $|C(X)| \leq |C(Y)|$. Ahora dése cuenta de que Y debe ser infinito en vista de que X es un Hausdorff infinito; por lo que es posible aplicar el teorema de Tkachenko para obtener: $|C(Y)| \leq nw(Y)^{Nag(X)}$. Por lo tanto, $|C(X)| \leq nw(Y)^{Nag(Y)}$. ■

El siguiente corolario reúne las equivalencias inmediatas de tener un subespacio denso que sea Lindelöf-Σ y que éste tenga peso de red a lo más $\mathfrak{c}$.

Corolario 4.2.9. *Sean X un espacio Tychonoff y Y un subespacio denso de X que es Lindelöf-Σ. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $iw(Y) \leq \mathfrak{c}$
2. $iw(X) \leq \mathfrak{c}$
3. $nw(Y) \leq \mathfrak{c}$
4. $nw(X) \leq \mathfrak{c}$
5. $w(Y) \leq \mathfrak{c}$
6. $w(X) \leq \mathfrak{c}$
7. $|C(X)| \leq \mathfrak{c}$
8. $|C(Y)| \leq \mathfrak{c}$

Demostración: Si X es un Tychonoff finito, trivialmente todas las condiciones son equivalentes. Así que supongamos que X es infinito.

Las implicaciones 2) $\Rightarrow$ 1), 4) $\Rightarrow$ 3) y 6) $\Rightarrow$ 5) se cumplen por la monotonía del *i-peso*, *peso de red* y *peso* respectivamente.

Para demostrar 8) $\Rightarrow$ 7), considere el mapeo restricción $\pi_Y : Cp(X) \longrightarrow Cp(Y)$ definido por medio de la regla: $\pi_Y(f) = f \restriction Y$. Como Y es denso en X, resulta que π_Y es inyectivo. Por lo cual, $|C(X)| \leq |C(Y)| \leq \mathfrak{c}$.

Ahora recuerde que para todo espacio Tychonoff Z se cumplen las desigualdades:

$$iw(Z) \leq nw(Z) \leq w(Z) \leq |C(Z)|;$$

razón por la cual las implicaciones 8) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1) y 7) $\Rightarrow$ 6) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 2) son verdaderas.

Hasta ahora no hemos usado la hipótesis de que Y es Lindelöf-Σ; es decir, que $Nag(Y) = \omega$. Se hace la observación de que Y es infinito porque es denso en un Hausdorff infinito. Así que, si suponemos que $nw(Y) \leq \mathfrak{c}$, podemos aplicar el teorema de Tkachenko para tener que: $|C(Y)| \leq nw(Y)^{Nag(Y)} \leq \mathfrak{c}^\omega = \mathfrak{c}$. De esta manera, la implicación 3) $\Rightarrow$ 8) es verdadera.

Por último, si demostramos 1) $\Rightarrow$ 6), se cerrará la cadena de implicaciones. Supongamos entonces que $iw(Y) \leq \mathfrak{c}$. Como Y es un Tychonoff infinito y $Nag(Y) = \omega$, podemos usar la proposición 4.2.3 para obtener la igualdad: $nw(Y) = iw(Y) \cdot Nag(Y) \leq \mathfrak{c} \cdot \omega = \mathfrak{c}$. Y por el corolario anterior: $w(X) \leq nw(Y)^{Nag(Y)} \leq \mathfrak{c}^\omega = \mathfrak{c}$. ■

Es evidente que todo espacio Lindelöf-Σ tiene un subespacio denso que es Lindelöf-Σ. Esto motiva el siguiente corolario.

Corolario 4.2.10. *Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier espacio X Lindelöf-Σ:*

1. *X es Lindelöf-Σ y $w(X) \leq \mathfrak{c}$*
2. $nw(X) \leq \mathfrak{c}$
3. $iw(X) \leq \mathfrak{c}$
4. $|C(X)| \leq \mathfrak{c}$

Capítulo 5

El Teorema de Hodel.

En el capítulo anterior se define a los espacios Lindelöf-Σ como aquellos espacios T_3 que tienen una red numerable módulo una cubierta compacta. Por la definición de las redes respecto de cubiertas compactas, es natural preguntarse qué pasa con el peso de red de esta clase de espacios. El teorema de Hodel proporciona esta información apara aquellos que cumplen una propiedad más fuerte: la de ser hereditariamente Lindelöf-Σ. Este capítulo es dedicado a demostrar que las condiciones: ser hereditariamente Lindelöf-Σ y tener peso de red numerable, son equivalentes.

Definición 5.0.1. *Dado un espacio topológico X, diremos que un conjunto $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$ es una familia T_0-separadora de X si para todo par de elementos distintos $x, y \in X$, existe $F \in \mathscr{F}$ tal que $|F \cap \{x, y\}| = 1$. De manera similar, diremos que $\mathscr{F}$ es T_1-separadora si para todo par de elementos distintos $x, y \in X$, existen $A, B \in \mathscr{F}$ tales que: $x \in A$, $y \notin A$, $y \in B$ y $x \notin B$.*

Lema 5.0.2. *Sea X un espacio Lindelöf-Σ. Si X tiene una familia $\mathscr{F}$ de cerrados que es T_1-separadora, entonces $nw(X) \leq \omega$.*

Demostración: Fijemos una cubierta compacta $\mathscr{C}$ de X y a una red $\mathscr{N}$ numerable módulo $\mathscr{C}$. Es claro que $\mathscr{N} \cup \mathscr{F}$ vuelve a ser un conjunto numerable y en consecuencia $\mathscr{R} = \{\bigcap A : A \in [\mathscr{N} \cup \mathscr{F}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\}$ también lo es.

Veamos que $\mathscr{R}$ es red de subconjuntos de X: supongamos que $x \in X$ y U es cualquier abierto que tiene a x. Entonces existe un elemento $C_x \in \mathscr{C}$ que tiene a x. Definamos $K = C_x \setminus U$ el cual es un cerrado contenido en C_x, y por lo tanto, es compacto; y además, $x \notin K$. Por otra parte, dado que $\mathscr{F}$ es T_1 separadora, es muy sencillo notar que si $\mathscr{F}_x = \{F \in \mathscr{F} : x \in F\}$, entonces $\bigcap \mathscr{F}_x = \{x\}$. Luego, la colección $G = \{F \cap K : F \in \mathscr{F}_x\}$ es una familia de cerrados en el compacto K y tal que $\bigcap G = (\bigcap \mathscr{F}_x) \cap K = \emptyset$; por lo que G no cumple la propiedad de la intersección finita; es decir, existe una cantidad finita de elementos $F_1, ..., F_n \in \mathscr{F}_x$ de modo que $(\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i) \cap K = \emptyset$. Usando ahora la normalidad de X obtenemos la existencia de dos abiertos V y W de X que son ajenos y cumplen que $F = \bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i \subseteq V$ y $K \subseteq W$. Observe ahora que $C_x \subseteq K \cup U \subseteq W \cup U$; así que hemos encontrado un abierto de X que contiene a C_x. Por lo anterior, existe $N \in \mathscr{N}$ que satisface que $C_x \subseteq N \subseteq W \cup U$. Por último, $x \in N \cap F \subseteq (W \cup U) \cap V \subseteq U$ y $N \cap F \in \mathscr{R}$ lo que prueba que $\mathscr{R}$ sí es red en X.

Por lo tanto, $nw(X) \leq |\mathscr{R}| \leq \omega$. ■

Lema 5.0.3. *Si X es un espacio regular, hereditariamente Lindelöf y tiene una familia numerable de cerrados $\mathscr{F}$ que es T_0-separadora, entonces X tiene una familia numerable de cerrados que es T_1-separadora.*

Demostración: Primero demostraremos el siguiente resultado:

Proposición: *Si Y es un espacio regular y hereditariamente Lindelöf, entonces cualquier abierto U de Y es un conjunto F_σ; es decir, U es una unión numerable de cerrados de Y.*

Demostración: supongamos que U es abierto no vacío. Por la regularidad de Y, para todo $u \in U$ fijamos un abierto V_u de modo que $u \in V_u \subseteq \overline{V_u} \subseteq U$. Entonces el conjunto $\{V_u : u \in U\}$ es una cubierta abierta de U. Dado que U es Lindelöf, podemos extraer una subcubierta numerable $\{V_{u_n} : n \in \mathbb{N}\}$. De esto es inmediato que $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_{u_n}}$ es un conjunto F_σ. □

Regresando a la demostración del lema, para cada cerrado $F \in \mathscr{F}$ fijamos un conjunto numerable G_F formado por subconjuntos cerrados de X de tal manera que $X \setminus F = \bigcup G_F$. Definimos el conjunto $\mathscr{G} = \bigcup\{G_F : F \in \mathscr{F}\} \cup \mathscr{F}$; el cual es numerable y sus elementos son cerrados. Para finalizar la prueba, sólo queda por verificar que $\mathscr{G}$ es una familia T_1-separadora. Supongamos que $x, y \in X$ son distintos. Dado que $\mathscr{F}$ es T_0-separadora, existe $F \in \mathscr{F}$ tal que $|F \cap \{x, y\}| = 1$. Supongamos, sin perder generalidad, que $x \in F$. Entonces, $y \in X \setminus F = \bigcup G_F$; por lo que existe $H \in G_F$ con $y \in H$. Por último, observe que $F, H \in \mathscr{G}$ y separan a x y y. ■

Lema 5.0.4. *Si X es un espacio hereditariamente Lindelöf-Σ para el cual todos sus subconjuntos compactos son numerables, entonces $nw(X) \leq \omega$.*

Demostración: Dadas las hipótesis de X, fijamos una cubierta compacta $\mathscr{C}$ y $\mathscr{N}$ una red numerable módulo la cubierta. Por el lema 4.1.7(1) podemos suponer que $\mathscr{N}$ está formado de subconjuntos cerrados de X.

Para cada $x \in X$, definimos el conjunto $\mathscr{F}_x = \bigcap\{M \in \mathscr{N} : x \in M\}$, el lector notará que este es un conjunto cerrado. Además, si $x \in C_x \in \mathscr{C}$, entonces $\{M \in \mathscr{N} : C_x \subseteq M\} \subseteq \{M \in \mathscr{N} : x \in M\}$ lo que implica que $\mathscr{F}_x \subseteq \bigcap\{M \in \mathscr{N} : C_x \subseteq M\}$. Pero el lema 4.1.7 (2) nos da la igualdad: $\bigcap\{M \in \mathscr{N} : C_x \subseteq M\} = C_x$. Así, $\mathscr{F}_x \subseteq C_x$ por lo que $\mathscr{F}_x$ es compacto y, en consecuencia, numerable.

Ahora consideramos la relación $\sim$ en X definida de la siguiente manera:

$$x \sim y \text{ si y sólo si } x \in \mathscr{F}_y \wedge y \in \mathscr{F}_x$$

Es evidente que $\sim$ es reflexiva y simétrica.

Para mostrar que $\sim$ es transitiva, supongamos que $x, y, z \in X$ son arbitrarios y que $x \sim y$

y $y \sim z$. Entonces se cumple que $x \in \mathscr{F}_y$ y $y \in \mathscr{F}_z$. La propiedad $y \in \mathscr{F}_z$ nos dice que todo elemento M de $\mathscr{N}$ que tiene a z, también tiene a y; es decir, $\{M \in \mathscr{N} : z \in M\} \subseteq \{M \in \mathscr{N} : y \in M\}$, razón por la cual $\mathscr{F}_y \subseteq \mathscr{F}_z$. Esta última contención implica que $x \in \mathscr{F}_z$. De manera similar se prueba que $z \in \mathscr{F}_x$, con lo que $x \sim z$. Y así $\sim$ es de equivalencia.

Definamos el conjunto de clases de equivalencia de la relación $\sim$ como $\{P_\alpha : \alpha \in \mathscr{A}\}$. Tomemos un $\alpha \in \mathscr{A}$ y un elemento $x \in P_\alpha$, ambos arbitrarios y fijos. Es claro que si $y \in P_\alpha$, entonces $y \sim x$ y por eso $y \in \mathscr{F}_x$; esto implica que $P_\alpha \subseteq \mathscr{F}_x$ y entonces P_α también debe ser numerable. Es decir, todas las clases de equivalencia de la relación $\sim$ son numerables. Ahora, para cada $\alpha \in \mathscr{A}$ fijamos una enumeración (posiblemente con repeticiones) $\{x_n^\alpha : n \in \mathbb{N}\}$ de P_α. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos a $X_n = \{x_n^\alpha : \alpha \in \mathscr{A}\}$, entonces $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ y además, cada subespacio X_n es hereditariamente Lindelöf-Σ.

Ahora, para $n \in \mathbb{N}$ fijo definimos a la familia numerable de cerrados $\mathscr{G}_n = \{M \cap X_n : M \in \mathscr{N}\}$ del subespacio X_n. A continuación vamos a probar que $\mathscr{G}_n$ es T_0-separadora: tomemos dos elementos distintos $v, w \in X_n$, entonces existen $\alpha, \beta \in \mathscr{A}$ de modo que $v = x_n^\alpha$ y $w = x_n^\beta$; como $\alpha \neq \beta$, tenemos que $v \nsim w$, por lo que $v \notin \mathscr{F}_w$ o $w \notin \mathscr{F}_v$. Si $v \notin \mathscr{F}_w$, existe $M \in \mathscr{N}$ de modo que: $w \in M$ y $v \notin M$. Entonces $M \cap X_n \in \mathscr{G}_n$ cumple lo deseado. El caso $w \notin \mathscr{F}_v$ es análogo. Aplicando el lema 5.0.3 obtenemos que X_n tiene una familia numerable de cerrados que es T_1-separadora; y por el lema 5.0.2, X_n tiene peso de red numerable.

Finalmente, de la observación 2.2.4 se sigue que $nw(X) \leq \omega$. ■

Lema 5.0.5. *Sea X un espacio hereditariamente Lindelöf-Σ y $\mathscr{K}$ la familia de todos los subconjuntos compactos de X. Entonces $|X| \leq 2^\omega$ y $|\mathscr{K}| \leq 2^\omega$.*

Demostración: Comenzamos fijando a $\mathscr{C}$ una cubierta compacta de X y a $\mathscr{N}$ una red módulo $\mathscr{C}$ que además es numerable. Recordando el lema 4.1.7(2), dado que X es T_1, sabemos que todo C en $\mathscr{C}$ es la intersección de un subconjunto de $\mathscr{N}$ y, por la suposición de que $\mathscr{N}$ es un conjunto numerable, tenemos a lo más 2^ω intersecciones de subconjuntos de $\mathscr{N}$; es decir, que $|\mathscr{C}| \leq 2^\omega$.

Por otra parte, como X es regular y hereditariamente Lindelöf, todo punto $x \in X$ es un G_δ [1]. En particular, todo $C \in \mathscr{C}$ tiene puntos G_δ y, como sabemos, todo compacto Hausdorff con puntos G_δ tiene cardinalidad menor o igual que 2^ω (1.4.6), por lo que, $|C| \leq 2^\omega$ para todo $C \in \mathscr{C}$. Ahora recuerde que $X = \bigcup_{C\in\mathscr{C}} C$ y con lo ya argumentado sobre $\mathscr{C}$ y sus elementos: $|X| \leq 2^\omega \cdot 2^\omega = 2^\omega$.

Para demostrar que $\mathscr{K}$ también tiene cardinalidad a lo más 2^ω, vamos a usar el conjunto $\mathscr{K}' = \{X \setminus K : K \in \mathscr{K}\}$ pues es claro que ambos conjuntos tienen la misma cardinalidad.

Para cada $x \in X$ fijamos una colección numerable de abiertos $U_x = \{U_n^x : n \in \mathbb{N}\}$ de modo que:

- $\bigcap U_x = \{x\}$
- Y para todo $n \in \mathbb{N}$: $\overline{U_{n+1}^x} \subseteq U_n^x$

[1] Este resultado es inmediato de la proposición demostrada en 5.0.3.

Y definimos $\mathscr{U} = \bigcup\{U_x : x \in X\}$ el cual tiene cardinalidad a lo más 2^ω; más aún, $[\mathscr{U}]^{\leq\omega}$ también tiene cardinalidad menor o igual que 2^ω.

Ahora, supongamos que $K \in \mathscr{K}$ es cualquiera y que $x \in X \setminus K$. Dado que K es compacto y la familia decreciente de cerrados (en K) $\{\overline{U_n^x} \cap K : n \in \mathbb{N}\}$ cumple que $\bigcap\{\overline{U_n^x} \cap K : n \in \mathbb{N}\} = (\bigcap U_x) \cap K = \emptyset$, debe existir $m \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{U_m^x} \cap K = \emptyset$; lo que a su vez implica que existe $V_x \in U_x$ con $V_x \cap K = \emptyset$. Entonces el conjunto $\{V_x : x \in X \setminus K\}$ es una cubierta abierta para $X \setminus K$. Dado que X es hereditariamente Lindelöf, $X \setminus K$ es Lindelöf, y así, existe un subconjunto numerable $A \subseteq X \setminus K$ de modo que $X \setminus K = \bigcup_{x \in A} V_x$. Observe que $\mathscr{V}_{X\setminus K} = \{V_x : x \in A\} \in [\mathscr{U}]^{\leq\omega}$. Con esto, hemos demostrado que para todo $L \in \mathscr{K}'$, existe $\mathscr{V}_L \in [\mathscr{U}]^{\leq\omega}$ tal que $L = \bigcup \mathscr{V}_L$; de lo que se sigue que $|\mathscr{K}'| \leq |[\mathscr{U}]^{\leq\omega}| \leq 2^\omega$. Por lo tanto, $|\mathscr{K}| \leq 2^\omega$. ■

Proposición 5.0.6. *Para todo espacio X hereditariamente Lindelöf-Σ existen dos subconjuntos ajenos A y B tales que:*

(1) $X = A \cup B$ y

(2) Para cada subespacio compacto K de X, si $K \subseteq A$ ó $K \subseteq B$, entonces K es numerable.

Demostración: Sea $\mathscr{K}$ la familia de todos los subespacios compactos no numerables de X. Dado que X es hereditariamente Lindelöf-Σ, por el lema anterior, tanto X como $\mathscr{K}$ tienen cardinalidad menor o igual que 2^ω.

Si $\mathscr{K} = \emptyset$, definimos $A = X$ y $B = \emptyset$. Es claro que son ajenos y satisfacen (1) y (2).

Y si $\mathscr{K} \neq \emptyset$, podemos suponer que $\{K_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ es una enumeración (posiblemente con repeticiones) de $\mathscr{K}$. Dese cuenta que como X es regular y hereditariamente Lindelöf, todo punto de X es un G_δ[2] En particular, todo elemento de $\mathscr{K}$ tiene puntos G_δ y por lo tanto es 1AN 1.4.5. Entonces, para todo $K \in \mathscr{K}$: K es compacto no numerable Haursdorff y 1AN, así que su cardinalidad es exactamente 2^ω (1.4.12). Construiremos a los conjuntos A y B por el método de recursión:

Primero elegimos a dos elementos distintos $x_0, y_0 \in K_0$.

Ahora, supongamos que $0 < \alpha < 2^\omega$ es arbitrario y que para toda $\beta < \alpha$ hemos elegido elementos distintos $x_\beta, y_\beta \in K_\beta \setminus (\{x_\gamma : \gamma < \beta\} \cup \{y_\gamma : \gamma < \beta\})$.

Como $|K_\alpha| = 2^\omega$, podemos elegir $x_\alpha, y_\alpha \in K_\alpha \setminus (\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\})$ con $x_\alpha \neq y_\alpha$.

De esta manera, hemos construido a los conjuntos ajenos $\{x_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ y $\{y_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$.

Definamos a $A = \{x_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ y $B = X \setminus A$. Entonces A y B son ajenos y $X = A \cup B$. Además, si K es un compacto no numerable, entonces $K = K_\delta$ para alguna $\delta < 2^\omega$ y,

[2] Nuevamente, vea la proposición dentro de 5.0.3.

$x_\delta \in K_\delta \cap A$ y $y_\delta \in K_\delta \cap B$; por lo que K no está contenido en A ó B. Por lo tanto, todo compacto contenido en A ó B debe ser numerable. ■

Con todo lo anterior ya estamos en posición de demostrar nuestro objetivo de este capítulo: el teorema de Hodel.

Teorema 5.0.7 (R. Hodel [16]). *Un espacio X es hereditariamente Lindelöf-Σ si y sólo si tiene peso de red numerable.*

Demostración:

- $\Rightarrow$: Si X es hereditariamente Lindelöf-Σ, por la proposición anterior, existen A y B subconjuntos ajenos de X que cumplen: $X = A \cup B$ y, todo compacto completamente contenido en A ó B, es numerable. Nótese que A y B también son hereditariamente Lindelöf-Σ. Aplicando el lema 5.0.4 tanto a A como a B, el peso de red de ambos conjuntos es numerable. Como consecuencia, X tiene peso de red numerable.

- $\Leftarrow$: Si $nw(X) \leq \omega$, por la monotonía del peso de red se sigue que $nw(Y) \leq \omega$ para todo Y subespacio de X. Ahora recuerde que todo espacio Tychonoff con peso de red numerable es Lindelöf-Σ. Por lo tanto, todo subespacio Y de X también es Lindelöf-Σ.

■

Corolario 5.0.8 (J. Gerlits, A. Hanjal, Z. Szentmiklóssy [15]). *Un espacio X T_3 es hereditariamente σ-compacto si y sólo si X es numerable.*

Demostración:

Es inmediato que si X es numerable, X es hereditariamente σ-compacto.

En cambio, si X es es hereditariamente σ-compacto, resulta que X es hereditariamente Lindelöf-Σ. Usando la proposición 5.0.6 tenemos la existencia de conjuntos A y B tales que $X = A \cup B$ y que todo compacto contenido en A o B es numerable. Pero siendo A y B σ-compactos, ambos son la unión numerable de conjuntos numerables. De esta manera, $|X| \leq |A| + |B| \leq \omega$. ■

Capítulo 6

Redes externas y redes de funciones.

En años recientes se introdujeron dos generalizaciones más de las redes de Arkhangel'skii; estas producen clases muy interesantes de espacios topológicos que han sido objeto de estudio y que han mostrado poseer propiedades importantes. El objetivo de este breve capítulo es ofrecer una vista panorámica de estos dos nuevos conceptos y de algunas de sus propiedades, así como invitar al lector a seguir el camino de su investigación.

Comenzamos con las redes externas.

Sea (X,τ) un espacio topológico, $\mathscr{M}$ una familia de subconjuntos de X y $x \in X$. Decimos que $\mathscr{M}$ es una *red en el punto* x si para cualquier $U \in \tau(x,X)$, existe $M \in \mathscr{M}$ de modo que $x \in M \subseteq U$. Bajo el mismo contexto, si $A \subseteq X$, diremos que una familia $\mathscr{N}$ de subconjuntos de X es una *red externa* de A en X si $\mathscr{N}$ es una red en x para todo $x \in A$.

Definición 6.0.1. *Sean X, Y conjuntos arbitrarios, $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$, $\mathcal{B} \subseteq \mathscr{P}(Y)$ colecciones arbitrarias y κ un número cardinal infinito. Se dice que una función $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es **κ-monótona** si cumple las siguientes condiciones:*

1. *Para toda $A \in \mathcal{A}$ con $|A| \leq \kappa$, $|\phi(A)| \leq |A| \cdot \omega$.*
2. *Para todos $A, B \in \mathcal{A}$ con $A \subseteq B$, se cumple $\phi(A) \subseteq \phi(B)$.*
3. *Para todo $\lambda \leq \kappa$ y toda familia creciente $\{A_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq \mathcal{A}$ (es decir; $A_\alpha \subseteq A_\beta$ siempre que $\alpha \leq \beta$) tal que $\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha \in \mathcal{A}$, se satisface que $\phi\left(\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha<\lambda} \phi(A_\alpha)$.*

La siguiente definición es de Tkachuk [26].

Definición 6.0.2. *Sea κ un cardinal infinito.*

1. *Se dice que un espacio Tychonoff X es **monótonamente κ-monolítico** si para cualquier subconjunto A de X con $|A| \leq \kappa$, existe una red externa $\mathcal{O}(A)$ de $\overline{A}$ en X tal que la función $\mathcal{O} : [X]^{\leq\kappa} \longrightarrow \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ es κ-monótona.*

2. *Se dice que un espacio Tychonoff X es* ***monótonamente monolítico*** *si es monótonamente κ-monolítico para todo cardinal infinito κ.*

En el artículo [26] Tkachuk hizo un estudio sistemático de los espacios monótonamente monolíticos y, entre muchas otras cosas, Tkachuk demostró que la monótonamente monoliticidad es una propiedad hereditaria y, además, los espacios que la cumplen son monolíticos y tienen la propiedad D.

Para hablar de la ya mencionada propiedad D, recuerde que una asignación de vecindades en un espacio (X, τ) es simplemente una función $\phi : X \longrightarrow \tau$ tal que $x \in \phi(x)$ para todo $x \in X$. Dicho lo anterior, un espacio topológico (X, τ) *cumple la propiedad D de van Douwen* o es un *espacio D* si para cualquier asignación de vecindades $\phi : X \longrightarrow \tau$, existe un subespacio discreto y cerrado D de X tal que $X = \bigcup\limits_{x \in D} \phi(x)$.

A pesar de que la propiedad D es relativamente sencilla de enunciar, no es una propiedad trivial. Los espacios D cumplen propiedades muy interesantes; por ejemplo, si X cumple la propiedad D, entonces $L(X) = e(X) = sup\{|D| : D \subseteq X \text{ es cerrado y discreto}\}$.

Es un problema abierto el saber si todo espacio Tychonoff Lindelöf tiene la propiedad D. La misma pregunta se hace para espacios Tychonoff hereditariamente Lindelöf y para espacios $Cp(X)$. Sin embargo, un acierto en el estudio de la propiedad D es que en [19] Buzyakova demostró que si X es un espacio compacto Hausdorff, entonces $Cp(X)$ es un espacio D. Este resultado fue generalizado por Gary Gruenhage en [20]; quien demostró que para todo espacio X Lindelöf-Σ, el $Cp(X)$ es un espacio hereditariamente D; esto es, todo subespacio de $Cp(X)$ tiene la propiedad D.

Otro resultado interesante de Arkhangel'skii establece que para todo espacio X Lindelöf-Σ, el $Cp(X)$ es un espacio monolítico. Tkachuk definió a los espacios monótonamente monolíticos con la intención de generalizar lo que, por su parte, Arkhangel'skii y Gruenhage ya habían demostrado. En [25] Tkachuk demostró los siguientes teoremas.

Teorema 6.0.3. *Si X es un espacio Lindelöf-Σ, entonces $Cp(X)$ es monótonamente monolítico.*

Teorema 6.0.4. *Si X es un espacio monótonamente monolítico, entonces X es un espacio hereditariamente D.*

Estos dos teoremas de Tkachuk nos llevan al resultado de Gruenhage.

Como ya se ha mencionado, los espacios monótonamente monolíticos resultan ser espacios monolíticos. En el ámbito de la Cp-teoría hay dos resultados muy elegantes de doble dualidad respecto del funtor Cp que relaciona a los espacios monolíticos con los espacios estables; ambos resultados se le atribuyen a Arkhangel'skii. A continuación, presentamos estos teoremas de doble dualidad [1].

Teorema 6.0.5. *Un espacio Tychonoff X es monolítico si y sólo si $Cp(X)$ es un espacio estable.*

Teorema 6.0.6. *Un espacio Tychonoff X es estable si y sólo si $Cp(X)$ es monolítico.*

[1] El lector puede verificar que uno de ellos ya había sido mencionado en 4.2.4.

Un avance relevante en esta área de investigación es la introducción de la monótona estabilidad.

En [21] Reynaldo Rojas y Ángel Tamariz introdujeron los siguientes conceptos; el primero de ellos es el de redes de funciones.

Definición 6.0.7. *Sean X y Y espacios y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Una familia $\mathscr{N}$ de subconjuntos de X es **red para** f si para todo abierto V de Y existe una subcolección $\mathscr{N}'$ de $\mathscr{N}$ tal que $f^{-1}[V] = \bigcup \mathscr{N}'$.*

Recuerde que si X es Tychonoff y $A \subseteq Cp(X)$, entonces la función $\Delta[A] : X \longrightarrow Cp(A)$ tiene por regla de correspondencia: $\Delta[A](x)(f) = f(x)$ para todo $x \in X$ y todo $f \in Cp(A)$.

Definición 6.0.8. *Sea κ un número cardinal infinito.*

1. *Un espacio Tychonoff X es llamado **monótonamente κ-estable** si para cualquier $A \subseteq Cp(X)$ con $|A| \leq \kappa$, existe una red $\mathscr{N}(A)$ para la función $\Delta[\overline{A}]$ tal que la función $\mathscr{N} : [Cp(X)]^{\leq\kappa} \longrightarrow \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ dada por $A \to \mathscr{N}(A)$ es una función κ-monótona.*

2. *Un espacio X es **monótonamente estable** si es monótonamente κ-estable para todo cardinal infinito κ.*

Rojas Hernández demostró en [23] que las versiones monótonas de la monoliticidad y de la estabilidad también tienen el mismo comportamiento respecto del funtor Cp. Estos resultados son los siguientes:

Teorema 6.0.9. *X es monótonamente monolítico si y sólo si $Cp(X)$ es un espacio monótonamente estable.*

Teorema 6.0.10. *X es monótonamente estable si y sólo si $Cp(X)$ es un espacio monótonamente monolítico.*

Para finalizar, hacemos el comentario de que hay otras dos clases de espacios topológicos para los cuales también hay teoremas de doble dualidad con respecto al funtor Cp: los espacios monótonamente Sokolov y los espacios monótonamente retraibles. Los espacios monótonamente Sokolov fueron definidos y estudiados por Rojas Hernández y Tkachuk en [24]; mientras que los espacios monótonamente retraibles fueron definidos y estudiados por Rojas Hernández en[22]. En el artículo [24], Rojas y Tkachuk demostraron los siguientes dos teoremas de doble dualidad.

Teorema 6.0.11. *X es monótonamente Sokolov si y sólo si $Cp(X)$ es monótonamente retraíble.*

Teorema 6.0.12. *X es monótonamente retraíble si y sólo si $Cp(X)$ es monótonamente Sokolov.*

La razón de mencionar a estas dos clases de espacios es porque la definición de monótonamente Sokolov usa la noción de red externa y, de la misma manera, la definición de monótonamente retraíble usa la noción de red de funciones. Para más detalles y consultar las definiciones, remitimos al lector a los artículos [22] y [24]. También puede consultar los últimos avances en investigación de este tipo de espacios topológicos en el artículo [26].

Bibliografía

[1] A.V. Arhangel'skii, Topological Function Spaces, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992.

[2] F. Casarrubias Segura, *Los espacios Lindelof* Σ, Capítulo 1, Topología y sus aplicaciones 2, Textos Científicos, BUAP. 2013.

[3] F. Casarrubias Segura, R. Rojas Hernández. *Hereditarily monotonically Sokolov spaces have countable network weight.* Topology and its Applications 260 (2019) 178–188.

[4] F. Casarrubias-Segura, S. García-Ferreira, R. Rojas-Hernández, Every Σ_s-product of K-analytic spaces has the Lindelöf Σ-property, Topol. Appl. 234 (2018) 285–297.

[5] F. Casarrubias Segura, A. Tamariz Mascarúa, *Elementos de topología general*, Aportaciones matemáticas Textos 37, nivel medio, Instituto de Matemáticas, UNAM. 1ra. Edición. Mayo 2019. ISBN 978-607-30-1780-0.

[6] W. Kubis, O. G. Okunev, P. J. Szeptycki, *On some classes of Lindelöf Σ-spaces*, Topology Appl. **153 (14)** (2006) 2574-2590.

[7] E. Michael, $\aleph_0$*-spaces*, Journal of Mathematics and Mechanics, vol. 15, no. 6, 1966, pp. 983–1002.

[8] I. Molina Lara, O. G. Okunev *$L\Sigma(\leq \omega)$-spaces and spaces of continuous functions*, Cent. Eur. J. Math. **8(4)** (2010) 754-763.

[9] K. Nagami, *Σ-spaces*, Fund. Math. **65** (2)(1969) pp. 169-192.

[10] O. G. Okunev, *On Lindelöf Σ-spaces of continuous functions in the pointwise convergence*, Topology Appl. 49 (1993) 149-166.

[11] M. G. Tkachenko, *The weight and Lindelöf property in spaces and topological groups*, Topol. Appl. 221 (2017) 465–475.

[12] V. V. Tkachuk, *Some criteria for $C_p(X)$ to be an $L\Sigma(\leq \omega)$-space*, Rocky Mountain Journal of Mathematics **43(1)** (2013) 373-384.

[13] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[14] R. Hodel,*Cardinal functions I*, in Handbookof Set-Theoretic Topology, NorthHolland, (1984), 1-61.

[15] J. Gerlits, A. Hajnal and Z. Szentmiklóssy, *On the cardinality of certain Hausdorff spaces*, Discrete Math., 108(1992), 31-35.

[16] R. Hodel, *On a theorem of Arkhangel'skii concerning Lindelöf p-spaces*, Canadian J. Math., 27(1975), 459-468.

[17] V.V. Tkachuk, *A Cp-Theory Problem Book. Topological and Function Spaces*, Springer New York, 2011.

[18] V.V. Tkachuk, *A Cp-Theory Problem Book. Special Features of Function Spaces*, Springer Switzerland, 2014.

[19] R. Z. Buzyakova, *Hereditary D-property of function spaces over compacta*, Proc. Amer. Math. Soc. , **132:11**, (2004), 3433–3439.

[20] G. Gruenhage, *A note on D-spaces*, Topology Appl., **153**, (2006), 2229–2240.

[21] R. Rojas-Hernández, A. Tamaríz-Mascarúa, *D-property, monotone monolithicity and function spaces*, Topology and Appl. , **159** (2012), 3379–3391.

[22] R. Rojas-Hernández, *Function spaces and D-property*, Topology Proc. , **43** (2014), 301–317.

[23] R. Rojas-Hernández, *On monotone stability*, Topology Proc. , **165** (2014), 50–57.

[24] R. Rojas-Hernández, V. V. Tkachuk, *A monotone version of the Sokolov property and monotone retractability in functions spaces*, J. Math. Anal. Appl. , **412** (2014), 125–137.

[25] V. V. Tkachuk, *Monolithic spaces and D-spaces revisited*, Topology Appl., **156:4**, (2009), 840–846.

[26] V. V. Tkachuk, *Sixteen years of C_p-Theory*, Questions and Answers in General Topology, **35**, (2017), pp. 1–48.

[27] Dan Ma (7 de junio de 2010), *The cardinality of compact first countable spaces, I*, WordPress, https://dantopology.wordpress.com/2010/06/12/the-cardinality-of-first-countable-compact-spaces-i/

[28] Dan Ma (15 de junio de 2010), *The cardinality of compact first countable spaces, II*, WordPress, https://dantopology.wordpress.com/2010/06/15/the-cardinality-of-first-countable-compact-spaces-ii/

[29] Dan Ma (15 de junio de 2010), *The cardinality of compact first countable spaces, III*, WordPress, https://dantopology.wordpress.com/2010/06/15/the-cardinality-of-first-countable-compact-spaces-iii/