0 Preeliminares

En este capítulo se establecen las bases conceptuales y la notación que se utilizarán a lo largo de este trabajo. Se asume que el lector posee un conocimiento fundamental de la teoría de conjuntos axiomática y de la topología general, todo al nivel de cursos estándar de licenciatura. El propósito de este capítulo no es ser un tratado exhaustivo, sino fijar la terminología, los convenios y los resultados clásicos que se darán por sentados. Para una revisión más profunda, se remite al lector a textos de referencia como:

0.1. Teoría de Conjuntos

0.1.1. Notación y convenciones básicas

Sea adopatará como marco axiomático a la teoría usual de conjuntos; ZFC. Se comprenden, por tanto, los axiomas de: existencia, extensionalidad, buena fundación, esquema de separación, par, unión, infinito, esquema de reemplazo y el axioma de elección (*denotado a partir de ahora por* AC); mismos que pueden consultarse en ??. xv]kunenSet.

Se asume que el lector está familiarizado con los objetos clásicos de la teoría de conjuntos, conviniendo las notaciones pertinentes a: los símbolos lógicos $\forall$, $\exists$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$ y $\exists!$ para existencia y unicidad; el conjunto vacío $\varnothing$; la pertenencia $\in$, la contención $\subseteq$ y contención propia $\subsetneq$; la diferencia de conjuntos $X \setminus Y$; el par ordenado (x, y), el conjunto potencia $\mathscr{P}(X)$; y claro, las operaciones conjuntistas: unión, intersección, producto cartesiano ($\cup$, $\cap$ y $\times$; junto con sus homólogos unarios: $\bigcup$, $\bigcap$ y $\prod$, respectivamente). A lo largo del presente texto se jerarquizarán las operaciones anteriores de la siguiente manera: se aplicarán siempre de izquierda a derecha, priorizando la diferencia de conjuntos, el producto cartesiano y la unión e intersección, en tal orden.

Dado un conjunto A, se denotará por $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$ al conjunto de todos los elementos x de A que satisfacen la fórmula $\varphi(x)$ (siendo tal colección un conjunto, debido al esquema de separación ??. xv]kunenSet). Una *clase* es una "coleccion" del estilo $\mathcal{C} = \{x \mid \varphi(x)\}$, se dice $\mathcal{C}$ *es conjunto* si y sólo si se satisface:

$$\exists y \forall x \ (x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$$

en caso contrario, ésta se denomina *clase propia*. Como abuso de notación, si un conjunto x hace verdadera la fórmula $\varphi(x)$, se escribirá $x \in \mathcal{C}$. Se denotará por $\mathcal{V}$ a la clase $\{x \mid x = x\}$.

Se dará por sentado el conocimiento de la teoría elemental de relaciones y funciones, manteniéndose al margen de las notaciones típicas para: el dominio $\mathrm{dom}(f)$ e imagen $\mathrm{ima}(f)$; la imagen directa $f[A]$ e inversa $f^{-1}[A]$ y las funciones identidad Id_X. La composición de funciones (o relaciones) será denotada por yuxtaposición fg y, la restricción de una función (o relación) f a un subconjunto $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$, por $f \restriction A$. Se señala además el uso ocasional de la expresion "$A \to B$ *dada por* $x \mapsto f(x)$" (o simplemente "$x \mapsto f(x)$") para hacer referencia a la relga de correspondencia de la función $f : A \to B$, en caso su nombre carezca de interés.

0.1.2. Órdenes parciales

Los órdenes parciales reflexivos y antirreflexivos serán denotados por los símbolos $\leq$ y $<$, respectivamente y el término *orden parcial* hará referencia a cualquiera de ellos; la posible diferencia no es sustancial, pues ambas versiones son fácilmente intercambiables al añadir o eliminar la identidad del conjunto sobre el cual se definen. Un *conjunto parcialmente ordenado* se concive como un par (P, R), donde R es un orden parcial en P. En lo que sigue, fiíese conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$.

Para cada $A \subseteq P$: $\min(A)$, $\max(A)$, $\sup(A)$ e $\inf(A)$ denotarán el máximo, mínimo, supremo e ínfimo de A, respectivamente (en caso de existir). Además, cierto $p \in P$ es *R-minimal* de A si $p \in A$ y no existe $q \in A$ tal que $q < p$, definiendo el concepto *R-maximal* de forma dual.

Se conviene que dos elementos $p, q \in P$ son *comparables* si y sólo si $p \leq q$ o $q \leq p$; en caso contrario, son *incomparables*. Así mismo, p y q serán *compatibles*

($p \parallel q$) cuando exista $r \in P$ de modo que $r \leq p$ y $r \leq q$; en caso contrario, serán *incompatibles* ($p \perp q$). Una $(P, \leq)$-*cadena* (*anticadena, respectivamente*) es un subconjunto de P de elementos comparables (incompatibles, respectivamente) dos a dos; y cuando el contexto lo permita, se omitirá el prefijo $(P, \leq)$.

La caracterización típica para AC es clave:

Teorema 0.1.1 (Principio de Maximalidad de Hausdorff)**.** *AC se satsiface si y sólo si todo conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$, no vacío, posee una $(P, \leq)$-cadena $\subseteq$-maximal (del conjunto de cadenas de P).*

Se dice que $\leq$ ($(P, \leq)$ o $(P, <)$, indistintamente) es: *total* si cualesquiera dos elementos de P son comparables, *buen orden* (*bien fundado, o completo, respectivamente*) si y sólo si cada $A \in \mathscr{P}(P) \setminus \{\varnothing\}$ tiene elemento mínimo (minimal, o supremo si A es acotado superiormente, respectivamente). Nótese que todo buen orden es total, bien fundado y completo.

Dados dos ordenes parciales (P, R) y (Q, S), se dice que una función $f : P \to Q$ es: S-*creciente* (*decreciente*, respectivamente) si y sólo si dados $p, q \in P$, se tiene que $p\ R\ q$ implica $f(p)\ S\ f(q)$ (o $f(p)\ S\ f(q)$, respectivamente). En cualquier caso, se dice que f es un *morfismo de orden*; y, si además f es biyectiva, se dice que f es un *isomorfismo* y que los órdenes (P, R) y (Q, S) son *isomorfos*, denotado $(P, R) \cong (Q, S)$.

0.1.3. Ordinales y Cardinales

Siguiendo la hoy conocida como construccion de John von Neumann, se declara que un conjunto α es: *ordinal* si es transitivo (esto es, $\alpha \subseteq \mathscr{P}(\alpha)$) y $(\alpha, \in)$ es un buen orden; y, natural si es un ordinal tal que $(\alpha, \ni)$ es un buen orden. Se denota por ON a la clase (propia) de todos los ordinales.

Los ordinales se denotan, típicamente, por las primeras letras griegas minúsculas: α, β, γ, etcétera; y, los naturales por: m, n, k, etcétera. Se seguirá esta convención, salvo que se indique lo contrario.

Si α y β son ordinales, se conviene que α es menor que β ($\alpha < \beta$) cuando $\alpha \in \beta$; en este sentido, es un hecho que toda clase no vacía de ordinales, X, tiene un mínimo (a saber, $\bigcap X$). Y consecuentemente, todo conjunto de ordinales A tiene supremo (a saber, $\bigcup A$). Un ordinal α es: *cero* si $\alpha = 0 := \varnothing$; *sucesor* cuando existe otro ordinal β de modo que $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$ (en cuyo caso se denota $\alpha = \beta + 1$); y *límite* en caso no ocurra ninguna de las dos anteriores. El primer ordinal límite se denotará por ω. Es un hecho que ω es el conjunto de todos los números naturales.

Teorema 0.1.2 (Inducción transfinita)**.** *Si $\varphi(x)$ es una fórmula de la teoría de conjuntos y:*

i) *$\varphi(0)$ se satisface.*

ii) *Para cada ordinal α, la satisfacción de $\varphi(\alpha)$ implica la satisfacción de $\varphi(\alpha + 1)$.*

iii) *Para cada ordinal límite γ, la satisfacción de $\forall\alpha \in \gamma(\varphi(\alpha))$ implica la satisfacción de $\varphi(\gamma)$.*

entonces, para cualquier ordinal α, se satisface $\varphi(\alpha)$.

Se obtiene la misma conclusión sustituyendo las condiciones (i)-(iii) por el enunciado: Para todo ordinal γ, la satisfacción de $\forall\alpha \in \gamma(\varphi(\alpha))$ implica la satisfacción de $\varphi(\gamma)$.

Dadas clases $\mathcal{C} = \{x \mid \varphi(x)\}$ y $\mathcal{C}' = \{x \mid \varphi'(x)\}$, se dice que un *funcional de* $\mathcal{C}$ en V es una clase F de pares ordenados; a saber $F = \{(x, y) \mid \varphi(x) \wedge \psi(x, y)\}$, de forma que $\forall x(\varphi(x) \to \exists! y(\varphi'(y) \wedge \psi(x, y)))$. En cuyo caso, se denota $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, y, para cada x en $\mathcal{C}$, se denota por $F(x)$ al único y en $\mathcal{C}'$ tal que $\psi(x, y)$. Siendo claro además que, si A es un conjunto cualquiera, $F[A] = \{F(a) \mid a \in A\}$.

Teorema 0.1.3 (Recursión transfinita)**.** *Para cualesquiera funcionales $F, G : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ y todo conjunto A, existe un único funcional $G : \mathsf{ON} \to \mathcal{V}$ de manera que:*

i) *$G(0) = A$.*

ii) *Para cada ordinal α, $G(\alpha + 1) = F(G(\alpha))$.*

iii) *Para cada ordinal límite γ, $G(\gamma) = H(G[\alpha])$.*

Además, existe un único funcional $K : \mathsf{ON} \to \mathcal{V}$ de manera que para todo ordinal α se satisface:

$$K(\alpha) = F(K[\alpha])$$

Los teoremas anteriores se restringen a cualquier otro ordinal, consiguiéndose así las versiones clásicas para los teoremas de inducción y recursión (cada uno de ellos con dos versiones) para ω (o cualquier otro odrinal α). Siendo tales restricciones las justificaciones rigurosas para ciertas técnicas y construcciones de las que se echa mano en este trabajo (véase **tal tal tal**). Haciendo uso del Teorema de Recursión Transfinita, se pueden definir las operaciones binarias entre ordinales: $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$ y α^β, respectivamente. En caso se lleguen a utilizar durante la presente tesis, se indicará que tales símbolos corresponden a aritmética es ordinal (para evitar confusión con la aritmética cardinal) y seguirá la definición expuesta en ??.XXX]amorIntermedio.

Teorema 0.1.4 (de enumeración)**.** *Para cualquier buen orden $(P, <)$ existe un único ordinal α para el cual $(P, <) \cong (\alpha, \in)$.*

Tomando en cuenta que; bajo AC, cualquier conjunto admite un buen orden ??eo. 5.1, p. 48]jechSet, se desprende de lo anterior que todo conjunto X es biyectable con algún ordinal, al mínimo de tales ordinales se le denomina *cardinalidad de* X y se denota por $|X|$. Se conviene además que X es: *finito* si existe $n \in \omega$ tal que $|X| = n$; *infinito* si $|X| \geq \omega$; *numerable* si $|X| = \omega$; *a lo más numerable* si $|X| \leq \omega$; y, *más que numerable* (indistintamente, *no numerable*) si $|X| > \omega$.

Cualquier ordinal κ que sea la cardinalidad de un conjunto tiene la virtud de no ser biyectable con ningun ordinal anterior a él, a estos ordinales se les llama *cardinales*. Los cardinales se suelen denotar por letras griegas intermedias: κ, λ, μ, etcétera. Se seguirá tal convención y además se denotará por CAR a la clase de cardinales mayores o iguales a ω. Es un hecho que la intersección de una familia de cardinales, es un cardinal. En consecuencia, cualquier clase no vacía de cardinales tiene mínimo; y, cualquier conjunto de cardinales, supremo.

Dados dos cardinales κ y λ, se definen: $\kappa + \lambda := |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|$, $\kappa \cdot \lambda := |\kappa \times \lambda|$ y $\kappa^\lambda := |\{f \mid f : \lambda \to \kappa\}|$; siendo las versiones generales de las dos primeras operaciones:

$$\sum_{\alpha\in I}\kappa_\alpha := \left|\bigcup_{\alpha\in I}(\kappa_\alpha\times\{\alpha\})\right| \quad \text{y} \quad \prod_{\alpha\in I}\kappa_\alpha := \left|\prod_{\alpha\in I}\kappa_\alpha\right|$$

(cuando $\{\kappa_\alpha \mid \alpha\in I\}$ es un conjunto no vacío de cardinales).

Se dará por sentado que el lector está familiarizado con la aritmética cardinal básica (véase ??ap. 1, § 3]jechSet). Más allá de tal comportamiento elemental, se hace hincapié en los siguientes teoremas de suma relevancia para la aritmética cardinal:

Teorema 0.1.5 (suma y producto cardinal)**.** *Si $\{\kappa_\alpha \mid \alpha\in I\}$ es conjunto no vacío de cardinales:*

i) $\displaystyle\sum_{\alpha\in I}\kappa_\alpha = |I|\cdot\sup_{\alpha\in I}\kappa_\alpha$.

ii) Si ningun κ_α es 0 y para cualesquiera $\alpha,\beta\in I$, $\alpha\leq\beta$ implica $\kappa_\alpha\leq\kappa_\beta$, entonces: $\displaystyle\prod_{\alpha\in I}\kappa_\alpha = \left(\sup_{\alpha\in I}\kappa_\alpha\right)^{|I|}$.

Teorema 0.1.6 (Lema de König)**.** *Sean $\{\kappa_\alpha \mid \alpha\in I\}$ y $\{\lambda_\alpha \mid \alpha\in I\}$ conjuntos no vacíos de cardinales de modo que para todo $\alpha\in I$ se satisface $\kappa_\alpha<\lambda_\alpha$. Entonces:*

$$\sum_{\alpha\in I}\kappa_\alpha < \prod_{\alpha\in I}\kappa_\alpha$$

Particularmente, $\kappa = \sum_{\alpha\in\kappa}1 < \prod_{\alpha\in\kappa}2 = 2^\kappa$ (Teorema de Cantor).

Del Lema anterior se desprende que si $\kappa\in\mathsf{CAR}$, existe $\lambda\in\mathsf{CAR}$ con $\kappa<\lambda$. Luego, se puede ordenar la clase CAR como:

Definición 0.1.7. *Se define recursivamente; para cualquier ordinal α, el número $\aleph_\alpha$, de la siguiente manera:*

i) $\aleph_0 := \omega$.

ii) Para cada ordinal α, $\aleph_{\alpha+1} := \min\{\lambda\in\mathsf{CAR} \mid \aleph_\alpha<\lambda\}$.

iii) Para cada ordinal límite γ, $\aleph_\gamma := \sup_{\alpha<\gamma} \aleph_\alpha$.

Además, para cada ordinal α, se denota $\omega_\alpha := \aleph_\alpha$.

Siempre que X sea un conjunto y κ un cardinal, se escribirá por $[X]^\kappa$ al conjunto de todos los subconjuntos de X de cardinalidad κ; $[X]^{<\kappa}$ al conjunto de todos los subconjuntos de X de cardinalidad estrictamente menor que κ; definéndose análogamente a los conjuntos $[X]^{\leq\kappa}$, $[X]^{>\kappa}$ y $[X]^{\geq\kappa}$. Además, en caso no se confunda con la notación de aritmética cardinal, X^κ será el conjunto de funciones de κ en X; y, $X^{<\kappa}$ el conjunto de funciones de funciones $f : \alpha \to X$ (con $\alpha < \kappa$).

Es un hecho que si X es infinito, entonces $|[X]^\kappa| = |X|^\kappa$ y $|[X]^{<\omega}| = |X|$; además, $|X^\mu| = |X|^\mu$ y $|X^{<\omega}| = |X|$.

0.1.4. Árboles

Un *árbol* es un orden parcial $(T, \leq)$ (denotado simplemente por T si no hay lugar a ambigüedades) tal que para cualquier $x \in T$, el conjunto $<_x := <^{-1} [\{x\}] = \{y \in T \mid y < x\}$ es un buen orden. Dado el ??, para cada $x \in T$ existe un único ordinal, denotado $o(x)$ para el cual $(<_x, <) \cong (o(x), \in)$. Tal ordinal $o(x)$ es nombrado el *orden de x en el árbol T*. La *altura* de T es el ordinal $h(T, \leq) := \sup\{o(x) + 1 \mid x \in T\}$. Para cada ordinal α se define el *α-ésimo nivel* de $(T, \leq)$ como el conjunto $T_\alpha := \{x \in T \mid o(x) = \alpha\}$. Y, finalmente, un subconjunto $R \subseteq T$ se dice que es *rama* si y sólo si es una $(T, \leq)$-cadena $\subseteq$-maximal (del conjunto de $(T, \leq)$-cadenas).

Dentro de la basta variedad de árboles, será de especial interés el *árbol de ramas de* $2^\omega = \{f \mid f : \omega \to 2\}$; esto es, el conjunto $2^{<\omega}$ ordenado por contención. Tal árbol es numerable, todos sus elementos tienen orden finito y su altura es exactamente ω.

En efecto, si $f \restriction n \in 2^{<\omega}$, entonces $(n, \in) \cong (f, \subsetneq_f)$ debido al isomorfismo de orden $n \to \subsetneq_f$, dado por $n \mapsto f \restriction n$. Por lo tanto T es un árbol, y el orden de cada $f \in T$ es su dominio; como $2^{<\omega}$ contiene a todas las funciones de naturales en 2, se sigue que la altura de T es $\omega = \sup\{n + 1 \mid n \in \omega\}$.

Además T es numerable, ya que:

$$\omega \leq |2^{<\omega}| = \Big|\bigcup_{n\in\omega} 2^n\Big| \leq \sum_{n\in\omega} |2^n| = \omega$$

Lo cual demuestra lo que se requería respecto al árbol $(2^{<\omega}, \subseteq)$.

0.2. Topología

0.2.1. Convenios generales y propiedades topológicas

Una *topología* para un conjunto X es un conjunto $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{P}(X)$ que tiene por elementos a $\varnothing$ a X; es cerrado bajo uniones (arbitrarias); y, cerrado bajo intersecciones finitas. El par $(X, \mathscr{T})$ (con frecuencia confundido con su conjunto subyacente, X) se denomina *espacio topológico* (o simplemente *espacio*). Los elementos de $\mathscr{T}$ se denominan *abiertos* (*de* X) y sus complementos respecto a X, *cerrados* (*de* X).

Dados dos espacios X y Y, se dice que una función $f : X \to Y$ es *continua* si para cada $U \subseteq Y$ abierto en Y, se tiene que $f^{-1}[U] \subseteq X$ es abierto en X. Un *homemorfismo entre* X *y* Y es una función continua $f : X \to Y$, biyectiva, cuya inversa $f^{-1} : Y \to X$ es también continua. Cuando exista un homeomorfismo entre X y Y, esto se denotará $X \cong Y$.

Dados un espacio $(X, \mathscr{T})$ y $A \subseteq X$ se define la *topología de subespacio* (*de* A *respecto* X) como la colección $\mathscr{T}_A := \{U \cap A \mid U \in \mathscr{T}\}$ (que, claramente, es topología para A). Cuando $(X, \eta), (Y, \mathscr{T})$ sean espacios topológicos, se dice que una función $f : X \to Y$ es un *encaje* si y sólo si f es un homeomorfismo entre (X, η) y $(f[X], \mathscr{T}_{f[X]})$. En caso ocurra lo último, se convendrá que X es un *subespacio* de Y (o bien, que X *se encaja en* Y) y, ocasionalmente, esto se denotará $X \hookrightarrow Y$. En este contexto, la notación "$A \subseteq X$" significará que A está contenido en X como conjunto y que $A \hookrightarrow X$ por medio del encaje $A \to X$ dado por $a \mapsto a$.

Una *base* para un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ es una coleccion $\mathcal{B} \subseteq \mathscr{T}$ de forma que para cualquier abierto U de X y cada $x \in U$ existe cierto $B \in \mathcal{B}$ de forma que $x \in B \subseteq U$.

Si $x \in X$, una *vecindad de* x (*en* X) es un subconjunto $V \subseteq X$ de modo que existe un abierto U de X tal que $x \in U \subseteq V$. Además, se convendrá que una coleccion $\mathcal{B}_x \subseteq \mathscr{P}(X)$ es una *base local* (*de vecindades*, respectivamente) de x en X si y sólo si para cada elemento de $\mathcal{B}_x$ es una vecindad abierta (vecindad, respectivamente) de x; y, para todo abierto U de X con $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}_x$

de forma que $x \in B \subseteq U$.

Para cada $A \subseteq X$ se denotarán por $\operatorname{int}(A), \operatorname{cl}(A), \operatorname{ext}(A), \operatorname{fr}(A), \operatorname{der}(A)$ a los *operadores*: interior, clausura, exterior, frontera, y derivado de A, respectivamente. Sus definiciones se pueden consultar en ??ap. 2]fidelElementos. Los elementos de $\operatorname{der}(A)$ se denominan *puntos de acumulación de* A; y, los elementos en $A \setminus \operatorname{der}(A)$ se llaman *puntos aislados de* A. Un subconjunto $D \subseteq X$ se dice *denso* (*en* X) si y sólo si $\operatorname{cl}(D) = X$.

Dado un conjunto no vacío de espacios topológicos $\{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$, se denotarán por $\prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$ y $\coprod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$ a su *producto topológico* (o, *de Tychonoff*) y *suma topológica*, respectivamete; siguiéndo las definiciones de estos espacios acorde al estándar, expuesto en textos como ?? entre otros. Al momento de trabajar con productos topológicos, será usual, para cada $\alpha \in \kappa$ denotar por π_α a la α-ésima proyección cartesiana ($\prod_{\beta\in\kappa} X_\beta \to X_\alpha$ dada por $f \mapsto f(\alpha)$).

Una propiedad $\varphi(X)$ (pensada como fórmula de la teoría de conjuntos) es: *topológica* si es invariante bajo homeomorfismos; esto es, si $(X, \mathscr{T})$ y (Y, η) son homeomorfos, entonces $\varphi(X)$ se satisface únicamente cuando $\varphi(Y)$ se satisface; *hereditaria* (*débilmente hereditaria*, respectivamente) cuando $\varphi(X)$ implica que para cualquier subespacio (subespacio cerrado, respectivamente) A de X, $\varphi(A)$ se satisface; *factorizable* si para cualquier conjunto no vacío de espacios topológicos $\{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ se tiene que, si $\varphi(\prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha)$ se cumple, entonces $\forall\alpha \in \kappa(\varphi(X_\alpha))$ se satisface; *productiva* (*finitamente productiva*, respectivamente) si para cualquier cardinal κ (natural $\kappa \in \omega$, respectivamente) no cero y familia $\{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ de espacios, la satisfacción de $\forall\alpha \in \kappa(\varphi(X_\alpha))$ implica la satisfacción de $\varphi(\prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha)$. Además, si un espacio X es tal que todos sus subespacios tienen una propiedad (a saber, P), X se denomina *hereditariamente* P.

Las siguientes propiedades topológicas serán utilizadas a lo largo del texto. Un espacio X se dice: *Primero Numerable* (o $\mathsf{1AN}$) si cada uno de sus puntos admite una base local (equivalentemente, de vecindades) a lo más numerable; *Segundo Numerable* (o $\mathsf{2AN}$) si admite una base a lo más numerable; *Separable* si tiene un subconjunto denso y a lo más numerable; T_0 si para cualesquiera $x, y \in X$ distintos existe un abierto U de forma que $U \cap \{x, y\} \in \{\{x\}, \{y\}\}$; T_1 si para cada $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es cerrado, T_2 (o *de Hausdorff*) si para cualesquiera $x, y \in X$ distintos existen abiertos ajenos U, V tales que $x \in U$ y

$y \in V$; *regular* si para cualquier cerrado $F \subseteq X$ y cualquier $x \in X \setminus F$ existen abiertos U, V ajenos de modo que $F \subseteq U$ y $x \in V$; T_3 si es regular y T_1; *completamente regular* si para cualquier cerrado F y punto $x \in X \setminus F$ existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ de modo que $f(x) = 0$ y $f[F] \subseteq \{1\}$; $\mathsf{T}_{3\frac{1}{2}}$ (o *de Tychonoff*) si es completamente regular y T_1; *normal* si para cualesquiera cerrados F, G ajenos, existen abiertos ajenos U, V de modo que $F \subseteq U$ y $G \subseteq U$; T_4 si es normal y T_1.

0.3. Pruebas de Consistencia Relativa

0.3.1. Preludio de Lógica

0.3.2. Axioma de Martin

Un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ es *c.c.c.* (o bien, cuenta con la *propiedad de anticadena contable*) si y sólo si cualquier $(P, \leq)$-anticadena es a lo más numerable.

Un *filtro* de $(P, \leq)$ es un subconjunto $F \subseteq P$ no vacío, cerrado por arriba (es decir, si $x \in F$ y $y \geq x$, entonces $y \in F$) y de elementos compatibles en F (es decir, para cualesquiera $x, y \in F$ existe $r \in F$ de modo que $r \leq x$ y $r \leq y$). La noción de *ideal* es dual a la de filtro; y, un filtro (o ideal) es *propio* si y sólo si es distinto de P.

Observación 0.3.1. *Sea X es conjunto, entonces $F \subseteq \mathscr{P}(X)$ es filtro (ideal) de $(\mathscr{P}(X), \subseteq)$ si y sólo si F es no vacío, cerrado bajo superconjuntos (subconjuntos) y bajo intersecciones (uniones) dos a dos.*

Se conviene que un subconjunto $D \subseteq P$ es: *denso* si y sólo si para cualquier $x \in P$ existe un elemento $d \in D$ de modo que $d \leq x$; *denso bajo* $p \in P$ cuando para cada $x \leq p$ existe $d \in D$ de modo que $d \leq x$.

Dada una colección $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{P}(P)$ de subconjuntos densos de $(P, \leq)$, se dice que un filtro G de $(P, \leq)$ es *$\mathscr{D}$-genérico* si es propio y tiene intersección no vacía con cada elemento de $\mathscr{D}$. Un filtro G es *genérico* si es $\mathscr{D}$-genérico, donde $\mathscr{D}$ es la colección de todos los subconjuntos densos de $(P, \leq)$.

El Axioma de Martin[1] se formula de la siguiente manera:

Definición 0.3.2. *Para cada cardinal infinito κ, $\mathsf{MA}(\kappa)$ es el enunciado: "Para todo conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ c.c.c. y cada colección $\mathscr{D}$ de conjuntos densos de $(P, \leq)$, con $|\mathscr{D}| \leq \kappa$, existe un filtro $\mathscr{D}$-genérico".*

El enunciado MA se definee como: "Para cada cardinal infinito $\kappa < \mathfrak{c}$ se satisface $\mathsf{MA}(\kappa)$".

[1] que surgió como fruto del estudio de la *Hipótesis de Souslin* (véase la discusión correspondiente en ??

Es un reesultado estándar y bien conocido que; en ZFC, $\mathsf{MA}(\omega)$ es verdadero y $\mathsf{MA}(\mathfrak{c})$ es falso; en consecuencia, MA se suele utilizar junto con la negación de la hipótesis del continuo (para no obtener resultados siempre vacuos). Además, a razón de ello, está bien definido:

$$\mathfrak{m} := \text{mín}\{\kappa \geq \omega \mid \neg\mathsf{MA}(\kappa)\}$$

Claramente $\aleph_1 \leq \mathfrak{m} \leq \mathfrak{c}$.

0.3.3. Forcing