Universidad Nacional Autónoma De México
Facultad De Ciencias

Un primer acercamiento a las propiedades topológicas de los espacios de Isbell-Mrówka

T E S I S

Que para obtener el título en:
Matemáticas

Presenta:
Hugo Víctor García Martínez

Asesor:
Dr. Fidel Casarrubias Segura

Ciudad Universitaria, CDMX, 2025

Agradecimientos

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, place
ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eg
consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habit
morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. C
viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus
tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, vive
ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nu
malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius c
eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci
amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem n
justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor
accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac c
et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum soc
natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincid
urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Índice general

Introducción

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristic
libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus ad
scing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placera
molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipi
ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nu
vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nu
eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. N
vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultri
Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictur
Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aen
placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar
purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vi
risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper,
velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesc
augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. M
cenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis
lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis d
et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut aug
Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nu
Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetuer.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, ar
Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, n
Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu pur
Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat
nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies n
pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendr
sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse pla
dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis od
sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat
sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et qua
Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenae

Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac tur
Donec odio elit, dictum in, hendrerit sit amet, egestas sed, leo. Praesent feugiat sa
odio. Integer vitae justo. Aliquam vestibulum fringilla lorem. Sed neque lectus, c
at, consectetuer sed, eleifend ac, lectus. Nulla facilisi. Pellentesque eget lectus. Proi
Sed porttitor. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse eu lectus. Ut mi mi,
amet, placerat et, mollis vitae, dui. Sed ante tellus, tristique ut, iaculis eu, malesua
Mauris nibh leo, facilisis non, adipiscing quis, ultrices a, dui.

0 Preeliminares

En este capítulo se establecen las bases conceptuales y la notación que se utilizarán a lo largo de e trabajo. Se asume que el lector posee un conocimiento fundamental de la teoría de conjuntos axiomátic de la topología general, todo al nivel de cursos estándar de licenciatura. El propósito de este capítulo no ser un tratado exhaustivo, sino fijar la terminología, los convenios y los resultados clásicos que se da por sentados. Para una revisión más profunda, se remite al lector a textos de referencia como:

0.1. Teoría de Conjuntos

0.1.1. Notación y convenciones básic

Sea adopatará como marco axiomático a la teoría usual de conjuntos; ZFC. Se comprend por tanto, los axiomas de: existencia, extensionalidad, buena fundación, esquema de sepa ción, par, unión, infinito, esquema de reemplazo y el axioma de elección (*denotado a partir ahora por AC*); mismos que pueden consultarse en [7, p. xv].

Se asume que el lector está familiarizado con los objetos clásicos de la teoría de conjun conviniendo las notaciones pertinentes a: los símbolos lógicos $\forall$, $\exists$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$ y $\exists!$ p existencia y unicidad; el conjunto vacío $\varnothing$; la pertenencia $\in$, la contención $\subseteq$ y contenc propia $\subsetneq$; la diferencia de conjuntos $X \setminus Y$; el par ordenado (x, y), el conjunto potencia $\mathscr{P}($ y claro, las operaciones conjuntistas: unión, intersección, producto cartesiano ($\cup$, $\cap$ y junto con sus homólogos unarios: $\bigcup$, $\bigcap$ y $\prod$, respectivamente). A lo largo del presente te se jerarquizarán las operaciones anteriores de la siguiente manera: se aplicarán siempre izquierda a derecha, priorizando la diferencia de conjuntos, el producto cartesiano y la un e intersección, en tal orden.

Dado un conjunto A, se denotará por $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$ al conjunto de todos los elemen x de A que satisfacen la fórmula $\varphi(x)$ (siendo tal colección un conjunto, debido al esque de separación [7, p. xv]). Una *clase* es una “coleccion” del estilo $\mathcal{C} = \{x \mid \varphi(x)\}$, se dice $\mathcal{C}$ *conjunto* si y sólo si se satisface:

$$\exists y \forall x \; (x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$$

en caso contrario, ésta se denomina *clase propia*. Como abuso de notación, si un conjunt hace verdadera la fórmula $\varphi(x)$, se escribirá $x \in \mathcal{C}$. Se denotará por $\mathcal{V}$ a la clase $\{x \mid x = x$

Se dará por sentado el conocimiento de la teoría elemental de relaciones y funciones, m teniéndose al margen de las notaciones típicas para: el dominio $\mathrm{dom}(f)$ e imagen $\mathrm{ima}(f)$

imagen directa $f[A]$ e inversa $f^{-1}[A]$ y las funciones identidad Id_X. La composic
ciones (o relaciones) será denotada por yuxtaposición fg y, la restricción de una
relación) f a un subconjunto $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$, por $f \restriction A$. Se señala además el uso ocas
expresion "$A \to B$ *dada por* $x \mapsto f(x)$" (o simplemente "$x \mapsto f(x)$") para hacer refe
relga de correspondencia de la función $f : A \to B$, en caso su nombre carezca de i

0.1.2. Órdenes

Los órdenes parciales reflexivos y antirreflexivos serán denotados por los símbo
respectivamente y el término *orden parcial* hará referencia a cualquiera de ellos
diferencia no es sustancial, pues ambas versiones son fácilmente intercambiables
eliminar la identidad del conjunto sobre el cual se definen. Un *conjunto parcialmen*
se concive como un par (P, R), donde R es un orden parcial en P. En lo que s
conjunto parcialmente ordenado $(P, \leqslant)$.

Para cada $A \subseteq P$: $\min(A)$, $\max(A)$, $\sup(A)$ e $\inf(A)$ denotarán el máximo, mínim
e ínfimo de A, respectivamente (en caso de existir). Además, cierto $p \in P$ es R-*mi*
si $p \in A$ y no existe $q \in A$ tal que $q < p$, definiendo el concepto R-*maximal* de fo

Se conviene que dos elementos $p, q \in P$ son *comparables* si y sólo si $p \leqslant q$ o
caso contrario, son *incomparables*. Así mismo, p y q serán *compatibles* ($p \parallel q$) cu
$r \in P$ de modo que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$; en caso contrario, serán *incompatibles* (p
$(P, \leqslant)$-*cadena* (*anticadena, respectivamente*) es un subconjunto de P de elementos c
(incompatibles, respectivamente) dos a dos; y cuando el contexto lo permita, se
prefijo $(P, \leqslant)$.

La caracterización típica para AC es clave:

Teorema 0.1.1 (Principio de Maximalidad de Hausdorff)

AC se satsiface si y sólo si todo conjunto parcialmente ordenado $(P, \leqslant)$, no vacío,
$(P, \leqslant)$-cadena $\subseteq$-maximal (del conjunto de cadenas de P).

Se dice que $\leqslant$ ($(P, \leqslant)$ o $(P, <)$, indistintamente) es: *total* si cualesquiera dos el
P son comparables, *buen orden* (*bien fundado, o completo, respectivamente*) si y s
$A \in \mathscr{P}(P) \setminus \{\varnothing\}$ tiene elemento mínimo (minimal, o supremo si A es acotado sup
respectivamente). Nótese que todo buen orden es total, bien fundado y completo.

Dados dos ordenes parciales (P, R) y (Q, S), se dice que una función $f : P$ -
creciente (*decreciente*, respectivamente) si y sólo si dados $p, q \in P$, se tiene que p
$f(p)\ S\ f(q)$ (o $f(p)\ S\ f(q)$, respectivamente). En cualquier caso, se dice que f es u
de orden; y, si además f es biyectiva, se dice que f es un *isomorfismo* y que los óro
y (Q, S) son *isomorfos*, denotado $(P, R) \cong (Q, S)$.

0.1.3. Ordinales y Cardina

Siguiendo la hoy conocida como construccion de John von Neumann, se declara que conjunto α es: *ordinal* si es transitivo (esto es, $\alpha \subseteq \mathscr{P}(\alpha)$) y $(\alpha, \in)$ es un buen orden natural si es un ordinal tal que $(\alpha, \ni)$ es un buen orden. Se denota por ON a la clase (prop de todos los ordinales.

Los ordinales se denotan, típicamente, por las primeras letras griegas minúsculas: α, β etcétera; y, los naturales por: m, n, k, etcétera. Se seguirá esta convención, salvo que se indi lo contrario.

Si α y β son ordinales, se conviene que α es menor que β ($\alpha < \beta$) cuando $\alpha \in \beta$; en e sentido, es un hecho que toda clase no vacía de ordinales, X, tiene un mínimo (a saber, $\bigcap$ Y consecuentemente, todo conjunto de ordinales A tiene supremo (a saber, $\bigcup A$). Un ordi α es: *cero* si $\alpha = 0 := \varnothing$; *sucesor* cuando existe otro ordinal β de modo que $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$ cuyo caso se denota $\alpha = \beta + 1$); y *límite* en caso no ocurra ninguna de las dos anterio El primer ordinal límite se denotará por ω. Es un hecho que ω es el conjunto de todos números naturales.

Teorema 0.1.2 (Inducción transfinita)

Si $\varphi(x)$ es una fórmula de la teoría de conjuntos y:

i) $\varphi(0)$ se satisface.

ii) Para cada ordinal α, la satisfacción de $\varphi(\alpha)$ implica la satisfacción de $\varphi(\alpha+1)$.

iii) Para cada ordinal límite γ, la satisfacción de $\forall\alpha \in \gamma(\varphi(\alpha))$ implica la satisfacci de $\varphi(\gamma)$.

entonces, para cualquier ordinal α, se satisface $\varphi(\alpha)$.

Se obtiene la misma conclusión sustituyendo las condiciones (i)-(iii) por el enunciad Para todo ordinal γ, la satisfacción de $\forall\alpha \in \gamma(\varphi(\alpha))$ implica la satisfacción de $\varphi(\gamma)$.

Dadas clases $\mathcal{C} = \{x \mid \varphi(x)\}$ y $\mathcal{C}' = \{x \mid \varphi'(x)\}$, se dice que un *funcional de* $\mathcal{C}$ en V es u clase F de pares ordenados; a saber $F = \{(x,y) \mid \varphi(x) \wedge \psi(x,y)\}$, de forma que $\forall x(\varphi(x)$ $\exists! y(\varphi'(y) \wedge \psi(x,y)))$. En cuyo caso, se denota $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, y, para cada x en $\mathcal{C}$, se den por $F(x)$ al único y en $\mathcal{C}'$ tal que $\psi(x,y)$. Siendo claro además que, si A es un conju cualquiera, $F[A] = \{F(a) \mid a \in A\}$.

Teorema 0.1.3 (Recursión transfinita)

Para cualesquiera funcionales $F, G : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ y todo conjunto A, existe un único funcion $G : \mathsf{ON} \to \mathcal{V}$ de manera que:

i) $G(0) = A$.

ii) Para cada ordinal α, $G(\alpha+1) = F(G(\alpha))$.

iii) Para cada ordinal límite γ, $G(\gamma) = H(G[\alpha])$.

Además, existe un único funcional $K : \mathsf{ON} \to \mathcal{V}$ de manera que para todo or satisface:

$$K(\alpha) = F(K[\alpha])$$

Los teoremas anteriores se restringen a cualquier otro ordinal, consiguiéndose as nes clásicas para los teoremas de inducción y recursión (cada uno de ellos con do para ω (o cualquier otro odrinal α). Siendo tales restricciones las justificaciones rig ciertas técnicas y construcciones de las que se echa mano en este trabajo (véase **t** Haciendo uso del Teorema de Recursión Transfinita, se pueden definir las operacio entre ordinales: $\alpha+\beta$, $\alpha\cdot\beta$ y α^{β}, respectivamente. En caso se lleguen a utiliza presente tesis, se indicará que tales símbolos corresponden a artimética es ordinal confusión con la aritmética cardinal) y seguirá la definición expuesta en [10, p.XX

Teorema 0.1.4 (de enumeración)

Para cualquier buen orden $(P,<)$ existe un único ordinal α para el cual $(P,<) \cong$

Tomando en cuenta que; bajo AC, cualquier conjunto admite un buen orden [p. 48], se desprende de lo anterior que todo conjunto X es biyectable con algún mínimo de tales ordinales se le denomina *cardinalidad de* X y se denota por $|X|$. S además que X es: *finito* si existe $n \in \omega$ tal que $|X| = n$; *infinito* si $|X| \geqslant \omega$; *n* $|X| = \omega$; *a lo más numerable* si $|X| \leqslant \omega$; y, *más que numerable* (indistintamente, *no* si $|X| > \omega$.

Cualquier ordinal κ que sea la cardinalidad de un conjunto tiene la virtud de n table con ningun ordinal anterior a él, a estos ordinales se les llama *cardinales*. Los se suelen denotar por letras griegas intermedias: κ, λ, μ, etcétera. Se seguirá tal co además se denotará por CAR a la clase de cardinales mayores o iguales a ω. Es un la intersección de una familia de cardinales, es un cardinal. En consecuencia, cua no vacía de cardinales tiene mínimo; y, cualquier conjunto de cardinales, supremo

Dados dos cardinales κ y λ, se definen: $\kappa+\lambda := |\kappa\times\{0\}\cup\lambda\times\{1\}|$, $\kappa\cdot\lambda :=$ $\kappa^{\lambda} := |\{f \mid f : \lambda \to \kappa\}|$; siendo las versiones generales de las dos primeras operacio

$$\sum_{\alpha\in I}\kappa_\alpha := \left|\bigcup_{\alpha\in I}(\kappa_\alpha\times\{\alpha\})\right| \quad y \quad \prod_{\alpha\in I}\kappa_\alpha := \left|\prod_{\alpha\in I}\kappa_\alpha\right|$$

(cuando $\{\kappa_\alpha \mid \alpha\in I\}$ es un conjunto no vacío de cardinales).

Se dará por sentado que el lector está familiarizado con la aritmética cardinal b [4, Cap. 1, § 3]). Más allá de tal comportamiento elemental, se hace hincapié en lo teoremas de suma relevancia para la aritmética cardinal:

Teorema 0.1.5 (suma y producto cardinal)

Si $\{\kappa_\alpha \mid \alpha \in I\}$ es conjunto no vacío de cardinales:

i) $\sum_{\alpha \in I} \kappa_\alpha = |I| \cdot \sup_{\alpha \in I} \kappa_\alpha$.

ii) Si ningun κ_α es 0 y para cualesquiera $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \leqslant \beta$ implica $\kappa_\alpha \leqslant \kappa_\beta$, entonce
$\prod_{\alpha \in I} \kappa_\alpha = \left(\sup_{\alpha \in I} \kappa_\alpha\right)^{|I|}$.

Teorema 0.1.6 (Lema de König)

Sean $\{\kappa_\alpha \mid \alpha \in I\}$ y $\{\lambda_\alpha \mid \alpha \in I\}$ conjuntos no vacíos de cardinales de modo que para to
$\alpha \in I$ se satisface $\kappa_\alpha < \lambda_\alpha$. Entonces:

$$\sum_{\alpha \in I} \kappa_\alpha < \prod_{\alpha \in I} \kappa_\alpha$$

Particularmente, $\kappa = \sum_{\alpha \in \kappa} 1 < \prod_{\alpha \in \kappa} 2 = 2^\kappa$ (*Teorema de Cantor*).

Del Lema anterior se desprende que si $\kappa \in \mathsf{CAR}$, existe $\lambda \in \mathsf{CAR}$ con $\kappa < \lambda$. Luego, se pu
ordenar la clase CAR como:

Definición 0.1.7. *Se define recursivamente; para cualquier ordinal α, el número $\aleph_\alpha$, d*
la siguiente manera:

i) $\aleph_0 := \omega$.

ii) Para cada ordinal α, $\aleph_{\alpha+1} := \min\{\lambda \in \mathsf{CAR} \mid \aleph_\alpha < \lambda\}$.

iii) Para cada ordinal límite γ, $\aleph_\gamma := \sup_{\alpha<\gamma} \aleph_\alpha$.

Además, para cada ordinal α, se denota $\omega_\alpha := \aleph_\alpha$.

Siempre que X sea un conjunto y κ un cardinal, se escribirá por $[X]^\kappa$ al conjunto de to
los subconjuntos de X de cardinalidad κ; $[X]^{<\kappa}$ al conjunto de todos los subconjuntos d
de cardinalidad estrictamente menor que κ; definéndose análogamente a los conjuntos $[X]$
$[X]^{>\kappa}$ y $[X]^{\geqslant\kappa}$. Además, en caso no se confunda con la notación de aritmética cardinal, X^κ s
el conjunto de funciones de κ en X; y, $X^{<\kappa}$ el conjunto de funciones de funciones $f : \alpha \to$
(con $\alpha < \kappa$).

Es un hecho que si X es infinito, entonces $|[X]^\kappa| = |X|^\kappa$ y $|[X]^{<\omega}| = |X|$; además, $|X^\mu| = |$
y $|X^{<\omega}| = |X|$.

0.1.4.

Un *árbol* es un orden parcial $(T, \leqslant)$ (denotado simplemente por T si no hay lugar
dades) tal que para cualquier $x \in T$, el conjunto $<_x := <^{-1} [\{x\}] = \{y \in T \mid y < x\}$
orden. Dado el Teorema 0.1.4, para cada $x \in T$ existe un único ordinal, denotado
cual $(<_x, <) \cong (o(x), \in)$. Tal ordinal $o(x)$ es nombrado el *orden de* x *en el árbol*
de T es el ordinal $h(T, \leqslant) := \sup\{o(x) + 1 \mid x \in T\}$. Para cada ordinal α se define
nivel de $(T, \leqslant)$ como el conjunto $T_\alpha := \{x \in T \mid o(x) = \alpha\}$. Y, finalmente, un
$R \subseteq T$ se dice que es *rama* si y sólo si es una $(T, \leqslant)$-cadena $\subseteq$-maximal (del
$(T, \leqslant)$-cadenas).

Dentro de la basta variedad de árboles, será de especial interés el *árbol de ram*
$\{f \mid f : \omega \to 2\}$; esto es, el conjunto $2^{<\omega}$ ordenado por contención. Tal árbol es
todos sus elementos tienen orden finito y su altura es exactamente ω.

En efecto, si $f \restriction n \in 2^{<\omega}$, entonces $(n, \in) \cong (f, \subsetneq_f)$ debido al isomorfismo de or
dado por $n \mapsto f \restriction n$. Por lo tanto T es un árbol, y el orden de cada $f \in T$ es
como $2^{<\omega}$ contiene a todas las funciones de naturales en 2, se sigue que la alt
$\omega = \sup\{n + 1 \mid n \in \omega\}$.

Además T es numerable, ya que:

$$\omega \leqslant |2^{<\omega}| = \left| \bigcup_{n \in \omega} 2^n \right| \leqslant \sum_{n \in \omega} |2^n| = \omega$$

Lo cual demuestra lo que se requería respecto al árbol $(2^{<\omega}, \subseteq)$.

0.2. Topología

0.2.1. Convenios generales y propiedades to

Una *topología* para un conjunto X es un conjunto $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{P}(X)$ que tiene por ele
a X; es cerrado bajo uniones (arbitrarias); y, cerrado bajo intersecciones finitas. El
(con frecuencia confundido con su conjunto subyacente, X) se denomina *espacio t*
simplemente *espacio*). Los elementos de $\mathscr{T}$ se denominan *abiertos* (*de* X) y sus co
respecto a X, *cerrados* (*de* X).

Dados dos espacios X y Y, se dice que una función $f : X \to Y$ es *continua* s
$U \subseteq Y$ abierto en Y, se tiene que $f^{-1}[U] \subseteq X$ es abierto en X. Un *homemorfismo*
es una función continua $f : X \to Y$, biyectiva, cuya inversa $f^{-1} : Y \to X$ es tambié
Cuando exista un homeomorfismo entre X y Y, esto se denotará $X \cong Y$.

Dados un espacio $(X, \mathscr{T})$ y $A \subseteq X$ se define la *topología de subespacio* (*de* A
como la colección $\mathscr{T}_A := \{U \cap A \mid U \in \mathscr{T}\}$ (que, claramente, es topología para
$(X, \eta), (Y, \mathscr{T})$ sean espacios topológicos, se dice que una función $f : X \to Y$ es u
y sólo si f es un homeomorfismo entre (X, η) y $(f[X], \mathscr{T}_{f[X]})$. En caso ocurra l
convendrá que X es un *subespacio* de Y (o bien, que X *se encaja en* Y) y, ocasional

se denotará $X \hookrightarrow Y$. En este contexto, la notación "$A \subseteq X$" significará que A está conten en X como conjunto y que $A \hookrightarrow X$ por medio del encaje $A \to X$ dado por $a \mapsto a$.

Una *base* para un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ es una coleccion $\mathcal{B} \subseteq \mathscr{T}$ de forma que p cualquier abierto U de X y cada $x \in U$ existe cierto $B \in \mathcal{B}$ de forma que $x \in B \subseteq U$.

Si $x \in X$, una *vecindad de* x (*en* X) es un subconjunto $V \subseteq X$ de modo que existe un abie U de X tal que $x \in U \subseteq V$. Además, se convendrá que una coleccion $\mathcal{B}_x \subseteq \mathscr{P}(X)$ es una *b local* (*de vecindades*, respectivamente) de x en X si y sólo si para cada elemento de $\mathcal{B}_x$ es u vecindad abierta (vecindad, respectivamente) de x; y, para todo abierto U de X con $x \in$ existe $B \in \mathcal{B}_x$ de forma que $x \in B \subseteq U$.

Para cada $A \subseteq X$ se denotarán por $\operatorname{int}(A), \operatorname{cl}(A), \operatorname{ext}(A), \operatorname{fr}(A), \operatorname{der}(A)$ a los *operado* interior, clausura, exterior, frontera, y derivado de A, respectivamente. Sus definiciones pueden consultar en [1, Cap. 2]. Los elementos de $\operatorname{der}(A)$ se denominan *puntos de acumulac de* A; y, los elementos en $A \setminus \operatorname{der}(A)$ se llaman *puntos aislados de* A. Un subconjunto $D \subseteq$ se dice *denso* (*en* X) si y sólo si $\operatorname{cl}(D) = X$.

Dado un conjunto no vacío de espacios topológicos $\{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$, se denotarán por $\prod_{\alpha \in \kappa}$ y $\coprod_{\alpha \in \kappa} X_\alpha$ a su *producto topológico* (o, *de Tychonoff*) y *suma topológica*, respectivame siguiéndo las definiciones de estos espacios acorde al estándar, expuesto en textos como [1, entre otros. Al momento de trabajar con productos topológicos, será usual, para cada α denotar por π_α a la α-ésima proyección cartesiana ($\prod_{\beta \in \kappa} X_\beta \to X_\alpha$ dada por $f \mapsto f(\alpha)$).

Una propiedad $\varphi(X)$ (pensada como fórmula de la teoría de conjuntos) es: *topológica* es invariante bajo homeomorfismos; esto es, si $(X, \mathscr{T})$ y (Y, η) son homeomorfos, enton $\varphi(X)$ se satisface únicamente cuando $\varphi(Y)$ se satisface; *hereditaria* (*débilmente heredita* respectivamente) cuando $\varphi(X)$ implica que para cualquier subespacio (subespacio cerra respectivamente) A de X, $\varphi(A)$ se satisface; *factorizable* si para cualquier conjunto no va de espacios topológicos $\{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ se tiene que, si $\varphi(\prod_{\alpha \in \kappa} X_\alpha)$ se cumple, entonces $\forall$ $\kappa(\varphi(X_\alpha))$ se satisface; *productiva* (*finitamente productiva*, respectivamente) si para cualqu cardinal κ (natural $\kappa \in \omega$, respectivamente) no cero y familia $\{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ de espac la satisfacción de $\forall \alpha \in \kappa(\varphi(X_\alpha))$ implica la satisfacción de $\varphi(\prod_{\alpha \in \kappa} X_\alpha)$. Además, si espacio X es tal que todos sus subespacios tienen una propiedad (a saber, P), X se denom *hereditariamente* P.

Las siguientes propiedades topológicas serán utilizadas a lo largo del texto. Un espa X se dice: *Primero Numerable* (o 1AN) si cada uno de sus puntos admite una base lo (equivalentemente, de vecindades) a lo más numerable; *Segundo Numerable* (o 2AN) si adm una base a lo más numerable; *Separable* si tiene un subconjunto denso y a lo más numerable si para cualesquiera $x, y \in X$ distintos existe un abierto U de forma que $U \cap \{x, y\} \in \{\{x\}, \{$ T_1 si para cada $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es cerrado, T_2 (o *de Hausdorff*) si para cualesqui $x, y \in X$ distintos existen abiertos ajenos U, V tales que $x \in U$ y $y \in V$; *regular* si p cualquier cerrado $F \subseteq X$ y cualquier $x \in X \setminus F$ existen abiertos U, V ajenos de modo que $F \subseteq$ y $x \in V$; T_3 si es regular y T_1; *completamente regular* si para cualquier cerrado F y pu $x \in X \setminus F$ existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ de modo que $f(x) = 0$ y $f[F] \subseteq \{1\}$; $T_{3\frac{1}{2}}$ (o *Tychonoff*) si es completamente regular y T_1; *normal* si para cualesquiera cerrados F, G ajen existen abiertos ajenos U, V de modo que $F \subseteq U$ y $G \subseteq U$; T_4 si es normal y T_1.

0.3. Pruebas de Consistencia Relativa

0.3.1. Preludio de Lógi

0.3.2. Axioma de Mart

Un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leqslant)$ es *c.c.c.* (o bien, cuenta con la *propiedad anticadena contable*) si y sólo si cualquier $(P, \leqslant)$-anticadena es a lo más numerable.

Un *filtro* de $(P, \leqslant)$ es un subconjunto $F \subseteq P$ no vacío, cerrado por arriba (es decir, si x y $y \geqslant x$, entonces $y \in F$) y de elementos compatibles en F (es decir, para cualesquiera x, y existe $r \in F$ de modo que $r \leqslant x$ y $r \leqslant y$). La noción de *ideal* es dual a la de filtro; y, un fi (o ideal) es *propio* si y sólo si es distinto de P.

Observación 0.3.1. *Sea X es conjunto, entonces $F \subseteq \mathscr{P}(X)$ es filtro (ideal) de $(\mathscr{P}(X), \subseteq$ si y sólo si F es no vacío, cerrado bajo superconjuntos (subconjuntos) y bajo interseccione (uniones) dos a dos.*

Se conviene que un subconjunto $D \subseteq P$ es: *denso* si y sólo si para cualquier $x \in P$ existe elemento $d \in D$ de modo que $d \leqslant x$; *denso bajo* $p \in P$ cuando para cada $x \leqslant p$ existe $d \in$ de modo que $d \leqslant x$.

Dada una colección $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{P}(P)$ de subconjuntos densos de $(P, \leqslant)$, se dice que un filtro de $(P, \leqslant)$ es *$\mathscr{D}$-genérico* si es propio y tiene intersección no vacía con cada elemento de Un filtro G es *genérico* si es $\mathscr{D}$-genérico, donde $\mathscr{D}$ es la colección de todos los subconjun densos de $(P, \leqslant)$.

El Axioma de Martin[1] se formula de la siguiente manera:

Definición 0.3.2. *Para cada cardinal infinito κ, $\mathsf{MA}(\kappa)$ es el enunciado: "Para todo conjunto parcialmente ordenado $(P, \leqslant)$ c.c.c. y cada colección $\mathscr{D}$ de conjuntos densos de $(P, \leqslant)$ con $|\mathscr{D}| \leqslant \kappa$, existe un filtro $\mathscr{D}$-genérico".*

El enunciado MA se definee como: "Para cada cardinal infinito $\kappa < \mathfrak{c}$ se satisface $\mathsf{MA}(\kappa)$"

Es un reesultado estándar y bien conocido que; en ZFC, $\mathsf{MA}(\omega)$ es verdadero y $\mathsf{MA}(\mathfrak{c})$ falso; en consecuencia, MA se suele utilizar junto con la negación de la hipótesis del contir (para no obtener resultados siempre vacuos). Además, a razón de ello, está bien definido:

$$\mathfrak{m} := \min\{\kappa \geqslant \omega \mid \neg\mathsf{MA}(\kappa)\}$$

Claramente $\aleph_1 \leqslant \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{c}$.

0.3.3. Forci

[1]que surgió como fruto del estudio de la *Hipótesis de Souslin* (véase la discusión correspondiente en [7])

1 Familias casi ajenas

Las familias casi ajenas son objetos fascinantes en la teoría de conjuntos; y como se verá a lo la de esta tesis, también en la topología. Entre los pioneros de su estudio destacan grandes figuras co Hausdorff, Sierpiski, Erds y Rado.

El presente capítulo tiene como meta presentar las familias casi ajenas y exponer sus propieda más inmediatas; los métodos más típicos para su construirlas; y finalmente, un estudio básico sobre combinatoria. En este última parte se abordarán resultados típicos; los Lemas de Dokálková y Solovay Teorema de Simón y la existencia de las familias de Luzin.

1.1. Observaciones inmediatas

Definición 1.1.1. *Dado un conjunto numerable* $\mathbb{N}$, *una* ***familia casi ajena sobre*** $\mathbb{N}$ *e un subconjunto* $\mathscr{A} \subseteq [\mathbb{N}]^{\omega}$ *tal que cualesquiera dos elementos distintos de* $\mathscr{A}$ *son cas ajenos. Se denotará:*

$$AD(\mathbb{N}) := \{\mathscr{A} \subseteq [\mathbb{N}]^{\omega} \mid \mathscr{A} \text{ es familia casi ajena sobre } \mathbb{N}\}$$

*y el término "**familia casi ajena**" (o simplemente "**familia**") hará referencia a una famili casi ajena sobre* ω.

El concepto previo es fácilmente generalizable, el lector puede indagar al respecto en Def. 9.20, p. 118]. Sin embargo, la teoría resultante del estudio de las familias casi aje (definidas como en 1.1.1) tiene un gran valor por sí misma.

Observación 1.1.2. *Si* $\mathbb{N}$ *es un conjunto numerable:*

i) *Cualquier subconjunto de una familia casi ajena sobre* $\mathbb{N}$ *es también una familia cas ajena sobre* $\mathbb{N}$.

ii) *Si* $\mathscr{A} \subseteq [\mathbb{N}]^{\omega}$ *está enumerado como* $\mathscr{A} = \{a_\alpha \mid \alpha \in I\}$*; para mostrar que* $\mathscr{A}$ *es famili casi ajena biyectable con* I, *bastará verificar si* $\alpha \neq \beta$, *entonces* $a_\alpha \cap a_\beta$ *es finito.*

iii) *Toda familia de subconjuntos infinitos de* $\mathbb{N}$, *ajenos por pares, es casi ajena sobre* N *en particular,* $[[\mathbb{N}]^{\omega}]^{\leqslant 1} \subseteq AD(\mathbb{N})$.

Es claro que toda familia casi ajena tiene tamaño menor o igual a $\mathfrak{c}$; así que e la observacion previa, de existir alguna con tamaño exactamente el continuo, se g la existencia de familias ajenas de cualquier tamaño inferior a éste.

Ejemplo 1.1.3. *Las colecciones* $\{\omega\}$, $\{\{2n \mid n \in \omega\}, \{2n+1 \mid n \in \omega\}\}$ *y* $\{\{p^n \mid$ $\{0\}\} \mid p$ *es primo*$\}$ *son familias casi ajenas sobre* ω.

Resulta no muy difícil verificar que las primeras dos familias del ejemplo a "grandes", en el siguiente sentido:

Definición 1.1.4. *Sea* N *conjunto numerable. Una familia casi ajena* $\mathscr{A}$ *sobre* **familia maximal en** N *si y sólo si es un elemento* $\subseteq$*-maximal del conjunto A denotará:*

$$\mathit{MAD}(N) = \{\mathscr{A} \in \mathit{AD}(N) \mid \mathscr{A} \text{ es maximal en } N\}$$

Cuando no haya riesgo de ambigüedad, el término **familia maximal** *hará referen familia maximal en* ω.

Observación 1.1.5. *Sean* N *un conjunto numerable. Una familia* $\mathscr{A} \in \mathit{AD}(N)$ *es en* N *si y sólo si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:*

i) *Para toda* $\mathscr{B} \in \mathit{AD}(N)$, *si* $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, *entonces* $\mathscr{A} = \mathscr{B}$

ii) *Para cualquier* $\mathscr{B} \subseteq [N]^\omega$, *si* $\mathscr{A} \subsetneq \mathscr{B}$, *entonces* $\mathscr{B} \notin \mathit{AD}(N)$.

iii) *Para cada* $B \in [N]^\omega$ *existe* $A \in \mathscr{A}$ *tal que* $A \cap B$ *es infinito.*

Se advierte que las familias sobre ω parecerán deslucir a las construidas sobre juntos numerables; pero al no ser el estudio sobre éstas últimas nulo, es menester las propiedades que son transferibles entre estas dos clases de objetos.

Definición 1.1.6. *Sean* N, M *conjuntos numerables y* $h : N \to M$ *cualquier biye define* $\Phi_h : \mathscr{P}(\mathscr{P}(N)) \to \mathscr{P}(\mathscr{P}(M))$ *como:*

$$\Phi_h(\mathscr{A}) = \{h[A] \mid A \in \mathscr{A}\}$$

En términos de lo recién enunciado, se remarca que al ser h biyección, Φ biyección. Siendo claro además, que ésta respeta todas las virtudes conjuntistas.

Proposición 1.1.7. *Sean* N, M *son numerables y* $h : N \to M$ *una biyección cu Entonces:*

i) $|\mathscr{A}| = |\Phi_h(\mathscr{A})|$.

ii) $\Phi_h(\mathscr{A} \cap \mathscr{B}) = \Phi_h(\mathscr{A}) \cap \Phi_h(\mathscr{B})$.

iii) $\Phi_h(\mathscr{A} \cup \mathscr{B}) = \Phi_h(\mathscr{A}) \cup \Phi_h(\mathscr{B})$.

iv) $\mathscr{A} \subsetneq \mathscr{B}$ *ocurre si y sólo si* $\Phi_h(\mathscr{A}) \subsetneq \Phi_h(\mathscr{B})$.

v) $\Phi_h[\mathit{AD}(N)] = \mathit{AD}(M)$.

vi) $\Phi_h[\mathit{MAD}(N)] = \mathit{MAD}(M)$

Demostración. Se mostrarán únicamente (v) y (vi). En ambos basta probar la contenc directa, pues al ser h biyección, $\Phi_h^{-1} = \Phi_{h^{-1}}$.

(v) Si $\mathscr{A} \in \mathsf{AD}(N)$, entonces $\mathscr{A} \subseteq [N]^\omega$ y así $\Phi_h(\mathscr{A}) \subseteq [M]^\omega$. Ahora, si $h[A], h[B$ $\Phi_h(\mathscr{A})$ son distintos, es necesario que $A \neq B$ y por ello $h[A] \cap h[B] = h[A \cap B] =^*$ mostrando que $\Phi_h(\mathscr{A}) \in \mathsf{AD}(M)$.

(vi) Si $\mathscr{A} \in \mathsf{MAD}(\mathscr{A})$ y $B \subseteq M$ es infinito, entonces $h^{-1}[B] \subseteq N$ es infinito y existe $A \in$ tal que $A \cap h^{-1}[B]$ es infinito. Al ser h biyección, $h[A \cap h^{-1}[B]] = h[A] \cap B$ es infinito, ende $\Phi_h(\mathscr{A}) \in \mathsf{MAD}(M)$.

Se consolida la usanzal; a partir de este momento, de hacer hincapié sobre cuáles propieda u objetos basados en las familias casi ajenas se preservan bajo las biyecciones Ψ_h.

Una aplicación superflua del Corolario anterior es el nacimiento de un método cómodo p generar familias casi ajenas; en especial infinitas.

Ejemplo 1.1.8. *Claramente* $\mathscr{A} = \{\{n\} \times \omega \mid n \in \omega\} \in \mathit{AD}(\omega \times \omega)$. *Así que si* $h : \omega \times \omega -$ ω *es biyección, entonces* $\Psi_h(\mathscr{A}) \in \mathscr{A}$ *es una familia casi ajena en* ω. *Más aún, tal famili es del mismo tamaño que* $\mathscr{A}$ *(todo gracias a 1.1.7)*

A continuación se comenzarán a examinar las propiedades de las familias casi ajenas r ximales; se tiene la intención de responder a las preguntas que surgen naturalmente co £puede haber familias casi ajenas más que numerables?, o, £existen familias maximales i nitas?

Lema 1.1.9. *Si* $\mathscr{A}$ *es familia casi ajena maximal, entonces* $\omega \subseteq^* \bigcup \mathscr{A}$.

Demostración. Por contrapuesta, supóngase que $\omega \nsubseteq^* \bigcup \mathscr{A}$, es decir que el conjunto B $\omega \setminus \bigcup \mathscr{A}$ es infinito. Si $A \in \mathscr{A}$, entonces $A \subseteq \bigcup \mathscr{A}$ y así, $A \cap B \subseteq A \setminus \bigcup \mathscr{A} \subseteq A \setminus A = \varnothing$. lo que $B \in [\omega]^\omega$ es casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$, mostrando que $\mathscr{A}$ no es maximal.

El recíproco del Lema previo falla para familias infinitas (véase la familia $\mathscr{B}$ del Eje plo 1.1.8); y de hecho, no se cuenta un resultado "amigable" para determinar cuándo es resultan ser maximales (véanse 1.3.9 y 1.3.10). En contraparte a esto, se deduce rápidament siguiente caracterización para la maximalidad de las familias casi ajenas finitas.

Corolario 1.1.10. *Sea $\mathscr{A}$ una familia casi ajena finita. Entonces $\mathscr{A}$ es maximal si $\omega \subseteq^* \bigcup \mathscr{A}$.*

Demostración. Por el Lema previo, basta demostrar la necesidad.

Supóngase $\omega \subseteq^* \bigcup \mathscr{A}$ y nótese que si $B \in [\omega]^\omega$, entonces $B \subseteq^* \bigcup \mathscr{A}$ y con ello $\bigcap \mathscr{A} = \bigcup\{B \cap A \mid A \in \mathscr{A}\}$. Como la última es una unión finita, B debe tener i finita con algún elemento de $\mathscr{A}$.

Esto es, todos los subconjuntos de ω casi ajenos con $\mathscr{A}$ son finitos, por lo que maximal.

El posterior resultado puede ser visto como un símil al aclamado Teorema de (todo filtro se extiende a un filtro maximal) o cualquier resultado afín en el que se haga uso de formas AC relacionadas con órdenaes parciales

Lema 1.1.11. *Toda familia casi ajena está contenida en una familia maximal.*

Demostración. Sean $\mathscr{A} \in \mathsf{AD}(\omega)$ y X el conjunto de todos las familias casi contienen a $\mathscr{A}$. Como $(X, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y no vacío, por de Maximalidad de Hausdorff (AC), existe $Y \subseteq X$, una cadena $\subseteq$-maximal de $(X, \subseteq$

Defínase $\mathscr{B} := \bigcup Y$, como $Y \subseteq \mathscr{P}([\omega]^\omega)$, entonces $\mathscr{B} \subseteq [\omega]^\omega$. Además, si $C, D \in$ $\mathscr{C}, \mathscr{D} \in Y \subseteq \mathsf{AD}(\omega)$ con $C \in \mathscr{C}$ y $D \in \mathscr{D}$. Puesto que Y es cadena de $(X, \subseteq)$, sin generalidad, $C, D \in \mathscr{D} \supseteq \mathscr{C}$; y con ello, $C \cap D$ es finito. Por lo que $\mathscr{B} \in \mathsf{AD}(\omega)$.

Finalmente, si $\mathscr{B}' \in \mathsf{AD}(\omega)$ y $\mathscr{B} \subsetneq \mathscr{B}'$, entonces $Y \cup \{\mathscr{B}'\}$ es una cadena en $Y \subsetneq Y \cup \{\mathscr{B}'\}$, lo que contradice la $\subseteq$-maximalidad de Y. Por lo tanto, $\mathscr{B} \in$ $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$.

Si bien las familias maximales finitas existen y su obtención resulta simple (Coro la siguiente proposición es testigo de que construir una familia maximal infinita req nivel superior de creatividad. Pese a no haber un acuerdo general, el resultado se a Wacaw Sierpinski, pues éste se desprende de [14, Teo. 2, p. 458].

Lema 1.1.12. *Ninguna familia casi ajena numerable es maximal.*

Demostración. Sea $\mathscr{A}$ una familia casi ajena numerable indexada como $\mathscr{A} = \{A$ Si $n \in \omega$ es cualquiera, $A_n \cap \bigcup\{A_m \mid m < n\}$ es finito pues A_n es casi ajeno co (si $m < n$). Así que por ser A_n infinito, el conjunto $A_n \setminus \bigcup\{A_m \mid m < n\} =$ $\bigcup\{A_m \mid m < n\})$ es infinito, particularmente no no vacío.

Sea $f : \omega \to \omega$ definida por $f(n) = \min\{A_n \setminus \bigcup\{A_m \mid m < n\}\}$ para cada n inyectiva, pues si $m < n$, entonces $f(n) \notin A_m$ y $f(m) \in A_m$, de donde $f(n) \neq f(m$ es claro que para cada $n \in \omega$, se tiene $A_n \cap \mathrm{ima}(f) = \{f(n)\}$. Entonces $\mathrm{ima}(f) \subseteq \omega$ y casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$.

Naturalmente, se conjetura la existencia de las familias maximales infinitas, el Axio de Elección y su aplicación 1.1.11, brinda la respuesta; misma que, dada su naturaleza constructiva, podría ser considerada tan insatisfactoria como destacable.

Observación 1.1.13. *Existe una familia maximal más que numerable.*

Efectivamente, considérese cualquier familia $\mathscr{A} \in \mathsf{AD}(\omega)$ numerable. Por el Lema 1.1.1 existe una familia maximal $\mathscr{B} \supseteq \mathscr{A}$. Así $\mathscr{B}$ es infinita y es numerable, dada la Proposició anterior.

1.2. Familias casi ajenas de tamaño $\mathfrak{c}$

La presente sección tiene por meta exhibir dos de los métodos más típicos para la constr ción de familias casi ajenas infinitas. El primero de ellos, se basa en las sucesiones conv gentes de espacios topológicos de Hausdorff, primero numerables.

Lema 1.2.1. *Sean X un espacio topológico T_1, de Fréchet, $A \subseteq X$ denso en X y $A \subseteq D \setminus X$ Para cada $x \in A$ existe una sucesión en D, inyectiva y convergente a x.*

Demostración. Sea $x \in A$ arbitrario. Como D es denso en X y éste es de Fréchet, $x \in \mathrm{cl}(D$ $\mathrm{sqcl}(D)$ y se puede fijar una sucesión en D convergente a x. Puesto que el espacio X es T_1, sucesión debe ser infinita; y como es convergente, sin pérdida de generalidad, inyectiva.

Proposición 1.2.2. *Sean X un espacio topológico más que numerable, de Hausdorff, d Fréchet. Si D es un denso numerable de X, para cada $A \subseteq X \setminus D$ existe una familia cas ajena sobre D biyectable con A.*

Demostración. Fíjese $D \subseteq X$ un denso numerable de X. Usando el Lema previo, para c $x \in A$ fíjese (AC) $A_x \subseteq D$ numerable de modo tal que $A_x \to x$. Defínase el conjunto $\mathscr{A}_{D,A}$ $\{A_x \subseteq D \mid x \in A\}$, nótese que $\mathscr{A}_{D,A} \subseteq [D]^\omega$ y $|\mathscr{A}_{D,A}| = |A|$.

Sean $x, y \in A$ con $x \neq y$, por ser X de Hausdorff, hay abiertos ajenos U, V tales que $x \in$ y $y \in V$. Seguido de que $A_x \to x$ y $A_y \to y$, se tiene $A_x \subseteq^* U$ y $A_y \subseteq^* V$, y en consecuen $A_x \cap A_y \subseteq^* U \cap V = \varnothing$. Lo cual prueba que $\mathscr{A}_{D,A} \in \mathsf{AD}(D)$.

Definición 1.2.3. *Sean X un espacio topológico de Hausdorff, de Fréchet, $D \subseteq X$ dens numerable y $A \subseteq X \setminus D$.*

La familia $\mathscr{A}_{D,A} := \{A_x \subseteq D \mid x \in A\}$; construida como en la demostración anterior, s denomina ***familia de sucesiones en*** D ***convergentes a*** A.

Como la recta real $\mathbb{R}$ es de Hausdorff, de Fréchet (por ser 1AN) y $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ es un
denso numerable; de lo previamente establecido se obtiene que $\mathscr{A}_{\mathbb{Q},\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ es una f
ajena sobre $\mathbb{Q}$ de tamaño $\mathfrak{c} = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|$.

La próxima estrategia de construcción se basa en considerar ciertas ramas del á

Lema 1.2.4. *Sean $(T, \leqslant)$ un árbol y $S \subseteq T$ cualquier rama. Si $x \in S$, entonces S*

Demostración. Sean $x \in S$ y $y \in <_x$ cualesquiera. Si $s \in S$, como S es cadena, s
$x \leqslant s$ o $s < x$. En el primer caso, $y < x \leqslant s$ y y es comparable con s. En el se
$y, s \in <_x$; y como $(<_x, \leqslant)$ es buen orden (por ser $(T, \leqslant)$ un árbol), y y s son comp

Por tanto, $S \cup \{y\}$ es una cadena; y seguido de que S es rama, $y \in S$, lo cual d
contención deseada.

Proposición 1.2.5. *Sean $(T, \leqslant)$ un árbol numerable de altura ω y $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(T)$ un
de ramas numerables de $(T, \leqslant)$. Entonces $\mathscr{A}$ es una familia casi ajena sobre T.*

Demostración. Nótese que $\mathscr{A} \subseteq [T]^\omega$. Sean $R, S \in \mathscr{A}$ distintos, entonces $R \cap S$
finito, o se puede fijar cierto $x_0 \in R \cap S$; en cuyo caso, de la proposición previa s
que $R \cap S \subseteq <_{x_0}$.

Como T tiene altura ω, el orden de x_0 es natural, consecuentemente se tiene q
finito.

Un ejemplo canónico de árbol numerable de altura ω es $2^{<\omega}$ (véase 6); co
siguiente clase de familias en él desenvocará en resultados súmamente notable
puede ver en la Subsección 4.1.1).

Proposición 1.2.6. *Sea T el árbol $(2^{<\omega}, \subseteq)$ y para cada $f \in 2^\omega$ denótese A
$n \mid n \in \omega\} \subseteq 2^{<\omega}$; entonces:*

i) Cada A_f es una rama de T.

ii) Si $f \neq g$, entonces $A_f \neq A_g$.

*iii) Para cada $X \subseteq 2^\omega$, el conjunto $\mathscr{A}_X :=\subseteq \{A_f \mid f \in 2^\omega\}$ es una familia casi aj
$2^{<\omega}$ biyectable con X.*

Demostración. Basta ver (i) y (ii), así, (iii) se sigue del Lema previo.

(i) Sea $f \in 2^\omega$, inmediatamente, A_f es cadena de T. Supóngase que $S \subseteq 2^{<\omega}$ es u
T tal que $A_f \subseteq S$ y sea $g \in S$. Si $\mathrm{dom}(g) = n$, dado que S es cadena de T, $f \restriction n \subseteq g$
Cualquiera de los casos anteriores implican que $f \restriction n = g$ ya que $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{dom}$
que $g \in A_f$ y $A_f = S$.

(ii) si $f \neq g$, entonces existe $m \in \omega$ tal que $f(m) \neq g(m)$. Así, se obtiene que
$g \restriction m+1$ y $f \restriction m+1 \in R_f \setminus R_g$.

Definición 1.2.7. *Para cada* $X \subseteq 2^\omega$ *defínase* $\mathscr{A}_X := \{A_f \mid f \in X\}$ *como en la proposició previa.*

Esta familia será nombrada la ***familia de las ramas de*** X ***en*** $2^{<\omega}$*.*

En paralelo a lo comentado después de 1.2.3, también se puede concluir vía la construcc recién expuesta (y el Lema 1.1.11) lo siguiente.

Corolario 1.2.8. *Existe una familia maximal de cardinalidad* $\mathfrak{c}$*.*

Además, para cualquier cardinal $\lambda \leqslant \mathfrak{c}$ *existe una familia casi ajena de cardinalidad* λ*.*

Se concluirá esta sección comentando cosas en relación a la pregunta obvia: £existen famil maximales de cualquier cardinalidad entre $\aleph_1$ y $\mathfrak{c}$?

Definición 1.2.9. *Se define el* ***cardinal de casi ajenidad*** *como:*

$$\mathfrak{a} := \min\{\kappa \geqslant \omega \mid \text{Existe una familia maximal de cardinalidad } \kappa\}$$

Debido a 1.1.12, se tiene $\aleph_1 \leqslant \mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{c}$ y claramente bajo HC se debe satisfacer $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$; luego consistente con ZFC que $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$. Comentar que la teoría en relación al cardinal $\mathfrak{a}$ (así como otros cadrinales importantes) es incríblemente basta y existen resultados de consistencia co el siguiente.

Teorema 1.2.10

Si κ es cualquier cardinal regular con $\aleph_1 \leqslant \kappa \leqslant \mathfrak{c}$, es consistente con ZFC que $\mathfrak{a} = \kappa$.

El Teorema recién enunciado consecuencia de [8, Teo. 5.1, p. 127]; y, pese a que su dem tración es ajena a los proposítos de la presente disertación, conviene remarcar que se ha más comentarios respecto al enunciado $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ posteriormente (véase 1.4.18).

1.3. El ideal generado y su comportamiento

Definición 1.3.1. *Si* N *es numerable y* $\mathscr{A} \in AD(N)$*:*

i) El ***ideal generado por*** $\mathscr{A}$ *es el conjunto:*

$$\mathscr{I}_N(\mathscr{A}) := \{B \subseteq N \mid \exists H \in [\mathscr{A}]^{<\omega}\ (B \subseteq^* \bigcup H)\}$$

ii) La ***parte positiva de*** $\mathscr{A}$ *es* $\mathscr{I}_N^+(\mathscr{A}) := \mathscr{P}(N) \setminus \mathscr{I}_N(\mathscr{A})$*.*

Si $\mathrm{N} = \omega$, se escribirá únicamente $\mathscr{I}(\mathscr{A})$ ($\mathscr{I}^+(\mathscr{A})$, respectivamente).

El objeto introducido previamente es de vital importancia para el estuido de la co de las familias casi ajenas. Como se había advertido, resulta necesario realizar l observación con el propósito de no perder generalidad con los resultados mostrad esta sección.

Proposición 1.3.2. *Sean N, M conjuntos numerables y $h : \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ biyectiva $\mathsf{AD}(\mathrm{N})$, entonces $\Phi_h(\mathscr{I}_\mathrm{N}(\mathscr{A})) = \mathscr{I}_\mathrm{M}(\Phi_h(\mathscr{A}))$.*

Demostración. Como $\Phi_h^{-1} = \Phi_{h^{-1}}$, basta probar una contención de la igualdad d $Y \in \mathscr{I}_\mathrm{N}(\mathscr{A})$ cualquiera, entonces existe $H \subseteq \mathscr{A}$ finito tal que $Y \subseteq^* \bigcup H$, esto es, finito. Como h es biyectiva, se obtiene que $h\left[Y \setminus \bigcup H\right] = h[Y] \setminus h\left[\bigcup H\right] = h[Y] \setminus \bigcup$ finito.

Luego $h[Y] \subseteq^* \bigcup \Phi_h(H)$ y $\Phi_h(H) \subseteq \Phi_h(\mathscr{A})$ es finito, mostrando de esta forma $\mathscr{I}_\mathrm{M}(\Phi_h(\mathscr{A}))$.

Resulta sencillo constatar que el objeto definido en 1.3.1 es; como su nombre indi (no necesariamente propio) sobre $\mathscr{P}(\omega)$. Además, se destacan las siguientes dos obs

Observación 1.3.3. *Si $\mathscr{A}$ es familia casi ajena, entonces:*

i) Cualquier subconjunto finito de ω, así como cualquier elemento de $\mathscr{A}$, es de $\mathscr{I}(\mathscr{A})$. Por lo que se dan las contenciones $\varnothing \subsetneq [\omega]^{<\omega} \cup \mathscr{A} \subseteq \mathscr{I}(\mathscr{A})$.

ii) Si $\mathscr{B} \in \mathsf{AD}(\omega)$ y $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, entonces $\mathscr{I}(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{I}(\mathscr{B})$.

Cada vez que $\mathscr{A}$ sea una familia casi ajena maximal y finita, en virtud del Le tendrá que $\omega \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$, pues $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}$ es finito y $\omega \subseteq^* \bigcup \mathscr{A}$. El recíproco de esto cierto.

Proposición 1.3.4. *Sea $\mathscr{A}$ familia casi ajena. Si $\omega \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$, entonces $\mathscr{A}$ e maximal.*

Demostración. Supóngase que $\omega \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$, entonces existe $H \subseteq \mathscr{A}$ finito con ω $\bigcup \mathscr{A}$. Por 1.1.10, basta ver que $\mathscr{A}$ es finita.

Por ser $\mathscr{A}$ casi ajena, cada $B \in \mathscr{A} \setminus H$ es infinito y casi ajeno con cada elemento esto implica $B = B \cap \omega \subseteq^* \bigcup\{B \cap h \mid h \in H\} =^* \varnothing$ (por ser H un conjunto finito) imposible. Así $\mathscr{A} \subseteq H$ es finita.

Corolario 1.3.5. *Sean N un conjunto numerable y $\mathscr{A}$ cualquier familia casi aj N. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $\mathscr{A}$ es infinita o no maximal en N.

ii) $\mathscr{I}_N(\mathscr{A})$ *es ideal propio en* $(\mathscr{P}(N), \subseteq)$*, es decir,* $N \notin \mathscr{I}_N(\mathscr{A})$*.*

Con relativa frecuencia aparecerán familias que, pese a no ser maximales, satisfacen condición (ii) de lo subsecuente; ésta puede ser tomada como un debilitamiento de la ma malidad.

Definición 1.3.6. *Si* N *es numerable y* $\mathscr{A}$ *familia casi ajena sobre* N*:*

i) *Dado* $X \subseteq N$ *infinito, la* ***traza de*** $\mathscr{A}$ ***en*** X *se define como:*

$$\mathscr{A} \restriction X := \{A \cap X \in [X]^\omega \mid A \in \mathscr{A}\}$$

ii) $\mathscr{A}$ *es* ***maximal en alguna parte*** *si y sólo si existe* $X \in \mathscr{I}_N^+(\mathscr{A})$ *tal que la famili* $\mathscr{A} \restriction X$ *es maximal en* X*.*

iii) $\mathscr{A}$ *es* ***maximal en ninguna parte*** *si y sólo si no es maximal en alguna parte.*

Sin causa de asombro, los conceptos recién establecidos son respetados por las biyeccio Φ_h.

Proposición 1.3.7. *Si* N, M *son conjuntos numerables y* $h : N \to M$ *es biyección, entonce para cada* $\mathscr{A} \in AD(N)$*:*

i) *Para cada* $X \in [N]^\omega$ *se cumple* $\Phi_h(\mathscr{A} \restriction X) = \Phi_h(\mathscr{A}) \restriction h[X]$*.*

ii) $\mathscr{A}$ *es maximal en alguna parte si y sólo si* $\Phi_h(\mathscr{A})$ *es maximal en alguna parte.*

Demostración. (i) Nótese que por ser h biyección:

$$\begin{aligned}
\Phi_h(\mathscr{A}) \restriction h[X] &= \{B \cap h[X] \in \left[h[X]\right]^\omega \mid B \in \Phi_h(\mathscr{A})\} \\
&= \{h[A] \cap h[X] \in \left[h[X]\right]^\omega \mid A \in \mathscr{A}\} \\
&= \{h[A \cap X] \in \left[h[X]\right]^\omega \mid A \in \mathscr{A}\} \\
&= \Phi_h(\mathscr{A} \restriction X)
\end{aligned}$$

(ii) Como $\Phi_h^{-1} = \Phi_{h^{-1}}$, basta probar la suficiencia. Supóngase que $\mathscr{A}$ es maximal en algu parte, entonces existe $X \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ tal que $\mathscr{A} \restriction X$ es maximal en X. Dada la igualdad de 1. $h[X] \in \mathscr{I}^+(\Phi_h(\mathscr{A}))$.

Además, dado que $g := h \restriction X : X \to h[X]$ es biyección y se tiene que $\Phi_h(\mathscr{A}) \restriction h[X$ $\Phi_h(\mathscr{A} \restriction X) = \Phi_g(\mathscr{A} \restriction X)$, se desprende del Proposición 1.1.7 que $\Phi_h(\mathscr{A}) \restriction h[X]$ es maxi en $h[X]$.

Es adecuado señalar la siguiente serie de observaciones; que aunque técnicas, permiti manejar con soltura tanto las trazas de familias casi ajenas, como sus ideales generados.

Proposición 1.3.8. *Sean $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ familias casi ajenas y $X, Y \in [\omega]^\omega$ cualesquiera,*

i) Si $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, entonces $\mathscr{A} \restriction X \subseteq \mathscr{B} \restriction X$.

ii) Se da la igualdad $(\mathscr{A} \restriction Y) \restriction X = \mathscr{A} \restriction (Y \cap X)$.

iii) Si $X \subseteq Y$, entonces $\mathscr{I}_X(\mathscr{A} \restriction X) \subseteq \mathscr{I}_Y(\mathscr{A} \restriction Y)$.

Demostración. El punto (i) es claro.

(ii) Si $(A \cap Y) \cap X \in (\mathscr{A} \restriction Y) \restriction X$ es cualquier elemento, entonces $A \in \mathscr{A}$ y $(A$ $A \cap (Y \cap X)$ es infinito, de donde $(A \cap Y) \cap X \in \mathscr{A} \restriction (Y \cap X)$. Recíprocamente, si A $\mathscr{A} \restriction (Y \cap X)$, entonces $A \in \mathscr{A}$ y $A \cap (Y \cap X)$ es infinito y como $A \cap (Y \cap X) \subseteq A \cap$ $A \cap Y$ es infinito, en consecuencia $A \cap (Y \cap X) = (A \cap Y) \cap X \in (\mathscr{A} \restriction Y) \restriction X$.

(iii) Supóngase que $X \subseteq Y$ y sea $B \in \mathscr{I}_X(\mathscr{A} \restriction X)$. Entonces $B \subseteq X \subseteq Y$ y existe finito tal que $B \subseteq^* \bigcup H$. Cada $A \cap X \in H$ es infinito, luego $A \cap Y$ es infinito y as $\{A \cap Y \mid A \cap X \in H\}$. De manera que $B \subseteq^* \bigcup J$ y por lo tanto $B \in \mathscr{I}_Y(\mathscr{A} \restriction Y)$.

Se darán a continuación una serie de observaciones que conectan la maximali familia con sus trazas y su ideal generado.

Proposición 1.3.9. *Sea $\mathscr{A} \in AD(\omega)$. Entonces $\mathscr{A}$ es maximal si y sólo si p $X \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$, $\mathscr{A} \restriction X$ es finita y maximal en X.*

Demostración. Supóngase que $\mathscr{A}$ es maximal y sea $X \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$. Entonces, exis finito tal que $X \subseteq^* \bigcup H$. Luego $X \subseteq^* C \cap \bigcup H$ y como H es un conjunto finito:

$$\begin{aligned} X &\subseteq^* \bigcap\{A \cap X \in [\omega]^\omega \mid A \in H\} \cup \bigcup\{A \cap X \in [\omega]^{<\omega} \mid A \in H\} \\ &=^* \bigcap\{A \cap X \in \mathscr{A} \restriction X \mid A \in H\} \end{aligned}$$

mostrando que $X \in (I)_X(\mathscr{A} \restriction X)$, y por 1.3.5, $\mathscr{A} \restriction X$ es finita y maximal en X.

Para el recíproco procédase por contrapuesta. Si $\mathscr{A}$ no es maximal, se sigue rio 1.3.5 que $\omega \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$. Así que $\mathscr{A} = \mathscr{A} \restriction \omega$ no es familia maximal en ω.

Si $\mathscr{A}$ es maximal, cada subconjunto infinito de ω tiene intersección infinita nos un elemento de $\mathscr{A}$. En comparativa, cada conjunto en la parte positiva de comportamiento más fuerte, más allá de complirse:

$$\{X \in [\omega]^\omega \mid \forall A \in \mathscr{A}\ (A \cap X =^* \varnothing)\} \subseteq \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$$

ocurre la siguiente caracterización:

Proposición 1.3.10. *Sean $\mathscr{A}$ una familia casi ajena. Entonces $\mathscr{A}$ es maximal si para cada $X \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ la familia $\mathscr{A} \restriction X$ es infinita.*

Demostración. Prócedase a probar la suficiencia por contrapuesta. Supóngase que existe X
$\mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ tal que la familia $\mathscr{A} \restriction X$ es finita, entonces el conjunto $H := \{A \in \mathscr{A} \mid A \cap X$
$\varnothing\}$ es finito. Como $X \notin \mathscr{I}(\mathscr{A})$, el conjunto $B := X \setminus \bigcup H \subseteq \omega$ es infinito. Si $A \in \mathscr{A}$
cualquiera, $A \cap B$ no puede ser infinito, sino $A \cap X$ es infinito, $A \in H$ y en consecuen
$A \cap B = (A \cap X) \setminus \bigcup H \subseteq (A \cap X) \setminus A = \varnothing$, lo cual no tiene sentido. Así que B es casi aj
con cada elemento de $\mathscr{A}$ y $\mathscr{A}$ no es maximal.

Para la necesidad, procédase de nuevo por contrapuesta. Si $\mathscr{A}$ no es maximal, existe B
$[\omega]^\omega$ casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$. Nótese que entonces $\mathscr{A} \restriction B = \varnothing$ es finita. Ade
$B \notin \mathscr{I}(\mathscr{A})$, pues de no ocurrir esto, existe $H \subseteq \mathscr{A}$ finito tal que $B \subseteq \bigcup H$. Pero como H
finito, $B \subseteq^* B \cap \bigcup H = \bigcup\{h \cap B \mid h \in H\} =^* \varnothing$, lo cual es imposible. Por lo tanto $B \in \mathscr{I}^+($
y $\mathscr{A} \restriction B$ es finita.

Y a consecuencia de 1.3.9 y 1.3.10 se obtiene:

Corolario 1.3.11. *Sean* N *un conjunto numerable y* $\mathscr{A}$ *una familia casi ajena en* N
Entonces $\mathscr{A}$ *es maximal si y sólo si se da la igualdad:*

$$\mathscr{I}^+_N(\mathscr{A}) = \{X \in [N]^\omega \mid \mathscr{A} \restriction X \neq^* \varnothing\}$$

Si $\mathscr{A}$ *no es maximal, la contención directa de la igualdad anterior falla.*

1.4. Resultados en combinatoria infinita

1.4.1. Teorema de Sim

La siguiente observación, y el subsecuente Lema, configuran la antesala para enunciar u
de los tres resultados más importantes que figuran en esta sección.

Observación 1.4.1. *Sea* $(X_n)_{n\in\omega} \subseteq [\omega]^\omega$ *una sucesión decreciente respecto* $\subseteq$*, entonce*
existe $Y \in [X_0]^\omega$ *tal que si* $k \in \omega$*, se da* $Y \subseteq^* X_k$.

Si $n \in \omega$, $\{y_m \mid m < n\} \subseteq \omega$ *tiene exactamente* n *elementos y para cada* $m < n$ *se tien*
$y_m \in X_m$*; entonces* $X_n \setminus \{y_m \mid m < n\}$ *es infinito y se puede fijar* $y_n \in X_n \setminus \{y_m \mid m < n$

Así, $Y := \{y_n \mid n \in \omega\} \subseteq X_0$ *es infinito y si* $k \in \omega$*, entonces* $Y \setminus X_k \subseteq \{y_n \mid n < k\} =^* \varnothing$
esto es, $Y \subseteq^* X_k$.

Lema 1.4.2 (Dokálková). *Sean* $\mathscr{A} \in \mathit{MAD}(\omega)$ *y* $(X_n)_{n\in\omega} \subseteq \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ *decreciente respect*
$\subseteq$. *Entonces existe* $Y \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ *tal que si* $n \in \omega$*, entonces* $Y \subseteq^* X_n$.

Demostración. Se construirán por recursión, dos conjuntos enumerados inyectivamente; {Y
$\omega\} \subseteq [\omega]^\omega$ y $\{A_n \mid n \in \omega\} \subseteq \mathscr{A}$, tales que para cada $n \in \omega$ se cumple que $Y_n \subseteq X_n$; y, p
cada $k \in \omega$, $Y_n \subseteq^* X_k$; y, $Y_n \cap A_n$ es infinito.

Sea $n \in \omega$ y supóngase que los conjuntos $\{Y_m \mid m < n\} \subseteq [\omega]^\omega$ y $\{A_m \mid m$
tienen exactamente n elementos y son tales que si $m < n$, se satisface: $Y_m \subseteq X_m$
entonces $Y_m \subseteq^* X_k$; y, $Y_m \cap A_m$ es infinito.

A consecuencia de que el conjunto $\{A_m \mid m < n\} \subseteq \mathscr{A}$ es finito, resulta
$\bigcup\{A_m \mid m < n\} \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ y debido a ello:

$$(X_{n+k} \setminus B)_{k \in \omega} \subseteq \mathscr{I}^+(\mathscr{A}) \subseteq [\omega]^\omega$$

es una sucesión $\subseteq$-decreciente. Utilizando la Observación previa, fíjese (con AC) u
infinito $Y_n \subseteq X_n$ tal que para cada $k \in \omega$ ocurre $Y_n \subseteq^* X_{n+k} \setminus B$ y nótese
$(X_n)_{n \in \omega}$ sucesión $\subseteq$-decreciente, $Y \subseteq^* X_k$.

Como $Y_n \subseteq X_n \setminus B \subseteq \omega$ es infinito y $\mathscr{A}$ es maximal, se puede fijar (de nuev
un elemento $A_n \in \mathscr{A}$ tal que $Y_n \cap A_n$ es infinito. Nótese que de la Definición
$Y_n \cap B = \varnothing$, se desprende tanto que $Y_n \notin \{Y_m \mid m < n\}$, como que $A_n \notin \{A_m \mid m$
para cada $m < n$ se tiene que $Y_m \cap B$ es infinito, a razón de que $A_m \subseteq B$ y de qu
es infinito, finalizando la construcción recursiva.

Sea $Y := \bigcup\{Y_n \mid n \in \omega\}$ y obsérvese que $\mathscr{A} \restriction Y$ es infinita, pues cada A_n tiene i
finita con Y. Luego, seguido de la Proposición 1.3.10 y de que $\mathscr{A}$ es maximal,
$Y \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$. Por otro lado, si $n \in \omega$ es cualquiera, entonces:

$$Y \setminus X_n = \bigcup_{m<n} (Y_m \setminus X_n) \cup \bigcup_{m \geqslant n} (Y_m \setminus X_n) = \bigcup_{m<n} (Y_m \setminus X_n) =^* \varnothing$$

pues si $m < n$ entonces $Y_m \subseteq^* X_n$, y si $m \geqslant n$, entonces se dan las contenci
$X_m \subseteq X_n$. Finalizando la prueba.

El siguiente resultado fue demostrado en 1980 por Petr Simon [15, p. 751] y tiene
cias importantes en topología general (véase el Corolario 3.2.4).

Teorema 1.4.3 (Simon)

Para toda familia maximal e infinita $\mathscr{A}$ existe un elemento $X \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ tal que
$\mathscr{A} \restriction X$ es maximal en X y además es unión ajena de dos familias maximales e
parte.

Demostración. Por contradicción, supóngase que $\mathscr{A}$ es una familia maximal infi
sin perder generalidad, la podemos suponer definida sobre ω, tal que para cada X
o bien $\mathscr{A} \restriction X$ no es maximal en X, o bien, si $\mathscr{A} \restriction X$ es unión ajena de $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$, en
$\mathscr{C}$ es maximal en alguna parte.

Como $|\mathscr{A}| \leqslant \mathfrak{c}$, existe $F \subseteq 2^\omega$ tal que $\mathscr{A}$ se puede enumerar inyectivamente
$\{A_f \mid f \in F\}$. Dados $n \in \omega$ y $k \in 2$, defínase:

$$\mathscr{A}(n, k) = \{A_f \in \mathscr{A} \mid f(n) = k\}$$

y nótese que para todo m natural, $\mathscr{A}$ unión ajena de $\mathscr{A}(m,0)$ y $\mathscr{A}(m,1)$.

Constrúyanse; por recursión en ω, las sucesiones $(X_n)_{n\in\omega} \subseteq \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ y $(k_n)_{n\in\omega} \subseteq 2$, ta que si $n \in \omega$, se da $X_{n+1} \in \mathscr{I}^+_{X_n}(\mathscr{A}(0,k_n) \restriction X_n)$ y $\mathscr{A}(n,k_n) \restriction X_{n+1} \in \mathsf{MAD}\,(X_{n+1})$.

Como $\mathscr{A}$ es familia maximal e infinita, defínase $X_0 := \omega \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ (véase 1.3.5); así $\mathscr{A} = \mathscr{A} \restriction X_0$ es maximal sobre X_0. Como $\mathscr{A}$ es unión ajena de $\mathscr{A}(0,0)$ y $\mathscr{A}(0,1)$, se si de la hipótesis la existencia de un elemento $k_0 \in 2$ tal que $\mathscr{A}(0,k_0)$ es maximal en ningu parte. Con AC, fíjese un elemento $X_1 \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A}(0,k_0)) = \mathscr{I}^+_{X_0}(\mathscr{A}(0,k_0) \restriction X_0)$ de forma que $(\mathscr{A}(0,k_0) \restriction X_0) \restriction X_1 = \mathscr{A}(0,k_0) \restriction X_1$ sea maximal en X_1. Como $X_1 \notin \mathscr{I}_{X_0}(\mathscr{A}(0,k_0) \restriction$ y $X_1 \subseteq X_0$, se desprende de Proposición 1.3.8 que $X_1 \in \mathscr{I}^+_{X_1}(\mathscr{A}(0,k_0) \restriction X_1)$, por lo $\mathscr{A}(0,k_0) \restriction X_1$ es infinita, en virtud de su maximalidad y del Corolario 1.3.5. Así, $\mathscr{A} \restriction X_1$ infinita, lo cual implica que $X_1 \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$, pues $\mathscr{A}$ es maximal (véase 1.3.11).

Supóngase ahora que $n \in \omega$ y que $X_n, X_{n+1} \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ y $k_n \in 2$ son tales que X_{n+} $\mathscr{I}^+_{X_n}(\mathscr{A}(n,k_n) \restriction X_n)$ de modo que $\mathscr{A}(n,k_n) \restriction X_{n+1}$ es maximal en X_{n+1}. Como $\mathscr{A}$ un ajena de $\mathscr{A}(n+1,0)$ y $\mathscr{A}(n+1,1)$, $\mathscr{A} \restriction X_{n+1}$ es unión ajena de $\mathscr{A}(n+1,0) \restriction X_{n+}$ $\mathscr{A}(n+1,1) \restriction X_{n+1}$. De nuevo, con AC fíjense $k_{n+1} \in 2$ y $X_{n+2} \in \mathscr{I}^+_{X_{n+1}}(\mathscr{A}(n+1,k_{n+1}) \restriction X_n$ de modo tal que $\mathscr{A}(n+1,k_{n+1}) \restriction X_{n+2} \in \mathsf{MAD}\,(X_{n+2})$. Al igual que antes, se obtiene de 1 y 1.3.11, que $X_{n+2} \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$, lo que finaliza la construcción recursiva.

Por construcción, $(X_n)_{n\in\omega} \subseteq \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ es $\subseteq$-decreciente, por lo que del Lema de Dokálko existe un conjunto $Y \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ tal que para cada $n \in \omega$ se cumple $Y \subseteq^* X_n$. Puesto $Y \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ y $\mathscr{A}$ es maximal, de 1.3.11 se tiene que $\mathscr{A} \restriction Y$ es infinita, y con ello, ex $g \in F \setminus \{(k_n)_{n\in\omega}\} \subseteq 2^\omega$ tal que $A_g \cap Y$ es infinito. Siendo k distinta de g, hay un natural tal que $k_m \neq g(m)$.

Como $Y \subseteq^* X_{m+1}$, entonces $Y \setminus X_{m+1}$ es finito. Luego, derivado de que $Y \cap A_g$ es infin se obtiene que $A_g \cap X_{m+1} \subseteq X_{m+1}$ es infinito. Así, por la maximalidad de $\mathscr{A}(m,k_m) \restriction X_r$ en X_{m+1} se obtiene un $A_f \in \mathscr{A}(m,k_m)$ tal que $(A_g \cap X_{m+1}) \cap (A_f \cap X_{m+1})$ es infinito. embargo, lo anterior conduce a una contradicción, pues $f(m) = k_m \neq g(m)$ implica que $f \neq$ y esto a su vez, que $A_f \cap A_g$ es finito por ser $\mathscr{A}$ familia casi ajena.

Corolario 1.4.4. *Existe una familia maximal de tamaño $\mathfrak{c}$ que es unión ajena de do familias maximales en ninguna parte.*

1.4.2. Grietas y familias de Lu

Definición 1.4.5. *Sea N un conjunto numerable y $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathsf{AD}\,(N)$.*

*i) El par $(\mathscr{A},\mathscr{B})$ es una **grieta** si y solamente si $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \varnothing$ y $\mathscr{A} \cup \mathscr{B} \in \mathsf{AD}\,(N)$. S suele decir que $(\mathscr{A},\mathscr{B})$ **está contenida** en $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$, o que $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ **contiene a** $(\mathscr{A},\mathscr{B})$*

*ii) Un subconjunto $D \subseteq N$ es **particionador** de $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ si y sólo si para cada $A \in \mathscr{A}$ $B \in \mathscr{B}$ se tiene $A \subseteq^* D$ y $B \cap D =^* \varnothing$.*

iii) Una grieta $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ *está* ***separada*** *si y sólo si existe un particionador de* $\mathscr{A}$

En términos de la definición anterior, no resulta complicado notar que D es pa
de $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ si y sólo si $N \setminus D$ es particionador de $\mathscr{B}$ y $\mathscr{A}$. Además $\mathscr{A} = \{X \in \mathscr{A} \cup \mathscr{B}$
y $\mathscr{B} = \{X \in \mathscr{A} \cup \mathscr{B} \mid X \cap D =^* \varnothing\}$.

Como ha resultado ser rutina a lo largo de todo el capítulo, se deberá hacer hin
comportamiento de las grietas respecto a las biyecciones Φ_h. La demostración de
resulta estándar.

Proposición 1.4.6. *Sean* N *y* M *conjuntos numerables. Para toda biyección* $h : N$
toda grieta $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ *en* N *se cumple:*

i) $(\Phi_h(\mathscr{A}), \Phi_h(\mathscr{B}))$ *es grieta en* M.

ii) $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ *está separada si y sólo si* $(\Phi_h(\mathscr{A}), \Phi_h(\mathscr{B}))$ *está separada.*

En virtud de lo anterior, cada vez que $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ sea grieta; y salvo que se diga lo
se dará por sentado que $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathsf{AD}(\omega)$

Observación 1.4.7. *Para cualesquiera grietas* $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ *y* $(\mathscr{A}', \mathscr{B}')$*:*

i) $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{I}^+(\mathscr{B})$ *y* $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ *(seguido de Observación 1.3.3).*

ii) $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ *está separada si y sólo si* $(\mathscr{B}, \mathscr{A})$ *está separada.*

iii) Si $(\mathscr{A}', \mathscr{B}')$ *está separada, entonces* $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ *está separada.*

A continuación se dan dos hechos básicos sobre la separación de grietas; y
podrían exponer las correspondientes demostraciones disponiendo solamente de
dada hasta el momento, se dejarán a modo de corolario de la teoría resultant
espacios (véase 4.1.5).

Ejemplo 1.4.8. *Sea* $\mathscr{C} \in \mathsf{AD}(\omega)$*, entonces:*

i) Si $|\mathscr{C}| \leqslant \aleph_0$*, entonces cualquier grieta contenida en* $\mathscr{C}$ *está separada.*

ii) Si $\mathscr{C}$ *es inifnita y,* $|\mathscr{C}| = \mathfrak{c}$ *o* $\mathscr{C} \in \mathsf{MAD}(\omega)$*; entonces* $\mathscr{C}$ *contiene una grie*
está separada.

El siguiente tipo de familias poseen virtudes que las convierten en objetos canón
de la teoria de conjuntos.

Definición 1.4.9. *Una **familia de Luzin** es una familia casi ajena* $\mathscr{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in \omega_1$ *de manera que para cada* $\alpha \in \omega_1$ *y* $n \in \omega$*, el conjunto* $\{\beta < \alpha \mid A_\alpha \cap A_\beta \subseteq n\}$ *es finito.*

La idea detrás de que $\mathscr{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ sea de Luzin es que; fijando $\alpha \in \omega_1$, para ca $D \subseteq \alpha$ infinito, $A_\alpha \cap \bigcup\{A_\beta \mid \beta \in D\}$ es infinito. Esto se debe a que si $n \in \omega$, enton $D \setminus \{\beta < \alpha \mid A_\alpha \cap A_\beta \subseteq n\}$ es infinito, particularmente no vacío.

Proposición 1.4.10. *Toda familia casi ajena numerable se extiende a una familia de Luzin Particularmente, existe una familia de Luzin.*

Demostración. Sea $\mathscr{B} = \{A_n \mid n \in \omega\}$ cualquier familia casi ajena numerable y nóntese claramente para cualesquiera $m, n \in \omega$, el conjunto $\{k < m \mid A_m \cap A_k \subseteq n\}$ es finito.

Por recursión sobre $\omega_1 \setminus \omega$, sea $\gamma \in \omega_1 \setminus \omega$ cualquiera y supóngase $\{A_\alpha \mid \alpha \in \gamma\}$ es familia casi ajena tal que, si $\alpha < \gamma$ y $n \in \omega$, el conjunto $\{\beta < \alpha \mid A_\alpha \cap A_\beta \subseteq n\}$ es finito.

Como $\gamma \in \omega \setminus \omega_1$, γ es numerable y se puede enumerar $\{A_\alpha \mid \alpha \in \gamma\}$ como $\{B_n \mid n \in \omega\}$. ser tal, una familia casi ajena, cada conjunto $C_n := B_n \setminus \bigcup\{B_j \mid j < n\}$ es infinito (corrobór ésto en la demostración de 1.1.12). Para cada $n \in \omega$ fíjese $a_n \in [C_n]^n$ y defínase:

$$A_\gamma := \bigcup\{a_m \mid m \in \omega\}$$

Nótese que si $n \neq m$, entonces $a_n \cap a_m = \varnothing$. De este modo, si $n \in \omega$ es cualquiera, resu que $A_\gamma \cap B_n = a_n \cap B_n = a_n$ es finito. Más aún, como a_n tiene exatamente n elemen $n \leqslant \max(A_n)$; y consecuentemente, si $m \in \omega$ y $A_\gamma \cap B_n \subseteq m$, entonces $n \leqslant m$.

Lo anterior prueba, no sólo que $\{A_\alpha \mid \alpha \leqslant \gamma\}$ es familia casi ajena, sino que para c lesquiera $\alpha \leqslant \gamma$ y $n \in \omega$, el conjunto $\{\beta < \alpha \mid A_\alpha \cap A_\beta \subseteq n\}$ es finito. Lo cual fina la construcción por recursión de los conjuntos A_α (con $\omega \leqslant \alpha < 2$); es claro que p $\mathscr{A} := \{A_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ es una familia Luzin que extiende a $\mathscr{B}$.

Cualquier familia de Luizn cumplirá que ninguna grieta formada por sus subconjuntos n que numerables está separada; es decir, es una *familia inseparable* (véase [2, § 3.2]).

Obsérvese que si $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ son familias casi ajenas de modo que $\bigcup\mathscr{B} \cap \bigcup\mathscr{C}$ es finito, enton $\bigcup\mathscr{B}$ es separador de $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$, así $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ está separada. Pese a no ocurrir el recíproco de anterior, se configura la siguiente caracterización.

Lema 1.4.11. *Sea* $\mathscr{A} \in \mathsf{AD}(\omega)$*, entonces* $\mathscr{A}$ *es inseparable si y sólo si para cualesquier* $\mathscr{B}, \mathscr{C} \in [\mathscr{A}]^{\omega_1}$ *ajenos,* $\bigcup\mathscr{B} \cap \bigcup\mathscr{C}$ *es infinito.*

Demostración. Por la discusión previa, basta sólo probar la necesidad.

Por contrapuesta, supóngase que $\mathscr{B}, \mathscr{C} \in [\mathscr{A}]^{\omega_1}$ son tales que existe $D \subseteq \omega$, particiona de $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$. Entonces las asignaciones $\mathscr{B} \to \omega$ y $\mathscr{C} \to \omega$; dadas por $b \mapsto \max(b \setminus$ y $c \mapsto \max(c \cap D)$ están bien definidas. Pero en vista de que $|\mathscr{B}| = |\mathscr{C}| = \omega_1$, éstas

pueden ser inyectivas, y existen $m, n \in \omega$ de modo que $\mathscr{B}' := \{b \in \mathscr{B} \mid b \setminus$
$\mathscr{C}' := \{b \in \mathscr{C} \mid c \cap D \subseteq n\}$ tienen tamaño ω_1.

Además $\bigcup \mathscr{B}' \setminus D \subseteq m =^* \varnothing$ y $\bigcup \mathscr{C}' \cap D \subseteq n =^* \varnothing$, por lo que $\bigcap \mathscr{B} \subseteq^* D$, $\bigcap \mathscr{C}$
y así, $\bigcup \mathscr{B}' \cap \bigcup \mathscr{C}' \subseteq^* D \cap (\omega \setminus D) = \varnothing$.

Proposición 1.4.12. *Cualquier familia Luzin es inseparable.*

Demostración. Sean $\mathscr{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ cualquier familia de Luzin y $\mathscr{B} =$
$B\}, \mathscr{C} = \{A_\alpha \mid \alpha \in C\} \subseteq \mathscr{A}$ no numerables y ajenos. Como C es infinito, existe
manera que $C \cap \alpha$ es infinito. Nótese que B es cofinal en ω_1, por ser ω_1 regular;
pérdida de generalidad, supóngase $\alpha \in B$.

En virtud de los comentarios posteriores a la Definición 1.4.9, se tiene que $A_\alpha \cap \bigcup$
$C \cap \alpha\}$ es infinito, demostrando que $\bigcup \mathscr{B} \cap \bigcup \mathscr{C}$ es infinito. Se concluye del lema
$\mathscr{A}$ es inseparable.

1.4.3. Lema de

Definición 1.4.13. *Sea $\mathscr{A}$ una familia casi ajena. El par ordenado $\mathbb{P}_{\mathscr{A}} :=$ (*
$[\mathscr{A}]^{<\omega}, \leqslant_{\mathscr{A}})$; donde $(p, P) \leqslant_{\mathscr{A}} (h, H)$ si y sólo si $h \subseteq p$, $H \subseteq P$ y $p \setminus h \subseteq \omega$
*denomina **orden basado en $\mathscr{A}$**. Cuando el contexto sea claro, se escribirá $\leqslant$*
$\leqslant_{\mathscr{A}}$.

Proposición 1.4.14. *Si $\mathscr{A} \in AD(\omega)$, entonces $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ es un conjunto parcialmente*

Demostración. Claramente el orden basado en $\mathscr{A}$; $\leqslant$, es una relación reflexiva
trica. Supóngase que $(p, P) \leqslant (h, H)$ y $(h, H) \leqslant (k, K)$. Dada 1.4.13, $k \subseteq h \subseteq p$ y
en consecuencia $k \subseteq p$ y $K \subseteq P$.

Y como además $p \setminus h \subseteq \omega \setminus \bigcup H$ y $h \setminus k \subseteq \omega \setminus \bigcup K$, resulta que:

$$p \setminus k \subseteq (h \setminus k) \cup (p \setminus h) \subseteq \left(\omega \setminus \bigcup K\right) \cup \left(\omega \setminus \bigcup H\right)$$

mostrando $p \setminus k \subseteq \omega \setminus \bigcup K$, por lo que $\leqslant$ es transitva.

En términos informales, $(p, P) \leqslant (h, H)$ significa que "h se extiende a p y H a P"
$H \subseteq \mathscr{A}$ crece, se aproxima a $\mathscr{A}$. Dado que, conforme h crece, éste se acerca a un
casi ajeno con $\bigcup H$; eventualmente, se formará un subconjunto casi ajeno con $\bigcup \mathscr{A}$

Consideración 1.4.15. *En lo que resta de la subsección:*

i) Para cada $a \in \mathscr{A}$, $D_a := \{(p, P) \in \mathbb{P}_{\mathscr{A}} \mid a \in P\}$.

ii) *Si* $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{P}_{\mathscr{A}}$, $D_{\mathcal{G}} := \bigcup\{h \subseteq \omega \mid \exists H \in [\omega]^{\omega} \left((h, H) \in \mathcal{G}\right)\}$.

Lema 1.4.16. *Sean* $\mathscr{A}$ *una familia casi ajena, y* $\mathcal{G}$ *un filtro de* $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$*, entonces para cad* $a \in \mathscr{A}$*:*

i) D_a *es denso en* $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$*.*

ii) *Si* $\mathcal{G} \cap D_a \neq \varnothing$*; entonces,* $D_{\mathcal{G}} \cap a$ *es finito.*

Demostración. (i) Si $a \in \mathscr{A}$ y $(p, P) \in \mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ son elementos arbitrarios, entonces $(p, P \cup \{a\}$ D_a y además es inmediato a la Definición 1.4.13 que $(p, P \cup \{a\}) \leqslant (p, P)$.

(ii) Supóngase que $(p, P) \in \mathcal{G} \cap D_a$ y sea $x \in D_{\mathcal{G}} \cap a$ cualquier elemento. Por defnción $D_{\mathcal{G}}$, existe $(h, H) \in \mathcal{G}$ de modo que $x \in h$. Y por ser $\mathcal{G}$ filtro, $(k, K) \leqslant (p, P), (h, H)$ para cie $(k, K) \in \mathcal{G}$. De esto, particularmente se obtiene que $h \subseteq k$, $k \setminus p \subseteq \omega \setminus \bigcup P$.

Ahora, como $a \in P$ (pues $(p, P) \in D_a$), se tiene que $x \in \bigcap P$. Además, $x \in h \subseteq k$, así $x \in k \cap \bigcup P$, lo cual obliga a que $x \in p$. Por tanto $D_{\mathcal{G}} \cap a \subseteq p =^* \varnothing$.

Corolario 1.4.17. *Sean* $\mathscr{A} \in AD(\omega)$ *y* $\mathscr{D} := \{D_a \mid a \in \mathscr{A}\}$*. Si existe un filtro* $\mathscr{D}$*-genéric* $\mathscr{A}$ *no es maximal.*

Debido a lo recién mostrado, de tener $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ la *c.c.c.* (ver **AAA**), se satisfaría que $\mathsf{MA}(|$ implica $\mathscr{A} \notin \mathsf{MAD}(\omega)$.

Y en efecto, si $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ es anticadena y $(p, P), (h, H) \in \mathcal{A}$, se tiene $p \neq h$; sino $(p, P \cup H$ $(p, P), (h, H)$ y $\mathcal{A}$ dejaría de ser anticadena. En consecuencia $|\mathcal{A}| \leqslant |[\omega]^{<\omega}| = \aleph_0$ y $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ ti la *c.c.c.*

Corolario 1.4.18. *Si* κ *un carinal con* $\omega \leqslant \kappa < \mathfrak{c}$*; bajo* $\mathsf{MA}(\kappa)$*, se tiene* $\mathsf{MAD}(\omega)$ $[[\omega]^{\omega}]^{>\kappa}$*; y por ello* $\mathfrak{a} > \kappa$*. Consecuentemente:*

i) $\mathsf{ZFC} \vdash \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{a}$ *(recuérese* ***Def m****).*

ii) $\mathsf{ZFC} + \mathsf{MA} \vdash \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$*.*

iii) $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ *es estrictamente más debil que HC.*

Demostración. Únicamente falta verificar (iii). Basta tener en cuenta que $\mathsf{MA}+\neg\mathsf{HC}$ es con tente con ZFC (consúltese [7, p. 279-281]); así que de (iii), se obtiene que $\mathsf{ZFC}+\mathsf{MA}+\neg\mathsf{HC} \vdash \mathfrak{a}$ Por ende, $\mathsf{ZFC} + \mathfrak{a} = \mathfrak{c} \nvdash \mathsf{HC}$.

El Corolario 1.4.17 es una inmediatez, dada toda su discusión previa. Una versión basta más fortalecida de éste, es el siguiente resultado mostrado por Robert Solovay.

Lema 1.4.19 (Solovay). *Sea κ un cardinal de modo que $\omega \leqslant \kappa < \mathfrak{c}$. Bajo MA toda grieta $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$; con $|\mathscr{A}|, |\mathscr{B}| \leqslant \kappa$, existe $D \subseteq \mathscr{A}$ tal que para cada $A \in \mathscr{A}$ $a \cap D =^* \varnothing$ y $b \cap D \neq^* \varnothing$.*

Demostración. Supóngase $\mathsf{MA}(\kappa)$ y sea $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ una grieta de forma que $|\mathscr{A}|, |\mathscr{B}$ cualesquiera $b \in \mathscr{B}$ y $n \in \omega$, defínase el conjunto $D(b, n) := \{(h, H) \in \mathbb{P}_{\mathscr{A}} \mid h \cap b$

Cada $D(b, n)$ es denso en $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$. Sea $(p, P) \in \mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ cualquiera; por 1.4.7, $b \notin \mathscr{I}$ $b \setminus \bigcup P$ es infinito. Por ello, existe $m \in \omega$ de modo que $n + 1 \in m$ y $m \in b \setminus \bigcup P$ así, $p \cup \{m\}$ es finito, $(p \cup \{m\}, P) \in D(b, n)$ y $(p \cup \{m\}, P) \leqslant_{\mathscr{A}} (p, P)$.

Sea $\mathscr{D} = \{D(b, n) \mid (b, n) \in \mathscr{B} \times \omega\} \cup \{D_a \mid a \in \mathscr{A}\}$ y obsérvese que $\mathscr{D}$ es una densos de $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ de cardinalidad menor o igual a κ. Como $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ es *c.c.c.*, de $\mathsf{MA}(\kappa)$ se la existencia de un filtro $\mathcal{G}$ en $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$, $\mathscr{D}$-genérico. Se afirma que $D_{\mathcal{G}}$ es el conjunto b

En efecto, por 1.4.16 se tiene que para cada $a \in \mathscr{A}$, el conjunto $D_{\mathcal{G}} \cap a$ es fin si $b \in \mathscr{B}$ es cualquiera, para cada $n \in \omega$ existe $(k, K) \in \mathcal{G} \cap D(b, n)$; y en co $D_{\mathcal{G}} \cap b \nsubseteq n$ (pues $h \cap b \nsubseteq n$). Por lo que el conujunto $D_{\mathcal{G}} \cap b$ no puede ser finito.

Sería deseable que la conclusión del Lema de Solova fuese que la grieta $(\mathscr{A}, \mathscr{B}$ rada; sin embargo tal formulación desenvoca en un resultado falso.

Bajo $\mathsf{MA} + \neg\mathsf{HC}$, la existencia de una familia de Luzin (probada en 1.4.12) sería te falsedad. Se puede decir que si una grieta $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ satisface la conclusión de 1.4.1 está "débilmente separada" (véase [2, § 3.2]), si D es como en la conclusión de 1.4.

Corolario 1.4.20. *Sea κ un carinal con $\omega \leqslant \kappa < \mathfrak{c}$, entonces bajo $\mathsf{MA}(\kappa)$, se tien Consecuentemente, es consistente con ZFC que $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$*

Demostración. Sea κ un carinal con $\omega \leqslant \kappa < \mathfrak{c}$ y supóngase $\mathsf{MA}(\kappa)$. Tomando 1.2.8, fíjese una familia casi ajena $\mathscr{A}$ con $|\mathscr{A}| = \kappa$ y defínase $f : \mathscr{P}(\omega) \to \mathscr{P}$ $f(X) = \{b \in \mathscr{A} \mid b \cap X =^* \varnothing\}$.

Si $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ es cualquiera, entonces $|\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}|, |\mathscr{B}| \leqslant \kappa$ y por el Lema de Solovay (1. un particionador $D \subseteq \omega$ para $\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}$ y $\mathscr{B}$, resultando en que $f(D) = \{b \in \mathscr{A} \mid b \cap X =$ Luego f es sobreyectiva y $\mathfrak{c} \geqslant 2^{\kappa}$. Como además $\kappa \geqslant \aleph_0$, etnonces $2^{\kappa} \geqslant 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Para la segunda parte, $\neg\mathsf{HC} + \mathsf{MA}$ es consistente con ZFC. Y como $\neg\mathsf{HC}$ y MA impli y $\omega \leqslant \aleph_1 < \mathfrak{c}$, se tiene por consiguiente que $\mathsf{ZFC} + \neg\mathsf{HC} + \mathsf{MA} \vdash 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$.

Como se podrá atestiguar posteriormente en la tesis, los enunciados $2^{\aleph_1} = 2^{\aleph_0}$ y s $2^{\aleph_1} > 2^{\aleph_0}$ tienen efectos notables en la topología general. Especialmente, se mo efectos sobre la Conjetura de Moore (Subsección 4.1.1).

2 Espacios de Mrówka

Los Ψ-espacios; o espacios de Mrówka, cuentan con un lugar privilegiado en la topología de conjun esto se debe a que son, entre otras cosas, espacios idóneos para la búsqueda de ejemplos. Esta virtud ti por motivo las múltiples caracterizaciones que existen para sus propiedades topológicas.

La intención primordial del presente capítulo es presentar aspectos; en primer lugar, cubrir la definic de los Ψ-espacios y exhibir sus propiedades topológicas elementales; y en segundo lugar, dar una ca terización para los espacios de Mrówka en términos de propiedades topológicas, el hoy conocido co Teorema de Kannan y Rajagopalan.

2.1. Ψ-espacios y caracterizaciones elementales

Dada $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$, se satisface que $\omega \cap \mathscr{A} = \varnothing$. Por cómo se define la topología de Isb Mrókwa (en un conjunto N, dada $\mathscr{A} \subseteq [N]^{\omega}$), es conveniente establecer lo siguiente.

Consideración 2.1.1. *A partir de ahora, siempre que N sea un conjunto numerable $\mathscr{A} \subseteq [N]^{\omega}$, se asumirá que $N \cap \mathscr{A} = \varnothing$.*

En el espacio (de ordinales) $X = \omega + 1$, cada punto de ω es aislado, pero el punto $\omega \in$ situado "en la periferia" de X, se mantiene cercano al subconjunto $\omega \subseteq X$ del espacio.

Los Ψ-espacios tienen por conjunto subyacente a $\omega \cup \mathscr{A}$; y pueden ser vistos como u forma generalizada de $\omega + 1$. Se configura su topología de modo que ω es una masa de pun aislados, y cada punto $\omega \cup \mathscr{A}$ "en la periferia del espacio" permanece cercano al subconju $a \subseteq \omega \cup \mathscr{A}$ del espacio.

Proposición 2.1.2. *Sean N un conjunto numerable y $\mathscr{A} \subseteq [N]^{\omega}$. La siguiente colecció es una topología para $N \cup \mathscr{A}$.*

$$\mathscr{T}_{N,\mathscr{A}} := \{U \subseteq N \cup \mathscr{A} \mid \forall x \in U \cap \mathscr{A}\ (x \subseteq^* U)\}$$

Demostración. Resulta evidente que $\varnothing, N \cup \mathscr{A} \in \mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$. Ahora, dados $U, V \in \mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$ y x $(U \cap V) \cap \mathscr{A}$ cualquiera, $x \subseteq^* U$ y $x \subseteq^* V$, de donde $x \subseteq^* U \cap V$ y $U \cap V \in \mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$. Finalmen dados $\mathcal{U} \subseteq \mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$ y $x \in \bigcup \mathcal{U} \cap \mathscr{A}$ arbitrarios, existe $U_0 \in \mathcal{U}$ con $x \in U_0$; así que $x \subseteq^*$ y consecuentemente $x \setminus U_0$ es finito. Como $x \setminus \bigcup \mathcal{U} \subseteq x \setminus U_0$, resulta que $x \subseteq^* \bigcup \mathcal{U}$ y $\bigcup \mathcal{U} \in \mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$.

Definición 2.1.3. *Sean* N *un conjunto numerable y* $\mathscr{A} \subseteq [N]^\omega$.

i) La colección $\mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$ *de la Proposición anterior es la* ***Topología de Mr*** ***Isbell-Mrókwa) generada por*** $\mathscr{A}$.

ii) El Ψ***-espacio generado por*** $\mathscr{A}$ *se denota por* $\Psi_N(\mathscr{A})$*, y consta del conjun* *dotado con su topología* $\mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$.

Si $N = \omega$*, se denotarán* $\mathscr{T}_{\mathscr{A}} := \mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$ *y* $\Psi(\mathscr{A}) = \Psi_N(\mathscr{A})$.

Previo a abordar otros temas, se mostrará por qué; a efectos topológicos, bastará familias de subconjuntos de ω.

Proposición 2.1.4. *Sean* N, M *conjuntos numerables,* $\mathscr{A} \subseteq [N]^\omega$ *arbitraria y* h *una biyección. Entonces* $\Psi_N(\mathscr{A}) \cong \Psi_M(\Phi_h(\mathscr{A}))$.

Demostración. Sea $f : \Psi_N(\mathscr{A}) \to \Psi_M(\Phi_h(\mathscr{A}))$ definida por medio de $f(x) = h($ y $f(x) = h[x]$ si $x \in \mathscr{A}$. Nótese que; por la Consideración 2.1.1, f es biyectiva. A definición de f, y como $\Psi_h^{-1} = \Phi_{h^{-1}}$, basta verificar únicamente la continuidad de

Sea U abierto en $\Psi_M(\Phi_h(\mathscr{A}))$ y supóngase que $x \in f^{-1}[U] \cap \mathscr{A}$. Entonces $f($ $U \cap \Phi_h(\mathscr{A})$. Como U es abierto en $\Psi_M(\Phi_h(\mathscr{A}))$, entonces $f(x) \setminus U$ es finito. Así qu $U] = h^{-1}[h(x)] \setminus f^{-1}[U] = x \setminus f^{-1}[U]$ es finito y así $x \subseteq^* f^{-1}[U]$, probando $f^{-1}[U]$ es $\Psi_N(\mathscr{A})$.

La siguiente manera de describir la topología de Mrówka es la más cumún en la literat
(como ejemplo están [3] o [2]).

Proposición 2.1.5. *Sea* $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$*, entonces:*

i) Cada $B \subseteq \omega$ *es abierto en* $\Psi(\mathscr{A})$*, en particular, cada* $n \in \omega$ *es punto aislado.*

ii) Si $x \in \mathscr{A}$*, el conjunto* $\mathcal{B}_x := \{\{x\} \cup x \setminus F \mid F \in [x]^{<\omega}\}$ *es base local de* x *en* $\Psi(\mathscr{A})$*.* $\mathcal{B}$
es la ***base local estándar de*** x ***en*** $\Psi_N(\mathscr{A})$*.*

Demostración. (i) Si $B \subseteq \omega$, es vacuo que $B \in \mathscr{T}_{\mathscr{A}}$, pues $B \cap \mathscr{A} = \varnothing$.

(ii) Sea $x \in \mathscr{A}$, entonces $\mathcal{B}_x \subseteq \mathscr{T}_{\mathscr{A}}$. En efecto, si $G \subseteq x$ es finito y $y \in \big(\{x\} \cup x \setminus G\big) \cap$
necesariamente $y = x$, de donde $y \subseteq^* \{x\} \cup x \setminus G$ pues G es finito, así $\{x\} \cup x \setminus G \in \mathscr{T}_{\mathscr{A}}$. Aho
si $U \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es abierto y $x \in U$, $F := x \setminus U \subseteq x$ es finito y $x \in \{x\} \cup x \setminus F \subseteq U$.

Corolario 2.1.6. *Si* N *es numerable y* $\mathscr{A} \subseteq [N]^{\omega}$*, entonces:*

i) $\Psi(\mathscr{A})$ *es 1AN.*

ii) $\mathcal{B}_{\mathscr{A}} := \bigcup\{\mathcal{B}_x \mid x \in \mathscr{A}\} \cup \big\{\{n\} \mid n \in N\big\}$*; denominado la* ***base estándar de*** $\Psi_N(\mathscr{A}$
es una base de $\Psi_N(\mathscr{A})$ *de tamaño* $\aleph_0 + |\mathscr{A}|$*.*

iii) $w(\Psi_N(\mathscr{A})) = \aleph_0 + |\mathscr{A}|$*. Por ello,* $\Psi(\mathscr{A})$ *es 2AN si y sólo si* $|\mathscr{A}| \leqslant \aleph_0$*.*

Demostración. (i), (ii) y $w(\Psi_N(\mathscr{A})) \leqslant \aleph_0 + |\mathscr{A}|$ son claros.

Para $\aleph_0 + |\mathscr{A}| \leqslant w(\Psi_N(\mathscr{A}))$ basta observar que $\omega, \mathscr{A} \subseteq \Psi(\omega)$ son subespacios discretos
tamaño (y por tanto, peso) $\aleph_0$ y $|\mathscr{A}|$, respectivamente. Por consiguiente, el peso de $\Psi(\omega)$ d
ser mayor o igual que ambos.

Si $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$ y $X \subseteq \Psi(\mathscr{A})$, dado que cada punto de ω es aislado, se tiene que $\operatorname{der}(X) \subseteq$
Por otra parte, si $a \in \mathscr{A}$, la única forma de que cada $a \setminus F$ (con $F \in [a]^{<\omega}$) tenga intersecc
no vacía con X es que $X \cap a$ sea infinito.

Debido a 2.1.5, la discusión recién dada prueba el primer inciso (y con ello todos los restan
del siguiente útil Lema.

Lema 2.1.7. *Sea* $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$*, entonces:*

i) Si $X \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ *, entonces* $\operatorname{der}(X) = \{y \in \mathscr{A} \mid X \cap y \neq^* \varnothing\}$*.*

ii) $\mathscr{A} = \operatorname{der}(\Psi(\mathscr{A}))$ *y* ω *es discreto, denso en* $\Psi(\mathscr{A})$*.*

iii) Cada $B \subseteq \mathscr{A}$ *es un subespacio cerrado y discreto de* $\Psi(\mathscr{A})$*.*

iv) $B \subseteq \omega$ *es cerrado en* $\Psi(\mathscr{A})$ *sólo si es casi ajeno con cada elemento de* $\mathscr{A}$.

Proposición 2.1.8. *Todo* Ψ*-espacio es separable, primero numerable,* T_1*, dispers* *rrollable.*

Demostración. Sea $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^\omega$ cualquiera. El Ψ-espacio generado por $\mathscr{A}$ es separa es denso en $\Psi(\mathscr{A})$ y numerable; además, éste espacio es primero numerable debido a 2.1.6.

(Axioma T_1) Si $x \in \mathscr{A}$, del Lema 2.1.7 se desprende la igualdad $\operatorname{der}(\{x\}) = \{y \in \mathscr{A}$ $\varnothing\} = \varnothing$, lo cual implica que $\{x\}$ es cerrado.

(Dispersión) Supóngase que $X \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es cualquier subconjunto no vacío. S cualquier $x \in X$ es aislado en X, pues X es discreto (véase 2.1.7). En caso contrari elemento $x \in X \cap \omega$ y x es aislado en X, pues $\{x\}$ es abierto al ser x elemento de

(Desarrollabilidad) Defínase $\mathcal{U}_n := \{\{a\} \cup a \setminus n \mid a \in \mathscr{A}\} \cup \{\{y\} \mid y \in \omega\}$ para c Resulta claro que cada colección $\mathcal{U}_n$ es cubierta abierta de $\Psi(\mathscr{A})$. Sean $x \in \Psi($ abierto tal que $x \in U$.

Si $x \in \omega$, entonces $\{x\} = \operatorname{St}(x, \mathcal{U}_{x+1})$; en efecto, sea $V \in \mathcal{U}_{x+1}$ con $x \in V$, entonc pues de lo contrario $V = \{a\} \cup a \setminus (x+1)$ para cierto $a \in \mathscr{A}$, implicando esto que cual es imposible ya que $x \in \omega$. Por tanto, $x \in \{x\} = \operatorname{St}(x, \mathcal{U}_{x+1}) \subseteq U$.

Si $x \in \mathscr{A}$, entonces $x \subseteq^* U$ y $x \setminus U \subseteq \omega$ es finito y por ello existe $n_0 \in \omega$ tal que Como $\{x\} \cup x \setminus n_0 \in \mathcal{U}_{n_0}$ es el único abirto de $\mathcal{U}_{n_0}$ al cual x pertenece, $x \in \{x\}$ $\operatorname{St}(x, \mathcal{U}_{n_0}) \subseteq U$.

Así pues, para cada $n \in \omega$, la colección $\{\operatorname{St}(x, \mathcal{U}_n) \mid n \in \omega\}$ es base local de $\{\mathcal{U}_n \mid n \in \omega\}$ es un desarrollo para $\Psi(\mathscr{A})$.

Como se probó recién, todo Ψ-espacio es T_1, sin embargo, cuando la familia $\mathscr{A}$ es casi ajena, el espacio $\Psi(\mathscr{A})$ no satisface el axioma de separación T_2. Por esta literatura se suele dar la definición 2.1.3 partiendo directamente de una familia ca lector podrá corroborar esto en textos como [2, 3, 6]).

Proposición 2.1.9. *Para cualquier* $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^\omega$ *son equivalentes las siguientes co*

i) $\mathscr{A}$ *es familia casi ajena.*

ii) $\Psi(\mathscr{A})$ *es cero-dimensional.*

iii) $\Psi(\mathscr{A})$ *es de Tychonoff.*

iv) $\Psi(\mathscr{A})$ *es de Hausdorff.*

Demostración. (i) $\rightarrow$ (ii) Si $\mathscr{A}$ es familia casi ajena, como $\Psi(\mathscr{A})$ es T_1, basta v cada elemento de la base estándar $\mathscr{B}_{\mathscr{A}}$ (definida en el Corolario 2.1.6) es cerrad

cada $\{n\}$ con $n \in \omega$ es cerrado pues $\Psi(\mathscr{A})$ es T_1. Y dados $x \in \mathscr{A}$ y $F \subseteq x$ finto, haciendo
de 2.1.7 se tiene que por ser $\mathscr{A}$ familia casi ajena, $\mathrm{der}(\{x\} \cup x \setminus F) = \{x\} \subseteq \{x\} \cup x \setminus F$. Así
$\{x\} \cup x \setminus F$ es cerrado, mostrando que $\Psi(\mathscr{A})$ es cero-dimensional, pues es T_1 y contiene u
base de abiertos y cerrados (**resultado R**).

(ii) $\to$ (iii) $\to$ (iv) Si $\Psi(\mathscr{A})$ es cero-dimensional, al ser espacio T_1, resulta que entonces
espacio de Tychonoff (**resultado R**). Por su parte, si $\Psi(\mathscr{A})$ es de Tychonoff, entonces es
Hausdorff.

(iv) $\to$ (i) Si $\Psi(\mathscr{A})$ es de Hausdorff y $x, y \in \mathscr{A}$ son distintos, existen abiertos aje
$U, V \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ abiertos tales que $x \in U$ y $y \in V$. De donde $x \subseteq^* U$, $y \subseteq^* V$ y por consiguie
$x \cap y \subseteq^* U \cap V = \varnothing$.

La Proposición anterior es el motivo por el cual el presente trabajo se enfocará únicame
la siguiente clase de espacios:

Definición 2.1.10. *Un* ***espacio de Mrówka (o, de Isbell-Mrówka)*** *es un Ψ-espaci
generado por una familia casi ajena.*

Corolario 2.1.11. *Todo espacio de Mrókwa es separable, primero numerable, de Tychonoff
cero-dimensional, disperso y de Moore.*

La siguiente es sólo una de las múltiples relaciones importantes que existen entre los espac
de Mrówka y el conjunto de Cantor. Su demostración se basa en un hecho conocido
topología general; todo espacio cero-dimensional de peso κ se encaja en 2^{κ} (véase [1, Teo. 8.5
p. 299]).

Corolario 2.1.12. *Todo espacio de Mrówka $\Psi(\mathscr{A})$ se encaja en $2^{\aleph_0 + |\mathscr{A}|}$. Particularmente
si $|\mathscr{A}| \leqslant \aleph_0$, el espacio $\Psi(\mathscr{A})$ se encaja en 2^{ω} y es metrizable.*

2.2. Compacidad y local compacidad

Como el lector puede advertir, cada vez surgen más traducciones con las cuales maniob
al momento de estudar los Ψ-espacios. El ideal generado por cierta $\mathscr{A} \in \mathsf{AD}(\omega)$ es clave p
distinguir cuáles subespacios de $\Psi(\mathscr{A})$ son compactos, y cuales no.

Proposición 2.2.1. *Sean $\mathscr{A} \in AD(\omega)$ y $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$. Entonces K es compacto si y sólo s
$K \cap \omega \subseteq^* \bigcup(K \cap \mathscr{A})$ y $K \cap \mathscr{A}$ es finito.*

Demostración. Supóngase que $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es subespacio compacto, como la colección $\mathcal{U}$
$\{\{n\} \mid n \in K \cap \omega\} \cup \{\{x\} \cup x \mid x \in K \cap \mathscr{A}\}$ es cubierta abierta para K en $\Psi(\mathscr{A})$, existen $F \subseteq K \cap$
y $G \subseteq K \cap \mathscr{A}$ finitos tales que $\{\{n\} \mid n \in F\} \cup \{\{x\} \cup x \mid x \in G\}$ es subcubierta de $\mathcal{U}$. Luego

necesario que $K \cap \mathscr{A} = G$, así que $K \cap \mathscr{A}$ es finito. Además $(K \cap \omega) \setminus \bigcup G = K \setminus$
finito y con ello $K \cap \omega \subseteq^* \bigcup (K \cap \mathscr{A})$.

Conversamente, supóngase que $K \cap \omega \subseteq^* \bigcup (K \cap \mathscr{A})$ y que $K \cap \mathscr{A}$ es finito. R
que; si $y \in \mathscr{A}$, entonces $\{y\} \cup y$ es un subespacio compacto de $\Psi(\mathscr{A})$; consec
$L := \bigcup\{\{y\} \cup y \mid y \in K \cap \mathscr{A}\}$ es un subespacio compacto de $\Psi(\mathscr{A})$.

Nótese que $K \cap L$ es cerrado en L; pues $L \setminus K \subseteq \omega$; consecuentemente $K \setminus L$ es comp
$K \setminus L = (K \cap \omega) \setminus \bigcup (K \cap \mathscr{A})$ es finito por hipótesis, $K \setminus L$ es compacto. Así, $K = (K \setminus$
es unión de subsespacios compactos de $\Psi(\mathscr{A})$; por tanto, es compacto.

Así, los los subespacios compactos de $\Psi(\mathscr{A})$ son únicamente aquellos de la for
donde $H \subseteq \mathscr{A}$ es finito y $M \subseteq^* \bigcup H$. Esto es, si $\mathcal{K}$ el conjunto de los subespacios
de $\Psi(\mathscr{A})$:

$$\mathcal{K} = \bigcup_{H \in [\mathscr{A}]^{<\omega}} \{F \cup M \cup H \mid (F, M) \in [\omega]^{<\omega} \times \mathscr{P}(H)\}$$

Por ello $|\mathscr{A}| \cdot \aleph_0 \leqslant |\mathcal{K}| \leqslant \sum\{(\aleph_0 \cdot \mathfrak{c}) \mid H \in [\mathscr{A}]^{<\omega}\} \leqslant |\mathscr{A}| \cdot \mathfrak{c} \leqslant \mathfrak{c}$; asi que todo
Mrówka tiene; a lo sumo, $\mathfrak{c}$ subespacios compactos.

La discusión sobre cuántos subsespacios compactos *importantes* (esto es, los que
el carácter topológico de su extensión unipuntual) tiene $\Psi(\mathscr{A})$ se retomará en la S

Corolario 2.2.2. *Sean $\mathscr{A}$ una familia casi ajena y $A \subseteq \omega$ cualquiera. Entonces*
valentes las siguientes condiciones:

i) $A \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$

ii) *Existe* $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ *compacto tal que* $A \subseteq K$.

iii) *Existe* $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ *compacto tal que* $A \subseteq^* K$.

Demostración. (i) $\to$ (ii) Si $A \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$, existe $H \subseteq \mathscr{A}$ finito tal que $A \subseteq^*$
Proposición anterior se desprende que $K := A \cup H$ es un subespacio compacto de Ψ
$A \subseteq K$.

La implicación (ii) $\to$ (iii) es clara, procédase con la restante.

(iii) $\to$ (i) Supóngase que K es un subcespacio compacto de $\Psi(\mathscr{A})$ tal que $A \subseteq$
cuentemente $A \setminus \bigcup (K \cap \mathscr{A}) \subseteq^* A \setminus (K \cap \omega) = A \setminus K =^* \varnothing$, en virtud de la Proposi
Lo anterior; dado que $K \cap \mathscr{A}$ es finito, muestra que $A \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$.

Proposición 2.2.3. *Sea $\mathscr{A} \in AD(\omega)$, entonces son equivalentes:*

i) $\Psi(\mathscr{A})$ *es compacto.*

ii) $\Psi(\mathscr{A})$ *es numerablemente compacto.*

iii) $\mathscr{A}$ *es finita y maximal.*

Demostración. La implicación (i) $\to$ (ii) es evidente.

(ii) $\to$ (iii) Supóngase que $\Psi(\mathscr{A})$ es numerablemente compacto. Dado que $\mathscr{A} \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ subespacio cerrado y discreto de $\Psi(\mathscr{A})$ (véase 2.1.7), entonces $\mathscr{A}$ es numerablemente compa y discreto; por ello, es finito. De esta forma, $\mathcal{U} := \{\{n\} \mid n \in \omega\} \cup \{\{x\} \cup x \mid x \in \mathscr{A}\}$ es cubierta numerable para $\Psi(\mathscr{A})$ y en consecuencia, existe $F \subseteq \omega$ finito de tal modo que colección $\{\{n\} \mid n \in F\} \cup \{\{x\} \cup x \mid x \in \mathscr{A}\}$ es subcubierta de $\mathcal{U}$. Por ende $\omega \subseteq^* \bigcup \mathscr{A}$, al $\mathscr{A}$ y F finitos. Así, $\mathscr{A}$ es maximal en virtud del Corolario 1.1.10.

(iii) $\to$ (i) Si $\mathscr{A}$ es finita y maximal, se desprende del Corolario 1.1.10 que $\omega \subseteq^* \bigcup \mathscr{A}$. $\Psi(\mathscr{A}) \cap \omega \subseteq^* \bigcup (\Psi(\mathscr{A}) \cap \mathscr{A})$ y $\Psi(\mathscr{A}) \cap \mathscr{A} = \mathscr{A}$ es finito, siguiéndose dela Proposición 2 la compacidad de $\Psi(\mathscr{A})$.

La siguiente Proposición para nada carece de importancia, pues los espacios de Isb Mrówka son los únicos (dentro de cierta clase) con tal propiedad.

Proposición 2.2.4. *Todo espacio de Mrówka es hereditariamente localmente compacto, en consecuencia, es espacio de Baire.*

Demostración. Supóngase que $\mathscr{A} \in \mathsf{AD}(\omega)$ y sea $X \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ cualquiera. Como $\Psi(\mathscr{A})$ es Hausdorff (recuérdese 2.1.11), X es de Hausdorff y basta verificar que cada punto de X ti una vecindad en X compacta.

Sea $x \in X$ arbitrario. Si $x \in \omega$, entonces $\{x\}$ es vecindad compacta de x en X. Ahora $x \in \mathscr{A}$, entonces $K := X \cap (\{x\} \cup x) \subseteq \{x\} \cup x$ es vecindad de x en X. Además K es compa en virtud del Corolario 2.2.2, pues $K \cap \mathscr{A} = \{x\}$ es finito y $K \cap \omega \subseteq x \subseteq^* \bigcup\{x\} = \bigcup(K \cap$ Así, X es localmente compacto y $\Psi(\mathscr{A})$ hereditariamente localmente compacto.

Consecuentemente, $\Psi(\mathscr{A})$ es localmente compacto y de Hausdorff, siendo esto suficie para ser de Baire **(Teorema de Categoría de Baire)**.

2.3. Metrizabilidad y Pseudocompacidad

El Corolario 2.1.12 evidencía que la numerabilidad de una familia casi ajena $\mathscr{A}$ es suficie para concluir la metrizabilidad de su espacio de Mrówka asociado, no resulta dificil notar el recíproco también ocurre (dados 2.1.6 y que $\Psi(\mathscr{A})$ es separable); sin embargo, se tienen equivalencias:

Proposición 2.3.1. *Sea* $\mathscr{A} \in \mathsf{AD}(\omega)$, *entonces son equivalentes:*

i) $\mathscr{A}$ *es a lo más numerable*

ii) $\Psi(\mathscr{A})$ *es metrizable.*

iii) $\Psi(\mathscr{A})$ *es segundo numerable.*

iv) $\Psi(\mathscr{A})$ *es* σ*-compacto.*

v) $\Psi(\mathscr{A})$ *es de Lindelöf.*

Demostración. (i) $\to$ (ii) $\to$ (iii) Si $|\mathscr{A}| \leqslant \omega$, se obtiene de 2.1.12 que $\Psi(\mathscr{A})$ es met otro lado, si $\Psi(\mathscr{A})$ es metrizable, al ser éste un espacio separable, se tiene garanti 2AN **(MtzEq)**.

(iii) $\to$ (iv) $\to$ (v) Si $\Psi(\mathscr{A})$ es 2AN, entonces al localmente compacto, resulta compacto **(Resultado R)**. Además; todo espacio σ-compacto, es también de Linde **tado R)**

(v) $\to$ (i) Por último, supóngase que $\Psi(\mathscr{A})$ es de Lindelöf y sea $\mathcal{B}_{\mathscr{A}}$ la base $\Psi(\mathscr{A})$ (definida en 2.1.6). Luego $\mathcal{B}_{\mathscr{A}}$ es una cubierta abierta de $\Psi(\mathscr{A})$, y deben exist y $N \subseteq \omega$ a lo más numerables tales que $\bigcup \left\{ \left\{ \{x\} \cup x \setminus F \mid F \in [x]^{<\omega} \right\} \mid x \in \mathscr{A}' \right\} \cup \left\{ \{n\right.$ es subcubierta de $\mathcal{B}_{\mathscr{A}}$. Resulta así que $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}'$ y $|\mathscr{A}| \leqslant \aleph_0$.

Como fue mostrado en 1.1.12, ninguna familia casi ajena numerable es maximal $\mathscr{A}$ es una familia casi ajena numerable, por 2.2.3, $\Psi(\mathscr{A})$ no es compacto. Consec (por 2.3.1), si $\mathscr{A}$ es numerable, $\Psi(\mathscr{A})$ es Lindelöf y σ-compacto, pero no compacto

Observación 2.3.2. *Si* $\Psi(\mathscr{A})$ *es metrizable (o cualquiera de sus equivalentes p en 2.3.1) y no compacto, no necesariamente* $\mathscr{A}$ *es numerable. Esto responde a motivo de que* $\mathscr{A}$ *podría ser maximal o no; la Proposición 2.3.1 no toma en cu aspecto.*

La observación recíen hecha da constancia de que falta establecer una relación y la maximalidad de la familia $\mathscr{A}$. En la Sección 3.1 se ahondará con mucha más p en el estudio de las sucesiones convergentes; pero de momento, es necesario co siguiente Lema, en orden de dar una caracterización completa para $\mathscr{A} \in \mathsf{MAD}(\omega)$

Lema 2.3.3. *Sean* $\mathscr{A} \in \mathit{AD}(\omega)$, $x \in \mathscr{A}$ *y* $B \subseteq [\omega]^{\omega}$ *cualesquiera. Entonces* B $\Psi(\mathscr{A})$ *si y sólo si* $B \subseteq^* x$.

Demostración. Supóngase que $B \to x$ en $\Psi(\mathscr{A})$. Entonces, como $x \cup \{x\}$ es un $\Psi(\mathscr{A})$ que contiene a x, se tiene que $B \subseteq^* x \cup \{x\}$, mostrando que $B \subseteq^* x$. Y recíp si $B \subseteq^* x$ y $U \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es cualquier abierto con $x \in U$, entonces $x \subseteq^* U$, y $B \subseteq^* U$.

Proposición 2.3.4. *Sea* $\mathscr{A} \in \mathit{AD}(\omega)$, *son equivalentes:*

i) $\Psi(\mathscr{A})$ *es pseudocompacto.*

ii) $\mathscr{A}$ *es maximal.*

iii) Todo subespacio discreto, abierto y cerrado de $\Psi(\mathscr{A})$ es finito.

iv) Toda sucesión en ω tiene una subsucesión convergente.

Demostración. (i) $\to$ (ii). Si $\mathscr{A}$ no es maximal, existe $B \subseteq \omega$ infinito y casi ajeno con ca elemento de $\mathscr{A}$. Por 2.1.5 y 2.1.7, B es discreto, abierto y cerrado, y de **(Ree A)** se sigue $\Psi(\mathscr{A})$ no es pseudocompacto.

(ii) $\to$ (iii) Por contrapuesta, supóngase que $B \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es infinito, discreto, abierto y cerra de $\Psi(\mathscr{A})$. Sin pérdida de generalidad $B \subseteq \omega$ (de lo contrario cada $a \in B \cap \mathscr{A}$ cumple $a \cap B = B \cap (\{a\} \cup a) \subseteq \omega$ es infinito, cerrado, abierto y discreto). Luego, de 2.1.7 se despren que B casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$.

(iii) $\to$ (iv) Supóngase (iii) y sea $B \in [\omega]^{\omega}$. Así, B es discreto, infinito y abierto. Por hipóte debe existir $x \in \operatorname{der}(B) \setminus B$ y por 2.1.11, $x \in \mathscr{A}$ y $B \cap x$ es infinito. Siguiéndose del Lema 2 que $B \cap x \to x$.

(iv) $\to$ (i) Por contrapuesta, supóngase que $f : \Psi(\mathscr{A}) \to \mathbb{R}$ es continua y no acota Entonces; por densidad de ω, para cada $n \in \omega$ se puede fijar $m_n \in \omega \cap f^{-1}[(n, \infty)]$. A $B = \{m_n \mid n \in \omega\}$ es infinito, y no admite subsucesiones convergentes en $\Psi(\mathscr{A})$, pues ning $C \in [B]^{\omega}$ tiene imagen no acotada bajo f.

Combinando 2.2.3, 2.3.1 y 2.3.4 se obtienen ejemplos muy concretos. Por ejemplo, si espacio de Mrówka $\Psi(\mathscr{A})$ no es pseudocompacto pero sí es metrizable, necesariamente $\mathscr{A}$ numerable. Otro ejemplo responde con una negativa a lo que en su momento fue un proble popular: £la pseudocompacidad equivale a la compacidad numerable en espacios Tychono resultado se sabía cierto en la clase de espacios T_4 (**Reee R**) y falso dentro de la clase espacios que no son T_1. En virtud de 2.2.3, y considerando cualquier familia maximal infin se obtiene

Corolario 2.3.5. *Existe un espacio de Tychonoff, que es pseudocompacto pero no nume rablemente compacto.*

La siguiente es una caracterización conocida (véase [12, p. 39, 45]) y; entre tanto, desv que el comportamiento súmamente organizado y *amigable* de $\Psi(\mathscr{A})$ se rompe bruscame cuando $\mathscr{A}$ deja de ser numerable. Por tal motivo, no suelen ser de tanto interés los Ψ-espac generados por familias casi ajenas a lo más numerables.

Proposición 2.3.6. *Sea $\mathscr{A}$ una familia casi ajena con cardinalidad κ, entonces*[1] *se satisface*

i) Si $\kappa = 0$, entonces $\Psi(\mathscr{A}) \cong \omega$.

ii) Si $\kappa \in \omega$ y $\mathscr{A}$ no es maximal, $\Psi(\mathscr{A}) \cong \omega \cdot (\kappa + 1)$.

iii) Si $\kappa \in \omega$ y $\mathscr{A}$ es maximal, $\Psi(\mathscr{A}) \cong \omega \cdot (\kappa + 1) + 1$.

iv) Si $\kappa = \omega$, entonces $\Psi(\mathscr{A}) \cong \omega^2$.

v) Si $\kappa > \omega$, entonces $\Psi(\mathscr{A})$ no homeomorfo a ningún espacio de ordinales;
$\Psi(\mathscr{A})$ no es linealmente ordenable.

Se derivan conclusiones de interés moderado, como puede ser que ω^2 (como p
dinal) es el único espacio de Mrówka metrizable, no compacto. Una consecuencia
relación a éste espacio; y que además, surge como fruto del Teorema principal de la
es el Corolario 2.4.10.

La peculiaridad recién comentada, sugiere que todas las familias casi ajenas num
muy *esencialmente iguales* (conviniendo que $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son *esencialmente iguales* cu
y $\Psi(\mathscr{B})$ son homeomorfos).

2.4. Teorema de Kannan y Rajagopalan

La meta primordial en lo que resta del capítulo será caracterizar aquellos espac
homeomorfos a algún espacio de Mrówka. Como fué mostrado en la Proposición
los espacios de Mrówka son hereditariamente localmente compactos, una propie
menos peculiar. Tal propiedad será la que los caracterizará dentro de la clase
infinitos, de Hausdorff y separables.

Lema 2.4.1. *Sea X un espacio de Hausdorff y localmente compacto. Si X contiene*
D, abierto y a lo más numerable, entonces $N := X \setminus \operatorname{der}(X) \subseteq X$ discreto y denso

Demostración. Claramente N es discreto. Por el Teorema de Categoría De B
resulta que X es un espacio de Baire.

Ahora, si $x \in D$ es aislado en D, entonces $\{x\} = D \cap U$ para cierto abierto
dado que D es denso y X es un espacio T_1, es necesario que $U = \{x\}$. Lo anterior
$X \setminus \operatorname{der}_D(D) \subseteq N$.

Por otra parte, si $x \in \operatorname{der}_D(D) \subseteq \operatorname{der}(X)$, entonces $X \setminus \{x\}$ es abierto y denso e
$X \setminus \operatorname{der}_D(D) = \bigcap\{X \setminus \{x\} \mid x \in \operatorname{der}_D(D)\}$ es denso, debido a que X es de Baire. Lo
para mostrar que N es denso.

Lema 2.4.2. *Sean X un espacio topológico y $N := X \setminus \operatorname{der}(X)$. Las siguientes co*
son equivalentes:

i) *N es denso y para cada $y \in \operatorname{der}(X)$, $N \cup \{y\}$ es abierto.*

ii) *$\operatorname{der}(X)$ es discreto.*

[1] En los incisos (i)-(iv), los espacios homeomorfos a $\Psi(\mathscr{A})$ están escritos en aritmética ordinal y
topología de orden.

Demostración. (i) $\to$ (ii) Supóngase (i) y sea $y \in \mathrm{der}(X)$ cualquier elemento. $N \cup \{y\}$
abierto en X, en consecuencia $y \in U \subseteq N \cup \{y\}$, para cierto abierto U. Seguido de lo anter
$y = U \setminus N = U \cap \mathrm{der}(X)$. Mostrando que $\mathrm{der}(X)$ es discreto.

(ii) $\to$ (i) Supóngase que $\mathrm{der}(X)$ es discreto. Si N no es denso, existen $x \in X$ y un abie
U de modo tal que $x \in U \subseteq \mathrm{der}(X)$. Pero al ser $\mathrm{der}(X)$ discreto, $\{x\} = W \cap \mathrm{der}(X)$ para cie
abierto W, de donde $U \cap W = \{x\}$ y $x \in N$, esto es imposible. Así que N es denso en X.

Ahora, si $y \in \mathrm{der}(X)$ es arbitrario, existe un abierto U de modo que se da $\{y\} = U \cap \mathrm{der}($
pues $\mathrm{der}(X)$ es discreto. De lo anterior se obtiene que $N \cup \{y\} = (N \cup U) \cap (N \cup \mathrm{der}(X)) = N$
es abierto en X.

La siguiente caracterización es debida a Varadachariar Kannan y a Minakshisundar
Rajagopalan, quienes en 1970 (consúltese [6]) dieron con el resultado.

Teorema 2.4.3 (Kannan, Rajagopalan)

Para cualquier espacio topológico X infinito, de Hausdorff y separable son equivalentes:

i) X es hereditariamente localmente compacto.

ii) X es localmente compacto $\mathrm{der}(X)$ es discreto.

iii) X es homeomorfo a un espacio de Mrówka.

Demostración. Supóngase que X es cualquier espacio infinito, de Hausdorff, separable y
$N := X \setminus \mathrm{der}(X)$.

(i) $\to$ (ii) Supóngase que X es hereditariamente localmente compacto. Por separabilidad
X, existe $D \subseteq X$ denso y a lo más numerable. Se sigue de la hipótesis que D es localme
compacto y por ello, es abierto en su cerradura, X. Debido al Lema 2.4.1, N es denso en X

Por otro lado, si $y \in \mathrm{der}(X)$ es cualquiera, $N \cup \{y\} \subseteq X$ es localmente compacto, y por en
es abierto en su cerradura. Pero N es denso, así que $N \cup \{y\}$ es abierto en $X = \mathrm{cl}(N \cup \{$
Por lo tanto, de 2.4.2 se obtiene que $\mathrm{der}(X)$ es discreto.

(ii) $\to$ (iii) Supóngase que X es localmente compacto y que $\mathrm{der}(X)$ es discreto. Por el Le
2.4.2 resulta que N es denso en X y que $N \cup \{y\}$ es abierto siempre que $y \in \mathrm{der}(X)$. Por se
infinito y separable, se tiene que N es numerable. Utilizando la compacidad local de X, p
cada $x \in \mathrm{der}(X)$ fíjese (utilizando AC) una vecindad compacta V_x de x en X contenida
$N \cup \{x\}$. Se afirma que $\mathscr{A} = \{V_x \setminus \{x\} \subseteq N \mid x \in \mathrm{der}(X)\} \in \mathsf{AD}(N)$.

En efecto, si $x \in \mathrm{der}(X)$ es cualquiera, entonces $V_x \setminus \{x\}$ no es finito. De lo contra
$\{x\} = (N \cup \{x\}) \setminus (V_x \setminus \{x\})$ sería abierto en X (que es espacio T_1) y se contradiría que $x \in \mathrm{der}($
Por tanto, $\mathscr{A} \subseteq [N]^\omega$. Además, si $x, y \in \mathrm{der}(X)$ son distintos, se tiene que $V_x \cap V_y \subseteq$
Así $V_x \cap V_y$ es subespacio compacto del discreto N, lo cual obliga a que sea finito. Co
consecuencia, $\mathscr{A}$ es familia casi ajena en N.

Defínase $f : X \to \Psi_N(\mathscr{A})$ por medio de $f(n) = n$ si $n \in N$ y $f(x) = V_x$ si $x \in \mathrm{der}($
Claramente f es función biyectiva; además, como N es el conjunto de puntos aislados de
para verificar que f es homeomorfismo basta verificar lo siguiente.

Afirmación. Un subconjunto $U \subseteq X$ es abierto si y sólo si para cada $x \in U$
tiene $V_x \setminus \{x\} \subseteq^* U$.

Demostración. Sea $U \subseteq X$. Si U es abierto y $x \in U \cap \mathrm{der}(X)$ es cualquier
$V_x \setminus U \subseteq N$ es cerrado en X, así en V_x y como V_x es compacto; $V_x \setminus U$ es
compacto del discreto N, por tanto finito. Así que $V_x \setminus \{x\} \subseteq^* U$.

Recíprocamente, supóngase que para cada $x \in U \cap \mathrm{der}(X)$ se tiene que V_x
es decir, que $V_x \setminus U$ es finito. Sea $y \in U$ cualquiera, si $y \in N$ entonces $\{y$
en X y U es vecindad de y. Ahora, si $y \in \mathrm{der}(X)$ entonces $V_y \setminus U$ es finito
$V_y \setminus (V_y \setminus U) \subseteq U$, de donde U es vecindad de y (usando que X es espacio
U es vecindad de todos sus puntos, y por tanto, es abierto.

(iii) $\rightarrow$ (i) Si X es homeomorfo a un espacio de Mrówka, las propiedades topo
último se satisfacen en X, siguéndose de 2.2.4 que X es hereditariamente localment

Del resultado anterior es casi inmediata la obtención de las siguientes condicio
lentes.

Corolario 2.4.4. *Sea X cualquier espacio infinito, de Hausdorff y separable. Ent
siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *X es pseudocompacto y hereditariamente localmente compacto.*

ii) *X es regular, $\mathrm{der}(X)$ es subespacio discreto de X y cualquier subespacio
abierto y cerrado a la vez en X es finito.*

iii) *X es homeomorfo a un espacio de Mrówka generado por una familia c
maximal.*

Demostración. Por el Teorema de Kannan y Rajagopalan, lo demostrado en 2.3.4 y
espacio de Mrówka es de Tychonoff (véase 2.1.11); particularmente regular, bastara
que si X satisface (ii) entonces X es localmente compacto. Supóngase (ii), clara
punto aislado de X tiene una vecindad compacta en X.

Sea $x \in \mathrm{der}(X)$ arbitrario, como $\mathrm{der}(X)$ es discreto, existe $U \subseteq X$ abierto con $\{x\} =$
Por regularidad de X, fíjese un abierto V tal que $x \in V \subseteq \mathrm{cl}(V) \subseteq U$ y nótese qu
$\{x\} = \mathrm{cl}(V) \cap \mathrm{der}(X)$.

Si W es una vecindad abierta de x, entonces $\mathrm{cl}(V) \setminus W$ es discreto y abier
subespacio de $X \setminus \mathrm{der}(X)$) y cerrado (por ser intersección de cerrados). De (ii) se sigu
de $\mathrm{cl}(V) \setminus W$, y de esto, la compacidad de $\mathrm{cl}(V)$, siendo tal subespacio, una vecinda
de x en X.

Corolario 2.4.5. *Sea X un espacio topológico infinito, entonces X es homeomorfo a un espacio de Mrówka si y sólo si es homeomorfo a un subespacio abierto de un espacio de Mrówka.*

Demostración. Basta probar la necesidad. Supóngase que $\mathscr{A}$ es una familia casi ajena y $U \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es un abierto tal que $X \cong U$. Como X es infinito, U es infinito, además por $\Psi(\mathscr{A})$ de Hausdorff y hereditariamente localmente compacto, se tiene que U es de Hausdor hereditariamente localmente compacto. Por último, como ω es denso en $\Psi(\mathscr{A})$ y U es abie en $\Psi(\mathscr{A})$, se tiene que $U \cap \omega$ es denso en U; así que U es separable. De lo anterior U, y tanto X, es homeomorfo a un espacio de Mrówka; a saber $\Psi_{U\cap\omega}(U \cap \mathscr{A})$.

Corolario 2.4.6. *Sea $\{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ una familia no vacía de espacios topológicos infinitos sin pérdida de generalidad ajenos dos a dos, entonces son equivalentes:*

i) $Y := \coprod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$ *es homeomorfo a un espacio de Mrówka.*

ii) κ *es contable y cada* X_α *es homeomorfo a un espacio de Mrówka.*

Demostración. (i) $\rightarrow$ (ii) Supóngase que Y es espacio de Mrówka. Como cada $X_\alpha \subseteq Y$ infinito y abierto en Y, se sigue del Corolario anterior que X_α es de Mrówka. Por otro la si κ fuese más que numerable, Y no podía ser separable, pues es la suma de κ espacios vacíos; así que κ es a lo más numerable.

(ii) $\rightarrow$ (i) Supóngase que κ es a lo más numerable y para cada $\alpha \in \kappa$, el espacio es homeomorfo a un espacio de Mrówka. Entonces, del Sección 2.4, cada X_α es (infin de Hausdorff, separable, localmente compacto y además el subespacio $\mathrm{der}_{X_\alpha}(X_\alpha) \subseteq X_\alpha$ discreto.

La suma de espacios de Hausdorff (localmente compactos, respectivamente) es de Hausd (localmente compacta, respectivamente); además, por ser cada X_α separable y κ a lo n numerable, resulta que Y es infinito, de Hausdorff, localmente compacto y separable.

Sea $y \in \mathrm{der}_Y(Y)$ cualquiera, por definición de Y, para el único elemento $\alpha \in \kappa$ tal que X_α, se tiene $y \in \mathrm{der}_{X_\alpha}(X_\alpha)$. Y como tal subespacio de X_α es discreto, existe $V \subseteq X_\alpha$ abie tal que $\{y\} = U \cap \mathrm{der}_{X_\alpha}(X_\alpha)$, pero U es abierto también en Y y además $\{y\} = U \cap \mathrm{der}_Y(Y)$. lo contrario, existe $x \in V \cap \mathrm{der}_Y(Y) \setminus \{y\}$ y consecuentemente $x \notin \mathrm{der}_{X_\alpha}(X_\alpha)$, mostrando $\{x\}$ es abierto en X_α y por tanto en Y, lo cual es absurdo dada la elección de X. Lo anter prueba que $\mathrm{der}_Y(Y)$ es discreto, finalizando la prueba en virtud del Teorema 2.4.3.

Se explotará mucho la siguiente observación durante el subsecuente Corolario, pues nue mente, se hará uso del inciso (ii) del Teorema 2.4.3.

Observación 2.4.7. *Sea X un espacio topológico,* $\mathrm{der}(X)$ *es discreto si y sólo si* $\mathrm{der}^2(X) :=$ $\mathrm{der}(\mathrm{der}(X)) = \varnothing$.

Efectivamente; como $X \setminus \mathrm{der}(X)$ *es abierto,* $\mathrm{der}(X)$ *es discreto si y sólo si es*
cerrado. Esto último sucede únicamente cuando $\mathrm{der}_{\mathrm{der}(X)}(\mathrm{der}(X)) = \mathrm{der}(X) \cap \mathrm{der}^2$
Sin embargo, cualquier punto aislado en X*, es aislado en* $\mathrm{der}(X)$*, así que* $\mathrm{der}^2(X)$
por lo tanto, $\mathrm{der}(X)$ *es discreto si y sólo si* $\mathrm{der}^2(X) = \varnothing$*.*

Lema 2.4.8. *Sean* X *y* Y *espacios topológicos infinitos, entonces* $X \times Y$ *es home*
un espacio de Mrówka si y sólo si X *y* Y *son de Mrówka y además* $X \cong \omega$ *o* $Y \cong$

Demostración. Obsérvese la igualdad:

$$\begin{aligned}
\mathrm{der}^2_{X\times Y}(X \times Y) &= \mathrm{der}_{X\times Y}\Big(\mathrm{der}_X(X) \times \mathrm{cl}_Y(Y) \cup \mathrm{cl}_X(X) \times \mathrm{der}_Y(Y)\Big) \\
&= \mathrm{der}_{X\times Y}\Big(\mathrm{der}_X(X) \times Y \cup X \times \mathrm{der}_Y(Y)\Big) \\
&= \mathrm{der}_{X\times Y}\Big(\mathrm{der}_X(X) \times Y\Big) \cup \mathrm{der}_{X\times Y}\Big(X \times \mathrm{der}_Y(Y)\Big) \\
&= \mathrm{der}_X(\mathrm{der}_X(X)) \times \mathrm{cl}_Y(Y) \cup \mathrm{cl}_X(\mathrm{der}_X(X)) \times \mathrm{der}_Y(Y) \cup \\
&\cup \mathrm{der}_X(X) \times \mathrm{cl}_Y(\mathrm{der}_Y(Y)) \cup \mathrm{cl}_X(X) \times \mathrm{der}_Y(\mathrm{der}_Y(Y)) \\
&= \mathrm{der}^2_X(X) \times Y \cup \mathrm{der}_X(X) \times \mathrm{der}_Y(Y) \cup X \times \mathrm{der}^2_Y(Y)
\end{aligned}$$

Puesto que $X, Y \neq \varnothing$, resulta que $\mathrm{der}^2_{X\times Y}(X \times Y)$ es vacío si y sólo si $\mathrm{der}^2_X(X) =$
$\mathrm{der}_X(X) \times \mathrm{der}_Y(Y) = \varnothing$. Esto es, el subespacio $\mathrm{der}_{X\times Y}(X \times Y) \subseteq X \times Y$ es discre
si los subespacios $\mathrm{der}_X(X)$ de X y $\mathrm{der}_Y(Y)$ de Y son discretos y además X es disc
discreto.

Como X, Y son infinitos, $X \times Y$ es infinito, además las propiedades de separabilid
de separación de Hausdorff y local compacidad son propiedades finitamente pr
finitamente factorizables. De esto último, lo comentado en el párrafo anterior, el h
el único espacio de Mrówka discreto es ω y el inciso (ii) del Teorema 2.4.3, se
resultado.

Corolario 2.4.9. *Sea* $\{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ *una familia no vacía de espacios topológicos*
sin pérdida de generalidad ajenos dos a dos, entonces son equivalentes:

i) $Y := \prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$ *es homeomorfo a un espacio de Mrówka.*

ii) κ *es finito, cada* X_α *es homeomorfo a un espacio de Mrówka y existe* $\beta_0 \in$
si $\alpha \in \kappa \setminus \{\beta_0\}$*, se tiene* $X_\alpha \cong \omega$*.*

Demostración. Sin perder generalidad, tómese κ como un cardinal.

(i) $\to$ (ii) Supóngase que Y es homeomorfo a un espacio de Mrówka, entonc
Hausdorff, Separable y hereditariamente localmente compacto. Todas las propiedade

son factorizables, así que por el por el Teorema de Kannan y Rajagopalan (2.4.3), cada X_α
homeomorfo a un espacio de Mrówka.

Ahora, por contradicción, supóngase $\kappa \geqslant \omega$. Entonces, existen $P, Q \subseteq \kappa$ ajenos e infini
de donde:

$$Y = \prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha \cong \prod_{\alpha\in P} X_\alpha \times \prod_{\alpha\in Q} X_\alpha$$

siguiéndose del Lema previo que; sin pérdida de generalidad, $\prod_{\alpha\in P} X_\alpha \cong \omega$. Lo anter
conduce a un absurdo, pues como P es infinito y cada X_α también, resulta que:

$$\left|\prod_{\alpha\in P} X_\alpha\right| = \prod_{\alpha\in P} |X_\alpha| \geqslant \prod_{\alpha\in P} \aleph_0 = \aleph_0^{|P|} \geqslant \aleph_0^{\aleph_0} > \aleph_0$$

imposibilitando que $\prod_{\alpha\in P} X_\alpha \cong \omega$ sea biyectable con ω. Así, $\kappa < \omega$.

Finalmente, si cada X_α es homeomorfo a ω, o $\kappa = 1$, (ii) se satisface. Supóngase pues
$\kappa \geqslant 2$ y que existe $\beta_0 \in \kappa$ con $X_{\beta_0} \ncong \omega$. Dado que:

$$Y = \prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha \cong X_{\beta_0} \times \prod_{\alpha\in\kappa\setminus\{\beta_0\}} X_\alpha$$

se sigue del Lema Previo que $\prod_{\alpha\in\kappa\setminus\{\beta_0\}} X_\alpha \cong \omega$. Siendo así, cada X_α (con $\alpha \in \kappa\setminus\{\beta$
infinito, numerable y discreto; esto es, homeomorfo a ω.

(ii) $\to$ (i) Supóngase que κ es finito, que cada X_α es homeomorfo a un espacio de Mrów
y que $\beta_0 \in \kappa$ es un elemento tal que si $\alpha \in \kappa\setminus\{\beta_0\}$, entonces $X_\alpha \cong \omega$. Como $\kappa\setminus\{\beta\}$ es fin
entonces:

$$Y = \prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha \cong X_\beta \times \prod_{\alpha\in\kappa\setminus\{\beta\}} X_\alpha \cong X_\beta \times \prod_{\alpha\in\kappa\setminus\{\beta\}} \omega = X_\beta \times \omega$$

y a consecuencia del Lema previo, Y es de Mrówka.

El siguiente Corolario del Teorema de Kannan y Rajagopalan (2.4.3), es un resultado senc
(y sumamente particular) de metrización.

Corolario 2.4.10. *Si X es infinito, separable, de Hausdorff y hereditariamente localment compacto. Entonces son equivalentes:*

i) X es hereditariamente separable.

ii) X es metrizable.

Demostración. Dado el Teorema 2.4.3 y la caracterización 2.3.1, basta ver que si $\mathscr{A} \in \mathsf{AD}$ (
entonces $\Psi(\mathscr{A})$ es hereditariamente separable si y sólo si $\mathscr{A}$ es a lo más numerable.

Para la suficiencia procédase por contrapuesta suponiendo que $\mathscr{A}$ es más que numera
entonces $\mathscr{A}$ es un subespacio de $\Psi(\mathscr{A})$ discreto y más que numerable, con lo que, no pu
ser serparable. Para la necesidad, si $\mathscr{A}$ es a lo más numerable, cada subespacio de $\Psi(\mathscr{A})$ e
lo más numerable, y con ello, separable.

La *curiosidad* (comentada posteriormente a 2.3.6) en relación al espacio de or
tiene su justificación en el anterior Corolario.

Se finalizará la sección; y con ello el actual capítulo, dando un Corolario im
relación a las imagenes continuas de los espacios de Mrówka pseudocompactos.

Corolario 2.4.11. *Sea X infinito y de Hausdorff. Son equivalentes:*

i) Existe un denso $D \subseteq X$ de X numerable tal que cada sucesión en D t subsucesión convergente en X.

ii) X es imagen continua de un espacio de Mrówka generado por una familia m

Demostración. (i) $\to$ (ii) Supóngase (ii) y sea $S \subseteq \mathsf{AD}(D)$ el conjunto de familias en D tales que para cada $\mathscr{B} \in S$, cada elemento de $\mathscr{B}$ es imagen de una suce convergente en X. Como D es numerable, existe una biyección $f_0 : \omega \to D$ biyec que admite una subsucesión convergente, a saber $g_0 : \omega \to D$ convergente en X. S que $\{\mathrm{ima}(g_0)\} \in S$ y por tanto S es no vacío, siguiéndose de una aplicación del P Maximalidad de Hausdorff (similar al utilizado en 1.1.11) la existencia de una famili en D, $\mathscr{A} \subseteq \bigcup S$ tal que si $\mathscr{B} \in S$ y $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, entonces $\mathscr{A} = \mathscr{B}$.

Afirmación. $\mathscr{A}$ es familia casi ajena maximal sobre D.

Demostración. Obsérvese primero que si $A \in \mathscr{A}$, existe $\mathscr{C} \in S$ tal que $A \in$ $A \in \mathscr{C}$; consecuentemente A es imagen de una sucesión en D convergen decir $A \in \mathscr{A}$. Ahora, si $B \subseteq D$ infinito, entonces existe una biyección f : por hipótesis, existe $g : \omega \to B \subseteq D$ subsucesión de f, convergente en X $\{\mathrm{ima}(g)\} \in S$.

Por un lado, si $\mathscr{A} \cup \{\mathrm{ima}(g)\}$ no es casi ajena, existe $A \in \mathscr{A}$ de modo que es infinito, y con ello $A \cap B$ es infinito. De otro modo, $\mathscr{A} \cup \{\mathrm{ima}(g)\} \in$ construcción de A se tiene $\mathscr{A} \cup \{\mathrm{ima}(g)\} = \mathscr{A}$, siendo $A := \mathrm{ima}(g) \in \mathscr{A}$ tal es infinito (pues g es subsucesión de f). Lo anterior prueba que $\mathscr{A}$ es maxim
$\boxtimes$

Para cada $A \in \mathscr{A}$ fíjese (AC) una sucesión $f_A : \omega \to D$ convergente a x_A en $A = \mathrm{ima}(f_A)$. Nótese que, como X es de Hausdorff tal elemento x_A es el único converge. Además, dado que los elementos de $\mathscr{A}$ son casi ajenos dos a dos, y de ser X de Hausdorff, cada vez que $A, B \in \mathscr{A}$ sean distintos, se tendrá que $f_A \neq f_B$ Defínase la función $p : \Psi_D(\mathscr{A}) \to X$ como $p(d) = d$ si $d \in D$ y $p(A) = x_A$ si $A \in$ que p es continua y sobreyectiva.

Sea $U \subseteq X$ abierto en X y supóngase que $A \in p^{-1}[U] \cap \mathscr{A}$ es cualquiera, enton $x_A \in U$ y $A = \mathrm{ima}(f_A)$. Como U es un abierto de X y f_A converge a x_A en X, $\mathrm{ima}(f_A) \subseteq^* U$ y con ello $A \subseteq^* p^{-1}[U]$; así que $p^{-1}[U]$ es abierto en $\Psi_D(\mathscr{A})$, y por continua.

Ahora, sea $x \in X \setminus D$ cualquier elemento. Por contradicción, supóngase que $x \notin \mathrm{ima}($
entonces si $s : \omega \to D$ es cualquiera, s no puede converger a a en X; de lo contrario, ex
$A \in \mathscr{A}$ tal que $A \cap \mathrm{ima}(s)$ es infinito y con ello f_A converge a x en X, con lo que $x = p($
Sin embargo

AQUÍ ESTO YA NO SALE

(ii) $\to$ (i) SALE FÁCIL

Corolario 2.4.12. *Todo espacio metrizable, separable y compacto es imagen continua d* *un espacio de Mrówka; en particular, el cubo de Hilbert* $[0,1]^\omega$ *y el conjunto de Cantor* 2^ω

3 El compacto de Franklin

Se comenzará introduciendo los espacios conocidos como compactos de Franklin, que no son más la extensión unipuntual (de Alexxandroff) de los espacios de Mrówka, si estos son no compactos.

Se logrará caracterizar cuándo estos espacios satisfacen con la propiedad de Fréchet; objetivo requerirá los conocimientos obtenidos en el primer capítulo de este trabajo de tesis y nociones bási sobre espacios secuenciales y de Fréchet. Durante el proceso de tal caracterización, se resolverá de p un problema que estuvo sin solución en ZFC *durante cierta parte del siglo pasado; la productividad fi de la propiedad de Fréchet.*

3.1. Sucesiones en $\mathscr{F}(\mathscr{A})$

Definición 3.1.1. *Sea $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$ cualquiera. El* ***compacto de Franklin generado po*** *$\mathscr{A}$ es la extensión unipuntual del Ψ-espacio generado por $\mathscr{A}$, se denota por $\mathscr{F}(\mathscr{A})$:=* $\Psi(\mathscr{A}) \cup \{\infty_{\mathscr{A}}\}$.

Cuando el contexto así lo permita, se omitirá el subíndice "$_{\mathscr{A}}$" y se denotará el punto a infinito simplemente por ∞.

Dado que un espacio topológico no compacto admite compactaciones Hausdorff únicame cuando es Tychonoff y localmente compacto (véase [1, p. 221]), el compacto de Frank resulta ser la compactación de Alexandroff de $\Psi(\mathscr{A})$ únicamente cuando $\mathscr{A}$ sea una fam casi ajena, lo que garantiza que $\Psi(\mathscr{A})$ sea de Tychonoff; y sea *no compacta* (es decir, que sea simultanemente finita y maximal), lo cual obliga a que $\Psi(\mathscr{A})$ sea no compacto; a razón la Proposición 2.2.3.

Por ello; y salvo se diga lo contrario, se convendrá que $\mathscr{A}$ es una familia (casi ajena) compacta. Y más allá de esto, en pos de aligerar la notación de las futuras pruebas del capítu es menester convenir:

Consideración 3.1.2. *Durante esta sección:*

i) Para cada subespacio compacto $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$, se denotará por $V(K)$ a la vecinda abierta de ∞: $\{\infty\} \cup \Psi(\mathscr{A}) \setminus K$ (como $\Psi(\mathscr{A})$ es Hausdorff, todos los abiertos al rededo de ∞ son de esta forma).

ii) Se utilizarán casi en exceso los resultados obtenidos en 2.2.1 y 2.2.2, así que no s *referenciarán de ahora en más.*

iii) Todas las convergencias y operadores que aparezcan sin subíndices se en $\mathscr{F}(\mathscr{A})$. En caso de aparecer éstos en otros espacios, esto se indicar subíndices.

Lo primero a observar es lo siguiente: dado que $\Psi(\mathscr{A})$ no es compacto, al ser un Tychonoff y localmente compacto, se tiene efectivamente que $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ es de Hausdorf (en consecuencia, normal). Como es previsible, ciertas propiedades de $\Psi(\mathscr{A})$ inf topología de $\mathscr{F}(\mathscr{A})$; como ejemplo inmediato, la separabilidad se preserva.

Observación 3.1.3. *Sea $\mathscr{A}$ una familia casi ajena. Entonces el espacio $\mathscr{F}($ Hausdorff, compacto, normal, localmente compacto, separable y disperso.*

Comparando con el Corolario 2.1.11 con las observaciones recién hechas, vale me existen propiedades $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ que tienen una dependencia más compleja con $\Psi(\mathscr{A})$. todas las que tengan relación a las sucesiones.

Proposición 3.1.4. *Sea $\mathscr{A}$ una familia no compacta. Entonces el carácter de ∞ e es exactamente $\aleph_0 + |\mathscr{A}|$.*

Demostración. Es evidente que $\aleph_0 \leqslant \chi(\infty, \mathscr{F}(\mathscr{A}))$. Ahora, sea $\mathcal{B}$ una base loc $\mathscr{F}(\mathscr{A})$. Para cada $y \in \mathscr{A}$ fíjese un elemento $B_y \in \mathcal{B}$ de modo que $B_y \subseteq V(y \cup \{y\})$ que $y \cup \{y\}$ es compacto). Obsérvese que la asignación $y \mapsto B_y$ es inyectiva; pues, son distintos, entonces $B_x \subseteq U(x \cup \{x\})$ y $B_y \subseteq U(y \cup \{y\})$, de donde $x \in B_y \setminus B_x$. $|\mathscr{A}| \leqslant |\mathcal{B}|$, y en consecuencia $\aleph_0 + |\mathscr{A}| \leqslant \chi(\infty, \mathscr{F}(\mathscr{A}))$.

Para la desigualdad recíproca defínase:

$$\mathcal{B} = \left\{ V\left(h \cup (B \cup \bigcup h)\right) \mid (h, B) \in [\mathscr{A}]^{<\omega} \times [\omega]^{<\omega} \right\}$$

y nótese que $\mathcal{B}$ es un conjunto de vecindades de ∞ en $\mathscr{F}(\mathscr{A})$.

Si K es cualquier subespacio compacto de $\Psi(\mathscr{A})$, entonces los conjuntos $K \cap$ $G := (K \cap \omega) \setminus \bigcup (K \cap \mathscr{A}) \subseteq \omega$ son finitos; consecuentemente $V\big((K \cap \mathscr{A}) \cup \big(G \cup \bigcup (K \cap$ Mostrando que que $\mathcal{B}$ es base local para ∞ en $\mathscr{F}(\mathscr{A})$; y además $|\mathcal{B}| \leqslant |[\mathscr{A}]^{<\omega}$ $|\mathscr{A}| \cdot \aleph_0 = \aleph_0 + |\mathscr{A}|$. Lo anterior prueba que $\chi(\infty, \mathscr{F}(\mathscr{A})) \leqslant \aleph_0 + |\mathscr{A}|$.

El siguiente Corolario se puede enriquecer con 2.3.1.

Corolario 3.1.5. *Para toda familia no compacta $\mathscr{A}$, el espacio $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ es primero n si y sólo si $|\mathscr{A}| \leqslant \aleph_0$.*

El próximo Lema es clave por varios motivos; entre ellos, responde a una pr sugiere la discusión previa a la Proposición 1.3.10 £qué diferencía a los subconj casi ajenos con cada elemento de una familia casi ajena con aquellos en su parte

Lema 3.1.6. *Sean* $\mathscr{A} \in AD(\omega)$ *y* $B \subseteq \Psi(\mathscr{A})$, *entonces:*

i) *Si* B *es numerable,* $B \to \infty$ *si y sólo si* $B \subseteq^* \mathscr{A}$, *o* $B \cap \omega$ *es infinito y casi ajeno co* *cada elemento de* $\mathscr{A}$.

ii) $\infty \in \mathrm{cl}(B)$ *si y sólo si* $B \cap \mathscr{A}$ *es infinito, o* $B \cap \omega \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$.

Demostración. (i) Supóngase que B es numerable. Pruébese la suficiencia por contradicci esto es, asúmase que $B \to \infty$ pero $B \not\subseteq^* \mathscr{A}$ ($B \cap \mathscr{A}$ es infinito) y que existe cierto $a \in$ cuya interseccion con $B \cap \omega$ es infinita. Como $B \to \infty$ y $a \cap B = a \cap (B \cap \omega) \subseteq B$ es infin ocurre que $a \cap B \to \infty$. Sin embargo, $a \cap B \subseteq a$ es infinito y a razón del Lema 2.3.3 se ti que $a \to a$ en $\Psi(\mathscr{A})$; así mismo en $\mathscr{F}(\mathscr{A})$. Lo anterior implica que $a \cap B \to a$ y $a \cap B \to$ siendo esto un absurdo.

Conversamente, si $B \not\to \infty$, existe un compacto $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ de modo que $B \not\subseteq^* U_K$; esto $B \cap K$ es infinito. Como $K \cap \mathscr{A}$ es finito, lo anterior prueba que $B \cap \omega \subseteq (B \cap \omega) \cap K$ es infin y así mismo, $B \not\subseteq^* \mathscr{A}$. Además $C := (B \cap \omega) \cap K$ es un elemento en $\mathscr{I}(\mathscr{A})$; a consecuen de esto y lo comentado antes de 1.3.10, existe cierto $a \in A$ con $C \cap a$ infinito; de donde, B es infinito.

(ii) Para la suficiencia, supóngase que $\infty \in \mathrm{cl}(B)$ y que $B \cap \mathscr{A}$ es finito. Resulta necesa que $\infty \in \mathrm{cl}(B \cap \omega)$ y con ello $B \cap \omega \not\to \mathscr{I}(\mathscr{A})$. En efecto; de lo contrario, $B \cap \omega$ se compacto y por ello lo tanto $\infty \in \mathrm{cl}(B \cap \omega) \subseteq B$, lo cual es imposible pues $\infty \notin \Psi(\mathscr{A})$. que $B \cap \omega \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$.

Para la necesidad, sí $B \cap \mathscr{A}$ es infinito, existe $C \subseteq B \cap \mathscr{A}$ numerable y por el inciso anter $C \to \infty$, de donde $\infty \in \mathrm{cl}(C) \subseteq \mathrm{cl}(B)$. Por otra parte, si $B \cap \omega \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ y $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ compacto, resulta que $B \cap \omega \not\subseteq K$ y con ello $B \cap U_K \neq \varnothing$, mostrando que $\infty \in \mathrm{cl}(B)$.

Si $\mathscr{A}$ es una familia casi ajena maximal e infinita, entonces la condicion (i) del Teore anterior implica que las únicas sucesiones convergentes a ∞ son únicamente las (infinit contenidas en $\mathscr{A}$; por ello:

Corolario 3.1.7. *Supóngase que* $\mathscr{A}$ *es una familia casi ajena maximal e infinita, entonce para cada* $X \in [\mathscr{F}(\mathscr{A})]^\omega$:

i) X *es convergente si y sólo si* $X \subseteq^* \mathscr{A}$, *o, para algun* $a \in \mathscr{A}$ *se tiene que* $X \subseteq^* a$.

ii) *Si* $X \subseteq \omega$ *y* $x \in \omega \cup \{\infty\}$, *entonces* $X \not\to x$.

iii) *Si* $B \subseteq \omega \cap \mathrm{sqcl}(X)$, *entonces* $B \subseteq X$.

Demostración. (i) Sea $X \in [\mathscr{F}(\mathscr{A})]^\omega$ cualquiera. El recíproco es inmediato a razón de 2. y el Lema previo. Para la suficiencia asúmase que $X \to x$ en el compacto de Franklin. $x = \infty$, se sigue del lema anterior y la maximalidad de $\mathscr{A}$ que $X \subseteq^* \mathscr{A}$. En otro caso, puede suponer sin pérdida de generalidad que $X \subseteq \Psi(\mathscr{A})$, siguiéndose de 2.3.3 que X d estar casi contenido en algún elemento de $\mathscr{A}$.

(ii) y (iii) Se desprenden inmediatamente del inciso (i) y de que cada punto en ω
(por lo que las sucesiones convergentes a puntos de ω son eventualmente constan

Corolario 3.1.8. *Sea $\mathscr{A} \in \mathsf{MAD}(\omega)$ infinita, entonces el orden secuencial de $\mathscr{F}($*

Demostración. Nótese que $\text{sqcl}^2(\omega) \nsubseteq \text{sqcl}(\omega)$. Efectivamente; dado el Corolar $\text{sqcl}(\omega) = \omega \cup \mathscr{A}$. Más aún, como $\mathscr{A}$ es infinita, contiene cierto subconjunto $B \subseteq \mathscr{A}$. Y se obtiene de 3.1.6 que $B \to \infty$, esto muestra que $\infty \in \text{sqcl}^2(\omega) \setminus \text{sqcl}$ que $O_{\text{sq}}(\mathscr{F}(\mathscr{A})) \geqslant 2$.

Ahora, sea $X \subseteq \mathscr{F}(\mathscr{A})$ cualquiera y supóngase que $x \in \text{sqcl}^3(X)$. Como $\Psi(\mathscr{A})$ secuencial 1 (pues es 1AN, consecuentemente de Fréchet), es requisito que $x = \infty$. $A \subseteq \text{sqcl}^2(X)$ numerable tal que $A \to \infty$ en $\mathscr{F}(\mathscr{A})$. Por el Lema 3.1.6, sin pérdi ralidad, $A \subseteq \mathscr{A}$. Para cada $a \in A$ fíjese un conjunto numerable $B_a \subseteq \text{sqcl}(X)$ d $B_a \to a$. Se afirma que $\text{sqcl}(X) \cap \mathscr{A}$ es infinito.

Supóngase lo contrario, es decir, $\text{sqcl}(X) \subseteq^* \omega$. Como cada $B_a \subseteq X$ es con puede asumir sin pérdedida de generalidad que $B_a \subseteq \omega$. En consecuencia de $B_a \subseteq \omega \cap \text{sqcl}(X)$ y se obtiene del inciso (iii) del Corolario anterior que $B_a \subseteq$ $\text{sqcl}(X)$ ya que cada B_a satisface $B_a \to a \in A$. Esto muestra que $x \in \text{sqcl}(\text{sqcl}(X))$ Es decir, $\text{sqcl}^3(X) \subseteq \text{sqcl}^2(X)$ y $O_{\text{sq}}(\mathscr{F}(\mathscr{A})) \leqslant 2$.

El posterior Teorema sigue la línea del Teorema de Kannan y Rajagopalan (2. caracterización en propiedades topológicas de ciertos compactos de Franklin.

Teorema 3.1.9

Sea X un espacio topológico infinito. X es homeomorfo a un compacto de Frankli por una familia maximal infinita si y sólo si se satisfacen:

i) X es compacto, de Hausdorff y separable, y

ii) Existe $x_0 \in X$ tal que x_0 es el único punto de acumulación de $\text{der}(X)$, y, $B \in [X \setminus \text{der}(X)]^\omega$ se tiene $B \not\to x_0$.

Claramente, en tal caso x_0 se identifica bajo algún homeomorfismo con el punto del compacto de Franklin.

Demostración. Para la suficiencia basta suponer que $X = \mathscr{F}(\mathscr{A})$; con $\mathscr{A} \in \mathsf{MAD}($ y probar (ii). Sea $x_0 := \infty$. Por ser X la compactación unipuntual de $\Psi(\mathscr{A})$, se tien es un denso de X y por ello $\text{der}(X) = \{\infty\} \cup \text{der}_{\Psi(\mathscr{A})}(\Psi(\mathscr{A}))$. De lo anterior y 2.1.7 $\text{der}(X) = \{\infty\} \cup \mathscr{A}$; y además que $\mathscr{A}$ es discreto. En consecuencia, $\text{der}_{\text{der}(X)}(\text{der}(X))$ contención recíproca ocurre; pues cada subespacio compacto de $\Psi(\mathscr{A})$ tiene interse particularmente no vacía, con el conjunto (infinito) $\mathscr{A}$. Por lo que $\text{der}(X)$ sólo se $x_0 = \infty$. Ahora, si $B \in [X \setminus \text{der}(X)]^\omega$, entonces $B \subseteq \omega$ y por la maximalidad de $\mathscr{A}$ que $B \not\to \infty$ (utilizando el Corolario 3.1.7).

Véase ahora la necesidad; esto es, supóngase que es compacto, de Hausdorff, separabl que x_0 actúa tal cual dicta (ii). Defínase $Y := X\setminus\{x_0\}$, se mostrará primero que $Y \cong \Psi(\mathscr{A})$ p alguna familia maximal $\mathscr{A}$. Efectivamente, nótese que Y es infinito, de Hausdorff y separa (ya que Y es abierto al ser $\{x_0\}$ cerrado); así que haciendo uso del Corolario 2.4.4, es suficie mostrar los siguientes tres puntos:

(Y es regular) Dado que X es compacto, de Hausdorff es normal y particularmente, regu Esto prueba que $Y \subseteq X$ es regular.

($\mathrm{der}_Y(Y)$ es discreto) Efectivamente, si $y \in \mathrm{der}_Y(Y)$ es cualquiera, entonces $y \in Y$ es pu de acumulación de X. Como $y \neq x_0$ y x_0 es el único punto de acumulación de $\mathrm{der}_X(X)$, $\{y$ abierto en $\mathrm{der}_X(X)$; y por tanto, $\{y\}$ es abierto en $\mathrm{der}_Y(Y)$. Mostrando que $\mathrm{der}_Y(Y)$ es discr

(Si $B \subseteq Y$ es discreto, abierto y cerrado a la vez, entonces B es finito) Supóngase que B es discreto, abierto y cerrado a la vez. Por ser B discreto y abierto, se da $B \subseteq X\setminus\mathrm{der}(X)$. Aho si B es infinito (sin pérdida de generalidad, numerable) se tiene de la hipótesis que $B \not\to$ así, existe una vecindad de x_0; a saber U, de modo que $B \setminus U$ es infinito. Sin embargo, B es cerrado en vista de que B es cerrado; por ello, tal conjunto es cerrado, discreto e infin en X; lo que contradice que X sea compacto y T_1. Por ello, es necesario que B sea fin Concluyéndose de 2.4.4, la existencia de una familia $\mathscr{A} \in \mathsf{MAD}(\omega)$ de modo que $Y \cong \Psi(\mathscr{A}$

Para finalizar, obsérvese que $\{x_0\}$ no es abierto en X, pues de lo contrario no podría punto de acumulación de ninguno de sus subespacios. Así, Y es un subespacio denso de y como X es de Hausdorff, compacto, con $X \setminus Y = \{x_0\}$, resulta que X es la compactac unipuntual de $Y \cong \Psi(\mathscr{A})$; esto es, $X \cong \mathscr{F}(\mathscr{A})$.

3.2. La propiedad de Fréchet

Continuando con los frutos del Lema 3.1.6, se extrae el siguiente Corolario; este relacio las propiedades de combinatoria de las familias casi ajenas con propiedades de convergenc

Lema 3.2.1. *Si $\mathscr{A}$ es una familia no compacta, entonces para cada $X \subseteq \omega$ son equivalentes*

i) $\infty \in \mathrm{sqcl}(X)$.

ii) $\mathscr{A} \restriction X \notin \mathsf{MAD}(X)$.

Demostración. (i) $\to$ (ii) Si $\infty \in \mathrm{sqcl}(X)$, entonces existe $B \subseteq X \subseteq \omega$ de modo que $B \to x$ y acuerdo al Lema 3.1.6 se tiene garantizado que B es casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$ (p $B \cap \mathscr{A}$ es finito, por ser vacío). Entonces $B \in [X]^\omega$ es casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$ efectivamente, si $a \cap X \in \mathscr{A} \restriction X$ es cualquiera, entonces $B \cap (X \cap a) = X \cap (a \cap B) \subseteq a \cap B =$ Mostrando que $\mathscr{A} \restriction X$ no es maximal en X.

(ii) $\to$ (i) Si $\mathscr{A} \restriction X$ no es maximal en X, existe $B \subseteq X$ infinito y casi ajeno con cada eleme de $\mathscr{A} \restriction X$. Nótese que entonces $B \cap X$ es casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$; y por lo tan $B \to \infty$ (por 3.1.6). Por ello $\infty \in \mathrm{sqcl}(B) \subseteq \mathrm{sqcl}(X)$.

De la Proposición 1.3.10 se desprende fácilmente la contención:

$$\{X \in [\omega]^\omega \mid \forall A \in \mathscr{A}\ (A \cap X =^* \varnothing)\} \subseteq \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$$

Resulta que la contención recíproca encapsula la conexión que existe entre la co
de $\mathscr{A}$ y la propiedad de Fréchet de su compacto de Franklin asociado.

Corolario 3.2.2. *Sea $\mathscr{A}$ una familia casi ajena no compacta. Son equivalentes:*

i) $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ *es de Fréchet.*

ii) $\{X \in [\omega]^\omega \mid \forall A \in \mathscr{A}\ (A \cap X =^* \varnothing)\} = \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$.

iii) $\mathscr{A}$ *es maximal en ninguna parte.*

Demostración. (i) $\to$ (ii) Supóngase que $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ es de Fréchet. Basta probar la
recíproca de (ii). Y efectivamente, si $X \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$, entonces $\infty \in \mathrm{cl}(X)$ debido 3.1.6
$\mathscr{F}(\mathscr{A})$ es de Fréchet, $\infty \in \mathrm{sqcl}(X)$; siguiéndose del mismo Lema 3.1.6, que X es cas
cada elemento de $\mathscr{A}$.

(ii) $\to$ (iii) Supóngase (ii) y sea $X \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ cualquiera. Dada la hipótesis, X es
con cada elemento en $\mathscr{A}$, así que por 3.1.6, $\infty \in \mathrm{sqcl}(X)$. Obteniéndose del Lem
$\mathscr{A} \restriction X \notin \mathsf{MAD}\,(X)$.

(iii) $\to$ (i) Supóngase que $\mathscr{A}$ es maximal en niguna parte. Como $\Psi(\mathscr{A})$ es de F
ser primero numerable) basta verificar la propiedad de Fréchet en $\infty \in \mathscr{F}(\mathscr{A})$
$\mathscr{F}(\mathscr{A})$ de modo que $\infty \in \mathrm{cl}(X)$, entonces por 3.1.6, $X \cap \mathscr{A}$ es infinito o $X \cap \omega$
Si ocurre lo primero, sea $B \subseteq X \cap \mathscr{A}$ numerable y nótese que entonces $B \to$
basta para mostrar que $\infty \in \mathrm{sqcl}(X)$. Si ocurre el segundo caso, de la hipótesis
$A \restriction (X \cap \omega) \notin \mathsf{MAD}\,(X \cap \omega)$, probando que $\infty \in \mathrm{sqcl}(X \cap \omega) \subseteq \mathrm{sqcl}$ (en virtud 3.2.1)
casos, $\infty \in \mathrm{sqcl}(X)$; y por tanto $\mathrm{sqcl}(X) = \mathrm{cl}(X)$.

El Corolario anterior puede ser empleado para solucionar un problema clásico e
general; determinar si el producto de dos espacios de Fréchet es de Fréchet. Los
Mrówka dejan ver su "maleabilidad" al momento de generar contraejemplos a t
subsecuente hilación de ideas.

Proposición 3.2.3. *Sea $\mathscr{A}$ una familia casi ajena, unión ajena de las familias*
$\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$. Si $\mathscr{A}$ es maximal en alguna parte, entonces $\mathscr{F}(\mathscr{B}) \times \mathscr{F}(\mathscr{C})$ no es de Fré

Demostración. Supóngase que existe $X \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ de modo que $\mathscr{A} \restriction X \in$ MA
$B := \{(n, n) \mid n \in X\}$.

Como $X \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ y $\mathscr{B}, \mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}$, resulta que $X \in \mathscr{I}^+(\mathscr{B})$ y $X \in \mathscr{I}^+(\mathscr{C})$ (v
Entonces se tiene que $\infty_{\mathscr{B}} \in \mathrm{cl}_{\mathscr{F}(\mathscr{B})}$ y $\infty_{\mathscr{C}} \in \mathrm{cl}_{\mathscr{F}(\mathscr{C})}$ a consecuencia del Lema 3.
modo:

$$(\infty_{\mathscr{B}}, \infty_C) \in \mathrm{cl}_{\mathscr{F}(\mathscr{B}) \times \mathscr{F}(\mathscr{C})}(B)$$

sin embargo $(\infty_{\mathscr{B}}, \infty_{\mathscr{C}}) \notin \mathrm{sqcl}_{\mathscr{F}(\mathscr{B})\times\mathscr{F}(\mathscr{C})}(B)$. Efectivamente, de lo contrario, existe $Y \in [X$ de manera que $\{(n,n) \mid n \in Y\}$ converge a $(\infty_{\mathscr{B}}, \infty_{C})$. De lo anterior, y la continuidad de funciones proyección, se obtiene que $Y \to \infty_{\mathscr{B}}$ en $\mathscr{F}(\mathscr{B})$ y $Y \to \infty_{\mathscr{C}}$ en $\mathscr{F}(\mathscr{C})$. Sin emba a consecuencia de ello; y por 3.1.6, $Y \subseteq X$ es infinito y casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{}$ $\mathscr{C}$; es decir, con cada elemento de $\mathscr{A}\mathscr{B} \cup \mathscr{C}$, siendo esto una contradicción a la maximali de $\mathscr{A} \upharpoonright X$ en X.

Por lo tanto $(\infty_{\mathscr{B}}, \infty_{\mathscr{C}}) \notin \mathrm{sqcl}_{\mathscr{F}(\mathscr{B})\times\mathscr{F}(\mathscr{C})}(B)$ y el producto $\mathscr{F}(\mathscr{B}) \times \mathscr{F}(\mathscr{C})$ no tiene propiedad de Fréchet.

Combinando con el Teorema de Simon (1.4.3), se tiene la siguiente fuente de contrajemp Cada vez que $\mathscr{A}$ sea una familia infinita y maximal (por ello, no compacta), se pueden dos familias $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{C}$ no vacías, maximales en ninguna parte, de modo que $\mathscr{A} = \mathscr{B} \cup \mathscr{C}$. Y desprende de la Proposición previa que $\mathscr{F}(\mathscr{B}) \times \mathscr{F}(\mathscr{C})$ no es de Fréchet; pues claramente es maximal en alguna parte, ya que $\omega \in \mathscr{I}^{+}(\mathscr{A})$ (por 1.3.5); y además, $\mathscr{F}(\mathscr{B})$ y $\mathscr{F}(\mathscr{C})$ s ambos de Fréchet (por 3.2.2). Esto implica:

Corolario 3.2.4. *Existen dos espacios de Mrówka cuyas compactaciones unipuntuales so de Fréchet, pero su producto no*

En particular, la propiedad de Fréchet no es finitamente productiva; ni siquiera en la clas de espacios compactos, de Hausdorff.

Dado el Teorema de Simon (1.4.3), toda familia maximal de tamaño κ contiene una fam maximal en ninguna parte de cardinalidad, también κ. De la caracterización dada en 3.2. la Proposición 3.1.4, se obtiene:

Corolario 3.2.5. *Si existe una familia maximal de tamaño κ, existe un espacio de Fréche tal que uno de sus puntos tiene carácter κ.*

Particularmente, existe un espacio de Fréchet, que contiene un punto de carácter $\mathfrak{c}$.

4 Normalidad en los espacios de Mrówk

La hoy conocida como «Conjetura de Moore» (MC), establece que todo espacio de Moore norma metrizable; se trata de un prblema lanzado a la comunidad matemática por Jones en 1933 que atienc la cuestión £qué requiere un espacio de Moore para ser metrizable?. Este problema marcó un antes y despues para la topología general, consolidándose como uno de los problemas (sino el que más) importar en la topología y la teoría de conjuntos. MC tiene, presumiblemente, una solución independiente a axiomática ZFC ([13, p. 429-435]).

En el año 1937 (véase [5, Teo 5, p. 676]), el propio Jones muestra la consistencia de la «Conjetura D de Moore» (WMC); esto es, cualquier espacio separable, normal y de Mooore, debe ser metrizable. Perc sería sino hasta 1969 cuando Tall, en su tesis doctoral [16], logra establecer una equivalencia para W en términos de la existencia ciertos espacios topológicos (Q-sets, Definición 4.1.7) no numerables; mis para los cuales, Silver mostró consistente su existencia.

La meta de este capítulo será exponer las contribuciones de Jones, Silver y Tall; las cuales conjuntame permiten mostrar la independecia de WMC de la axiomática usual de ZFC.

4.1. Independencia de la Conjetura Débil de Moore

Por otra parte, todo espacio de Mrówka es de Moore y separable (Corolario 2.1.11); así el enunciado WMC (por consiguiente, MC) implica que ningún espacio $\Psi(\mathscr{A})$; con $\mathscr{A}$ u familia casi ajena más que numerable, puede ser normal. Lo que ataña a la presente secci y claramente presenta una dificultad mayor, es mostrar el recíproco de la anterior implicaci

Se comenzará exponiendo una condición necesaria que dicta ”dónde buscar” espacios Mrówka que sirvan de contrajemplo para WMC.

Proposición 4.1.1. *Sea $\mathscr{A} \in AD(\omega)$, se cumple:*

i) Si $|\mathscr{A}| \leqslant \aleph_0$, entonces $\Psi(\mathscr{A})$ es normal.

ii) Si $\mathscr{A}$ es infinita y $\Psi(\mathscr{A})$ es normal, $\mathscr{A}$ no es maximal y además $\aleph_1 \leqslant |\mathscr{A}| < \mathfrak{c}$.

Demostración. (i) Cualquier espacio de Mrówka numerable es metrizable (por 2.3.1), parti larmente normal (**Ree BSB**).

(ii) Supóngase que $\mathscr{A}$ es infinita y que $\Psi(\mathscr{A})$ es normal. Si $\mathscr{A}$ fuera maximal, entonces 2.3.4 y 2.2.3, se tiene que $\Psi(\mathscr{A})$ es pseudocompacto pero no numerablemente compacto. cual (por el **RAKA**) imposibilita que $\Psi(\mathscr{A})$ sea normal. Por tanto, $\mathscr{A}$ no es maximal. E también implica que $\aleph_1 \leqslant |\mathscr{A}|$ (en virtud de la Lema 1.1.12).

Finalmente, $|\mathscr{A}| = \mathfrak{c}$, debido a 2.1.7, $\mathscr{A}$ es un subespacio cerrado y discreto d tamaño $\mathfrak{c}$. Así, de la separabilidad y normalidad de $\Psi(\mathscr{A})$ se desprende; por el Ler (léase **TAL**), que $2^{\mathfrak{c}} = 2^{|\mathscr{A}|} \leqslant 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, lo cual es imposible. Por lo tanto $|\mathscr{A}| < \mathfrak{c}$.

Corolario 4.1.2. *Bajo HC; ningún espacio de Mrówka más que numerable, es no*

Lo subsecuente caracteriza; en términos simples, la normalidad de un espacio d través de la combinatoria de su familia asociada.

Proposición 4.1.3. *Sean $\mathscr{A}$ una familia casi ajena y $F, G \subseteq \Psi(\omega)$ cerrados aje equivalentes:*

i) F *y* G *se separan por abiertos ajenos de* $\Psi(\mathscr{A})$.

ii) $F \cap \mathscr{A}$ *y* $G \cap \mathscr{A}$ *se separan por abiertos ajenos de* $\Psi(\mathscr{A})$.

iii) La grieta $(F \cap \mathscr{A}, G \cap \mathscr{A})$ *está separada.*

Demostración. La implicación (i) $\rightarrow$ (ii) es inmediata.

(ii) $\rightarrow$ (iii) Supóngase que $U, V \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ son abiertos ajenos tales que $F \cap$ $G \cap \mathscr{A} \subseteq U$.

Si $a \in F \cap \mathscr{A}$ es cualquiera, entonces $a \in U$ y por definición de la topologí resulta que $a \subseteq^* U$. Ahora, si $b \in G \cap \mathscr{A}$ es cualquiera, entonces $b \subseteq^* V \subseteq \omega \setminus U$ $b \cap U = *\varnothing$. Por lo tanto, U es particionador de $F \cap \mathscr{A}$ y $G \cap \mathscr{A}$.

(iii) $\rightarrow$ (i) Supóngase que $D \subseteq \omega$ es particionador de $F \cap \mathscr{A}$ y $G \cap \mathscr{A}$. Nótese qu $F \cup D \setminus G$; y además, U es abierto. Efectivamente, dado $a \in U \cap \mathscr{A} \subseteq F \cap \mathscr{A}$ s $a \subseteq^* D$ (por ser D particionador de $F \cap \mathscr{A}$ y $G \cap \mathscr{A}$) y $a \subseteq^* \Psi(\mathscr{A}) \setminus G$ (por ser ajeno a F), en consecuencia $a \subseteq^* D \setminus G \subseteq U$.

Como D es particionador de $F \cap \mathscr{A}$ y $G \cap \mathscr{A}$; $\omega \setminus D$ es particionador de $G \cap \mathscr{A}$ resulta análogo que $G \subseteq V := G \cup (\omega \setminus D) \setminus F$ y V es abierto. Probando que F y G por los abiertos ajenos U y V.

Debido al Lema 2.1.7 y la Observación 1.4.7, se deprende:

Corolario 4.1.4. *Para cada familia casi ajena $\mathscr{A}$ son equivalentes:*

i) $\Psi(\mathscr{A})$ *es normal.*

ii) Para cada $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$, *la grieta* $(\mathscr{B}, \mathscr{A} \setminus \mathscr{B})$ *está separada.*

La traducción de la Proposición 4.1.1 en términos combinatorios es la siguiente (lo cual, por cierto, demuestra el Ejemplo 1.4.8 de la Subsección 1.4.2):

Corolario 4.1.5. *Sea $\mathscr{C} \in AD(\omega)$, entonces:*

i) Si $|\mathscr{C}| \leqslant \aleph_0$, toda grieta contenida en $\mathscr{C}$ está separada.

ii) Si $\mathscr{C}$ es inifnita y, $|\mathscr{C}| = \mathfrak{c}$ o $\mathscr{C} \in MAD(\omega)$; entonces $\mathscr{C}$ contiene una grieta que n está separada.

En términos topológicos, todo espacio $\Psi(\mathscr{A})$ no normal (con $\mathscr{A}$ infinita) contiene dos cer dos ajenos que no se pueden separar por abiertos ajenos, y en virtud del punto (i) del anter corolario, alguno de ellos debe ser no numerable. Surge la siguiente cuestión:, £cúando ninún par de cerrados ajenos no numerables se pueden separar?.

El análisis expuesto en Subsección 1.4.2 establece que estos espacios son, exactamente, aq llos generados por una familia inseparable (en el sentido de lo compentado en la 25), parti larmente:

Corolario 4.1.6. *Si $\mathscr{A}$ es una familia de Luzin, ninún par de cerrados ajenos no numerable de $\Psi(\mathscr{A})$ se pueden separar por abiertos ajenos.*

Particularmente, hay un espacio de Mrówka de tamaño $\aleph_1$ no normal.

4.1.1. Consistencia de WM

Siguiendo la técnica de Tall, para probar la independencia de la Conjetura Débil de Moore ZFC), se utilizarán a modo de intermediario los espacios metrizables conocidos como Q-se

Definición 4.1.7. *Un Q-set es un espacio metrizable, separable y tal que todos sus subes pacios son de tipo G_δ (equivalentemente; F_σ).*

Ejemplo 4.1.8. *Cualquier espacio X a lo más numerable y metrizable es un Q-set. Efec tivamente, nótese que X es separable. Y además, si $A \subseteq X$ es cualquiera, entonce $A = \bigcup \left\{ \{a\} \mid a \in X \right\}$ es de tipo F_σ.*

Se comenzará por observar que todo Q-set es; salvo homeomorfismos, un subespacio de $\mathbb{R}$ del conjunto de cantor, 2^ω). El siguiente lema, incluido en [9, Teo. 1, p. 286] por Kuratow se enunciará y demostrará con terminología moderna.

Lema 4.1.9. *Sea X un espacio metrizable por la métrica d. Si $|X| < \mathfrak{c}$, entonces X e cero-dimensional.*

Demostración. Supóngase que $|X| < \mathfrak{c}$. Basta corroborar que cada $x \in X$ admite una b local de abiertos y cerrados. Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$.

Supóngase ahora que para cada $\delta \in (0, \varepsilon)$, el conjunto $\mathrm{fr}(B(x, \delta))$ es no vacío, y fí
elemento $x_\delta \in \mathrm{fr}(B(x, \delta)) \subseteq X$. Como $|(0, \varepsilon)| = \mathfrak{c}$, la asignación $\delta \to x_\delta$ no puede se
Consecuentemente, existen distintos $\delta, \delta' \in (0, \varepsilon)$ de modo que $\mathrm{fr}(B(x, \delta)) \cap \mathrm{fr}(B($
Pero esto es imposible, dado que $\delta \neq \delta'$.

Por lo tanto, para cada $\varepsilon > 0$ se puede fijar (AC) cierto $\delta_\varepsilon \in (0, \varepsilon)$ tal que $\mathrm{fr}(B($
esto es, $B(x, \delta_\varepsilon)$ es abierto y cerrado a la vez. Claramente $\{B(x, \delta_\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ es una
para x en X.

Proposición 4.1.10. *Para todo espacio X son equivalentes:*

i) X *es un* Q-*set.*

ii) X *se encaja en* 2^ω *y todos sus subespacios son de tipo* G_δ*.*

iii) X *se encaja en* $\mathbb{R}$ *y todos sus subespacios son de tipo* G_δ*.*

Demostración. Dada la universalidad del conjunto de Cantor, $2^\omega \subseteq \mathbb{R}$, sobre
espacios cero-dimensionales; y que todo subespacio de $\mathbb{R}$ es metrizable y sepa
probar que todo Q-set es cero-dimensional.

Supóngase que X es un Q-set, como X es metrizable y separable, entonces es
una base a lo más numerable $\mathcal{B}$ para X.

Como X es Q-set, para cada $A \subseteq X$ fíjese (AC) una colección a lo más numerable
$\mathcal{U}$ de modo que $A = \bigcap \mathcal{U}$. Y como $\mathcal{B}$ es base; de nuevo haciendo uso de AC, para c
U fíjese $\mathcal{B}_U \subseteq \mathcal{B}$ de modo que $U = \bigcup \mathcal{B}_U$.

Lo anterior permite definir $\mathscr{P}(X) \to [\mathscr{P}(\mathcal{B})]^{\leqslant\omega}$ por medio de la correponde
$\{B_U \mid U \in \mathscr{A}\}$. Nótese que tal asignación es inyectiva, pues si $\{B_U \mid U \in \mathscr{A}\} = \{B_U$
entonces:

$$\mathcal{U}_A = \{\bigcap \mathcal{B}_U \mid U \in \mathcal{U}_A\} = \{\bigcap \mathcal{B}_U \mid U \in \mathcal{U}_B\} = \mathcal{U}_A$$

y con ello $A = \bigcap \mathcal{U}_A = \bigcap \mathcal{U}_B = B$. De esta manera:

$$2^{|X|} \leqslant \left|[\mathscr{P}(\mathcal{B})]^{\leqslant\omega}\right| \leqslant \left(2^{|B|}\right)^{\aleph_0} \leqslant \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_2} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

La última desigualdad implica que $|X| < \mathfrak{c}$. Siguiéndose del Lema previo, la cero-di
de X.

Observación 4.1.11. *Todo* Q-*set tiene tamaño menor que* $\mathfrak{c}$*. Consecuentemente,*
no existen Q-*sets más que numerables.*

El paralelismo del resultado anterior con el Corolario 4.1.2 no es coincidenci
ahora es mostrar que la existencia de Q-sets no numerables es equivalente a la ex
espacios de Mrówka no numerables y normales; más aún, si estos espacios no existe
WMC se satisface.

Lema 4.1.12. *Supóngase que X es normal, de Moore, no metrizable y que $D \subseteq X$ es dens a lo más numerable; entonces existe $A \subseteq X \setminus D$ más que numerable, discreto y cerrado er X.*

Demostración. El Tereoma de Bing (**BINGEEE**) caracteriza la metrización de los espac de Moore a través de la normalidad colectiva. Por ello, X no es colectivamente normal y ex una familia discreta $\mathcal{A}$ de cerrados de X, cuyos elementos no se pueden separar por abier ajenos.

Como X es normal, para cada par de cerrados ajenos de X; digamos F y G, elíjanse (A abiertos ajenos $W(F,G), S(F,G)$ de modo que $F \subseteq W(F,G)$ y $G \subseteq S(F,G)$. Es claro que $\mathcal{A}$ puede ser finito.

> *Afirmación.* $\mathcal{A}$ es más que numerable.
>
> *Demostración.* Supóngase que $\mathcal{A}$ está enumerado inyectivamente como $\{A_n \mid n \in$ Por ser $\mathcal{A}$ familia discreta de cerrados, si $n \in \omega$, entonces $B_n := \bigcup\{A_m \mid m > n\}$ cerrado.
>
> Por recursión, sean $U_0 := W(A_0, B_0)$ y $V_0 := S(A_0, B_0)$; y, para $n \in \omega$, U_{n+1} $W(A_{n+1}, B_{n+1}) \cap V_n$ y $V_{n+1} = S(A_{n+1}, B_{n+1}) \cap V_n$.
>
> Por construcción, $\{U_n \mid n \in \omega\}$ es una familia de abiertos, ajenos por pares tales para cada $n \in \omega$ se tiene $A_n \subseteq U_n$. Así, los elementos de $\mathcal{A}$ se separan por abier ajenos; contradiciendo su elección.

Dada la afirmación anterior, y fijando para cada $a \in \mathcal{A}$ un elemento $x_a \in \mathcal{A}$, se obtiene conjunto mas que numerable $B := \{x_a \mid a \in \mathcal{A}\}$; mismo que por ser $\mathscr{A}$ familia discreta y X Hausdorff, resulta ser cerrado y discreto.

Por último nótese que cada subespacio de B es discreto y cerrado en X; pues B es discr y cerrado en X. Particularmente, $A := B \setminus D$ es discreto, discreto en X y no numerable (pue es más que numerable y D es numerable).

El siguiente teorema aparece en la tesis doctoral de Franklin David Tall (ver [16]), y es pieza clave para atacar la Conjetura Débil de Moore.

Teorema 4.1.13 (Tall)

Si κ es un cardinal infinito, son equivalentes:

i) Existe un espacio de Moore, normal, no metrizable de tamaño κ.

ii) Existe un espacio de Mrówka normal de tamaño κ.

iii) Existe un Q-set de tamaño κ.

Demostración. (i) $\to$ (ii) Supóngase que X es un espacio, normal, de Moore y no de tamaño κ y sea fíjese $D \subseteq X$ denso numerable de X. Por 4.1.12, D es infinito subespacio $A \subseteq X \setminus D$ más que numerable; discreto y cerrado de X. Como X es de y primero numerable, considérese $\mathscr{A}_{D,A} = \{A_x \in [D]^\omega \mid x \in A\}$; la familia de su D convergentes a A (definida en 1.2.3), donde cada A_x converge a x. Por la Propo $|\mathscr{A}_{D,A}| = \kappa$ y así mismo, $\Psi_D(\mathscr{A}_{D,A}) = \kappa$.

Sea $\mathscr{B} := \{A_x \mid x \in F\} \subseteq \mathscr{A}_{D,A}$ cualquiera. Como A es discreto y cerrado en X, de sus subespacios es cerrado en X; en consecuencia y por normalidad de X, exis $U, V \subseteq X$ ajenos, de modo que $F \subseteq U$ y $A \setminus F \subseteq V$. Si $x \in F$, entonces $A_x \to x$ $A_x \subseteq^* U$, similarmente, si $y \in A \setminus F$, entonces $A_y \subseteq^* V \subseteq X \setminus U$; de donde $A_y \cap U$

Por tanto $(\mathscr{B}, \mathscr{A}_{D,A} \setminus \mathscr{B})$ está separada, obteniéndose de 4.1.4 la normalidad de

(ii) $\to$ (iii) Si $\kappa = \omega$, la implicación resulta vacua; pues todo subespacio numerab un Q-set (Ejemplo 4.1.8). Supóngase pues, que $\Psi(\mathscr{A})$ es un espacio normal de tam siendo necesario que $|\mathscr{A}| = \kappa$.

Para cada $C \subseteq \omega$ denótese por $\varphi_C \in 2^\omega$ a la función característica de C y sea $2^\omega \mid A \in \mathscr{A}\}$. Obsérvese que X es un espacio metrizable, separable (por ser sub metrizable, separable, 2^ω) de tamaño κ.

Sea $Y = \{\varphi_A \in X \mid A \in \mathscr{B}\} \subseteq X$ cualquiera. Dado el Corolario 4.1.4, la normalida implica la existencia de un particionador de $\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}$ y $\mathscr{B}$; de este modo:

$$\begin{aligned} Y &= \{\varphi_A \in X \mid A \in \mathscr{B}\} \\ &= \{\varphi_A \in X \mid A \cap D \neq^* \varnothing\} \\ &= \{\varphi_A \in X \mid \forall n \in \omega\, (A \cap D \nsubseteq n)\} \\ &= \bigcap_{n\in\omega} \{\varphi_A \in X \mid A \cap D \nsubseteq n\} \end{aligned}$$

Ahora, si $n \in \omega$ y $\varphi \in U_n := \{\varphi_A \in X \mid A \cap D \nsubseteq n\}$ es cualquiera, existe $(A \cap D) \setminus n$. Por ello, si $x = \varphi_B \in X$ es tal que $x(k) = 1$, entonces $k \in (B \cap D) \setminus n$ y es decir $f \in U_n$. Mostrando así que $\{x \in X \mid x \restriction \{k\} = \varphi \restriction \{k\}\} \subseteq U_n$. Por lo tant es abierto en X. De esta manera, cualquier $Y \subseteq X$ es G_δ en X y X es un Q-set.

(iii) $\to$ (i) Supóngase que X es un Q-set de tamaño κ. En virtud del Proposi supóngase sin pérdida de generalidad que $X \subseteq 2^\omega$. Para cada $E \subseteq X$ considérese $\mathscr{A}$ $[N]^\omega \mid x \in E\}$, la familia de las ramas de E en N (definida en 1.2.7); donde $N :=$ A_x es el conjunto $\{x \restriction n \mid n \in \omega\} \subseteq N$. Puesto que $|X| = \kappa$, del Definición 1.2.7 s $|\mathscr{A}_X| = \kappa$, y con ello $|\Psi_N(\mathscr{A}_X)| = \kappa$.

Sea $Y \subseteq X$ cualquiera. Como X es un Q-set, $Y = \bigcup\{F_n \mid n \in \omega\}$ y $X \setminus Y = \bigcup\{G$ donde cada conjunto F_n y G_n es cerrado en $X \subseteq 2^\omega$. Para cada $n \in \omega$ defínanse los

$$D_n := (\bigcup \mathscr{A}_{F_n}) \setminus \bigcup_{m<n} (\bigcup \mathscr{A}_{G_m})$$

$$L_n := (\bigcup \mathscr{A}_{G_n}) \setminus \bigcup_{m\leqslant n} (\bigcup \mathscr{A}_{F_m})$$

y sea $D := \bigcup\{D_n \mid n \in \omega\}$. Nótese que por construccion, si $m, n \in \omega$, se tiene $D_n \cap L_m =$
consecuentemente, cada L_n es ajeno con D.

Sea $y \in A_Y$; entonces existe $n \in \omega$ de modo que $y \in F_n$. Por otra parte, cada $G_m \subseteq X$
(con $m < n$) es cerrado en X, por lo que existe $s \in \omega$ de modo que:

$$\{x \in X \mid x \restriction s = y \restriction s\} \subseteq X \setminus \bigcup_{m<n} G_m$$

Por ello, si $\nu \in A_y \setminus D_n \subseteq F_n$, existen $x \in F_n$ y $k \in \omega$ de modo que $\nu = x \restriction k$. Así
$x \in \bigcup \mathscr{A}_{F_n}$; y como $\nu \notin D_n$, existen $m < n$ y $g \in G_m$ de manera que $\nu = y \restriction k = g \restriction k$
a razón de ello, no puede ocurrir $s \subseteq k$. Por lo tanto $k < s$ y $A_y \setminus D_n \subseteq 2^{<s} =^* \varnothing$; esto
$A_y \subseteq^* D_n \subseteq D$.

Similarmente, para cada $y \in X \setminus Y$ existe un $n \in \omega$ tal que $A_y \subseteq^* L_n \subseteq N \setminus D$;
donde, $A_y \cap D{=}\varnothing$. Así que D es separador de $\mathscr{B}$ y $\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}$; probando por el Corolario 4.1.4
normalidad de $\Psi_N(\mathscr{A}_X)$.

Es inmediato al Teorema 4.1.13 (y a 4.1.2, o bien, 4.1.11) la siguiente consecuencia:

Corolario 4.1.14. *Bajo HC; se cumple WMC, y:*

i) Ningún espacio de Mrówka no numerable es normal.

ii) Ningún Q-set es más que numerable.

Consecuentemente WMC es consistente con ZFC.

4.1.2. Consistencia de ¬WM

Para la segunda parte de la prueba de independencia de WMC se hará uso; como es previsi
desde anteriores capítulos, de la negacion de HC con el Axioma de Martin. Se comenz
observando cómo se pueden caracterizar a todos los Q-sets haciendo uso del Lema de Solo
y MA.

Lema 4.1.15. *Sea X un espacio metrizable y separable. Entonces existe una base $\mathcal{B} =$
$\{B_n \mid n \in \omega\}$ para X de modo que $\{A_x \mid x \in X\}$ es familia casi ajena; donde, cada A_x e
$\{n \in \omega \mid x \in B_n\}$.*

Demostración. Por el teorema (**Arhangelskii**), X admite una base regular (véase **BsRg**)
Como X es 2AN (a consecuencia de ser metrizable y separable **VeR**), existe una base $\mathcal{B}$
$\{B_n \mid n \in \omega\} \subseteq \mathcal{C}$, claramente $\mathcal{B}$ sigue siendo regular.

Dados $x, y \in X$ son distintos, sean U, V abiertos ajenos que separan a x y y. Por regulardi
de la base $\mathcal{B}$, existe $W \subseteq U$ abierto con $x \in W$ y $\mathcal{B}_W := \{n \in \omega \mid B_n \cap W \neq \varnothing \wedge B_n \setminus W$
$\varnothing\} =^* \varnothing$. Por consiguiente, el conjunto $A_x \cap A_y \subseteq \mathcal{B}_W$ es finito.

Proposición 4.1.16 (Tall, Silver). *Sea X espacio topológico. Bajo MA; X es un Q sólo si es homeomorfo a un subespacio $X \in [\mathbb{R}]^{<\mathfrak{c}}$.*

Demostración. Supóngase MA. La suficiencia viene dada por 4.1.13 y 4.1.10. Para l supóngase que $X \in [\mathbb{R}]^{<\mathfrak{c}}$, si X es a lo más numerable, de 4.1.13 y 4.1.1 se sigue q Q-set.

Como X es metrizable y sepable, sean $\mathcal{B}$, B_x (para cada $x \in X$) y $\mathscr{A}$ como en el L Tómense $Y \subseteq X$ cualquiera y $B := \{B_y \in \mathscr{A} \mid y \in Y\}$.

Como $|\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}|, |\mathscr{B}| < \mathfrak{c}$ y se cumple MA, del Lema 1.4.19 se desprende la existenc $D \subseteq \omega$ de modo que para cada $y \in Y$ y $x \in X \setminus Y$ se tiene $A_y \cap D \neq^* \varnothing$ y $A_x \cap D$

Para cada $n \in \omega$ sea $U_n := \bigcup\{B_m \in \mathcal{B} \mid m \in D \setminus n\}$, se afirma que $Y = \bigcap\{U$ Efectivamente; si $y \in X \setminus Y$ y $n \in \omega$ son cualesquiera, $A_y \cap D$ es infinito, y por $m \in D \setminus n$ tal que $y \in B_m$. En consecuencia $y \in U_n$, y así $Y \subseteq \bigcap\{U_n \mid n \in \omega\}$.

De manera similar, si $x \in X \setminus Y$, $A_x \cap D$ es finito y existe $n \in \omega$ de modo que A Por lo que para cada $m > n$ se tiene que $x \notin B_m$; luego entonces, $x \notin U_n$. Lo anter que $X \setminus Y \subseteq X \setminus \bigcap\{U_n \mid n \in \omega\}$.

Por lo tanto $Y = \bigcap\{U_n \mid n \in \omega\}$ y es G_δ.

Nótese que la influencia de MA en la previa caracterización radica únicamente e dad, cuando $\aleph_1 \leqslant |X| < \mathfrak{c}$.

De la proposición recien mostrada, el Teorema 4.1.13 y el Corolario 4.1.14 surge que pone punto final a la Conjetura Débil de Moore (y prueba la consistencia de de la Conjetura de Moore).

Corolario 4.1.17. *Bajo MA; para cada cardinal infinito $\kappa < \mathfrak{c}$ existe un espacio de normal, de tamaño κ. Consecuentemente:*

i) Bajo MA $+ \neg$HC; existen tales espacios.

ii) $\neg$WMC (y por ello, $\neg$MC) es consistente con ZFC.

iii) WMC es independiente de ZFC.

Contrastable con 4.1.16 es el hecho de que aún no se ha dado una caracteriz la normalidad de los espacios de Mrówka. Resulta seducto conjeturar que cualqu de Isbell-Mrówka de tamaño menor al continuo es normal. Sin embargo, el Cor muestra que; bajo MA $+ \neg$HC, existe un espacio de Mrówka, no normal y de tamañ continuo.

El comentario anterior deja como consecuencia la falsedad de que cualquier f ajena sea *esencialmente igual* a alguna de las definidas en 1.2.7 (en el sentido lo en la **??**); de lo contrario, cualquier espacio espacio de Isbell-Mrówka de tamañ continuo sería es normal, cosa que es falsa (al menos desde ZFC únicamente).

Notas y consideraciones (BORRAR)

Se tiene que acla

i) Qué significa numerable.

ii) Notaciones $[X]^{*\kappa}$.

iii) Casi ajenidad

iv) notación de sucesiones

Preliminares de **conjunt**

i) Axiomas ZFC y equivalencias de AC

ii) Teoría de ordenes parciales, elementos distinguidos, etc.

    1) Notaciones de rayos $<_x$, $\leqslant_x$ (segmentos iniciales CHECAR LEMA DEBAJO DI

    2) Casi contención y $\subseteq^*$, $=^*$, ideal de los finitos (?)

iii) Ordinales.

    1) Propiedades

    2) Aritmética ordinal

    3) Quién es ω

iv) Cardinales.

    1) Propiedades

    2) Artimética cardinal

    3) Los $\aleph_\alpha$ y $\mathfrak{c}$

    4) HC, sus equivalencias y resultados

Preliminares de **topolo**

i) Todo lo básico de topología

ii) Axiomas de separación, espacios desarrollables y espacios metrizables.

iii) Teoremas de metrización, bases regulares (?)

iv) Espacios secuenciales y Fréchet

   1) Definición, clausura secuencial, independencia respecto a subespacios

   2) 1AN $\to$ Fréchet $\to$ Secuencial.

   3) Orden secuencial, lema de ω_1 y cosas por el estilo

Cosas que f

- Teorema que no sale (y sucesiones ahi).
- Sucesiones del capítulo 1 y resultados de los métodos para construir MADS
- doble derivado en corolarios de KR

Resultados que y

- CONJUNTOS
   i) copo *c.c.c*
- LOGICA
   i) Demostrabilidad
- TOPOLOGÍA
   i) Cero-dimensional, condición suficiente
   ii) Cero-dimensional + T_1 implica Tychonoff
   iii) Cantor es universal sobre los cero-dimensionales
   iv) Teorema de Categoría de Baire 236 chap 2,
   v) En espacios metrizables, sep imllica 2AN
   vi) 2AN + loc compacto implica σ-comp
   vii) σ-comp implica Lindelof
   viii) Caracterizaciones básicas de pesudocompacidad 301 chap 2
   ix) Peudocompacto + Normal implica numerablemente compacto
   x) Lema de Jones
   xi) Metrizable implica normal
   xii) Teorema de bing 151 chap 4

Caracterizaciones

Índice Simbólico

Índice Alfabético

Referencias

[1] Fidel Casarrubias y Angel Tamariz. *Elementos de Topología General*. 1.ª ed. Aportacio Matemáticas, 2019.

[2] Michael Hruák. «Almost disjoint families and topology». En: *Recent Progress in Gene Topology III*. Springer, 2013, págs. 601-638.

[3] Michael Hruák y Fernando Hernández. «Topology of Mrówka-Isbell Spaces». En: *Ps docompact topological spaces, Gainesville*. Springer. 2018, págs. 253-289.

[4] Thomas Jech y Thomas Jech. *Set theory: The third millennium edition, revised and exp ded*. Vol. 3. Springer, 2006.

[5] F Burton Jones. «Concerning normal and completely normal spaces». En: (1937).

[6] Varadachariar Kannan y Minakshisundaram Rajagopalan. «Hereditarily locally comp separable spaces». En: *Categorical Topology: Proceedings of the International Conferen Berlin*. Springer. 1979, págs. 185-195.

[7] Kenneth Kunen. *Set theory an introduction to independence proofs*. Vol. 102. Elsev 1980.

[8] Kenneth Kunen y Jerry Vaughan. *Handbook of set-theoretic topology*. Elsevier, 1984.

[9] Kazimierz Kuratowski. *Topology: Volume I*. Vol. 1. Elsevier, 1966.

[10] José Alfredo Amor Montaño, Gabriela Campero Arena y Favio Ezequiel Miranda Pe *Teoría de los conjuntos, Curso intermedio*. Las prensas de Ciencias, 2011.

[11] James R. Munkres. *Topology*. 2.ª ed. Noida: Pearson, 2000.

[12] Georgina Noriko. «Algunas propiedades de los espacios de Mrówka». Tesis de Licen tura. Facultad de Ciencias, UNAM, 2009.

[13] Peter J Nyikos. «A provisional solution to the normal Moore space problem». En: *P ceedings of the American Mathematical Society* 78.3 (1980).

[14] Waclaw Sierpinski. «Cardinal and ordinal numbers». En: *Polska Akademia Nauk, Mo grafie Matematyczne* 34 (1958).

[15] Petr Simon. «A compact Fréchet space whose square is not Fréchet». En: *Commentatio Mathematicae Universitatis Carolinae* (1980).

[16] Franklin David Tall. «Set-theoretic consistency results and topological theorems c cerning thenormal Moore space conjecture and related problems». Tesis Doctoral. University of Wisconsin-Madison, 1969.

Consideramos esta prueba