



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN ESTUDIO ELEMENTAL SOBRE LOS ESPACIOS DE  
ISBELL-MRÓWKA

# TESIS

Que para obtener el título en:  
MATEMÁTICAS

PRESENTA:

Hugo Víctor García Martínez

ASESOR:

Dr. Fidel Casarrubias Segura



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2025



*Dedicado a Pepe, María, Claris, Dionisio y Margarita.*



# Agradecimientos

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.



# Índice general





# Introducción

Corría el año de 1954 cuando Stanisław G. Mrówka (1933-2010), «hijo» doctoral de Kazimierz Kuratowski (1896-1980), expuso en su artículo *On completely regular spaces* [**mrowkaContra**] un método novedoso para la construcción de espacios topológicos de Tychonoff, pseudocompactos, pero no compactos. La construcción parte de una *familia casi ajena*; esto es, en terminología moderna, un conjunto  $\mathcal{A}$  compuesto por subconjuntos infinitos de  $\omega$  que, dos a dos, tienen intersección finita. Se dice que  $\mathcal{A}$  es *maximal* si no existe una familia casi ajena  $\mathcal{B}$  que contenga propiamente a  $\mathcal{A}$ . El espacio contraejemplo de Mrówka es  $\Psi(\mathcal{A}) := \omega \cup \mathcal{A}$ , donde un subconjunto  $U \subseteq \Psi(\mathcal{A})$  es abierto si y sólo si para cada  $x \in U \cap \mathcal{A}$ , la diferencia  $x \setminus U$  es finita. En  $\Psi(\mathcal{A})$ , el subespacio  $\mathcal{A}$  es cerrado y discreto; por lo tanto, si  $\mathcal{A}$  es infinita,  $\Psi(\mathcal{A})$  no puede ser compacto. Por otro lado, si  $\mathcal{A}$  es maximal, entonces  $\Psi(\mathcal{A})$  resulta ser pseudocompacto. Aludiendo a la existencia de familias casi ajenas maximales e infinitas, se obtiene un esbozo de la demostración dada por Mrówka.

El aporte teórico recién mencionado constituye un antecedente temprano para el estudio de los *espacios de Isbell-Mrówka*, aunque no es el primero, pues esta topología fue descrita por primera vez, al menos según la documentación reconocida, por Pavel Alexandroff (1896-1982) y Pavel Urysohn (1898-1924) en [**alexOrigen**]. Pese a ello, su nombre rinde homenaje tanto a Mrówka como a su par profesional John R. Isbell (1930-2005), quienes de manera independiente de Alexandroff y Urysohn, desarrollaron el concepto entre las décadas de los cincuenta y los sesenta, mostrando por qué se trata de objetos dignos de investigación.

Todo espacio  $\Psi(\mathcal{A})$ , asociado a una familia casi ajena  $\mathcal{A}$ , es: de Tychonoff, cero-dimensional, disperso, separable y hereditariamente localmente compacto. De hecho, Kannan y Rajagopalan demostraron que los únicos espacios (infinitos, separables y de Hausdorff) hereditariamente localmente compactos son, preci-

samente, los espacios de Mrówka [**kannanHereditarily**]. Sin duda, lo que ha colocado a estos objetos, a lo largo de los años, en un lugar privilegiado dentro de las matemáticas es su versatilidad; pues una amplia variedad de invariantes topológicos de  $\Psi(\mathcal{A})$  pueden ser «codificados» mediante el comportamiento de la familia  $\mathcal{A}$ , considerada como conjunto. Como consecuencia, existen diversas aplicaciones relacionadas con estos espacios, que abarcan desde el estudio de compactaciones, selecciones continuas y espacios totalmente ordenados, hasta resultados en espacios de funciones continuas equipados con la topología de convergencia puntual.

El trabajo que aquí se propone pretende ofrecer una introducción asequible a los espacios de IsbellMrówka y puede ser concebido como un «manual». Una motivación fundamental para la realización de este trabajo es el hecho de que el material disponible sobre este tema, especialmente en español, es relativamente limitado. La meta final es explicar, siempre de manera clara, cómo se van tendiendo «puentes» entre la topología y la teoría de conjuntos por medio de los espacios de Mrówka. Se asumirá que el lector cuenta con una formación elemental, equiparable a un par de cursos de nivel superior, en las dos ramas de las matemáticas anteriormente nombradas.

El texto se divide en dos grandes secciones: el estudio de las familias casi ajenas (Capítulo 1), que constituye la parte «conjuntista» del escrito, y su contraparte topológica, dedicada al estudio de los espacios de Mrówka (Capítulos 2 a 4). En el Capítulo 1 se presentarán construcciones clásicas de familias casi ajenas y se expondrá la teoría básica de su combinatoria infinita asociada, incluyendo el Teorema de Simon, las familias de Luzin y el Lema de Solovay. El Capítulo 2 tiene como objetivo presentar el resultado ya mencionado obtenido por Kannan y Rajagopalan en este contexto, el entendimiento del comportamiento esencial de estos espacios resulta clave y constituye un aspecto central del capítulo. Los Capítulos 3 y 4 abordan problemas específicos que ponen de manifiesto la versatilidad de los protagonistas de esta tesis. En el Capítulo 3 se exhibe la relación entre la propiedad de Fréchet y la compactación unipuntual de los espacios de IsbellMrówka (el compacto de Franklin). Finalmente, en el Capítulo 4 se estudian en detalle los aspectos fundamentales para poder «traducir» la propiedad de normalidad, presentando la conjetura de Moore, su restricción a la clase de espacios separables y los resultados de Silver y Tall al respecto.

# 0 Preliminares

## 0.1. Conjuntos

1. Convención sobre las notaciones “no estándar” (potencia, colecciones  $[A]^{z\kappa}$ , etcétera)
2. Naturales, ordinales y cardinales.
3. Inducción y Recursión más allá de  $\omega$  (?)
4. Órdenes parciales y sus elementos distinguidos, árboles.
5. Casi contención y el comportamiento básico de la misma.

## 0.2. Topología

1. Espacios topológicos, bases, axiomas de numerabilidad. Definición sucinta de los términos: peso, carácter
2. Convenciones sobre las notaciones para producto, suma, homeomorfismos, encajes, y esclarecimiento de los términos: propiedades topológicas, productivas, factorizables, etc...
3. Axiomas de separación (desde  $T_0$  a  $T_4$ , normalidad, regularidad, regularidad completa y normalidad).
4. Espacios cero dimensionales y su caracterización.

5. Convergencia de sucesiones, espacios de Fréchet y secuenciales. Convención de términos como: sucesiones convergentes, clausura secuencial, etcétera.
6. Compacidad y sus “variantes”: compacidad numerable, Lindelöf, compacidad secuencial, pseudocompacidad, compacidad local, etc...
7. Metrizabilidad: se conviene de forma breve lo que es una métrica (y métrica completa ?), un espacio metrizable (y completamente metrizable ?). Se enuncian teoremas de equivalencia para: su separabilidad; y, su compacidad.
8. Metrización: Se enuncian los teoremas de metrización de: Urysohn, Bing y Arhangel'skii.
9. Categoría de Baire, se define el concepto de espacio de Baire y se enuncia el teorema de Categoría de Baire para: espacios de Hausdorff y localmente compactos; y, espacios completamente metrizables.

# 1 Familias casi ajenas

Las familias casi ajenas («almost disjoint families», en inglés) son objetos fascinantes de la teoría de conjuntos; como se verá a lo largo de este trabajo, sus aplicaciones no sólo se limitan a esta rama de las matemáticas, sino que sus repercusiones se extienden a la topología. Entre los pioneros de su estudio destacan enormes personajes, entre ellos Felix Hausdorff, Wacław Sierpinski, Kazimierz Kuratowski, Eduard Lelek y Stefan Banach.

En lo que sigue, se presentarán estos objetos y se expondrán sus propiedades más inmediatas; algunos métodos para su construcción; y finalmente, un estudio básico sobre su combinatoria. A lo largo de esta última sección, se abordarán las pruebas de algunos resultados clásicos, principalmente: los Lemmas de Dokálková y de Solovay, el Teorema de Simon y la existencia de las familias de Luzin. Por último, se darán algunas aplicaciones de esta teoría sobre el comportamiento de los cardinales  $\mathfrak{c}$ ,  $\mathfrak{m}$  y  $\mathfrak{a}$ .

## 1.1. Observaciones inmediatas

**Definición 1.1.1.** Sea  $N$  un conjunto numerable. Una **familia casi ajena sobre  $N$**  es un subconjunto  $\mathcal{A} \subseteq [N]^\omega$  cuyos elementos son casi ajenos por pares.  $\text{AD}(N)$  es el conjunto de todas las familias casi ajenas sobre  $N$ .

El término **familia casi ajena** (o simplemente **familia**) hará referencia a una familia casi ajena sobre  $\omega$ .

El concepto previo es fácilmente generalizable, el lector puede indagar al respecto en [JechSet]. Sin embargo, la teoría asociada a las familias casi ajenas, definidas como en ??, es suficientemente amplia y meritoria de un estudio dedicado.

Cualquier familia de subconjuntos ajenos por pares de  $N$ , es también una familia casi ajena sobre  $N$ ; particularmente,  $\emptyset$  y cualquier colección de la forma

$\{A\}$ , con  $A \in [N]^\omega$ . Además, resulta evidente que cada subconjunto de una familia casi ajena sobre  $N$  es, a su vez, una familia casi ajena sobre  $N$ .

Es claro que toda familia casi ajena tiene tamaño menor o igual a  $c$ ; así que en virtud de lo previamente observado, de existir alguna de ellas de tamaño el continuo, se garantizaría la existencia de familias ajenas de cualquier tamaño inferior a  $c$ .

**Ejemplo 1.1.2.** Las siguientes colecciones:  $\{\omega\}$ ,  $\{2n \mid n \in \omega\}$ ,  $\{2n+1 \mid n \in \omega\}$  y  $\{p^n \mid n \in \omega \setminus \{0\} \mid p \text{ es primo}\}$  son familias casi ajenas sobre  $\omega$ .

No resulta muy difícil verificar que las primeras dos familias del ejemplo anterior son «grandes», en el siguiente sentido:

**Definición 1.1.3.** Sea  $N$  conjunto numerable. Una familia  $\mathcal{A}$  sobre  $N$  es **maximal en  $N$**  si es  $\subseteq$ -maximal del conjunto  $\text{AD}(N)$ . Se denotará por  $\text{MAD}(N)$  al conjunto de todas ellas.

Cuando no haya riesgo de ambigüedad, el término **familia maximal** hará referencia a una familia maximal en  $\omega$ .

Dado que los elementos de toda familia casi ajena son infinitos, se tiene inmediatamente la siguiente observación:

**Observación 1.1.4.** Una familia  $\mathcal{A} \in \text{AD}(N)$  es maximal en  $N$  si y sólo si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

- i) Para cualquier  $\mathcal{B} \subseteq [N]^\omega$ , si  $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B}$ , entonces  $\mathcal{B} \notin \text{AD}(N)$ .
- ii) Para cada  $B \in [N]^\omega$  existe  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $A \cap B$  es infinito.

Se advierte que las familias sobre  $\omega$  parecerán deslucir a las construidas sobre otros conjuntos numerables; pero al no ser el estudio sobre estas últimas nulo, es menester considerar las propiedades que son transferibles entre estas dos clases de objetos.

**Definición 1.1.5.** Sean  $N, M$  conjuntos numerables y  $h : N \rightarrow M$  cualquier biyección. Se define  $\Phi_h : \mathcal{P}(\mathcal{P}(N)) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$  como:

$$\Phi_h(\mathcal{A}) = \{h[A] \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

En términos de lo recién definido, se remarca que al ser  $h$  biyección,  $\Phi_h$  será una biyección. Más aún, estas biyecciones se comportan bien respecto a ciertas virtudes conjuntistas, tal y como se ilustra a continuación.

**Proposición 1.1.6.** Sean  $N, M$  son numerables y  $h : N \rightarrow M$  una biyección cualquiera. Entonces:

- i)  $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B}$  si y sólo si  $\Phi_h(\mathcal{A}) \subsetneq \Phi_h(\mathcal{B})$ .
- ii)  $\Phi_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \Phi_h(\mathcal{A}) \cap \Phi_h(\mathcal{B})$ .
- iii)  $\Phi_h(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \Phi_h(\mathcal{A}) \cup \Phi_h(\mathcal{B})$ .
- iv)  $|\mathcal{A}| = |\Phi_h(\mathcal{A})|$ .
- v)  $\Phi_h[\text{AD}(N)] = \text{AD}(M)$ .
- vi)  $\Phi_h[\text{MAD}(N)] = \text{MAD}(M)$ .

**Demostración.** Se mostrarán únicamente (v) y (vi). En ambos basta probar la contención directa, pues al ser  $h$  biyección,  $\Phi_h^{-1} = \Phi_{h^{-1}}$ .

(v) Si  $\mathcal{A} \in \text{AD}(N)$ , entonces  $\mathcal{A} \subseteq [N]^\omega$  y así  $\Phi_h(\mathcal{A}) \subseteq [M]^\omega$ . Ahora, si  $h[A], h[B] \in \Phi_h(\mathcal{A})$  son distintos, es necesario que  $A \neq B$  y por ello  $A \cap B =^* \emptyset$ . Se obtiene que  $h[A] \cap h[B] = h[A \cap B] =^* \emptyset$ , y con ello,  $\Phi_h(\mathcal{A}) \in \text{AD}(M)$ .

(vi) Si  $\mathcal{A} \in \text{MAD}(N)$  y  $B \subseteq M$  es infinito, entonces  $h^{-1}[B] \subseteq N$  es infinito y existe  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $A \cap h^{-1}[B]$  es infinito. Al ser  $h$  biyección,  $h[A \cap h^{-1}[B]] = h[A] \cap B$  es infinito, por ende  $\Phi_h(\mathcal{A}) \in \text{MAD}(M)$ . ■

A partir de este momento se consolida la usanza de hacer hincapié en qué propiedades, u objetos, basados en familias casi ajenas se preservan bajo las biyecciones  $\Phi_h$ .

Una aplicación superflua de lo anterior es el nacimiento de un método cómodo para generar familias casi ajenas; en especial, infinitas.

**Ejemplo 1.1.7.** Claramente  $\mathcal{A} = \{\{n\} \times \omega \mid n \in \omega\} \in \text{AD}(\omega \times \omega)$ . Así que si  $h : \omega \times \omega \rightarrow \omega$  es biyección,  $\Phi_h(\mathcal{A}) \in \text{AD}(\omega)$ . Más aún, tal familia es del mismo tamaño que  $\mathcal{A}$  (todo gracias a ??).

A continuación se comenzarán a examinar las propiedades de las familias casi ajenas maximales; se tiene la intención de responder a las preguntas que surgen naturalmente como: ¿puede haber familias casi ajenas más que numerables?, o, ¿existen familias maximales infinitas?

**Lema 1.1.8.** Si  $\mathcal{A}$  es familia casi ajena maximal, entonces  $\omega \subseteq^* \bigcup \mathcal{A}$ .

**Demostración.** Por contrapuesta, supóngase que  $B := \omega \setminus \bigcup \mathcal{A}$  es infinito. Si  $A \in \mathcal{A}$ , entonces  $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ , y así  $A \cap B \subseteq A \setminus \bigcup \mathcal{A} \subseteq A \setminus A = \emptyset$ . Por lo que  $B \in [\omega]^\omega$  es casi ajeno con cada elemento de  $\mathcal{A}$ . ■

El recíproco del Lema previo falla para familias infinitas (véase la familia  $\Psi(\mathcal{A})$  del ??); y de hecho, no se cuenta un resultado «amigable» para determinar cuándo estas resultan ser maximales (véase ??). En contraparte a esto, se deduce rápidamente la siguiente equivalencia:

**Corolario 1.1.9.** Sea  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$ .  $\mathcal{A}$  es maximal si y sólo si  $\omega \subseteq^* \bigcup \mathcal{A}$ .

**Demostración.** Por el Lema previo, basta demostrar la necesidad.

Supóngase  $\omega \subseteq^* \bigcup \mathcal{A}$  y nótese que si  $B \in [\omega]^\omega$ , entonces  $B \subseteq^* \bigcup \mathcal{A}$  y con ello  $\emptyset \neq^* B \subseteq^* B \cap \bigcup \mathcal{A} = \bigcup \{B \cap A \mid A \in \mathcal{A}\}$ . Como la última es una unión finita,  $B$  debe tener intersección infinita con algún elemento de  $\mathcal{A}$ . ■

El posterior resultado puede ser visto como un símil al Teorema del Ultrafiltro (prelim), o bien, cualquier resultado afín en el que se haga uso del Principio de Maximalidad de Hausdorff o sus equivalentes (prelim).



**Lema 1.1.10.** *Toda familia casi ajena está contenida en una familia maximal.*

**Demostración.** Sean  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$  y  $X$  el conjunto de todas las familias casi ajenas que contienen a  $\mathcal{A}$ . Como  $\mathcal{A} \in X$ , por el Principio de Maximalidad de Hausdorff (AC), existe  $Y \subseteq X$ , una cadena  $\subseteq$ -maximal de  $(X, \subseteq)$ .

Defínase  $\mathcal{B} := \bigcup Y$ , como  $Y \subseteq \mathcal{P}([\omega]^\omega)$ , entonces  $\mathcal{B} \subseteq [\omega]^\omega$ . Además, si  $C, D \in \mathcal{B}$ , existen  $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in Y \subseteq \text{AD}(\omega)$  con  $C \in \mathcal{C}$  y  $D \in \mathcal{D}$ . Puesto que  $Y$  es cadena de  $(X, \subseteq)$ , sin pérdida de generalidad,  $C, D \in \mathcal{D} \supseteq \mathcal{C}$ ; y con ello,  $C \cap D$  es finito, ya que  $\mathcal{D} \in Y \subseteq X \subseteq \text{AD}(\omega)$ . Luego  $\mathcal{B} \in \text{AD}(\omega)$ , y además,  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ .

Finalmente, si  $\mathcal{B}' \in \text{AD}(\omega)$  y  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$ , entonces  $Y \cup \{\mathcal{B}'\}$  es una cadena de  $(X, \subseteq)$ ; lo cual, junto a la maximalidad de  $Y$ , implica que  $\mathcal{B}' \in Y$  y  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ . Por lo tanto,  $\mathcal{B} \in \text{MAD}(\omega)$ . ■

El siguiente resultado revela un fenómeno interesante respecto al tamaño de las familias maximales. Este se le atribuye a Wacław Sierpinski (se desprende de [SierpinskiCardinal]).

**Lema 1.1.11.** *Ninguna familia casi ajena numerable es maximal.*

**Demostración.** Sea  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$  enumerada por  $\mathcal{A} = \{A_n \mid n \in \omega\}$ . Si  $n \in \omega$  es cualquiera,  $A_n \cap \bigcup \{A_m \mid m < n\} = \bigcup \{A_n \cap A_m \mid m < n\}$  es finito, al ser unión finita de conjuntos finitos. Luego, por ser  $A_n$  infinito,  $A_n \setminus \bigcup \{A_m \mid m < n\} = A_n \setminus (A_n \cap \bigcup \{A_m \mid m < n\})$  debe ser infinito; y particularmente, no vacío.

Considérese  $f : \omega \rightarrow \omega$  definida por  $f(n) = \min\{A_n \setminus \bigcup \{A_m \mid m < n\}\}$  para cada  $n$ . Resulta que  $f$  es inyectiva; si  $m < n$ , entonces  $f(n) \notin A_m$ ,  $f(m) \in A_m$  y  $f(n) \neq f(m)$ . Además, para cada  $n \in \omega$  se tiene que  $A_n \cap f[\omega] = \{f(n)\}$ ; y con ello  $f[\omega] \subseteq \omega$  es infinito y casi ajeno con cada elemento de  $\mathcal{A}$ . ■

Tomando cualquier familia infinita  $\mathcal{A}$  y aplicando ??, se obtiene una familia maximal  $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$  de tamaño infinito. Por el resultado anterior, tal infinito debe ser más que numerable. Esta consecuencia es tan inmediata como, quizás, poco satisfactoria; pues su naturaleza es «no constructiva». Durante la posterior sección se mostrarán métodos para obtener estos últimos objetos de una manera más explícita.

**Observación 1.1.12.** Existe una familia maximal de tamaño al menos  $\aleph_1$ .

## 1.2. Familias casi ajenas de tamaño $\mathfrak{c}$

Al tomar un espacio de Fréchet  $X$  y cualquier subespacio denso  $D \subseteq X$ , para cada  $x \in X \setminus D$  ha de existir una sucesión en  $D$  convergente a  $x$ . Si a  $X$  le adicionamos la condición de ser  $T_1$ , la imagen de tal sucesión es necesariamente un conjunto numerable  $A_x \subseteq D$ , convergente a  $x$  en  $X$  (prelim).

**Proposición 1.2.1.** Supóngase que  $X$  es un espacio de Hausdorff, de Fréchet y que  $D \subseteq X$  es denso y numerable. Para cada  $A \subseteq X \setminus D$  existe una familia casi ajena sobre  $D$  biyectable con  $A$ .

**Demostración.** Con sustento en los comentarios previos, para cada  $x \in A$  fíjese (AC) un conjunto  $A_x \subseteq D$  numerable y convergente a  $x$  en  $X$ . Defínase la colección  $\mathcal{A}_{D,A}$  como  $\{A_x \subseteq D \mid x \in A\} \subseteq [D]^\omega$ .

Sean  $x, y \in A$  con  $x \neq y$ , por ser  $X$  de Hausdorff, hay abiertos ajenos  $U, V$  tales que  $x \in U$  y  $y \in V$ . Seguido de que  $A_x \rightarrow x$  y  $A_y \rightarrow y$ , se tiene  $A_x \subseteq^* U$  y  $A_y \subseteq^* V$ ; consecuentemente  $A_x \cap A_y \subseteq^* U \cap V = \emptyset$ . Lo cual prueba que  $\mathcal{A}_{D,A} \in \text{AD}(D)$  y  $|\mathcal{A}_{D,A}| = |A|$ . ■

**Definición 1.2.2.** Si  $X, D$  y  $A$  son como en la Proposición anterior, a  $\mathcal{A}_{D,A}$  se le denomina **familia de sucesiones en  $D$  convergentes a  $A$  en  $X$** .

Como la recta real  $\mathbb{R}$  es de Hausdorff, de Fréchet (por ser 1 AN) y  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  es un subespacio denso numerable; de lo previamente establecido se obtiene que  $\mathcal{A}_{\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$  es una familia casi ajena sobre  $\mathbb{Q}$  de tamaño  $\mathfrak{c} = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|$ . Conviene destacar que la construcción recién mencionada no depende del AC; pues para cada  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , el conjunto  $A_x$  de la ?? se puede construir de manera explícita. Si  $q : \omega \rightarrow$

$\mathbb{Q}$  es cualquier biyección, basta considerar:

$$A_x = \left\{ q \left( \min \left( q^{-1} \left[ \mathbb{Q} \cap \left( x - \frac{1}{n+1}, x - \frac{1}{n} \right) \right] \right) \right) \mid n \in \omega \setminus \{0\} \right\}.$$

El corazón de la próxima estrategia para la obtención explícita de familias casi ajenas de tamaño el continuo, son los árboles.

Comenzaremos observando que si  $S$  es cualquier rama de un árbol  $(T, \leq)$ , entonces  $S$  es cerrada bajo cotas inferiores. En efecto, sean  $x \in S$  y  $y \leq x$ . Para cada  $s \in S$ , al ser  $S$  cadena, se tiene que  $x \leq s$  o  $s < x$ . En el primer caso,  $y \leq x \leq s$  y  $y$  es comparable con  $s$ . En el segundo  $y, s < x$ ; y como  $(\{y \in T \mid y < x\}, \leq)$  es buen orden,  $y$  y  $s$  son comparables. Por lo tanto,  $S \cup \{y\}$  es una cadena; y seguido de que  $S$  es rama,  $y \in S$ .

**Proposición 1.2.3.** *Sea  $(T, \leq)$  un árbol numerable de altura  $\omega$  y  $\mathcal{A} \subseteq [T]^\omega$  el conjunto de todas las ramas numerables de  $(T, \leq)$ . Entonces  $\mathcal{A} \in \text{AD}(T)$ .*

**Demostración.** Sean  $R, S \in \mathcal{A}$  con  $R \neq S$ , sin pérdida de generalidad, existe  $x_0 \in R \setminus S \neq \emptyset$ . De existir  $y \in R \cap S$  tal que  $y \not\leq x_0$ , resultaría que  $x_0 \leq y$ , en virtud de que  $x, y \in R$  y  $R$  es rama. Lo anterior y la discusión previa a esta Proposición implican que  $x_0 \in S$ , lo cual es imposible.

Por lo tanto  $R \cap S \subseteq \{y \in T \mid y < x_0\}$ ; y como  $T$  tiene altura  $\omega$ , el orden de  $x_0$  es un natural; consecuentemente,  $R \cap S$  es finito. ■

Un ejemplo canónico de árbol numerable de altura  $\omega$  es  $2^{<\omega}$  (**prelim**); considerar la siguiente clase de familias desembocará en resultados sumamente notables (como se puede ver en la ??).

**Proposición 1.2.4.** *Para cada  $f \in 2^\omega$  defínase  $A_f := \{f \restriction n \mid n \in \omega\} \subseteq 2^{<\omega}$ ; entonces:*

- i) Cada  $A_f$  es una rama de  $(2^{<\omega}, \subseteq)$ .
- ii) Si  $f \neq g$ , entonces  $A_f \neq A_g$ .

**Demostración.** (i) Sea  $f \in 2^\omega$ , inmediatamente,  $A_f$  es cadena de  $(2^{<\omega}, \subseteq)$ . Supóngase ahora que  $S \subseteq 2^{<\omega}$  es una rama de  $(2^{<\omega}, \subseteq)$  y que  $A_f \subseteq S$ .

Sean  $g \in S$  y  $n = \text{dom}(g)$ ; puesto que  $S$  es cadena de  $(2^{<\omega}, \subseteq)$  y  $f \in A_f \subseteq S$ , entonces  $f \restriction n \subseteq g$  o  $g \subseteq f \restriction n$ . Cualquiera de los casos anteriores implican que  $f \restriction n = g$ , pues  $\text{dom}(g) = \text{dom}(f \restriction n)$ . Luego,  $g \in A_f$  y entonces  $A_f = S$ .

(ii) Si  $f \neq g$ , entonces existe  $m \in \omega$  tal que  $f(m) \neq g(m)$ . Así, se obtiene que  $f \restriction m+1 \neq g \restriction m+1$  y  $f \restriction m+1 \in R_f \setminus R_g$ , por lo que  $R_f \neq R_g$ . ■

Las proposiciones anteriores permiten definir, de forma explícita y sin recurrir al AC, el siguiente tipo de familias casi ajenas.

**Definición 1.2.5.** Para cada  $X \subseteq 2^\omega$  definase  $\mathcal{A}_X := \{A_f \mid f \in X\}$  como en la Proposición previa.

Esta familia será nombrada la **familia de las ramas de  $X$  en  $2^{<\omega}$** .

En paralelo a lo comentado después de ??, también se puede concluir vía la construcción recién expuesta, y el ??, lo siguiente:

**Corolario 1.2.6.** Existe una familia maximal de cardinalidad  $\mathfrak{c}$ .

En consecuencia, para cualquier cardinal  $\lambda \leq \mathfrak{c}$  existe una familia casi ajena de cardinalidad  $\lambda$ .

Se concluirá esta sección comentando qué ocurre respecto una interrogante surge naturalmente tras todo lo realizado: ¿existen familias maximales de cualquier cardinalidad entre  $\aleph_1$  y  $\mathfrak{c}$ ?

**Definición 1.2.7.** El **cardinal de casi ajenidad**,  $\mathfrak{a}$ , es el mínimo cardinal infinito  $\kappa$  tal que existe una familia maximal de tamaño  $\kappa$ .

Debido a ??, se tiene  $\aleph_1 \leq \mathfrak{a} \leq \mathfrak{c}$  y claramente bajo CH se debe satisfacer que  $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ ; luego, es consistente con ZFC que  $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ . Comentar que la teoría en relación al cardinal  $\mathfrak{a}$  es basta y existen resultados de consistencia como el enunciado en seguida:

**Teorema 1.2.8**

Si  $\aleph_1 \leq \kappa \leq \mathfrak{c}$  y  $\kappa$  es cardinal regular, es consistente con ZFC que  $\mathfrak{a} = \kappa$ .

El Teorema recién enunciado consecuencia de [kunenHandbook]; y si bien su demostración escapa a los propósitos del presente texto, sí se expondrán resultados en relación a la igualdad  $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$  más adelante (véase ??).

### 1.3. El ideal generado y su comportamiento

**Definición 1.3.1.** Sean  $N$  un conjunto numerable y  $\mathcal{A} \in \text{AD}(N)$ .

- i) El **ideal generado por  $\mathcal{A}$**  es el conjunto  $\mathcal{I}_N(\mathcal{A})$ ; definido como la colección  $\{B \subseteq N \mid \exists H \in [\mathcal{A}]^{<\omega} (B \subseteq^* \bigcup H)\}$ .
- ii) La **parte positiva de  $\mathcal{A}$**  es  $\mathcal{I}_N^+(\mathcal{A}) := \mathcal{P}(N) \setminus \mathcal{I}_N(\mathcal{A})$ .

Si  $N = \omega$ , estos conjuntos se denotarán por  $\mathcal{I}(\mathcal{A})$  y  $\mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ , respectivamente.

El objeto introducido previamente es de vital importancia para el estudio de la combinatoria de las familias casi ajenas. Como se había advertido anteriormente; con el propósito de no perder generalidad en los resultados expuestos durante esta sección, es necesario notar lo siguiente:

**Proposición 1.3.2.** Sean  $N, M$  conjuntos numerables y  $h : N \rightarrow M$  biyectiva. Si  $\mathcal{A} \in \text{AD}(N)$ , entonces  $\Phi_h(\mathcal{I}_N(\mathcal{A})) = \mathcal{I}_M(\Phi_h(\mathcal{A}))$ .

**Demostración.** Como  $h$  es biyección,  $\Phi_h^{-1} = \Phi_{h^{-1}}$ . Por lo cual, basta probar la contención directa de la igualdad.

Sea  $Y \in \mathcal{I}_N(\mathcal{A})$ , entonces existe  $H \subseteq \mathcal{A}$  finito tal que  $Y \setminus \bigcup H$  es finito. Como  $h$  es biyectiva,  $h[Y \setminus \bigcup H] = h[Y] \setminus h[\bigcup H] = h[Y] \setminus \bigcup \Phi_h(H)$  es finito. Además, de ??,  $\Phi_h(H) \subseteq \Phi_h(\mathcal{A})$  es finito. Por ello,  $h[Y] \in \mathcal{I}_M(\Phi_h(\mathcal{A}))$ . ■

Resulta sencillo constatar que el objeto definido en ?? es; como su nombre indica, un ideal (no necesariamente propio) sobre  $\mathcal{P}(\omega)$ . Además, se destaca lo siguiente:

**Observación 1.3.3.** *Sea  $\mathcal{A}$  cualquier familia casi ajena.*

- i) *Cualquier subconjunto finito de  $\omega$ , así como cualquier elemento de  $\mathcal{A}$ , es elemento de  $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ . Por lo que  $\emptyset \subsetneq [\omega]^{<\omega} \cup \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{A})$ .*
- ii) *Si  $\mathcal{B} \in \text{AD}(\omega)$  y  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ , entonces  $\mathcal{I}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{B})$ .*

Obsérvese además que si  $\mathcal{A} \in \text{MAD}(\omega)$  es finita; en virtud del ?? se tendrá que  $\omega \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$ , pues  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$  es finito y  $\omega \subseteq^* \bigcup \mathcal{A}$ . El recíproco de esto también es cierto.

**Proposición 1.3.4.** *Sea  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$  cualquiera. Si  $\omega \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$ , entonces  $\mathcal{A}$  es maximal y finita.*

**Demostración.** Supóngase que  $\omega \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$ , entonces existe  $H \subseteq \mathcal{A}$  finito con  $\omega \subseteq^* \bigcup H \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ . Por ??, basta ver que  $\mathcal{A}$  es finita.

Supóngase que existe  $B \in \mathcal{A} \setminus H$ . Así,  $B$  casi ajeno con cada elemento de  $H \subseteq \mathcal{A}$ , luego,  $B \cap \bigcup H = \bigcup \{B \cap h \mid h \in H\}$  es finito. De lo anterior,  $B = B \cap \omega \subseteq^* B \cap \bigcup H$  es finito, lo cual es imposible. Por lo tanto,  $\mathcal{A} \subseteq H$  y  $\mathcal{A}$  es finita. ■

**Corolario 1.3.5.** *Sean  $N$  un conjunto numerable y  $\mathcal{A} \in \text{AD}(N)$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i) *El ideal  $\mathcal{I}_N(\mathcal{A})$  no es propio, es decir,  $N \in \mathcal{I}_N(\mathcal{A})$ .*
- ii)  *$\mathcal{A}$  es finita y maximal en  $N$ .*

Con relativa frecuencia aparecerán familias que, pese a no ser maximales, satisfacen la condición (ii) de lo subsecuente; esta puede ser tomada como un debilitamiento a la condición de maximalidad.

**Definición 1.3.6.** Sean  $N$  un conjunto numerable y  $\mathcal{A} \in \text{AD}(N)$ .

- i) Para cada  $X \in [N]^\omega$ , la **traza de  $\mathcal{A}$  en  $X$**  es la colección  $\mathcal{A} \upharpoonright X$ , definida como el conjunto  $\{A \cap X \in [X]^\omega \mid A \in \mathcal{A}\}$ .
- ii)  $\mathcal{A}$  es **maximal en alguna parte** si y sólo si existe  $X \in \mathcal{F}_N^+(\mathcal{A})$  tal que la familia  $\mathcal{A} \upharpoonright X$  es maximal en  $X$ .
- iii)  $\mathcal{A}$  es **maximal en ninguna parte** si no es maximal en alguna parte.

Si  $X \in [N]^\omega$ , entonces  $\mathcal{A} \upharpoonright X \in \text{AD}(X)$ . Más aún, si  $\mathcal{A}$  es maximal, para cada  $B \subseteq X$  infinito existe  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $A \cap B = (A \cap X) \cap (B \cap X)$  es infinito, mostrando la maximalidad de  $\mathcal{A} \upharpoonright X$ . Así que, efectivamente, la definición anterior es un debilitamiento de la condición de maximalidad.

Sin causa de asombro, los conceptos recién establecidos son respetados por las biyecciones  $\Phi_h$ .

**Proposición 1.3.7.** Sean  $N, M$  conjuntos numerables,  $h : N \rightarrow M$  biyección y  $\mathcal{A} \in \text{AD}(N)$ .

- i) Para cada  $X \in [N]^\omega$  se cumple  $\Phi_h(\mathcal{A}) \upharpoonright h[X] = \Phi_h(\mathcal{A} \upharpoonright X)$ .
- ii)  $\mathcal{A}$  es maximal en alguna parte si y sólo si  $\Phi_h(\mathcal{A})$  también lo es.

**Demostración.** (i) Como  $h$  biyección, de la definición de  $\Phi_h(\mathcal{A})$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \Phi_h(\mathcal{A}) \upharpoonright h[X] &= \{B \cap h[X] \in [h[X]]^\omega \mid B \in \Phi_h(\mathcal{A})\} \\
 &= \{h[A] \cap h[X] \in [h[X]]^\omega \mid A \in \mathcal{A}\} \\
 &= \{h[A \cap X] \mid A \cap X \in [X]^\omega \wedge A \in \mathcal{A}\} \\
 &= \Phi_h(\mathcal{A} \upharpoonright X).
 \end{aligned}$$

(ii) Como  $\Phi_h^{-1} = \Phi_{h^{-1}}$ , basta probar la suficiencia. Supóngase que  $\mathcal{A}$  es maximal en alguna parte, entonces existe  $X \in \mathcal{F}^+(\mathcal{A})$  tal que  $\mathcal{A} \upharpoonright X$  es maximal en  $X$ .

Dada la igualdad de ??,  $h[X] \in \mathcal{F}^+(\Phi_h(\mathcal{A}))$ ; además, la función de restricción  $g := h \upharpoonright X : X \rightarrow h[X]$  es biyección y utilizando el inciso anterior se tiene que  $\Phi_h(\mathcal{A}) \upharpoonright h[X] = \Phi_h(\mathcal{A} \upharpoonright X) = \Phi_g(\mathcal{A} \upharpoonright X)$ . Por el último inciso de ??,  $\Phi_h(\mathcal{A}) \upharpoonright h[X]$  es maximal en  $h[X]$ . ■

Las siguientes propiedades son esperables, pero no por ello menos útiles. Es importante no desdeñar sus pruebas, pues en ellas, hay un par de sutilezas que deben ser atendidas.

**Proposición 1.3.8.** Sean  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{AD}(\omega)$  y  $X, Y \in [\omega]^\omega$  arbitrarios.

- i) Si  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ , entonces  $\mathcal{A} \upharpoonright X \subseteq \mathcal{B} \upharpoonright X$ .
- ii) Se da la igualdad  $(\mathcal{A} \upharpoonright Y) \upharpoonright X = \mathcal{A} \upharpoonright (Y \cap X)$ .
- iii) Si  $X \subseteq Y$ , entonces  $\mathcal{F}_X(\mathcal{A} \upharpoonright X) \subseteq \mathcal{F}_Y(\mathcal{A} \upharpoonright Y)$ .

**Demostración.** El punto (i) es claro.

(ii) Si  $(A \cap Y) \cap X \in (\mathcal{A} \upharpoonright Y) \upharpoonright X$ , entonces  $A \cap Y \in \mathcal{A} \upharpoonright Y$  y  $(A \cap Y) \cap X = A \cap (Y \cap X)$  es infinito; luego,  $A \in \mathcal{A}$  y  $(A \cap Y) \cap X \in \mathcal{A} \upharpoonright (Y \cap X)$ . Recíprocamente, si  $A \cap (Y \cap X) \in \mathcal{A} \upharpoonright (Y \cap X)$ , entonces  $A \in \mathcal{A}$  y  $A \cap (Y \cap X) = (A \cap Y) \cap X$  es infinito. Además,  $A \cap (Y \cap X) \subseteq A \cap Y$ , entonces  $A \cap Y$  es infinito, por lo que  $A \cap Y \in \mathcal{A} \upharpoonright Y$  y así  $A \cap (Y \cap X) = (A \cap Y) \cap X \in (\mathcal{A} \upharpoonright Y) \upharpoonright X$ .

(iii) Supóngase que  $X \subseteq Y$  y sea  $B \in \mathcal{F}_X(\mathcal{A} \upharpoonright X)$ . Entonces  $B \subseteq X \subseteq Y$  y existe  $H \subseteq \mathcal{A} \upharpoonright X$  finito tal que  $B \subseteq^* \bigcup H$ . Cada elemento  $A \cap X \in H$  es infinito y está contenido en  $A \cap Y$ , luego  $J := \{A \cap Y \mid A \cap X \in H\} \subseteq \mathcal{A} \upharpoonright Y$  es finito y  $B \subseteq^* \bigcup J$  y por lo tanto  $B \in \mathcal{F}_Y(\mathcal{A} \upharpoonright Y)$ . ■

Si bien se demostró, tras la ??, que la maximalidad de una familia implica la de cada una de sus trazas. La próxima observación muestra que la maximalidad de aquellas trazas tomadas sobre elementos del ideal generado no constituye una condición suficiente para concluir la maximalidad de la familia dada.



**Proposición 1.3.9.** Sean  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$  y  $X \in [\omega]^\omega$ . Entonces  $X \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$  si y sólo si la familia  $\mathcal{A} \restriction X$  es finita y maximal en  $X$ .

**Demostración.** Por el ??, basta mostrar que  $X \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$  si y sólo si  $X \in \mathcal{F}_X(\mathcal{A} \restriction X)$ . Dado lo demostrado en ??, la necesidad de tal equivalencia es inmediata. Ahora, si  $X \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$ , entonces  $X \subseteq^* \bigcup H$  para cierto  $H \in [\mathcal{A}^{<\omega}]$ . Luego  $X \subseteq^* X \cap \bigcup H$  y la finitud de  $H$  implica que:

$$\begin{aligned} X &\subseteq^* \{A \cap X \in [X]^{<\omega} \mid A \in H\} \cup \{A \cap X \in [X]^\omega \mid A \in H\} \\ &=^* \{A \cap X \in [X]^\omega \mid A \in H\}, \end{aligned}$$

probando que  $X \in \mathcal{F}_X(\mathcal{A} \restriction X)$ . ■

Como la familia vacía no es maximal, la Proposición anterior deja como reflexión que los únicos conjuntos que podrían ser testigos de que  $\mathcal{A}$  no es maximal, son aquellos que pertenecen a la parte positiva de  $\mathcal{A}$ .

**Corolario 1.3.10.** Si  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$ ,  $\{X \in [\omega]^\omega \mid \mathcal{A} \restriction X = \emptyset\} \subseteq \mathcal{F}^+(\mathcal{A})$ .

Si  $X \in [\omega]^\omega$  y  $\mathcal{A}$  es maximal, entonces  $X$  debe tener intersección infinita con algún elemento de  $\mathcal{A}$ ; los conjuntos en  $\mathcal{F}^+(\mathcal{A})$  tienen un comportamiento más fuerte, cada uno de ellos tiene intersección infinita con una infinidad de elementos de  $\mathcal{A}$ .

**Corolario 1.3.11.** Sea  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$ . Entonces  $\mathcal{A}$  es maximal si y sólo si para cada  $X \in \mathcal{F}^+(\mathcal{A})$  la familia  $\mathcal{A} \restriction X$  es infinita.

**Demostración.** Supóngase que  $\mathcal{A}$  es maximal y sea  $X \in \mathcal{F}^+(\mathcal{A})$ . Por la maximalidad de  $\mathcal{A}$ , se sigue de lo comentado tras la ?? que  $\mathcal{A} \restriction X$  es maximal en  $X$ . Por lo que, acorde a ??,  $\mathcal{A} \restriction X$  debe ser infinita.

Recíprocamente, si  $\mathcal{A}$  no es maximal, existe  $B \in [\omega]^\omega$  casi ajeno con cada elemento de  $\mathcal{A}$ . Así,  $\mathcal{A} \restriction B = \emptyset$  y se sigue de ??, que  $B \in \mathcal{F}^+(\mathcal{A})$ . ■

Como ninguna familia maximal es numerable, del Corolario anterior se desprende la siguiente condensación de todo lo comentado y demostrado tras ??.

**Corolario 1.3.12.** Sean  $N$  un conjunto numerable y  $\mathcal{A} \in \text{AD}(N)$ . Entonces  $\{X \in [N]^\omega \mid \mathcal{A} \restriction X \notin \text{MAD}(X) \vee \omega \leq |\mathcal{A} \restriction X|\} = \mathcal{F}_N^+(\mathcal{A})$ , y en caso de ser  $\mathcal{A}$  maximal,  $\{X \in [N]^\omega \mid \omega < |\mathcal{A} \restriction X|\} = \mathcal{F}_N^+(\mathcal{A})$  y más aún

## 1.4. Resultados en combinatoria infinita

### 1.4.1. Teorema de Simon

Se abordará en lo subsecuente un análisis simple sobre la combinatoria de las familias casi ajenas. Los próximos lemas configuran la antesala para enunciar el primer resultado importante de la sección, el Teorema de Simon (??).

**Lema 1.4.1.** Sea  $(X_n)_{n \in \omega} \subseteq [\omega]^\omega$  una sucesión  $\subseteq$ -decreciente. Entonces existe  $Y \in [X_0]^\omega$  tal que para cada  $k \in \omega$ , ocurre  $Y \subseteq^* X_k$ .

**Demostración.** Considérese la función  $f : \omega \rightarrow X_0$ , dada recursivamente por  $f(n) = \min(X_n \setminus f[n])$ . Nótese que  $f$  es inyectiva, si  $m < n$  entonces  $f(n) \notin f[n]$  y particularmente  $f(n) \neq f(m)$ . En consecuencia,  $Y := f[\omega] \in [X_0]^\omega$ .

Si  $k \in \omega$ , cada  $x = f(n) \in Y \setminus X_k$  debe satisfacer que  $n < k$ , dada la hipótesis sobre  $(X_n)_{n \in \omega}$ . Esto prueba que  $Y \setminus X_k \subseteq f[k] =^* \emptyset$ ; es decir,  $Y \subseteq^* X_k$ . ■

El siguiente resultado constata que la parte positiva de una familia es grande, en el sentido de que esta contiene la suficiente cantidad de elementos como para acotar inferiormente a cualquier  $\subseteq$ -cadena numerable contenida en ella.

**Lema 1.4.2** (Dokálková). Sean  $\mathcal{A} \in \text{MAD}(\omega)$  y  $(X_n)_{n \in \omega} \subseteq \mathcal{F}^+(\mathcal{A})$  una sucesión  $\subseteq$ -decreciente. Existe  $Y \in \mathcal{F}^+(\mathcal{A})$  tal que si  $n \in \omega$ , entonces  $Y \subseteq^* X_n$ .

**Demostración.** Por el ??, si  $n \in \omega$ ,  $H_n := \{A \in \mathcal{A} \mid A \cap X_n \neq^* \emptyset\}$  debe ser infinito. Para cada  $n \in \omega$  fíjese (AC) una función  $f_n : \mathcal{P}(H_n) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow H_n$  de elección; y defínase recursivamente  $B : \omega \rightarrow \mathcal{A}$  como  $B(n) = f(H_n \setminus B[n])$ .

Así,  $(\bigcup \{B(m) \mid m \geq n\} \cap X_n)_{n \in \omega}$  satisface las hipótesis del Lema previo. Efectivamente; si  $n \in \omega$ , entonces  $B(n) \in H_n$  y  $\bigcup \{B(m) \mid m \geq n\} \cap X_n \supseteq B(n) \cap X_n$  es infinito. Esta sucesión es  $\subseteq$ -decreciente, debido a que  $(X_n)_n \in \omega$  también lo es. Por lo tanto, existe  $Y \in [\omega]^\omega$  de manera que para cada  $k \in \omega$ :

$$Y \subseteq^* \bigcup \{B(m) \mid m \leq k\} \cap X_n \subseteq B(k) \cap X_k \subseteq X_k.$$

$Y$ , al ser  $Y$  infinito, se tiene que  $Y \cap B(k) \supseteq X \cap (B(k) \cap X_k)$  es infinito. Por lo tanto  $\mathcal{A} \restriction Y$  es infinita; siguiéndose del ?? que  $Y \in \mathcal{F}^+(\mathcal{A})$ . ■

El siguiente resultado fue demostrado en 1980 por Petr Simon [**SimonFrechet**] y como se verá más adelante (??), juega un papel fundamental en el estudio de la propiedad topológica de Fréchet.

#### Teorema 1.4.3 (Simon)

Para toda familia maximal e infinita  $\mathcal{A}$  existe  $Y \in \mathcal{F}^+(\mathcal{A})$  tal que  $\mathcal{A} \restriction Y$  es unión ajena de dos familias maximales en ninguna parte.

**Demostración.** Procédase por contradicción suponiendo que  $\mathcal{A} \in \text{MAD}(\omega)$  es una familia infinita tal que si  $X \in \mathcal{F}^+(\mathcal{A})$ ,  $\mathcal{A} \restriction X = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$  y  $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ , entonces alguna de las familias  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \text{AD}(X)$  es maximal en alguna parte.

Como  $\omega < |\mathcal{A}| \leq |2^\omega|$ , existe  $F \subseteq 2^\omega$  infinito y tal que  $\mathcal{A} = \{A_f \mid f \in F\}$ ; donde  $f \neq g$  implica  $A_f \neq A_g$ . Para cada  $(n, k) \in \omega \times 2$  defínase:

$$\mathcal{A}(n, k) = \{A_f \in \mathcal{A} \mid f(n) = k\}.$$

Nótese que para cualesquiera  $m \in \omega$  y  $X \in \mathcal{F}^+(\mathcal{A})$  ocurren simultáneamente  $\mathcal{A} \restriction X = \mathcal{A}(m, 0) \restriction X \cup \mathcal{A}(m, 1) \restriction X$  y  $\mathcal{A}(m, 0) \restriction X \cap \mathcal{A}(m, 1) \restriction X = \emptyset$ . Se sigue de la hipótesis la existencia (AC) de una función  $k : \omega \times \mathcal{F}^+(\mathcal{A}) \rightarrow 2$  tal que si  $(m, X) \in \text{dom}(k)$ , entonces  $\mathcal{A}(m, k(m, X)) \restriction X$  es maximal en alguna parte. Así mismo, existe una función  $j : \omega \times \mathcal{F}^+(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{F}_X^+(\mathcal{A}(m, k(m, X)) \restriction X)$  de manera que para cada  $(m, X) \in \text{dom}(j)$ :

$$(\mathcal{A}(m, k(m, X)) \restriction X) \restriction j(m, X) = \mathcal{A}(m, k(m, X)) \restriction j(m, X) \in \text{MAD}(j(m, X)).$$

Defínase recursivamente la sucesión  $(X_n)_{n \in \omega}$  como  $X_0 = \omega$ ; y para cada  $n \in \omega$ ,  $X_{n+1} = j(n, X_n)$ . Si  $n \in \omega$ , se da  $X_{n+1} \in \mathcal{F}_{X_n}^+(\mathcal{A}(n, k(n, X_n)) \upharpoonright X_n) \subseteq \mathcal{F}^+(\mathcal{A})$  (véase ??); y además, por la definición de  $j$ :

$$\mathcal{A}(n, k(n, X_n)) \upharpoonright X_{n+1} \in \text{MAD}(X_{n+1});$$

a consecuencia del ello  $X_{n+1} \subseteq X_n$ . Aplicando el Lema de Dokálková, se obtiene un conjunto  $Y \in \mathcal{F}^+(\mathcal{A})$  casi contenido en cada  $X_n$ .

Por ??,  $\mathcal{A} \upharpoonright Y$  es infinita; y por ello, existen  $g \in F$  y  $m \in \omega$  tales que  $g(m) \neq k(m, X_m)$  y  $A_g \cap Y$  es infinito. Puesto que  $Y \setminus X_{m+1} =^* \emptyset$ , es necesario que  $A_g \cap X_{m+1} \subseteq X_{m+1}$  sea infinito y como  $\mathcal{A}(m, k(m, X_m)) \upharpoonright X_{m+1} \in \text{MAD}(X_{m+1})$ , existe  $A_f \in \mathcal{A}(m, k(m, X_m))$  tal que  $(A_g \cap X_{m+1}) \cap (A_f \cap X_{m+1}) \neq^* \emptyset$ . Pero, a razón de que  $f(m) = k(m, X_m) \neq g(m)$ , se tiene que  $f \neq g$  y  $A_f \cap A_g =^* \emptyset$ , lo cual es un absurdo a lo previamente establecido. ■

La familia  $\mathcal{A} \upharpoonright Y$  provista por el Teorema de Simon es maximal e infinita necesariamente. Así que, tomando en cualquier  $\mathcal{A} \in \text{MAD}(\omega)$  infinita se tiene:

**Corolario 1.4.4.** *Existe una familia maximal infinita que es unión ajena de dos familias maximales en ninguna parte.*

### 1.4.2. Grietas y familias de Luzin

La teoría de grietas («gaps», en inglés) es extensa, y su estudio se remonta a los trabajos de Felix Hausdorff. En lo que sigue nos restringiremos a analizar grietas en  $\omega$ . No obstante, a partir de la ?? es inmediato comprobar que la definición que presentamos a continuación se extiende sin dificultad a grietas sobre cualquier conjunto numerable  $N$ .

**Definición 1.4.5.** *Una **grieta** es un par ordenado  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \text{AD}(\omega) \times \text{AD}(\omega)$  tal que  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \in \text{AD}(\omega)$ .*

i) *Se suele decir que  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  **contiene a**  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ .*

- ii) Un subconjunto  $D \subseteq \omega$  es **separador** de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  si y sólo si para cualesquiera  $A \in \mathcal{A}$  y  $B \in \mathcal{B}$  se tiene que  $A \subseteq^* D$  y  $B \cap D =^* \emptyset$ .
- iii)  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  está **separada** cuando existe un separador de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ .

En términos de la definición anterior, es inmediato que si  $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$  es una grieta separada,  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$  y  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$ , entonces la grieta  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  está separada. Además, cuando  $D$  es separador de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , el conjunto  $\omega \setminus D$  es separador de  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{A}$ ; por ello,  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  está separada si y sólo si  $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$  está separada. Obsérvese además que seguido del ??:

**Proposición 1.4.6.** Para toda grieta  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ,  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}^+(\mathcal{B})$  y  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}^+(\mathcal{A})$ .

Al considerar una familia casi ajena, surgen preguntas en relación al comportamiento de las grietas contenidas en ella; en tal aspecto se mueve la siguiente definición.

**Definición 1.4.7.** Una familia  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$  se dice:

- i) **Separable** (o **normal**) cuando todas las grietas  $(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \in \mathcal{P}(\mathcal{A})^2$  están separadas.
- ii) **Parcialmente separable** cuando para toda grieta  $(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \in ([\mathcal{A}]^{\omega_1})^2$  existen  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  tales que  $(\mathcal{B}', \mathcal{C}')$  está separada.
- iii) **Inseparable** cuando ninguna grieta  $(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \in ([\mathcal{A}]^{\omega_1})^2$  está separada.

Se obtiene el siguiente comportamiento; la demostración del mismo puede ser realizada con lo desarrollado hasta el momento, sin embargo, dejaremos este resultado como una consecuencia del estudio de los  $\Psi$ -espacios (véase ??)

**Ejemplo 1.4.8.** Sea  $\mathcal{C} \in \text{AD}(\omega)$ . Si  $|\mathcal{C}| \leq \omega$ , entonces  $\mathcal{C}$  es separable. Y, si  $\mathcal{C}$  más que numerable y separable, entonces  $\omega < |\mathcal{C}| < \mathfrak{c}$  y  $\mathcal{C} \notin \text{MAD}(\omega)$ .

Obsérvese ahora que si  $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  es una grieta y  $\bigcup \mathcal{B} \cap \bigcup \mathcal{C}$  es finito, entonces el conjunto  $\bigcup \mathcal{B} \subseteq \omega$  es separador de  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$ . Se puede caracterizar la inseparabilidad de una familia mediante lo siguiente:

**Lema 1.4.9.** *Sea  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$ , entonces  $\mathcal{A}$  es inseparable si y sólo si para cualesquiera  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in [\mathcal{A}]^{\omega_1}$  ajenos,  $\bigcup \mathcal{B} \cap \bigcup \mathcal{C}$  es infinito.*

**Demostración.** Por la discusión previa, basta sólo probar la necesidad.

Por contraposición, supóngase que  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in [\mathcal{A}]^{\omega_1}$  son tales que existe  $D \subseteq \omega$ , separador de  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$ . Entonces las asignaciones  $\mathcal{B} \rightarrow \omega$  y  $\mathcal{C} \rightarrow \omega$ ; dadas por  $b \mapsto \max(b \setminus D) + 1$  y  $c \mapsto \max(c \cap D) + 1$  están bien definidas. Pero en vista de que  $|\mathcal{B}| = |\mathcal{C}| = \omega_1$ , estas no pueden ser inyectivas, y existen  $m, n \in \omega$  de modo que  $\mathcal{B}' := \{b \in \mathcal{B} \mid b \setminus D \subseteq m\}$  y  $\mathcal{C}' := \{c \in \mathcal{C} \mid c \cap D \subseteq n\}$  tienen tamaño  $\omega_1$ .

Además  $\bigcup \mathcal{B}' \setminus D \subseteq m =^* \emptyset$  y  $\bigcup \mathcal{C}' \cap D \subseteq n =^* \emptyset$ , por lo que  $\bigcup \mathcal{B} \subseteq^* D$ ,  $\bigcup \mathcal{C} \subseteq^* \omega \setminus D$ , y así,  $\bigcup \mathcal{B}' \cap \bigcup \mathcal{C}' \subseteq^* D \cap (\omega \setminus D) = \emptyset$ . ■

En la década de 1910, el analista Nikolai Luzin introdujo ciertos subconjuntos especiales de  $\mathbb{R}$ , mismos que hoy llevan su nombre. Y pese a que el estudio de aquellos objetos es relativo a la teoría descriptiva de conjuntos, las analogías entre sus propiedades y las de las familias que a continuación presentamos, son suficiente razón como para que estas lleven el subfijo «de Luzin».

**Definición 1.4.10.** *Una familia  $\mathcal{A}$  es **de Luzin** cuando existen  $X \in [\omega_1]^{\omega_1}$  y una enumeración  $\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in X\}$  tales que para todo  $(\alpha, n) \in \omega_1 \times \omega$ , el conjunto  $\{\beta < \alpha \mid A_\alpha \cap A_\beta \subseteq n\}$  es finito.*

Una de las ideas centrales detrás de que  $\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$  sea de Luzin es que; fijando  $\alpha \in \omega_1$ , para cada  $D \subseteq \alpha$  infinito,  $A_\alpha \cap \bigcup \{A_\beta \mid \beta \in D\}$  es infinito. Esto se debe a que si  $n \in \omega$ , entonces  $D \setminus \{\beta < \alpha \mid A_\alpha \cap A_\beta \subseteq n\}$  es infinito, particularmente no vacío. Como consecuencia:

**Proposición 1.4.11.** *Cualquier familia Luzin es inseparable.*

**Demostración.** Sean  $\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$  una familia de Luzin y supóngase que  $\mathcal{B} = \{A_\alpha \mid \alpha \in B\}$ ,  $\mathcal{C} = \{A_\alpha \mid \alpha \in C\} \subseteq \mathcal{A}$  son no numerables y ajenos. Como  $C$  es infinito, existe  $\alpha \in \omega_1$  de manera que  $C \cap \alpha$  es infinito. Nótese que  $B$  es cofinal en  $\omega_1$ , por ser  $\omega_1$  regular; así que sin pérdida de generalidad, supóngase  $\alpha \in B$ .

Dados los comentarios previos a esta demostración,  $A_\alpha \cap \bigcup \{A_\beta \mid \beta \in C \cap \alpha\}$  es infinito, demostrando que  $\bigcup \mathcal{B} \cap \bigcup \mathcal{C}$  es infinito, y se sigue del ??, que  $\mathcal{A}$  es inseparable. ■

La existencia de familias de Luzin no es tan inucitada, resulta que cualquier familia infinita trae consigo una extensión que es de Luzin.

**Proposición 1.4.12.** *Toda familia casi ajena numerable se extiende a una familia de Luzin. Particularmente, existe una familia de Luzin.*

**Demostración.** Sea  $\mathcal{B} = \{A_n \mid n \in \omega\} \in \text{AD}(\omega)$  numerable y nótese que para cualesquiera  $m, n \in \omega$ , el conjunto  $\{k < m \mid A_m \cap A_k \subseteq n\}$  es finito.

Por recursión sobre  $\omega_1 \setminus \omega$ , sea  $\gamma \in \omega_1 \setminus \omega$  y supóngase  $\{A_\alpha \mid \alpha \in \gamma\}$  es una familia tal que, si  $\alpha < \gamma$  y  $n \in \omega$ , el conjunto  $\{\beta < \alpha \mid A_\alpha \cap A_\beta \subseteq n\}$  es finito.

Como  $\gamma \in \omega \setminus \omega_1$ ,  $\gamma$  es numerable y se puede enumerar  $\{A_\alpha \mid \alpha \in \gamma\}$  como  $\{B_n \mid n \in \omega\}$ . Por ser tal, una familia casi ajena, cada conjunto  $C_n := B_n \setminus \bigcup \{B_j \mid j < n\}$  es infinito (corrobórese ésto en la demostración de ??). Para cada  $n \in \omega$  fíjese  $a_n \in [C_n]^n$  y defínase:

$$A_\gamma := \bigcup \{a_m \mid m \in \omega\}$$

Nótese que si  $n \neq m$ , entonces  $a_n \cap a_m = \emptyset$ . De este modo, si  $n \in \omega$  es cualquiera, resulta que  $A_\gamma \cap B_n = a_n \cap B_n = a_n$  es finito. Más aún, como  $a_n$  tiene exatadamente  $n$  elementos,  $n \leq \text{máx}(A_n)$ ; y consecuentemente, si  $m \in \omega$  y  $A_\gamma \cap B_n \subseteq m$ , entonces  $n \leq m$ .

Lo anterior prueba, no sólo que  $\{A_\alpha \mid \alpha \leq \gamma\}$  es familia casi ajena, sino que para cualesquiera  $\alpha \leq \gamma$  y  $n \in \omega$ , el conjunto  $\{\beta < \alpha \mid A_\alpha \cap A_\beta \subseteq n\}$  es finito. Lo cual finaliza la construcción por recursión de los conjuntos  $A_\alpha$  (con  $\omega \leq \alpha < \omega_1$ ); es claro que para  $\mathcal{A} := \{A_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$  es una familia Luzin que extiende a  $\mathcal{B}$ . ■

Los siguientes objetos son una suerte de modificación a la ??; mientras que las familias de Luzin son «unidimensionales», en el sentido de que están indexadas por  $\omega_1$ ; las grietas de Luzin son « $n$ -dimensionales»:

**Definición 1.4.13.** Sea  $n \in \omega \setminus 2$ . Una  **$n$ -grieta de Luzin** es una sucesión finita  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I} \subseteq \text{AD}(\omega)$  cuya union es una familia casi ajena; y, tales que existen  $X \in [\omega_1]^{\omega_1}$  y  $m \in \omega$ , de modo que cada  $\mathcal{A}_i$  se puede enumerar como  $\{A_\alpha^i \mid \alpha \in X\}$  de manera que:

i) Para cualesquiera  $i, j \in n$  distintos y  $\alpha \in X$ , se da  $A_\alpha^i \cap A_\alpha^j \subseteq m$ .

ii) Si  $\alpha, \beta \in X$  y  $\alpha \neq \beta$ , entonces  $\bigcup \{A_\alpha^i \cap A_\beta^j \mid i, j \in n \wedge i \neq j\} \not\subseteq m$ .

A los conjuntos  $X$  y  $m$  se les llama testigos de que  $(\mathcal{A}_i \mid i \in I)$  es  $n$ -grieta de Luzin. Una 2-grieta de Luzin se denomina simplemente **grieta de Luzin**.

Las  $n$ -grietas de Luzin poseen un comportamiento en común a las familias Luzin, el comentado posteriormente a la ??. Este comportamiento similar es la razón de que, según la literatura que se consulte, a veces se confunden los términos «familia de Luzin» y «grieta de Luzin».

**Lema 1.4.14.** Sea  $(\mathcal{A}_i \mid i \in I)$  una  $n$ -grieta de Luzin con testigos  $X$  y  $m$ . Para cada  $Y \subseteq X$  no numerable, existe  $Y' \subseteq Y$  no numerable tal que para cualesquiera  $\alpha, \beta \in Y'$  distintos,  $\bigcup \{A_\alpha^i \cap A_\beta^j \mid i, j \in n \wedge i \neq j\}$  es infinito.

**Demostración.** Sea  $k \in \omega \setminus m$ . Para cada  $i \in n$  sea  $f_i : Y \rightarrow \omega$  dada por  $f_i(\alpha) = A_\alpha^i \cap k$ . Para cada  $S \in [X]^{>\omega}$  y  $g : Z \rightarrow \omega$ ,  $g$  no es inyectiva; fíjese entonces (AC) un conjunto  $S(g) \subseteq S$  no numerable para el cual  $g \upharpoonright A_g$  es constante. Definase la sucesión finita  $(Y_i)_{i \in n}$  de manera recursiva como  $Y_0 := Y$ ; y, para cada  $j \in n$ ,  $Y_{j+1} := S(f \upharpoonright Y_j) \subseteq Y_j$ .

Entonces el conjunto  $Y' := \bigcap \{Y_i \mid i \in n\} = Y_{\cup n}$  es un subconjunto no numerable de  $Y$  tal que para cada  $i \in n$ ,  $f_i$  es constante en  $Y'$ . Sean  $\alpha, \beta \in Y'$  distintos, como  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  es  $n$ -grieta de Luzin, existen  $i, j \in n$  diferentes de manera que  $A_\alpha^i \cap A_\beta^j \not\subseteq m$ . Como  $f_i$  es constante en  $Y'$ , entonces  $A_\alpha^i \cap k = A_\beta^i \cap k$ .



Como además  $A_\beta^i \cap A_\beta^j \subseteq m \subseteq k$ , resulta necesario que  $A_\alpha^i \cap A_\beta^j \not\subseteq k$ . Así, en virtud de la arbitrariedad del natural  $k$ , se concluye que el siguiente conjunto debe ser infinito:  $\bigcup \{A_\alpha^i \cap A_\beta^j \mid i, j \in n \wedge i \neq j\}$ . ■

A razón de la proposición anterior se desprende que; así como ninguna familia parcialmente separable puede ser de Luzin, resulta que:

**Corolario 1.4.15.** *Si una familia casi ajena es parcialmente separable, no puede contener ninguna  $n$ -grieta de Luzin.*

**Demostración.** Sea  $(\mathcal{A}_i \mid i \in I)$  una  $n$ - grieta de Luzin con testigos  $X$  y  $m$ . Si  $\mathcal{A} \supseteq \bigcup \{\mathcal{A}_i \mid i \in n\}$ , entonces dado el Lema previo a esta demostración, para cualesquiera  $i, j \in n$  distintos, existen  $\alpha, \beta \in X$  diferentes de modo que el conjunto  $\bigcup \{A_\alpha^i \cap A_\beta^j \mid i, j \in n \wedge i \neq j\}$  es infinito. Es decir,  $\bigcup \mathcal{A}_i \cap \bigcup \mathcal{A}_j$  es infinito, siguiéndose la conclusión automáticamente de ??.

La siguiente Proposición deja en claro la labor de «debilitamiento» que cumplen las  $n$ -grietas de Luzin respecto a las familias de Luzin; cualquiera de estas últimas contiene siempre una 2-grieta de Luzin. La prueba del hecho en cuestión requiere invocar el *Lema de Fodor* (prelim) y el hecho de que siempre existen funciones ordinales como las solicitadas en la subsecuente prueba.

**Proposición 1.4.16.** *Toda familia de Luzin contiene una grieta de Luzin. En consecuencia, existe una grieta de Luzin.*

**Demostración.** Sea  $\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$  una familia de Luzin y  $f, g : \omega_1 \rightarrow \omega_1$  tales que si  $\beta < \alpha < \omega_1$ , entonces  $g(\beta) < f(\beta) < g(\alpha)$ .

Como  $\omega_1 \setminus \omega$  es estacionario en  $\omega_1$  y la asignación  $j : \omega_1 \setminus \omega \rightarrow \omega_1$ ; dada por  $j(\alpha) = \max(A_{f(\alpha)} \cap A_{g(\alpha)}) + 1$ , es regresiva, en virtud del Lema de Fodor, existen  $S \subseteq \omega_1 \setminus \omega$  estacionario en  $\omega_1$  y un natural  $m$  tales que  $j[S] \subseteq \{m\}$ .

Ahora, si  $\beta < \alpha$ , entonces debido a la hipótesis  $f(\beta) < g(\alpha)$ , de modo que  $f[\{\beta < \alpha \mid A_{f(\beta)} \cap A_{g(\alpha)} \subseteq m\}] \subseteq \{\gamma < g(\alpha) \mid A_{g(\alpha)} \subseteq m\}$ . Como  $\mathcal{A}$  es de Luzin y  $f$  es inyectiva (por ser estrictamente creciente),  $\{\beta < \alpha \mid A_{f(\beta)} \cap A_{g(\alpha)} \subseteq m\}$  es

finito, permitiendo la buena definición de  $l : S \rightarrow \omega_1$ , definida por medio de la siguiente regla de correspondencia:

$$l(\alpha) = \begin{cases} 0 & ; \forall \gamma < \alpha (A_{f(\gamma)} \cap A_{g(\alpha)} \not\subseteq m) \\ \max\{\gamma < \alpha \mid A_{f(\gamma)} \cap A_{g(\alpha)} \subseteq m\} & ; \text{ otro caso} \end{cases}$$

Como  $0 \notin S$ ,  $l$  es regresiva; nuevamente, del Lema de Fodor, se sigue la existencia de un conjunto  $X \subseteq S$ , estacionario en  $\omega_1$ , tal que  $l$  es constante en  $X$ . Así, para cada  $\alpha \in X$  se tiene que  $m = \max(A_{f(\alpha)} \cap A_{f(\alpha)}) + 1$  y en consecuencia  $A_{f(\alpha)} \cap A_{f(\alpha)} \subseteq m$ , pues  $X \subseteq S$  y  $j[S] \subseteq \{m\}$ .

Ahora, supóngase que  $\beta, \alpha \in X$  y  $\beta < \alpha$ , como  $l$  es constante en  $X$ ,  $l(\alpha) = l(\beta)$ . Si este último valor es cero, entonces  $A_{f(\beta)} \cap A_{g(\alpha)} \not\subseteq m$ . En caso contrario:

$$0 \neq l(\alpha) = l(\beta) < \beta < \alpha,$$

y como  $l(\alpha) < \beta < \alpha$ , la definición de  $l$  obliga a que  $A_{f(\beta)} \cap A_{g(\alpha)} \not\subseteq m$ . Lo anterior demuestra que  $(\{A_{f(\alpha)} \mid \alpha \in X\}, \{A_{g(\alpha)} \mid \alpha \in X\})$  es una grieta de Luzin (con testigos  $X$  y  $m$ ) contenida en  $\mathcal{A}$ . ■

### 1.4.3. Lema de Solovay

**Definición 1.4.17.** Sea  $\mathcal{A}$  una familia casi ajena. El **orden basado en**  $\mathcal{A}$  es el par  $\mathbb{P}_{\mathcal{A}} := ([\omega]^{<\omega} \times [\mathcal{A}]^{<\omega}, \leq_{\mathcal{A}})$ ; donde:  $(p, P) \leq_{\mathcal{A}} (h, H)$  si y sólo si  $h \subseteq p$ ,  $H \subseteq P$  y  $p \setminus h \subseteq \omega \setminus \bigcup H$ .

Cuando el contexto sea claro, se escribirá  $\leq$  en vez de  $\leq_{\mathcal{A}}$ .

Habrà de verificarse que el orden basado en  $\mathcal{A}$  es, en efecto, un orden parcial. Claramente es una relación reflexiva y antisimétrica. Ahora, si  $(p, P) \leq (h, H)$  y  $(h, H) \leq (k, K)$ , es inmediato a la definición de  $\leq_{\mathcal{A}}$  que  $k \subseteq h \subseteq p$  y  $K \subseteq H \subseteq P$ ; en consecuencia  $k \subseteq p$  y  $K \subseteq P$ . Además  $p \setminus h \subseteq \omega \setminus \bigcup H$  y  $h \setminus k \subseteq \omega \setminus \bigcup K$ , resultando en que:

$$p \setminus k \subseteq (h \setminus k) \cup (p \setminus h) \subseteq (\omega \setminus \bigcup K) \cup (\omega \setminus \bigcup H);$$

lo cual demuestra  $p \setminus k \subseteq \omega \setminus \bigcup K$ . Luego  $\leq$  es transitiva, y con ello, orden parcial.

En términos sumamente intuitivos,  $(p, P) \leq (h, H)$  significa que « $h$  se extiende a  $p$  y  $H$  a  $P$ ». Así, conforme  $H \subseteq \mathcal{A}$  «crece», se aproxima a  $\mathcal{A}$ . Dado que, conforme  $h$  «crece», este se «aproxima» a un subconjunto casi ajeno con  $\bigcup H$ ; y eventualmente, se formará un subconjunto casi ajeno con  $\bigcup \mathcal{A}$ .

Para dar una formalización de la intuición recién dada, comenzaremos definiendo los siguientes objetos para todo lo que resta de la sección.

- i) Para cada  $a \in \mathcal{A}$ ,  $D_a := \{(p, P) \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}} \mid a \in P\}$ .
- ii) Si  $G \subseteq \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ , se define  $D_G := \bigcup \{h \subseteq \omega \mid \exists H \in [\omega]^\omega ((h, H) \in G)\}$ .

El siguiente Lema indica por qué la existencia de ciertos filtros en  $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$  genera conjuntos casi ajenos con cada elemento de  $\mathcal{A}$ ; es decir, se implica bajo esta condición, la no maximalidad de la familia.

**Lema 1.4.18.** *Sean  $\mathcal{A}$  una familia casi ajena, y  $G$  un filtro de  $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ , entonces para cada  $a \in \mathcal{A}$ :*

- i)  $D_a$  es denso en  $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ .
- ii) Si  $G \cap D_a \neq \emptyset$ ; entonces,  $D_G \cap a$  es finito.

**Demostración.** (i) Si  $a \in \mathcal{A}$  y  $(p, P) \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$  son elementos arbitrarios, entonces  $(p, P \cup \{a\}) \in D_a$  y además, por ??,  $(p, P \cup \{a\}) \leq (p, P)$ .

(ii) Supóngase que  $(p, P) \in G \cap D_a$  y sea  $x \in D_G \cap a$  cualquier elemento. Por definición de  $D_G$ , existe  $(h, H) \in G$  de modo que  $x \in h$ . Y por ser  $G$  filtro,  $(k, K) \leq (p, P), (h, H)$  para cierto  $(k, K) \in G$ . De esto, particularmente se obtiene que  $h \subseteq k$ ,  $k \setminus p \subseteq \omega \setminus \bigcup P$ .

Ahora, como  $(p, P) \in D_a$ , entonces como  $a \in P$ . En consecuencia, se tiene que  $x \in \bigcup P$ . Finalmente,  $x \in h \subseteq k$ , así que  $x \in k \cap \bigcup P$ , lo cual obliga a que  $x \in p$ . Por tanto  $D_G \cap a \subseteq p =^* \emptyset$ . ■

Se tiene entonces lo subsecuente de forma inmediata:

**Corolario 1.4.19.** Sean  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$  y  $\mathcal{D} := \{D_a \mid a \in \mathcal{A}\}$ . Si existe un filtro  $\mathcal{D}$ -genérico,  $\mathcal{A}$  no es maximal.

Debido a lo recién mostrado, de tener  $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$  la c.c.c. (prelim), se satisfaría que  $\text{MA}(|\mathcal{A}|)$  implica  $\mathcal{A} \notin \text{MAD}(\omega)$ . En tal caso, se estaría probando que si  $\text{MA}(\kappa)$  es cierto, entonces  $\kappa < \mathfrak{a}$ ; por ello,  $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{a}$ .

Y en efecto, si  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$  es anticadena y  $(p, P), (h, H) \in \mathcal{A}$ , se tiene  $p \neq h$ ; sino  $(p, P \cup H) \leq (p, P), (h, H)$  y  $\mathcal{A}$  dejaría de ser anticadena. En consecuencia  $|\mathcal{A}| \leq |[\omega]^{<\omega}| = \aleph_0$  y  $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$  tiene la c.c.c.

**Corolario 1.4.20.** Si  $\kappa \geq \omega$  y  $\text{MA}(\kappa)$ , entonces  $\kappa < \mathfrak{a}$ ; así que:

- i)  $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{a}$ .
- ii) Bajo  $\text{MA} + \neg \text{CH}$  se tiene  $\mathfrak{m} = \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ .
- iii) ZFC no demuestra la implicación  $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} \rightarrow \text{CH}$ .

**Demostración.** Los puntos (i) y (ii) son inmediatos. Para (iii) únicamente basta recordar que  $\text{MA} + \neg \text{CH}$  es consistente con ZFC (consúltase [kunenSet]). ■

El ?? es una immediatez, dada toda su discusión previa. Una versión bastante más fortalecida de este, es el siguiente resultado mostrado por Robert Solovay.

**Lema 1.4.21** (Solovay). Sean  $\kappa$  un cardinal con  $\omega \leq \kappa < \mathfrak{c}$  y  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  una grieta tal que  $|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}| \leq \kappa$ . Bajo  $\text{MA}(\kappa)$ ; existe  $D \subseteq \mathcal{A}$  de modo que para cualesquiera  $A \in \mathcal{A}$  y  $b \in \mathcal{B}$  ocurre  $a \cap D =^* \emptyset$  y  $b \cap D \neq^* \emptyset$ .

**Demostración.** Supóngase  $\text{MA}(\kappa)$  y para cada  $(b, n) \in \mathcal{B} \times \omega$ , defínase el conjunto  $D(b, n) := \{(h, H) \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}} \mid h \cap b \not\subseteq n\}$ .

Sea  $(p, P) \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ ; por la ??  $b \notin \mathcal{I}(\mathcal{A})$ , luego  $b \setminus \bigcup P$  es infinito. Por ello, existe  $m \in \omega$  de modo que  $n + 1 \in m$  y  $m \in b \setminus \bigcup P \subseteq \omega \setminus \bigcup P$ ; así,  $p \cup \{m\}$  es finito,  $(p \cup \{m\}, P) \in D(b, n)$  y  $(p \cup \{m\}, P) \leq_{\mathcal{A}} (p, P)$ . Por lo tanto, cada  $D(b, n)$  es denso en  $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ .

Sea  $\mathcal{D} = \{D(b, n) \mid (b, n) \in \mathcal{B} \times \omega\} \cup \{D_a \mid a \in \mathcal{A}\}$  y obsérvese que  $\mathcal{D}$  es una familia de densos de  $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$  de cardinalidad menor o igual a  $\kappa$ . Como  $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$  es c.c.c., de  $\text{MA}(\kappa)$  se desprende la existencia de un filtro  $G$  en  $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ ,  $\mathcal{D}$ -genérico. Se afirma que  $D_G$  es el conjunto buscado.

En efecto, por ?? se tiene que para cada  $a \in \mathcal{A}$ , el conjunto  $D_G \cap a$  es finito. Ahora, si  $b \in \mathcal{B}$  es cualquiera, para cada  $n \in \omega$  existe  $(k, K) \in G \cap D(b, n)$ ; y en consecuencia  $D_G \cap b \not\subseteq n$  (pues  $h \cap b \not\subseteq n$ ). Por lo que el conjunto  $D_G \cap b$  no puede ser finito. ■

Es deseable que la conclusión del Lema de Solovay fuese que la grieta  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  está separada; sin embargo tal formulación desemboca en un resultado falaz. Suponiendo  $\text{MA} + \neg \text{CH}$ , la existencia de una familia de Luzin (véase ??) sería testigo de tal falsedad; pues esta tiene tamaño  $\aleph_1 < \mathfrak{m}$  y es inseparable.

Como «breviario cultural», cuando una grieta  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  satisface la conclusión de ?? para cierto subconjunto  $D \subseteq \omega$ , se dirá que está *débilmente separada* (siguiendo la terminología de [hruAlmost]).

La siguiente es una aplicación típica del lema de Solovay, una prueba sencilla de la consistencia, respecto a ZFC, del enunciado  $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$  (la moderadamente famosa *Hipótesis de Jones*). Como se podrá verificar en secciones futuras de este escrito, tanto la hipótesis de Jones, como su negación, tendrán repercusiones en el comportamiento topológico de los  $\Psi$ -espacios; especialmente, en la relación que estos guardan con la Conjetura de Moore (véase ??).

Aprovechamos para mencionar una última aplicación «conjuntista» de la combinatoria de las familias casi ajenas; a través de ellas, se puede mostrar la consistencia de la Hipótesis de Jones con ZFC.

**Corolario 1.4.22.** *Sea  $\kappa$  un cardinal con  $\omega \leq \kappa < \mathfrak{c}$ , entonces bajo  $\text{MA}(\kappa)$ , se tiene  $2^\kappa = \mathfrak{c}$ .*

*Consecuentemente, es consistente con ZFC que  $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$*

**Demostración.** Sea  $\kappa$  un cardinal con  $\omega \leq \kappa < \mathfrak{c}$  y supóngase  $\text{MA}(\kappa)$ . Tomando en cuenta ??, fíjese una familia casi ajena  $\mathcal{A}$  con  $|\mathcal{A}| = \kappa$  y defínase la función  $f : \mathcal{P}(\omega) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A})$  como  $f(X) = \{b \in \mathcal{A} \mid b \cap X =^* \emptyset\}$ .

Si  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  es cualquiera, entonces  $|\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}|, |\mathcal{B}| \leq \kappa$  y por el Lema de Solovay (??) se concluye la existencia de un separador  $D \subseteq \omega$  para  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}$ . Esto resulta en que  $f(D) = \{b \in \mathcal{A} \mid b \cap X =^* \emptyset\} = \mathcal{B}$ . Luego  $f$  es sobreyectiva y  $\mathfrak{c} \geq 2^\kappa$ . Como además  $\kappa \geq \aleph_0$ , entonces  $2^\kappa \geq 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ .

Para la segunda parte, es suficiente notar que  $\text{MA} + \neg \text{CH}$  es consistente con ZFC, y que a partir de ellos se concluye  $\text{MA}(\aleph_1)$  y  $\omega \leq \aleph_1 < \mathfrak{c}$ . ■

## 2 Espacios de Isbell-Mrówka

Cada  $\Psi$ -espacio, denotado por  $\Psi(\mathcal{A})$ , está completamente determinado por una familia de subconjuntos  $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ . Estos espacios cuentan con un lugar privilegiado en la topología de conjuntos; quizás, el mayor motivo de ello es su versatilidad para la búsqueda de ejemplos. Esta virtud tiene por razón a las múltiples «traducciones» que existen entre los invariantes topológicos de  $\Psi(\mathcal{A})$  y las propiedades que tiene la familia  $\mathcal{A}$  como conjunto.

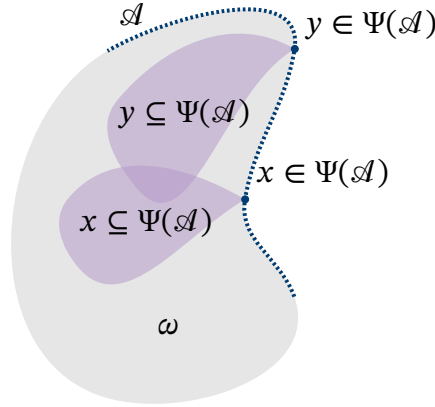
En este capítulo se definirá la topología de  $\Psi(\mathcal{A})$  y se analizarán sus propiedades más básicas. Se probarán equivalencias para: su metrizabilidad en relación al tamaño de  $\mathcal{A}$ , la compacidad de sus subespacios a través del ideal  $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ , su pseudocompacidad en términos de la maximalidad de  $\mathcal{A}$ , entre otras propiedades topológicas. En adición a lo anterior, se probará que los únicos espacios infinitos, de Hausdorff, separables y hereditariamente localmente compactos, son (salvo homeomorfismos) los espacios de Mrówka; esto es, el Teorema de Kannan y Rajagopalan.

### 2.1. $\Psi$ -espacios y caracterizaciones elementales

Una forma amigable de «visualizar» a los  $\Psi$ -espacios es concibiéndolos como una generalización al espacio de ordinales  $X = \omega + 1$ , este se estructura de forma que el subespacio  $\omega \subseteq X$  es denso, discreto y se acumula «hacia» el punto  $\omega \in X$ . Los espacios  $\Psi(\mathcal{A})$  tienen por conjunto subyacente a  $\omega \cup \mathcal{A}$  y, en un sentido puramente intuitivo, se puede describir su topología de la siguiente manera: el subconjunto  $\omega$  es una «masa» densa y discreta, pero, se acumula en «direcciones» independientes entre sí, una por cada elemento en  $\mathcal{A}$ . Cada  $x \in \mathcal{A}$ , pensado como subespacio de  $\Psi(\mathcal{A})$ , forma una sucesión convergente al punto  $x \in \Psi(\mathcal{A})$ .

Para conseguir el comportamiento anterior, bastará considerar que un subconjunto  $U$  de  $\Psi(\mathcal{A}) = \omega \cup \mathcal{A}$  es abierto si y solamente si casi contiene a sus elementos que estén en  $\mathcal{A}$ . De esta manera, cuando  $x \in \mathcal{A}$  pertenezca a un

abierto  $U$ , se tendrá  $x \subseteq^* U$ : y así  $x$  como subconjunto del espacio, convergerá a  $x$  como punto del espacio.



**Figura 2.1.1:** Imagen intuitiva de  $\Psi(\mathcal{A})$ .

Es fundamental notar la importancia de que  $\omega \cap \mathcal{A}$  sea vacía. Pese a que en general, si  $N$  es un conjunto numerable arbitrario y  $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ , no hay garantía de que  $N \cap \mathcal{A} = \emptyset$ ; utilizando las biyecciones  $\Phi_h$ , es posible trasladar la familia  $\mathcal{A}$  hacia una familia sobre  $\omega$  que tenga «las mismas propiedades». Por ello se convendrá, sin perder generalidad, lo que sigue:

**Consideración 2.1.2.** Cuando  $N$  sea un conjunto numerable y  $\mathcal{A} \subseteq [N]^\omega$ , a partir de este momento, se asumirá siempre que  $N \cap \mathcal{A} = \emptyset$ .

Bajo la consideración previa, para cualquier conjunto numerable  $N$  y familia de subconjuntos  $\mathcal{A} \subseteq [N]^\omega$ , se define la colección:

$$\mathcal{T}_{N,\mathcal{A}} := \{U \subseteq N \cup \mathcal{A} \mid \forall x \in U \cap \mathcal{A} (x \subseteq^* U)\}. \quad (2.1)$$

Tal colección forma una topología para  $N \cup \mathcal{A}$ . Evidentemente  $\emptyset$  y  $N \cup \mathcal{A}$  son elementos de  $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ . Si  $U, V \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$  y  $x \in (U \cap V) \cap \mathcal{A}$ , entonces  $x \subseteq^* U$  y  $x \subseteq^* V$ , de donde  $x \subseteq^* U \cap V$  y  $U \cap V \in \mathcal{T}_{N,\mathcal{A}}$ . Finalmente, si  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$  y  $x \in \bigcup \mathcal{U} \cap \mathcal{A}$ , existe  $U_0 \in \mathcal{U}$  con  $x \in U_0$ ; así que  $x \subseteq^* U_0 \subseteq \bigcup \mathcal{U}$  y por ello  $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ .



**Definición 2.1.3.** Sean  $N$  un conjunto numerable y  $\mathcal{A} \subseteq [N]^\omega$ .

i)  $\mathcal{T}_{N,\mathcal{A}}$  es la **topología de de Isbell-Mrókwa generada por  $\mathcal{A}$** .

ii) El  **$\Psi$ -espacio generado por  $\mathcal{A}$**  es el par  $\Psi_N(\mathcal{A}) = (N \cup \mathcal{A}, \mathcal{T}_{N,\mathcal{A}})$ .

Si  $N = \omega$ , los objetos anteriores se denotarán por  $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$  y  $\Psi(\mathcal{A})$ , respectivamente.

Desde un punto de vista topológico, lo anterior no define dos clases distintas de objetos. Por tal motivo, bastará de ahora en más, estudiar los  $\Psi$ -espacios generados por familias de subconjuntos infinitos de  $\omega$ .

**Proposición 2.1.4.** Sean  $N, M$  conjuntos numerables,  $\mathcal{A} \subseteq [N]^\omega$  y cualquier biyección  $h : N \rightarrow M$ . Entonces  $\Psi_N(\mathcal{A}) \cong \Psi_M(\Phi_h(\mathcal{A}))$ .

**Demostración.** Sea  $f : \Psi_N(\mathcal{A}) \rightarrow \Psi_M(\Phi_h(\mathcal{A}))$  dada por  $f(x) = h(x)$ , si  $x \in N$ ; y  $f(x) = h[x]$ , si  $x \in \mathcal{A}$ . Nótese que  $f$  es biyectiva (dada ??). Por definición de  $f$ , y como  $\Phi_h^{-1} = \Phi_{h^{-1}}$ , basta ver únicamente la continuidad de  $f$ .

Sea  $U$  abierto en  $\Psi_M(\Phi_h(\mathcal{A}))$  y supóngase que  $x \in f^{-1}[U] \cap \mathcal{A}$ . Entonces  $f(x) = h[x] \in U \cap \Phi_h(\mathcal{A})$ . Como  $U$  es abierto en  $\Psi_M(\Phi_h(\mathcal{A}))$ , entonces  $f(x) \setminus U$  es finito. Así que  $f^{-1}[f(x) \setminus U] = h^{-1}[h[x] \setminus U] = x \setminus f^{-1}[U]$  es finito y así  $x \in^* f^{-1}[U]$ , probando que  $f^{-1}[U]$  es abierto en  $\Psi_N(\mathcal{A})$ . ■

La siguiente manera de describir la topología de Mrówka es la más común en la literatura (como ejemplo de ello, [hruMrówka] o [hruAlmost]).

**Proposición 2.1.5.** Sea  $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ , entonces:

i) Cada  $B \subseteq \omega$  es abierto en  $\Psi(\mathcal{A})$ , así, cada  $n \in \omega$  es punto aislado.

ii) Si  $x \in \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}_x := \{\{x\} \cup x \setminus F \mid F \in [x]^{<\omega}\}$  es base local de  $x$  en  $\Psi(\mathcal{A})$ .

**Demostración.** (i) Si  $B \subseteq \omega$ , es vacuo que  $B \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ , pues  $B \cap \mathcal{A} = \emptyset$ .

(ii) Sea  $x \in \mathcal{A}$ . Si  $G \subseteq x$  es finito y  $y \in (\{x\} \cup x \setminus G) \cap \mathcal{A}$ , necesariamente  $y = x$ , de donde  $y \subseteq^* \{x\} \cup x \setminus G$  pues  $G$  es finito, así  $\{x\} \cup x \setminus G \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ , por lo que  $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ . Ahora, si  $U \subseteq \Psi(\mathcal{A})$  es abierto y  $x \in U$ ,  $F := x \setminus U \subseteq x$  es finito y  $x \in \{x\} \cup x \setminus F \subseteq U$ . ■

En términos de lo recién demostrado, cada  $\mathcal{B}_x$  es imagen de  $[x]^{<\omega}$ . Pero este último conjunto es numerable, pues  $x$  es lo es. Por lo tanto, se desprende:

**Corolario 2.1.6.** *Para cualquier familia  $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ :*

- i)  $\Psi(\mathcal{A})$  es 1 AN.
- ii)  $\mathcal{B}_{\mathcal{A}} := \bigcup \{\mathcal{B}_x \mid x \in \mathcal{A}\} \cup \{\{n\} \mid n \in \omega\}$  es una base de  $\Psi_N(\mathcal{A})$
- iii) El peso de  $\Psi(\mathcal{A})$  es  $\aleph_0 + |\mathcal{A}|$ .
- iv)  $\Psi(\mathcal{A})$  es 2 AN si y sólo si  $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0$ .

**Demostración.** Basta probar únicamente (iii).

Debido a (ii), el peso del espacio es menor o igual a  $|\mathcal{B}_{\mathcal{A}}| = \aleph_0 + |\mathcal{A}|$ . Además,  $\omega, \mathcal{A} \subseteq \Psi(\omega)$  son subespacios discretos (véase el ??) de tamaño, y por tanto peso,  $\aleph_0$  y  $|\mathcal{A}|$ , respectivamente. Consecuentemente, el peso de  $\Psi(\mathcal{A})$  debe ser mayor o igual a ambos. ■

Si  $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$  y  $X \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ , dado que cada punto de  $\omega$  es aislado, se tiene que  $\text{der}(X) \subseteq \mathcal{A}$ . Por otra parte, si  $a \in \mathcal{A}$ , la única forma de que cada  $a \setminus F$  (con  $F \in [a]^{<\omega}$ ) tenga intersección no vacía con  $X$ , es que  $X \cap a$  sea infinito. Esta argumentación junto con ?? demuestran el primer punto, y con ello el resto, del siguiente Lema:

**Lema 2.1.7.** *Sea  $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ , entonces:*

- i) Si  $X \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ , entonces  $\text{der}(X) = \{y \in \mathcal{A} \mid X \cap y \neq^* \emptyset\}$ .
- ii)  $\mathcal{A} = \text{der}(\Psi(\mathcal{A})) = \text{der}(\omega)$ .

- iii) Cada  $B \subseteq \mathcal{A}$  es un subespacio cerrado y discreto de  $\Psi(\mathcal{A})$ .
- iv)  $\omega$  es discreto, denso en  $\Psi(\mathcal{A})$ .
- v)  $B \subseteq \omega$  es cerrado si y sólo si es casi ajeno con cada elemento de  $\mathcal{A}$ .

Las siguientes son propiedades topológicas inherentes a todo  $\Psi$ -espacio.

**Proposición 2.1.8.** *Todo  $\Psi$ -espacio es separable, primero numerable,  $T_1$ , disperso y desarrollable.*

**Demostración.** Sea  $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$  cualquiera. El  $\Psi$ -espacio generado por  $\mathcal{A}$  es separable pues  $\omega$  es denso en  $\Psi(\mathcal{A})$  y numerable; además, este espacio es primero numerable debido al ??.

(Axioma  $T_1$ ) Sea  $x \in \Psi(\mathcal{A})$ . De ??,  $\text{der}(\{x\}) = \{y \in \mathcal{A} \mid \{x\} \cap y \neq^* \emptyset\} = \emptyset$ , lo cual implica que  $\{x\}$  es cerrado.

(Dispersión) Supóngase que  $X \subseteq \Psi(\mathcal{A})$  es no vacío. Si  $X \subseteq \mathcal{A}$ , cada  $x \in X$  es aislado en el discreto  $X$  (inciso (iii) de ??). En caso contrario, existe un elemento  $n \in X \cap \omega$  y  $n$  es aislado en  $X$ , pues  $\{n\}$  es abierto en  $\Psi(\mathcal{A})$  y en  $X$ .

(Desarrollabilidad) Defínase  $\mathcal{U}_n := \{\{a\} \cup a \setminus n \mid a \in \mathcal{A}\} \cup \{\{y\} \mid y \in \omega\}$  para cada  $n \in \omega$ . Así, cada  $\mathcal{U}_n$  es cubierta abierta de  $\Psi(\mathcal{A})$ . Sean  $x \in \Psi(\mathcal{A})$  y  $U$  un abierto tal que  $x \in U$ .

Si  $x \in \omega$ , entonces ningún  $V \in \mathcal{U}_{x+1}$ , con  $x \in V$ , puede ser de la forma  $\{a\} \cup a \setminus (x+1)$ . Por tanto,  $x \in \{x\} = \text{St}(x, \mathcal{U}_{x+1}) \subseteq U$ . Si  $x \in \mathcal{A}$ , entonces  $x \setminus U \subseteq \omega$  es finito y existe  $n_0 \in \omega$  tal que  $x \setminus U \subseteq n_0$ . Como  $\{x\} \cup x \setminus n_0 \in \mathcal{U}_{n_0}$  es el único abierto de  $\mathcal{U}_{n_0}$  al cual  $x$  pertenece,  $x \in \{x\} \cup x \setminus n_0 = \text{St}(x, \mathcal{U}_{n_0}) \subseteq U$ .

Así pues,  $\{\text{St}(x, \mathcal{U}_n) \mid n \in \omega\}$  es base local de  $x$ , mostrando que  $\{\mathcal{U}_n \mid n \in \omega\}$  es un desarrollo para  $\Psi(\mathcal{A})$ . ■

Cuando la familia  $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$  no es casi ajena, el espacio  $\Psi(\mathcal{A})$  no satisface el axioma de separación de Hausdorff. Es por tal razón, que en la literatura se suele dar la ?? partiendo directamente de una familia casi ajena (el lector podrá corroborar esto en textos como [hruMrowka, hruAlmost, kannanHereditarily]).

A continuación se muestran aquellas propiedades topológicas de  $\Psi(\mathcal{A})$  «codificadas» a través de la condición  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$ .

**Proposición 2.1.9.** *Para cada  $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ , son equivalentes:*

- i)  $\mathcal{A}$  es familia casi ajena.
- ii)  $\Psi(\mathcal{A})$  es cero-dimensional.
- iii)  $\Psi(\mathcal{A})$  es de Tychonoff.
- iv)  $\Psi(\mathcal{A})$  es de Hausdorff.

**Demostración.** (i)  $\rightarrow$  (ii) Si  $\mathcal{A}$  es familia casi ajena, como  $\Psi(\mathcal{A})$  es  $T_1$ , basta verificar que cada elemento de la base  $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$  (definida como en ??) es cerrado. En efecto, cada  $\{n\}$  con  $n \in \omega$  es cerrado pues  $\Psi(\mathcal{A})$  es  $T_1$ . Y dados  $x \in \mathcal{A}$  y  $F \subseteq x$  finito, haciendo uso de ?? se tiene que por ser  $\mathcal{A}$  familia casi ajena,  $\text{der}(\{x\} \cup x \setminus F) = \{x\} \subseteq \{x\} \cup x \setminus F$ . Así que  $\{x\} \cup x \setminus F$  es cerrado.

(ii)  $\rightarrow$  (iii)  $\rightarrow$  (iv) Si  $\Psi(\mathcal{A})$  es cero-dimensional, al ser espacio  $T_1$ , resulta ser de Tychonoff (prelim). Y, si  $\Psi(\mathcal{A})$  es de Tychonoff, entonces es de Hausdorff.

(iv)  $\rightarrow$  (i) Si  $\Psi(\mathcal{A})$  es de Hausdorff y  $x, y \in \mathcal{A}$  son distintos, existen abiertos ajenos  $U, V \subseteq \Psi(\mathcal{A})$  tales que  $x \in U$  y  $y \in V$ . De donde  $x \subseteq^* U$ ,  $y \subseteq^* V$  y por consiguiente  $x \cap y \subseteq^* U \cap V = \emptyset$ . ■

La Proposición anterior es el motivo principal por el cual nos restringiremos a considerar únicamente  $\Psi$ -espacios generados por familias casi ajenas, es decir, espacios de Mrówka.

**Definición 2.1.10.** *Un espacio de Mrówka (o, de Isbell-Mrówka) es un  $\Psi$ -espacio generado por una familia casi ajena.*

Recordando que un espacio topológico es de Moore si y sólo si satisface el axioma  $T_3$  y tiene un desarrollo, se tiene la siguiente compilación básica respecto a las propiedades con las que siempre cuenta un espacio de Mrówka.

**Corolario 2.1.11.** *Todo espacio de Mrówka es separable, primero numerable, de Tychonoff, cero-dimensional, disperso y de Moore.*

La siguiente es sólo una de las múltiples relaciones importantes que existen entre los espacios de Mrówka y el conjunto de Cantor. Su demostración se basa en un hecho conocido en topología general; todo espacio cero-dimensional de peso  $\kappa$  se encaja en  $2^\kappa$  (véase [fidelElementos]).

**Corolario 2.1.12.** *Todo espacio de Mrówka  $\Psi(\mathcal{A})$  se encaja en  $2^{\aleph_0+|\mathcal{A}|}$ . Particularmente, si  $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0$ , el espacio  $\Psi(\mathcal{A})$  se encaja en  $2^\omega$  y es metrizable.*

## 2.2. Compacidad y compacidad local

Surgen más «traducciones» con las cuales maniobrar al momento de estudiar los  $\Psi$ -espacios. El ideal generado por una familia casi ajena determina a los subespacios compactos del espacio de Mrówka asociado a la misma.

**Proposición 2.2.1.** *Sean  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$  y  $K \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ . Entonces  $K$  es compacto si y sólo si  $K \cap \omega \subseteq^* \bigcup (K \cap \mathcal{A})$  y  $K \cap \mathcal{A}$  es finito.*

**Demostración.** Si  $K \subseteq \Psi(\mathcal{A})$  es subespacio compacto; en virtud de que la colección  $\mathcal{U} := \{\{n\} \mid n \in K \cap \omega\} \cup \{\{x\} \cup x \mid x \in K \cap \mathcal{A}\}$  es cubierta abierta para  $K$  en  $\Psi(\mathcal{A})$ , existen  $F \subseteq K \cap \omega$  y  $G \subseteq K \cap \mathcal{A}$  finitos de manera tal que  $\{\{n\} \mid n \in F\} \cup \{\{x\} \cup x \mid x \in G\}$  es subcubierta de  $\mathcal{U}$ . Necesariamente  $K \cap \mathcal{A} = G$ , así que  $K \cap \mathcal{A}$  es finito. Además  $(K \cap \omega) \setminus \bigcup G = K \setminus \bigcup G \subseteq F$  es finito y con ello  $K \cap \omega \subseteq^* \bigcup (K \cap \mathcal{A})$ .

Conversamente, supóngase que  $K \cap \omega \subseteq^* \bigcup (K \cap \mathcal{A})$  y que  $K \cap \mathcal{A}$  es finito. Para cada  $y \in \mathcal{A}$ ,  $\{y\} \cup y$  es compacto; por ello  $L := \bigcup \{\{y\} \cup y \mid y \in K \cap \mathcal{A}\}$  es un subespacio compacto de  $\Psi(\mathcal{A})$ . Nótese que  $K \cap L$  es cerrado en  $L$ ; pues  $L \setminus K \subseteq \omega$ ; así que  $K \cap L \subseteq L$  es compacto. Como  $K \setminus L = (K \cap \omega) \setminus \bigcup (K \cap \mathcal{A})$  es finito por hipótesis, es compacto. Así,  $K = (K \setminus L) \cup (K \cap L)$  es unión de subespacios compactos de  $\Psi(\mathcal{A})$ , y por lo tanto, es compacto. ■

Entonces los subespacios compactos de  $\Psi(\mathcal{A})$  son aquellos de la forma  $M \cup H$ ; donde  $H \subseteq \mathcal{A}$  es finito y  $M \subseteq^* \bigcup H$ . Esto es, si  $\mathcal{K}$  es el conjunto de todos los subespacios compactos de  $\Psi(\mathcal{A})$ :

$$\mathcal{K} = \bigcup_{H \in [\mathcal{A}]^{<\omega}} \{(F \cup M) \cup H \mid (F, M) \in [\omega]^{<\omega} \times \mathcal{P}(H)\}$$

Por ello  $|\mathcal{A}| \cdot \aleph_0 \leq |\mathcal{K}| \leq \sum \{(\aleph_0 \cdot \mathfrak{c}) \mid H \in [\mathcal{A}]^{<\omega}\} \leq |\mathcal{A}| \cdot \mathfrak{c} \leq \mathfrak{c}$  y todo espacio de Mrówka tiene; a lo sumo,  $\mathfrak{c}$  subespacios compactos.

La discusión sobre cuántos subespacios compactos *importantes* (esto es, los que determinan el carácter topológico de su extensión unipuntual) tiene  $\Psi(\mathcal{A})$  se retomará en la ??.

**Corolario 2.2.2.** Sean  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$  y  $A \subseteq \omega$ . Son equivalentes:

- i)  $A \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$
- ii) Existe  $K \subseteq \Psi(\mathcal{A})$  compacto tal que  $A \subseteq K$ .
- iii) Existe  $K \subseteq \Psi(\mathcal{A})$  compacto tal que  $A \subseteq^* K$ .

**Demostración.** (i)  $\rightarrow$  (ii) Si  $A \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$ , existe cierto  $H \subseteq \mathcal{A}$  finito de modo tal que  $A \subseteq^* \bigcup H$ . Debido a ??,  $K := A \cup H$  es compacto y  $A \subseteq K$ .

(iii)  $\rightarrow$  (i) Supóngase que  $K \subseteq \Psi(\mathcal{A})$  es compacto y tal que  $A \subseteq^* K$ . Consecuentemente  $A \setminus \bigcup (K \cap \mathcal{A}) \subseteq^* A \setminus (K \cap \omega) = A \setminus K =^* \emptyset$ , en virtud de la ??. Como  $K \cap \mathcal{A}$  es finito, resulta que  $A \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$ . ■

**Proposición 2.2.3.** Para cualquier  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$  son equivalentes:

- i)  $\Psi(\mathcal{A})$  es compacto.
- ii)  $\Psi(\mathcal{A})$  es numerablemente compacto.
- iii)  $\mathcal{A}$  es finita y maximal.

**Demostración.** (i)  $\rightarrow$  (ii) es clara.

(ii)  $\rightarrow$  (iii) Supóngase que  $\Psi(\mathcal{A})$  es numerablemente compacto. Dado que  $\mathcal{A}$  es un subespacio cerrado y discreto de  $\Psi(\mathcal{A})$  (véase ??); necesariamente, debe ser finito. Luego,  $\mathcal{U} := \{\{n\} \mid n \in \omega\} \cup \{\{x\} \cup x \mid x \in \mathcal{A}\}$  es una cubierta numerable para  $\Psi(\mathcal{A})$ , y como este espacio es numerablemente compacto, existe  $F \subseteq \omega$  finito de tal modo que la colección  $\{\{n\} \mid n \in F\} \cup \{\{x\} \cup x \mid x \in \mathcal{A}\}$  es subcubierta de  $\mathcal{U}$ . Se obtiene de la finitud de  $F$  que  $\omega \subseteq^* \bigcup \mathcal{A}$ ; y al ser  $\mathcal{A}$  finita, del ?? se sigue su maximalidad.

(iii)  $\rightarrow$  (i) Si  $\mathcal{A}$  es finita y maximal, entonces de ?? se tiene que  $\omega \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$ . Aplicando el ?? se tiene la compacidad de  $\Psi(\mathcal{A})$ . ■

La siguiente Proposición para nada carece de importancia, pues los espacios de Isbell-Mrówka son los únicos (dentro de cierta clase) con tal propiedad.

**Proposición 2.2.4.** *Todo espacio de Mrówka es hereditariamente localmente compacto, y en consecuencia, es espacio de Baire.*

**Demostración.** Supóngase que  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$  y sea  $X \subseteq \Psi(\mathcal{A})$  cualquiera. Como  $\Psi(\mathcal{A})$  es de Hausdorff (recuérdese ??),  $X$  es de Hausdorff y basta verificar que cada punto de  $X$  tiene una vecindad en  $X$  compacta.

Sea  $x \in X$  arbitrario. Si  $x \in \omega$ ,  $\{x\}$  es vecindad compacta de  $x$  en  $X$ . Ahora, si  $x \in \mathcal{A}$ , entonces  $K := X \cap (\{x\} \cup x) \subseteq \{x\} \cup x$  es vecindad de  $x$  en  $X$ . En virtud de la ??,  $K$  es compacto; pues  $K \cap \mathcal{A} = \{x\}$  es finito y  $K \cap \omega \subseteq x \subseteq^* \bigcup \{x\} = \bigcup (K \cap \mathcal{A})$ . Así,  $X$  es localmente compacto.

Finalmente,  $\Psi(\mathcal{A})$  es localmente compacto y de Hausdorff, siendo esto suficiente para ser de Baire (prelim). ■

## 2.3. Metrizabilidad y Pseudocompacidad

El ?? evidencia que la numerabilidad de una familia casi ajena  $\mathcal{A}$  es suficiente para concluir la metrizabilidad de su espacio de Mrówka asociado, no resulta difícil notar que el recíproco también ocurre (dados ?? y que  $\Psi(\mathcal{A})$  es separable); sin embargo, se tienen más equivalencias:

**Proposición 2.3.1.** Sea  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$ , entonces son equivalentes:

- i)  $\mathcal{A}$  es a lo más numerable
- ii)  $\Psi(\mathcal{A})$  es metrizable.
- iii)  $\Psi(\mathcal{A})$  es segundo numerable.
- iv)  $\Psi(\mathcal{A})$  es  $\sigma$ -compacto.
- v)  $\Psi(\mathcal{A})$  es de Lindelöf.

**Demostración.** (i)  $\rightarrow$  (ii)  $\rightarrow$  (iii) Si  $|\mathcal{A}| \leq \omega$ , se obtiene de ?? que  $\Psi(\mathcal{A})$  es metrizable. Por otro lado, si  $\Psi(\mathcal{A})$  es metrizable, al ser este un espacio separable, se tiene garantizado que es 2 AN (prelim).

(iii)  $\rightarrow$  (iv)  $\rightarrow$  (v) Si  $\Psi(\mathcal{A})$  es 2 AN, entonces al localmente compacto, resulta que es  $\sigma$ -compacto (prelim). Además; todo espacio  $\sigma$ -compacto, es también de Lindelöf. (prelim)

(v)  $\rightarrow$  (i) Por último, supóngase que  $\Psi(\mathcal{A})$  es de Lindelöf. Como este espacio es desarrollable, debe ser 2 AN (prelim). Se sigue de ?? que  $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0$ . ■

El siguiente corolario es una sencilla aplicación de ?? y ??, ejemplos como este ilustran desde ya el poder «constructivo» que tienen estos espacios.

**Corolario 2.3.2.** Sea  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$ . Entonces  $\Psi(\mathcal{A})$  no compacto y metrizable (o cualquiera de sus equivalentes dados en ??) si y solamente si  $|\mathcal{A}| = \aleph_0$ .

Ahora, falta establecer una relación entre  $\Psi(\mathcal{A})$  y la maximalidad de la familia  $\mathcal{A}$ . En la ?? se ahondará con mucha más profundidad en el estudio de las sucesiones convergentes; pero de momento, es necesario considerar el siguiente Lema, en orden de dar una caracterización completa para la condición  $\mathcal{A} \in \text{MAD}(\omega)$ .



**Lema 2.3.3.** Sean  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$ ,  $x \in \mathcal{A}$  y  $B \in [\omega]^\omega$ . Entonces  $B \rightarrow x$  en  $\Psi(\mathcal{A})$  si y sólo si  $B \subseteq^* x$ .

**Demostración.** Supóngase que  $B \rightarrow x$  en  $\Psi(\mathcal{A})$ . Como  $x \cup \{x\}$  es un abierto de  $\Psi(\mathcal{A})$  que tiene a  $x$ , se tiene que  $B \subseteq^* x \cup \{x\} =^* x$ .

Recíprocamente, si  $B \subseteq^* x$  y  $U \subseteq \Psi(\mathcal{A})$  es un abierto cualquiera tal que  $x \in U$ , resulta que  $x \subseteq^* U$ . Por lo tanto  $B \subseteq^* U$ , mostrando que  $B \rightarrow x$  en  $\Psi(\mathcal{A})$ . ■

**Proposición 2.3.4.** Sea  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$ , son equivalentes:

- i)  $\Psi(\mathcal{A})$  es pseudocompacto.
- ii)  $\mathcal{A}$  es maximal.
- iii) Todo subespacio discreto, abierto y cerrado de  $\Psi(\mathcal{A})$  es finito.
- iv) Toda sucesión en  $\omega$  tiene una subsucesión convergente.

**Demostración.** (i)  $\rightarrow$  (ii). Si  $\mathcal{A}$  no es maximal, existe  $B \subseteq \omega$  infinito y casi ajeno con cada elemento de  $\mathcal{A}$ . Por ?? y ??,  $B$  es discreto, abierto y cerrado, obteniéndose de (prelim) que  $\Psi(\mathcal{A})$  no es pseudocompacto.

(ii)  $\rightarrow$  (iii) Por contraposición, supóngase que existe  $B \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ , abierto, cerrado, discreto e infinito. Como  $B$  es cerrado y discreto,  $\text{der}(B) = \emptyset$  y se obtiene del inciso (i) de ?? que  $B \subseteq \omega$ . Concluyéndose por el quinto inciso de tal Lema que  $B$  es casi ajeno con todo elemento de  $\mathcal{A}$ .

(iii)  $\rightarrow$  (iv) Supóngase (iii) y sea  $B \in [\omega]^\omega$ . Así,  $B$  es discreto, infinito y abierto. Por hipótesis,  $B$  no es cerrado y debe existir  $x \in \text{der}(B) \setminus B$  y por ??,  $x \in \mathcal{A}$  y  $B \cap x$  es infinito. Siguiéndose del ?? que  $B \cap x \rightarrow x$  en  $\Psi(\mathcal{A})$ .

(iv)  $\rightarrow$  (i) Esta implicación se sigue inmediatamente de la caracterización para la pseudocompacidad dada en (prelim). ■

Combinando ??, ?? y ?? se obtienen ejemplos muy concretos. Por ejemplo, si un espacio de Mrówka  $\Psi(\mathcal{A})$  no es pseudocompacto pero sí es metrizable, necesariamente  $\mathcal{A}$  es numerable. Otro ejemplo responde con una negativa a lo que en su momento fue un problema popular: ¿la pseudocompacidad equivale a la

compacidad numerable en espacios Tychonoff?, resultado se sabe cierto en la clase de espacios  $T_4$  (prelim) y falso dentro de la clase de espacios que no son  $T_1$ . En virtud de ??, tomando cualquier familia maximal infinita:

**Corolario 2.3.5.** *Existe un espacio de Tychonoff, que es pseudocompacto pero no numerablemente compacto.*

La siguiente es una caracterización conocida (véase [GeorginaTesis]), desvela que el comportamiento sumamente organizado de  $\Psi(\mathcal{A})$  se rompe bruscamente cuando  $\mathcal{A}$  deja de ser numerable.

**Proposición 2.3.6.** *Sea  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$  de cardinalidad  $\kappa$ , entonces<sup>1</sup>:*

- i) Si  $\kappa = 0$ , entonces  $\Psi(\mathcal{A}) \cong \omega$ .
- ii) Si  $\kappa < \omega$  y  $\mathcal{A}$  no es maximal,  $\Psi(\mathcal{A}) \cong \omega \cdot (\kappa + 1)$ .
- iii) Si  $\kappa < \omega$  y  $\mathcal{A}$  es maximal,  $\Psi(\mathcal{A}) \cong \omega \cdot (\kappa + 1) + 1$ .
- iv) Si  $\kappa = \omega$ , entonces  $\Psi(\mathcal{A}) \cong \omega^2$ .
- v) Si  $\kappa > \omega$ , entonces  $\Psi(\mathcal{A})$  no homeomorfo a ningún espacio de ordinales; más aún,  $\Psi(\mathcal{A})$  no es linealmente ordenable.

De (iv), en la Proposición previa, surge que el espacio de ordinales  $\omega^2$  es el único espacio de Mrówka metrizable y no compacto. Queda claro además, que cualesquiera dos familias numerables son «iguales» en el siguiente aspecto:

**Definición 2.3.7.** *Dados conjuntos  $N, M$  numerables, se dice que  $\mathcal{A} \subseteq [N]^\omega$  y  $\mathcal{B} \subseteq [M]^\omega$  son **esencialmente iguales** cuando  $\Psi_N(\mathcal{A}) \cong \Psi_M(\mathcal{B})$ .*

Una consecuencia «curiosa» en relación  $\omega^2$ , fruto de lo anterior y del Teorema principal de la ??, es el ??.

<sup>1</sup>En los incisos (i)-(iv), los espacios homeomorfos a  $\Psi(\mathcal{A})$  son espacios de ordinales.

## 2.4. Teorema de Kannan y Rajagopalan

La meta primordial en lo que resta del capítulo será caracterizar aquellos espacios que son homeomorfos a algún espacio de Mrówka.

**Lema 2.4.1.** *Sea  $X$  un espacio de Hausdorff y localmente compacto. Si  $X$  contiene un abierto denso  $D \in [X]^{\leq \omega}$ , entonces  $N := X \setminus \text{der}(X)$  es denso en  $X$ .*

**Demostración.** Si  $x \in X$  es aislado en  $D$ , dada la densidad de  $D$ , es necesario que  $x \in D$ . Luego  $\{x\} = D \cap U$  para cierto abierto  $U$  de  $X$ ; y como  $X$  es un espacio  $T_1$ , resulta que  $U = \{x\}$ . Por lo tanto  $X \setminus \text{der}_D(D) \subseteq N$ .

Nótese que  $X \setminus \text{der}_D(D) = \bigcap \{X \setminus \{y\} \mid y \in \text{der}_D(D)\}$ . Pero, para cada punto  $y \in \text{der}_D(D) \subseteq \text{der}(X)$ , el conjunto  $X \setminus \{y\}$  es abierto y denso en  $X$ . De la hipótesis y el (prelim),  $X$  es de Baire, así que  $N \supseteq X \setminus \text{der}_D(D)$  debe ser denso. ■

**Lema 2.4.2.** *Sean  $X$  un espacio y  $N := X \setminus \text{der}(X)$ . Son equivalentes:*

- i)  $N$  es denso y cada  $y \in \text{der}(X)$  cumple que  $N \cup \{y\}$  es abierto en  $X$ .
- ii)  $\text{der}(X)$  es discreto.

**Demostración.** (i)  $\rightarrow$  (ii) Supóngase (i) y sea  $y \in \text{der}(X)$ . Como  $N \cup \{y\}$  es abierto en  $X$ , entonces  $y \in U \subseteq N \cup \{y\}$  para cierto abierto  $U$ . Seguido de lo anterior,  $\{y\} = U \setminus N = U \cap \text{der}(X)$ . Mostrando que  $\text{der}(X)$  es discreto.

(ii)  $\rightarrow$  (i) Supóngase que  $\text{der}(X)$  es discreto. Si  $N$  no es denso, existen  $x \in X$  y un abierto  $U$  de modo tal que  $x \in U \subseteq \text{der}(X)$ . Pero al ser  $\text{der}(X)$  discreto,  $\{x\} = W \cap \text{der}(X)$  para cierto abierto  $W$ , de donde  $U \cap W = \{x\}$  y  $x \in N$ , esto es imposible. Así que  $N$  es denso en  $X$ .

Ahora, si  $y \in \text{der}(X)$ , ha de existir un abierto  $U$  tal que  $\{y\} = U \cap \text{der}(X)$ . De lo anterior,  $N \cup \{y\} = (N \cup U) \cap (N \cup \text{der}(X)) = N \cup U$  es abierto en  $X$ . ■

La siguiente caracterización es debida a Varadachariar Kannan y a Minakshisundaram Rajagopalan, quienes en 1970 (consúltese [kannanHereditarily])

dieron con un resultado que permite caracterizar de una forma sencilla a los espacios de Mrówka. Su característica fundamental es la compacidad local hereditaria.

**Teorema 2.4.3 (Kannan, Rajagopalan)**

Para todo espacio  $X$  infinito, de Hausdorff y separable, son equivalentes:

- i)  $X$  es hereditariamente localmente compacto.
- ii)  $X$  es localmente compacto y  $\text{der}(X)$  es discreto.
- iii)  $X$  es homeomorfo a un espacio de Mrówka.

**Demostración.** Supóngase que  $X$  es cualquier espacio infinito, de Hausdorff, separable y sea  $N := X \setminus \text{der}(X)$ .

(i)  $\rightarrow$  (ii) Supóngase que  $X$  es hereditariamente localmente compacto. Por separabilidad e infinitud de  $X$ , existe  $D \in [X]^\omega$  denso. Se sigue de la hipótesis que  $D$  es localmente compacto y por ello, es abierto en su cerradura,  $X$ . Debido al ??,  $N$  es denso en  $X$ .

Por otro lado, si  $y \in \text{der}(X)$  es cualquiera,  $N \cup \{y\} \subseteq X$  es localmente compacto, y por ende, es abierto en su cerradura. Pero  $N$  es denso, así que  $N \cup \{y\}$  es abierto en  $X = \text{cl}(N \cup \{y\})$ . Se sigue de ?? que  $\text{der}(X)$  es discreto.

(ii)  $\rightarrow$  (iii) Supóngase que  $X$  es localmente compacto y que  $\text{der}(X)$  es discreto. Por el ?? resulta que  $N$  es denso en  $X$  y que  $N \cup \{y\}$  es abierto siempre que  $y \in \text{der}(X)$ . Por ser  $X$  infinito y separable, se tiene que  $N$  es numerable. Utilizando la compacidad local de  $X$ , para cada  $x \in \text{der}(X)$  fíjese (AC) una vecindad compacta  $V_x$  de  $x$  en  $X$  contenida en  $N \cup \{x\}$ . Se afirma que  $\mathcal{A} = \{V_x \setminus \{x\} \subseteq N \mid x \in \text{der}(X)\}$  es una familia casi ajena.

En efecto, si  $x \in \text{der}(X)$  es cualquiera, entonces  $V_x \setminus \{x\}$  no es finito. De lo contrario,  $\{x\} = (N \cup \{x\}) \setminus (V_x \setminus \{x\})$  sería abierto en  $X$ , quien es  $T_1$ , y se contradiría que  $x \in \text{der}(X)$ ; luego,  $\mathcal{A} \subseteq [N]^\omega$ . Además, si  $x, y \in \text{der}(X)$  son distintos, se tiene que  $V_x \cap V_y \subseteq N$ . Así  $V_x \cap V_y$  es subespacio compacto del discreto  $N$ , lo cual obliga a que sea finito. Por ello  $\mathcal{A} \in \text{AD}(N)$ .

Sea  $f : X \rightarrow \Psi_N(\mathcal{A})$  dada por:  $f(n) = n$ , si  $n \in N$ ; y  $f(x) = V_x$ , si  $x \in \text{der}(X)$ . Resulta que  $f$  es biyectiva; y como  $N$  es el conjunto de puntos aislados de  $X$ , para

verificar que  $f$  es homeomorfismo basta verificar lo siguiente:

**Afirmación.** Para cada  $U \subseteq X$ ,  $U$  es abierto en  $X$  si y sólo si para cualquier elemento  $x \in U \cap \text{der}(X)$  ocurre que  $V_x \setminus \{x\} \subseteq^* U$ .

**Demostración.** Sea  $U \subseteq X$ . Si  $U$  es abierto y  $x \in U \cap \text{der}(X)$ , entonces  $V_x \setminus U \subseteq N$  es cerrado en  $X$ , así en  $V_x$  y como  $V_x$  es compacto;  $V_x \setminus U$  es subespacio compacto del discreto  $N$ , por tanto finito. Así que  $V_x \setminus \{x\} \subseteq^* U$ .

Recíprocamente, supóngase que para cada  $x \in U \cap \text{der}(X)$  se tiene que  $V_x \setminus \{x\} \subseteq^* U$ , es decir, que  $V_x \setminus U$  es finito. Sea  $y \in U$  cualquiera, si  $y \in N$  entonces  $\{y\}$  es abierto en  $X$  y  $U$  es vecindad de  $y$ . Ahora, si  $y \in \text{der}(X)$  entonces  $V_y \setminus U$  es finito y con ello  $V_y \setminus (V_y \setminus U) \subseteq U$ , de donde  $U$  es vecindad de  $y$  (usando que  $X$  es espacio  $T_1$ ). Luego,  $U$  es vecindad de todos sus puntos, y por tanto, es abierto.  $\square$

(iii)  $\rightarrow$  (i) Si  $X$  es homeomorfo a un espacio de Mrówka, las propiedades topológicas del último se satisfacen en  $X$ , siguiéndose de ?? que  $X$  es hereditariamente localmente compacto.  $\blacksquare$

Del resultado anterior es casi inmediata la obtención de las siguientes condiciones equivalentes.

**Corolario 2.4.4.** Sea  $X$  cualquier espacio infinito, de Hausdorff y separable. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- i)  $X$  es pseudocompacto y hereditariamente localmente compacto.
- ii)  $X$  es regular,  $\text{der}(X)$  es subespacio discreto de  $X$  y cualquier subespacio discreto, abierto y cerrado a la vez en  $X$  es finito.
- iii)  $X$  es homeomorfo a un espacio de Mrówka generado por una familia casi ajena maximal.

**Demostración.** Por el Teorema de Kannan y Rajagopalan, lo demostrado en ?? y como todo espacio de Mrówka es de Tychonoff (véase ??); particularmente

regular, bastará demostrar que si  $X$  satisface (ii) entonces  $X$  es localmente compacto. Supóngase (ii), claramente cada punto aislado de  $X$  tiene una vecindad compacta en  $X$ .

Sea  $x \in \text{der}(X)$  cualquier elemento, puesto que  $\text{der}(X)$  es discreto, existe  $U \subseteq X$  abierto con  $\{x\} = U \cap \text{der}(X)$ . Por regularidad de  $X$ , fijese un abierto  $V$  tal que  $x \in V \subseteq \text{cl}(V) \subseteq U$  y nótese que entonces  $\{x\} = \text{cl}(V) \cap \text{der}(X)$ .

Si  $W$  es una vecindad abierta de  $x$ , entonces  $\text{cl}(V) \setminus W \subseteq X \setminus \text{der}(X)$  es discreto y abierto, además es cerrado, por ser intersección de cerrados. De (ii) se sigue la finitud de  $\text{cl}(V) \setminus W$ , y de esto, la compacidad de  $\text{cl}(V)$ . Por lo cual, tal subespacio es una vecindad compacta de  $x$  en  $X$ . ■

Como otra «aplicación» del ?? es el siguiente Corolario, se puede caracterizar muy fácilmente cuando un subespacio de un espacio de Mrówka vuelve a ser de Mrówka.

**Corolario 2.4.5.** *Sea  $X$  un espacio topológico infinito, entonces  $X$  es homeomorfo a un espacio de Mrówka si y sólo si es homeomorfo a un subespacio abierto de un espacio de Mrówka.*

**Demostración.** Basta probar la necesidad. Supóngase que  $\mathcal{A}$  es una familia casi ajena y que  $U \subseteq \Psi(\mathcal{A})$  es un abierto tal que  $X \cong U$ . Como  $X$  es infinito,  $U$  es infinito, además por ser  $\Psi(\mathcal{A})$  de Hausdorff y hereditariamente localmente compacto, se tiene que  $U$  es de Hausdorff y hereditariamente localmente compacto. Por último, como  $\omega$  es denso en  $\Psi(\mathcal{A})$  y  $U$  es abierto en  $\Psi(\mathcal{A})$ , se tiene que  $U \cap \omega$  es denso en  $U$ ; así que  $U$  es separable. De lo anterior  $U$ , y por tanto  $X$ , es homeomorfo a un espacio de Mrówka; a saber  $\Psi_{U \cap \omega}(U \cap \mathcal{A})$ . ■

A continuación se responden dos preguntas esenciales: ¿cuándo el producto y la suma topológica de espacios de Mrówka, es de nuevo, un espacio de Mrówka?. Comenzaremos analizando qué ocurre con la suma topológica de estos espacios.

**Corolario 2.4.6.** *Sea  $\{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$  una familia no vacía de espacios topológicos infinitos; sin pérdida de generalidad ajenos dos a dos. Son equivalentes:*

i)  $Y := \coprod_{\alpha \in \kappa} X_\alpha$  es homeomorfo a un espacio de Mrówka.

ii)  $\kappa$  es contable y cada  $X_\alpha$  es homeomorfo a un espacio de Mrówka.

**Demostración.** (i)  $\rightarrow$  (ii) Supóngase que  $Y$  es espacio de Mrówka. Como cada  $X_\alpha \subseteq Y$  es infinito y abierto en  $Y$ , se sigue del Corolario anterior que  $X_\alpha$  es de Mrówka. Por otro lado, si  $\kappa$  fuese más que numerable,  $Y$  no podía ser separable, pues es la suma de  $\kappa$  espacios no vacíos; así que  $\kappa$  es a lo más numerable.

(ii)  $\rightarrow$  (i) Supóngase que  $\kappa$  es a lo más numerable y para cada  $\alpha \in \kappa$ , el espacio  $X_\alpha$  es homeomorfo a un espacio de Mrówka. Entonces, del ??, cada  $X_\alpha$  es (infinito) de Hausdorff, separable, localmente compacto y además el subespacio  $\text{der}_{X_\alpha}(X_\alpha) \subseteq X_\alpha$  es discreto.

La suma de espacios de Hausdorff (localmente compactos, respectivamente) es de Hausdorff (localmente compacta, respectivamente); además, por ser cada  $X_\alpha$  separable y  $\kappa$  a lo más numerable, resulta que  $Y$  es infinito, de Hausdorff, localmente compacto y separable.

Sea  $y \in \text{der}_Y(Y)$  cualquiera, por definición de  $Y$ , para el único elemento  $\alpha \in \kappa$  tal que  $y \in X_\alpha$ , se tiene  $y \in \text{der}_{X_\alpha}(X_\alpha)$ . Y como tal subespacio de  $X_\alpha$  es discreto, existe  $V \subseteq X_\alpha$  abierto tal que  $\{y\} = U \cap \text{der}_{X_\alpha}(X_\alpha)$ , pero  $U$  es abierto también en  $Y$  y además  $\{y\} = U \cap \text{der}_Y(Y)$ . De lo contrario, existe  $x \in V \cap \text{der}_Y(Y) \setminus \{y\}$  y consecuentemente  $x \notin \text{der}_{X_\alpha}(X_\alpha)$ , mostrando que  $\{x\}$  es abierto en  $X_\alpha$  y por tanto en  $Y$ , lo cual es absurdo dada la elección de  $X$ . Lo anterior prueba que  $\text{der}_Y(Y)$  es discreto, finalizando la prueba en virtud del ??. ■

Se explotará mucho la siguiente observación durante el subsecuente Corolario, pues nuevamente, se hará uso del inciso (ii) del ??.

**Observación 2.4.7.** Sea  $X$  un espacio topológico,  $\text{der}(X)$  es discreto si y sólo si  $\text{der}^2(X) := \text{der}(\text{der}(X)) = \emptyset$ .

Como  $X \setminus \text{der}(X)$  es abierto,  $\text{der}(X)$  es discreto si y sólo si es discreto y cerrado. Lo último sucede sólo si  $\text{der}_{\text{der}(X)}(\text{der}(X)) = \text{der}(X) \cap \text{der}^2(X) = \emptyset$ . Sin embargo, cualquier punto aislado en  $X$ , es aislado también en  $\text{der}(X)$ , así que  $\text{der}^2(X) \subseteq \text{der}(X)$ ; por lo tanto,  $\text{der}(X)$  es discreto si y sólo si  $\text{der}^2(X) = \emptyset$ .

Del siguiente resultado se desprenderá que la relación entre el producto topológico y los espacios de Mrówka es «poco interesante», en el aspecto de que tal relación es muy restrictiva.

**Lema 2.4.8.** *Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos infinitos, entonces  $X \times Y$  es homeomorfo a un espacio de Mrówka si y sólo si  $X$  y  $Y$  son de Mrówka y además  $X \cong \omega$  o  $Y \cong \omega$*

**Demostración.** Obsérvese la igualdad:

$$\begin{aligned} \text{der}_{X \times Y}^2(X \times Y) &= \text{der}_{X \times Y} \left( \text{der}_X(X) \times \text{cl}_Y(Y) \cup \text{cl}_X(X) \times \text{der}_Y(Y) \right) \\ &= \text{der}_{X \times Y} \left( \text{der}_X(X) \times Y \cup X \times \text{der}_Y(Y) \right) \\ &= \text{der}_{X \times Y} \left( \text{der}_X(X) \times Y \right) \cup \text{der}_{X \times Y} \left( X \times \text{der}_Y(Y) \right) \\ &= \text{der}_X(\text{der}_X(X)) \times \text{cl}_Y(Y) \cup \text{cl}_X(\text{der}_X(X)) \times \text{der}_Y(Y) \cup \\ &\quad \cup \text{der}_X(X) \times \text{cl}_Y(\text{der}_Y(Y)) \cup \text{cl}_X(X) \times \text{der}_Y(\text{der}_Y(Y)) \\ &= \text{der}_X^2(X) \times Y \cup \text{der}_X(X) \times \text{der}_Y(Y) \cup X \times \text{der}_Y^2(Y) \end{aligned}$$

Puesto que  $X, Y \neq \emptyset$ , resulta que  $\text{der}_{X \times Y}^2(X \times Y)$  es vacío si y sólo si  $\text{der}_X^2(X) = \text{der}_Y^2(Y) = \text{der}_X(X) \times \text{der}_Y(Y) = \emptyset$ . Esto es, el subespacio  $\text{der}_{X \times Y}^2(X \times Y) \subseteq X \times Y$  es discreto si y sólo si los subespacios  $\text{der}_X(X)$  de  $X$  y  $\text{der}_Y(Y)$  de  $Y$  son discretos y además  $X$  es discreto o  $Y$  es discreto.

Como  $X, Y$  son infinitos,  $X \times Y$  es infinito, además las propiedades de separabilidad, axioma de separación de Hausdorff y local compacidad son propiedades finitamente productivas y finitamente factorizables. De esto último, lo comentado en el párrafo anterior, el hecho de que el único espacio de Mrówka discreto es  $\omega$  y el inciso (ii) del ??, se obtiene el resultado. ■

**Corolario 2.4.9.** *Sea  $\{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$  una familia de espacios topológicos infinitos; sin pérdida de generalidad, ajenos dos a dos, entonces son equivalentes:*



i)  $Y := \prod_{\alpha \in \kappa} X_\alpha$  es homeomorfo a un espacio de Mrówka.

ii)  $\kappa$  es finito, cada espacio  $X_\alpha$  es homeomorfo a un espacio de Mrówka y existe  $\beta_0 \in \kappa$  tal que si  $\alpha \in \kappa \setminus \{\beta_0\}$ , entonces  $X_\alpha \cong \omega$ .

**Demostración.** Sin perder generalidad, tómesese  $\kappa$  como un cardinal.

(i)  $\rightarrow$  (ii) Supóngase que  $Y$  es homeomorfo a un espacio de Mrówka, entonces  $Y$  es de Hausdorff, Separable y hereditariamente localmente compacto. Todas las propiedades anteriores son factorizables, así que por el Teorema de Kannan y Rajagopalan (??), cada  $X_\alpha$  es homeomorfo a un espacio de Mrówka.

Ahora, por contradicción, supóngase  $\kappa \geq \omega$ . Entonces, existen  $P, Q \subseteq \kappa$  ajenos e infinitos, de donde:

$$Y = \prod_{\alpha \in \kappa} X_\alpha \cong \prod_{\alpha \in P} X_\alpha \times \prod_{\alpha \in Q} X_\alpha$$

siguiéndose del Lema previo que; sin pérdida de generalidad,  $\prod_{\alpha \in P} X_\alpha \cong \omega$ . Lo anterior conduce a un absurdo, pues como  $P$  es infinito y cada  $X_\alpha$  también, resulta que:

$$\left| \prod_{\alpha \in P} X_\alpha \right| = \prod_{\alpha \in P} |X_\alpha| \geq \prod_{\alpha \in P} \aleph_0 = \aleph_0^{|P|} \geq \aleph_0^{\aleph_0} > \aleph_0$$

imposibilitando que  $\prod_{\alpha \in P} X_\alpha \cong \omega$  sea biyectable con  $\omega$ . Así,  $\kappa < \omega$ .

Finalmente, si cada  $X_\alpha$  es homeomorfo a  $\omega$ , o  $\kappa = 1$ , (ii) se satisface. Supóngase pues que  $\kappa \geq 2$  y que existe  $\beta_0 \in \kappa$  con  $X_{\beta_0} \not\cong \omega$ . Dado que:

$$Y = \prod_{\alpha \in \kappa} X_\alpha \cong X_{\beta_0} \times \prod_{\alpha \in \kappa \setminus \{\beta_0\}} X_\alpha$$

se sigue del Lema Previo que  $\prod_{\alpha \in \kappa \setminus \{\beta_0\}} X_\alpha \cong \omega$ . Siendo así, cada  $X_\alpha$  (con  $\alpha \in \kappa \setminus \{\beta_0\}$ ) infinito, numerable y discreto; esto es, homeomorfo a  $\omega$ .

(ii)  $\rightarrow$  (i) Supóngase que  $\kappa$  es finito, que cada  $X_\alpha$  es homeomorfo a un espacio de Mrówka y que  $\beta_0 \in \kappa$  es un elemento tal que si  $\alpha \in \kappa \setminus \{\beta_0\}$ , entonces  $X_\alpha \cong \omega$ . Como  $\kappa \setminus \{\beta_0\}$  es finito, entonces:

$$Y = \prod_{\alpha \in \kappa} X_\alpha \cong X_{\beta_0} \times \prod_{\alpha \in \kappa \setminus \{\beta_0\}} X_\alpha \cong X_{\beta_0} \times \prod_{\alpha \in \kappa \setminus \{\beta_0\}} \omega = X_{\beta_0} \times \omega$$

y a consecuencia del Lema previo,  $Y$  es de Mrówka. ■

El siguiente Corolario del Teorema de Kannan y Rajagopalan (??), es un resultado sencillo (y sumamente particular) de metrización.

**Corolario 2.4.10.** *Si  $X$  es infinito, separable, de Hausdorff y hereditariamente localmente compacto. Entonces son equivalentes:*

i)  $X$  es hereditariamente separable.

ii)  $X$  es metrizable.

**Demostración.** Dado el ?? y la caracterización ??, basta ver que si  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$ , entonces  $\Psi(\mathcal{A})$  es hereditariamente separable si y sólo si  $\mathcal{A}$  es a lo más numerable.

Para la suficiencia procédase por contrapuesta suponiendo que  $\mathcal{A}$  es más que numerable, entonces  $\mathcal{A}$  es un subespacio de  $\Psi(\mathcal{A})$  discreto y más que numerable, con lo que, no puede ser separable. Para la necesidad, si  $\mathcal{A}$  es a lo más numerable, cada subespacio de  $\Psi(\mathcal{A})$  es a lo más numerable, y con ello, separable. ■

cite[Def. 9.20, p. 118] La *curiosidad* (comentada posteriormente a ??) en relación al espacio de ordinales  $\omega^2$  tiene su justificación en el anterior Corolario.

### 2.4.1. Sobre un corolario de Kannan y Rajagopalan

Se finalizará la sección; y con ello el actual capítulo, dando un Corolario importante en relación a las imágenes continuas de los espacios de Mrówka pseudocompactos. Vale mencionar que este resultado aparece en [kannanHereditarily] y se enuncia de la siguiente manera: «*Un espacio  $X$  infinito, de Hausdorff es imagen continua de un espacio de Mrówka pseudocompacto si y sólo si existe un denso numerable  $D \subseteq X$  de manera de forma que toda sucesión en  $D$  contiene una sub-sucesión convergente.*»

En el documento original no se demuestra el resultado mencionado, sólo se esboza la mitad de la prueba. Para mostrar que este resultado es erróneo (tal cual

está enunciado) basta encontrar un espacio de Hausdorff, separable y secuencialmente compacto, que tenga tamaño mayor al continuo. Tal espacio satisfaría la condición escrita en [kannanHereditarily] y no podría ser imagen continua de ningún espacio de Mrówka (todos ellos tienen tamaño menor o igual a  $\mathfrak{c}$ ). Los siguientes comentarios encuentran la consistencia con ZFC de un espacio de esa naturaleza.

Es un hecho conocido que el espacio  $2^{\mathfrak{c}}$  no es secuencialmente compacto, se puede considerar entonces el cardinal (véase (prelim)):

$$\mathfrak{s} = \min\{\kappa \geq \omega \mid 2^\kappa \text{ no es secuencialmente compacto}\}.$$

Pero, seguido de (prelim), se desprende que:

#### Teorema 2.4.11

Es consistente con ZFC que  $\omega_1 < \mathfrak{s}$  y  $\mathfrak{c} < 2^{\omega_1}$ .

A razón de lo anterior, es consistente con ZFC está el hecho de que  $2^{\omega_1}$  es un espacio secuencialmente compacto de tamaño mayor a  $\mathfrak{c}$ . Este espacio es de Hausdorff y cumple la condición enunciada en [kannanHereditarily], pues al ser un producto de menos de  $\mathfrak{c}$  espacios separables, es separable. Mostrando que, desde ZFC, es imposible demostrar ese resultado, incluso en la clase de espacios compactos de Hausdorff.

Una manera de «rescatar» el corolario mencionado por Kannan y Rajagopalan es agregando la propiedad de Fréchet como la hipótesis general.

**Proposición 2.4.12.** *Sea  $X$  infinito, de Hausdorff y de Fréchet. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i) *Existe un denso  $D \subseteq X$  de  $X$  numerable tal que cada sucesión en  $D$  tiene una subsucesión convergente en  $X$ .*
- ii)  *$X$  es imagen continua de un espacio de Mrówka pseudocompacto.*

**Demostración.** (i)  $\rightarrow$  (ii) Supóngase (i). En el sentido de (prelim), defínase la colección  $CS(X) := \{\mathcal{A} \in AD(D) \mid \forall A \in \mathcal{A} \text{ (} A \text{ es una sucesión convergente)}$

en  $X$ ). Nótese que la familia  $\mathcal{A}_{D,X \setminus D}$ , definida como en ??, es un elemento de  $\text{CS}(X)$ . De forma análoga a la demostración del ??, constrúyase una familia  $\mathcal{A}$  que contenga a  $\mathcal{A}_{D,X \setminus D}$  y sea  $\subseteq$ -maximal de  $\text{CS}(X)$ .

Obsérvese que si  $A \in [D]^\omega$ , en virtud de la hipótesis y de que  $X$  es  $T_1$ , existe una sucesión convergente  $B \subseteq A$  en  $X$ . Dada la maximalidad de  $\mathcal{A}$  en  $\text{CS}(X)$ , existe  $C \in \mathcal{A}$  que tiene intersección infinita con  $B$ ; así mismo, con  $A$ . Lo anterior muestra que  $\mathcal{A} \in \text{MAD}(D)$ . Defínase  $f : \Psi_D(\mathcal{A}) \rightarrow X$  como:  $f(x)$ , si  $x \in D$ ; y  $f(x) = \lim(x)$ , si  $x \in \mathcal{A}$ . Como  $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}_{D,X \setminus D}$ ,  $f$  es sobreyectiva.

Finalmente, sea  $U \subseteq X$  abierto en  $X$  y supóngase que  $x \in f^{-1}[U] \cap \mathcal{A}$ . Luego  $f(x) = \lim(x) \in U$ ; como  $U$  es un abierto de  $X$  y  $x \rightarrow f(x)$  en  $X$ , entonces  $x \subseteq^* U$ . Pero  $x \subseteq D$ , así que  $x = f[x]$ ; en consecuencia  $x \subseteq^* f^{-1}[U]$ . Esto muestra que  $f^{-1}[U]$  es abierto en  $\Psi_D(\mathcal{A})$ ; y por tanto, que  $f$  es continua.

(ii)  $\rightarrow$  (i) Supóngase que  $\mathcal{A} \in \text{MAD}(\omega)$  y que  $f : \Psi(\mathcal{A}) \rightarrow X$  es sobreyectiva. Puesto que  $\omega$  es denso en  $\Psi(\mathcal{A})$ , se tiene que  $D := f[\omega]$  es denso en  $X$ .

Ahora, si  $A \in [D]^\omega$  es cualquier sucesión, entonces  $f^{-1}[A] \subseteq \omega$  es infinito. Como  $\mathcal{A}$  es maximal, es inmediato a ??, la existencia de una sucesión convergente  $B \subseteq f^{-1}[A] \cap \omega$ . Luego, cualquier biyección  $x : \omega \rightarrow B$  es una sucesión convergente en  $\Psi(\mathcal{A})$ , siendo  $fx : \omega \rightarrow A$  una sucesión convergente en  $X$ . ■

**Corolario 2.4.13.** *Sea  $X$  un espacio infinito, de Hausdorff, separable y secuencialmente compacto. Si  $X$  es de Fréchet, o regular y hereditariamente Lindelöf, entonces es imagen continua de un espacio de Mrówka pseudocompacto.*

Si  $X$  es un espacio metrizable y compacto, en automático se deduce (véase (prelims)) que es secuencialmente compacto y de Fréchet. Además es de Lindelöf, y con ello (prelim), separable. Así que:

**Corolario 2.4.14.** *Todo espacio metrizable y compacto es imagen continua de un espacio de Mrówka (pseudocompacto).*

El cubo de Hilbert,  $[0, 1]^\omega$ , es universal sobre la clase de espacios metrizables y separables (prelim), y más aun, todos sus subespacios son metrizables y separables. Así que tanto él, como todos sus subespacios compactos, son imágenes

continuas de espacios de Mrówka generados por familias maximales. En lo anterior caben: el conjunto de cantor  $2^\omega$ , el intervalo  $[0, 1]$  y todo continuo **Prelim**; lo cual es cuanto menos, digno de mencionar.



## 3 El compacto de Franklin

*Los espacios conocidos como compactos de Franklin son la extensión unipuntual de los espacios de Mrówka. En el presente capítulo se estudiarán sus cualidades, comenzando por dar una caracterización de los mismos en propiedades topológicas. Se demostrará que los compactos de Franklin asociados a un espacio de Mrówka pseudocompacto es un espacio secuencial de orden 2.*

*Se probará que el carácter del punto al infinito en el compacto de Franklin asociado a  $\Psi(\mathcal{A})$  es  $|\mathcal{A}|$ , y se demostrará que este espacio es de Fréchet si y sólo si su familia asociada es maximal en ninguna parte. Esto a su paso dará la negativa, dentro de ZFC, a una cuestión relevante que estuvo sin solución durante el siglo XX: ¿es la propiedad de Fréchet finitamente productiva?*

### 3.1. Sucesiones en $\mathcal{F}(\mathcal{A})$

**Definición 3.1.1.** Sea  $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$  cualquiera. El **compacto de Franklin generado por  $\mathcal{A}$**  es la extensión unipuntual del  $\Psi$ -espacio generado por  $\mathcal{A}$ , se denota por  $\mathcal{F}(\mathcal{A}) := \Psi(\mathcal{A}) \cup \{\infty_{\mathcal{A}}\}$ .

Cuando el contexto así lo permita, se omitirá el subíndice “ $\mathcal{A}$ ” y se denotará el punto al infinito simplemente por  $\infty$ .

Dado que un espacio topológico, no compacto, admite compactaciones Hausdorff únicamente cuando es Tychonoff y localmente compacto (véase [**fidelElementos**]), el compacto de Franklin resulta ser la compactación de Alexandroff de  $\Psi(\mathcal{A})$  únicamente cuando  $\mathcal{A}$  sea una familia casi ajena, lo que garantiza que  $\Psi(\mathcal{A})$  sea de Tychonoff; y sea *no compacta* (es decir, que no sea simultáneamente finita y maximal), lo cual obliga a que  $\Psi(\mathcal{A})$  sea no compacto; a razón de la ??.

**Consideración 3.1.2.** *Durante esta sección:*

- i) *Cualquier familia casi ajena que se considere, será no compacta.*
- ii) *Para cada subespacio compacto  $K \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ , se denotará por  $V(K)$  a la vecindad abierta de  $\infty: \{\infty\} \cup \Psi(\mathcal{A}) \setminus K$  (como  $\Psi(\mathcal{A})$  es Hausdorff, todos los abiertos al rededor de  $\infty$  son de esta forma).*
- iii) *Se utilizarán casi en exceso los resultados obtenidos en ?? y ??, así que no se referenciarán de ahora en más.*
- iv) *Todas las convergencias y operadores que aparezcan sin subíndices, se asumirán en  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ .*

Lo primero a observar es lo siguiente: dado que  $\Psi(\mathcal{A})$  no es compacto, al ser un espacio de Tychonoff y localmente compacto, se tiene efectivamente que  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$  es de Hausdorff, compacto (véase (prelim)); y en consecuencia, normal. Como es previsible, ciertas propiedades de  $\Psi(\mathcal{A})$  «suben» a la topología de  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ ; como ejemplo inmediato, la separabilidad se preserva.

**Observación 3.1.3.** *Sea  $\mathcal{A}$  una familia casi ajena. Entonces  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$  es de Hausdorff, compacto, normal, localmente compacto, separable y disperso.*

Comparando con el ?? con las observaciones recién hechas, vale mencionar que existen propiedades  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$  que tienen una dependencia más compleja con  $\Psi(\mathcal{A})$ . Iniciamos mostrando estas disparidades con lo próximo:

**Proposición 3.1.4.** *Para toda familia  $\mathcal{A}$  se tiene que  $\chi(\infty) = \aleph_0 + |\mathcal{A}|$ .*

**Demostración.** Es evidente que  $\aleph_0 \leq \chi(\infty)$ . Ahora, sea  $\mathcal{B}$  una base local de  $\infty$  en  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ . Para cada  $y \in \mathcal{A}$  fíjese (AC) un  $B_y \in \mathcal{B}$  con  $B_y \subseteq V(y \cup \{y\})$ . Obsérvese que la asignación  $y \mapsto B_y$  es inyectiva; pues, si  $x, y \in \mathcal{A}$  son distintos, entonces  $B_x \subseteq U(x \cup \{x\})$  y  $B_y \subseteq U(y \cup \{y\})$ , de donde  $x \in B_y \setminus B_x$ . Por lo tanto  $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{B}|$ , y en consecuencia  $\aleph_0 + |\mathcal{A}| \leq \chi(\infty)$ .



Para la desigualdad recíproca defínase:

$$\mathcal{B} = \{V(B \cup \bigcup h \cup h) \mid (B, h) \in [\omega]^{<\omega} \times [\mathcal{A}]^{<\omega}\}$$

y nótese que  $\mathcal{B}$  es un conjunto de vecindades de  $\infty$  en  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ .

Ahora, si  $K \subseteq \Psi(\mathcal{A})$  es compacto,  $h := K \cap \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$  y  $G := (K \cap \omega) \setminus \bigcup h \subseteq \omega$  son finitos, además  $V(G \cup \bigcup h \cup h) \subseteq V(K)$ . Lo cual demuestra que  $\mathcal{B}$  es base local para  $\infty$  en  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ . Dado que  $|\mathcal{B}| \leq |[\omega]^{<\omega} \times [\mathcal{A}]^{<\omega}| = \aleph_0 + |\mathcal{A}|$ , resulta que  $\chi(\infty) \leq \aleph_0 + |\mathcal{A}|$ . ■

En seguida a lo anterior se concluye que, para toda familia no compacta e infinita, el espacio  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$  no es de primero numerable.

El siguiente Corolario se puede enriquecer con ??.

**Corolario 3.1.5.** *Para toda familia no compacta  $\mathcal{A}$ , el espacio  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$  es primero numerable si y sólo si  $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0$ .*

El próximo Lema es clave por varios motivos; entre ellos, responde a una pregunta que sugiere la discusión previa al ?? ¿qué distingue a los subconjuntos de  $\omega$  casi ajenos con cada elemento de  $\mathcal{A}$ , con los elementos de  $\mathcal{F}^+(\mathcal{A})$ ?, encontramos la solución a esta interrogante por medio de la topología.

**Lema 3.1.6.** *Sean  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$  y  $B \subseteq \Psi(\mathcal{A})$  infinito, entonces:*

- i)  $\infty \in \text{sqcl}(B)$  si y sólo si  $|B \cap \mathcal{A}| \geq \omega$  o  $|B \cap \omega| \geq \omega$  y  $\mathcal{A} \restriction (B \cap \omega) = \emptyset$ .
- ii)  $\infty \in \text{cl}(B)$  si y sólo si  $|B \cap \mathcal{A}| \geq \omega$  o  $B \cap \omega \in \mathcal{F}^+(\mathcal{A})$ .

**Demostración.** (i) Para la suficiencia supóngase por absurdo que  $\infty \in \text{sqcl}(B)$ , esto es (véase (prelim)), existe  $C \in [B]^\omega$  tal que  $C \rightarrow \infty$ ; que  $B \cap \mathcal{A}$  es finito; y que  $a \in \mathcal{A}$  es un elemento tal que  $a \cap (B \cap \omega)$  es infinito. Obsérvese que, necesariamente  $a \cap C$  es infinito. Como  $C \rightarrow \infty$  y  $a \cap C \subseteq C$  es infinito, ocurre que  $a \cap C \rightarrow \infty$ . Sin embargo,  $a \cap C \subseteq a$  y a razón del ??,  $a \cap C \rightarrow a$  en  $\Psi(\mathcal{A})$ ; así mismo en  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ . Lo anterior es imposible, ya que  $a \neq \infty$  y  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$  es de Hausdorff.

Recíprocamente, si  $B \cap \mathcal{A}$  es infinito, existe  $C_0 \in [B \cap \mathcal{A}]^\omega$ ; y, si  $K \subseteq \Psi(\mathcal{A})$  es cualquier compacto, entonces  $C_0 \setminus V(K) = C_0 \cap K \subseteq K \cap \mathcal{A}$  es finito, mostrando que  $C_0 \rightarrow \infty$  y que  $\infty \in \text{sqcl}(B)$ .

Ahora, supóngase que  $B \cap \omega$  es infinito y casi ajeno con cada elemento de  $\mathcal{A}$ . Si  $\infty \notin \text{sqcl}(B)$ , entonces  $B \cap \omega \not\rightarrow \infty$  y existiría un compacto  $K_0 \subseteq \Psi(\mathcal{A})$  tal que  $S := (B \cap \omega) \cap K_0$  es infinito.  $S \subseteq K$  es un elemento en  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ ; a consecuencia de esto y de ??, existe cierto  $a \in \mathcal{A}$  con  $S \cap a$  infinito; de donde,  $B \cap a$  es infinito, contradiciendo la suposición sobre  $B$ . Por tanto,  $\infty \in \text{sqcl}(B)$ .

(ii) Para la suficiencia, supóngase que  $\infty \in \text{cl}(B)$  y que  $B \cap \mathcal{A}$  es finito. Resulta necesario que  $\infty \in \text{cl}(B \cap \omega)$ . Si  $K \subseteq \Psi(\mathcal{A})$  es compacto,  $(B \cap \omega) \cap V(K) \neq \emptyset$ , prohibiendo que  $B \cap \omega \subseteq K$ , por tanto,  $B \cap \omega \notin \mathcal{F}(\mathcal{A})$ .

Para la necesidad, si  $B \cap \mathcal{A}$  es infinito, existe  $C \subseteq B \cap \mathcal{A}$  numerable y por el inciso anterior  $C \rightarrow \infty$ , de donde  $\infty \in \text{cl}(C) \subseteq \text{cl}(B)$ . Y, si  $B \cap \omega \in \mathcal{F}^+(\mathcal{A})$  y  $K \subseteq \Psi(\mathcal{A})$  es compacto, resulta que  $B \cap \omega \not\subseteq K$  y con ello  $B \cap V(K) \neq \emptyset$ , mostrando que  $\infty \in \text{cl}(B)$ . ■

Si  $\mathcal{A}$  es una familia maximal, la condición (i) del resultado anterior implica que ninguna sucesión contenida en  $\omega$  es convergente a  $\infty$ . A continuación se establecen las únicas convergencias posibles en el compacto de Franklin.

**Corolario 3.1.7.** *Sean  $\mathcal{A} \in \text{MAD}(\omega)$  infinita y  $X \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{A})$  numerable. Entonces  $X$  es convergente si y sólo si  $X \subseteq^* \mathcal{A}$ , o para algún  $a \in \mathcal{A}$ ,  $X \subseteq^* a$ , en cuyo caso:  $X \rightarrow \infty$ , o  $X \rightarrow a$ , respectivamente.*

**Demostración.** El recíproco es inmediato a razón de ?? y el Lema previo. Para la suficiencia asúmase que  $X \rightarrow x$  en el compacto de Franklin. Si  $x = \infty$ , se sigue del Lema anterior y la maximalidad de  $\mathcal{A}$  que  $X \subseteq^* \mathcal{A}$ . En otro caso, se puede suponer sin pérdida de generalidad que  $X \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ , siguiéndose de ?? que  $X$  debe estar casi contenido en algún elemento de  $\mathcal{A}$ . ■

El siguiente comportamiento es propio de las familias casi ajenas maximales, muestra que el compacto de Franklin asociado a una familia de este tipo tiene orden secuencial 2. Además se puede verificar fácilmente la diferencia entre las distintas clausuras secuenciales de, por ejemplo, el denso  $\omega \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{A})$ , donde

$\text{sqcl}^1(\omega) = \Psi(\mathcal{A})$  y  $\text{sqcl}^2(\omega) \setminus \text{sqcl}^1(\omega) = \{\infty\}$ . Se configura también de esta manera, el ejemplo de un espacio secuencial, compacto, de Hausdorff y separable, que no es de Fréchet (recuérdese que un espacio es de Fréchet si y sólo si su orden secuencial es 1).

**Corolario 3.1.8.** *Sea  $\mathcal{A} \in \text{MAD}(\omega)$  infinita, entonces  $\text{so}(\mathcal{F}(\mathcal{A})) = 2$ .*

**Demostración.** Nótese que  $\text{sqcl}(\omega) \not\subseteq \text{cl}(\omega)$ . Efectivamente; como  $\omega$  es denso en  $\Psi(\mathcal{A})$ , lo es también en  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ ; por lo que  $\infty \in \text{cl}(\omega)$ . De darse  $\infty \in \text{sqcl}(\omega)$ , por el Corolario previo, debería existir  $B \subseteq \omega \cap \mathcal{A}$  numerable, lo cual es imposible. Por lo tanto,  $\text{so}(\mathcal{F}(\mathcal{A})) \geq 2$ .

Ahora, sea  $X \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{A})$ , sin pérdida de generalidad infinito, y sea  $x \in \text{cl}(X)$ . Dado que  $\omega$  es discreto, de ocurrir  $x \in \omega$ , sería necesario que  $x \in X \subseteq \text{sqcl}^2(X)$ . Por otro lado, si  $x \in \mathcal{A}$ , como  $\{x\} \cup x$  es una vecindad abierta de  $x$ , por ser  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$  un espacio  $T_1$ , debe existir  $A \subseteq x \cap X$  numerable, concluyéndose a partir del ?? que  $A \rightarrow x$ ; y por ende,  $x \in \text{sqcl}(X) \subseteq \text{sqcl}^2(X)$ .

Finalmente, si  $x = \infty$ , entonces por ??,  $B := X \cap \omega \in \mathcal{F}^+(\mathcal{A})$ ; y como  $\mathcal{A}$  es maximal, por el ??, existe  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  infinito, sin pérdida de generalidad numerable, tal que para cada  $b \in \mathcal{B}$ , el conjunto  $B \cap b$  es infinito. Por ello, y ??,  $\mathcal{B} \subseteq \text{sqcl}(X)$ , desprendiéndose de ??, que  $x \in \text{sqcl}^2(X)$ . En todo caso, se ha mostrado que  $\text{cl}(X) \subseteq \text{sqcl}^2(X)$  y por ende,  $\text{so}(\mathcal{F}(\mathcal{A})) \leq 2$ . ■

**Corolario 3.1.9.** *Para cada  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$  se tiene que  $\text{so}(\mathcal{F}(\mathcal{A})) \leq 2$ .*

#### Teorema 3.1.10

Sea  $X$  un espacio topológico infinito, de Hausdorff y separable.  $X$  es homeomorfo a un compacto de Franklin generado por una familia maximal infinita si y sólo si existe  $x_0 \in X$  tal que:  $x_0$  es el único punto de acumulación de  $\text{der}(X)$  y  $x_0 \notin \text{sqcl}(X \setminus \text{der}(X))$ .

**Demostración.** Para la suficiencia basta suponer que  $X = \mathcal{F}(\mathcal{A})$ . Como  $\Psi(\mathcal{A})$  es denso en  $X$ , resulta que  $\text{der}(X) = \{\infty\} \cup \text{der}_{\Psi(\mathcal{A})}(\Psi(\mathcal{A})) = \{\infty\} \cup \mathcal{A}$ . Consecuentemente  $\text{der}_{\text{der}(X)}(\text{der}(X)) \subseteq \{\infty\}$ , pues  $\mathcal{A}$  es un subespacio discreto de  $\text{der}(X)$ . La contención recíproca ocurre; pues cada subespacio compacto de  $\Psi(\mathcal{A})$  tiene intersección finita; particularmente no vacía, con el conjunto (infinito)  $\mathcal{A}$ . Así que  $\infty$  es el único punto de acumulación de  $\text{der}(X)$ . Además,  $X \setminus \text{der}(X) = \omega$ , y dada la prueba del resultado anterior,  $\infty \notin \text{sqcl}(\omega)$ .

Para la necesidad, sea  $x_0 \in X$  el punto que satisface las condiciones del enunciado. Defínase  $Y := X \setminus \{x_0\}$ , se mostrará primero que  $Y \cong \Psi(\mathcal{A})$  para alguna familia maximal  $\mathcal{A}$ . Efectivamente, nótese que  $Y$  es infinito, de Hausdorff y separable (ya que  $Y$  es abierto en  $X$ ). Haciendo uso del ??, es suficiente mostrar lo subsecuente:

- i) ( $Y$  es regular) Dado que  $X$  es compacto, de Hausdorff es normal y particularmente, regular. Esto prueba que  $Y \subseteq X$  es regular.
- ii) ( $\text{der}_Y(Y)$  es discreto) Efectivamente, si  $y \in \text{der}_Y(Y)$  es cualquiera, entonces  $y \in Y$  es punto de acumulación de  $X$ . Como  $y \neq x_0$  y  $x_0$  es el único punto de acumulación de  $\text{der}_X(X)$ ,  $\{y\}$  es abierto en  $\text{der}_X(X)$ ; y por tanto,  $\{y\}$  es abierto en  $\text{der}_Y(Y)$ . Mostrando que  $\text{der}_Y(Y)$  es discreto.
- iii) (Si  $B \subseteq Y$  es discreto, abierto y cerrado a la vez, entonces  $B$  es finito) Supóngase que  $B \subseteq Y$  es discreto, abierto y cerrado a la vez. Por ser  $B$  discreto y abierto, se da  $B \subseteq X \setminus \text{der}(X)$ . Ahora, si  $B$  es infinito (sin pérdida de generalidad, numerable) se tiene de la hipótesis que  $B \not\ni x_0$ ; así, existe una vecindad de  $x_0$ ; a saber  $U$ , de modo que  $B \setminus U$  es infinito. Sin embargo,  $B \cap U$  es cerrado en vista de que  $B$  es cerrado; por ello, tal conjunto es cerrado, discreto e infinito en  $X$ ; lo que contradice que  $X$  sea compacto y  $T_1$ . Por ello, es necesario que  $B$  sea finito. Concluyéndose de ??, la existencia de una familia  $\mathcal{A} \in \text{MAD}(\omega)$  de modo que  $Y \cong \Psi(\mathcal{A})$ .

Para finalizar, obsérvese que  $\{x_0\}$  no es abierto en  $X$ , pues de lo contrario no podría ser punto de acumulación de ninguno de sus subespacios. Así,  $Y$  es denso en  $X$  y como  $X$  es de Hausdorff, compacto, con  $X \setminus Y = \{x_0\}$ , resulta que  $X$  es la compactación unipuntual de  $Y \cong \Psi(\mathcal{A})$ ; esto es,  $X \cong \mathcal{F}(\mathcal{A})$ . ■

## 3.2. La propiedad de Fréchet

Continuando con los frutos del ??, se extrae el siguiente Corolario; este relaciona las propiedades de combinatoria de las familias casi ajenas con propiedades de convergencia.

**Lema 3.2.1.** Sean  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$  y  $X \subseteq \omega$ . Entonces  $\infty \in \text{sqcl}(X)$  si y sólo si  $\mathcal{A} \restriction X \notin \text{MAD}(X)$ .

**Demostración.** Si  $\infty \in \text{sqcl}(X)$ , entonces por el ??,  $\mathcal{A} \restriction X = \emptyset$ , suigiéndose en automático de ?? y ?? que  $\mathcal{A} \restriction X \notin \text{MAD}(X)$ .

De forma recíproca, si  $\mathcal{A} \restriction X \notin \text{MAD}(X)$ , entonces existe  $B \in [X]^\omega$  casi ajeno con cada elemento de  $\mathcal{A} \restriction X$ . Nótese que entonces  $B \cap X$  es casi ajeno con cada elemento de  $\mathcal{A}$ ; y por lo tanto,  $B \rightarrow \infty$ , dado el ??. ■

La contención recíproca de ?? encapsula exáctamente la conexión que existe entre la combinatoria de  $\mathcal{A}$  y la propiedad de Fréchet en su compacto de Franklin asociado.

**Corolario 3.2.2.** Para cada  $\mathcal{A} \in \text{AD } A$ , son equivalentes:

- i)  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$  es de Fréchet.
- ii)  $\{X \in [\omega]^\omega \mid \mathcal{A} \restriction X = \emptyset\} = \mathcal{F}^+(\mathcal{A})$ .
- iii)  $\mathcal{A}$  es maximal en ninguna parte.

**Demostración.** (i)  $\rightarrow$  (ii) Supóngase que  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$  es de Fréchet, basta probar la contención recíproca de (ii). Si  $X \in \mathcal{F}^+(\mathcal{A})$ , entonces  $\infty \in \text{cl}(X) = \text{sqcl}(X)$  por ??, obteniéndose del mismo resultado que  $\mathcal{A} \restriction X = \emptyset$ .

(ii)  $\rightarrow$  (iii) Supóngase (ii) y sea  $X \in \mathcal{F}^+(\mathcal{A})$  cualquiera. Dada la hipótesis, ?? y el Lema previo, resulta que  $\mathcal{A} \restriction X \notin \text{MAD}(X)$ .

(iii)  $\rightarrow$  (i) Supóngase que  $\mathcal{A}$  es maximal en ninguna parte. Como  $\Psi(\mathcal{A})$  es de Fréchet (por ser primero numerable) basta verificar la propiedad de Fréchet en  $\infty \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$ . Sea  $X \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{A})$  de modo que  $\infty \in \text{cl}(X)$ , entonces por ??,  $X \cap \mathcal{A}$  es

infinito o  $X \cap \omega \in \mathcal{F}^+(\mathcal{A})$ . Si ocurre lo primero, sea  $B \subseteq X \cap \mathcal{A}$  numerable y nótese que entonces  $B \rightarrow \infty$ , lo cual basta para mostrar que  $\infty \in \text{sqcl}(X)$ . Si ocurre el segundo caso, de la hipótesis se obtiene  $A \restriction (X \cap \omega) \notin \text{MAD}(X \cap \omega)$ , probando que  $\infty \in \text{sqcl}(X \cap \omega) \subseteq \text{sqcl}$  (en virtud ??). En ambos casos,  $\infty \in \text{sqcl}(X)$ ; y por tanto  $\text{sqcl}(X) = \text{cl}(X)$ . ■

Por el Teorema de Simon (??), cualquier familia maximal de tamaño  $\kappa$  contiene una familia maximal en ninguna parte del mismo tamaño. Considerando entonces cualquier familia maximal de tamaño  $\mathfrak{c}$ , la ?? concede el siguiente ejemplo, testigo de lo «lejos» que están entre sí las propiedades 1 AN y de Fréchet, incluso en la clase de espacios compactos, de Hausdorff.

**Ejemplo 3.2.3.** *Existe un espacio compacto, de Hausdorff, separable y de Fréchet que contiene un punto de carácter  $\mathfrak{c}$ .*

La «traducción» a la propiedad de Fréchet dada en ?? esconde la capacidad de solucionar un problema relevante en topología general; determinar si el producto de dos espacios de Fréchet es, nuevamente, de Fréchet, la respuesta es negativa.

**Proposición 3.2.4.** *Sea  $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  una grieta. Si  $\mathcal{A} := \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$  es maximal en alguna parte, entonces  $M := \mathcal{F}(\mathcal{B}) \times \mathcal{F}(\mathcal{C})$  no es de Fréchet.*

**Demostración.** Supóngase que  $X \in \mathcal{F}^+(\mathcal{A})$  es un conjunto tal que se satisface  $\mathcal{A} \restriction X \in \text{MAD}(X)$  y sea  $B := \{(n, n) \mid n \in X\}$ .

Como  $X \in \mathcal{F}^+(\mathcal{A})$  y  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ , resulta inmediato a ?? que  $X \in \mathcal{F}^+(\mathcal{B})$  y  $X \in \mathcal{F}^+(\mathcal{C})$ . De aquí que  $\infty_{\mathcal{B}} \in \text{cl}_{\mathcal{F}(\mathcal{B})}$  y  $\infty_{\mathcal{C}} \in \text{cl}_{\mathcal{F}(\mathcal{C})}$ , a consecuencia del ?. Por lo anterior,  $(\infty_{\mathcal{B}}, \infty_{\mathcal{C}}) \in \text{cl}_M(B)$ .

Ahora, si ocurriese  $(\infty_{\mathcal{B}}, \infty_{\mathcal{C}}) \notin \text{sqcl}_M(B)$ , en virtud de la continuidad de las funciones proyección, resultaría que  $Y \rightarrow \infty_{\mathcal{B}}$  en  $\mathcal{F}(\mathcal{B})$  y  $Y \rightarrow \infty_{\mathcal{C}}$  en  $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ . Gracias a ??, lo anterior desembocaría en que  $Y \subseteq X$  es infinito y casi ajeno con cada elemento de  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$ , así pues, con cada elemento de  $\mathcal{A} \restriction X$ , contradiciendo la maximalidad de  $\mathcal{A} \restriction X$  en  $X$ . Así que  $\text{sqcl}_M(B) \subsetneq \text{cl}_M(B)$ , y  $M$  no es de Fréchet. ■

Combinando con el Teorema de Simon (??), se tiene la siguiente fuente de contraejemplos: Cada vez que  $\mathcal{A}$  sea una familia infinita y maximal (por ello, no compacta), se pueden dar dos familias  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$  no vacías, maximales en ninguna parte, de modo que  $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ . Y se desprende de la Proposición previa que  $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \times \mathcal{F}(\mathcal{C})$  no es de Fréchet; pues claramente  $\mathcal{A}$  es maximal en alguna parte, ya que  $\omega \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$  (véase el ??). Además,  $\mathcal{F}(\mathcal{B})$  y  $\mathcal{F}(\mathcal{C})$  son ambos de Fréchet, en virtud del ??. Esta discusión es la prueba del siguiente Corolario:

**Corolario 3.2.5.** *Existen dos espacios compactos, de Hausdorff, separables y de Fréchet cuyo producto no es de Fréchet.*

Es decir, la propiedad de Fréchet no es (finitamente) productiva; ni siquiera en una clase «tan buena» como lo es la de los espacios compactos, de Hausdorff, separables.





## 4 Normalidad en los espacios de Mrówka

*La Conjetura de Moore (MC) es el enunciado: todo espacio normal y de Moore es metrizable. Se trata de un problema lanzado a la comunidad matemática por Jones en 1933 que atiende a la cuestión ¿qué requiere un espacio de Moore para ser metrizable?. Este problema marcó un antes y un después para la topología general, consolidándose como uno de los grandes problemas, probablemente de los más importantes, en la topología general del siglo XX. MC es, presumiblemente, independiente de ZFC [nyikosMoore]. Lo que haremos en este capítulo será mostrar la independencia de una versión débil de MC, la que llamaremos «Conjetura débil de Moore» (WMC): todo espacio separable, normal y de Moore es metrizable.*

*En el año 1937 [jonesCM], el propio Jones muestra la consistencia de WMC, pero no sería sino hasta 1969 cuando Tall, en su tesis doctoral [tallTesis], logra establecer una equivalencia para WMC en términos de la existencia de  $Q$ -sets no numerables. Silver probó que la existencia de tales espacios es consistente con ZFC. La meta de este capítulo es exponer las contribuciones de Jones, Silver y Tall, lo cual culmina con la independencia de WMC de la axiomática ZFC.*

### 4.1. Independencia de WMC

Todo espacio de Mrówka  $\Psi(\mathcal{A})$  es de Moore y separable, algo demostrado en ??; además, cuando  $\mathcal{A}$  es más que numerable, resulta que  $\Psi(\mathcal{A})$  no es metrizable (véase ??). Así que, si ocurre WMC, entonces ningún espacio  $\Psi(\mathcal{A})$ , con  $|\mathcal{A}| > \omega$ , puede ser normal. Lo que atañe a la presente sección presenta una dificultad mayor, se mostrará el recíproco de la anterior implicación.

**Proposición 4.1.1.** Sea  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$ , se cumple:

- i) Si  $|\mathcal{A}| \leq \omega$ , entonces  $\Psi(\mathcal{A})$  es normal.
- ii) Si  $|\mathcal{A}| > \omega$  y  $\Psi(\mathcal{A})$  es normal, entonces  $\mathcal{A} \notin \text{MAD}(\omega)$  y  $|\mathcal{A}| < \mathfrak{c}$ .

**Demostración.** (i) Por la caracterización ??, todo espacio de Mrówka numerable es metrizable, particularmente normal (**prelim**).

(ii) Supóngase que  $\mathcal{A}$  es infinita y que  $\Psi(\mathcal{A})$  es normal. Si  $\mathcal{A}$  fuera maximal, entonces por ?? y ??, se tiene que  $\Psi(\mathcal{A})$  es pseudocompacto pero no numerablemente compacto. Lo cual (por (**prelim**)) imposibilita que  $\Psi(\mathcal{A})$  sea normal. Por tanto,  $\mathcal{A}$  no es maximal.

Nótese que  $\mathcal{A}$  es un subespacio cerrado y discreto de  $\Psi(\mathcal{A})$  de tamaño  $\mathfrak{c}$  (en virtud de ??). Así, de la separabilidad y normalidad de  $\Psi(\mathcal{A})$ , junto con el Lema de Jones (**prelim**), se obtiene que  $2^{|\mathcal{A}|} \leq 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ , lo cual obliga a que  $|\mathcal{A}| < \mathfrak{c}$ . ■

La proposición anterior dicta que, para encontrar espacios de Mrówka que atestigüen la falsedad de WMC, es necesario buscar entre aquellos generados por familias casi ajenas de tamaño estrictamente entre  $\aleph_0$  y  $\mathfrak{c}$ , consecuentemente:

**Corolario 4.1.2.** Si CH ocurre, entonces ningún espacio de Mrówka más que numerable puede ser normal.

**Proposición 4.1.3.** Sean  $\mathcal{A}$  una familia casi ajena y  $F, G \subseteq \Psi(\omega)$  cerrados ajenos. Son equivalentes:

- i)  $F$  y  $G$  se separan por abiertos ajenos de  $\Psi(\mathcal{A})$ .
- ii)  $F \cap \mathcal{A}$  y  $G \cap \mathcal{A}$  se separan por abiertos ajenos de  $\Psi(\mathcal{A})$ .
- iii) La grieta  $(F \cap \mathcal{A}, G \cap \mathcal{A})$  está separada.

**Demostración.** La implicación (i)  $\rightarrow$  (ii) es inmediata.

(ii)  $\rightarrow$  (iii) Supóngase que  $U, V \subseteq \Psi(\mathcal{A})$  son abiertos ajenos con  $F \cap \mathcal{A} \subseteq U$  y  $G \cap \mathcal{A} \subseteq V$ . Para cada  $a \in F \cap \mathcal{A} \subseteq U$  se tiene que  $a \subseteq^* U$ . Consecuentemente, para cada  $b \in G \cap \mathcal{A} \subseteq V$  ocurre que  $b \cap U =^* V \cap U = \emptyset$ . Por lo tanto,  $U$  es separador de  $F \cap \mathcal{A}$  y  $G \cap \mathcal{A}$ .

(iii)  $\rightarrow$  (i) Supóngase que  $D \subseteq \omega$  es separador de  $F \cap \mathcal{A}$  y  $G \cap \mathcal{A}$ . Nótese que  $F \subseteq U := F \cup D \setminus G$  y que  $U$  es abierto. En efecto, si  $a \in U \cap \mathcal{A} \subseteq F \cap \mathcal{A}$ , entonces  $a \subseteq^* D$  y, por ser  $G$  cerrado y ajeno a  $F$ ,  $a \subseteq^* \Psi(\mathcal{A}) \setminus G$ . Luego,  $a \subseteq^* D \setminus G \subseteq U$ .

Como  $D$  es separador de  $F \cap \mathcal{A}$  y  $G \cap \mathcal{A}$ ;  $\omega \setminus D$  es separador de  $G \cap \mathcal{A}$  y  $F \cap \mathcal{A}$ , y resulta análogo que  $G \subseteq V := G \cup (\omega \setminus D) \setminus F$  y  $V$  es abierto. Lo anterior demuestra que  $F$  y  $G$  se separan por los abiertos ajenos  $U$  y  $V$ . ■

Del ?? y la ?? se desprende la posterior equivalencia:

**Corolario 4.1.4.** *Para cada familia casi ajena  $\mathcal{A}$  son equivalentes:*

- i)  $\Psi(\mathcal{A})$  es normal.
- ii) Para cada  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ , la grieta  $(\mathcal{B}, \mathcal{A} \setminus \mathcal{B})$  está separada.

La traducción de la ?? en términos «combinatorios» es el siguiente Corolario; mismo que por cierto, prueba el ?? de la ??.

**Corolario 4.1.5.** *Sea  $\mathcal{C} \in \text{AD}(\omega)$ , entonces:*

- i) Si  $|\mathcal{C}| \leq \aleph_0$ , toda grieta contenida en  $\mathcal{C}$  está separada.
- ii) Si  $\mathcal{C}$  es infinita y,  $|\mathcal{C}| = \mathfrak{c}$  o  $\mathcal{C} \in \text{MAD}(\omega)$ ; entonces  $\mathcal{C}$  contiene una grieta que no está separada.

Hay una diferencia notable entre los conceptos de familia no separable y familia inseparable, en términos topológicos, las familias inseparables (definidas en ??) generan espacios de Mrówka más que no normales. Cualquier familia de Luzin (??) es inseparable, lo cual regala un ejemplo «canónico» dentro de ZFC de espacio separable, de Moore y no normal de tamaño  $\mathfrak{c}$ .

**Corolario 4.1.6.** *Particularmente, existe un espacio de Mrówka con tamaño  $\aleph_1$ , no es normal; a saber, el generado por una familia de Luzin.*

Ahora, por lo demostrado en el ??, se tiene el siguiente corolario:

**Corolario 4.1.7.** *Sea  $\mathcal{A} \in \text{AD}(\omega)$ . Si  $\Psi(\mathcal{A})$  es normal, entonces  $\mathcal{A}$  no contiene  $n$ -grietas de Luzin.*

Dado todo lo realizado hasta el momento, el corolario anterior es relativamente inmediato; en contraste, su recíproco logra caracterizar por completo la normalidad de los espacios de Mrówka, en  $\text{ZFC} + \text{MA}$ , [**hruAlmost**]. Tal resultado es meritorio de un estudio mucho más profundo y dedicado, mismo que escapa a los propósitos de este trabajo.

### 4.1.1. Consistencia de WMC

Siguiendo la técnica de Tall, probaremos la independencia de WMC de ZFC utilizando, a modo de intermediario, los siguientes espacios:

**Definición 4.1.8.** *Un  $Q$ -set es un espacio metrizable, separable y tal que todos sus subespacios son de tipo  $G_\delta$  (equivalentemente, todos sus subespacios son de tipo  $F_\sigma$ ).*

Como primer familia de ejemplos de espacios  $Q$ -set se tiene:

**Ejemplo 4.1.9.** *Cualquier espacio  $X$  metrizable, a lo más numerable, es un  $Q$ -set. Efectivamente, nótese que  $X$  es separable. Y además, si  $A \subseteq X$  es cualquiera, entonces  $A = \bigcup \{\{a\} \mid a \in A\}$  es de tipo  $F_\sigma$ .*

Se comenzará por observar que todo espacio  $Q$ -set es, salvo homeomorfismos, un subespacio de  $\mathbb{R}$  (y del conjunto de Cantor,  $2^\omega$ ). El siguiente Lema, incluido en [**kuratowskiTopology**] por Kuratowski; se enunciará y demostrará con terminología moderna.

**Lema 4.1.10.** *Sea  $X$  un espacio metrizable por la métrica  $d$ . Si  $|X| < \mathfrak{c}$ , entonces  $X$  es cero-dimensional.*

**Demostración.** Supóngase que  $|X| < \mathfrak{c}$ . Basta corroborar que cada  $x \in X$  admite una base local de abiertos y cerrados. Sean  $x \in X$  y  $\varepsilon > 0$ .

Supóngase ahora que para cada  $\delta \in (0, \varepsilon)$ , el conjunto  $\text{fr}(B(x, \delta))$  es no vacío, y fíjese (AC) un elemento  $x_\delta \in \text{fr}(B(x, \delta)) \subseteq X$ . Como  $|(0, \varepsilon)| = \mathfrak{c}$ , la asignación  $\delta \rightarrow x_\delta$  no puede ser inyectiva. Consecuentemente, existen distintos  $\delta, \delta' \in (0, \varepsilon)$  de modo que  $\text{fr}(B(x, \delta)) \cap \text{fr}(B(x, \delta')) \neq \emptyset$ . Pero esto es imposible, dado que  $\delta \neq \delta'$ . Por lo tanto, para cada  $\varepsilon > 0$  se puede fijar (AC) cierto  $\delta_\varepsilon \in (0, \varepsilon)$  tal que  $\text{fr}(B(x, \delta_\varepsilon)) = \emptyset$ ; esto es,  $B(x, \delta_\varepsilon)$  es abierto y cerrado a la vez.

Por construcción,  $\{B(x, \delta_\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$  es una base local para  $x$  en  $X$ . ■

**Proposición 4.1.11.** *Para todo espacio  $X$  son equivalentes:*

- i)  $X$  es un  $Q$ -set.
- ii)  $X$  se encaja en  $2^\omega$  y todos sus subespacios son de tipo  $G_\delta$ .
- iii)  $X$  se encaja en  $\mathbb{R}$  y todos sus subespacios son de tipo  $G_\delta$ .

**Demostración.** Todo espacio metrizable y separable tiene peso numerable (**prelim**), así que cualquier espacio metrizable, separable y cero-dimensional se encaja en  $2^\omega$  (véase [**fidelElementos**]). Además,  $2^\omega$  es subespacio de  $\mathbb{R}$ , y todo subespacio de  $\mathbb{R}$  es metrizable y separable. Así que, basta probar que todo  $Q$ -set es cero-dimensional.

Seas  $X$  un  $Q$ -set, como  $X$  es metrizable y separable, entonces es 2 AN. Sea  $\mathcal{B}$  una base numerable para  $X$ . Como  $X$  es  $Q$ -set, para cada  $A \subseteq X$  fíjese (AC) una colección a lo más numerable de abiertos  $\mathcal{U}_A$  de modo que  $A = \bigcap \mathcal{U}_A$ . Y como  $\mathcal{B}$  es base; de nuevo haciendo uso de AC, para cada abierto  $U \in \mathcal{U}_A$  fíjese  $\mathcal{B}_U \subseteq \mathcal{B}$  de modo que  $U = \bigcup \mathcal{B}_U$ .

Lo anterior permite definir  $\mathcal{P}(X) \rightarrow [\mathcal{P}(\mathcal{B})]^{<\omega}$  por medio de la correspondencia:  $A \mapsto \{\mathcal{B}_U \mid U \in \mathcal{U}_A\}$ . Tal asignación es inyectiva; en efecto, si  $A, B \subseteq X$  y

$\{\mathcal{B}_U \mid U \in \mathcal{A}\} = \{\mathcal{B}_U \mid U \in B\}$ , resulta que:

$$\mathcal{U}_A = \{\bigcup \mathcal{B}_U \mid U \in \mathcal{U}_A\} = \{\bigcup \mathcal{B}_U \mid U \in \mathcal{U}_B\} = \mathcal{U}_B$$

y con ello  $A = \bigcap \mathcal{U}_A = \bigcap \mathcal{U}_B = B$ . De esta manera:

$$2^{|X|} \leq |[\mathcal{P}(\mathcal{B})]^{\leq \omega}| \leq (2^{|B|})^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

Por ello  $|X| < \mathfrak{c}$  la cero-dimensionalidad de  $X$  se obtiene del Lema previo. ■

**Observación 4.1.12.** *Todo  $Q$ -set tiene tamaño menor que  $\mathfrak{c}$ . Consecuentemente, CH implica que todos los espacios  $Q$ -set son a lo más numerables.*

El paralelismo del resultado anterior con el ?? no es coincidencia. La meta ahora es mostrar que la existencia de  $Q$ -sets no numerables es equivalente a la existencia de espacios de Mrówka no numerables y normales; más aún, si estos espacios no existen, entonces WMC se satisface.

**Lema 4.1.13.** *Supóngase que  $X$  es un espacio normal, de Moore, no metrizable y que  $D \subseteq X$  es denso a lo más numerable; entonces existe  $A \subseteq X \setminus D$  más que numerable, discreto y cerrado en  $X$ .*

**Demostración.** A consecuencia del Tereoma de Bing (prelim),  $X$  no es colectivamente normal. Sea  $\mathcal{A}$  una familia discreta de cerrados de  $X$ , cuyos elementos no se pueden separar por abiertos ajenos, como  $X$  es normal,  $\mathcal{A}$  es infinita. De igual forma, por normalidad de  $X$ , para cada par de cerrados ajenos,  $F$  y  $G$ , elíjanse (AC) abiertos ajenos  $W(F, G), S(F, G)$  con  $F \subseteq W(F, G)$  y  $G \subseteq S(F, G)$ .

*Afirmación.*  $\mathcal{A}$  es más que numerable.

*Demostración.* Supóngase que  $\mathcal{A}$  está enumerado como  $\{A_n \mid n \in \omega\}$ . Por ser  $\mathcal{A}$  una familia discreta de cerrados de  $X$ , si  $n \in \omega$ , entonces el conjunto  $B_n := \bigcup \{A_m \mid m > n\}$  es cerrado.

Por recursión defínanse  $U_0 := W(A_0, B_0)$  y  $V_0 := S(A_0, B_0)$ ; y, para cada  $n \in \omega$ ,  $U_{n+1} := W(A_{n+1}, B_{n+1}) \cap V_n$  y  $V_{n+1} := S(A_{n+1}, B_{n+1}) \cap U_n$ .

Por construcción,  $\{U_n \mid n \in \omega\}$  es una familia de abiertos, ajenos por pares tales que para cada  $n \in \omega$  se tiene  $A_n \subseteq U_n$ . Así, los elementos de  $\mathcal{A}$  se separan por abiertos ajenos; contradiciendo su elección.  $\square$

Dada la afirmación anterior, y fijando para cada  $a \in \mathcal{A}$  un elemento  $x_a \in \mathcal{A}$ , se obtiene un conjunto más que numerable  $B := \{x_a \mid a \in \mathcal{A}\}$ ; mismo que por ser  $\mathcal{A}$  familia discreta y  $X$  de Hausdorff, resulta ser cerrado y discreto.

Por último nótese que cada subespacio de  $B$  es discreto y cerrado en  $X$ ; pues  $B$  es discreto y cerrado en  $X$ . Particularmente,  $A := B \setminus D$  es discreto, discreto en  $X$  y no numerable (pues  $B$  es más que numerable y  $D$  es numerable).  $\blacksquare$

El siguiente teorema aparece en la tesis doctoral de Franklin David Tall (ver [tallTesis]), y es la pieza clave para atacar la Conjetura Débil de Moore.

#### Teorema 4.1.14 (Tall)

Si  $\kappa$  es un cardinal infinito, son equivalentes:

- i) Existe un espacio de Moore, normal, no metrizable de tamaño  $\kappa$ .
- ii) Existe un espacio de Mrówka normal de tamaño  $\kappa$ .
- iii) Existe un  $Q$ -set de tamaño  $\kappa$ .

**Demostración.** (i)  $\rightarrow$  (ii) Supóngase que  $X$  es un espacio, normal, de Moore y no metrizable de tamaño  $\kappa$  y sea fíjese  $D \subseteq X$  denso numerable de  $X$ . Por ??,  $D$  es infinito y existe un subespacio  $A \subseteq X \setminus D$  más que numerable; discreto y cerrado de  $X$ . Como  $X$  es de Hausdorff y primero numerable, considérese  $\mathcal{A}_{D,A} = \{A_x \in [D]^\omega \mid x \in A\}$ ; la familia de sucesiones en  $D$  convergentes a  $A$  (definida en ??), donde cada  $A_x$  converge a  $x$ . Por la ??,  $|\mathcal{A}_{D,A}| = \kappa$  y así mismo,  $\Psi_D(\mathcal{A}_{D,A}) = \kappa$ .

Sea  $\mathcal{B} := \{A_x \mid x \in F\} \subseteq \mathcal{A}_{D,A}$  cualquiera. Como  $A$  es discreto y cerrado en  $X$ , cualquiera de sus subespacios es cerrado en  $X$ ; en consecuencia y por normalidad de  $X$ , existen abiertos  $U, V \subseteq X$  ajenos, de modo que  $F \subseteq U$  y  $A \setminus F \subseteq V$ . Si

$x \in F$ , entonces  $A_x \rightarrow x$  y por ello  $A_x \subseteq^* U$ , similarmente, si  $y \in A \setminus F$ , entonces  $A_y \subseteq^* V \subseteq X \setminus U$ ; de donde  $A_y \cap U^* = \emptyset$ .

Por tanto  $(\mathcal{B}, \mathcal{A}_{D,A} \setminus \mathcal{B})$  está separada, obteniéndose de ?? la normalidad de  $\Psi_D(\mathcal{A}_{D,A})$ .

(ii)  $\rightarrow$  (iii) Si  $\kappa = \omega$ , la implicación resulta vacua; pues todo subespacio numerable de  $2^\omega$  es un  $Q$ -set (??). Supóngase pues, que  $\Psi(\mathcal{A})$  es un espacio normal de tamaño  $\kappa > \omega$ ; siendo necesario que  $|\mathcal{A}| = \kappa$ .

Para cada  $C \subseteq \omega$  denótese por  $\varphi_C \in 2^\omega$  a la función característica de  $C$  y sea  $X := \{\varphi_A \in 2^\omega \mid A \in \mathcal{A}\}$ . Obsérvese que  $X$  es un espacio metrizable, separable (por ser subespacio del metrizable, separable,  $2^\omega$ ) de tamaño  $\kappa$ .

Sea  $Y = \{\varphi_A \in X \mid A \in \mathcal{B}\} \subseteq X$  cualquiera. Dado el ??, la normalidad de  $\Psi(\mathcal{A})$  implica la existencia de un separador de  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}$ ; de este modo:

$$\begin{aligned} Y &= \{\varphi_A \in X \mid A \in \mathcal{B}\} \\ &= \{\varphi_A \in X \mid A \cap D \neq^* \emptyset\} \\ &= \{\varphi_A \in X \mid \forall n \in \omega (A \cap D \not\subseteq n)\} \\ &= \bigcap_{n \in \omega} \{\varphi_A \in X \mid A \cap D \not\subseteq n\} \end{aligned}$$

Ahora, si  $n \in \omega$  y  $\varphi \in U_n := \{\varphi_A \in X \mid A \cap D \not\subseteq n\}$  es cualquiera, existe cierto  $k \in (A \cap D) \setminus n$ . Por ello, si  $x = \varphi_B \in X$  es tal que  $x(k) = 1$ , entonces  $k \in (B \cap D) \setminus n$  y  $B \cap D \not\subseteq n$ ; es decir  $\varphi \in U_n$ . Mostrando así que  $\{x \in X \mid x \restriction \{k\} = \varphi \restriction \{k\}\} \subseteq U_n$ . Por lo tanto, cada  $U_n$  es abierto en  $X$ . De esta manera, cualquier  $Y \subseteq X$  es  $G_\delta$  en  $X$  y  $X$  es un  $Q$ -set.

(iii)  $\rightarrow$  (i) Supóngase que  $X$  es un  $Q$ -set de tamaño  $\kappa$ . En virtud del ??, supóngase sin pérdida de generalidad que  $X \subseteq 2^\omega$ . Para cada  $E \subseteq X$  considérese  $\mathcal{A}_E := \{A_x \in [N]^\omega \mid x \in E\}$ , la familia de las ramas de  $E$  en  $N$  (definida en ??); donde  $N := 2^{<\omega}$  y cada  $A_x$  es el conjunto  $\{x \restriction n \mid n \in \omega\} \subseteq N$ . Puesto que  $|X| = \kappa$ , del ?? se sigue que  $|\mathcal{A}_X| = \kappa$ , y con ello  $|\Psi_N(\mathcal{A}_X)| = \kappa$ .

Sea  $Y \subseteq X$  cualquiera. Como  $X$  es un  $Q$ -set,  $Y = \bigcup \{F_n \mid n \in \omega\}$  y  $X \setminus Y = \bigcup \{G_n \mid n \in \omega\}$ ; donde cada conjunto  $F_n$  y  $G_n$  es cerrado en  $X \subseteq 2^\omega$ . Para cada



$n \in \omega$  definanse los conjuntos:

$$D_n := \left( \bigcup \mathcal{A}_{F_n} \right) \setminus \bigcup_{m < n} \left( \bigcup \mathcal{A}_{G_m} \right)$$

$$L_n := \left( \bigcup \mathcal{A}_{G_n} \right) \setminus \bigcup_{m \leq n} \left( \bigcup \mathcal{A}_{F_m} \right)$$

y sea  $D := \bigcup \{D_n \mid n \in \omega\}$ . Nótese que por construcción, si  $m, n \in \omega$ , se tiene  $D_n \cap L_m = \emptyset$ ; consecuentemente, cada  $L_n$  es ajeno con  $D$ .

Sea  $y \in A_Y$ ; entonces existe  $n \in \omega$  de modo que  $y \in F_n$ . Por otra parte, cada  $G_m \subseteq X \setminus Y$  (con  $m < n$ ) es cerrado en  $X$ , por lo que existe  $s \in \omega$  de modo que:

$$\{x \in X \mid x \restriction s = y \restriction s\} \subseteq X \setminus \bigcup_{m < n} G_m$$

Por ello, si  $v \in A_y \setminus D_n \subseteq F_n$ , existen  $x \in F_n$  y  $k \in \omega$  de modo que  $v = x \restriction k$ . Así que  $x \in \bigcup \mathcal{A}_{F_n}$ ; y como  $v \notin D_n$ , existen  $m < n$  y  $g \in G_m$  de manera que  $v = y \restriction k = g \restriction k$ . Y a razón de ello, no puede ocurrir  $s \subseteq k$ . Por lo tanto  $k < s$  y  $A_y \setminus D_n \subseteq 2^{<s} =^* \emptyset$ ; esto es,  $A_y \subseteq^* D_n \subseteq D$ .

Similarmente, para cada  $y \in X \setminus Y$  existe un  $n \in \omega$  tal que  $A_y \subseteq^* L_n \subseteq N \setminus D$ ; de donde,  $A_y \cap D = \emptyset$ . Así que  $D$  es separador de  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ ; probando por el ?? la normalidad de  $\Psi_N(\mathcal{A}_X)$ . ■

Es inmediato al ?? (y a ??, o bien, ??) la siguiente consecuencia:

**Corolario 4.1.15.** *Bajo CH se cumple WMC, y con ello:*

- i) *Ningún espacio de Mrówka no numerable es normal.*
- ii) *Ningún Q-set es más que numerable.*

*A razón de lo anterior, WMC es consistente con ZFC.*

### 4.1.2. Consistencia de $\neg$ WMC

Para la segunda parte de la prueba de independencia de WMC se hará uso; como es previsible desde anteriores capítulos, de la negación de CH con el Axioma

de Martin. Se comenzará observando cómo se pueden caracterizar a todos los Q-sets haciendo uso del Lema de Solovay (??) y MA.

**Lema 4.1.16.** *Sea  $X$  un espacio metrizable y separable. Entonces existe una base  $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \omega\}$  para  $X$  de modo que  $\mathcal{A} = \{A_x \mid x \in X\}$  es familia casi ajena; donde para cada  $x \in X$ ,  $A_x = \{n \in \omega \mid x \in B_n\}$ .*

**Demostración.** Por el teorema de metrización de Arhangel'skii (prelim),  $X$  admite una base regular (prelim)  $\mathcal{C}$ . Como  $X$  es 2 AN por ser metrizable y separable (prelim), existe una base  $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \omega\} \subseteq \mathcal{C}$ , obsérvese que  $\mathcal{B}$  sigue siendo una base regular.

Dados  $x, y \in X$  son distintos, sean  $U, V$  abiertos ajenos que separan a  $x$  y  $y$ . Por regularidad de  $\mathcal{B}$ , existe  $W \subseteq U$  abierto de manera que  $x \in W$  y

$$\mathcal{B}_W := \{n \in \omega \mid B_n \cap W \neq \emptyset \wedge B_n \setminus W \neq \emptyset\} =^* \emptyset.$$

Luego, el conjunto  $A_x \cap A_y \subseteq \mathcal{B}_W$  es finito. ■

**Proposición 4.1.17** (Tall, Silver). *Bajo MA, un espacio  $X$  es Q-set si y sólo si es homeomorfo a un subespacio de  $\mathbb{R}$  de tamaño menor que  $c$ .*

**Demostración.** Supóngase MA. La suficiencia viene dada por ?? y ??.

Para la necesidad supóngase que  $X \in [\mathbb{R}]^{<c}$ , sin pérdida de generalidad más que numerable (véase ??). Como  $X$  es metrizable y separable, tómense  $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \omega\}$  y  $\mathcal{A} = \{A_x \mid x \in X\}$  como en el Lema previo. Sean  $Y \subseteq X$  y  $\mathcal{B} := \{A_y \in \mathcal{A} \mid y \in Y\}$ .

Como  $|\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}|, |\mathcal{B}| < c$  y se cumple MA, del Lema de Solovay (??) se desprende la existencia de un subconjunto  $D \subseteq \omega$  tal que, si  $y \in Y$  y  $x \in X \setminus Y$ , entonces  $A_y \cap D \neq^* \emptyset$  y  $A_x \cap D =^* \emptyset$ . Para cada  $n \in \omega$  definase el conjunto  $U_n := \bigcup \{B_m \in \mathcal{B} \mid m \in D \setminus n\}$ .

Nótese que  $Y = \bigcap \{U_n \mid n \in \omega\}$ . En efecto, si  $y \in X \setminus Y$  y  $n \in \omega$  son cualesquiera,  $A_y \cap D$  es infinito, y por ello, existe  $m \in D \setminus n$  tal que  $y \in B_m$ . En consecuencia  $y \in U_n$ , y así  $Y \subseteq \bigcap \{U_n \mid n \in \omega\}$ .

De manera similar, si  $x \in X \setminus Y$ ,  $A_x \cap D$  es finito y existe  $n \in \omega$  de modo que  $A_x \cap D \subseteq n$ . Por lo que para cada  $m > n$  se tiene que  $x \notin B_m$ ; luego,  $x \notin U_n$ . Lo anterior muestra que  $X \setminus Y \subseteq X \setminus \bigcap \{U_n \mid n \in \omega\}$ , y así  $Y = \bigcap \{U_n \mid n \in \omega\}$  es de tipo  $G_\delta$ . Por lo que  $X$  es un  $Q$ -set. ■

De la proposición recién mostrada, el ?? y el ?? surge el resultado que pone punto final a la Conjetura Débil de Moore.

**Corolario 4.1.18.** *Bajo MA; para cada cardinal infinito  $\kappa < \mathfrak{c}$  existe un espacio de Mrówka normal, de tamaño  $\kappa$ . Consecuentemente:*

- i) *Bajo MA +  $\neg$  CH; existen tales espacios.*
- ii)  *$\neg$  WMC (y por ello,  $\neg$  MC) es consistente con ZFC.*
- iii) *WMC es independiente de ZFC.*

Contrastable con ?? es el hecho de que aun no se ha dado una caracterización para la normalidad de los espacios de Mrówka. Resulta seductor conjeturar que cualquier espacio de Isbell-Mrówka de tamaño menor al continuo es normal. Sin embargo, el ?? muestra que; bajo MA +  $\neg$  CH, existe un espacio de Mrówka, no normal y de tamaño menor al continuo.

El comentario anterior deja como consecuencia la falsedad de que cualquier familia casi ajena sea esencialmente igual a alguna de las definidas en ?? (?); de lo contrario, cualquier espacio de Isbell-Mrówka de tamaño menor al continuo sería normal, cosa que es falsa, en ZFC únicamente. Se abre también una discusión interesante, el estudio del enunciado «para cada cardinal  $\kappa$  entre  $\aleph_1$  y  $\mathfrak{c}$  existen espacios de Mrówka no normales de tamaño  $\kappa$ ».



# Caracterizaciones

$\sigma$ -compacidad de  $\Psi(\mathcal{A})$ , 38

cero-dimensionalidad de  $\Psi(\mathcal{A})$ , 34

compacidad de  $\Psi(\mathcal{A})$ , 36

compacidad de los subespacios de  $\Psi(\mathcal{A})$ , 35

compacidad local hereditaria de cualquier espacio infinito, separable, de Hausdorff, 42

compacidad local hereditaria y pseudocompacidad de cualquier espacio infinito, separable, de Hausdorff, 43

compacidad numerable de  $\Psi(\mathcal{A})$ , 36

homeomorfismo con  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$  ( $\mathcal{A}$  maximal), 57

metrizabilidad de  $\Psi(\mathcal{A})$ , 38

Normalidad de  $\Psi(\mathcal{A})$  (con grietas separables), 65

ordenabilidad lineal de  $\Psi(\mathcal{A})$ , 40

primero numerabilidad de  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ , 55

propiedad de

    Tychonoff en  $\Psi(\mathcal{A})$ , 34

    Fréchet en  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ , 59

    Hausdorff en  $\Psi(\mathcal{A})$ , 34

    Lindelöf en  $\Psi(\mathcal{A})$ , 38

pseudocompacidad de  $\Psi(\mathcal{A})$ , 39

segundo numerabilidad de  $\Psi(\mathcal{A})$ , 38

separabilidad hereditaria de cualquier espacio infinito, separable, de Hausdorff, hereditariamente localmente compacto, 48



# Índice Simbólico

$D_G$ (si $G \subseteq \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ ), 25	$\Psi_N(\mathcal{A})$ , 31	$\mathcal{A}_{D,A}$ , 8
$D_a$ (si $a \in \mathcal{A}$ ), 25	$\leq_{\mathcal{A}}$ , 24	$\mathcal{F}(\mathcal{A})$ , 53
$\text{AD}(N)$ , 3	$\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ , 24	$\mathcal{I}(\mathcal{A})$ , 11
$\text{MAD}(N)$ , 4	$\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ , 32	$\mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ , 11
$\text{WMC}$ , 63	$\mathcal{B}_x$ , 31	$\mathcal{I}_N(\mathcal{A})$ , 11
$\Phi_h$ , 5	$\mathfrak{a}$ , 10	$\mathcal{I}_N^+(\mathcal{A})$ , 11
$\text{MC}$ , 63	$\mathcal{A} \restriction X$ , 13	$\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ , 31
$\Psi(\mathcal{A})$ , 31	$\mathcal{A}_X$ , 10	$\mathcal{T}_{N,\mathcal{A}}$ , 30





# Índice Alfabético

- Q-set, 66
  - $\Psi$ -espacio, 31
  - $n$ -grieta
    - de Luzin, 22
  - cardinal
    - de casi ajenidad, 10
  - casi
    - ajena sobre  $N$ , familia, 3
    - ajena, familia, 3
    - ajenidad, cardinal de, 10
    - ajeno, 3
  - compacto
    - de Franklin, 53
  - Conjetura
    - de Moore, 63
    - débil de Moore, 63
  - Dokálková
    - Lema de, 16
  - espacio
    - $\Psi$ , 31
    - de Isbell-Mrówka, 34
    - de Mrówka, 34
  - familia
    - casi ajena, 3
    - maximal, 4
  - casi ajena sobre  $N$ , 3
    - maximal en  $N$ , 4
  - de
    - ramas de  $X$  en  $2^\omega$ , 10
    - sucesiones en  $D$  convergentes a  $A$  en  $X$ , 8
  - de Luzin, 20
  - débilmente separada, 27
  - inseparable, 19
  - maximal en alguna parte, 13
  - maximal en ninguna parte, 13
  - no compacta, 53
  - normal, 19
  - parcialmente separable, 19
  - que contiene a una grieta, 18
  - separable, 19
- familias
    - esencialmente iguales, 40
  - Franklin
    - compacto de, 53
  - grieta, 18
    - contenida en una familia, 18
    - de Luzin, 22
    - separada, 18

- hipótesis
  - de Jones, 27
- ideal generado por  $\mathcal{A}$ , 11
- Isbell-Mrówka
  - espacio de, 34
  - topología de, 31
- Jones
  - hipótesis de,, 27
- Kannan
  - Teorema de Rajagopalan y, 42
- Lema
  - de Dokálková, 16
  - de Solovay, 26
- Luzin
  - $n$ -grieta de,, 22
  - familia de, 20
  - grieta de,, 22
- Moore
  - conjetura de, 63
  - conjetura débil de, 63
- Mrówka
  - topología de, 31
- espacio de, 34
- orden
  - basado en  $\mathcal{A}$ , 24
- parte
  - positiva de  $\mathcal{A}$ , 11
- Rajagopalan
  - Teorema de Kannan y, 42
- separador, 18
- Simon
  - Teorema de, 17
- Solovay
  - Lema de, 26
- Teorema
  - de Kannan y Rajagopalan, 42
  - de Simon, 17
- testigos
  - de una  $n$ -grieta de Luzin, 22
- topología
  - de Isbell-Mrówka, 31
  - de Mrówka, 31
- traza de  $\mathcal{A}$  en  $X$ , 13