Universidad Nacional Autónoma De México

Facultad De Ciencias

Un estudio elemental sobre los espacios de Isbell-Mrówka

T E S I S

Que para obtener el título en:

Matemáticas

Presenta:

Hugo Víctor García Martínez

Asesor:

Dr. Fidel Casarrubias Segura

Ciudad Universitaria, CDMX, 2025

Dedicado a Pepe, María, Claris, Dionisio y Margarita.

Agradecimientos

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Índice general

Introducción

Corría el año de 1954 cuando Stanisław G. Mrówka (1933-2010), «hijo» doctoral de Kazimierz Kuratowski (1896-1980), expuso en su artículo *On completely regular spaces* [11] un método novedoso para la construcción de espacios topológicos de Tychonoff, pseudocompactos, pero no compactos. La construcción parte de una *familia casi ajena*; esto es, en terminología moderna, un conjunto $\mathscr{A}$ compuesto por subconjuntos infinitos de ω que, dos a dos, tienen intersección finita. Se dice que $\mathscr{A}$ es *maximal* si no existe una familia casi ajena $\mathscr{B}$ que contenga propiamente a $\mathscr{A}$. El espacio contraejemplo de Mrówka es $\Psi(\mathscr{A}) := \omega \cup \mathscr{A}$, donde un subconjunto $U \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es abierto si y sólo si para cada $x \in U \cap \mathscr{A}$, la diferencia $x \setminus U$ es finita. En $\Psi(\mathscr{A})$, el subespacio $\mathscr{A}$ es cerrado y discreto; por lo tanto, si $\mathscr{A}$ es infinita, $\Psi(\mathscr{A})$ no puede ser compacto. Por otro lado, si $\mathscr{A}$ es maximal, entonces $\Psi(\mathscr{A})$ resulta ser pseudocompacto. Aludiendo a la existencia de familias casi ajenas maximales e infinitas, se obtiene un esbozo de la demostración dada por Mrówka.

El aporte teórico recién mencionado constituye un antecedente temprano para el estudio de los *espacios de Isbell-Mrówka*, aunque no es el primero, pues esta topología fue descrita por primera vez, al menos según la documentación reconocida, por Pavel Alexandroff (1896-1982) y Pavel Urysohn (1898-1924) en [1]. Pese a ello, su nombre rinde homenaje tanto a Mrówka como a su par profesional John R. Isbell (1930-2005), quienes de manera independiente de Alexandroff y Urysohn, desarrollaron el concepto entre las décadas de los cincuenta y los sesenta, mostrando por qué se trata de objetos dignos de investigación.

Todo espacio $\Psi(\mathscr{A})$, asociado a una familia casi ajena $\mathscr{A}$, es: de Tychonoff, cero-dimensional, disperso, separable y hereditariamente localmente compacto. De hecho, Kannan y Rajagopalan demostraron que los únicos espacios (infinitos, separables y de Hausdorff) hereditariamente localmente compactos son, precisamente, los espacios de Mrówka [7]. Sin duda, lo que ha colocado a estos objetos, a lo largo de los años, en un lugar privilegiado dentro de las matemáticas es su versatilidad; pues una amplia variedad de invariantes topológicos de $\Psi(\mathscr{A})$ pueden ser «codificados» mediante el comportamiento de la familia $\mathscr{A}$, considerada como conjunto. Como consecuencia, existen diversas aplicaciones relacionadas con estos espacios, que abarcan desde el estudio de compactaciones, selecciones continuas y espacios totalmente ordenados, hasta resultados en espacios de funciones continuas equipados con la topología de convergencia puntual.

El trabajo que aquí se propone pretende ofrecer una introducción asequible a los espacios de Isbell–Mrówka y puede ser concebido como un «manual». Una motivación fundamental para la realización de este trabajo es el hecho de que el material disponible sobre este tema, especialmente en español, es relativamente limitado. La meta final es explicar, siempre de manera clara, cómo se van tendiendo «puentes» entre la topología y la teoría de conjuntos por medio de los espacios de Mrówka. Se asumirá que el lector cuenta con una formación elemental, equiparable a un par de cursos de nivel superior, en las dos ramas de las matemáticas anteriormente nombradas.

El texto se divide en dos grandes secciones: el estudio de las familias casi ajenas (Capítulo 1), que constituye la parte «conjuntista» del escrito, y su contraparte topológica, dedicada al estudio de los espacios de Mrówka (Capítulos 2 a 4). En el Capítulo 1 se presentarán construcciones clásicas de familias casi ajenas y se expondrá la teoría básica de su combinatoria infinita asociada, incluyendo el Teorema de Simon, las familias de Luzin y el Lema de Solovay. El Capítulo 2 tiene como objetivo presentar el resultado ya mencionado obtenido por Kannan y Rajagopalan en este contexto, el entendimiento del comportamiento esencial de estos espacios resulta clave y constituye un aspecto central del capítulo. Los Capítulos 3 y 4 abordan problemas específicos que ponen de manifiesto la versatilidad de los protagonistas de esta tesis. En el Capítulo 3 se exhibe la relación entre la propiedad de Fréchet y la compactación unipuntual de los espacios de Isbell–Mrówka (el compacto de Franklin). Finalmente, en el Capítulo 4 se estudian en detalle los aspectos fundamentales para poder «traducir» la propiedad de normalidad, presentando la conjetura de Moore, su restricción a la clase de espacios separables y los resultados de Silver y Tall al respecto.

0. Preeliminares

0.1. Conjuntos

El presente trabajo se desarrolla dentro del sistema axiomático usual de la teoría de conjuntos, a saber, ZFC, entendido como ZF junto con el axioma de elección AC. Ocasionalmente haremos referencia a axiomas adicionales, tales como la hipótesis del continuo CH (véase p.4) o el axioma de Martin MA (véase p.97). Los sistemas previamente mencionados pueden consultarse en [5, p. 3].

Dado un conjunto X, se denotará por $\mathscr{P}(X)$ a su conjunto potencia. Ahora, si $f : A \to X$ es una función y $B \subseteq A$, se escribirá la restricción de f a B como $f \upharpoonright B$. Las jerarquía de operaciones binarias entre conjuntos que utilizaremos será: $\setminus, \times, \cup, \cap$.Identificaremos cualquier fórmula φ de la teoría de conjuntos con una *clase*, esto es, una colección $\{x \mid \varphi\}$. Una *enumeración* para un conjunto A es una función biyectiva $I \to A$ $(i \longmapsto a_i)$, en esta situación, se dice que A *está enumerado* como $A = \{A_i \mid i \in I\}$.

0.1.1. Órdenes Parciales

Un *orden parcial* sobre un conjunto P es una relación $\leq \subseteq P \times P$ tal que para cualesquiera $p, q, r \in P$ se cumple: $p \leq p$ ($\leq$ reflexiva); si $p \leq q$ y $q \leq r$, entonces $p \leq r$ ($\leq$ es transitiva); y, si $p \leq q$ y $q \leq p$, entonces $p = q$ ($\leq$ antisimétrica). Se denotará por $<$ a $\leq \setminus \mathrm{Id}(P)$. Un *conjunto parcialmente ordenado* es un par ordenado (P, R), donde R es un orden parcial en P.

Si $(P, \leq)$ y $(Q, \leq)$ son conjuntos parcialmente ordenados y $f : P \to Q$, f se dice *creciente* si para cualesquiera $p, r \in P$, se cumple que $p \leq r$ implica $f(p) \leq f(r)$; es *estrictamente creciente* cuando para cualesquiera $r, p \in P$, $p < r$ implica que $f(p) < f(r)$ Si además, f es biyección y su inversa también es creciente, se dirá que f es un *isomorfismo de órdenes*, dentoado $(P, \leq) \cong (Q, \leq)$.

Dados un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ y cualquier $A \subseteq \varnothing$, se denotará por $\uparrow (A)$ al conjunto de *cotas superiores* de A, es decir, $\uparrow (A) = \{p \in P \mid \forall a \in A\, (a \leq p)\}$. Un elemento $p \in P$ es máximo de A si y sólo si $p \in A \cap \uparrow (A)$, este p es único y se denota $\max(A)$. De forma dual se define el conjunto de *cotas inferiores* de A, $\downarrow (A)$, y el elemento mínimo de A, $\min(A)$. Un elemento $q \in P$ es *supremo* de A cuando $p = \min(\uparrow (A))$, en cuyo caso, se denota $p = \sup(A)$. De forma dual se define el *ínfimo* de A, $\inf(A)$. Finalmente, diremos que $r \in P$ es en elemento *maximal* de A si no existe $a \in A$ tal que $r < a$; de forma análoga se define el elemento *minimal* de A.

Un subconjunto $C \subseteq P$ es una *cadena* de $(P, \leq)$ si $p, q \in P$, se cumple $p \leq q$ o $q \leq p$. Cuando P mismo sea una cadena, se dirá que $(P, \leq)$ es un *conjunto totalmente ordenado*, o que R es *orden total* en P. Si cada $A \in \mathscr{P}(P) \setminus \{\varnothing\}$ tiene mínimo, diremos que $(P, \leq)$ es un *buen orden*, o que R es un *buen orden* en P.

Si X es un conjunto no vacío, se dice que $f : \mathscr{P}(X) \setminus \{\varnothing\} \to X$ es una *función de elección* en X cuando para cada $x \in X$ ocurre $f(x) \in x$. La formulación clásica del *Axioma de Elección* (AC) dicta que todo conjunto no vacío admite una función de elección. Utilizaremos con frecuencia la siguiente equivalencia para este axioma:

Teorema 0.1.1 (Principio de Maximalidad de Hausdorff). *Si $(P, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y no vacío, existe una cadena C de $(P, \leq)$ que es $\subseteq$-maximal (del conjunto de cadenas de P).*

0.1.2. Ordinales y Cardinales

Como es estándar, trabajaremos sobre el universo de Von Neumann para la teoría de conjuntos. En este contexto, un conjunto α se denomina *número ordinal* cuando $\alpha \subseteq \mathscr{P}(\alpha)$ y $(\alpha, \in)$ es un conjunto bien ordenado. Dados ordinales α y β, escribiremos $\alpha < \beta$ para indicar que $\alpha \in \beta$, equivalentemente, $\alpha \subsetneq \beta$.Es un hecho que toda clase no vacía de ordinales tiene un mínimo [5, Obs. I.2.4]. Para cada ordinal α, el sucesor de α se define como $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$, existen tres tipos de ordinales: *cero* $(0 = \varnothing)$, los *sucesor* (aquellos de la forma $\alpha + 1$, para algún ordinal α), y los *límite* (ninguno de los anteriores). Denotaremos por ω al primer ordinal límite; es un hecho que ω es el conjunto de todos los números naturales.

Una *sucesión* en un conjunto A es una función $x : \omega \to A$, es comun denotar esto por $(x_n)_{n\in\omega} \subseteq A$, una *sucesión finita* en A es una función $x : n \to A$, con n natural, se denota $(x_k)_{k\in n} \subseteq A$.

Con relativa frecuencia se realizarán construcciones *recursivas* en ω y ω_1, o algún buen orden. El mecanismo detrás de esto es la siguiente restricción del Teorema de Recursión Transfinita [5, § I.2.Induction and Recursion].

Teorema 0.1.2 (Recursión en ordinales). *Sea $\alpha \neq 0$ un ordinal, entonces para todo conjunto X y cualesquiera $x_0 \in X$, $g : X \to X$ y $f : \mathscr{P}(X) \to X$:*

i) Existe una única $h : \alpha \to X$ tal que para cada $\beta \in \alpha$, $h(\beta)f(h[\beta])$.

ii) Existe una única $j : \alpha \to X$ de modo que: $j(0) = x_0$; para cada $\beta \in \alpha$, $j(\beta+1) = g(j(\alpha))$; y, para cada ordinal límite $\gamma \in \alpha$, $j(\gamma) = f(j[\gamma])$.

Un *número cardinal* es un ordinal no biyectable con ninguno de sus elementos. Se usará la enumeración habitual de los cardinales, $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$. Para cada conjunto A: denotaremos por $|A|$ al único cardinal biyectable con A, al cual se llamará la *cardinalidad* (o el *tamaño*) de A; A se dice *finito* si $|A| < \omega$; *contable* (o *a lo más numerable*) si $|A| \leq \omega$; *numerable* si $|A| = \omega$; y, cuando $|A| > \omega$, se dirá que A es *más que numerable* o *no numerable*. El siguiente hecho es consecuencia que la cardinalidad de cualquier conjunto esté bien definida:

Proposición 0.1.3. *Para cualesquiera conjuntos X y Y:*

i) $|X| = |Y|$ si y sólo si existe $f : X \to Y$ biyectiva.

ii) $|X| \leq |Y|$ si y sólo si existe $f : X \to Y$ inyectiva.

iii) (AC) $|X| \leq |Y|$ si y sólo si existe $f : Y \to X$ sobreyectiva.

iv) Si $|X| \leq |Y|$ y $|Y| \leq |X|$, entonces $|X| = |Y|$.

De manera puntual, se hará referencia a la aritmética ordinal y cardinal, utilizando la notación convencional para la suma, el producto y la exponenciación [5, §. I.3, I.5]. Conviene recordar el comportamiento clásico de la aritmética cardinal, este se usará implícitamente en todo lo que sigue:

Proposición 0.1.4. *Si κ, λ y μ son cardinales, entonces:*

i) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa = \kappa\lambda = \lambda\kappa$.

ii) $(\lambda\kappa)^\mu = \lambda^\mu\kappa^\mu$ *y* $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda\kappa^\mu$.

iii) *Si $\kappa \leq \lambda$, entonces:*

a) $\kappa + \mu = \lambda + \mu$, $\kappa\mu = \lambda\mu$.

b) $\mu^\kappa \leq \mu^\lambda$.

c) *Si* $\mu \neq 0$, $\kappa^\mu \leq \lambda^\mu$.

iv) *Si $\kappa \geq \omega$, entonces* $\kappa + \lambda = \text{máx}\{\kappa, \lambda\}$.

v) *Para cada conjunto X,* $|\mathscr{P}(X)| = 2^{|X|} > |X|$.

Si $\{\kappa_\alpha \mid \alpha \in I\}$ es una familia no vacía de cardinales y cada κ_α es infinito; o bien, I es infinito, entonces:

$$\sum_{\alpha \in I} \kappa_\alpha = |I| \sup_{\alpha \in I} \kappa_\alpha \,.$$

La letra $\mathfrak{c}$ denota el cardinal del *continuo*, es decir $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. La formulación de CH que utilizaremos es: $\aleph_1 = \mathfrak{c}$.

Dado un conjunto X y un cardinal $\kappa \leq |X|$, se denotarán por $[X]^\kappa$ y $[X]^{<\kappa}$ a las colecciones de todos los subconjuntos de X de cardinalidad exactamente κ y menor que κ, respectivamente. De forma análoga se definen $[X]^{\leq\kappa}$, $[X]^{>\kappa}$ y $[X]^{\geq\kappa}$. Además, X^κ denota el conjunto de todas las funciones de κ en X, mientras que $X^{<\kappa}$ es el conjunto $\{f \mid \exists\alpha < \kappa\,(f : \alpha \to X)\}$.

Proposición 0.1.5. *Sean X un conjunto infinito y $\kappa \leq |X|$, entonces:*

i) $|[X]^\kappa| = |X|^\kappa$, *en particular; si X es numerable,* $|[X]^\omega| = \mathfrak{c}$.

ii) $|[X]^{<\omega}| = |X|$.

Demostración. (i) Para cada $A \in [X]^\kappa \subseteq \mathscr{P}(X)$ fíjese (AC) una biyección $g_A : \kappa \to A$. Entonces la función $A \longmapsto g_A$ es inyección de $[X]^\kappa$ en X^κ. Para la desigualdad recíproca, como $\kappa \leq |X|$, existe una biyección $g : X \times \kappa \to X$. Cada $f \in X^\kappa$ es un subconjunto de tamaño κ de $X \times \kappa$; por tanto, la asignación $f \longmapsto \mathrm{g}[f]$ es inyección de X^κ en $[X]^\kappa$.

Ahora, si $|X| = \aleph_0$, entonces $|[X]^\omega| = \aleph_0^{\aleph_0}$. Como $2 \leq \aleph_0$, entonces $\aleph_0^{\aleph_0}$; y como $\aleph_0 < 2_0^{\aleph}$, entonces $\aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \aleph_0} = 2_0^{\aleph}$.

(iii) Obsérvese que $|X| \leq [X]^{<\omega}$, pues $x \longmapsto \{x\}$ es inyección de X en $[X]^{<\omega}$. Para la desigualdad recíproca, note que:

$$|[X]^{<\omega}| = \left| \bigcup_{n\in\omega} [X]^n \right| \leq \sum_{n\in\omega} |[X]^n| = \sum_{n\in\omega} |X| = |X| \cdot \aleph_0 = |X| \,.$$

probando la igualdad deseada. ■

Una función entre ordinales $f : \alpha \to \beta$ es *cofinal* (en α) si para cada $\delta \in \beta$ existe un elemetno $\varepsilon \in \gamma$ de manera que $\delta \leq f(\varepsilon)$. Se define:

$$\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{mín}\{\beta \mid \exists f : \beta \to \alpha\,(f \text{ es cofinal en } \alpha)\}\,.$$

Es un hecho que para cualquier ordinal α, ocurre que: $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \alpha$; $\mathrm{cf}(\alpha)$ es un cardinal; y, que siempre existe una función cofinal y estrictamente creciente $f : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$. Un ordinal (cardinal) κ es regular cuando $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$, ω_1 es regular. Todo lo anteriormente dicho se puede consultar en [5, §. I.3.Cofinality].

Sea γ un ordinal límite. Un subconjunto $C \subseteq \gamma$ se dice *cerrado* si, para todo $\alpha < \gamma$, se cumple que, cuando $\bigcup(C \cap \alpha) = \alpha$, entonces $\alpha \in C$. Si C es cerrado y no es cofinal en γ, diremos que C es un *club* de γ. Un conjunto $S \subseteq \gamma$ se denomina *estacionario* si y sólo si tiene intersección no vacía con todo club de γ. Con esta terminología se enuncia la siguiente herramienta últil [5, pág. I.8.7]:

Teorema 0.1.6 (Lema de Fodor). *Sean κ un cardinal regular, $S \subseteq \kappa$ estacionario y supóngase que $f : S \to \kappa$ es regresiva, es decir, para cada $\alpha \in S \setminus \{0\}$ se da $f(\alpha) < \alpha$. Entonces existe un conjunto estacionario $T \subseteq S$ tal que $f \restriction T$ es constante; equivalentemente, existe $\delta \in \kappa$ tal que $f^{-1}[\{\delta\}] \subseteq S$ es estacionario.*

0.1.3. Casi contención

Para dos conjuntos cualesquiera A y B, diremos que A está *casi contenido* en B si la diferencia $A \setminus B$ es finita, esta situación se denotará por $A \subseteq^* B$ y convendremos que $A =^* B$ (A y B son *casi iguales*) si y sólo si $A \subseteq^* B$ y $B \subseteq^* B$. Nótese que $A \subseteq^* B$ si y sólo si existe un conjunto finito F de forma que $A \subseteq B$, en consecuencia, un conjunto N es finito si y sólo si $N =^* \varnothing$, particularmente, $A \subseteq^* B$ si y sólo si $A \setminus B =^* \varnothing$. Se dice que A es *casi ajeno* con B si y sólo si $X \cap Y =^* \varnothing$. Claramente $A \subseteq B$ implica que $A \subseteq^* B$.

Proposición 0.1.7. *Sean A, B y C conjuntos arbitrarios, entonces:*

i) $A \subseteq^* A$ *y* $A =^* A$.

ii) *Si* $A \subseteq^* B$ *y* $B \subseteq^* C$*, entonces* $A \subseteq^* C$.

iii) $=^*$ *se comporta como relación de equivalencia.*

iv) *Si* $A, B \subseteq C$ *entonces* $A \setminus B$ *si y sólo si* $C \setminus B \subseteq C \setminus A$.

v) *Si* $A \subseteq^* B$*, entonces* $A \cap C \subseteq^* B \cap C$ *y* $A \cup C \subseteq^* B \cup C$.

Demostración. Los puntos (i) y (ii) son claros, (iii) se sigue de estos.

Para (iv) basta probar necesidad, nótese que si $A, B \subseteq C$, entonces ocurren $(C \setminus B) \setminus (C \setminus A) \subseteq C \setminus B$ y $(C \setminus B) \setminus (C \setminus A) \subseteq C \setminus (C \setminus A) = A$. De esta manera, si $A \setminus B$ es finito, entonces $(C \setminus B) \setminus (C \setminus A) \subseteq A \setminus B$ igual.

(v) Basta notar que $(A \cap C) \setminus (A \cap B) \subseteq A \setminus B$ y también $(A \cup C) \setminus (A \cup B) \subseteq A \setminus B$. ■

Proposición 0.1.8. *Sean $f : X \to Y$, $A, B \subseteq X$ y $C \subseteq Y$. Entonces:*

i) *Si* $A \subseteq^* B$*, entonces* $f[A] \subseteq^* f[B]$.

ii) *Si* $A \subseteq^* f^{-1}[C]$ *entonces* $f[A] \subseteq^* C$.

Además, si f es inyectiva, ocurren los recíprocos.

Demostración. Para (i), si $A \setminus B$ es finito, también lo es $f[A \setminus B]$. El resultado se obtiene de que $f[A] \setminus f[B] \subseteq f[A \setminus B]$. El punto (ii) es inmediato a (i) y que $f[f^{-1}[C]] \subseteq C$.

Finalmente, supóngase que f es inyectiva. Obsérvese que $f[A] \setminus f[B] = f[A \setminus B]$ y además $|A \setminus B| = |f[A \setminus B]|$, lo cual implica el recíproco de (i); así mismo, el recíroco de (ii), pues: $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$. ∎

0.1.4. Árboles

Un árbol es un orden parcial $\mathbb{T} = (T, \leq)$ tal que para cada $x \in T$ el conjunto $\{p \in T \mid p < x\}$ es un buen orden. Cuando esto ocurre, $(\{p \in T \mid p < x\}, <)$ es isomorfo a un único ordinal (ordenado con la pertenencia), el cual denotaremos $o(x)$. La altura de un arbol se define como $\sup\{o(x) + 1 \mid x \in T\}$. Una *rama* de $\mathbb{T}$ es una cadena R de $\mathbb{T}$, $\subseteq$-maximal del conjunto de cadinas de $\mathbb{T}$.

Proposición 0.1.9. *El conjunto ordenado $\mathbb{T} = (2^{<\omega}, \subseteq)$ es un árbol numerable de altura ω. Más aún, para cada $f \in 2^{\omega}$, el conjunto $\{f \restriction n \mid n \in \omega\}$ es rama numerable de T.*

Demostración. Si $f = f \restriction n \in 2^{<\omega}$, entonces $(n, \in) \cong (f, \subsetneq_f)$ por medio de $H : n \to \subsetneq_f = \{f \restriction m \mid m < \mathrm{dom}(f)\}$, definida como $H(m) = f \restriction m$ para cada $m \in n$. En efecto, para cualesquiera $m, k \in n$ se tiene $k \in m$ si y sólo si $f \restriction k \subsetneq f \restriction m$ y además claramente H es biyectiva, así que H es isomorfismo de orden.

Por lo tanto $\mathbb{T}$ es un árbol, y más aún, el orden de cada $f \in 2^{<\omega}$ es su dominio; como $2^{<\omega}$ contiene únicamente a todas las funciones de en 2, se sigue que la altura de $\mathbb{T}$ es $\omega = \sup\{n + 1 \mid n \in \omega\}$.

Además $2^{<\omega}$ es numerable, ya que:

$$\omega \leq |2^{<\omega}| = \left|\bigcup_{n\in\omega} 2^n\right| \leq \sum_{n\in\omega} |2^n| = \omega\,,$$

finalizando la demostración ∎

0.2. Topología

Un *espacio topológico* (o simplemente *espacio*) es una pareja ordenada $(X, \mathcal{T})$, donde X es un conjunto y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una colección cerrada bajo uniones arbitrarias, intersecciones finitas y tal que $\emptyset, X \in \mathcal{T}$, en tal caso $\mathcal{T}$ es una *topología* para X. En la gran mayoría de ocasiones, se hará referencia al espacio $(X, \mathcal{T})$ únicamente con el nombre de su conjunto subyacente, X; así por ejemplo $\mathbb{R}$ bastará para denotar a la línea real con su topología estándar, ω (tratado como espacio topológico) será el discreto numerable, 2^ω el conjunto de Cantor, etcétera. En todo lo que resta del capítulo, X y Y serán espacios topológicos.

Los elementos de $\mathcal{T}$ se denominan *abiertos* de X, y, los complementos de estos, *cerrados* de X. Un *subespacio* de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico (A, η), donde $A \subseteq X$ y $\eta = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$.

Una *base* para un X es una colección de abiertos $\mathcal{B}$ de X tal que cualquier abierto U es unión de alguna subcolección de $\mathcal{B}$; equivalentemente, tal que para cada abierto U y punto $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ de modo que $x \in B \subseteq U$. Convendremos que una *vecindad* para un punto $x \in X$ es un conjunto N tal que existe un abierto U de X con la propiedad $x \in U \subseteq N$. Una *base local* (*de vecindades*, respectivamente) para un punto x en X es una colección de abiertos que contienen a x (de vecindades de x, respectivamente) $\mathcal{B}_x$ de X de manera que para cada abierto U, con $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}_x$ de modo que $x \in B \subseteq U$.

Sea $f : X \to Y$ una función. Se dice que f es *continua* si y sólo si para cada abierto U de Y, el conjunto $f^{-1}[U]$ es abierto en X. Además, f es *continua en el punto* $x \in X$ cuando, para todo abierto U de Y tal que $f(x) \in U$, existe un abierto V de X con $x \in V$ y $f[V] \subseteq U$; esto es, con $x \in V \subseteq f^{-1}[U]$. Si f es biyectiva y $f^{-1} : Y \to X$ es continua, entonces f es un *homeomorfismo*, en tal caso se dice que X y Y son *homeomorfos*, lo cual se denota $X \cong Y$. Se dice que f es *abierta* (*cerrada*, respectivamente) cuando para todo subconjunto abierto (cerrado, respectivamente) A de X, se tiene que $f[A]$ es abierto (cerrado, respectivamente) en Y. Finalmente, f es un *encaje* si y sólo si es un homeomorfismo entre X y el subespacio $f[X]$ de Y, en esta situación, se dice que X *se encaja* en Y, X *está en encajado* en Y, o bien, que Y contiene una *copia homeomorfa* de X.

Proposición 0.2.1. *Sean X y Y espacios topológicos y $U, V \subseteq X$ abiertos. Si $f : U \to Y$ y $g : V \to Y$ son funciones continuas y $f \cap g$ es función, entonces $f \cup g : U \cup V \to Y$ es función continua.*

Dada una familia de espacios $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$, la *suma topológica* y el *producto topológico* (o *de Tychonoff*) serán $\coprod_{\alpha \in I} X_\alpha$ y $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, respectivamente. Si $\beta \in I$, $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \to X_\beta$ será la β-ésima *proyección cartesiana* ($f \longmapsto f(\beta)$).

Sea $A \subseteq X$. Se dice que $x \in X$ es *punto de acumulación* de X cuando para todo abierto U, con $x \in U$, ocurre $U \cap A \setminus \{x\} \neq \varnothing$. Al conjunto de puntos de acumulación, o *derivado* de A, se lo denotará $\mathrm{der}(A)$ y cuando $y \in A \setminus \mathrm{der}(A)$, se dirá que y es *puntos aislado* de A. En adición a esto, los operadores $\mathrm{int}(A)$, $\mathrm{cl}(A)$, $\mathrm{ext}(A)$ y $\mathrm{fr}(A)$ serán el *interior*, la *clausura*, el *exterior* y la *frontera* de A, respectivamente. Un subconjunto $D \subseteq X$ es *denso* en X si y sólo si tiene intersección no vacía con cada abierto no vacío de X, equivalentemente, si $X = \mathrm{cl}(D)$.

Una fórmula $\mathcal{P}$ (de la teoría de conjuntos) es una *propiedad topológica*, o *invariante topológico*, que se preserva bajo homeomorfismos, es decir, si X y Y son espacios topológicos homeomorfos, entonces X satisface la propiedad $\mathcal{P}$ si y sólo si Y la satisface. Una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es *hereditaria* cuando cada vez que X tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces cualquier subespacio de X la tiene; si en lugar de esto, cada subespacio cerrado de X tiene la propiedad $\mathcal{P}$, diremos que $\mathcal{P}$ es *débilmente hereditaria*. Decimos que $\mathcal{P}$ es *productiva* (*finitamente productiva*, respectivamente), si siempre que todos los espacios topológicos de una colección (colección finita, respectivamente) no vacía de espacios no vacíos $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ tienen la propiedad $\mathcal{P}$, entonces el producto $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$. Finalmente, $\mathcal{P}$ es *factorizable*, cuando para cualquier colección no vacía de espacios no vacíos $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$, si producto $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces cada X_α tiene la propiedad $\mathcal{P}$. Nótese que, si $\mathcal{P}$ es productiva, entonces es factorizable (todo producto no vacío de espacios no vacíos $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ contiene una copia homeomorfa de cada uno de sus factores). Dados invariantes $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$, se dice que $\mathcal{P}$ es *intermedia entre* $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{R}$ si ocurren las implicaciones $\mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ y $\mathcal{P} \to \mathcal{R}$, pero existen contrajemplos para los recíprocos de ambas.

A continuación se presentan algunas propiedades topológicas. Se dice que X es *segundo numerable* (o 2 AN) si admite una base contable; es *primero numerable* (o 1 AN) si cada punto $x \in X$ tiene una base local contable; y, X es *separable* si existe un subconjunto $D \subseteq X$ denso y contable.

Proposición 0.2.2. *Sean X un espacio y $\mathscr{B}$ una base de tamaño κ para X.*

i) X contiene un denso de tamaño a lo más κ.

ii) Si $\mathscr{C}$ es base de X, existe una base $\mathcal{C}' \in [\mathcal{C}]^{\leq\kappa}$.

Demostración. (i) Fíjese (AC), para cada $B \in \mathcal{B}$, un elemento $x_B \in B$. De esta forma, si U es cualquier abierto no vacío de X, existen un punto $x \in U$ y cierto $B \in \mathcal{B}$ de modo que $x \in B \subseteq U$. De aquí que $x_B \in U$, mostrando que $D := \{x_B \mid B \in \mathcal{B}\}$ es un denso de X de cardinalidad menor o igual a κ.

(ii) Sea $R := \{(U, W) \in \mathcal{B}^2 \mid \exists C \in \mathcal{C}\,(U \subseteq C \subseteq W)\}$. Utilizando AC, para cada $(U, W) \in R$ fíjese $C_{U,W} \in W$ tal que $U \subseteq C_{U,W} \subseteq W$. De esta manera, $\mathcal{C}' := \{C_{U,W} \mid U, W \in \mathcal{B}^2\} \subseteq \mathcal{C}$ tiene tamaño no mayor a κ.

Sea O un abierto de X y supóngase que $x \in O$, entonces existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subseteq O$; de donde, por ser $\mathcal{C}$ base, existe $C \in \mathcal{C}$ de modo que $x \in C \subseteq W \subseteq O$. De nuevo, por ser $\mathcal{B}$ base, existe cierto $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq C \subseteq W \subseteq O$. De esta forma, $(U, W) \in R$, y así $x \in C_{U,W} \subseteq O$, mostrando que $\mathcal{C}'$ es base de X. ∎

Para cada espacio X se define el *peso* de X como el mínimo cardinal κ para el cual existe una base de X de tamaño exactamente κ, este número se denota por $w(X)$. Para cada $x \in X$, el *carácter* de X es el mínimo cardinal λ para el cual existe una base local de x en X de tamaño λ, este número se denota como $\chi(x, X)$ (o $\chi(x)$ si queda claro el contexto), y, se define $\chi(X) := \sup\{\chi(x, X) \mid x \in X\}$. Finalmente, la *densidad* de X es el mínimo cardinal μ para el cual existe un denso de X de cardinalidad μ, este cardinal se denota por $d(X)$. Este tipo de asignaciones se conocen como *funciones cardinales*, y son propiedades topológicas, en el sentido de que se preservan bajo homeomorfismos.

Los siguientes invariantes son conocidos como *axiomas de separación*:

- *Axioma* T_0: Para cualesquiera $x, y \in X$ distintos, existe un abierto U tal que $U \cap \{x, y\}$ tiene tamaño 1.
- *Axioma* T_1: Para cualesquiera $x, y \in X$ distintos, existe un abierto U tal que $U \cap \{x, y\} = \{x\}$.

- *Axioma* T_2: Para cualesquiera $x, y \in X$ distintos, existen un abiertos U, V ajenos de manera tal que $x \in U$ y $y \in V$. Cuando un espacio es T_2 se dice que es *de Hausdorff*

- *Axioma de regularidad*: Para cada $F \subseteq X$ cerrado, y cada $x \in X \setminus F$, existen abiertos ajenos U, V tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$.

- *Axioma de regularidad completa*. Para cualquier cerrado $F \subseteq X$ y cualquier $x \in X \setminus F$, existe una función $f : X \to [0,1]$ continua de modo que $f(x) = 0$ y $f(\{F\}) \subseteq \{1\}$.

- *Axioma de normalidad*: Para cada par de cerrados ajenos F y G, existen abiertos ajenos U, V tales que $F \subseteq U$ y $G \subseteq V$.

- Los axiomas $\mathrm{T}_3, \mathrm{T}_{31/2}$ y T_4 son los axiomas de regularidad, regularidad completa y normalidad,respectivamente, adicionados con el axioma T_1. Cuando es $\mathrm{T}_{31/2}$, se dice que es *de Tychonoff*.

Los axiomas $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3, \mathrm{T}_{31/2}$ y T_4 son propiedades productivas, factorizables; y todas menos T_4, son hereditarias; T_4 sólo es es décilmente hereditaria. Un espacio X es *cero-dimensaional* si y sólo si contiene una base compuesta de conjuntos abiertos y cerrados a la vez, este invariante topológico es hereditario (por tanto, factorizable) y productivo.

Proposición 0.2.3. *Sea X un espacio T_1. Entonces son equivalentes:*

i) X es cero-dimensional.

ii) X se encaja en $2^{w(X)}$.

Demostración. (i) $\to$ (ii) Supóngase que X es cero-dimensional y sea $\mathcal{B}$ una base compuesta de abiertos y cerrados para X, enumerada como $\{B_\alpha \mid \alpha \in w(X)\}$ (usando 0.2.2). Defínase la función $f : X \to 2^{w(X)}$, para cada $x \in X$, como $f(x)(\alpha) = 1$ si y sólo si $x \in B_\alpha$.

f es continua, pues para cada $\alpha \in w(X)$, $\pi_\alpha f$ es la función característica del abierto y cerrado $B_\alpha \subseteq X$. Ahora, si $x \neq y$, entonces por ser X espacio T_1, existe

$\beta \in w(X)$ de manera que $x \in B_\beta$, pero $y \notin B_\beta$; así que $f(x)(\beta) \neq f(y)(\beta)$ y en consecuencia $f(x) \neq f(y)$.

Finalmente, verificaremos que para cualquier $\alpha \in w(X)$, $f[B_\alpha]$ es abierto en $f[X]$, lo suficiente para mostrar que f es abierta, y con ello homeomorfismo, sobre su imagen. Si $f(x) \in f[B_\alpha]$ es arbitrario, $x \in B_\alpha$ (por ser f inyectiva); y así $f(x) \in \pi_\alpha^{-1}[\{1\}] \cap f[X] \subseteq f[B_\alpha] \cap f[X]$. En efecto, si $f(y) \in \pi_\alpha^{-1}[\{1\}] \cap f[X]$, entonces $f(y)(\alpha) = 1$, mostrando que $y \in B_\alpha$, y así, $f(y) \in f[B_\alpha]$. Por lo tanto, $f[B_\alpha]$ es abierto en $f[X]$, luego, f es encaje de X en $2^{w(X)}$.

(ii) → (i) El espacio $2 = \{0, 1\}$ es cero-dimensional, así que por ser tal propiedad productiva y hereditaria, cualquier subespacio de $2^{w(X)}$ es cero-dimensional. ■

Dado que el discreto de dos puntos es un de Tychonoff, tal propiedad es productiva y hereditarira, resulta que:

Corolario 0.2.4. *Todo espacio* T_1 *y cero-dimensional es de Tychonoff*

el próximo enunciando es uno de los más fuertes para espacios normales, su demostración se consultar en [2, Teo. 2.1.8].

Teorema 0.2.5 (extensión de Tietze). *Sea X un espacio T_1 y $F \subseteq X$ cualquier cerrado. Si $f : F \to \mathbb{R}$ es continua, entonces existe $g : X \to \mathbb{R}$ continua y tal que extiende a f, es decir, $g \restriction A = f$.*

Corolario 0.2.6 (Lema de Jones). *Sea X un espacio T_4 y $A \subseteq X$ infinito, discreto y cerrado en X. Si D es denso infinito en X, entonces $2^{|A|} \leq 2^{|D|}$. Particularmente, si X es separable, $2^{|A|} \leq \mathfrak{c}$.*

Demostración. Sea $F := \mathbb{R}^S = \{f \mid f : S \to \mathbb{R}\}$. Como A es discreto, cada $f \in F$ es función continua. Ahora, como A es cerrado, utilícese el Teorema de Tietze para fijar (AC), para cada $f \in F$, una extesión continua $g_f : X \to \mathbb{R}$ de f. Obsérvese que $f \longmapsto g_f$ es inyectiva.

Supóngase ahora que $h, k : X \to \mathbb{R}$ son continuas y tales que $h \restriction D = k \restriction D$. Sea $x \in X$ cualquiera, si $h(x) \neq k(y)$, existen dos abiertos ajenos de $\mathbb{R}$, a saber U

y V, tales que $h(x) \in U$ y $k(x) \in V$. Como $x \in h^{-1}[U] \cap k^{-1}[V]$ son abiertos no vacíos de X, existe $d \in D \cap h^{-1}[U] \cap k^{-1}[V]$, lo cual es imposible pues implica que $h(d) = k(d) \in U \cap V$. Por lo tanto, $h = k$; esto es, la asignación $h \longmapsto \hat{h}$ es inyectiva.

Por lo mencionado anteriormente, hay una inyección de $\mathbb{R}^S$ en $\mathbb{R}^D$, así:

$$2^{|S|} = 2^{\aleph_0 |S|} = (2^{\aleph_0})^{|S|} = |\mathbb{R}^S| \leq |\mathbb{R}^D| = (2^{\aleph_0})^{|D|} = 2^{\aleph_0 |D|} = 2^{|D|}$$

finalizando la prueba. ■

0.2.1. Convergencia de sucesiones

Una sucesión $(x_n)_{n\in\omega} \subseteq X$ es *convergente* a un punto $a \in X$ si y sólo si para cada abierto U de X tal que $a \in U$, existe un natural $N \in \omega$ de manera que $\{x_n \mid n \geq N\} \subseteq U$. Esto se denotará como $x_n \to a$. Una *subsucesión* de $(x_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión de la forma $(x_{f(n)})_{n\in\omega}$, donde $f : \omega \to \omega$ es una función estrictamente creciente. Es fácil verificar que, si $x_n \to a$ y $(x_{f(n)})_{n\in\omega}$ es subsucesión de $(x_n)_{n\in\omega}$, entonces $x_{f(n)} \to a$. Un espacio X es *secuencialmente compacto* si y sólo si toda sucesión $(x_n)_{n\in\omega} \subseteq X$ contiene una subsucesión convergente.

El espacio X se dice *de convergencia única* (US) si para toda sucesión convergente $(x_n)_{n\in\omega} \subseteq X$ existe un único $a \in X$ para el cual $x_n \to a$; en tal caso, se denotará $a = \lim_{n\to\infty}(x_n)$. La propiedad US es intermedia entre los axiomas de separación T_2 y T_1 [2, Prop. 1.6.11, 1.6.16].

Un subconjunto numerable $A \in [X]^{\omega}$ es, de igual forma, una *sucesión convergente*, cuando existe $a \in A$ de manera que, para cada abierto U de X tal que $a \in U$ ocurre $A \subseteq^* U$; en tal caso también se denotará $A \to a$, si el espacio es US, $a = \lim(A)$. Obsérvese que en tal caso si $B \in [A]^{\omega}$, entonces $B \to a$.

Proposición 0.2.7. *Sean X un espacio y $a \in X$. Entonces:*

i) Si $(x_\omega)_{n\in\omega} \subseteq X$ es infinita y convergente a a, entonces $x[\omega]$ es una sucesión convergente a a.

ii) *Si $A \in [X]^\omega$ es una sucesión convergente a a, entonces cualquier biyección $x : \omega \to A$ es una sucesión convergente a a.*

Demostración. (i) → (ii) Supóngase que $x_n \to a$ y sea U un abierto tal que $a \in U$. Entonces existe $N \in \omega$ tal que $\{x_n \mid n \geq N\} \subseteq U$, consecuentemente, ocurre que $B \setminus U \subseteq \{x_n \mid n < N\} =^* \emptyset$, y así, $x[\omega] \to a$.

(ii) → (i) Supóngase que $A \to a$ y sea $x : \omega \to A$ cualquier biyección. Si U es cualquier abierto en X con $a \in U$, se cumple que $x[\omega] = A \setminus U$ es finito. Como x es biyección, existe $N \in \omega$ tal que $A \setminus U \subseteq \{x_n \mid n < N\}$. Debido a lo anterior, $\{x_n \mid n \geq N\} \subseteq U$, y así, $x_n \to a$. ■

Para cualquier espacio X se puede considerar la *clausura secuencial* de cualquiera de sus subespacios $A \subseteq X$, esto es, el conjunto de todos los límites de las sucesiones contenidas en A: $\mathrm{sqcl}(A) := \{a \in X \mid \exists (x_n)_{n\in\omega} \subseteq A\, (x_n \to a)\}$.

Nótese que, si A es subespacio de un espacio T_1, X, y $(x_\omega)_{n\in\omega} \subseteq X$ converge a $a \in A \setminus X$, entonces $a \in \mathrm{cl}(x[\omega]) \setminus x[\omega] \subseteq \mathrm{der}(x[\omega])$ y es necesario que tal sucesión sea infinita. Así que en virtud de lo anterior:

Corolario 0.2.8. *Sean X un espacio T_1 y $A \subseteq X$. Entonces:*

i) $\mathrm{sqcl}(A) = A \cup \{x \in X \mid \exists B \in [A]^\omega\, (B \to a)\}$.

ii) *X es secuencialmente compacto si y sólo si para cada $A \subseteq X$ numerable, existe $B \in [A]^\omega$ convergente.*

Por lo ya mencionado anteriormente, toda clausura secuencial está contenida en la clausuta del correspondiente subespacio. Por supuesto, los operadores sqcl y cl no necesariamente son iguales. Se dice que X es de *Fréchet* (o de *Fréchet-Uryshon*), o tiene la *propiedad de Fréchet*, si y sólo si para cada $A \subseteq X$ ocurre $\mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{sqcl}(A)$. Es conocido que, todo espacio 1 AN es de Fréchet, y que la propiedad de Féchet es hereditaria, así pues, factorizable [2, Ej. 2.1.H].

Un subespacio $A \subseteq X$ es *secuencialmente cerrado* cuando $\mathrm{sqcl}(A) \subseteq A$. Es claro que cualquier subespacio cerrado es secuencialmente cerrado, sin embargo el recíroco de esto es falso en general, cuando cualquier subespacio secuencialmente cerrado de X es cerrado, se dice que X es un espacio secuencial. A continuación se construye una herramienta que permite determinar cuándo, y «qué tanto», un espacio es secuencial, la *clausura secuencial transfinita*. Para cada ordinal $\alpha \leq \omega_1$ defínase por recursión:

i) $\mathrm{sqcl}^0(A) = A$,

ii) Para todo ordinal $\alpha < \omega_1$, $\mathrm{sqcl}^{\alpha+1}(A) = \mathrm{sqcl}(\mathrm{sqcl}^{\alpha}(A))$, y

iii) Para todo ordinal límite $\gamma \leq \omega_1$, $\mathrm{sqcl}^{\gamma}(A) = \bigcup\{\mathrm{sqcl}^{\alpha}(A) \mid \alpha < \gamma\}$.

En caso de existir, se define el *orden secuencial* de X como el mínimo ordinal α tal que, para cada $A \subseteq X$, ocurre $\mathrm{sqcl}^{\alpha}(A) = \mathrm{cl}(A)$; tal ordinal se denota $\mathrm{so}(X)$. Nótese que si $A \subseteq X$ y $\alpha \leq \beta \leq \omega_1$, entonces $\mathrm{sqcl}^{\alpha}(A) \subseteq \mathrm{sqcl}^{\beta}(A) \subseteq \mathrm{cl}(A)$, consecuentemente $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(\mathrm{sqcl}^{\alpha}(A))$.Un espacio es de Fréchet si y sólo si tiene orden secuencial menor o igual a 1. La siguiente proposición caracteriza a los espacios secuenciales, los clasifica, y de paso, muestra que todo espacio de Fréchet es secuencial.

Proposición 0.2.9. *Para todo espacio X son equivalentes:*

i) *X es secuencial.*

ii) *Para cada $A \subseteq X$,* $\mathrm{sqcl}^{\omega_1}(A) = \mathrm{cl}(A)$.

iii) $\mathrm{so}(X)$ *existe.*

Demostración. (i) → (ii). Supóngase que X es secuencial y sea $A \subseteq X$. Nótese que, si $(x_n)_{n\in\omega} \subseteq \mathrm{sqcl}^{\omega_1}(A)$ es convergenete, digamos que $x_n \to x$ en X. Para cada $n \in \omega$ sea α_n el mínimo α para el que $x_n \in \mathrm{sqcl}^{\alpha}(A)$, por regularidad de ω_1, existe $\alpha < \omega_1$ tal que $(x_n)_{n\in\omega} \subseteq \mathrm{sqcl}^{\alpha}(A)$. Esto demuestra que $x \in \mathrm{sqcl}^{\alpha+1}(A) \subseteq \mathrm{sqcl}^{\omega_1}(A)$ y que $\mathrm{sqcl}^{\omega_1}(A)$ es secuencialmente cerrado. Por lo tanto, es cerrado y así:

$$\mathrm{sqcl}^{\omega_1}(A) = \mathrm{cl}(\mathrm{sqcl}^{\omega_1}(A)) = \mathrm{cl}(A)$$

La implicación (ii) → (iii) es inmediata.

(iii) → (i) Supóngase (iii) y sea $A \subseteq X$ secuencialmente cerrado. Entonces $A = \mathrm{sqcl}(A)$ y, consecuentemente, para cada ordinal $\alpha \leq \omega_1$, $A = \mathrm{sqcl}^{\omega_1}(A) = \mathrm{cl}(A)$. Esto prueba que A es cerrado, por tanto, X secuencial. ■

0.2.2. Compacidad y tipos de compacidad

Una cubierta, de un conjunto A, es una colección $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Una *subcubierta* de $\mathcal{U}$ es una cubierta de A contenida en $\mathcal{U}$. Si X es un espacio topológico, se dice que una cubierta $\mathcal{U}$, de X, es *abierta* cuando sus elementos son abiertos de X. El espacio X es *compacto* si y sólo si, toda cubierta abierta, $\mathcal{U}$, de X tiene una subcubierta finita; es *numerablemente compacto* cuando cualquier cubierta abierta, a lo más numerable, de X tiene una subcubierta finita; y, es *de Lindelöf* si y sólo si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta a lo más numerable. Se dice que X es *σ-compacto* cuando es unión numerable de espacios compactos. Ahora, X es localmente compacto cuando cada punto $x \in X$ tiene una base de vecindades compactas. Todas las propiedades anteriores son débilmente hereditarias, y, un espacio es compacto si y sólo si es numerablemente compacto y de Lindelöf.

Dada una cubierta $\mathcal{U}$ para un espacio X, decimos que una cubierta $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es *refinamiento* de $\mathcal{U}$ cuando para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ de manera que $V \subseteq U$, esta situación será denotada por $\mathcal{V} \preccurlyeq \mathcal{U}$. Un refinamiento es *abierto* cuando todos sus elementos son abiertos. Nótese que si $\mathcal{V} \preccurlyeq \mathcal{U}$, entonces fijando para cada $V \in \mathcal{V}$ un elemento $U_V \in \mathcal{U}$ de modo que $V \subseteq U_V$ se obtiene una subcubierta $\{U_V \mid V \in \mathcal{V}\}$ de $\mathcal{U}$ de tamaño a lo más $|\mathcal{V}|$.

Lema 0.2.10. *Sea X un espacio* 2 AN. *Si $\mathcal{U}$ es una cubierta de X y para cada $x \in X$ tiene una vecindad $N \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ contiene una subcubierta contable.*

Demostración. Por los comentarios previos al enunciado de esta proposición, basta encontrar un refinamiento a lo más numerable de $\mathcal{U}$. Defínase la colección $\mathcal{V} := \{B \in \mathcal{B} \mid \exists U \in \mathcal{U}\,(B \subseteq U)\}$, para que $\mathcal{V} \preccurlyeq \mathcal{U}$, resta ver que $\mathcal{V}$ cubre a X.

Efectivamente, si $x \in X$, existe una vecindad de $N \in \mathcal{U}$ de x en X. Así, existen un abierto U de X, y un elemento $B \in \mathcal{B}$, tales que $x \in B \subseteq U \subseteq N$. Esto prueba que $B \in \mathcal{V}$, por lo que $X \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. ■

Corolario 0.2.11. *Sea X un espacio topológico.*

i) Si X es 2 AN, *o σ compacto, entonces es de Lindelöf* *ii) Si X es 2 AN y localmente compacto, entonces es σ-compacto.*

Demostración. (i) Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X, como todo abierto es vecindad de cada uno de sus puntos, $\mathcal{U}$ satisface las hipótesis del lema previo. Con ello, si X es segundo numerable, $\mathcal{U}$ admite una subcubierta contable.

Por otro lado, si X es σ-compacto, X es unión a lo más numerable de subespacios compactos de X, a saber $\{X_n \mid n \in \omega\}$. Como cada uno de ellos es compacto, para cada $n \in \omega$ existe un subconjunto $\mathcal{U}_n \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$ con $X_n \subseteq \bigcup \mathcal{U}_n$. Entonces $\bigcup\{\mathcal{U}_n \mid n \in \omega\}$ es una subcubierta a lo más numerable de $\mathcal{U}$.

(ii) Supógnase que X es 2 AN, localmente compacto. Para cada $x \in X$ sea (AC) N_x una vecindad compacta de x en X, entonces $\mathcal{U} := \{N_x \mid x \in X\}$ cumple las hipótesis del lema previo, y admite una subcubierta contable $\mathcal{V}$. Como cada elemento en $\mathcal{V}$ es compacto y $X \subseteq \bigcup \mathcal{V}$, se tiene que X es σ-compacto. ■

Proposición 0.2.12. *Sea X un espacio topológico, entonces:*

i) Si X es numerablemente compacto, para cada $A \subseteq [X]^{\geq\omega}$, $\mathrm{der}(A) \neq \varnothing$.

ii) Si X es T_1 y para cada $A \subseteq X$ infinito, $\mathrm{der}(A) \neq \varnothing$; entonces, X es numerablemente compacto.

Dentro de la clase de espacios de Hausdorff, la compacidad tiene el efecto conocido de que «los compactos se comportan como puntos», en este aspecto, es bien sabido que cualquier subespacio compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado; mucho más fuerte aún, todo espacio compacto de Hausdorff es normal [2, Teo. 3.1.9]. Se explorará ahora la siguiente equivalencia para la compacidad local en espacios de Hausdorff:

Proposición 0.2.13. *Sea X un espacio localmente compacto y de Hausdorff. Para cada $A \subseteq X$ son equivalentes:*

i) A es localmente compacto

ii) A es abierto en $\mathrm{cl}(A)$

iii) Existen un abierto U y un cerrado F tales que $A = U \cap F$.

Demostración. (i) → (ii) Supóngase que A es localmente compacto y sea $x \in A$ cualquiera. Como A es localmente compacto, existe una vecindad compacta N de x en A, con ello, hay un abierto V de A tal que $x \in V \subseteq K \subseteq A$. Como A es de Hausdorff, $\mathrm{cl}_A(V) \subseteq \mathrm{cl}_A(K) = K$, y así, $\mathrm{cl}_A(V)$ es subespacio cerrado del compacto K, por ello, es compacto.

Por ser X de Hausdorff, $\mathrm{cl}_A(V) = \mathrm{cl}(V) \cap A$ es cerrado en X. Dado que $V \subseteq A$, entonces $V \subseteq \mathrm{cl}(V) \cap A$, y así $\mathrm{cl}(V) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(V) \cap A) = \mathrm{cl}(V) \cap A$. Se deduce entonces que $\mathrm{cl}(V) \subseteq A$.

Como V es abierto en A, existe un abierto U de X con $V = U \cap A$. La condición $\mathrm{cl}(V) \subseteq A$ implica que $\mathrm{cl}(A) \cap U \subseteq A$. Como U es abierto en X, entonces el conjunto $W := \mathrm{cl}(A) \cap U$ es un abierto de $\mathrm{cl}(A)$ tal que $x \in W \subseteq A \subseteq \mathrm{cl}(A)$. Lo cual demuestra que A es abierto en $\mathrm{cl}(A)$.

(ii) → (iii) Supógnase que A es abierto en su clausura, entonces $A = U \cap \mathrm{cl}(A)$, donde U es abierto en X y $\mathrm{cl}(A)$ es cerrado en X.

(iii) → (i) Supóngase que $A = U \cap F$, donde U es abierto y F es cerrado. Sean $x \in A$ y W abierto en $U \cap F$ tal que $x \in W$, entonces, existe un abierto W' de X tal que $W = W' \cap (U \cap F) = (W' \cap U) \cap F$.

Como $x \in W' \cap U$ y X es localmente compacto, existe un a vecindad compacta N de x en X tal que $x \in N \subseteq W' \cap U$, de donde, $x \in N \cap F \subseteq W' \cap (U \cap F)$. Nótese que $N \cap F$ es un subespacio cerrado de N, y como N es compacto, entonces $N \cap F$ es compacto.

Finalmente, como N es vecindad de x en X, existe un abierto V de X tal que $x \in V \subseteq N$, de aquí que $x \in V \cap (U \cap F) \subseteq N \cap F \subseteq U \cap F$; y, como $V \cap (U \cap F)$ es abierto en $U \cap F$, $N \cap F$ es una vecindad compacta de x en $U \cap F$. Lo cual prueba que $A = U \cap F$ es localmente compacto. ■

Corolario 0.2.14. *Sea X un espacio de Hausdorff. Entonces:*

i) X es localmente compacto si y sólo si cada $x \in X$ tiene una vecindad compacta. Particularmente, cualquier compacto de Hausdorff es localmente compacto.

ii) Si $D \subseteq X$ es denso y abierto, entonces es localmente compacto

Demostración. (i) Basta probar necesidad. Supóngase que cada punto de X tiene una vecindad compacta. Sea $x \in X$ cualquiera y $\mathcal{B}$ una base local para x en X, por la proposición anterior cada $B \in \mathcal{B}$ es localmente compacto. Fíjese (AC) una vecindad compacta N_B de x en B.

Como N_B es vecindad de x en B, existe un abierto U de V tal que $x \in U \subseteq N_B \subseteq B$, pero al ser B abierto, U es abierto en X. Esto prueba que cada N_B es vecindad compacta de x en X; y así, $\{N_B \mid B \in \mathcal{B}\}$ es una base de vecindades compactas para x en X.

(ii) Como D es denso, de ser abierto, es abierto en $X = \mathrm{cl}(D)$, siguiéndose el resultado de la proposición previa. ■

Un subconjunto $A \subseteq X$ es *de primera categoría* (o *magro*) si y sólo si es unión numerable de conjuntos B, tales que $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(B)) = \emptyset$. Un subconjunto de X es *de segunda categoría* cuando no es de primera categoría. Finalmente, el espacio X es *de Baire* cuando cualquiera de sus subconjuntos magros tiene interior vacío, equivalentemente, cuando la intersección numerable de conjuntos abiertos densos, es densa. La siguiente es una versión, de las dos más «populares» que existen, del Teorema de Categoría de Baire.

Teorema 0.2.15. *Todo espacio X de Hausdorff, localmente compacto, es de Baire.*

Demostración. Sea $\{D_n \mid n \in \omega\}$ una colección de abiertos, densos de X, habrá de mostrarse que $A := \bigcap\{D_n \mid n \in \omega\}$ es denso en X. Sea U un abierto no vacío de X.

Para cada punto $x \in X$ y vecindad N de x fíjese (AC) una vecindad compacta $K(x, N)$ de X tal que $x \in K(x, N) \subseteq N$. Por recursión en ω defínanse x_0 como cualquier elemento de $U \cap D_0$ y $K_0 := K(x_0, U \cap D_0)$; y, para cada $n \in \omega$, tómense $x_{n+1} \in K_n \cap D_{n+1}$ y $K_{n+1} = K(x_{n+1}, K_n \cap D_{n+1})$.

De esta manera, $\{K_n \mid n \in \omega\}$ es una sucesión $\subseteq$-decreciente de subespacios compactos no vacíos de X. Como todos ellos son subespacios compactos, de Hausdorff, no vacíos, y del espacio compacto K_0, la siguiente intersección no puede ser vacía: $\bigcap\{K_n \mid n \in \omega\} \subseteq U \cap A$. Así, A es denso y X es de Baire. ■

El espacio X se dice *pseudocompacto* si y sólo si cualquier función continua $f : X \to \mathbb{R}$ es *acotada*, es decir, existe $M > 0$ tal que para cada $x \in X$, ocurre $|f(x)| \leq M$. Se tiene una relación importante entre la compacidad numerable y la pseudocompacidad.

Proposición 0.2.16. *Sea X un espacio topológico* T_1.

i) Si X es numerablemente compacto, es pseudocompacto.

ii) Si X es normal y pseudocompacto, es numerablemente compacto.

Demostración. (i) Por absurdo, supóngase que X es numerablemente compacto y no pseudocompacto. Fíjese $f : X \to \mathbb{R}$ no acodada. Entonces, para cada $n \in \omega$ se puede fijar (AC) un elemento $x_n \in X$ de modo que $|f(x)| > n$, con ello, el conjunto $A := \{x_n \mid n \in \omega\}$ es infinito.

Como X es numerablemente compacto y T_1, existe $x \in \operatorname{der}(A)$ y como f es continua, $f(x) \in \operatorname{der}(f[A])$. A razón de esto, $(0, f(x)+1) \cap f[A]$ es infinito, de donde, $\{m \in \omega \mid f(x_n) < f(x)+1\}$ es infinito. Pero, lo anterior es una contradicción, dada la elección de los puntos x_n. Por lo tanto, X debe ser pseudocompacto.

(ii) Supóngase, por contradicción que X es normal, pseudocompacto y no numerablemente compacto, entonces al ser X un espacio T_1, existe $A \subseteq X$ infinito, sin pérdida de generalidad numerable, y sin puntos de acumulación, esto implica que A es discreto y cerrado. Sea $f : A \to \omega \subseteq \mathbb{R}$ cualquier biyección, entonces f es continua, porque A es cerrado.

Como X es normal, el Teorema de Tietze (0.2.5) garantiza la existencia de una función continua $g : X \to \mathbb{R}$ de manera que $g \upharpoonright A = f$. Claramente g es no acotada, lo cual contradice que X sea pseudocompacto. ■

Proposición 0.2.17. *Sean X un espacio topológico y $B \subseteq X$.*

i) Si X es pseudocompacto y B es abierto y cerrado, B no puede ser infinito.

ii) Si B es denso y cada sucesión en B contiene una subsucesión convergente en X, entonces X es pseudocompacto.

Demostración. (i) Supóngase que B es abierto, cerrado e infinito, sin pérdida de generalidad, numerable. Sea $f : B \to \omega \subseteq \mathbb{R}$ biyectiva, nótese que al ser B discreto, f es continua. Sea $g : X \setminus B \to \mathbb{R}$ la función constante 0, g es continua. Como f, g son continuas y $B, X \setminus B$ son abiertos (ajenos) de X, entonces $f \cup g : X \to \mathbb{R}$ es continua, y claramente no acotada, probando que X no es pseudocompacto, lo cual es imposible.

(ii) Supóngase que B es denso y que X no es pseudocompacto. Entonces para cada $n \in \omega$, por densidad de B, se puede fijar un elemento $x_n \in D \cap f^{-1}[(n, \infty)] \neq \varnothing$. Se afirma que $(x_n)_{n\in\omega} \subseteq D$ no tiene subsucesiones convergentes.

Efectivamente, sea $g : \omega \to \omega$ estrictamente creciente. Por continuidad de f, si $(x_{g(n)})_{n\in\omega}$ converge en X, $(f(x_{g(n)}))_{n\in\omega}$ converge en $\mathbb{R}$, y por tanto, es acotada. Esto contradice la construcción de f, por lo tanto, $(x_n)_{n\in\omega}$ no contiene subsucesiones convergentes en X. ■

0.2.3. Extensiones unipuntuales

Para cada espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ considérese un punto $\infty \notin X$ (siempre existe tal punto, pues en ZFC, ningún conjunto tiene por elemento a cualquier conjunto). Se define la *extensión unipuntual* de $(X, \mathcal{T})$ como el espacio $(X \cup \{\infty\}, \eta)$, donde:

$$\eta := \mathcal{T} \cup \{U \subseteq X \cup \{\infty\} \mid \infty \in U \ \wedge X \setminus U \text{ es compacto y cerrado en } X\}$$

es un hecho que $(X \cup \{\infty\}, \eta)$ es un espacio topológico.

Proposición 0.2.18. *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $(X \cup \{\infty\}, \eta)$ su extensión unipuntual.*

i) $(X, \mathcal{T})$ *es subespacio de* $(X \cup \{\infty\}, \eta)$*.*

ii) $X \cup \{\infty\}$ *es compacto.*

iii) *X es no es compacto si y sólo si X es subespacio denso de $X \cup \{\infty\}$.*

Demostración. (i) La contención $\mathcal{T} \subseteq \eta' := \{U \cap X \mid U \in \eta\}$ es evidente. De forma recíproca, sea $U \in \eta$, sin pérdida de generalidad $U \notin \mathcal{T}$. Sea $y \in U \cap X$

cualquier elemento, entonces, $y \in X \setminus (X \setminus U)$. Por definición de η, $X \setminus U$ es cerrado en X, así que $X \setminus U$ es abierto en X y existe $V \in \eta$ de manera que ocurre $y \in V \subseteq X \setminus (X \setminus U) \subseteq U \cap X$. Esto muestra que $U \cap X$ es abierto en X, es decir, $U \cap X \in \mathscr{T}$.

(ii) Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $X \cup \{\infty\}$. Entonces existe $U_0 \in \mathcal{U}$ de modo que $\infty \in U_0$. Por definición de η, $X \setminus U_0$ es compacto, entonces, existe un subconjunto finito $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ de modo que $X \setminus U_0 \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Así, $\mathcal{V} \cup \{U_0\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. Lo anterior demuestra que $X \cup \{\infty\}$ es compacto.

(ii) Finalmente, obsérvese que X es denso en X si y sólo si $\{\infty\}$ no es abierto en $X \cup \{\infty\}$. Pero por definición de η, $\{\infty\}$ es abierto $X \cup \{\infty\}$ si y sólo si X es compacto (y cerrado en X). ■

Decimos que la extensión unipuntual de un espacio no compacto X es la *compactación de Alexandroff* cuando resulta ser de Hausdorff; y más en general, decimos que un espacio Y es una *compactación Hausdorff* del espacio X cuando: Y es compacto, de Hausdorff y Y contiene una copia homeomorfa de X, densa en Y. Es bien sabido [2, Teo. 3.5.1] que un espacio de Hausdorff, no compacto, X tiene compactaciones Hausdorff si y sólo si X es de Tychonoff. A propósitos de este trabajo, nos serviremos únicamente de la siguiente caracterización.

Proposición 0.2.19. *Sea X un espacio no compacto. La extensión unipuntual $Y := X \cup \{\infty\}$ es la compactación de Alexandroff de X si y sólo si X es de Hausdorff y localmente compacto.*

Demostración. Supóngase primero que Y es de Hausdorff, entonces el localmente compacto (por 0.2.14). Como X es espacio no compacto y Y es de Hausdorff, $X = Y \setminus \{\infty\}$ es un subespacio de Hausdorff, denso y abierto de Y. Lo cual, nuevamente por 0.2.14, implica que X es localmente compacto.

De forma recíproca, supóngase que X es de Hausdorff y localmente compacto. Como X es subespacio de Y, para verificar que X es de Hausdorff, resta ver que si $x \in X$, entonces ∞ y x se separan por abiertos ajenos.

Efectivamente, sean $x \in X$ y N una vecindad compacta para x en X. Fíjese un abierto V de X con $x \in V \subseteq N$. Ahora, como N es compacto y cerrado del espacio de Hausdorff X; por lo tanto, $U := \{\infty\} \cup X \setminus N$ es un abierto en $X \cup \{\infty\}$ ajeno con V. ■

1. Familias casi ajenas

Las familias casi ajenas («almost disjoint families», en inglés) son objetos fascinantes de la teoría de conjuntos; como se verá a lo largo de este trabajo, sus aplicaciones no sólo se limitan a esta rama de las matemáticas, sino que sus repercusiones se extienden a la topología. Entre los pioneros de su estudio destacan enormes personajes, entre ellos Felix Hausdorff, Wacław Sierpiński, Kazimierz Kuratowski, Eduard Čech y Stefan Banach.

En lo que sigue, se presentarán estos objetos y se expondrán sus propiedades más inmediatas; algunos métodos para su construcción; y finalmente, un estudio básico sobre su combinatoria. A lo largo de esta última sección, se abordarán las pruebas de algunos resultados clásicos, principalmente: los Lemas de Dočkálková y de Solovay, el Teorema de Simon y la existencia de las familias de Luzin. Por último, se darán algunas aplicaciones de esta teoría sobre el comportamiento de los cardinales $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{m}$ *y* $\mathfrak{a}$.

1.1. Observaciones inmediatas

Definición 1.1.1. *Sea N un conjunto numerable. Una* ***familia casi ajena sobre*** *N es un subconjunto $\mathcal{A} \subseteq [N]^\omega$ cuyos elementos son casi ajenos por pares.* AD(N) *es el conjunto de todas las familias casi ajenas sobre N.*

El término ***familia casi ajena*** *(o simplemente* ***familia****) hará referencia a una familia casi ajena sobre ω.*

El concepto previo es fácilmente generalizable, el lector puede indagar al respecto en [5, Def. 9.20, p. 118]. Sin embargo, la teoría asociada a las familias casi ajenas, definidas como en 1.1.1, es suficientemente amplia y meritoria de un estudio dedicado.

Cualquier familia de subconjuntos ajenos por pares de N, es también una familia casi ajena sobre N; particularmente, $\varnothing$ y cualquier colección de la forma

$\{A\}$, con $A \in [N]^\omega$. Además, resulta evidente que cada subconjunto de una familia casi ajena sobre N es, a su vez, una familia casi ajena sobre N.

Es claro que toda familia casi ajena tiene tamaño menor o igual a $\mathfrak{c}$; así que en virtud de lo previamente observado, de existir alguna de ellas de tamaño el continuo, se garantizaría la existencia de familias ajenas de cualquier tamaño inferior a $\mathfrak{c}$.

Ejemplo 1.1.2. *Las siguientes colecciones:* $\{\omega\}$, $\{\{2n \mid n \in \omega\}, \{2n+1 \mid n \in \omega\}\}$ *y* $\{\{p^n \mid n \in \omega \setminus \{0\}\} \mid p \text{ es primo}\}$ *son familias casi ajenas sobre* ω.

No resulta muy difícil verificar que las primeras dos familias del ejemplo anterior son «grandes», en el siguiente sentido:

Definición 1.1.3. *Sea N conjunto numerable. Una familia $\mathscr{A}$ sobre N es **maximal en** N si es $\subseteq$-maximal del conjunto* $\mathrm{AD}(N)$. *Se denotará por* $\mathrm{MAD}(N)$ *al conjunto de todas ellas.*

*Cuando no haya riesgo de ambigüedad, el término **familia maximal** hará referencia a una familia maximal en ω.*

Dado que los elementos de toda familia casi ajena son infinitos, se tiene inmediatamente la siguiente observación:

Observación 1.1.4. *Una familia $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(N)$ es maximal en N si y sólo si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:*

i) Para cualquier $\mathscr{B} \subseteq [N]^\omega$, si $\mathscr{A} \subsetneq \mathscr{B}$, entonces $\mathscr{B} \notin \mathrm{AD}(N)$.

ii) Para cada $B \in [N]^\omega$ existe $A \in \mathscr{A}$ tal que $A \cap B$ es infinito.

Se advierte que las familias sobre ω parecerán deslucir a las construidas sobre otros conjuntos numerables; pero al no ser el estudio sobre estas últimas nulo, es menester considerar las propiedades que son transferibles entre estas dos clases de objetos.

Definición 1.1.5. *Sean N, M conjuntos numerables y $h : N \to M$ cualquier biyección. Se define $\Phi_h : \mathcal{P}(\mathcal{P}(N)) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$ como:*

$$\Phi_h(\mathscr{A}) = \{h[A] \mid A \in \mathscr{A}\}.$$

En términos de lo recién definido, se remarca que al ser h biyección, Φ_h será una biyección. Más aún, estas biyecciones se comportan bien respecto a ciertas virtudes conjuntistas, tal y como se ilustra a continuación.

Proposición 1.1.6. *Sean N, M son numerables y $h : N \to M$ una biyección cualquiera. Entonces:*

i) $\mathscr{A} \subsetneq \mathscr{B}$ *si y sólo si* $\Phi_h(\mathscr{A}) \subsetneq \Phi_h(\mathscr{B})$.

ii) $\Phi_h(\mathscr{A} \cap \mathscr{B}) = \Phi_h(\mathscr{A}) \cap \Phi_h(\mathscr{B})$.

iii) $\Phi_h(\mathscr{A} \cup \mathscr{B}) = \Phi_h(\mathscr{A}) \cup \Phi_h(\mathscr{B})$.

iv) $|\mathscr{A}| = |\Phi_h(\mathscr{A})|$.

v) $\Phi_h[\mathrm{AD}(N)] = \mathrm{AD}(M)$.

vi) $\Phi_h[\mathrm{MAD}(N)] = \mathrm{MAD}(M)$

Demostración. Se mostrarán únicamente (v) y (vi). En ambos basta probar la contención directa, pues al ser h biyección, $\Phi_h^{-1} = \Phi_{h^{-1}}$.

(v) Si $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(N)$, entonces $\mathscr{A} \subseteq [N]^\omega$ y así $\Phi_h(\mathscr{A}) \subseteq [M]^\omega$. Ahora, si $h[A], h[B] \in \Phi_h(\mathscr{A})$ son distintos, es necesario que $A \neq B$ y por ello $A \cap B =^* \varnothing$. Se obtiene que $h[A] \cap h[B] = h[A \cap B] =^* \varnothing$, y con ello, $\Phi_h(\mathscr{A}) \in \mathrm{AD}(M)$.

(vi) Si $\mathscr{A} \in \mathrm{MAD}(\mathscr{A})$ y $B \subseteq M$ es infinito, entonces $h^{-1}[B] \subseteq N$ es infinito y existe $A \in \mathscr{A}$ tal que $A \cap h^{-1}[B]$ es infinito. Al ser h biyección, $h[A \cap h^{-1}[B]] = h[A] \cap B$ es infinito, por ende $\Phi_h(\mathscr{A}) \in \mathrm{MAD}(M)$. ■

A partir de este momento se consolida la usanza de hacer hincapié en qué propiedades, u objetos, basados en familias casi ajenas se preservan bajo las biyecciones Φ_h.

Una aplicación superflua de lo anterior es el nacimiento de un método cómodo para generar familias casi ajenas; en especial, infinitas.

Ejemplo 1.1.7. *Claramente* $\mathscr{A} = \{\{n\} \times \omega \mid n \in \omega\} \in \mathrm{AD}(\omega \times \omega)$. *Así que si* $h : \omega \times \omega \to \omega$ *es biyección,* $\Phi_h(\mathscr{A}) \in \mathrm{AD}(\omega)$. *Más aún, tal familia es del mismo tamaño que* $\mathscr{A}$ *(todo gracias a 1.1.6).*

A continuación se comenzarán a examinar las propiedades de las familias casi ajenas maximales; se tiene la intención de responder a las preguntas que surgen naturalmente como: ¿puede haber familias casi ajenas más que numerables?, o, ¿existen familias maximales infinitas?

Lema 1.1.8. *Si* $\mathscr{A}$ *es familia casi ajena maximal, entonces* $\omega \subseteq^* \bigcup \mathscr{A}$.

Demostración. Por contrapuesta, supóngase que $B := \omega \setminus \bigcup \mathscr{A}$ es infinito. Si $A \in \mathscr{A}$, entonces $A \subseteq \bigcup \mathscr{A}$, y así $A \cap B \subseteq A \setminus \bigcup \mathscr{A} \subseteq A \setminus A = \varnothing$. Por lo que $B \in [\omega]^\omega$ es casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$. ■

El recíproco del Lema previo falla para familias infinitas (véase la familia $\Psi(\mathscr{A})$ del Ejemplo 1.1.7); y de hecho, no se cuenta un resultado «amigable» para determinar cuándo estas resultan ser maximales (véase 1.3.11). En contraparte a esto, se deduce rápidamente la siguiente equivalencia:

Corolario 1.1.9. *Sea* $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$. $\mathscr{A}$ *es maximal si y sólo si* $\omega \subseteq^* \bigcup \mathscr{A}$.

Demostración. Por el Lema previo, basta demostrar la necesidad.

Supóngase $\omega \subseteq^* \bigcup \mathscr{A}$ y nótese que si $B \in [\omega]^\omega$, entonces $B \subseteq^* \bigcup \mathscr{A}$ y con ello $\varnothing \neq^* B \subseteq^* B \cap \bigcup \mathscr{A} = \bigcup \{B \cap A \mid A \in \mathscr{A}\}$. Como la última es una unión finita, B debe tener intersección infinita con algún elemento de $\mathscr{A}$. ■

El posterior resultado puede ser visto como un símil al Teorema del Ultrafiltro (Teorema A.2.2), o bien, cualquier resultado afín en el que se haga uso del Principio de Maximalidad de Hausdorff (0.1.1) o sus equivalentes.

Lema 1.1.10. *Toda familia casi ajena está contenida en una familia maximal.*

Demostración. Sean $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$ y X el conjunto de todos las familias casi ajenas que contienen a $\mathscr{A}$. Como $A \in X$, por el Principio de Maximalidad de Hausdorff (AC), existe $Y \subseteq X$, una cadena $\subseteq$-maximal de $(X, \subseteq)$.

Defínase $\mathscr{B} := \bigcup Y$, como $Y \subseteq \mathscr{P}([\omega]^\omega)$, entonces $\mathscr{B} \subseteq [\omega]^\omega$. Además, si $C, D \in \mathscr{B}$, existen $\mathscr{C}, \mathscr{D} \in Y \subseteq \mathrm{AD}(\omega)$ con $C \in \mathscr{C}$ y $D \in \mathscr{D}$. Puesto que Y es cadena de $(X, \subseteq)$, sin pérdida de generalidad, $C, D \in \mathscr{D} \supseteq \mathscr{C}$; y con ello, $C \cap D$ es finito, ya que $\mathscr{D} \in Y \subseteq X \subseteq \mathrm{AD}(\omega)$. Luego $\mathscr{B} \in \mathrm{AD}(\omega)$, y además, $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$.

Finalmente, si $\mathscr{B}' \in \mathrm{AD}(\omega)$ y $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}'$, entonces $Y \cup \{\mathscr{B}'\}$ es una cadena de $(X, \subseteq)$; lo cual, junto a la maximalidad de Y, implica que $\mathscr{B}' \in Y$ y $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$. Por lo tanto, $\mathscr{B} \in \mathrm{MAD}(\omega)$. ∎

El siguiente resultado revela un fenómeno interesante respecto al tamaño de las familias maximales. Este se le atribuye a Wacław Sierpiński (se desprende de [14, Teo. 2, p. 458]).

Lema 1.1.11. *Ninguna familia casi ajena numerable es maximal.*

Demostración. Sea $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$ enumerada por $\mathscr{A} = \{A_n \mid n \in \omega\}$. Si $n \in \omega$ es cualquiera, $A_n \cap \bigcup\{A_m \mid m < n\} = \bigcup\{A_n \cap A_m \mid m < n\}$ es finito, al ser unión finita de conjuntos finitos. Luego, por ser A_n infinito, $A_n \setminus \bigcup\{A_m \mid m < n\} = A_n \setminus \left(A_n \cap \bigcup\{A_m \mid m < n\}\right)$ debe ser infinito; y particularmente, no no vacío.

Considérese $f : \omega \to \omega$ definida por $f(n) = \min\{A_n \setminus \bigcup\{A_m \mid m < n\}\}$ para cada n. Resulta que f es inyectiva; si $m < n$, entonces $f(n) \notin A_m$, $f(m) \in A_m$ y $f(n) \neq f(m)$. Además, para cada $n \in \omega$ se tiene que $A_n \cap f[\omega] = \{f(n)\}$; y con ello $f[\omega] \subseteq \omega$ es infinito y casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$. ∎

Tomando cualquier familia infinita $\mathscr{A}$ y aplicando Lema 1.1.10, se obtiene una familia maximal $\mathscr{B} \supseteq \mathscr{A}$ de tamaño infinito. Por el resultado anterior, tal infinito debe ser más que numerable. Esta consecuencia es tan inmediata como, quizás, poco satisfactoria; pues su naturaleza es «no constructiva». Durante la posterior sección se mostrarán métodos para obtener estos últimos objetos de una manera más explícita.

Observación 1.1.12. *Existe una familia maximal de tamaño al menos* $\aleph_1$.

1.2. Familias casi ajenas de tamaño $\mathfrak{c}$

Al tomar un espacio de Fréchet X y cualquier subespacio denso $D \subseteq X$, para cada $x \in X \setminus D$ ha de existir una sucesión en D convergente a x. Si a X le adicionamos la condición de ser T_1, la imagen de tal sucesión es necesariamente un conjunto numerable $A_x \subseteq D$, convergente a x en X (véase 0.2.7).

Proposición 1.2.1. *Supóngase que X es un espacio de Hausdorff, de Fréchet y que $D \subseteq X$ es denso y numerable. Para cada $A \subseteq X \setminus D$ existe una familia casi ajena sobre D biyectable con A.*

Demostración. Con sustento en los comentarios previos, para cada $x \in A$ fíjese (AC) un conjunto $A_x \subseteq D$ numerable y convergente a x en X. Defínase la colección $\mathscr{A}_{D,A}$ como $\{A_x \subseteq D \mid x \in A\} \subseteq [D]^\omega$.

Sean $x, y \in A$ con $x \neq y$, por ser X de Hausdorff, hay abiertos ajenos U, V tales que $x \in U$ y $y \in V$. Seguido de que $A_x \to x$ y $A_y \to y$, se tiene $A_x \subseteq^* U$ y $A_y \subseteq^* V$; consecuentemente $A_x \cap A_y \subseteq^* U \cap V = \varnothing$. Lo cual prueba que $\mathscr{A}_{D,A} \in \mathrm{AD}(D)$ y $|\mathscr{A}_{D,A}| = |A|$. ■

Definición 1.2.2. *Si X, D y A son como en la Proposición anterior, a $\mathscr{A}_{D,A}$ se le denomina* ***familia de sucesiones en D convergentes a A en X****.*

Como la recta real $\mathbb{R}$ es de Hausdorff, de Fréchet (por ser 1 AN) y $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ es un subespacio denso numerable; de lo previamente establecido se obtiene que $\mathscr{A}_{\mathbb{Q},\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ es una familia casi ajena sobre $\mathbb{Q}$ de tamaño $\mathfrak{c} = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|$. Conviene destacar que la construcción recién mencionada no depende del AC; pues para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, el conjunto A_x de la Proposición 1.2.1 se puede construir de manera explícita. Si $q : \omega \to \mathbb{Q}$ es cualquier biyección, basta considerar:

$$A_x = \left\{ q\Big(\min \Big(q^{-1}\Big[\mathbb{Q} \cap \Big(x - \frac{1}{n+1}, x - \frac{1}{n} \Big) \Big] \Big) \Big) \,\Big|\, n \in \omega \setminus \{0\} \right\}.$$

El corazón de la próxima estrategia para la obtención explícita de familias casi ajenas de tamaño el continuo, son los árboles.

Comenzaremos observando que si S es cualquier rama de un árbol $(T, \leq)$, entonces S es cerrada bajo cotas inferiores. En efecto, sean $x \in S$ y $y \leq x$. Para cada $s \in S$, al ser S cadena, se tiene que $x \leq s$ o $s < x$. En el primer caso, $y \leq x \leq s$ y y es comparable con s. En el segundo $y, s < x$; y como $(\{y \in T \mid y < x\}, \leq)$ es buen orden, y y s son comparables. Por lo tanto, $S \cup \{y\}$ es una cadena; y seguido de que S es rama, $y \in S$.

Proposición 1.2.3. *Sea $(T, \leq)$ un árbol numerable de altura ω y $\mathcal{A} \subseteq [T]^\omega$ el conjunto de todas las ramas numerables de $(T, \leq)$. Entonces $\mathcal{A} \in \mathrm{AD}(T)$.*

Demostración. Sean $R, S \in \mathcal{A}$ con $R \neq S$, sin pérdida de generalidad, existe $x_0 \in R \setminus S \neq \varnothing$. De existir $y \in R \cap S$ tal que $y \nless x_0$, resultaría que $x_0 \leq y$, en virtud de que $x, y \in R$ y R es rama. Lo anterior y la discusión previa a esta Proposición implican que $x_0 \in S$, lo cual es imposible.

Por lo tanto $R \cap S \subseteq \{y \in T \mid y < z\}$; y como T tiene altura ω, el orden de x_0 es un natural; consecuentemente, $R \cap S$ es finito. ■

Un ejemplo canónico de árbol numerable de altura ω es $2^{<\omega}$ (Proposición 0.1.9); considerar la siguiente clase de familias desembocará en resultados sumamente notables (como se puede ver en la Apartado 4.1.1).

Proposición 1.2.4. *Para cada $f \in 2^\omega$ defínase $A_f := \{f \restriction n \mid n \in \omega\} \subseteq 2^{<\omega}$; entonces:*

i) Cada A_f es una rama de $(2^{<\omega}, \subseteq)$.

ii) Si $f \neq g$, entonces $A_f \neq A_g$.

Demostración. (i) Sea $f \in 2^\omega$, inmediatamente, A_f es cadena de $(2^{<\omega}, \subseteq)$. Supóngase ahora que $S \subseteq 2^{<\omega}$ es una rama de $(2^{<\omega}, \subseteq)$ y que $A_f \subseteq S$.

Sean $g \in S$ y $n = \mathrm{dom}(g)$; puesto que S es cadena de $(2^{<\omega}, \subseteq)$ y $f \in A_f \subseteq S$, entonces $f \restriction n \subseteq g$ o $g \subseteq f \restriction n$. Cualquiera de los casos anteriores implican que $f \restriction n = g$, pues $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{dom}(f \restriction n)$. Luego, $g \in A_f$ y entonces $A_f = S$.

(ii) Si $f \neq g$, entonces existe $m \in \omega$ tal que $f(m) \neq g(m)$. Así, se obtiene que $f \upharpoonright m+1 \neq g \upharpoonright m+1$ y $f \upharpoonright m+1 \in R_f \setminus R_g$, por lo que $R_f \neq R_g$. ■

Las proposiciones anteriores permiten definir, de forma explícita y sin recurrir al AC, el siguiente tipo de familias casi ajenas.

Definición 1.2.5. *Para cada $X \subseteq 2^\omega$ defínase $\mathscr{A}_X := \{A_f \mid f \in X\}$ como en la Proposición previa.*

*Esta familia será nombrada la **familia de las ramas de** X **en** $2^{<\omega}$.*

En paralelo a lo comentado después de 1.2.2, también se puede concluir vía la construcción recién expuesta, y el Lema 1.1.10, lo siguiente:

Corolario 1.2.6. *Existe una familia maximal de cardinalidad $\mathfrak{c}$.*

En consecuencia, para cualquier cardinal $\lambda \leq \mathfrak{c}$ existe una familia casi ajena de cardinalidad λ.

Se concluirá esta sección comentando qué ocurre respecto una interrogante surge naturalmente tras todo lo realizado: ¿existen familias maximales de cualquier cardinalidad entre $\aleph_1$ y $\mathfrak{c}$?

Definición 1.2.7. *El **cardinal de casi ajenidad**, $\mathfrak{a}$, es el mínimo cardinal infinito κ tal que existe una familia maximal de tamaño κ.*

Debido a 1.1.11, se tiene $\aleph_1 \leq \mathfrak{a} \leq \mathfrak{c}$ y claramente bajo CH se debe satisfacer que $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$; luego, es consistente con ZFC que $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$. Comentar que la teoría en relación al cardinal $\mathfrak{a}$ es basta y existen resultados de consistencia como el enunciado en seguida:

Teorema 1.2.8. *Si $\aleph_1 \leq \kappa \leq \mathfrak{c}$ y κ es cardinal regular, es consistente con* ZFC *que $\mathfrak{a} = \kappa$.*

El Teorema recién enunciado consecuencia de [9, Teo. 5.1, p. 127]; y si bien su demostración escapa a los propósitos del presente texto, sí se expondrán resultados en relación a la igualdad $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ más adelante (véase 1.4.20).

1.3. El ideal generado y su comportamiento

Definición 1.3.1. *Sean N un conjunto numerable y $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(N)$.*

i) El ***ideal generado por*** *$\mathscr{A}$ es el conjunto $\mathcal{I}_N(\mathscr{A})$; definido como la colección $\{B \subseteq N \mid \exists H \in [\mathscr{A}]^{<\omega}\ (B \subseteq^* \bigcup H)\}$.*

ii) La ***parte positiva de*** *$\mathscr{A}$ es $\mathcal{I}_N^+(\mathscr{A}) := \mathscr{P}(N) \setminus \mathcal{I}_N(\mathscr{A})$.*

Si $N = \omega$, estos conjuntos se denotarán por $\mathcal{I}(\mathscr{A})$ y $\mathcal{I}^+(\mathscr{A})$, respectivamente.

El objeto introducido previamente es de vital importancia para el estudio de la combinatoria de las familias casi ajenas. Como se había advertido anteriormente; con el propósito de no perder generalidad en los resultados expuestos durante esta sección, es necesario notar lo siguiente:

Proposición 1.3.2. *Sean N, M conjuntos numerables y $h : N \to M$ biyectiva. Si $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(N)$, entonces $\Phi_h(\mathcal{I}_N(\mathscr{A})) = \mathcal{I}_M(\Phi_h(\mathscr{A}))$.*

Demostración. Como h es biyección, $\Phi_h^{-1} = \Phi_{h^{-1}}$. Por lo cual, basta probar la contención directa de la igualdad.

Sea $Y \in \mathcal{I}_N(\mathscr{A})$, entonces existe $H \subseteq \mathscr{A}$ finito tal que $Y \setminus \bigcup H$ es finito. Como h es biyectiva, $h\big[Y \setminus \bigcup H\big] = h[Y] \setminus h\big[\bigcup H\big] = h[Y] \setminus \bigcup \Phi_h(H)$ es finito. Además, de 1.1.6, $\Phi_h(H) \subseteq \Phi_h(\mathscr{A})$ es finito. Por ello, $h[Y] \in \mathcal{I}_M(\Phi_h(\mathscr{A}))$. ■

Resulta sencillo constatar que el objeto definido en 1.3.1 es; como su nombre indica, un ideal sobre $\mathscr{P}(\omega)$. Además, se destaca lo siguiente:

Observación 1.3.3. *Sea $\mathscr{A}$ cualquier familia casi ajena.*

i) Cualquier subconjunto finito de ω, así como cualquier elemento de $\mathscr{A}$, es elemento de $\mathcal{I}(\mathscr{A})$. Por lo que $\varnothing \subsetneq [\omega]^{<\omega} \cup \mathscr{A} \subseteq \mathcal{I}(\mathscr{A})$.

ii) Si $\mathscr{B} \in \mathrm{AD}(\omega)$ y $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, entonces $\mathcal{I}(\mathscr{A}) \subseteq \mathcal{I}(\mathscr{B})$.

Obsérvese adempás que si $\mathscr{A} \in \mathrm{MAD}(\omega)$ es finita; en virtud del Lema 1.1.8 se tendrá que $\omega \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$, pues $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}$ es finito y $\omega \subseteq^* \bigcup \mathscr{A}$. El recíproco de esto también es cierto.

Proposición 1.3.4. *Sea $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$ cualquiera. Si $\omega \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$, entonces $\mathscr{A}$ es maximal y finita.*

Demostración. Supóngase que $\omega \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$, entonces existe $H \subseteq \mathscr{A}$ finito con $\omega \subseteq^* \bigcup H \subseteq \bigcup \mathscr{A}$. Por 1.1.9, basta ver que $\mathscr{A}$ es finita.

Supóngase que existe $B \in \mathscr{A} \setminus H$. Así, B casi ajeno con cada elemento de $H \subseteq \mathscr{A}$, luego, $B \cap \bigcup H = \bigcup \{B \cap h \mid h \in H\}$ es finito. De lo anterior, $B = B \cap \omega \subseteq^* B \cap \bigcup H$ es finito, lo cual es imposible. Por lo tanto, $\mathscr{A} \subseteq H$ y $\mathscr{A}$ es finita. ∎

Corolario 1.3.5. *Sean N un conjunto numerable y $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(N)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) El ideal $\mathscr{I}_N(\mathscr{A})$ no es propio, es decir, $N \in \mathscr{I}_N(\mathscr{A})$.

ii) $\mathscr{A}$ es finita y maximal en N.

Con relativa frecuencia aparecerán familias que, pese a no ser maximales, satisfacen la condición (ii) de lo subsecuente; esta puede ser tomada como un debilitamiento a la condición de maximalidad.

Definición 1.3.6. *Sean N un conjunto numerable y $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(N)$.*

*i) Para cada $X \in [N]^\omega$, la **traza de** $\mathscr{A}$ **en** X es la colección $\mathscr{A} \upharpoonright X$, definida como el conjunto $\{A \cap X \in [X]^\omega \mid A \in \mathscr{A}\}$.*

*ii) $\mathscr{A}$ es **maximal en alguna parte** si y sólo si existe $X \in \mathscr{I}_N^+(\mathscr{A})$ tal que la familia $\mathscr{A} \upharpoonright X$ es maximal en X.*

*iii) $\mathscr{A}$ es **maximal en ninguna parte** si no es maximal en alguna parte.*

Si $X \in [N]^\omega$, entonces $\mathscr{A} \upharpoonright X \in \mathrm{AD}(X)$. Más aún, si $\mathscr{A}$ es maximal, para cada $B \subseteq X$ infinito existe $A \in \mathscr{A}$ tal que $A \cap B = (A \cap X) \cap (B \cap X)$ es infinito, mostrando la maximalidad de $\mathscr{A} \upharpoonright X$. Así que, efectivamente, la definición anterior es un debilitamiento de la condición de maximalidad.

Sin causa de asombro, los conceptos recién establecidos son respetados por las biyecciones Φ_h.

Proposición 1.3.7. *Sean N, M conjuntos numerables, $h : N \to M$ biyección y $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(N)$.*

i) Para cada $X \in [N]^\omega$ se cumple $\Phi_h(\mathscr{A}) \upharpoonright h[X] = \Phi_h(\mathscr{A} \upharpoonright X)$.

ii) $\mathscr{A}$ es maximal en alguna parte si y sólo si $\Phi_h(\mathscr{A})$ también lo es.

Demostración. (i) Como h biyección, de la definición de $\Phi_h(\mathscr{A})$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
\Phi_h(\mathscr{A}) \upharpoonright h[X] &= \{B \cap h[X] \in \left[h[X]\right]^\omega \mid B \in \Phi_h(\mathscr{A})\} \\
&= \{h[A] \cap h[X] \in \left[h[X]\right]^\omega \mid A \in \mathscr{A}\} \\
&= \{h[A \cap X] \mid A \cap X \in [X]^\omega \wedge A \in \mathscr{A}\} \\
&= \Phi_h(\mathscr{A} \upharpoonright X)\,.
\end{aligned}$$

(ii) Como $\Phi_h^{-1} = \Phi_{h^{-1}}$, basta probar la suficiencia. Supóngase que $\mathscr{A}$ es maximal en alguna parte, entonces existe $X \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ tal que $\mathscr{A} \upharpoonright X$ es maximal en X.

Dada la igualdad de 1.3.2, $h[X] \in \mathscr{I}^+(\Phi_h(\mathscr{A}))$; además, la función de restricción $g := h \upharpoonright X : X \to h[X]$ es biyección y utilizando el inciso anterior se tiene que $\Phi_h(\mathscr{A}) \upharpoonright h[X] = \Phi_h(\mathscr{A} \upharpoonright X) = \Phi_g(\mathscr{A} \upharpoonright X)$. Por el último inciso de 1.1.6, $\Phi_h(\mathscr{A}) \upharpoonright h[X]$ es maximal en $h[X]$. ■

Las siguientes propiedades son esperables, pero no por ello menos útiles. Es importante no desdeñar sus pruebas, pues en ellas, hay un par de sutilezas que deben ser atendidas.

Proposición 1.3.8. *Sean $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathrm{AD}(\omega)$ y $X, Y \in [\omega]^\omega$ arbitrarios.*

i) Si $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, entonces $\mathscr{A} \upharpoonright X \subseteq \mathscr{B} \upharpoonright X$.

ii) Se da la igualdad $(\mathscr{A} \restriction Y) \restriction X = \mathscr{A} \restriction (Y \cap X)$.

iii) Si $X \subseteq Y$, *entonces* $\mathcal{I}_X(\mathscr{A} \restriction X) \subseteq \mathcal{I}_Y(\mathscr{A} \restriction Y)$.

Demostración. El punto (i) es claro.

(ii) Si $(A \cap Y) \cap X \in (\mathscr{A} \restriction Y) \restriction X$, entonces $A \cap Y \in \mathscr{A} \restriction Y$ y $(A \cap Y) \cap X = A \cap (Y \cap X)$ es infinito; luego, $A \in \mathscr{A}$ y $(A \cap Y) \cap X \in \mathscr{A} \restriction (Y \cap X)$. Recíprocamente, si $A \cap (Y \cap X) \in \mathscr{A} \restriction (Y \cap X)$, entonces $A \in \mathscr{A}$ y $A \cap (Y \cap X) = (A \cap Y) \cap X$ es infinito. Además, $A \cap (Y \cap X) \subseteq A \cap Y$, entonces $A \cap Y$ es infinito, por lo que $A \cap Y \in \mathscr{A} \restriction Y$ y así $A \cap (Y \cap X) = (A \cap Y) \cap X \in (\mathscr{A} \restriction Y) \restriction X$.

(iii) Supóngase que $X \subseteq Y$ y sea $B \in \mathcal{I}_X(\mathscr{A} \restriction X)$. Entonces $B \subseteq X \subseteq Y$ y existe $H \subseteq \mathscr{A} \restriction X$ finito tal que $B \subseteq^* \bigcup H$. Cada elemento $A \cap X \in H$ es infinito y está contenido en $A \cap Y$, luego $J := \{A \cap Y \mid A \cap X \in H\} \subseteq \mathscr{A} \restriction Y$ es finito y $B \subseteq^* \bigcup J$ y por lo tanto $B \in \mathcal{I}_Y(\mathscr{A} \restriction Y)$. ∎

Si bien se demostró, tras la Definición 1.3.6, que la maximalidad de una familia implica la de cada una de sus trazas. La próxima observación muestra que la maximalidad de aquellas trazas tomadas sobre elementos del ideal generado no constituye una condición suficiente para concluir la maximalidad de la familia dada.

Proposición 1.3.9. *Sean* $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$ *y* $X \in [\omega]^\omega$. *Entonces* $X \in \mathcal{I}(\mathscr{A})$ *si y sólo si la familia* $\mathscr{A} \restriction X$ *es finita y maximal en* X.

Demostración. Por el Corolario 1.3.5, basta mostrar que $X \in \mathcal{I}(\mathscr{A})$ si y sólo si $X \in \mathcal{I}_X(\mathscr{A} \restriction X)$. Dado lo demostrado en 1.3.8, la necesidad de tal equivalencia es inmediata. Ahora, si $X \in \mathcal{I}(\mathscr{A})$, entonces $X \subseteq^* \bigcup H$ para cierto $H \in [\mathscr{A}^{<\omega}]$. Luego $X \subseteq^* X \cap \bigcup H$ y la finitud de H implica que:

$$\begin{aligned} X &\subseteq^* \{A \cap X \in [X]^{<\omega} \mid A \in H\} \cup \{A \cap X \in [X]^\omega \mid A \in H\} \\ &=^* \{A \cap X \in [X]^\omega \mid A \in H\}, \end{aligned}$$

probando que $X \in \mathcal{I}_X(\mathscr{A} \restriction X)$. ∎

Como la familia vacía no es maximal, la Proposición anterior deja como reflexión que los únicos conjuntos que podrían ser testigos de que $\mathscr{A}$ no es maximal, son aquellos que pertenecen a la parte positiva de $\mathscr{A}$.

Corolario 1.3.10. *Si* $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$*,* $\{X \in [\omega]^\omega \mid \mathscr{A} \upharpoonright X = \varnothing\} \subseteq \mathcal{J}^+(\mathscr{A})$*.*

Si $X \in [\omega]^\omega$ y $\mathscr{A}$ es maximal, entonces X debe tener intersección infinita con algún elemento de $\mathscr{A}$; los conjuntos en $\mathcal{J}^+(\mathscr{A})$ tienen un comportamiento más fuerte, cada uno de ellos tiene intersección infinita con una infinidad de elementos de $\mathscr{A}$.

Corolario 1.3.11. *Sea* $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$*. Entonces* $\mathscr{A}$ *es maximal si y sólo si para cada* $X \in \mathcal{J}^+(\mathscr{A})$ *la familia* $\mathscr{A} \upharpoonright X$ *es infinita.*

Demostración. Supóngase que $\mathscr{A}$ es maximal y sea $X \in \mathcal{J}^+(\mathscr{A})$. Por la maximalidad de $\mathscr{A}$, se sigue de lo comentado tras la Definición 1.3.6 que $\mathscr{A} \upharpoonright X$ es maximal en X. Por lo que, acorde a 1.3.9, $\mathscr{A} \upharpoonright X$ debe ser infinita.

Recíprocamente, si $\mathscr{A}$ no es maximal, existe $B \in [\omega]^\omega$ casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$. Así, $\mathscr{A} \upharpoonright B = \varnothing$ y se sigue de 1.3.10, que $B \in \mathcal{J}^+(\mathscr{A})$. ■

Como ninguna familia maximal es numerable, del Corolario anterior se desprende la siguiente condensación de todo lo comentado y demostrado tras 1.3.6.

Corolario 1.3.12. *Sean* N *un conjunto numerable y* $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(N)$*. Entonces* $\{X \in [N]^\omega \mid \mathscr{A} \upharpoonright X \notin \mathrm{MAD}(X) \vee \omega \leq |\mathscr{A} \upharpoonright X|\} = \mathcal{J}^+_N(\mathscr{A})$*, y en caso de ser* $\mathscr{A}$ *maximal,* $\{X \in [N]^\omega \mid \omega < |\mathscr{A} \upharpoonright X|\} = \mathcal{J}^+_N(\mathscr{A})$ *y más aún*

1.4. Resultados en combinatoria infinita

1.4.1. Teorema de Simon

Se abordará en lo subsecuente un análisis simple sobre la combinatoria de las familias casi ajenas. Los próximos lemas configuran la antesala para enunciar el primer resultado importante de la sección, el Teorema de Simon (1.4.3).

Lema 1.4.1. *Sea $(X_n)_{n\in\omega} \subseteq [\omega]^\omega$ una sucesión $\subseteq$-decreciente. Entonces existe $Y \in [X_0]^\omega$ tal que para cada $k \in \omega$, ocurre $Y \subseteq^* X_k$.*

Demostración. Considérese la función $f : \omega \to X_0$, dada recursivamente por $f(n) = \text{mín}(X_n \setminus f[n])$. Nótese que f es inyectiva, si $m < n$ entonces $f(n) \notin f[n]$ y particularmente $f(n) \neq f(m)$. En consecuencia, $Y := f[\omega] \in [X_0]^\omega$.

Si $k \in \omega$, cada $x = f(n) \in Y \setminus X_k$ debe satisfacer que $n < k$, dada la hipótesis sobre $(X_n)_{n\in\omega}$. Esto prueba que $Y \setminus X_k \subseteq f[k] =^* \varnothing$; es decir, $Y \subseteq^* X_k$. ■

El siguiente resultado constata que la parte positiva de una familia es grande, en el sentido de que esta contiene la suficiente cantidad de elementos como para acotar inferiormente a cualquier $\subseteq$-cadena numerable contenida en ella.

Lema 1.4.2 (Dočkálková). *Sean $\mathscr{A} \in \text{MAD}(\omega)$ y $(X_n)_{n\in\omega} \subseteq \mathcal{I}^+(\mathscr{A})$ una sucesión $\subseteq$-decreciente. Existe $Y \in \mathcal{I}^+(\mathscr{A})$ tal que si $n \in \omega$, entonces $Y \subseteq^* X_n$.*

Demostración. Por el Corolario 1.3.12, si $n \in \omega$, $H_n := \{A \in \mathscr{A} \mid A \cap X_n \neq^* \varnothing\}$ debe ser infinito. Para cada $n \in \omega$ fíjese (AC) una función $f_n : \mathscr{P}(H_n)\setminus\{\varnothing\} \to H_n$ de elección; y defínase recursivamente $B : \omega \to \mathscr{A}$ como $B(n) = f(H_n \setminus B[n])$.

Así, $(\bigcup\{B(m) \mid m \geq n\} \cap X_n)_{n\in\omega}$ satisface las hipótesis del Lema previo. Efectivamente; si $n \in \omega$, entonces $B(n) \in H_n$ y $\bigcup\{B(m) \mid m \geq n\} \cap X_n \supseteq B(n) \cap X_n$ es infinito. Esta sucesión es $\subseteq$-decreciente, debido a que $(X_n)_n \in \omega$ también lo es. Por lo tanto, existe $Y \in [\omega]^\omega$ de manera que para cada $k \in \omega$:

$$Y \subseteq^* \bigcup\{B(m) \mid m \leq k\} \cap X_n \subseteq B(k) \cap X_k \subseteq X_k\,.$$

Y, al ser Y infinito, se tiene que $Y \cap B(k) \supseteq X \cap (B(k) \cap X_k)$ es infinito. Por lo tanto $\mathscr{A} \restriction Y$ es infinita; siguiéndose del Corolario 1.3.12 que $Y \in \mathcal{I}^+(\mathscr{A})$. ■

El siguiente resultado fue demostrado en 1980 por Petr Simon [15, p. 751] y como se verá más adelante (Corolario 3.2.5), juega un papel fundamental en el estudio de la propiedad topológica de Fréchet.

Teorema 1.4.3 (Simon). *Para toda familia maximal e infinita $\mathscr{A}$ existe $Y \in \mathcal{J}^+(\mathscr{A})$ tal que $\mathscr{A} \restriction Y$ es unión ajena de dos familias maximales en ninguna parte.*

Demostración. Procédase por contradicción suponiendo que $\mathscr{A} \in \mathrm{MAD}(\omega)$ es una familia infinita tal que si $X \in \mathcal{J}^+(\mathscr{A})$, $\mathscr{A} \restriction X = \mathscr{B} \cup \mathscr{C}$ y $\mathscr{B} \cap \mathscr{C} = \varnothing$, entonces alguna de las familias $\mathscr{B}, \mathscr{C} \in \mathrm{AD}(X)$ es maximal en alguna parte.

Como $\omega < |\mathscr{A}| \leq |2^\omega|$, existe $F \subsetneq 2^\omega$ inifnito y tal que $\mathscr{A} = \{A_f \mid f \in F\}$; donde $f \neq g$ implica $A_f \neq A_g$. Para cada $(n,k) \in \omega \times 2$ defínase:

$$\mathscr{A}(n,k) = \{A_f \in \mathscr{A} \mid f(n) = k\}.$$

Nótese que para cualesquiera $m \in \omega$ y $X \in \mathcal{J}^+(\mathscr{A})$ ocurren simultáneamente $\mathscr{A} \restriction X = \mathscr{A}(m,0) \restriction X \cup \mathscr{A}(m,1) \restriction X$ y $\mathscr{A}(m,0) \restriction X \cap \mathscr{A}(m,1) \restriction X = \varnothing$. Se sigue de la hipótesis la existencia (AC) de una función $k : \omega \times \mathcal{J}^+(\mathscr{A}) \to 2$ tal que si $(m,X) \in \mathrm{dom}(k)$, entonces $\mathscr{A}(m,k(m,X)) \restriction X$ es maximal en alguna parte. Así mismo, existe una función $j : \omega \times \mathcal{J}^+(\mathscr{A}) \to \mathcal{J}^+_X(\mathscr{A}(m,k(m,X)) \restriction X)$ de manera que para cada $(m,X) \in \mathrm{dom}(j)$:

$$(\mathscr{A}(m,k(m,X)) \restriction X) \restriction j(m,X) = \mathscr{A}(m,k(m,X)) \restriction j(m,X) \in \mathrm{MAD}(j(m,X)).$$

Defínase recursivamente la sucesión $(X_n)_{n\in\omega}$ como $X_0 = \omega$; y para cada $n \in \omega$, $X_{n+1} = j(n,X_n)$. Si $n \in \omega$, se da $X_{n+1} \in \mathcal{J}^+_{X_n}(\mathscr{A}(n,k(n,X_n)) \restriction X_n) \subseteq \mathcal{J}^+(\mathscr{A})$ (véase 1.3.8); y además, por la definición de j:

$$\mathscr{A}(n,k(n,X_n)) \restriction X_{n+1} \in \mathrm{MAD}(X_{n+1});$$

a consecuencia del ello $X_{n+1} \subseteq X_n$. Aplicando el Lema de Dočkálková, se obtiene un conjunto $Y \in \mathcal{J}^+(\mathscr{A})$ casi contenido en cada X_n.

Por 1.3.12, $\mathscr{A} \restriction Y$ es infinita; y por ello, existen $g \in F$ y $m \in \omega$ tales que $g(m) \neq k(m,X_m)$ y $A_g \cap Y$ es infinito. Puesto que $Y \setminus X_{m+1} =^* \varnothing$, es necesario que $A_g \cap X_{m+1} \subseteq X_{m+1}$ sea infinito y como $\mathscr{A}(m,k(m,X_m)) \restriction X_{m+1} \in \mathrm{MAD}(X_{m+1})$, existe $A_f \in \mathscr{A}(m,k(m,X_m))$ tal que $(A_g \cap X_{m+1}) \cap (A_f \cap X_{m+1}) \neq^* \varnothing$. Pero, a razón de que $f(m) = k(m,X_m) \neq g(m)$, se tiene que $f \neq g$ y $A_f \cap A_g =^* \varnothing$, lo cual es un absurdo a lo previamente establecido. ■

La familia $\mathscr{A} \restriction Y$ provista por el Teorema de Simon es maximal e infinita necesariamente. Así que, tomando en cualquier $\mathscr{A} \in \mathrm{MAD}(\omega)$ infinita se tiene:

Corolario 1.4.4. *Existe una familia maximal infinita que es unión ajena de dos familias maximales en ninguna parte.*

1.4.2. Grietas y familias de Luzin

La teoría de grietas («gaps», en inglés) es extensa, y su estudio se remonta a los trabajos de Felix Hausdorff. En lo que sigue nos restringiremos a analizar grietas en ω. No obstante, a partir de la Proposición 1.1.6 es inmediato comprobar que la definición que presentamos a continuación se extiende sin dificultad a grietas sobre cualquier conjunto numerable N.

Definición 1.4.5. *Una **grieta** es un par ordenado $(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \in \mathrm{AD}(\omega) \times \mathrm{AD}(\omega)$ tal que $\mathscr{A} \cup \mathscr{B} \in \mathrm{AD}(\omega)$.*

*i) Se suele decir que $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ **contiene a** $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$.*

*ii) Un subconjunto $D \subseteq \omega$ es **separador** de $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ si y sólo si para cualesquiera $A \in \mathscr{A}$ y $B \in \mathscr{B}$ se tiene que $A \subseteq^* D$ y $B \cap D =^* \varnothing$.*

*iii) $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ está **separada** cuando existe un separador de $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$.*

En términos de la definición anterior, es inmediato que si $(\mathscr{A}', \mathscr{B}')$ es una grieta separada, $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}'$ y $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}'$, entonces la grieta $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ está separada. Además, cuando D es separador de $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$, el conjunto $\omega \setminus D$ es separador de $\mathscr{B}$ y $\mathscr{A}$; por ello, $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ está separada si y sólo si $(\mathscr{B}, \mathscr{A})$ está separada. Obsérvese además que seguido del Corolario 1.3.10:

Proposición 1.4.6. *Para toda grieta $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$, $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{I}^+(\mathscr{B})$ y $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$.*

Al considerar una familia casi ajena, surgen preguntas en relación al comportamiento de las grietas contenidas en ella; en tal aspecto se mueve la siguiente definición.

Definición 1.4.7. *Una familia $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$ se dice:*

i) ***Separable*** *(o* ***normal****) cuando todas las grietas $(\mathscr{B},\mathscr{C}) \in \mathscr{P}(\mathscr{A})^2$ están separadas.*

ii) ***Parcialmente separable*** *cuando para toda grieta $(\mathscr{B},\mathscr{C}) \in ([\mathscr{A}]^{\omega_1})^2$ existen $\mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}$ y $\mathscr{C}' \subseteq \mathscr{C}$ tales que $(\mathscr{B}',\mathscr{C}')$ está separada.*

iii) ***Inseparable*** *cuando ninguna grieta $(\mathscr{B},\mathscr{C}) \in ([\mathscr{A}]^{\omega_1})^2$ está separada.*

Se obtiene el siguiente comportamiento; la demostración del mismo puede ser realizada con lo desarrollado hasta el momento, sin embargo, dejaremos este resultado como una consecuencia del estudio de los Ψ-espacios (véase 4.1.5)

Ejemplo 1.4.8. *Sea $\mathscr{C} \in \mathrm{AD}(\omega)$. Si $|\mathscr{C}| \leq \omega$, entonces $\mathscr{C}$ es separable. Y, si $\mathscr{C}$ más que numerable y separable, entonces $\omega < |\mathscr{C}| < \mathfrak{c}$ y $\mathscr{C} \notin \mathrm{MAD}(\omega)$.*

Obsérvese ahora que si $(\mathscr{B},\mathscr{C})$ es una grieta y $\bigcup \mathscr{B} \cap \bigcup \mathscr{C}$ es finito, entonces el conjunto $\bigcup \mathscr{B} \subseteq \omega$ es separador de $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$. Se puede caracterizar la inseparabilidad de una familia mediante lo siguiente:

Lema 1.4.9. *Sea $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$, entonces $\mathscr{A}$ es inseparable si y sólo si para cualesquiera $\mathscr{B},\mathscr{C} \in [\mathscr{A}]^{\omega_1}$ ajenos, $\bigcup \mathscr{B} \cap \bigcup \mathscr{C}$ es infinito.*

Demostración. Por la discusión previa, basta sólo probar la necesidad.

Por contrapuesta, supóngase que $\mathscr{B},\mathscr{C} \in [\mathscr{A}]^{\omega_1}$ son tales que existe $D \subseteq \omega$, separador de $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$. Entonces las asignaciones $\mathscr{B} \to \omega$ y $\mathscr{C} \to \omega$; dadas por $b \longmapsto \max(b \setminus D)+1$ y $c \longmapsto \max(c \cap D)+1$ están bien definidas. Pero en vista de que $|\mathscr{B}| = |\mathscr{C}| = \omega_1$, estas no pueden ser inyectivas, y existen $m, n \in \omega$ de modo que $\mathscr{B}' := \{b \in \mathscr{B} \mid b \setminus D \subseteq m\}$ y $\mathscr{C}' := \{b \in \mathscr{C} \mid c \cap D \subseteq n\}$ tienen tamaño ω_1.

Además $\bigcup \mathscr{B}' \setminus D \subseteq m =^* \varnothing$ y $\bigcup \mathscr{C}' \cap D \subseteq n =^* \varnothing$, por lo que $\bigcup \mathscr{B} \subseteq^* D$, $\bigcup \mathscr{C} \subseteq^* \omega \setminus D$, y así, $\bigcup \mathscr{B}' \cap \bigcup \mathscr{C}' \subseteq^* D \cap (\omega \setminus D) = \varnothing$. ■

En la década de 1910, el analista Nikolai Luzin introdujo ciertos subconjuntos especiales de $\mathbb{R}$, mismos que hoy llevan su nombre. Y pese a que el estudio de aquellos objetos es relativo a la teoría descriptiva de conjuntos, las analogías entre sus propiedades y las de las familias que a continuación presentamos, son suficiente razón como para que estas lleven el subfijo «de Luzin».

Definición 1.4.10. *Una familia $\mathscr{A}$ es* **de Luzin** *cuando existen $X \in [\omega_1]^{\omega_1}$ y una enumeración $\mathscr{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in X\}$ tales que para todo $(\alpha, n) \in \omega_1 \times \omega$, el conjunto $\{\beta < \alpha \mid A_\alpha \cap A_\beta \subseteq n\}$ es finito.*

Una de las ideas centrales detrás de que $\mathscr{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ sea de Luzin es que; fijando $\alpha \in \omega_1$, para cada $D \subseteq \alpha$ infinito, $A_\alpha \cap \bigcup\{A_\beta \mid \beta \in D\}$ es infinito. Esto se debe a que si $n \in \omega$, entonces $D \setminus \{\beta < \alpha \mid A_\alpha \cap A_\beta \subseteq n\}$ es infinito, particularmente no vacío. Como consecuencia:

Proposición 1.4.11. *Cualquier familia Luzin es inseparable.*

Demostración. Sean $\mathscr{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ una familia de Luzin y supógnase que $\mathscr{B} = \{A_\alpha \mid \alpha \in B\}, \mathscr{C} = \{A_\alpha \mid \alpha \in C\} \subseteq \mathscr{A}$ son no numerables y ajenos. Como C es infinito, existe $\alpha \in \omega_1$ de manera que $C \cap \alpha$ es infinito. Nótese que B es cofinal en ω_1, por ser ω_1 regular; así que sin pérdida de generalidad, supóngase $\alpha \in B$.

Dados los comentarios previos a esta demostración, $A_\alpha \cap \bigcup\{A_\beta \mid \beta \in C \cap \alpha\}$ es infinito, demostrando que $\bigcup \mathscr{B} \cap \bigcup \mathscr{C}$ es infinito, y se sigue del Lema 1.4.9, que $\mathscr{A}$ es inseparable. ■

La existencia de familias de Luzin no es tan inucitada, resulta que cualquier familia infinita trae consigo una extensión que es de Luzin.

Proposición 1.4.12. *Toda familia casi ajena numerable se extiende a una familia de Luzin. Particularmente, existe una familia de Luzin.*

Demostración. Sea $\mathscr{B} = \{A_n \mid n \in \omega\} \in \mathrm{AD}(\omega)$ numerable y nótese que para cualesquiera $m, n \in \omega$, el conjunto $\{k < m \mid A_m \cap A_k \subseteq n\}$ es finito.

Por recursión sobre $\omega_1 \setminus \omega$, sea $\gamma \in \omega_1 \setminus \omega$ y supóngase $\{A_\alpha \mid \alpha \in \gamma\}$ es una familia tal que, si $\alpha < \gamma$ y $n \in \omega$, el conjunto $\{\beta < \alpha \mid A_\alpha \cap A_\beta \subseteq n\}$ es finito.

Como $\gamma \in \omega \setminus \omega_1$, γ es numerable y se puede enumerar $\{A_\alpha \mid \alpha \in \gamma\}$ como $\{B_n \mid n \in \omega\}$. Por ser tal, una familia casi ajena, cada conjunto $C_n := B_n \setminus \bigcup\{B_j \mid j < n\}$ es infinito (corrobórese ésto en la demostración de 1.1.11). Para cada $n \in \omega$ fíjese $a_n \in [C_n]^n$ y defínase:

$$A_\gamma := \bigcup\{a_m \mid m \in \omega\}$$

Nótese que si $n \neq m$, entonces $a_n \cap a_m = \emptyset$. De este modo, si $n \in \omega$ es cualquiera, resulta que $A_\gamma \cap B_n = a_n \cap B_n = a_n$ es finito. Más aún, como a_n tiene exatamente n elementos, $n \leq \text{máx}(A_n)$; y consecuentemente, si $m \in \omega$ y $A_\gamma \cap B_n \subseteq m$, entonces $n \leq m$.

Lo anterior prueba, no sólo que $\{A_\alpha \mid \alpha \leq \gamma\}$ es familia casi ajena, sino que para cualesquiera $\alpha \leq \gamma$ y $n \in \omega$, el conjunto $\{\beta < \alpha \mid A_\alpha \cap A_\beta \subseteq n\}$ es finito. Lo cual finaliza la construcción por recursión de los conjuntos A_α (con $\omega \leq \alpha < \omega_1$); es claro que para $\mathscr{A} := \{A_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ es una familia Luzin que extiende a $\mathscr{B}$. ■

Los siguientes objetos son una suerte de modificación a la Definición 1.4.10; mientras que las familias de Luzin son «unidimensionales», en el sentido de que están indexadas por ω_1; las grietas de Luzin son «n-dimensionales»:

Definición 1.4.13. *Sea $n \in \omega \setminus 2$. Una n-**grieta de Luzin** es una sucesión finita $(\mathscr{A}_i)_{i\in I} \subseteq \mathrm{AD}(\omega)$ cuya union es una familia casi ajena; y, tales que existen $X \in [\omega_1]^{\omega_1}$ y $m \in \omega$, de modo que cada $\mathscr{A}_i$ se puede enumerar como $\{A^i_\alpha \mid \alpha \in X\}$ de manera que:*

i) Para cualesquiera $i, j \in n$ distintos y $\alpha \in X$, se da $A^i_\alpha \cap A^j_\alpha \subseteq m$.

ii) Si $\alpha, \beta \in X$ y $\alpha \neq \beta$, entonces $\bigcup\{A^i_\alpha \cap A^j_\beta \mid i, j \in n \wedge i \neq j\} \nsubseteq m$.

*A los conjuntos X y m se les llama testigos de que $(\mathscr{A}_i \mid i \in I)$ es n-grieta de Luzin. Una 2-grieta de Luzin se denomina simplemente **grieta de Luzin**.*

Las n-grietas de Luzin poseen un comportamiento en común a las familias Luzin, el comentado posteriormente a la Definición 1.4.10. Este comportamiento similar es la razón de que, según la literatura que se consulte, a veces se confunden los términos «familia de Luzin» y «grieta de Luzin».

Lema 1.4.14. *Sea* $(\mathscr{A}_i \mid i \in I)$ *una* n*- grieta de Luzin con testigos* X *y* m*. Para cada* $Y \subseteq X$ *no numerable, existe* $Y' \subseteq Y$ *no numerable tal que para cualesquiera* $\alpha, \beta \in Y'$ *distintos,* $\bigcup\{A^i_\alpha \cap A^j_\beta \mid i, j \in n \wedge i \neq j\}$ *es infinito.*

Demostración. Sea $k \in \omega \setminus m$. Para cada $i \in n$ sea $f_i : Y \to \omega$ dada por $f(\alpha) = A^i_\alpha \cap k$. Para cada $S \in [X]^{>\omega}$ y $g : Z \to \omega$, g no es inyectiva; fíjese entonces (AC) un conjunto $S(g) \subseteq S$ no numerable para el cual $g \restriction A_g$ es constante. Defínase la sucesión finita $(Y_i)_{i \in n}$ de manera recursiva como $Y_0 := Y$; y, para cada $j \in n$, $Y_{j+1} := S(f \restriction Y_j) \subseteq Y_j$.

Entonces el conjunto $Y' := \bigcap\{Y_i \mid i \in n\} = Y_{\cup n}$ es un subconjunto no numerable de Y tal que para cada $i \in n$, f_i es constante en Y'. Sean $\alpha, \beta \in Y'$ distintos, como $(\mathscr{A}_i)_{i \in I}$ es n-grieta de Luzin, existen $i, j \in n$ diferentes de manera que $A^i_\alpha \cap A^j_\beta \nsubseteq m$. Como f_i es constante en Y', entonces $A^i_\alpha \cap k = A^i_\beta \cap k$.

Como además $A^i_\beta \cap A^j_\beta \subseteq m \subseteq k$, resulta necesario que $A^i_\alpha \cap A^j_\beta \nsubseteq k$. Así, en virtud de la arbitrariedad del natural k, se concluye que el siguiente conjunto debe ser infinito: $\bigcup\{A^i_\alpha \cap A^j_\beta \mid i, j \in n \wedge i \neq j\}$. ■

A razón de la proposición anterior se desprende que; así como ninguna familia parcialmente separable puede ser de Luzin, resulta que:

Corolario 1.4.15. *Si una familia casi ajena es parcialmente separable, no puede contener ninguna* n*-grieta de Luzin.*

Demostración. Sea $(\mathscr{A}_i \mid i \in I)$ una n- grieta de Luzin con testigos X y m. Si $\mathscr{A} \supseteq \bigcup\{\mathscr{A}_i \mid i \in n\}$, entonces dado el Lema previo a esta demostración, para cualesquiera $i, j \in n$ distintos, existen $\alpha, \beta \in X$ diferentes de modo que el conjunto $\bigcup\{A^i_\alpha \cap A^j_\beta \mid i, j \in n \wedge i \neq j\}$ es infinito. Es decir, $\bigcup \mathscr{A}_i \cap \bigcup \mathscr{A}_j$ es infinito, siguiéndose la conclusión automáticamente de 1.4.9. ■

La siguiente Proposición deja en claro la labor de «debilitamiento» que cumplen las n-grietas de Luzin respecto a las familias de Luzin; cualquiera de estas últimas contiene siempre una 2-grieta de Luzin. La prueba del hecho en cuestión requiere invocar el *Lema de Fodor* (Teorema 0.1.6) y el hecho de que siempre existen funciones ordinales como las solicitadas en la subsecuente prueba.

Proposición 1.4.16. *Toda familia de Luzin contiene una grieta de Luzin. En consecuencia, existe una grieta de Luzin.*

Demostración. Sea $\mathscr{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ una familia de Luzin y $f, g : \omega_1 \to \omega_1$ tales que si $\beta < \alpha < \omega_1$, entonces $g(\beta) < f(\beta) < g(\alpha)$.

Como $\omega_1 \setminus \omega$ es estacionario en ω_1 y la asignación $j : \omega_1 \setminus \omega \to \omega_1$; dada por $j(\alpha) = \text{máx}(A_{f(\alpha)} \cap A_{g(\alpha)}) + 1$, es regresiva, en virtud del Lema de Fodor, existen $S \subseteq \omega_1 \setminus \omega$ estacionario en ω_1 y un natural m tales que $j[S] \subseteq \{m\}$.

Ahora, si $\beta < \alpha$, entonces debido a la hipótesis $f(\beta) < g(\alpha)$, de modo que $f[\{\beta < \alpha \mid A_{f(\beta)} \cap A_{g(\alpha)} \subseteq m\}] \subseteq \{\gamma < g(\alpha) \mid A_{g(\alpha)} \subseteq m\}$. Como $\mathscr{A}$ es de Luzin y f es inyectiva (por ser estrictamente creciente), $\{\beta < \alpha \mid A_{f(\beta)} \cap A_{g(\alpha)} \subseteq m\}$ es finito, permitiendo la buena definición de $l : S \to \omega_1$, definida por medio de la siguiente regla de correspondencia:

$$l(\alpha) = \begin{cases} 0 & ;\ \forall \gamma < \alpha (A_{f(\gamma)} \cap A_{g(\alpha)} \nsubseteq m) \\ \text{máx}\{\gamma < \alpha \mid A_{f(\gamma)} \cap A_{g(\alpha)} \subseteq m\} & ;\ \text{otro caso} \end{cases}$$

Como $0 \notin S$, l es regresiva; nuevamente, del Lema de Fodor, se sigue la existencia de un conjunto $X \subseteq S$, estacionario en ω_1, tal que l es constante en X. Así, para cada $\alpha \in X$ se tiene que $m = \text{máx}(A_{f(\alpha)} \cap A_{f(\alpha)}) + 1$ y en consecuencia $A_{f(\alpha)} \cap A_{f(\alpha)} \subseteq m$, pues $X \subseteq S$ y $j[S] \subseteq \{m\}$.

Ahora, supóngase que $\beta, \alpha \in X$ y $\beta < \alpha$, como l es constante en X, $l(\alpha) = l(\beta)$. Si este último valor es cero, entonces $A_{f(\beta)} \cap A_{g(\alpha)} \nsubseteq m$. En caso contrario:

$$0 \neq l(\alpha) = l(\beta) < \beta < \alpha\,,$$

y como $l(\alpha) < \beta < \alpha$, la definición de l obliga a que $A_{f(\beta)} \cap A_{g(\alpha)} \nsubseteq m$. Lo anterior demuestra que $(\{A_{f(\alpha)} \mid \alpha \in X\}, \{A_{g(\alpha)} \mid \alpha \in X\})$ es una grieta de Luzin (con testigos X y m) contenida en $\mathscr{A}$. ■

1.4.3. Lema de Solovay

Definición 1.4.17. *Sea $\mathscr{A}$ una familia casi ajena. El* **orden basado en** *$\mathscr{A}$ es el par $\mathbb{P}_{\mathscr{A}} := ([\omega]^{<\omega} \times [\mathscr{A}]^{<\omega}, \leq_{\mathscr{A}})$; donde: $(p,P) \leq_{\mathscr{A}} (h,H)$ si y sólo si $h \subseteq p$, $H \subseteq P$ y $p \setminus h \subseteq \omega \setminus \bigcup H$.*

Cuando el contexto sea claro, se escribirá $\leq$ en vez de $\leq_{\mathscr{A}}$.

Habrá de verificarse que el orden basado en $\mathscr{A}$ es, en efecto, un orden parcial. Claramente es una relación reflexiva y antisimétrica. Ahora, si $(p,P) \leq (h,H)$ y $(h,H) \leq (k,K)$, es inmediato a la definición de $\leq_{\mathscr{A}}$ que $k \subseteq h \subseteq p$ y $K \subseteq H \subseteq P$; en consecuencia $k \subseteq p$ y $K \subseteq P$. Además $p \setminus h \subseteq \omega \setminus \bigcup H$ y $h \setminus k \subseteq \omega \setminus \bigcup K$, resultando en que:

$$p \setminus k \subseteq (h \setminus k) \cup (p \setminus h) \subseteq \left(\omega \setminus \bigcup K\right) \cup \left(\omega \setminus \bigcup H\right);$$

lo cual demuestra $p \setminus k \subseteq \omega \setminus \bigcup K$. Luego $\leq$ es transitiva, y con ello, orden parcial.

En términos sumamente intuitivos, $(p,P) \leq (h,H)$ significa que «h se extiende a p y H a P». Así, conforme $H \subseteq \mathscr{A}$ «crece», se aproxima a $\mathscr{A}$. Dado que, conforme h «crece», este se «aproxima» a un subconjunto casi ajeno con $\bigcup H$; y eventualmente, se formará un subconjunto casi ajeno con $\bigcup \mathscr{A}$.

Para dar una formalización de la intuición recien dada, comenzaremos definiendo los siguientes objetos para todo lo que resta de la sección.

i) Para cada $a \in \mathscr{A}$, $D_a := \{(p,P) \in \mathbb{P}_{\mathscr{A}} \mid a \in P\}$.

ii) Si $G \subseteq \mathbb{P}_{\mathscr{A}}$, se define $D_G := \bigcup \{h \subseteq \omega \mid \exists H \in [\omega]^{\omega} \left((h,H) \in G\right)\}$.

El siguiente Lema indica por qué la existencia de ciertos filtros en $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ genera conjuntos casi ajenos con cada elemento de $\mathscr{A}$; es decir, se implica bajo esta condición, la no maximalidad de la familia.

Lema 1.4.18. *Sean $\mathscr{A}$ una familia casi ajena, y G un filtro de $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$, entonces para cada $a \in \mathscr{A}$:*

i) D_a es denso en $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$.

ii) Si $G \cap D_a \neq \varnothing$; entonces, $D_G \cap a$ es finito.

Demostración. (i) Si $a \in \mathscr{A}$ y $(p,P) \in \mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ son elementos arbitrarios, entonces $(p, P \cup \{a\}) \in D_a$ y además, por 1.4.17, $(p, P \cup \{a\}) \leq (p,P)$.

(ii) Supóngase que $(p,P) \in G \cap D_a$ y sea $x \in D_G \cap a$ cualquier elemento. Por definición de D_G, existe $(h,H) \in G$ de modo que $x \in h$. Y por ser G filtro, $(k,K) \leq (p,P),(h,H)$ para cierto $(k,K) \in G$. De esto, particularmente se obtiene que $h \subseteq k$, $k \setminus p \subseteq \omega \setminus \bigcup P$.

Ahora, como $(p,P) \in D_a$, entonces como $a \in P$. En consecuencia, se tiene que $x \in \bigcup P$. Finalmente, $x \in h \subseteq k$, así que $x \in k \cap \bigcup P$, lo cual obliga a que $x \in p$. Por tanto $D_G \cap a \subseteq p =^* \varnothing$. ∎

Se tiene entonces lo subsecuente de forma inmediata:

Corolario 1.4.19. *Sean $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$ y $\mathscr{D} := \{D_a \mid a \in \mathscr{A}\}$. Si existe un filtro $\mathscr{D}$-genérico, $\mathscr{A}$ no es maximal.*

Debido a lo recién mostrado, de tener $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ la c.c.c. (propiedad definida en la Apartado A.2), se satisfaría que $\mathrm{MA}(|\mathscr{A}|)$ implica $\mathscr{A} \notin \mathrm{MAD}(\omega)$. En tal caso, se estaría probando que si $\mathrm{MA}(\kappa)$ es cierto, entonces $\kappa < \mathfrak{a}$; por ello, $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{a}$.

Y en efecto, si $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ es anticadena y $(p,P),(h,H) \in \mathcal{A}$, se tiene $p \neq h$; sino $(p, P \cup H) \leq (p,P),(h,H)$ y $\mathcal{A}$ dejaría de ser anticadena. En consecuencia $|\mathcal{A}| \leq |[\omega]^{<\omega}| = \aleph_0$ y $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ tiene la *c.c.c.*

Corolario 1.4.20. *Si $\kappa \geq \omega$ y $\mathrm{MA}(\kappa)$, entonces $\kappa < \mathfrak{a}$; así que:*

i) $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{a}$.

ii) *Bajo* $\mathrm{MA} + \neg\,\mathrm{CH}$ *se tiene* $\mathfrak{m} = \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$.

iii) ZFC *no demuestra la implicación* $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} \to \mathrm{CH}$.

Demostración. Los puntos (i) y (ii) son inmediatos. Para (iii) únicamente basta recordar que $\mathrm{MA} + \neg\,\mathrm{CH}$ es consistente con ZFC (consúltese [8, p. 279-281]). ∎

El Corolario 1.4.19 es una inmediatez, dada toda su discusión previa. Una versión bastante más fortalecida de este, es el siguiente resultado mostrado por Robert Solovay.

Lema 1.4.21 (Solovay). *Sean κ un cardinal con $\omega \leq \kappa < \mathfrak{c}$ y $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ una grieta tal que $|\mathscr{A}|, |\mathscr{B}| \leq \kappa$. Bajo* MA($\kappa$)*; existe $D \subseteq \mathscr{A}$ de modo que para cualesquiera $A \in \mathscr{A}$ y $b \in \mathscr{B}$ ocurre $a \cap D =^* \emptyset$ y $b \cap D \neq^* \emptyset$.*

Demostración. Supóngase MA(κ) y para cada $(b, n) \in \mathscr{B} \times \omega$, defínase el conjunto $D(b, n) := \{(h, H) \in \mathbb{P}_{\mathscr{A}} \mid h \cap b \nsubseteq n\}$.

Sea $(p, P) \in \mathbb{P}_{\mathscr{A}}$; por la Proposición 1.4.6 $b \notin \mathscr{I}(\mathscr{A})$, luego $b \setminus \bigcup P$ es infinito. Por ello, existe $m \in \omega$ de modo que $n + 1 \in m$ y $m \in b \setminus \bigcup P \subseteq \omega \setminus \bigcup P$; así, $p \cup \{m\}$ es finito, $(p \cup \{m\}, P) \in D(b, n)$ y $(p \cup \{m\}, P) \leq_{\mathscr{A}} (p, P)$. Por lo tanto, cada $D(b, n)$ es denso en $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$.

Sea $\mathscr{D} = \{D(b, n) \mid (b, n) \in \mathscr{B} \times \omega\} \cup \{D_a \mid a \in \mathscr{A}\}$ y obsérvese que $\mathscr{D}$ es una familia de densos de $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ de cardinalidad menor o igual a κ. Como $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ es *c.c.c.*, de MA(κ) se desprende la existencia de un filtro G en $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$, $\mathscr{D}$-genérico. Se afirma que D_G es el conjunto buscado.

En efecto, por 1.4.18 se tiene que para cada $a \in \mathscr{A}$, el conjunto $D_G \cap a$ es finito. Ahora, si $b \in \mathscr{B}$ es cualquiera, para cada $n \in \omega$ existe $(k, K) \in G \cap D(b, n)$; y en consecuencia $D_G \cap b \nsubseteq n$ (pues $h \cap b \nsubseteq n$). Por lo que el conujunto $D_G \cap b$ no puede ser finito. ■

Es deseable que la conclusión del Lema de Solovay fuese que la grieta $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ está separada; sin embargo tal formulación desemboca en un resultado falaz. Suponiendo MA $+\neg$ CH, la existencia de una familia de Luzin (véase 1.4.11) sería testigo de tal falsedad; pues esta tiene tamaño $\aleph_1 < \mathfrak{m}$ y es inseparable.

Como «breviario cultural», cuando una grieta $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ satisface la conclusión de 1.4.21 para cierto subconjunto $D \subseteq \omega$, se dirá que está *débilmente separada* (siguiendo la terminología de [3, § 3.2]).

La siguiente es una aplicación típica del lema de Solovay, una prueba sencilla de la consistencia, respecto a ZFC, del enunciado $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$ (la moderadamente famosa *Hipótesis de Jones*). Como se podrá verificar en secciones futuras de este escrito, tanto la hipótesis de Jones, como su negación, tendrán repercusiones en el comportamiento topológico de los Ψ-espacios; especialmente, en la relación que estos guardan con la Conjetura de Moore (véase Apartado 4.1.1).

Aprovechamos para mencionar una última aplicación «conjuntista» de la combinatoria de las familias casi ajenas; a través de ellas, se puede mostrar la consistencia de la Hipótesis de Jones con ZFC.

Corolario 1.4.22. *Sea κ un cardinal con $\omega \leq \kappa < \mathfrak{c}$, entonces bajo* MA($\kappa$)*, se tiene $2^\kappa = \mathfrak{c}$.*

Consecuentemente, es consistente con ZFC *que $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$*

Demostración. Sea κ un cardinal con $\omega \leq \kappa < \mathfrak{c}$ y supóngase MA(κ). Tomando en cuenta 1.2.6, fíjese una familia casi ajena $\mathscr{A}$ con $|\mathscr{A}| = \kappa$ y defínase la función $f : \mathscr{P}(\omega) \to \mathscr{P}(\mathscr{A})$ como $f(X) = \{b \in \mathscr{A} \mid b \cap X =^* \varnothing\}$.

Si $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ es cualquiera, entonces $|\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}|, |\mathscr{B}| \leq \kappa$ y por el Lema de Solovay (1.4.21) se concluye la existencia de un separador $D \subseteq \omega$ para $\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}$ y $\mathscr{B}$. Esto resulta en que $f(D) = \{b \in \mathscr{A} \mid b \cap X =^* \varnothing\} = \mathscr{B}$. Luego f es sobreyectiva y $\mathfrak{c} \geq 2^\kappa$. Como además $\kappa \geq \aleph_0$, entonces $2^\kappa \geq 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Para la segunda parte, es suficiente notar que MA $+\neg$ CH es consistente con ZFC, y que a partir de ellos se concluye MA($\aleph_1$) y $\omega \leq \aleph_1 < \mathfrak{c}$. ■

2. Espacios de Isbell-Mrówka

Cada Ψ-espacio, denotado por $\Psi(\mathscr{A})$, está completamente determinado por una familia de subconjuntos $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$. Estos espacios cuentan con un lugar privilegiado en la topología de conjuntos; quizás, el mayor motivo de ello es su versatilidad para la búsqueda de ejemplos. Esta virtud tiene por razón a las múltiples «traducciones» que existen entre los invariantes topológicos de $\Psi(\mathscr{A})$ y las propiedades que tiene la familia $\mathscr{A}$ como conjunto.

En este capítulo se definirá la topología de $\Psi(\mathscr{A})$ y se analizarán sus propiedades más básicas. Se probarán equivalencias para: su metrizabilidad en relación al tamaño de $\mathscr{A}$, la compacidad de sus subespacios a través del ideal $\mathcal{I}(\mathscr{A})$, su pseudocompacidad en términos de la maximalidad de $\mathscr{A}$, entre otras propiedades topológicas. En adición a lo anterior, se probará que los únicos espacios infinitos, de Hausdorff, separables y hereditariamente localmente compactos, son (salvo homeomorfismos) los espacios de Mrówka; esto es, el Teorema de Kannan y Rajagopalan.

2.1. Ψ-espacios y caracterizaciones elementales

Una forma amigable de «visualizar» a los Ψ-espacios es concibiéndolos como una generalización al espacio de ordinales $X = \omega + 1$, este se estructura de forma que el subespacio $\omega \subseteq X$ es denso, discreto y se acumula «hacia» el punto $\omega \in X$. Los espacios $\Psi(\mathscr{A})$ tienen por conjunto subyacente a $\omega \cup \mathscr{A}$ y, en un sentido puramente intuitivo, se puede describir su topología de la siguiente manera: el subconjunto ω es una «masa» densa y discreta, pero, se acumula en «direcciones» independientes entre sí, una por cada elemento en $\mathscr{A}$. Cada $x \in \mathscr{A}$, pensado como subespacio de $\Psi(\mathscr{A})$, forma una sucesión convergente al punto $x \in \Psi(\mathscr{A})$.

Para conseguir el comportamiento anterior, bastará considerar que un subconjunto U de $\Psi(\mathscr{A}) = \omega \cup \mathscr{A}$ es abierto si y solamente si casi contiene a sus elementos que estén en $\mathscr{A}$. De esta manera, cuando $x \in \mathscr{A}$ pertenezca a un abierto U, se tendrá $x \subseteq^* U$: y así x como subconjunto del espacio, convergerá a x como punto del espacio.

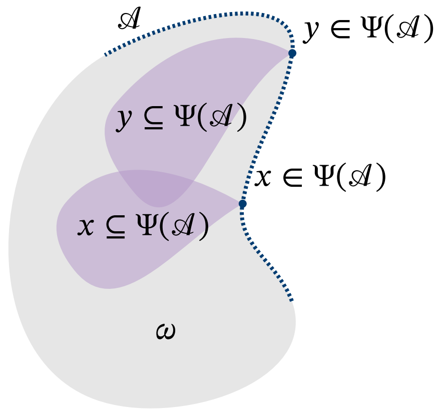

Figura 2.1.1.: Imagen intuitiva de $\Psi(\mathscr{A})$.

Es fundamental notar la importancia de que $\omega \cap \mathscr{A}$ sea vacía. Pese a que en general, si N es un conjunto numerable arbitrario y $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^\omega$, no hay garantía de que $N \cap \mathscr{A} = \varnothing$; utilizando las biyeccines Φ_h, es posible trasladar la familia $\mathscr{A}$ hacia una familia sobre ω que tenga «las mismas propiedades». Por ello se convendrá, sin perder generalidad, lo que sigue:

Consideración 2.1.2. *Cuando N sea un conjunto numerable y $\mathscr{A} \subseteq [N]^\omega$, a partir de este momento, se asumirá siempre que $N \cap \mathscr{A} = \varnothing$.*

Bajo la consideración previa, para cualquier conjunto numerable N y familia de subconjuntos $\mathscr{A} \subseteq [N]^\omega$, se define la colección:

$$\mathscr{T}_{N,\mathscr{A}} := \{U \subseteq N \cup \mathscr{A} \mid \forall x \in U \cap \mathscr{A} \, (x \subseteq^* U)\}. \tag{2.1}$$

Tal colección forma una topología para $N \cup \mathscr{A}$. Evidentemente $\varnothing$ y $N \cup \mathscr{A}$ son elementos de $\mathscr{T}_{\mathscr{A}}$. Si $U, V \in \mathscr{T}_{\mathscr{A}}$ y $x \in (U \cap V) \cap \mathscr{A}$, entonces $x \subseteq^* U$ y $x \subseteq^* V$, de donde $x \subseteq^* U \cap V$ y $U \cap V \in \mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$. Finalmente, si $\mathcal{U} \subseteq \mathscr{T}_{\mathscr{A}}$ y $x \in \bigcup \mathcal{U} \cap \mathscr{A}$, existe $U_0 \in \mathcal{U}$ con $x \in U_0$; así que $x \subseteq^* U_0 \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ y por ello $\bigcup \mathcal{U} \in \mathscr{T}_{\mathscr{A}}$.

Definición 2.1.3. *Sean N un conjunto numerable y $\mathcal{A} \subseteq [N]^\omega$.*

i) $\mathcal{T}_{N,\mathcal{A}}$ *es la* ***topología de de Isbell-Mrókwa generada por*** $\mathcal{A}$.

ii) El **Ψ*-espacio generado por*** $\mathcal{A}$ *es el par* $\Psi_N(\mathcal{A}) = (N \cup \mathcal{A}, \mathcal{T}_{N,\mathcal{A}})$.

Si $N = \omega$, los objetos anteriores se denotarán por $\mathcal{T}_\mathcal{A}$ y $\Psi(\mathcal{A})$, respectivamente.

Desde un punto de vista topológico, lo anterior no define dos clases distintas de objetos. Por tal motivo, bastará de ahora en más, estudiar los Ψ-espacios generados por familias de subconjuntos infinitos de ω.

Proposición 2.1.4. *Sean N, M conjuntos numerables, $\mathcal{A} \subseteq [N]^\omega$ y cualquier biyección $h : N \to M$. Entonces $\Psi_N(\mathcal{A}) \cong \Psi_M(\Phi_h(\mathcal{A}))$.*

Demostración. Sea $f : \Psi_N(\mathcal{A}) \to \Psi_M(\Phi_h(\mathcal{A}))$ dada por $f(x) = h(x)$, si $x \in N$; y $f(x) = h[x]$, si $x \in \mathcal{A}$. Nótese que f es biyectiva (dada 2.1.2). Por definición de f, y como $\Phi_h^{-1} = \Phi_{h^{-1}}$, basta ver únicamente la continuidad de f.

Sea U abierto en $\Psi_M(\Phi_h(\mathcal{A}))$ y supóngase que $x \in f^{-1}[U] \cap \mathcal{A}$. Entonces $f(x) = h[x] \in U \cap \Phi_h(\mathcal{A})$. Como U es abierto en $\Psi_M(\Phi_h(\mathcal{A}))$, entonces $f(x) \setminus U$ es finito. Así que $f^{-1}[f(x) \setminus U] = h^{-1}[h[x]] \setminus f^{-1}[U] = x \setminus f^{-1}[U]$ es finito y así $x \subseteq^* f^{-1}[U]$, probando que $f^{-1}[U]$ es abierto en $\Psi_N(\mathcal{A})$. ■

La siguiente manera de describir la topología de Mrówka es la más común en la literatura (como ejemplo de ello, [4] o [3]).

Proposición 2.1.5. *Sea $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$, entonces:*

i) Cada $B \subseteq \omega$ es abierto en $\Psi(\mathcal{A})$, así, cada $n \in \omega$ es punto aislado.

ii) Si $x \in \mathcal{A}$, $\mathcal{B}_x := \{\{x\} \cup x \setminus F \mid F \in [x]^{<\omega}\}$ es base local de x en $\Psi(\mathcal{A})$.

Demostración. (i) Si $B \subseteq \omega$, es vacuo que $B \in \mathcal{T}_\mathcal{A}$, pues $B \cap \mathcal{A} = \varnothing$.

(ii) Sea $x \in \mathcal{A}$. Si $G \subseteq x$ es finito y $y \in \big(\{x\} \cup x \setminus G\big) \cap \mathcal{A}$, necesariamente $y = x$, de donde $y \subseteq^* \{x\} \cup x \setminus G$ pues G es finito, así $\{x\} \cup x \setminus G \in \mathcal{T}_\mathcal{A}$, por lo que $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. Ahora, si $U \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ es abierto y $x \in U$, $F := x \setminus U \subseteq x$ es finito y $x \in \{x\} \cup x \setminus F \subseteq U$. ■

En términos de lo recién demostrado, cada $\mathcal{B}_x$ es imagen de $[x]^{<\omega}$. Pero este último conjunto es numerable, pues x es lo es. Por lo tanto, se desprende:

Corolario 2.1.6. *Para cualquier familia $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$:*

i) $\Psi(\mathcal{A})$ *es* 1 AN.

ii) $\mathcal{B}_{\mathcal{A}} := \bigcup\{\mathcal{B}_x \mid x \in \mathcal{A}\} \cup \big\{\{n\} \mid n \in \omega\big\}$ *es una base de* $\Psi_N(\mathcal{A})$

iii) El peso de $\Psi(\mathcal{A})$ *es* $\aleph_0 + |\mathcal{A}|$.

iv) $\Psi(\mathcal{A})$ *es* 2 AN *si y sólo si* $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0$.

Demostración. Basta probar únicamente (iii).

Debido a (ii), el peso del espacio es menor o igual a $|\mathcal{B}_{\mathcal{A}}| = \aleph_0 + |\mathcal{A}|$. Además, $\omega, \mathcal{A} \subseteq \Psi(\omega)$ son subespacios discretos (véase el Lema 2.1.7) de tamaño, y por tanto peso, $\aleph_0$ y $|\mathcal{A}|$, respectivamente. Consecuentemente, el peso de $\Psi(\mathcal{A})$ debe ser mayor o igual a ambos. ■

Si $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$ y $X \subseteq \Psi(\mathcal{A})$, dado que cada punto de ω es aislado, se tiene que $\mathrm{der}(X) \subseteq \mathcal{A}$. Por otra parte, si $a \in \mathcal{A}$, la única forma de que cada $a \setminus F$ (con $F \in [a]^{<\omega}$) tenga intersección no vacía con X, es que $X \cap a$ sea infinito. Esta argumentación junto con 2.1.5 demuestran el primer punto, y con ello el resto, del siguiente Lema:

Lema 2.1.7. *Sea $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$, entonces:*

i) Si $X \subseteq \Psi(\mathcal{A})$, entonces $\mathrm{der}(X) = \{y \in \mathcal{A} \mid X \cap y \neq^* \varnothing\}$.

ii) $\mathcal{A} = \mathrm{der}(\Psi(\mathcal{A})) = \mathrm{der}(\omega)$.

iii) Cada $B \subseteq \mathcal{A}$ es un subespacio cerrado y discreto de $\Psi(\mathcal{A})$.

iv) ω es discreto, denso en $\Psi(\mathcal{A})$.

v) $B \subseteq \omega$ es cerrado si y sólo si es casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$.

Las siguientes son propiedades topológicas inherentes a todo Ψ-espacio.

Proposición 2.1.8. *Todo Ψ-espacio es separable, primero numerable,* T_1*, disperso y desarrollable.*

Demostración. Sea $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^\omega$ cualquiera. El Ψ-espacio generado por $\mathscr{A}$ es separable pues ω es denso en $\Psi(\mathscr{A})$ y numerable; además, este espacio es primero numerable debido al Corolario 2.1.6.

(Axioma T_1) Sea $x \in \Psi(\mathscr{A})$. De 2.1.7, $\mathrm{der}(\{x\}) = \{y \in \mathscr{A} \mid \{x\} \cap y \neq^* \varnothing\} = \varnothing$, lo cual implica que $\{x\}$ es cerrado.

(Dispersión) Supóngase que $X \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es no vacío. Si $X \subseteq \mathscr{A}$, cada $x \in X$ es aislado en el discreto X (inciso (iii) de 2.1.7). En caso contrario, existe un elemento $n \in X \cap \omega$ y n es aislado en X, pues $\{n\}$ es abierto en $\Psi(\mathscr{A})$ y en X.

(Desarrollabilidad) Defínase $\mathcal{U}_n := \{\{a\} \cup a \setminus n \mid a \in \mathscr{A}\} \cup \{\{y\} \mid y \in \omega\}$ para cada $n \in \omega$. Así, cada $\mathcal{U}_n$ es cubierta abierta de $\Psi(\mathscr{A})$. Sean $x \in \Psi(\mathscr{A})$ y U un abierto tal que $x \in U$.

Si $x \in \omega$, entonces ningún $V \in \mathcal{U}_{x+1}$, con $x \in V$, puede ser de la forma $\{a\} \cup a \setminus (x+1)$. Por tanto, $x \in \{x\} = \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_{x+1}) \subseteq U$. Si $x \in \mathscr{A}$, entonces y $x \setminus U \subseteq \omega$ es finito y existe $n_0 \in \omega$ tal que $x \setminus U \subseteq n_0$. Como $\{x\} \cup x \setminus n_0 \in \mathcal{U}_{n_0}$ es el único abierto de $\mathcal{U}_{n_0}$ al cual x pertenece, $x \in \{x\} \cup x \setminus n_0 = \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_{n_0}) \subseteq U$.

Así pues, $\{\mathrm{St}(x, \mathcal{U}_n) \mid n \in \omega\}$ es base local de x, mostrando que $\{\mathcal{U}_n \mid n \in \omega\}$ es un desarrollo para $\Psi(\mathscr{A})$. ■

Cuando la familia $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^\omega$ no es casi ajena, el espacio $\Psi(\mathscr{A})$ no satisface el axioma de separación de Hausdorff. Es por tal razón, que en la literatura se suele dar la Definición 2.1.3 partiendo directamente de una familia casi ajena (el lector podrá corroborar esto en textos como [3, 4, 7]).

A continuación se muestran aquellas propiedades topológicas de $\Psi(\mathscr{A})$ «codificadas» a través de la condición $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$.

Proposición 2.1.9. *Para cada $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^\omega$, son equivalentes:*

i) $\mathscr{A}$ es familia casi ajena.

ii) $\Psi(\mathscr{A})$ *es cero-dimensional.*

iii) $\Psi(\mathscr{A})$ *es de Tychonoff.*

iv) $\Psi(\mathscr{A})$ *es de Hausdorff.*

Demostración. (i) → (ii) Si $\mathscr{A}$ es familia casi ajena, como $\Psi(\mathscr{A})$ es T_1, basta verificar que cada elemento de la base $\mathscr{B}_{\mathscr{A}}$ (definida como en 2.1.6) es cerrado. En efecto, cada $\{n\}$ con $n \in \omega$ es cerrado pues $\Psi(\mathscr{A})$ es T_1. Y dados $x \in \mathscr{A}$ y $F \subseteq x$ finto, haciendo uso de 2.1.7 se tiene que por ser $\mathscr{A}$ familia casi ajena, $\mathrm{der}(\{x\} \cup x \setminus F) = \{x\} \subseteq \{x\} \cup x \setminus F$. Así que $\{x\} \cup x \setminus F$ es cerrado.

(ii) → (iii) → (iv) Si $\Psi(\mathscr{A})$ es cero-dimensional, al ser espacio T_1, resulta ser de Tychonoff (por 0.2.4). Y, si $\Psi(\mathscr{A})$ es de Tychonoff, entonces es de Hausdorff.

(iv) → (i) Si $\Psi(\mathscr{A})$ es de Hausdorff y $x, y \in \mathscr{A}$ son distintos, existen abiertos ajenos $U, V \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ tales que $x \in U$ y $y \in V$. De donde $x \subseteq^* U$, $y \subseteq^* V$ y por consiguiente $x \cap y \subseteq^* U \cap V = \varnothing$. ■

La Proposición anterior es el motivo principal por el cual nos restringiremos a considerar únicamente Ψ-espacios generados por familias casi ajenas, es decir, espacios de Mrówka.

Definición 2.1.10. *Un **espacio de Mrówka** (o, **de Isbell-Mrówka**) es un* Ψ*-espacio generado por una familia casi ajena.*

Recordando que un espacio topológico es de Moore si y sólo si satisface el axioma T_3 y tiene un desarrollo, se tiene la siguiente compilación básica respecto a las propiedades con las que siempre cuenta un espacio de Mrówka.

Corolario 2.1.11. *Todo espacio de Mrókwa es separable, primero numerable, de Tychonoff, cero-dimensional, disperso y de Moore.*

La siguiente es sólo una de las múltiples relaciones importantes que existen entre los espacios de Mrówka y el conjunto de Cantor. Su demostración se basa en que todo espacio T_1 y cero-dimensional de peso $\varkappa$ se encaja en $2^{\varkappa}$ (véase el Proposición 0.2.3).

Corolario 2.1.12. *Todo espacio de Mrówka $\Psi(\mathscr{A})$ se encaja en $2^{\aleph_0+|\mathscr{A}|}$. Particularmente, si $|\mathscr{A}| \leq \aleph_0$, el espacio $\Psi(\mathscr{A})$ se encaja en 2^ω y es metrizable.*

2.2. Compacidad y compacidad local

Surgen más «traducciones» con las cuales maniobrar al momento de estudiar los Ψ-espacios. El ideal generado por una familia casi ajena determina a los subespacios compactos del espacio de Mrówka asociado a la misma.

Proposición 2.2.1. *Sean $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$ y $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$. Entonces K es compacto si y sólo si $K \cap \omega \subseteq^* \bigcup(K \cap \mathscr{A})$ y $K \cap \mathscr{A}$ es finito.*

Demostración. Si $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es subespacio compacto; en virtud de que la colección $\mathcal{U} := \{\{n\} \mid n \in K \cap \omega\} \cup \{\{x\} \cup x \mid x \in K \cap \mathscr{A}\}$ es cubierta abierta para K en $\Psi(\mathscr{A})$, existen $F \subseteq K \cap \omega$ y $G \subseteq K \cap \mathscr{A}$ finitos de manera tal que $\{\{n\} \mid n \in F\} \cup \{\{x\} \cup x \mid x \in G\}$ es subcubierta de $\mathcal{U}$. Necesariamente $K \cap \mathscr{A} = G$, así que $K \cap \mathscr{A}$ es finito. Además $(K \cap \omega) \setminus \bigcup G = K \setminus \bigcup G \subseteq F$ es finito y con ello $K \cap \omega \subseteq^* \bigcup(K \cap \mathscr{A})$.

Conversamente, supóngase que $K \cap \omega \subseteq^* \bigcup(K \cap \mathscr{A})$ y que $K \cap \mathscr{A}$ es finito. Para cada $y \in \mathscr{A}$, $\{y\} \cup y$ es compacto; por ello $L := \bigcup\{\{y\} \cup y \mid y \in K \cap \mathscr{A}\}$ es un subespacio compacto de $\Psi(\mathscr{A})$. Nótese que $K \cap L$ es cerrado en L; pues $L \setminus K \subseteq \omega$; así que $K \cap L \subseteq L$ es compacto. Como $K \setminus L = (K \cap \omega) \setminus \bigcup(K \cap \mathscr{A})$ es finito por hipótesis, es compacto. Así, $K = (K \setminus L) \cup (K \cap L)$ es unión de subespacios compactos de $\Psi(\mathscr{A})$, y por lo tanto, es compacto. ■

Entonces los subespacios compactos de $\Psi(\mathscr{A})$ son aquellos de la forma $M \cup H$; donde $H \subseteq \mathscr{A}$ es finito y $M \subseteq^* \bigcup H$. Esto es, si $\mathscr{K}$ es el conjunto de todos los subespacios compactos de $\Psi(\mathscr{A})$:

$$\mathscr{K} = \bigcup_{H \in [\mathscr{A}]^{<\omega}} \{(F \cup M) \cup H \mid (F, M) \in [\omega]^{<\omega} \times \mathscr{P}(H)\}$$

Por ello $|\mathscr{A}| \cdot \aleph_0 \leq |\mathscr{K}| \leq \sum\{(\aleph_0 \cdot \mathfrak{c}) \mid H \in [\mathscr{A}]^{<\omega}\} \leq |\mathscr{A}| \cdot \mathfrak{c} \leq \mathfrak{c}$ y todo espacio de Mrówka tiene; a lo sumo, $\mathfrak{c}$ subespacios compactos.

La discusión sobre cuántos subespacios compactos *importantes* (esto es, los que determinan el carácter topológico de su extensión unipuntual) tiene $\Psi(\mathscr{A})$ se retomará en la Apartado 3.1.

Corolario 2.2.2. *Sean $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$ y $A \subseteq \omega$. Son equivalentes:*

i) $A \in \mathcal{I}(\mathscr{A})$

ii) Existe $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ compacto tal que $A \subseteq K$.

iii) Existe $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ compacto tal que $A \subseteq^* K$.

Demostración. (i) → (ii) Si $A \in \mathcal{I}(\mathscr{A})$, existe cierto $H \subseteq \mathscr{A}$ finito de modo tal que $A \subseteq^* \bigcup H$. Debido a 2.2.1, $K := A \cup H$ es compacto y $A \subseteq K$.

(iii) → (i) Supóngase que $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es compacto y tal que $A \subseteq^* K$. Consecuentemente $A \setminus \bigcup(K \cap \mathscr{A}) \subseteq^* A \setminus (K \cap \omega) = A \setminus K =^* \varnothing$, en virtud de la Proposición 2.2.1. Como $K \cap \mathscr{A}$ es finito, resulta que $A \in \mathcal{I}(\mathscr{A})$. ∎

Proposición 2.2.3. *Para cualquier $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$ son equivalentes:*

i) $\Psi(\mathscr{A})$ es compacto.

ii) $\Psi(\mathscr{A})$ es numerablemente compacto.

iii) $\mathscr{A}$ es finita y maximal.

Demostración. (i) → (ii) es clara.

(ii) → (iii) Supóngase que $\Psi(\mathscr{A})$ es numerablemente compacto. Dado que $\mathscr{A}$ es un subespacio cerrado y discreto de $\Psi(\mathscr{A})$ (véase 2.1.7); necesariamente, debe ser finito. Luego, $\mathcal{U} := \{\{n\} \mid n \in \omega\} \cup \{\{x\} \cup x \mid x \in \mathscr{A}\}$ es una cubierta numerable para $\Psi(\mathscr{A})$, y como este espacio es numerablemente compacto, existe $F \subseteq \omega$ finito de tal modo que la colección $\{\{n\} \mid n \in F\} \cup \{\{x\} \cup x \mid x \in \mathscr{A}\}$ es subcubierta de $\mathcal{U}$. Se obtiene de la finitud de F que $\omega \subseteq^* \bigcup \mathscr{A}$; y al ser $\mathscr{A}$ finita, del Corolario 1.1.9 se sigue su maximalidad.

(iii) → (i) Si $\mathscr{A}$ es finita y maximal, entonces de 1.3.5 se tiene que $\omega \in \mathcal{I}(\mathscr{A})$. Aplicando el Corolario 2.2.2 se tiene la compacidad de $\Psi(\mathscr{A})$. ∎

La siguiente Proposición para nada carece de importancia, pues los espacios de Isbell-Mrówka son los únicos (dentro de cierta clase) con tal propiedad.

Proposición 2.2.4. *Todo espacio de Mrówka es hereditariamente localmente compacto, y en consecuencia, es espacio de Baire.*

Demostración. Supóngase que $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$ y sea $X \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ cualquiera. Como $\Psi(\mathscr{A})$ es de Hausdorff (recuérdese 2.1.11), X es de Hausdorff y basta verificar que cada punto de X tiene una vecindad en X compacta.

Sea $x \in X$ arbitrario. Si $x \in \omega$, $\{x\}$ es vecindad compacta de x en X. Ahora, si $x \in \mathscr{A}$, entonces $K := X \cap (\{x\} \cup x) \subseteq \{x\} \cup x$ es vecindad de x en X. En virtud de la Proposición 2.2.1, K es compacto; pues $K \cap \mathscr{A} = \{x\}$ es finito y $K \cap \omega \subseteq x \subseteq^* \bigcup\{x\} = \bigcup(K \cap \mathscr{A})$. Así, X es localmente compacto.

Finalmente, $\Psi(\mathscr{A})$ es localmente compacto y de Hausdorff, siendo esto suficiente para ser de Baire (Teorema 0.2.15). ■

2.3. Metrizabilidad y Pseudocompacidad

El Corolario 2.1.12 evidencía que la numerabilidad de una familia casi ajena $\mathscr{A}$ es suficiente para concluir la metrizabilidad de su espacio de Mrówka asociado, no resulta difícil notar que el recíproco también ocurre (dados 2.1.6 y que $\Psi(\mathscr{A})$ es separable); sin embargo, se tienen más equivalencias:

Proposición 2.3.1. *Sea $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$, entonces son equivalentes:*

i) *$\mathscr{A}$ es a lo más numerable*

ii) *$\Psi(\mathscr{A})$ es metrizable.*

iii) *$\Psi(\mathscr{A})$ es segundo numerable.*

iv) *$\Psi(\mathscr{A})$ es σ-compacto.*

v) *$\Psi(\mathscr{A})$ es de Lindelöf.*

Demostración. (i) → (ii) → (iii) Si $|\mathscr{A}| \leq \omega$, se obtiene de 2.1.12 que $\Psi(\mathscr{A})$ es metrizable. Por otro lado, si $\Psi(\mathscr{A})$ es metrizable, al ser este un espacio separable, se tiene garantizado que es 2 AN, en cirtud del Corolario B.1.4

(iii) → (iv) → (v) Si $\Psi(\mathscr{A})$ es 2 AN, entonces al localmente compacto, resulta que es σ-compacto. Además; todo espacio σ-compacto, es también de Lindelöf. Todo este párrafo es a razón del Corolario 0.2.11.

(v) → (i) Por último, supóngase que $\Psi(\mathscr{A})$ es de Lindelöf. Como este espacio es desarrollable, se sigue de la Proposición B.1.3, que debe ser 2 AN. Se sigue de 2.1.6 que $|\mathscr{A}| \leq \aleph_0$. ■

El siguiente corolario es una sencilla aplicación de 2.2.3 y 2.3.1, ejemplos como este ilustran desde ya el poder «constructivo» que tienen estos espacios.

Corolario 2.3.2. *Sea $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$. Entonces $\Psi(\mathscr{A})$ no compacto y metrizable (o cualquiera de sus equivalentes dados en 2.3.1) si y solamente si $|\mathscr{A}| = \aleph_0$.*

Ahora, falta establecer una relación entre $\Psi(\mathscr{A})$ y la maximalidad de la familia $\mathscr{A}$. En la Apartado 3.1 se ahondará con mucha más profundidad en el estudio de las sucesiones convergentes; pero de momento, es necesario considerar el siguiente Lema, en orden de dar una caracterización completa para la condición $\mathscr{A} \in \mathrm{MAD}(\omega)$.

Lema 2.3.3. *Sean $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$, $x \in \mathscr{A}$ y $B \in [\omega]^{\omega}$. Entonces $B \to x$ en $\Psi(\mathscr{A})$ si y sólo si $B \subseteq^* x$.*

Demostración. Supóngase que $B \to x$ en $\Psi(\mathscr{A})$. Como $x \cup \{x\}$ es un abierto de $\Psi(\mathscr{A})$ que tiene a x, se tiene que $B \subseteq^* x \cup \{x\} =^* x$.

Recíprocamente, si $B \subseteq^* x$ y $U \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es un abierto cualquiera tal que $x \in U$, resulta que $x \subseteq^* U$. Por lo tanto $B \subseteq^* U$, mostrando que $B \to x$ en $\Psi(\mathscr{A})$. ■

Proposición 2.3.4. *Sea $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$, son equivalentes:*

i) *$\Psi(\mathscr{A})$ es pseudocompacto.*

ii) *$\mathscr{A}$ es maximal.*

iii) Todo subespacio discreto, abierto y cerrado de $\Psi(\mathscr{A})$ *es finito.*

iv) Toda sucesión en ω *tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. (i) $\to$ (ii). Si $\mathscr{A}$ no es maximal, existe $B \subseteq \omega$ infinito y casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$. Por 2.1.5 y 2.1.7, B es discreto, abierto y cerrado, obteniéndose de 0.2.17 que $\Psi(\mathscr{A})$ no es pseudocompacto.

(ii) $\to$ (iii) Por contrapuesta, supóngase que existe $B \subseteq \Psi(\mathscr{A})$, abierto, cerrado, discreto e infinito. Como B es cerrado y discreto, $\mathrm{der}(B) = \varnothing$ y se obtiene del inciso (i) de 2.1.7 que $B \subseteq \omega$. Concluyéndose por el quinto inciso de tal Lema que B es casi ajeno con todo elemento de $\mathscr{A}$.

(iii) $\to$ (iv) Supóngase (iii) y sea $B \in [\omega]^{\omega}$. Así, B es discreto, infinito y abierto. Por hipótesis, B no es cerrado y debe existir $x \in \mathrm{der}(B) \setminus B$ y por 2.1.11, $x \in \mathscr{A}$ y $B \cap x$ es infinito. Siguiéndose del Lema 2.1.7 que $B \cap x \to x$ en $\Psi(\mathscr{A})$.

(iv) $\to$ (i) Esta implicación se sigue inmediatamente de la Proposición 0.2.17. ■

Combinando 2.2.3, 2.3.1 y 2.3.4 se obtienen ejemplos muy concretos. Por ejemplo, si un espacio de Mrówka $\Psi(\mathscr{A})$ no es pseudocompacto pero sí es metrizable, necesariamente $\mathscr{A}$ es numerable. Otro ejemplo responde con una negativa a lo que en su momento fue un problema popular: ¿la pseudocompacidad equivale a la compacidad numerable en espacios Tychonoff?, resultado se sabe cierto en la clase de espacios T_4 (véase 0.2.16) y falso dentro de la clase de espacios que no son T_1. En virtud de 2.2.3, tomando cualquier familia maximal infinita:

Corolario 2.3.5. *Existe un espacio de Tychonoff, que es pseudocompacto pero no numerablemente compacto.*

La siguiente es una caracterización conocida (véase [12, p. 39, 45]), desvela que el comportamiento sumamente organizado de $\Psi(\mathscr{A})$ se rompe bruscamente cuando $\mathscr{A}$ deja de ser numerable.

Proposición 2.3.6. *Sea* $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$ *de cardinalidad* κ*, entonces*[1]*:*

i) Si $\kappa = 0$*, entonces* $\Psi(\mathscr{A}) \cong \omega$.

ii) *Si $\varkappa < \omega$ y $\mathscr{A}$ no es maximal, $\Psi(\mathscr{A}) \cong \omega \cdot (\varkappa + 1)$.*

iii) *Si $\varkappa < \omega$ y $\mathscr{A}$ es maximal, $\Psi(\mathscr{A}) \cong \omega \cdot (\varkappa + 1) + 1$.*

iv) *Si $\varkappa = \omega$, entonces $\Psi(\mathscr{A}) \cong \omega^2$.*

v) *Si $\varkappa > \omega$, entonces $\Psi(\mathscr{A})$ no homeomorfo a ningún espacio de ordinales; más aún, $\Psi(\mathscr{A})$ no es linealmente ordenable.*

De (iv), en la Proposición previa, surge que el espacio de ordinales ω^2 es el único espacio de Mrówka metrizable y no compacto. Queda claro además, que cualesquiera dos familias numerables son «iguales» en el siguiente aspecto:

Definición 2.3.7. *Dados conjuntos N, M numerables, se dice que $\mathscr{A} \subseteq [N]^\omega$ y $\mathscr{B} \subseteq [M]^\omega$ son **esencialmente iguales** cuando $\Psi_N(\mathscr{A}) \cong \Psi_M(\mathscr{B})$.*

Una consecuencia «curiosa» en relación ω^2, fruto de lo anterior y del Teorema principal de la Apartado 2.4, es el Corolario 2.4.10.

2.4. Teorema de Kannan y Rajagopalan

La meta primordial en lo que resta del capítulo será caracterizar aquellos espacios que son homeomorfos a algún espacio de Mrówka.

Lema 2.4.1. *Sea X un espacio de Hausdorff y localmente compacto. Si X contiene un abierto denso $D \in [X]^{\leq\omega}$, entonces $N := X \setminus \mathrm{der}(X)$ es denso en X.*

Demostración. Si $x \in X$ es aislado en D, dada la densidad de D, es necesario que $x \in D$. Luego $\{x\} = D \cap U$ para cierto abierto U de X; y como X es un espacio T_1, resulta que $U = \{x\}$. Por lo tanto $X \setminus \mathrm{der}_D(D) \subseteq N$.

Nótese que $X \setminus \mathrm{der}_D(D) = \bigcap \{X \setminus \{y\} \mid y \in \mathrm{der}_D(D)\}$. Pero, para cada punto $y \in \mathrm{der}_D(D) \subseteq \mathrm{der}(X)$, el conjunto $X \setminus \{y\}$ es abierto y denso en X. De la hipótesis y el Teorema 0.2.15, X es de Baire, así que $N \supseteq X \setminus \mathrm{der}_D(D)$ debe ser denso. ■

[1] En los incisos (i)-(iv), los espacios homeomorfos a $\Psi(\mathscr{A})$ son espacios de ordinales.

Lema 2.4.2. *Sean X un espacio y $N := X \setminus \operatorname{der}(X)$. Son equivalentes:*

i) *N es denso y cada $y \in \operatorname{der}(X)$ cumple que $N \cup \{y\}$ es abierto en X.*

ii) *$\operatorname{der}(X)$ es discreto.*

Demostración. (i) → (ii) Supóngase (i) y sea $y \in \operatorname{der}(X)$. Como $N \cup \{y\}$ es abierto en X, entonces $y \in U \subseteq N \cup \{y\}$ para cierto abierto U. Seguido de lo anterior, $\{y\} = U \setminus N = U \cap \operatorname{der}(X)$. Mostrando que $\operatorname{der}(X)$ es discreto.

(ii) → (i) Supóngase que $\operatorname{der}(X)$ es discreto. Si N no es denso, existen $x \in X$ y un abierto U de modo tal que $x \in U \subseteq \operatorname{der}(X)$. Pero al ser $\operatorname{der}(X)$ discreto, $\{x\} = W \cap \operatorname{der}(X)$ para cierto abierto W, de donde $U \cap W = \{x\}$ y $x \in N$, esto es imposible. Así que N es denso en X.

Ahora, si $y \in \operatorname{der}(X)$, ha de existir un abierto U tal que $\{y\} = U \cap \operatorname{der}(X)$. De lo anterior, $N \cup \{y\} = (N \cup U) \cap (N \cup \operatorname{der}(X)) = N \cup U$ es abierto en X. ■

La siguiente caracterización es debida a Varadachariar Kannan y a Minakshisundaram Rajagopalan, quienes en 1970 (consúltese [7]) dieron con un resultado que permite caracterizar de una forma sencilla a los espacios de Mrówka. Su característica fundamental es la compacidad local hereditaria.

Teorema 2.4.3 (Kannan, Rajagopalan). *Para todo espacio X infinito, de Hausdorff y separable, son equivalentes:*

i) *X es hereditariamente localmente compacto.*

ii) *X es localmente compacto y $\operatorname{der}(X)$ es discreto.*

iii) *X es homeomorfo a un espacio de Mrówka.*

Demostración. Supóngase que X es cualquier espacio infinito, de Hausdorff, separable y sea $N := X \setminus \operatorname{der}(X)$.

(i) → (ii) Supóngase que X es hereditariamente localmente compacto. Por separabilidad e infinitud de X, existe $D \in [X]^\omega$ denso. Se sigue de la hipótesis que D es localmente compacto y por ello, es abierto en su cerradura, X. Debido al Lema 2.4.1, N es denso en X.

Por otro lado, si $y \in \mathrm{der}(X)$ es cualquiera, $N \cup \{y\} \subseteq X$ es localmente compacto, y por ende, es abierto en su cerradura. Pero N es denso, así que $N \cup \{y\}$ es abierto en $X = \mathrm{cl}(N \cup \{y\})$. Se sigue de 2.4.2 que $\mathrm{der}(X)$ es discreto.

(ii) → (iii) Supóngase que X es localmente compacto y que $\mathrm{der}(X)$ es discreto. Por el Lema 2.4.2 resulta que N es denso en X y que $N \cup \{y\}$ es abierto siempre que $y \in \mathrm{der}(X)$. Por ser X infinito y separable, se tiene que N es numerable. Utilizando la compacidad local de X, para cada $x \in \mathrm{der}(X)$ fíjese (AC) una vecindad compacta V_x de x en X contenida en $N \cup \{x\}$. Se afirma que $\mathscr{A} = \{V_x \setminus \{x\} \subseteq N \mid x \in \mathrm{der}(X)\}$ es una familia casi ajena.

En efecto, si $x \in \mathrm{der}(X)$ es cualquiera, entonces $V_x \setminus \{x\}$ no es finito. De lo contrario, $\{x\} = (N \cup \{x\}) \setminus (V_x \setminus \{x\})$ sería abierto en X, quien es T_1, y se contradiría que $x \in \mathrm{der}(X)$; luego, $\mathscr{A} \subseteq [N]^{\omega}$. Además, si $x, y \in \mathrm{der}(X)$ son distintos, se tiene que $V_x \cap V_y \subseteq N$. Así $V_x \cap V_y$ es subespacio compacto del discreto N, lo cual obliga a que sea finito. Por ello $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(N)$.

Sea $f : X \to \Psi_N(\mathscr{A})$ dada por: $f(n) = n$, si $n \in N$; y $f(x) = V_x$, si $x \in \mathrm{der}(X)$. Resulta que f es biyectiva; y como N es el conjunto de puntos aislados de X, para verificar que f es homeomorfismo basta verificar lo siguiente:

Afirmación. Para cada $U \subseteq X$, U es abierto en X si y sólo si para cualquier elemento $x \in U \cap \mathrm{der}(X)$ ocurre que $V_x \setminus \{x\} \subseteq^* U$.

Demostración. Sea $U \subseteq X$. Si U es abierto y $x \in U \cap \mathrm{der}(X)$, entonces $V_x \setminus U \subseteq N$ es cerrado en X, así en V_x y como V_x es compacto; $V_x \setminus U$ es subespacio compacto del discreto N, por tanto finito. Así que $V_x \setminus \{x\} \subseteq^* U$.

Recíprocamente, supóngase que para cada $x \in U \cap \mathrm{der}(X)$ se tiene que $V_x \setminus \{x\} \subseteq^* U$, es decir, que $V_x \setminus U$ es finito. Sea $y \in U$ cualquiera, si $y \in N$ entonces $\{y\}$ es abierto en X y U es vecindad de y. Ahora, si $y \in \mathrm{der}(X)$ entonces $V_y \setminus U$ es finito y con ello $V_y \setminus (V_y \setminus U) \subseteq U$, de donde U es vecindad de y (usando que X es espacio T_1). Luego, U es vecindad de todos sus puntos, y por tanto, es abierto. ⊠

(iii) → (i) Si X es homeomorfo a un espacio de Mrówka, las propiedades topológicas del último se satisfacen en X, siguiéndose de 2.2.4 que X es hereditariamente localmente compacto. ■

Del resultado anterior es casi inmediata la obtención de las siguientes condiciones equivalentes.

Corolario 2.4.4. *Sea X cualquier espacio infinito, de Hausdorff y separable. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) X es pseudocompacto y hereditariamente localmente compacto.

ii) X es regular, $\operatorname{der}(X)$ *es subespacio discreto de X y cualquier subespacio discreto, abierto y cerrado a la vez en X es finito.*

iii) X es homeomorfo a un espacio de Mrówka generado por una familia casi ajena maximal.

Demostración. Por el Teorema de Kannan y Rajagopalan, lo demostrado en 2.3.4 y como todo espacio de Mrówka es de Tychonoff (véase 2.1.11); particularmente regular, bastará demostrar que si X satisface (ii) entonces X es localmente compacto. Supóngase (ii), claramente cada punto aislado de X tiene una vecindad compacta en X.

Sea $x \in \operatorname{der}(X)$ cualquier elemento, puesto que $\operatorname{der}(X)$ es discreto, existe $U \subseteq X$ abierto con $\{x\} = U \cap \operatorname{der}(X)$. Por regularidad de X, fíjese un abierto V tal que $x \in V \subseteq \operatorname{cl}(V) \subseteq U$ y nótese que entonces $\{x\} = \operatorname{cl}(V) \cap \operatorname{der}(X)$.

Si W es una vecindad abierta de x, entonces $\operatorname{cl}(V) \setminus W \subseteq X \setminus \operatorname{der}(X)$ es discreto y abierto, además es cerrado, por ser intersección de cerrados. De (ii) se sigue la finitud de $\operatorname{cl}(V) \setminus W$, y de esto, la compacidad de $\operatorname{cl}(V)$. Por lo cual, tal subespacio es una vecindad compacta de x en X. ■

Como otra «aplicación» del Teorema 2.4.3 es el siguiente Corolario, se puede caracterizar muy fácilmente cuando un subespacio de un espacio de Mrówka vuelve a ser de Mrówka.

Corolario 2.4.5. *Sea X un espacio topológico infinito, entonces X es homeomorfo a un espacio de Mrówka si y sólo si es homeomorfo a un subespacio abierto de un espacio de Mrówka.*

Demostración. Basta probar la necesidad. Supóngase que $\mathscr{A}$ es una familia casi ajena y que $U \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es un abierto tal que $X \cong U$. Como X es infinito, U es infinito, además por ser $\Psi(\mathscr{A})$ de Hausdorff y hereditariamente localmente compacto, se tiene que U es de Hausdorff y hereditariamente localmente compacto. Por último, como ω es denso en $\Psi(\mathscr{A})$ y U es abierto en $\Psi(\mathscr{A})$, se tiene que $U \cap \omega$ es denso en U; así que U es separable. De lo anterior U, y por tanto X, es homeomorfo a un espacio de Mrówka; a saber $\Psi_{U\cap\omega}(U \cap \mathscr{A})$. ■

A continuación se responden dos preguntas esenciales: ¿cuándo el producto y la suma topológica de espacios de Mrówka, es de nuevo, un espacio de Mrówka?. Comenzaremos analizando qué ocurre con la suma topológica de estos espacios.

Corolario 2.4.6. *Sea $\{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ una familia no vacía de espacios topológicos infinitos; sin pérdida de generalidad ajenos dos a dos. Son equivalentes:*

i) $Y := \coprod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$ *es homeomorfo a un espacio de Mrówka.*

ii) κ *es contable y cada* X_α *es homeomorfo a un espacio de Mrówka.*

Demostración. (i) → (ii) Supóngase que Y es espacio de Mrówka. Como cada $X_\alpha \subseteq Y$ es infinito y abierto en Y, se sigue del Corolario anterior que X_α es de Mrówka. Por otro lado, si κ fuese más que numerable, Y no podía ser separable, pues es la suma de κ espacios no vacíos; así que κ es a lo más numerable.

(ii) → (i) Supóngase que κ es a lo más numerable y para cada $\alpha \in \kappa$, el espacio X_α es homeomorfo a un espacio de Mrówka. Entonces, del Apartado 2.4, cada X_α es (infinito) de Hausdorff, separable, localmente compacto y además el subespacio $\mathrm{der}_{X_\alpha}(X_\alpha) \subseteq X_\alpha$ es discreto.

La suma de espacios de Hausdorff (localmente compactos, respectivamente) es de Hausdorff (localmente compacta, respectivamente); además, por ser cada X_α separable y κ a lo más numerable, resulta que Y es infinito, de Hausdorff, localmente compacto y separable.

Sea $y \in \mathrm{der}_Y(Y)$ cualquiera, por definición de Y, para el único elemento $\alpha \in \kappa$ tal que $y \in X_\alpha$, se tiene $y \in \mathrm{der}_{X_\alpha}(X_\alpha)$. Y como tal subespacio de X_α es discreto, existe $V \subseteq X_\alpha$ abierto tal que $\{y\} = U \cap \mathrm{der}_{X_\alpha}(X_\alpha)$, pero U es abierto también en Y y además $\{y\} = U \cap \mathrm{der}_Y(Y)$. De lo contrario, existe $x \in V \cap \mathrm{der}_Y(Y) \setminus \{y\}$ y consecuentemente $x \notin \mathrm{der}_{X_\alpha}(X_\alpha)$, mostrando que $\{x\}$ es abierto en X_α y por tanto en Y, lo cual es absurdo dada la elección de X. Lo anterior prueba que $\mathrm{der}_Y(Y)$ es discreto, finalizando la prueba en virtud del Teorema 2.4.3. ■

Se explotará mucho la siguiente observación durante el subsecuente Corolario, pues nuevamente, se hará uso del inciso (ii) del Teorema 2.4.3.

Observación 2.4.7. *Sea X un espacio topológico,* $\mathrm{der}(X)$ *es discreto si y sólo si* $\mathrm{der}^2(X) := \mathrm{der}(\mathrm{der}(X)) = \varnothing$.

Como $X \setminus \mathrm{der}(X)$ *es abierto,* $\mathrm{der}(X)$ *es discreto si y sólo si es discreto y cerrado. Lo último sucede sólo si* $\mathrm{der}_{\mathrm{der}(X)}(\mathrm{der}(X)) = \mathrm{der}(X) \cap \mathrm{der}^2(X) = \varnothing$. *Sin embargo, cualquier punto aislado en X, es aislado también en* $\mathrm{der}(X)$*, así que* $\mathrm{der}^2(X) \subseteq \mathrm{der}(X)$*; por lo tanto,* $\mathrm{der}(X)$ *es discreto si y sólo si* $\mathrm{der}^2(X) = \varnothing$.

Del siguiente resultado se desprenderá que la relación entre el producto topológico y los espacios de Mrówka es «poco interesante», en el aspecto de que tal relación es muy restrictiva.

Lema 2.4.8. *Sean X y Y espacios infinitos, entonces $X \times Y$ es homeomorfo a un espacio de Mrówka si y sólo si X y Y son de Mrówka y $X \cong \omega$ o $Y \cong \omega$*

Demostración. Obsérvese la igualdad:

$$\begin{aligned}
\mathrm{der}^2_{X\times Y}(X\times Y) &= \mathrm{der}_{X\times Y}\Big(\mathrm{der}_X(X)\times \mathrm{cl}_Y(Y)\cup \mathrm{cl}_X(X)\times \mathrm{der}_Y(Y)\Big)\\
&= \mathrm{der}_{X\times Y}\Big(\mathrm{der}_X(X)\times Y\cup X\times \mathrm{der}_Y(Y)\Big)\\
&= \mathrm{der}_{X\times Y}\Big(\mathrm{der}_X(X)\times Y\Big)\cup \mathrm{der}_{X\times Y}\Big(X\times \mathrm{der}_Y(Y)\Big)\\
&= \mathrm{der}_X(\mathrm{der}_X(X))\times \mathrm{cl}_Y(Y)\cup \mathrm{cl}_X(\mathrm{der}_X(X))\times \mathrm{der}_Y(Y)\cup\\
&\quad \cup\, \mathrm{der}_X(X)\times \mathrm{cl}_Y(\mathrm{der}_Y(Y))\cup \mathrm{cl}_X(X)\times \mathrm{der}_Y(\mathrm{der}_Y(Y))\\
&= \mathrm{der}^2_X(X)\times Y\cup \mathrm{der}_X(X)\times \mathrm{der}_Y(Y)\cup X\times \mathrm{der}^2_Y(Y)
\end{aligned}$$

Puesto que $X, Y \neq \varnothing$, resulta que $\mathrm{der}^2_{X\times Y}(X\times Y)$ es vacío si y sólo si $\mathrm{der}^2_X(X) = \mathrm{der}^2_Y(Y) = \mathrm{der}_X(X)\times \mathrm{der}_Y(Y) = \varnothing$. Esto es, el subespacio $\mathrm{der}_{X\times Y}(X\times Y) \subseteq X\times Y$

es discreto si y sólo si los subespacios $\mathrm{der}_X(X)$ de X y $\mathrm{der}_Y(Y)$ de Y son discretos y además X es discreto o Y es discreto.

Como X, Y son infinitos, $X \times Y$ es infinito, además las propiedades de separabilidad, axioma de separación de Hausdorff y local compacidad son propiedades finitamente productivas y finitamente factorizables. De esto último, lo comentado en el párrafo anterior, el hecho de que el único espacio de Mrówka discreto es ω y el inciso (ii) del Teorema 2.4.3, se obtiene el resultado. ■

Corolario 2.4.9. *Sea $\{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ una familia de espacios topológicos infinitos; sin pérdida de generalidad, ajenos dos a dos, entonces son equivalentes:*

i) $Y := \prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$ *es homeomorfo a un espacio de Mrówka.*

ii) κ *es finito, cada espacio* X_α *es homeomorfo a un espacio de Mrówka y existe* $\beta_0 \in \kappa$ *tal que si* $\alpha \in \kappa \setminus \{\beta_0\}$, *entonces* $X_\alpha \cong \omega$.

Demostración. Sin perder generalidad, tómese κ como un cardinal.

(i) → (ii) Supóngase que Y es homeomorfo a un espacio de Mrówka, entonces Y es de Hausdorff, Separable y hereditariamente localmente compacto. Todas las propiedades anteriores son factorizables, así que por el por el Teorema de Kannan y Rajagopalan (Teorema 2.4.3), cada X_α es homeomorfo a un espacio de Mrówka.

Ahora, por contradicción, supóngase $\kappa \geq \omega$. Entonces, existen $P, Q \subseteq \kappa$ ajenos e infinitos, de donde:

$$Y = \prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha \cong \prod_{\alpha\in P} X_\alpha \times \prod_{\alpha\in Q} X_\alpha$$

siguiéndose del Lema previo que; sin pérdida de generalidad, $\prod_{\alpha\in P} X_\alpha \cong \omega$. Lo anterior conduce a un absurdo, pues como P es infinito y cada X_α también, resulta que:

$$\left|\prod_{\alpha\in P} X_\alpha\right| = \prod_{\alpha\in P} |X_\alpha| \geq \prod_{\alpha\in P} \aleph_0 = \aleph_0^{|P|} \geq \aleph_0^{\aleph_0} > \aleph_0$$

imposibilitando que $\prod_{\alpha\in P} X_\alpha \cong \omega$ sea biyectable con ω. Así, $\varkappa < \omega$.

Finalmente, si cada X_α es homeomorfo a ω, o $\varkappa = 1$, (ii) se satisface. Supóngase pues que $\varkappa \geq 2$ y que existe $\beta_0 \in \varkappa$ con $X_{\beta_0} \ncong \omega$. Dado que:

$$Y = \prod_{\alpha\in\varkappa} X_\alpha \cong X_{\beta_0} \times \prod_{\alpha\in\varkappa\setminus\{\beta_0\}} X_\alpha$$

se sigue del Lema Previo que $\prod_{\alpha\in\varkappa\setminus\{\beta_0\}} X_\alpha \cong \omega$. Siendo así, cada X_α (con $\alpha \in \varkappa \setminus \{\beta_0\}$) infinito, numerable y discreto; esto es, homeomorfo a ω.

(ii) $\to$ (i) Supóngase que $\varkappa$ es finito, que cada X_α es homeomorfo a un espacio de Mrówka y que $\beta_0 \in \varkappa$ es un elemento tal que si $\alpha \in \varkappa \setminus \{\beta_0\}$, entonces $X_\alpha \cong \omega$. Como $\varkappa \setminus \{\beta\}$ es finito, entonces:

$$Y = \prod_{\alpha\in\varkappa} X_\alpha \cong X_\beta \times \prod_{\alpha\in\varkappa\setminus\{\beta\}} X_\alpha \cong X_\beta \times \prod_{\alpha\in\varkappa\setminus\{\beta\}} \omega = X_\beta \times \omega$$

y a consecuencia del Lema previo, Y es de Mrówka. ■

El siguiente Corolario del Teorema de Kannan y Rajagopalan (Teorema 2.4.3), es un resultado sencillo (y sumamente particular) de metrización.

Corolario 2.4.10. *Si X es infinito, separable, de Hausdorff y hereditariamente localmente compacto. Entonces son equivalentes:*

i) X es hereditariamente separable.

ii) X es metrizable.

Demostración. Dado el Teorema 2.4.3 y la caracterización 2.3.1, basta ver que si $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$, entonces $\Psi(\mathscr{A})$ es hereditariamente separable si y sólo si $\mathscr{A}$ es a lo más numerable.

Para la suficiencia procédase por contrapuesta suponiendo que $\mathscr{A}$ es más que numerable, entonces $\mathscr{A}$ es un subespacio de $\Psi(\mathscr{A})$ discreto y más que numerable, con lo que, no puede ser separable. Para la necesidad, si $\mathscr{A}$ es a lo más numerable, cada subespacio de $\Psi(\mathscr{A})$ es a lo más numerable, y con ello, separable. ■

cite[Def. 9.20, p. 118] La *curiosidad* (comentada posteriormente a 2.3.6) en relación al espacio de ordinales ω^2 tiene su justificación en el anterior Corolario.

2.4.1. Sobre una observacion de Kannan y Rajagopalan

Se finalizará la sección; y con ello el actual capítulo, dando un Corolario importante en relación a las imágenes continuas de los espacios de Mrówka pseudocompactos. Vale mencionar que este resultado aparece en [7, Obs. 1.3-b), p. 6] y se enuncia de la siguiente manera: «*Un espacio X infinito, de Hausdorff es imagen continua de un espacio de Mrówka pseudocompacto si y sólo si existe un denso numerable $D \subseteq X$ de manera de forma que toda sucesión en D contiene una subsucesión convergente.*»

En el documento original no se demuestra el resultado mencionado, sólo se esboza la mitad de la prueba. Para mostrar que este resultado es erróneo (tal cual está enunciado) basta encontrar un espacio de Hausdorff, separable y secuencialmente compacto, que tenga tamaño mayor al continuo. Tal espacio satisfaría la condición escrita en [7, Obs. 1.3-b), p. 6] y no podría ser imágen continua de ningún espacio de Mrówka (todos ellos tienen tamaño menor o igual a $\mathfrak{c}$). Los siguientes comentarios encuentran la consistencia con ZFC de un espacio de esa naturaleza.

Es un hecho conocido que el espacio $2^{\mathfrak{c}}$ no es secuencialmente compacto, se puede considerar entonces el cardinal [9, Teo. III.6.1]:

$$\mathfrak{s} = \min\{\kappa \geq \omega \mid 2^{\kappa} \text{ no es secuencialmente compacto }\}.$$

Pero, seguido de la prueba expuesta en [9, Teo. III.5.4], se desprende que:

Teorema 2.4.11. *Es consistente con* ZFC *que* $\omega_1 < \mathfrak{s}$ *y* $\mathfrak{c} < 2^{\omega_1}$.

A razón de lo anterior, es consistene con ZFC está el hecho de que 2^{ω_1} es un espacio secuencialmente compacto de tamaño mayor a $\mathfrak{c}$. Este espacio es de Hausdorff y cumple la condición enunciada en [7, Obs. 1.3-b), p. 6], pues al ser un producto de menos de $\mathfrak{c}$ espacios separables, es separable. Mostrando que, desde ZFC, es imposible demostrar ese resultado, incluso en la clase de espacios compactos de Hausdorff.

Una manera de «rescatar» el corolario mencionado por Kannan y Rajagopalan es agregando la propiedad de Fréchet como la hipótesis general.

Proposición 2.4.12. *Sea X infinito, de Hausdorff y de Fréchet. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) Existe un denso $D \subseteq X$ de X numerable tal que cada sucesión en D tiene una subsucesión convergente en X.

ii) X es imagen continua de un espacio de Mrówka pseudocompacto.

Demostración. (i) → (ii) Supóngase (i). En el sentido de las definiciones dadas en la Apartado 0.2.1, defínase la colección $\mathrm{CS}(X) := \{\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(D) \mid \forall A \in \mathscr{A}\ (A$ es sucesión convergente en $X)\}$. Nótese que la familia $\mathscr{A}_{D,X\setminus D}$, definda como en 1.2.2, es un elemento de $\mathrm{CS}(X)$. De forma análoga a la demostración del Lema 1.1.10, constrúyase una familia $\mathscr{A}$ que contenga a $\mathscr{A}_{D,X\setminus D}$ y sea $\subseteq$-maximal de $\mathrm{CS}(X)$.

Obsérvese que si $A \in [D]^{\omega}$, en virtud de la hipótesis y de que X es T_1, existe una sucesión convergente $B \subseteq A$ en X. Dada la maximalidad de $\mathscr{A}$ en $\mathrm{CS}(X)$, existe $C \in \mathscr{A}$ que tiene intersección infinita con B; así mismo, con A. Lo anterior muestra que $\mathscr{A} \in \mathrm{MAD}(D)$. Defínase $f : \Psi_D(\mathscr{A}) \to X$ como: $f(x)$, si $x \in D$; y $f(x) = \lim(x)$, si $x \in \mathscr{A}$. Como $\mathscr{A} \supseteq \mathscr{A}_{D,X\setminus D}$, f es sobreyectiva.

Finalmente, sea $U \subseteq X$ abierto en X y supóngase que $x \in f^{-1}[U] \cap \mathscr{A}$. Luego $f(x) = \lim(x) \in U$; como U es un abierto de X y $x \to f(x)$ en X, entonces $x \subseteq^* U$. Pero $x \subseteq D$, así que $x = f[x]$; en consecuencia $x \subseteq^* f^{-1}[U]$. Esto muestra que $f^{-1}[U]$ es abierto en $\Psi_D(\mathscr{A})$; y por tanto, que f es continua.

(ii) → (i) Supóngase que $\mathscr{A} \in \mathrm{MAD}(\omega)$ y que $f : \Psi(\mathscr{A}) \to X$ es sobreyectiva. Puesto que ω es denso en $\Psi(\mathscr{A})$, se tiene que $D := f[\omega]$ es denso en X.

Ahora, si $A \in [D]^{\omega}$ es cualquier sucesión, entonces $f^{-1}[A] \subseteq \omega$ es infinito. Como $\mathscr{A}$ es maximal, es inmediato a 2.3.4, la existencia de una sucesión convergente $B \subseteq f^{-1}[A] \subseteq \omega$. Luego, cualquier biyección $x : \omega \to B$ es una sucesión convergente en $\Psi(\mathscr{A})$, siendo $fx : \omega \to A$ una sucesión convergente en X. ■

Corolario 2.4.13. *Sea X un espacio infinito, de Hausdorff, separable y secuencialmente compacto. Si X es de Fréchet, o regular y hereditariamente Lindelöf, entonces es imagen continua de un espacio de Mrówka pseudocompacto.*

Si X es un espacio metrizable y compacto, en automático se deduce (véase la B.1.5) que es secuencialmente compacto y de Fréchet. Además es de Lindelöf, y debido a B.1.4, separable. Así que:

Corolario 2.4.14. *Todo espacio metrizable y compacto es imagen continua de un espacio de Mrówka (pseudocompacto).*

El cubo de Hilbert, $[0,1]^\omega$, contiene una copia homeomorfa de todos los espacios metrizables y separables [2, Teo. 4.2.10], y más aun, todos sus subespacios son metrizables y separables. Así que tanto él, como todos sus subespacios compactos, son imágenes continuas de espacios de Mrówka generados por familias maximales. En lo anterior caben: el conjunto de cantor 2^ω, el intervalo $[0,1]$ y todo continuo (todo espacio X no vacío, metrizable, compacto y conexo; es decir, los únicos subconjuntos de X abiertos y cerrados a la vez son $\varnothing$ y X); lo cual es cuanto menos, digno de mencionar.

3. El compacto de Franklin

Los espacios conocidos como compactos de Franklin son la extensión unipuntual de los espacios de Mrówka. En el presente capítulo se estudiarán sus cualidades, comenzando por dar una caracterización de los mismos en propiedades topológiacas. Se demostrará que los compactos de Franklin asociados a un espacio de Mrówka pseudocompacto es un espacio secuencial de orden 2.

Se probará que el carácter del punto al infinito en el compacto de Franklin asociado a $\Psi(\mathscr{A})$ *es* $|\mathscr{A}|$*, y se demostrará que este espacio es de Fréchet si y sólo si su familia asociada es maximal en ninguna parte. Esto a su paso dará la negativa, dentro de* ZFC*, a una cuestión relevante que estuvo sin solución durante el siglo XX: ¿es la propiedad de Fréchet finitamente productiva?.*

3.1. Sucesiones en $\mathscr{F}(\mathscr{A})$

Definición 3.1.1. *Sea* $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^\omega$ *cualquiera. El* ***compacto de Franklin generado por*** $\mathscr{A}$ *es la extensión unipuntual del* Ψ*-espacio generado por* $\mathscr{A}$*, se denota por* $\mathscr{F}(\mathscr{A}) := \Psi(\mathscr{A}) \cup \{\infty_{\mathscr{A}}\}$*.*

Cuando el contexto así lo permita, se omitirá el subíndice "$_{\mathscr{A}}$*" y se denotará el punto al infinito simplemente por* ∞*.*

Dado lo demostrado en relación a la compactación de Alexandroff en 0.2.19, el compacto de Franklin resulta ser la compactación de Alexandroff de $\Psi(\mathscr{A})$ únicamente cuando $\mathscr{A}$ sea una familia casi ajena (lo que garantiza que $\Psi(\mathscr{A})$ sea de Hausdorff) *no compacta*, esto es, que no sea simultáneamente finita y maximal (lo cual obliga a que $\Psi(\mathscr{A})$ sea no compacto); a razón de la Proposición 2.2.3.

Consideración 3.1.2. *Durante esta sección:*

i) *Cualquier familia casi ajena que se considere, será no compacta.*

ii) *Para cada subespacio compacto $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$, se denotará por $V(K)$ a la vecindad abierta de ∞: $\{\infty\} \cup \Psi(\mathscr{A}) \setminus K$ (como $\Psi(\mathscr{A})$ es Hausdorff, todos los abiertos al rededor de ∞ son de esta forma).*

iii) *Se utilizarán casi en exceso los resultados obtenidos en 2.2.1 y 2.2.2, así que no se referenciarán de ahora en más.*

iv) *Todas las convergencias y operadores que aparezcan sin subíndices, se asumirán en $\mathscr{F}(\mathscr{A})$.*

Lo primero a observar es lo siguiente: dado que $\Psi(\mathscr{A})$ no es compacto, al ser un espacio de Hausdorff, localmente compacto, se tiene efectivamente que $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ es de Hausdorff, (véase 0.2.19); y en consecuencia, normal. Como es previsible, ciertas propiedades de $\Psi(\mathscr{A})$ «suben» a la topología de $\mathscr{F}(\mathscr{A})$; como ejemplo inmediato, la separabilidad se preserva.

Observación 3.1.3. *Sea $\mathscr{A}$ una familia casi ajena. Entonces $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ es de Hausdorff, compacto, normal, localmente compacto, separable y disperso.*

Comparando con el Corolario 2.1.11 con las observaciones recién hechas, vale mencionar que existen propiedades $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ que tienen una dependencia más compleja con $\Psi(\mathscr{A})$. Iniciarmos mostrando estas disparidades con lo próximo:

Proposición 3.1.4. *Para toda familia $\mathscr{A}$ se tiene que $\chi(\infty) = \aleph_0 + |\mathscr{A}|$.*

Demostración. Es evidente que $\aleph_0 \leq \chi(\infty)$. Ahora, sea $\mathcal{B}$ una base local de ∞ en $\mathscr{F}(\mathscr{A})$. Para cada $y \in \mathscr{A}$ fíjese (AC) un $B_y \in \mathcal{B}$ con $B_y \subseteq V(y \cup \{y\})$. Obsérvese que la asignación $y \longmapsto B_y$ es inyectiva; pues, si $x, y \in \mathscr{A}$ son distintos, entonces $B_x \subseteq U(x \cup \{x\})$ y $B_y \subseteq U(y \cup \{y\})$, de donde $x \in B_y \setminus B_x$. Por lo tanto $|\mathscr{A}| \leq |\mathcal{B}|$, y en consecuencia $\aleph_0 + |\mathscr{A}| \leq \chi(\infty)$.

Para la desigualdad recíproca defínase:

$$\mathcal{B} = \left\{V(B \cup \bigcup h \cup h) \mid (B, h) \in [\omega]^{<\omega} \times [\mathcal{A}]^{<\omega}\right\}$$

y nótese que $\mathcal{B}$ es un conjunto de vecindades de ∞ en $\mathcal{F}(\mathcal{A})$.

Ahora, si $K \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ es compacto, $h := K \cap \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$ y $G := (K \cap \omega) \setminus \bigcup h \subseteq \omega$ son finitos, además $V\big(G \cup \bigcup h \cup h\big) \subseteq V(K)$. Lo cual demuestra que $\mathcal{B}$ es base local para ∞ en $\mathcal{F}(\mathcal{A})$. Dado que $|\mathcal{B}| \leq |[\omega]^{<\omega} \times [\mathcal{A}]^{<\omega}| = \aleph_0 + |\mathcal{A}|$, resulta que $\chi(\infty) \leq \aleph_0 + |\mathcal{A}|$. ■

En seguida a lo anterior se concluye que, para toda familia no compacta e infinita, el espacio $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ no es de primero numerable.

El siguiente Corolario se puede enriquecer con 2.3.1.

Corolario 3.1.5. *Para toda familia no compacta $\mathcal{A}$, el espacio $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ es primero numerable si y sólo si $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0$.*

El próximo Lema es clave por varios motivos; entre ellos, responde a una pregunta que sugiere la discusión previa al Corolario 1.3.11 ¿qué distingue a los subconjuntos de ω casi ajenos con cada elemento de $\mathcal{A}$, con los elementos de $\mathcal{J}^+(\mathcal{A})$?, encontramos la solución a esta interrogante por medio de la topología.

Lema 3.1.6. *Sean $\mathcal{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$ y $B \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ infinito, entonces:*

i) $\infty \in \mathrm{sqcl}(B)$ *si y sólo si* $|B \cap \mathcal{A}| \geq \omega$ *o* $|B \cap \omega| \geq \omega$ *y* $\mathcal{A} \restriction (B \cap \omega) = \emptyset$.

ii) $\infty \in \mathrm{cl}(B)$ *si y sólo si* $|B \cap \mathcal{A}| \geq \omega$ *o* $B \cap \omega \in \mathcal{J}^+(\mathcal{A})$.

Demostración. (i) Para la suficiencia supóngase por absurdo que $\infty \in \mathrm{sqcl}(B)$, esto es (véase 0.2.8), existe $C \in [B]^\omega$ tal que $C \to \infty$; que $B \cap \mathcal{A}$ es finito; y que $a \in \mathcal{A}$ es un elemento tal que $a \cap (B \cap \omega)$ es infinito. Obsérvese que, necesariamente $a \cap C$ es infinito. Como $C \to \infty$ y $a \cap C \subseteq C$ es infinito, ocurre que $a \cap C \to \infty$. Sin embargo, $a \cap C \subseteq a$ y a razón del Lema 2.3.3, $a \cap C \to a$ en $\Psi(\mathcal{A})$; así mismo en $\mathcal{F}(\mathcal{A})$. Lo anterior es imposible, ya que $a \neq \infty$ y $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ es de Hausdorff.

Recíprocamente, si $B \cap \mathscr{A}$ es infinito, existe $C_0 \in [B \cap \mathscr{A}]^{\omega}$; y, si $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es cualquier compacto, entonces $C_0 \setminus V(K) = C_0 \cap K \subseteq K \cap \mathscr{A}$ es finito, mostrando que $C_0 \to \infty$ y que $\infty \in \mathrm{sqcl}(B)$.

Ahora, supóngase que $B \cap \omega$ es infinito y casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$. Si $\infty \notin \mathrm{sqcl}(B)$, entonces $B \cap \omega \not\to \infty$ y existiría un compacto $K_0 \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ tal que $S := (B \cap \omega) \cap K_0$ es infinito. $S \subseteq K$ es un elemento en $\mathscr{I}(\mathscr{A})$; a consecuencia de esto y de 1.3.10, existe cierto $a \in A$ con $S \cap a$ infinito; de donde, $B \cap a$ es infinito, contradiciendo la suposición sobre B. Por tanto, $\infty \in \mathrm{sqcl}(B)$

(ii) Para la suficiencia, supóngase que $\infty \in \mathrm{cl}(B)$ y que $B \cap \mathscr{A}$ es finito. Resulta necesario que $\infty \in \mathrm{cl}(B \cap \omega)$. Si $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es compacto, $(B \cap \omega) \cap V(K) \neq \emptyset$, prohibiendo que $B \cap \omega \subseteq K$, por tanto, $B \cap \omega \notin \mathscr{I}(\mathscr{A})$.

Para la necesidad, sí $B \cap \mathscr{A}$ es infinito, existe $C \subseteq B \cap \mathscr{A}$ numerable y por el inciso anterior $C \to \infty$, de donde $\infty \in \mathrm{cl}(C) \subseteq \mathrm{cl}(B)$. Y, si $B \cap \omega \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ y $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es compacto, resulta que $B \cap \omega \nsubseteq K$ y con ello $B \cap V(K) \neq \emptyset$, mostrando que $\infty \in \mathrm{cl}(B)$. ■

Si $\mathscr{A}$ es una familia maximal, la condición (i) del resultado anterior implica que ninguna sucesión contenida en ω es convergente a ∞. A continuación se establecen las únicas convergencias posibles en el compacto de Franklin.

Corolario 3.1.7. *Sean $\mathscr{A} \in \mathrm{MAD}(\omega)$ infinita y $X \subseteq \mathscr{F}(\mathscr{A})$ numerable. Entonces X es convergente si y sólo si $X \subseteq^* \mathscr{A}$, o para algún $a \in \mathscr{A}$, $X \subseteq^* a$, en cuyo caso: $X \to \infty$, o $X \to a$, respectivamente.*

Demostración. El recíproco es inmediato a razón de 2.3.3 y el Lema previo. Para la suficiencia asúmase que $X \to x$ en el compacto de Franklin. Si $x = \infty$, se sigue del Lema anterior y la maximalidad de $\mathscr{A}$ que $X \subseteq^* \mathscr{A}$. En otro caso, se puede suponer sin pérdida de generalidad que $X \subseteq \Psi(\mathscr{A})$, siguiéndose de 2.3.3 que X debe estar casi contenido en algún elemento de $\mathscr{A}$. ■

El siguiente comportamiento es propio de las familias casi ajenas maximales, muestra que el compacto de Franklin asociado a una familia de este tipo tiene orden secuencial 2. Además se puede verificar fácilmente la diferencia entre las distintas clausuras secuenciales de, por ejemplo, el denso $\omega \subseteq \mathscr{F}(\mathscr{A})$, donde

$\mathrm{sqcl}^1(\omega) = \Psi(\mathscr{A})$ y $\mathrm{sqcl}^2(\omega)\setminus\mathrm{sqcl}^1(\omega) = \{\infty\}$. Se configura también de esta manera, el ejemplo de un espacio secuencial, compacto, de Hausdorff y separable, que no es de Fréchet (recuérdese que un espacio es de Fréchet si y sólo si su orden secuencial es 1).

Corolario 3.1.8. *Sea $\mathscr{A} \in \mathrm{MAD}(\omega)$ infinita, entonces* $\mathrm{so}(\mathscr{F}(\mathscr{A})) = 2$.

Demostración. Nótese que $\mathrm{sqcl}(\omega) \nsubseteq \mathrm{cl}(\omega)$. Efectivamente; como ω es denso en $\Psi(\mathscr{A})$, lo es también en $\mathscr{F}(\mathscr{A})$; por lo que $\infty \in \mathrm{cl}(\omega)$. De darse $\infty \in \mathrm{sqcl}(\omega)$, por el Corolario previo, debería existir $B \subseteq \omega \cap \mathscr{A}$ numerable, lo cual es imposible. Por lo tanto, $\mathrm{so}(\mathscr{F}(\mathscr{A})) \geq 2$.

Ahora, sea $X \subseteq \mathscr{F}(\mathscr{A})$, sin pérdida de generalidad infinito, y sea $x \in \mathrm{cl}(X)$. Dado que ω es discreto, de ocurrir $x \in \omega$, sería necesario que $x \in X \subseteq \mathrm{sqcl}^2(X)$. Por otro lado, si $x \in \mathscr{A}$, como $\{x\} \cup x$ es una vecindad abierta de x, por ser $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ un espacio T_1, debe existir $A \subseteq x \cap X$ numerable, concluyéndose a partir del Lema 2.3.3 que $A \to x$; y por ende, $x \in \mathrm{sqcl}(X) \subseteq \mathrm{sqcl}^2(X)$.

Finalmente, si $x = \infty$, entonces por 3.1.6, $B := X \cap \omega \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$; y como $\mathscr{A}$ es maximal, por el Corolario 1.3.12, existe $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ infinito, sin pérdida de generalidad numerable, tal que para cada $b \in \mathscr{B}$, el conjunto $B \cap b$ es infinito. Por ello, y 2.3.3, $\mathscr{B} \subseteq \mathrm{sqcl}(X)$, desprendiéndose de 2.3.3, que $x \in \mathrm{sqcl}^2(X)$. En todo caso, se ha mostrado que $\mathrm{cl}(X) \subseteq \mathrm{sqcl}^2(X)$ y por ende, $\mathrm{so}(\mathscr{F}(\mathscr{A})) \leq 2$. ■

Corolario 3.1.9. *Para cada $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$ se tiene que* $\mathrm{so}(\mathscr{F}(\mathscr{A})) \leq 2$.

Teorema 3.1.10. *Sea X un espacio topológico infinito, de Hausdorff y separable. X es homeomorfo a un compacto de Franklin generado por una familia maximal infinita si y sólo si existe $x_0 \in X$ tal que: x_0 es el único punto de acumulación de $\mathrm{der}(X)$ y $x_0 \notin \mathrm{sqcl}(X \setminus \mathrm{der}(X))$.*

Demostración. Para la suficiencia basta suponer que $X = \mathscr{F}(\mathscr{A})$. Como $\Psi(\mathscr{A})$ es denso en X, resulta que $\mathrm{der}(X) = \{\infty\} \cup \mathrm{der}_{\Psi(\mathscr{A})}(\Psi(\mathscr{A})) = \{\infty\} \cup \mathscr{A}$. Consecuentemente $\mathrm{der}_{\mathrm{der}(X)}(\mathrm{der}(X)) \subseteq \{\infty\}$, pues $\mathscr{A}$ es un subespacio discreto de $\mathrm{der}(X)$. La contención recíproca ocurre; pues cada subespacio compacto de $\Psi(\mathscr{A})$ tiene intersección finita; particularmente no vacía, con el conjunto (infinito) $\mathscr{A}$. Así que ∞ es el único punto de acumulación de $\operatorname{der}(X)$. Además, $X \setminus \operatorname{der}(X) = \omega$, y dada la prueba del resultado anterior, $\infty \notin \operatorname{sqcl}(\omega)$.

Para la necesitadad, sea $x_0 \in X$ el punto que satisface las condiciones del enunciado. Defínase $Y := X \setminus \{x_0\}$, se mostrará primero que $Y \cong \Psi(\mathscr{A})$ para alguna familia maximal $\mathscr{A}$. Efectivamente, nótese que Y es infinito, de Hausdorff y separable (ya que Y es abierto en X). Haciendo uso del Corolario 2.4.4, es suficiente mostrar lo subsecuente:

i) (Y es regular) Dado que X es compacto, de Hausdorff es normal y particularmente, regular. Esto prueba que $Y \subseteq X$ es regular.

ii) ($\operatorname{der}_Y(Y)$ es discreto) Efectivamente, si $y \in \operatorname{der}_Y(Y)$ es cualquiera, entonces $y \in Y$ es punto de acumulación de X. Como $y \neq x_0$ y x_0 es el único punto de acumulación de $\operatorname{der}_X(X)$, $\{y\}$ es abierto en $\operatorname{der}_X(X)$; y por tanto, $\{y\}$ es abierto en $\operatorname{der}_Y(Y)$. Mostrando que $\operatorname{der}_Y(Y)$ es discreto.

iii) (Si $B \subseteq Y$ es discreto, abierto y cerrado a la vez, entonces B es finito) Supóngase que $B \subseteq Y$ es discreto, abierto y cerrado a la vez. Por ser B discreto y abierto, se da $B \subseteq X \setminus \operatorname{der}(X)$. Ahora, si B es infinito (sin pérdida de generalidad, numerable) se tiene de la hipótesis que $B \not\to x_0$; así, existe una vecindad de x_0; a saber U, de modo que $B \setminus U$ es infinito. Sin embargo, $B \cap U$ es cerrado en vista de que B es cerrado; por ello, tal conjunto es cerrado, discreto e infinito en X; lo que contradice que X sea compacto y T_1. Por ello, es necesario que B sea finito. Concluyéndose de 2.4.4, la existencia de una familia $\mathscr{A} \in \operatorname{MAD}(\omega)$ de modo que $Y \cong \Psi(\mathscr{A})$.

Para finalizar, obsérvese que $\{x_0\}$ no es abierto en X, pues de lo contrario no podría ser punto de acumulación de ninguno de sus subespacios. Así, Y es denso en X y como X es de Hausdorff, compacto, con $X \setminus Y = \{x_0\}$, resulta que X es la compactación de Alexandroff de $Y \cong \Psi(\mathscr{A})$; esto es, $X \cong \mathscr{F}(\mathscr{A})$. ■

3.2. La propiedad de Fréchet

Continuando con los frutos del Lema 3.1.6, se extrae el siguiente Corolario; este relaciona las propiedades de combinatoria de las familias casi ajenas con propiedades de convergencia.

Lema 3.2.1. *Sean* $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$ *y* $X \subseteq \omega$*. Entonces* $\infty \in \mathrm{sqcl}(X)$ *si y sólo si* $\mathscr{A} \upharpoonright X \notin \mathrm{MAD}(X)$.

Demostración. Si $\infty \in \mathrm{sqcl}(X)$, entonces po el Lema 3.1.6, $\mathscr{A} \upharpoonright X = \emptyset$, suiguiéndose en automático de 1.3.10 y 1.3.12 que $\mathscr{A} \upharpoonright X \notin \mathrm{MAD}(X)$.

De forma recíproca, si $\mathscr{A} \upharpoonright X \notin \mathrm{MAD}(X)$, entonces existe $B \in [X]^{\omega}$ casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A} \upharpoonright X$. Nótese que entonces $B \cap X$ es casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$; y por lo tanto, $B \to \infty$, dado el Lema 3.1.6. ■

La contención recíproca de 1.3.10 encapsula exáctamente la conexión que existe entre la combinatoria de $\mathscr{A}$ y la propiedad de Fréchet en su compacto de Franklin asociado.

Corolario 3.2.2. *Para cada* $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}\,A$*, son equivalentes:*

i) $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ *es de Fréchet.*

ii) $\{X \in [\omega]^{\omega} \mid \mathscr{A} \upharpoonright X = \emptyset\} = \mathscr{I}^{+}(\mathscr{A})$.

iii) $\mathscr{A}$ *es maximal en ninguna parte.*

Demostración. (i) → (ii) Supóngase que $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ es de Fréchet, basta probar la contención recíproca de (ii). Si $X \in \mathscr{I}^{+}(\mathscr{A})$, entonces $\infty \in \mathrm{cl}(X) = \mathrm{sqcl}(X)$ por 3.1.6, obteniéndose del mismo resultado que $\mathscr{A} \upharpoonright X = \emptyset$.

(ii) → (iii) Supóngase (ii) y sea $X \in \mathscr{I}^{+}(\mathscr{A})$ cualquiera. Dada la hipótesis, 3.1.6 y el Lema previo, resulta que $\mathscr{A} \upharpoonright X \notin \mathrm{MAD}(X)$.

(iii) → (i) Supóngase que $\mathscr{A}$ es maximal en ninguna parte. Como $\Psi(\mathscr{A})$ es de Fréchet (por ser primero numerable) basta verificar la propiedad de Fréchet en $\infty \in \mathscr{F}(\mathscr{A})$. Sea $X \subseteq \mathscr{F}(\mathscr{A})$ de modo que $\infty \in \mathrm{cl}(X)$, entonces por 3.1.6, $X \cap \mathscr{A}$ es infinito o $X \cap \omega \in \mathcal{I}^+(\mathscr{A})$. Si ocurre lo primero, sea $B \subseteq X \cap \mathscr{A}$ numerable y nótese que entonces $B \to \infty$, lo cual basta para mostrar que $\infty \in \mathrm{sqcl}(X)$. Si ocurre el segundo caso, de la hipótesis se obtiene $A \restriction (X \cap \omega) \notin \mathrm{MAD}(X \cap \omega)$, probando que $\infty \in \mathrm{sqcl}(X \cap \omega) \subseteq \mathrm{sqcl}$ (en virtud 3.2.1). En ambos casos, $\infty \in \mathrm{sqcl}(X)$; y por tanto $\mathrm{sqcl}(X) = \mathrm{cl}(X)$. ∎

Por el Teorema de Simon (1.4.3), cualquier familia maximal de tamaño κ contiene una familia maximal en ninguna parte del mismo tamaño. Considerando entonces cualquier familia maximal de tamaño $\mathfrak{c}$, la Proposición 3.1.4 concede el siguiente ejemplo, testigo de lo «lejos» que están entre sí las propiedades 1 AN y de Fréchet, incluso en la clase de espacios compactos, de Hausdorff.

Ejemplo 3.2.3. *Existe un espacio compacto, de Hausdorff, separable y de Fréchet que contiene un punto de carácter $\mathfrak{c}$.*

La «traducción» a la propiedad de Fréchet dada en 3.2.2 esconde la capacidad de solucionar un problema relevante en topología general; determinar si el producto de dos espacios de Fréchet es, nuevamente, de Fréchet, la respuesta es negativa.

Proposición 3.2.4. *Sea $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ una grieta. Si $\mathscr{A} := \mathscr{B} \cup \mathscr{C}$ es maximal en alguna parte, entonces $M := \mathcal{F}(\mathscr{B}) \times \mathcal{F}(\mathscr{C})$ no es de Fréchet.*

Demostración. Supóngase que $X \in \mathcal{I}^+(\mathscr{A})$ es un conjunto tal que se satisface $\mathscr{A} \restriction X \in \mathrm{MAD}(X)$ y sea $B := \{(n,n) \mid n \in X\}$.

Como $X \in \mathcal{I}^+(\mathscr{A})$ y $\mathscr{B}, \mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}$, resulta inmediato a 1.3.8 que $X \in \mathcal{I}^+(\mathscr{B})$ y $X \in \mathcal{I}^+(\mathscr{C})$. De aquí que $\infty_{\mathscr{B}} \in \mathrm{cl}_{\mathcal{F}(\mathscr{B})}$ y $\infty_{\mathscr{C}} \in \mathrm{cl}_{\mathcal{F}(\mathscr{C})}$, a consecuencia del Lema 3.1.6. Por lo anterior, $(\infty_{\mathscr{B}}, \infty_C) \in \mathrm{cl}_M(B)$.

Ahora, si ocurriese $(\infty_{\mathscr{B}}, \infty_{\mathscr{C}}) \notin \mathrm{sqcl}_M(B)$, en virtud de la continuidad de las funciones proyección, resultaría que $Y \to \infty_{\mathscr{B}}$ en $\mathcal{F}(\mathscr{B})$ y $Y \to \infty_{\mathscr{C}}$ en $\mathcal{F}(\mathscr{C})$. Gracias a 3.1.6, lo anterior desembocaría en que $Y \subseteq X$ es infinito y casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$, así pues, con cada elemento de $\mathscr{A} \restriction X$, contradiciendo la maximalidad de $\mathscr{A} \restriction X$ en X. Así que $\mathrm{sqcl}_M(B) \subsetneq \mathrm{cl}_M(B)$, y M no es de Fréchet. ∎

Combinando con el Teorema de Simon (1.4.3), se tiene la siguiente fuente de contrajemplos: Cada vez que $\mathscr{A}$ sea una familia infinita y maximal (por ello, no compacta), se pueden dar dos familias $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{C}$ no vacías, maximales en ninguna parte, de modo que $\mathscr{A} = \mathscr{B} \cup \mathscr{C}$. Y se desprende de la Proposición previa que $\mathscr{F}(\mathscr{B}) \times \mathscr{F}(\mathscr{C})$ no es de Fréchet; pues claramente $\mathscr{A}$ es maximal en alguna parte, ya que $\omega \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ (véase el Corolario 1.3.5). Además, $\mathscr{F}(\mathscr{B})$ y $\mathscr{F}(\mathscr{C})$ son ambos de Fréchet, en virtud del Corolario 3.2.2. Esta discusión es la prueba del siguiente Corolario:

Corolario 3.2.5. *Existen dos espacios compactos, de Hausdorff, separables y de Fréchet cuyo producto no es de Fréchet.*

Es decir, la propiedad de Fréchet no es (finitamente) productiva; ni siquiera en una clase «tan buena» como lo es la de los espacios compactos, de Hausdorff, separables.

4. Normalidad en los espacios de Mrówka

La Conjetura de Moore (MC)*es el enunciado: todo espacio normal y de Moore es metrizable. Se trata de un problema lanzado a la comunidad matemática por Jones en 1933 que atiende a la cuestión ¿qué requiere un espacio de Moore para ser metrizable?. Este problema marcó un antes y un después para la topología general, consolidándose como uno de los grandes problemas, probablemente de los más importantes, en la topología general del sigo XX.* MC *es, presumiblemente, independiente de* ZFC [13, p. 429-435]. *Lo que haremos en este capitulo será mostrar la independencia de una versión débil de* MC*, la que llamaremos «Conjetura débil de Moore»* (WMC)*: todo espacio separable, normal y de Moore es metrizable.*

En el año 1937 [6, Teo 5, p. 676]*, el propio Jones muestra la consistencia de* WMC*, pero no sería sino hasta 1969 cuando Tall, en su tesis doctoral* [16]*, logra establecer una equivalencia para* WMC *en términos de la existencia de Q-sets no numerables. Silver probó que la existencia de tales espacios es consistente con* ZFC*. La meta de este capítulo es exponer las contribuciones de Jones, Silver y Tall, lo cual culmina con la independencia de* WMC *de la axiomática* ZFC.

4.1. Independencia de WMC

Todo espacio de Mrówka $\Psi(\mathscr{A})$ es de Moore y separable, algo demostrado en 2.1.11; además, cuando $\mathscr{A}$ es más que numerable, resulta que $\Psi(\mathscr{A})$ no es metrizable (véase 2.3.1). Así que, si ocurre WMC, entonces ningún espacio $\Psi(\mathscr{A})$, con $|\mathscr{A}| > \omega$, puede ser normal. Lo que ataña a la presente sección presenta una dificultad mayor, se mostrará el recíproco de la anterior implicación.

Proposición 4.1.1. *Sea $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$, se cumple:*

i) *Si $|\mathscr{A}| \leq \omega$, entonces $\Psi(\mathscr{A})$ es normal.*

ii) *Si $|\mathscr{A}| > \omega$ y $\Psi(\mathscr{A})$ es normal, entonces $\mathscr{A} \notin \mathrm{MAD}(\omega)$ y $|\mathscr{A}| < \mathfrak{c}$.*

Demostración. (i) Por la caracterización 2.3.1, todo espacio de Mrówka numerable es metrizable, particularmente normal (váse B.1.1).

(ii) Supóngase que $\mathscr{A}$ es infinita y que $\Psi(\mathscr{A})$ es normal. Si $\mathscr{A}$ fuera maximal, entonces por 2.3.4 y 2.2.3, se tiene que $\Psi(\mathscr{A})$ es pseudocompacto pero no numerablemente compacto. Lo cual (por 0.2.16) imposibilita que $\Psi(\mathscr{A})$ sea normal. Por tanto, $\mathscr{A}$ no es maximal.

Nótese que $\mathscr{A}$ es un subespacio cerrado y discreto de $\Psi(\mathscr{A})$ de tamaño $\mathfrak{c}$ (en virtud de 2.1.7). Así, de la separabilidad y normalidad de $\Psi(\mathscr{A})$, junto con el Lema de Jones (0.2.6), se obtiene que $2^{|\mathscr{A}|} \leq 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, lo cual obliga a que $|\mathscr{A}| < \mathfrak{c}$. ∎

La proposición anterior dicta que, para encontrar espacios de Mrówka que atestiguen la falsedad de WMC, es necesario buscar entre aquellos generados por familias casi ajenas de tamaño estrictamente entre $\aleph_0$ y $\mathfrak{c}$, consecuentemente:

Corolario 4.1.2. *Si* CH *ocurre, entonces ningún espacio de Mrówka más que numerable puede ser normal.*

Proposición 4.1.3. *Sean $\mathscr{A}$ una familia casi ajena y $F, G \subseteq \Psi(\omega)$ cerrados ajenos. Son equivalentes:*

i) *F y G se separan por abiertos ajenos de $\Psi(\mathscr{A})$.*

ii) *$F \cap \mathscr{A}$ y $G \cap \mathscr{A}$ se separan por abiertos ajenos de $\Psi(\mathscr{A})$.*

iii) *La grieta $(F \cap \mathscr{A}, G \cap \mathscr{A})$ está separada.*

Demostración. La implicación (i) → (ii) es inmediata.

(ii) → (iii) Supóngase que $U, V \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ son abiertos ajenos con $F \cap \mathscr{A} \subseteq U$ y $G \cap \mathscr{A} \subseteq U$. Para cada $a \in F \cap \mathscr{A} \subseteq U$ se tiene que $a \subseteq^* U$. Consecuentemente, para cada $b \in G \cap \mathscr{A} \subseteq V$ ocurre que $b \cap U =^* V \cap U = \varnothing$. Por lo tanto, U es separador de $F \cap \mathscr{A}$ y $G \cap \mathscr{A}$.

(iii) → (i) Supóngase que $D \subseteq \omega$ es separador de $F \cap \mathscr{A}$ y $G \cap \mathscr{A}$. Nótese que $F \subseteq U := F \cup D \setminus G$ y que U es abierto. En efecto, si $a \in U \cap \mathscr{A} \subseteq F \cap \mathscr{A}$, entonces $a \subseteq^* D$ y, por ser G cerrado y ajeno a F, $a \subseteq^* \Psi(\mathscr{A}) \setminus G$. Luego, $a \subseteq^* D \setminus G \subseteq U$.

Como D es separador de $F \cap \mathscr{A}$ y $G \cap \mathscr{A}$; $\omega \setminus D$ es separador de $G \cap \mathscr{A}$ y $F \cap \mathscr{A}$, y resulta análogo que $G \subseteq V := G \cup (\omega \setminus D) \setminus F$ y V es abierto. Lo anterior demuestra que F y G se separan por los abiertos ajenos U y V. ■

Del Lema 2.1.7 y la Proposición 1.4.6 se desprende la posterior equivalencia:

Corolario 4.1.4. *Para cada familia casi ajena $\mathscr{A}$ son equivalentes:*

i) $\Psi(\mathscr{A})$ *es normal.*

ii) Para cada $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$, *la grieta* $(\mathscr{B}, \mathscr{A} \setminus \mathscr{B})$ *está separada.*

La traducción de la Proposición 4.1.1 en términos «combinatorios» es el siguiente Corolario; mismo que por cierto, prueba el Ejemplo 1.4.8 de la Apartado 1.4.2.

Corolario 4.1.5. *Sea* $\mathscr{C} \in \mathrm{AD}(\omega)$, *entonces:*

i) Si $|\mathscr{C}| \leq \aleph_0$, *toda grieta contenida en* $\mathscr{C}$ *está separada.*

ii) Si $\mathscr{C}$ *es infinita y,* $|\mathscr{C}| = \mathfrak{c}$ *o* $\mathscr{C} \in \mathrm{MAD}(\omega)$*; entonces* $\mathscr{C}$ *contiene una grieta que no está separada.*

Hay una diferencia notable entre los conceptos de familia no separable y familia inseparable, en términos topológicos, las familias inseparables (definidas en 1.4.7) generan espacios de Mrówka más que no normales. Cualquier familia de Luzin (Definición 1.4.10) es inseparable, lo cual regala un ejemplo «canónico» dentro de ZFC de espacio separable, de Moore y no normal de tamaño $\mathfrak{c}$.

Corolario 4.1.6. *Particularmente, existe un espacio de Mrówka con tamaño $\aleph_1$, no es normal; a saber, el generado por una familia de Luzin.*

Ahora, por lo demostrado en el Corolario 1.4.15, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 4.1.7. *Sea $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$. Si $\Psi(\mathscr{A})$ es normal, entonces $\mathscr{A}$ no contiene n-grietas de Luzin.*

Dado todo lo realizado hasta el momento, el corolario anterior es relativamente inmediato; en contraste, su recíproco logra caracterizar por completo la normalidad de los espacios de Mrówka, en ZFC + MA, [3, Teo. 9]. Tal resultado es meritorio de un estudio mucho más profundo y dedicado, mismo que escapa a los propósitos de este trabajo.

4.1.1. Consistencia de WMC

Siguiendo la técnica de Tall, probaremos la independencia de WMC de ZFC utilizando, a modo de intermediario, los siguientes espacios:

Definición 4.1.8. *Un Q-set es un espacio metrizable, separable y tal que todos sus subespacios son de tipo G_δ (equivalentemente, todos sus subespacios son de tipo F_σ).*

Como primer familia de ejemplos de espacios Q-set se tiene:

Ejemplo 4.1.9. *Cualquier espacio X metrizable, a lo más numerable, es un Q-set. Efectivamente, nótese que X es separable. Y además, si $A \subseteq X$ es cualquiera, entonces $A = \bigcup \left\{\{a\} \mid a \in X\right\}$ es de tipo F_σ.*

Se comenzará por observar que todo espacio Q-set es, salvo homeomorfismos, un subespacio de $\mathbb{R}$ (y del conjunto de Cantor, 2^ω). El siguiente Lema, incluido en [10, Teo. 1, p. 286] por Kuratowski; se enunciará y demostrará con terminología moderna.

Lema 4.1.10. *Sea X un espacio metrizable por la métrica d. Si $|X| < \mathfrak{c}$, entonces X es cero-dimensional.*

Demostración. Supóngase que $|X| < \mathfrak{c}$. Basta corroborar que cada $x \in X$ admite una base local de abiertos y cerrados. Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$.

Supóngase ahora que para cada $\delta \in (0, \varepsilon)$, el conjunto $\mathrm{fr}(B(x, \delta))$ es no vacío, y fíjese (AC) un elemento $x_\delta \in \mathrm{fr}(B(x, \delta)) \subseteq X$. Como $|(0, \varepsilon)| = \mathfrak{c}$, la asignación $\delta \to x_\delta$ no puede ser inyectiva. Consecuentemente, existen distintos $\delta, \delta' \in (0, \varepsilon)$ de modo que $\mathrm{fr}(B(x, \delta)) \cap \mathrm{fr}(B(x, \delta')) \neq \varnothing$. Pero esto es imposible, dado que $\delta \neq \delta'$. Por lo tanto, para cada $\varepsilon > 0$ se puede fijar (AC) cierto $\delta_\varepsilon \in (0, \varepsilon)$ tal que $\mathrm{fr}(B(x, \delta_\varepsilon)) = \varnothing$; esto es, $B(x, \delta_\varepsilon)$ es abierto y cerrado a la vez.

Por construcción, $\{B(x, \delta_\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ es una base local para x en X. ■

Proposición 4.1.11. *Para todo espacio X son equivalentes:*

i) *X es un Q-set.*

ii) *X se encaja en 2^ω y todos sus subespacios son de tipo G_δ.*

iii) *X se encaja en $\mathbb{R}$ y todos sus subespacios son de tipo G_δ.*

Demostración. Todo espacio metrizable y separable tiene peso numerable (a razón de B.1.4), así que cualquier espacio metrizable, separable y cero-dimensional se encaja en 2^ω (Proposición 0.2.3). Además, 2^ω es subespacio de $\mathbb{R}$, y todo subespacio de $\mathbb{R}$ es metrizable y separable. Así que, basta probar que todo Q-set es cero-dimensional.

Seas X un Q-set, como X es metrizable y separable, entonces es 2 AN. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable para X. Como X es Q-set, para cada $A \subseteq X$ fíjese (AC) una colección a lo más numerable de abiertos $\mathcal{U}_A$ de modo que $A = \bigcap \mathcal{U}_A$. Y como $\mathcal{B}$ es base; de nuevo haciendo uso de AC, para cada abierto $U \in \mathcal{U}_A$ fíjese $\mathcal{B}_U \subseteq \mathcal{B}$ de modo que $U = \bigcup \mathcal{B}_U$.

Lo anterior permite definir $\mathcal{P}(X) \to [\mathcal{P}(\mathcal{B})]^{\leq\omega}$ por medio de la correspondencia: $A \longmapsto \{\mathcal{B}_U \mid U \in \mathcal{U}_A\}$. Tal asignación es inyectiva; en efecto, si $A, B \subseteq X$ y $\{\mathcal{B}_U \mid U \in \mathcal{A}\} = \{\mathcal{B}_U \mid U \in B\}$, resulta que:

$$\mathcal{U}_A = \{\bigcup \mathcal{B}_U \mid U \in \mathcal{U}_A\} = \{\bigcup \mathcal{B}_U \mid U \in \mathcal{U}_B\} = \mathcal{U}_A$$

y con ello $A = \bigcap \mathcal{U}_A = \bigcap \mathcal{U}_B = B$. De esta manera:

$$2^{|X|} \leq \left|[\mathcal{P}(\mathcal{B})]^{\leq\omega}\right| \leq \left(2^{|B|}\right)^{\aleph_0} \leq \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

Por ello $|X| < \mathfrak{c}$ la cero-dimensionalidad de X se obtiene del Lema previo. ■

Observación 4.1.12. *Todo Q-set tiene tamaño menor que $\mathfrak{c}$. Consecuentemente,* CH *implica que todos los espacios Q-set son a lo más numerables.*

El paralelismo del resultado anterior con el Corolario 4.1.2 no es coincidencia. La meta ahora es mostrar que la existencia de Q-sets no numerables es equivalente a la existencia de espacios de Mrówka no numerables y normales; más aún, si estos espacios no existen, entonces WMC se satisface.

Lema 4.1.13. *Supóngase que X es un espacio normal, de Moore, no metrizable y que $D \subseteq X$ es denso a lo más numerable; entonces existe $A \subseteq X \setminus D$ más que numerable, discreto y cerrado en X.*

Demostración. A consecuencia del Tereoma de Bing (Teorema B.1.8), X no es colectivamente normal. Sea $\mathcal{A}$ una familia discreta de cerrados de X, cuyos elementos no se pueden separar por abiertos ajenos, como X es normal, $\mathcal{A}$ es infinita. De igual forma, por normalidad de X, para cada par de cerrados ajenos, F y G, elíjanse (AC) abiertos ajenos $W(F,G), S(F,G)$ con $F \subseteq W(F,G)$ y $G \subseteq S(F,G)$.

Afirmación. $\mathcal{A}$ es más que numerable.

Demostración. Supóngase que $\mathcal{A}$ está enumerado como $\{A_n \mid n \in \omega\}$. Por ser $\mathcal{A}$ una familia discreta de cerrados de X, si $n \in \omega$, entonces el conjunto $B_n := \bigcup\{A_m \mid m > n\}$ es cerrado.

Por recursión defínanse $U_0 := W(A_0, B_0)$ y $V_0 := S(A_0, B_0)$; y, para cada $n \in \omega$, $U_{n+1} := W(A_{n+1}, B_{n+1}) \cap V_n$ y $V_{n+1} = S(A_{n+1}, B_{n+1}) \cap V_n$.

Por construcción, $\{U_n \mid n \in \omega\}$ es una familia de abiertos, ajenos por pares tales que para cada $n \in \omega$ se tiene $A_n \subseteq U_n$. Así, los elementos de $\mathcal{A}$ se separan por abiertos ajenos; contradiciendo su elección. $\boxtimes$

Dada la afirmación anterior, y fijando para cada $a \in \mathcal{A}$ un elemento $x_a \in \mathcal{A}$, se obtiene un conjunto mas que numerable $B := \{x_a \mid a \in \mathcal{A}\}$; mismo que por ser $\mathscr{A}$ familia discreta y X de Hausdorff, resulta ser cerrado y discreto.

Por último nótese que cada subespacio de B es discreto y cerrado en X; pues B es discreto y cerrado en X. Particularmente, $A := B \setminus D$ es discreto, discreto en X y no numerable (pues B es más que numerable y D es numerable). ■

El siguiente teorema aparece en la tesis doctoral de Franklin David Tall (ver [16]), y es la pieza clave para atacar la Conjetura Débil de Moore.

Teorema 4.1.14 (Tall). *Si κ es un cardinal infinito, son equivalentes:*

i) Existe un espacio de Moore, normal, no metrizable de tamaño κ.

ii) Existe un espacio de Mrówka normal de tamaño κ.

iii) Existe un Q-set de tamaño κ.

Demostración. (i) → (ii) Supóngase que X es un espacio, normal, de Moore y no metrizable de tamaño κ y sea fíjese $D \subseteq X$ denso numerable de X. Por 4.1.13, D es infinito y existe un subespacio $A \subseteq X \setminus D$ más que numerable; discreto y cerrado de X. Como X es de Hausdorff y primero numerable, considérese $\mathscr{A}_{D,A} = \{A_x \in [D]^\omega \mid x \in A\}$; la familia de sucesiones en D convergentes a A (definida en 1.2.2), donde cada A_x converge a x. Por la Proposición 1.2.1, $|\mathscr{A}_{D,A}| = \kappa$ y así mismo, $\Psi_D(\mathscr{A}_{D,A}) = \kappa$.

Sea $\mathscr{B} := \{A_x \mid x \in F\} \subseteq \mathscr{A}_{D,A}$ cualquiera. Como A es discreto y cerrado en X, cualquiera de sus subespacios es cerrado en X; en consecuencia y por normalidad de X, existen abiertos $U, V \subseteq X$ ajenos, de modo que $F \subseteq U$ y $A \setminus F \subseteq V$. Si $x \in F$, entonces $A_x \to x$ y por ello $A_x \subseteq^* U$, similarmente, si $y \in A \setminus F$, entonces $A_y \subseteq^* V \subseteq X \setminus U$; de donde $A_y \cap U^* = \varnothing$.

Por tanto $(\mathscr{B}, \mathscr{A}_{D,A} \setminus \mathscr{B})$ está separada, obteniéndose de 4.1.4 la normalidad de $\Psi_D(\mathscr{A}_{D,A})$.

(ii) → (iii) Si $\kappa = \omega$, la implicación resulta vacua; pues todo subespacio numerable de 2^ω es un Q-set (Ejemplo 4.1.9). Supóngase pues, que $\Psi(\mathscr{A})$ es un espacio normal de tamaño $\kappa > \omega$; siendo necesario que $|\mathscr{A}| = \kappa$.

Para cada $C \subseteq \omega$ denótese por $\varphi_C \in 2^\omega$ a la función característica de C y sea $X := \{\varphi_A \in 2^\omega \mid A \in \mathscr{A}\}$. Obsérvese que X es un espacio metrizable, separable (por ser subespacio del metrizable, separable, 2^ω) de tamaño κ.

Sea $Y = \{\varphi_A \in X \mid A \in \mathscr{B}\} \subseteq X$ cualquiera. Dado el Corolario 4.1.4, la normalidad de $\Psi(\mathscr{A})$ implica la existencia de un separador de $\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}$ y $\mathscr{B}$; de este modo:

$$\begin{aligned} Y &= \{\varphi_A \in X \mid A \in \mathscr{B}\} \\ &= \{\varphi_A \in X \mid A \cap D \neq^* \emptyset\} \\ &= \{\varphi_A \in X \mid \forall n \in \omega\, (A \cap D \nsubseteq n)\} \\ &= \bigcap_{n \in \omega} \{\varphi_A \in X \mid A \cap D \nsubseteq n\} \end{aligned}$$

Ahora, si $n \in \omega$ y $\varphi \in U_n := \{\varphi_A \in X \mid A \cap D \nsubseteq n\}$ es cualquiera, existe cierto $k \in (A \cap D) \setminus n$. Por ello, si $x = \varphi_B \in X$ es tal que $x(k) = 1$, entonces $k \in (B \cap D) \setminus n$ y $B \cap D \nsubseteq n$; es decir $f \in U_n$. Mostrando así que $\{x \in X \mid x \restriction \{k\} = \varphi \restriction \{k\}\} \subseteq U_n$. Por lo tanto, cada U_n es abierto en X. De esta manera, cualquier $Y \subseteq X$ es G_δ en X y X es un Q-set.

(iii) $\to$ (i) Supóngase que X es un Q-set de tamaño κ. En virtud del Proposición 4.1.11, supóngase sin pérdida de generalidad que $X \subseteq 2^\omega$. Para cada $E \subseteq X$ considérese $\mathscr{A}_E := \{A_x \in [N]^\omega \mid x \in E\}$, la familia de las ramas de E en N (definida en 1.2.5); donde $N := 2^{<\omega}$ y cada A_x es el conjunto $\{x \restriction n \mid n \in \omega\} \subseteq N$. Puesto que $|X| = \kappa$, del Definición 1.2.5 se sigue que $|\mathscr{A}_X| = \kappa$, y con ello $|\Psi_N(\mathscr{A}_X)| = \kappa$.

Sea $Y \subseteq X$ cualquiera. Como X es un Q-set, $Y = \bigcup\{F_n \mid n \in \omega\}$ y $X \setminus Y = \bigcup\{G_n \mid n \in \omega\}$; donde cada conjunto F_n y G_n es cerrado en $X \subseteq 2^\omega$. Para cada $n \in \omega$ defínanse los conjuntos:

$$\begin{aligned} D_n &:= \left(\bigcup \mathscr{A}_{F_n}\right) \setminus \bigcup_{m<n} \left(\bigcup \mathscr{A}_{G_m}\right) \\ L_n &:= \left(\bigcup \mathscr{A}_{G_n}\right) \setminus \bigcup_{m \leq n} \left(\bigcup \mathscr{A}_{F_m}\right) \end{aligned}$$

y sea $D := \bigcup\{D_n \mid n \in \omega\}$. Nótese que por construcción, si $m, n \in \omega$, se tiene $D_n \cap L_m = \emptyset$; consecuentemente, cada L_n es ajeno con D.

Sea $y \in A_Y$; entonces existe $n \in \omega$ de modo que $y \in F_n$. Por otra parte, cada $G_m \subseteq X \setminus Y$ (con $m < n$) es cerrado en X, por lo que existe $s \in \omega$ de modo que:

$$\{x \in X \mid x \upharpoonright s = y \upharpoonright s\} \subseteq X \setminus \bigcup_{m<n} G_m$$

Por ello, si $v \in A_y \setminus D_n \subseteq F_n$, existen $x \in F_n$ y $k \in \omega$ de modo que $v = x \upharpoonright k$. Así que $x \in \bigcup \mathscr{A}_{F_n}$; y como $v \notin D_n$, existen $m < n$ y $g \in G_m$ de manera que $v = y \upharpoonright k = g \upharpoonright k$. Y a razón de ello, no puede ocurrir $s \subseteq k$. Por lo tanto $k < s$ y $A_y \setminus D_n \subseteq 2^{<s} =^* \varnothing$; esto es, $A_y \subseteq^* D_n \subseteq D$.

Similarmente, para cada $y \in X \setminus Y$ existe un $n \in \omega$ tal que $A_y \subseteq^* L_n \subseteq N \setminus D$; de donde, $A_y \cap D^=\varnothing$. Así que D es separador de $\mathscr{B}$ y $\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}$; probando por el Corolario 4.1.4 la normalidad de $\Psi_N(\mathscr{A}_X)$. ■

Es inmediato al Teorema 4.1.14 (y a 4.1.2, o bien, 4.1.12) la siguiente consecuencia:

Corolario 4.1.15. *Bajo* CH *se cumple* WMC*, y con ello:*

i) Ningún espacio de Mrówka no numerable es normal.

ii) Ningún Q-set es más que numerable.

A razón de lo anterior, WMC *es consistente con* ZFC*.*

4.1.2. Consistencia de ¬WMC

Para la segunda parte de la prueba de independencia de WMC se hará uso; como es previsible desde anteriores capítulos, de la negación de CH con el Axioma de Martin. Se comenzará observando cómo se pueden caracterizar a todos los Q-sets haciendo uso del Lema de Solovay (Lema 1.4.21) y MA.

Lema 4.1.16. *Sea X un espacio metrizable y separable. Entonces existe una base $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \omega\}$ para X de modo que $\mathscr{A} = \{A_x \mid x \in X\}$ es familia casi ajena; donde para cada $x \in X$, $A_x = \{n \in \omega \mid x \in B_n\}$.*

Demostración. Por el teorema de metrización de Arhangel'skii (Teorema B.1.9), X admite una base regular (véase la Apartado B.1) $\mathcal{C}$. Como X es metrizable, el Corolario B.1.4 prueba que es 2 AN, siguiéndose de 0.2.2, que existe una base $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \omega\} \subseteq \mathcal{C}$. Osérvese que $\mathcal{B}$ sigue siendo una base regular.

Dados $x, y \in X$ son distintos, sean U, V abiertos ajenos que separan a x y y. Por regularidad de $\mathcal{B}$, existe $W \subseteq U$ abierto de manera que $x \in W$ y

$$\mathcal{B}_W := \{n \in \omega \mid B_n \cap W \neq \varnothing \wedge B_n \setminus W \neq \varnothing\} =^* \varnothing .$$

Luego, el conjunto $A_x \cap A_y \subseteq \mathcal{B}_W$ es finito. ∎

Proposición 4.1.17 (Tall, Silver). *Bajo* MA*, un espacio X es Q-set si y sólo si es homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{R}$ de tamaño menor que $\mathfrak{c}$.*

Demostración. Supóngase MA. La suficiencia viene dada por 4.1.14 y 4.1.11.

Para la necesidad supóngase que $X \in [\mathbb{R}]^{<\mathfrak{c}}$, sin pérdida de generalidad más que numerable (véase Ejemplo 4.1.9). Como X es metrizable y separable, tómense $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \omega\}$ y $\mathscr{A} = \{A_x \mid x \in X\}$ como en el Lema previo. Sean $Y \subseteq X$ y $\mathscr{B} := \{A_y \in \mathscr{A} \mid y \in Y\}$.

Como $|\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}|, |\mathscr{B}| < \mathfrak{c}$ y se cumple MA, del Lema de Solovay (1.4.21) se desprende la existencia de un subconjunto $D \subseteq \omega$ tal que, si $y \in Y$ y $x \in X \setminus Y$, entonces $A_y \cap D \neq^* \varnothing$ y $A_x \cap D =^* \varnothing$. Para cada $n \in \omega$ defínase el conjunto $U_n := \bigcup \{B_m \in \mathcal{B} \mid m \in D \setminus n\}$.

Nótese que $Y = \bigcap \{U_n \mid n \in \omega\}$. En efecto, si $y \in X \setminus Y$ y $n \in \omega$ son cualesquiera, $A_y \cap D$ es infinito, y por ello, existe $m \in D \setminus n$ tal que $y \in B_m$. En consecuencia $y \in U_n$, y así $Y \subseteq \bigcap \{U_n \mid n \in \omega\}$.

De manera similar, si $x \in X \setminus Y$, $A_x \cap D$ es finito y existe $n \in \omega$ de modo que $A_x \cap D \subseteq n$. Por lo que para cada $m > n$ se tiene que $x \notin B_m$; luego, $x \notin U_n$. Lo anterior muestra que $X \setminus Y \subseteq X \setminus \bigcap \{U_n \mid n \in \omega\}$, y así $Y = \bigcap \{U_n \mid n \in \omega\}$ es de tipo G_δ. Por lo que X es un Q-set. ∎

De la proposición recién mostrada, el Teorema 4.1.14 y el Corolario 4.1.15 surge el resultado que pone punto final a la Conjetura Débil de Moore.

Corolario 4.1.18. *Bajo* MA*; para cada cardinal infinito $\kappa < \mathfrak{c}$ existe un espacio de Mrówka normal, de tamaño κ. Consecuentemente:*

i) *Bajo* MA $+\neg$ CH*; existen tales espacios.*

ii) $\neg$ WMC *(y por ello,* $\neg$ MC*) es consistente con* ZFC.

iii) WMC *es independiente de* ZFC.

Contrastable con 4.1.17 es el hecho de que aun no se ha dado una caracterización para la normalidad de los espacios de Mrówka. Resulta seductor conjeturar que cualquier espacio de Isbell-Mrówka de tamaño menor al continuo es normal. Sin embargo, el Corolario 4.1.6 muestra que; bajo MA $+\neg$ CH, existe un espacio de Mrówka, no normal y de tamaño menor al continuo.

El comentario anterior deja como consecuencia la falsedad de que cualquier familia casi ajena sea esencialmente igual (en el sentido de la Definición 2.3.7) a alguna de las definidas en 1.2.5; de lo contrario, cualquier espacio espacio de Isbell-Mrówka de tamaño menor al continuo sería es normal, cosa que es falsa, en ZFC.

A. Lógica y Axioma de Martin

A.1. Consistencia relativa

A continuación se exponen, de forma sumamente laxa, los conceptos necesarios para definir la consistencia de un enunciado respecto a un conjunto de enunciados. Todo lo subsecuente será relativo al lenguaje de la teoría de conjutnos, entenderemos por *fórmula* a cualquier sentencia, predicado, o «proposición» escrita con los símbolos $(,), \forall, \exists, \rightarrow, \neg, \wedge, \vee, \leftrightarrow, \in, x, y, z, \dots$ y $\mathscr{L}_{\mathrm{TC}}$ será el conjunto de fórmulas de la teoría de conjuntos. Cuando $\Sigma, \Lambda \subseteq \mathscr{L}_{\mathrm{TC}}$, será común escribir $\Sigma + \Lambda$ para referirse a $\Sigma \cup \Lambda$, cuando $\Lambda = \{\lambda\}$, se escribirá únicamente $\Sigma + \lambda$.

Un *axioma de Hilbert* es cualquier fórmula de la forma:

Ax. 1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$.

Ax. 2. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma)$.

Ax. 3. $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha)$.

Una *regla de inferencia* es una operación parcial sobre $\mathscr{L}_{\mathrm{TC}}$; y particularmente, nos interesarán las reglas de inferencia:

$$\begin{aligned} \mathrm{Gen} &: \varphi \longmapsto \forall x\,(\varphi) \\ \mathrm{MP} &: (\varphi, \varphi \rightarrow \sigma) \longmapsto \sigma \end{aligned}$$

Dados un $\varphi \in \mathscr{L}_{\mathrm{TC}}$ y $\Sigma \subseteq \mathscr{L}_{\mathrm{TC}}$, diremos que Σ *deriva* a φ, denotado $\Sigma \vdash \varphi$, si y sólo si existe una sucesión finita de enunciados $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ de manera que:

i) $\varphi_n = \varphi$.

ii) Para cada $i \leq n$ ocurre alguna de las siguientes:

a) $\varphi_i \in \Sigma$,

b) φ_i es un axioma de Hilbert,

c) Existen $j < i$ con $\varphi_i = \mathrm{Gen}(\varphi_j)$, o

d) Existen $k, j < i$ con $\varphi_i = \mathrm{MP}(\varphi_j, \varphi_k)$.

En tal caso, $(\varphi_i)_{i \leq n}$ es una *prueba* (o *demostración*) *formal* de φ a partir de Σ.

Un *enunciado* es una fórmula que no tiene *variables libres*, esto es, tal que todas sus variables están cuantificadas, universal o existencialmente. Una *teoría* es un conjunto de enunciados. Por ejemplo, ZFC $\subseteq \mathscr{L}_{\mathrm{TC}}$ es la teoría que consta, como ya se ha mencionado, de ZF $\subseteq \mathscr{L}_{\mathrm{TC}}$ junto con el Axioma de Elección, AC $\in \mathscr{L}_{\mathrm{TC}}$; esto es ZFC $=$ ZF $+$ AC.

Sea $\Sigma \subseteq \mathscr{L}_{\mathrm{TC}}$ una teoría. Un *teorema* de Σ es una fórmula α tal que $\Sigma \vdash \alpha$. Se dice que Σ es *consistente* cuando para ningún $\alpha \in \mathscr{L}_{\mathrm{TC}}$ ocurre $\Sigma \vdash \alpha$ y $\Sigma \vdash \neg\alpha$. Un enunciado σ es *consistente* con Σ cuando $\Sigma \nvdash \neg\sigma$, y es *independiente* de Σ si tanto σ como $\neg\sigma$ son consistentes con Σ. Un subconjunto de enunciados $\Sigma \subseteq \mathscr{L}_{\mathrm{TC}}$ es un *conjunto de axiomas* (y sus elementos son *axiomas*) cuando:

i) Σ es consistente, y

ii) Cada $\sigma \in \Sigma$ es independiente de $\Sigma \setminus \{\sigma\}$.

Es un hecho que si Σ es consistente y σ es consistente con Σ, entonces $\Sigma \cup \sigma$ sigue siendo consistente. Además, Σ es inconsistente si y sólo si para cada $\alpha \in \mathscr{L}_{\mathrm{TC}}$ ocurre $\Sigma \vdash \alpha$.

En el mundo de la lógica existen diversas, muy diversas y sofisticadas, técnicas para demostrar la consistencia relativa de cierto enunciado respecto un conjunto de una teoría. Para este trabajo nos limitaremos a utilizar que: siempre que σ sea consistente con Σ y $\Sigma + \sigma \vdash \varphi$, se tiene que φ es consistente con Σ.

Todas las demostraciones de consistencia, e independencia, que figuran en este texto aluden al párrafo anterior más la suposición de que ZFC es consistente. Como CH y MA son independientes de ZFC [8, algo], cualquier teorema σ de ZFC $+$ CH, ZFC $+\neg$ CH, ZFC $+$ MA o ZFC $+\neg$ MA, será consistente con ZFC.

A.2. Axioma de Martin

Durante todo lo que resta del capítulo, $\mathbb{P} = (P, \leq)$ será un conjunto parcialmente ordenado. Dos elementos $p, q \in P$ son *compatibles* cuando existe $r \in P$ de forma que $r \leq p$ y $r \leq p$, esta situación se denotará por $p \parallel q$; en caso de que $p \nparallel q$, diremos que p y q son *incompatibles*, lo que se denotará $p \perp q$.

Una *anticadena* de $\mathbb{P}$ es un subconjunto $A \subseteq P$ de elementos incompatibles dos a dos. Cuando cualquier anticadena de $\mathbb{P}$ sea contable, diremos que $\mathbb{P}$ tiene la *propiedad de anticadena contable* o que tiene la *c.c.c.* Un subconjunto $D \subseteq P$ es denso cuando para cualquier $p \in P$ existe $d \in D$ de manera que $d \leq a$.

Un *filtro* es un subconjunto $F \subseteq P$ tal que:

i) Si $p \in F$ y $p \leq q$, entonces $q \in F$, y

ii) Si $p, q \in F$, entonces existe $r \in F$ de manera que $r \leq p$ y $r \leq q$.

Un *ideal* es un filtro en $(P, \geq)$. Un filtro (ideal, respectivamente) es *propio* cuando es diferente de P. No es difícil verificar lo siguiente:

Proposición A.2.1. *Sean X un conjunto y $F \subseteq \mathcal{P}(X)$. Entonces F es filtro si y sólo si:*

Si $A \in F$ y $A \leq B$, entonces $B \in F$, y

Si $A, B \in F$, entonces $A \cap B \in F$.

Demostración. Basta demostrar la suficiencia. Supóngase que F es filtro, el punto (i) es inmediato a la definición de filtro. Para (ii) sean $A, B \in F$, como F es filtro, existe $C \in F$ tal que $C \subseteq A$ y $C \subseteq B$. De esto, $C \subseteq A \cap B$, y por (i), resulta que $A \cap B \in F$. ■

Un filtro de $\mathbb{P}$ es *ultrafiltro* si es $\subseteq$-maximal del conjunto de todos los filtros de $\mathbb{P}$. El siguiente es un Teorema sumamente conocido, su demostración es una aplicación rutinaria del Teorema 0.1.1.

Teorema A.2.2 (Lema del Ultrafiltro). *Para todo filtro F de $\mathbb{P}$, existe un ultrafiltro $U \supseteq F$.*

Si $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(P)$ es una colección de subconjuntos densos y G es un filtro de $\mathbb{P}$, diremos que G es $\mathcal{D}$-*genérico* cuando para cada $D \in \mathcal{D}$ ocurre $G \cap D \neq \varnothing$. Cuando $\mathcal{D}$ sea la coleción de todos los subconjuntos densos de $\mathcal{P}$, diremos simplemente que G es *genérico*. Para nada es inmediato probar la existencia, o imposibilidad de existencia, de filtros genéricos.

El Axioma de Martin es nombrado así en honor a Donald A. Martin (1940-→), uno de sus precursores, y se formula de manera puntual, para cada cardinal infinito κ como el enunciado: «Para todo orden parcial $\mathbb{P}$, con la c.c.c. y toda colección de densos $\mathcal{D}$ de tamaño a lo más κ, existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico».

Proposición A.2.3. $\mathrm{MA}(\aleph_0)$ *es verdadero y* $\mathrm{MA}(\mathfrak{c})$ *es falso.*

Demostración. Para la primera parte, sean $\mathbb{P} = (P, \leq)$ cualquier orden parcial (no necesariamente c.c.c.), $p_0 \in D_0$ y supóngase que $\mathcal{D}$ es una colección de densos de $\mathbb{P}$ enumerada como $\{D_n \mid n \in \omega\}$. Por recursión, para cada $n \in \omega$ fíjese (AC) $p_{n+1} \in D_{n+1}$ tal que $p_{n+1} \leq p_n$. Sea:

$$G := \{q \in P \mid \exists n \in \omega\, (p_n \leq q)\}\,.$$

Claramente, si $p \in G$ y $q \geq p$, entonces $q \in G$. Además, si $p, q \in F$ entonces existen $n, m \in \omega$ tales que $p_n \leq p$ y $p_m \leq q$, de donde $p_k \leq p$ y $p_k \leq q$, donde $k := \max\{n, m\}$. Por contrucción, G es un filtro $\mathcal{D}$-genérico.

Para la siguiente parte, considere el orden parcial $\mathbb{T} := (2^{<\omega}, \supseteq)$. Nótese que si $A \subseteq 2^{<\omega}$ es anticadena de $\mathbb{T}$ entonces A es contable, pues $2^{<\omega}$ es numerable. Para cada $f \in 2^{\omega}$ sea $D_f := \{p \in 2^{<\omega} \mid p \not\subseteq f\}$. Nótese que cada D_f es denso, pues si $p \in 2^{<\omega}$, entonces $q := p \cup \{(\mathrm{dom}(p) + 1, 1 - f(\mathrm{dom}(p) + 1))\} \in D$ y $q \supseteq p$. Como los D_f son distintos dos a dos, la cantidad de densos en $\mathfrak{T}$ es $mathfrakc$.

Supóngase, por contradicción, que existe un filtro G de $\mathbb{T}$ tal que interseca a todos los densos de $\mathbb{T}$. Sea $g := \bigcup G$, nótese que g es función, pues para cualesquiera $h, k \in G$ existe $r \in G$ con $r \leq h, k$, de donde $r \supseteq h \cup k$, mostrando que $h \cup k$ es función. Ahora, si $n \in \omega$ es cualquiera, es fácil ver que el conjunto:

$$E_n := \{p \in 2^{<\omega} \mid n \in \mathrm{dom}(p)\}$$

es denso, por lo tanto, existe $t \in G \cap E_n$, mostrando que $p \in \mathrm{dom}(t) \subseteq \mathrm{dom}(\bigcup G)$. Así que $\bigcup G : \omega \to 2$. Sin embargo, dada $f \in 2^\omega$, existe $s \in G \cap D_f$ (pues D_f es denso), luego $f \nsubseteq s$, y con ello, $f \neq \bigcup G$, esto implica que $\bigcup G \notin 2^\omega$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto, la colección $\mathscr{D}$ de todos los densos de $\mathbb{T}$ es una colección de tamaño $\mathfrak{c}$ y no existe ningún filtro $\mathscr{D}$-genérico, mostrando que $\mathrm{MA}(\mathfrak{c})$ es falso. ■

A razón de lo anterior, tiene sentido definir el *cardinal de Martin*, $\mathfrak{m}$, esto es, el menor cardinal para el cual $\mathrm{MA}(\kappa)$ es verdadero. Se formula así, el *Axioma de Martin* como el enunciado: para todo $\kappa < \mathfrak{c}$, $\mathrm{MA}(\kappa)$ es verdadero; equivalentemente, $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$.

B. Espacios Metrizables

B.1. Espacios Metrizables

Una *métrica* sobre un conjunto X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que para cualesquiera $x, y, z \in X$ se cumple: $d(x, y) = d(y, x)$; $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$; y $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, en tal caso el par ordenado (X, d) es un *espacio métrico*.

Sea (X, d) un espacio métrico, para cada $\varepsilon > 0$ y $x \in X$ se define la *bola abierta de radio ε y centro x* como el conjunto $B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(y, x) < \varepsilon\}$. Dado esto, se define la *topología inducida por d en X* como:

$$\mathcal{T}_d := \{U \subseteq X \mid \forall x \in U\, \exists \varepsilon > 0\, (x \in B(x, \varepsilon) \subseteq U)\}.$$

Es un hecho que $\mathcal{T}_d$ es siempre una topología, y que, las bolas abiertas son subconjuntos abieros en $(X, \mathcal{T}_d)$.Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es *metrizable* cuando existe una métrica d en X tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

A continuación se introduce una forma de «aproximar» la metrizabilidad de un espacio. Sea X un espacio topológico, si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, para cada $x \in X$ defínase la *estrella al rededor* de x (respecto $\mathcal{U}$) como: $\mathrm{St}(x, \mathcal{U}) := \bigcup\{U \in \mathcal{U} \mid x \in U\}$. Se dice que un conjunto contable de cubiertas abiertas para X, digamos $\{U_n \mid n \in \omega\}$, es un *desarrollo* para X si y sólo si para cada $x \in X$, el conjunto $\{\mathrm{St}(x, \mathcal{U}_n) \mid n \in \omega\}$ es una base local para x en X, en tal caso X es *desarrollable*. Un espacio es de Moore si y sólo si es T_3 y desarrollable. Todo espacio de Moore es 1 AN, es bien sabido [2, Teo. 4.1.13] que todo espacio metrizable es T_4. Ahora:

Proposición B.1.1. *Todo espacio metrizable es normal y de Moore.*

Demostración. Sea X un espacio metrizable por la métrica d, basta demostrar que X es desarrollable. Para cada $n \in \omega$ sea $\mathcal{U}_n := \{B(x, 1/n) \mid x \in X\}$, entonces $\{\mathcal{U}_n \mid n \in \omega\}$ es un desarrollo para X.

Efectivamente, supóngase que U es abierto en X y que $x \in X$, entonces, existe $\varepsilon > 0$ de manera que $x \in B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Sea $N \in \omega$ tal que $1/N < \varepsilon/2$ y supóngase que $y \in \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_N)$ es cualquiera. Por ello, existe $z \in X$ con $x, y \in B(z, 1/N)$, consecuentemente $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq 2/N < \varepsilon$. Esto prueba que $x \in \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_N) \subseteq U$, por lo que $\{\mathrm{St}(x, \mathcal{U}_n) \mid n \in \omega\}$ es base local de x en X. ■

Corolario B.1.2. *Todo espacio metrizable es primero numerable*

Se tiene el siguiente comportamiento para los espacios desarrollables.

Proposición B.1.3. *Sea X un espacio desarrollable, entonces X es* 2 AN *si y sólo si X es de Lindelöf.*

Demostración. La suficiencia es inmediata al Corolario 0.2.11. Para la necesidad sea $\{\mathcal{U}_n \mid n \in \omega\}$ un desarrollo de X y supóngase que X es de Lindelöf. Para cada $n \in \omega$ fíjsese (AC) una subcubierta contable $\mathcal{V}_n$ de $\mathcal{U}_n$. Entonces $\mathcal{B} := \bigcup\{\mathcal{V}_n \mid n \in \omega\}$ es una coleción contable de abiertos de X.

Supóngase que U es un abierto de X y $x \in U$, entonces existe $N \in \omega$ de modo que $x \in \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_N) \subseteq U$. Como $\mathcal{V}_N$ es cubierta de X, existe $V \in \mathcal{U}_N \subseteq \mathcal{B}$ tal que $x \in U$. Nótese que, como $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ y $x \in V$, se tiene que $x \in V \subseteq \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_N) \subseteq U$, mostrando que $\mathcal{B}$ es base contable para X. ■

Corolario B.1.4. *Sea X un espacio metrizable por la métrica d. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *X es* 2 AN.

ii) *X es de Lindelöf.*

iii) *X es separable.*

Demostración. Por B.1.1 y B.1.3, basta probar (iii) → (i).

Supóngase que $D = \{x_n \mid n \in \omega\} \subseteq X$ es denso. Se afirma que el conjunto numerable de abiertos, $\mathcal{B} := \{B(x_m, 1/n) \mid (m,n) \in \omega \times \omega \setminus \{0\}\}$, es base para X. En efecto, supóngase que U es abierto y que $x \in U$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \in B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Por densidad de D, existe $m \in \omega$ tal que $x_m \in B(x, \varepsilon/2)$.

Tómese $N \in \omega$ de manera que $1/N < \varepsilon/2$. Entonces, si $y \in B(x_m, N)$, entonces $d(x,y) \leq d(y, x_m) + d(x_m, x) < \varepsilon$, mostrando que $x \in B(x_m, 1/N)$, y con ello, que $\mathcal{B}$ es base contable para X. ■

A continuación se caracterizará la compacidad en espacios metrizables.

Proposición B.1.5. *Sea X un espacio metrizable por la métrica d. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) X es compacto.

ii) X es numerablemente compacto.

iii) X es secuencialmente compacto.

Demostración. (i) → (ii) siempre ocurre.

(ii) → (iii) Supógnase que X es numerablemente compacto, usaremos la caracterización (ii) del Corolario 0.2.8. Sea $B \subseteq X$ numerable. Como X es numerablemente compacto, se sigue de 0.2.12 que existe algún $y \in \mathrm{der}(B)$.

Sea $\{U_n \mid n \in \omega\}$ una base local contable para y en X. Fíjese para cada $n \in \omega$ (AC) un elemento $a_n \in B \cap \bigcap\{U_m \mid m \leq n\}$. Entonces, para cada abierto U de X con $y \in U$, existe $N \in \omega$ con $y \in U_N \subseteq U$, de donde, $A \setminus U \subseteq \{a_k \mid k < m\} =^* \varnothing$. Esto prueba que $A \to y$, por lo que, X es secuencialmente compacto.

(iii) → (i) Supóngase que X es secuencialmente compacto y, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X.

Afirmación 1. Existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in X$ existe $U \in \mathcal{U}$ de manera que $B(x, \delta) \subseteq U$

Demostración. Por contradicción, supóngase lo contrario. Para cada elemento $n \in \omega \setminus \{0\}$ fíjese (AC) $x_n \in X$ de manera que para cada $U \in \mathcal{U}$,

$B(x_n, 1/n) \nsubseteq U$. Como X es secuencialmente compacto, existe una función $f : \omega \setminus \{0\} \to \omega \setminus \{0\}$ estrictamente creciente tal que $x_{f(n)} \to y$, para algún $y \in X$.

Al ser $\mathcal{U}$ cubierta, existe $U \in \mathcal{U}$ de manera que $y \in U$. Luego, existen $\varepsilon > 0$ con $y \in B(y, \varepsilon) \subseteq U$, y $N \in \omega$ con $\{x_{f(n)} \mid n \geq N\} \subseteq B(y, \varepsilon/2)$. Pero, considerando $M \in \omega$ de manera que $1/M < \varepsilon/2$ se obtiene que $B(x_M, 1/M) \subseteq U$, lo cual es una contradicción. $\boxtimes$

Entonces $\{B(x, \delta) \mid x \in X\}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$.

Afirmación 2. Existe $N \in [X]^{<\omega}$ tal que $\{B(x, \delta) \mid x \in N\}$ es cubierta de X.

Demostración. Por contradicción, supóngase lo contrario. Defínase entonces por recursión, y utilizando AC, una función $h : \omega \setminus \{0\} \to X$ de modo que para cada $n \in \omega$ ocurra $h(n) \in X \setminus \bigcup \{B(f(m), \delta) \mid m < n\}$. Por hipótesis, existe $k : \omega \setminus \{0\} \to \omega \setminus \{0\}$ estrictamente creciente tal que $(hk(n))_{n \in \omega}$ es convergnete en X.

Luego, si $n, m \in \omega \setminus \{0\}$ son distintos, $d(hk(n), hk(m)) \geq \delta$, lo cual imposibilita la convergencia de $(hk(n))_{n \in \omega}$. $\boxtimes$

Las afirmaciones anteriores prueban que $\{B(x, \delta) \mid x \in N\} \preccurlyeq \mathcal{U}$, lo cual muestra que $\mathcal{U}$ tiene una subcubierta finita. Así, X es compacto. ■

Corolario B.1.6. *Todo espacio metrizable y compacto, es separable.*

Un teorema de metrización es un teorema que caracteriza que un espacio sea metrizable, quizás el más famoso de ellos es el siguiente [2, Teo. 4.2.9]:

Teorema B.1.7 (metrización de Uryshon). *Todo espacio* T_3 *y segundo numerable es metrizable.*

En lo que resta, daremos la terminomlogía necesaria para enunciar dos de los teoremas más fuertes de metrización, los Teoremas de metrización de Bing y Arhangel'skii, cuyas pruebas pueden ser consultadas en [2, Teo. 5.4.1] y [2, Teo. 5.4.6], respectivamente.

Una familia de subconjuntos $\mathcal{A}$ de un espacio X es *discreta* cuando para cada $x \in X$ existe un abierto U tal que $x \in U$ y $|\{A \in \mathcal{A} \mid A \cap U \neq \emptyset\}| \leq 1$. Un espacio X es *colectivamente normal* cuando cualquier familia discreta $\mathcal{A}$, cuyos elementos sean cerrados de X, se seapara por abiertos ajenos; esto es, existe una colección de abiertos ajenos dos a dos $\{U_A \mid A \in \mathcal{A}\}$ tales que para cada $A \in \mathcal{A}$ ocurre $A \subseteq U_A$.

Teorema B.1.8 (Bing). *Un espacio de Moore es metrizable si y sólo si es colectivamente normal.*

Una base $\mathcal{B}$ de un espacio topológico X es *regular* si y sólo si para cada $x \in X$ y cada abierto U con $x \in X$ existe un abierto V, con $x \in V$ y tal que:

$$\{B \in \mathcal{B} \mid B \cap V \neq \emptyset \wedge B \cap (X \setminus V) \neq \emptyset\} =^* \emptyset$$

el siguiente teorema de metrización establece que lo únicos espacios T_1 que admiten bases regulares, son exactamente los metrizables.

Teorema B.1.9 (Arhangel'skii). *Un espacio es metrizable si y sólo si es* T_1 *y admite una base regular.*

Índice Simbólico

Índice Alfabético

Referencias

[1] Pavel Sergeevich Aleksandrov. «Mémoire sur les espaces topologiques compacts». En: Koninklijke Akademie van Wetenschappen. 1929.

[2] Ryszard Engelking et al. *General topology*. Vol. 60. PWN Warszawa, 1977.

[3] Michael Hrušák. «Almost disjoint families and topology». En: *Recent Progress in General Topology III*. Springer, 2013, págs. 601-638.

[4] Michael Hrušák y Fernando Hernández. «Topology of Mrówka-Isbell Spaces». En: *Pseudocompact topological spaces, Gainesville*. Springer. 2018, págs. 253-289.

[5] Thomas Jech y Thomas Jech. *Set theory: The third millennium edition, revised and expanded*. Vol. 3. Springer, 2006.

[6] F Burton Jones. «Concerning normal and completely normal spaces». En: (1937).

[7] Varadachariar Kannan y Minakshisundaram Rajagopalan. «Hereditarily locally compact separable spaces». En: *Categorical Topology: Proceedings of the International Conference, Berlin*. Springer. 1979, págs. 185-195.

[8] Kenneth Kunen. *Set theory an introduction to independence proofs*. Vol. 102. Elsevier, 1980.

[9] Kenneth Kunen y Jerry Vaughan. *Handbook of set-theoretic topology*. Elsevier, 1984.

[10] Kazimierz Kuratowski. *Topology: Volume I*. Vol. 1. Elsevier, 1966.

[11] Stanisław Mrówka. «On completely regular spaces». En: *Fundamenta Mathematicae* 41.1 (1955), págs. 105-106.

[12] Georgina Noriko. «Algunas propiedades de los espacios de Mrówka». Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias, UNAM, 2009.

[13] Peter J Nyikos. «A provisional solution to the normal Moore space problem». En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 78.3 (1980).

[14] Waclaw Sierpinski. «Cardinal and ordinal numbers». En: *Polska Akademia Nauk, Monografie Matematyczne* 34 (1958).

[15] Petr Simon. «A compact Fréchet space whose square is not Fréchet». En: *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* (1980).

[16] Franklin David Tall. «Set-theoretic consistency results and topological theorems concerning thenormal Moore space conjecture and related problems». Tesis Doctoral. The University of Wisconsin-Madison, 1969.