UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN ESTUDIO ELEMENTAL SOBRE LOS ESPACIOS DE ISBELL-MRÓWKA

T E S I S

Que para obtener el título en:

MATEMÁTICAS

PRESENTA:

Hugo Víctor García Martínez

ASESOR:

Dr. Fidel Casarrubias Segura

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2025

AAAAA.
- DDD.

Agradecimientos

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Índice general

Introducción **ix**

0 Preeliminares **1**
- 0.1 Conjuntos 1
- 0.2 Topología 1

1 Familias casi ajenas **3**
- 1.1 Observaciones inmediatas 3
- 1.2 Familias casi ajenas de tamaño $\mathfrak{c}$ 8
- 1.3 El ideal generado y su comportamiento 11
- 1.4 Resultados en combinatoria infinita 16
  - 1.4.1 Teorema de Simon 16
  - 1.4.2 Familias y grietas de Luzin 19
  - 1.4.3 Lema de Solovay 25

2 Espacios de Isbell-Mrówka **31**
- 2.1 Ψ-espacios y caracterizaciones elementales 31
- 2.2 Compacidad y local compacidad 36
- 2.3 Metrizabilidad y Pseudocompacidad 39
- 2.4 Teorema de Kannan y Rajagopalan 43

3 El compacto de Franklin **53**
- 3.1 Sucesiones en $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ 53
- 3.2 La propiedad de Fréchet 59

4 Normalidad en los espacios de Mrówka **63**
- 4.1 Independencia de la Conjetura Débil de Moore 63
  - 4.1.1 Consistencia de WMC 66

4.1.2 Consistencia de ¬WMC 72
4.2 Equivalencia para la normalidad de $\Psi(\mathscr{A})$ bajo MA 74

Caracterizaciones **a**

Índice Simbólico **c**

Índice Alfabético **e**

Referencias **g**

Introducción

Corría el año de 1954 cuando Stanisaw G. Mrówka (1933-2010); “hijo” doctoral de Kazimierz Kuratowski, introdujo en su artículo **On completely regular spaces** un ejemplo de espacio topológico de Tychonoff, pseudocompacto, pero no compacto; su construcción parte de una familia de subconjuntos de ω con características especiales. Este avance teórico es considerado un antecedente temprano de los hoy conocidos como *espacios de Isbell-Mrówka*; espacios cuyo nombre hace honor tanto al propio Stanisaw Mrówka, como a John R. Isbell (1930-2005); quienes, durante la década de los sesenta le dieron forma al concepto y mostraron por qué tales espacios son dignos de poseer gran interés dentro de la topología general.

Cada espacio de de Isbell-Mrówka es de Tychonoff, de Moore y cero-dimensional; además, la razón por la que el ejemplo dado por Mrówka en 1954 es considerado como el antecesor de estos espacios es porque cada uno de ellos determinado (biunívocamente) por una *familia casi ajena*, un tipo especial de familia de subconjuntos de ω. Tal correspondencia es la responsable de que se puedan “codificar” sus propiedades topológicas en términos de las propiedades que tienen las familias casi ajenas como conjuntos. La idea del presente documento es dar un primer acercamiento al estudio de estos espacios, para lo cual es necesario dar un panorama general sobre qué son las familias casi ajenas y cómo se comportan; explicar exactamente cuáles son estas “codificaciones” y exhibir algunos de los métodos para conseguirlas.

Este trabajo se divide en dos grandes secciones; el estudio de las familias casi ajenas (Capítulo 1), lo que se puede tomar como la parte “conjuntista” del escrito; y, su contraparte topológica, el estudio de los espacios de Isbell-Mrówka (Capítulos 2-4). En el Capítulo 1 se presentarán construcciones clásicas de familias casi ajenas y se expondrá la teoría básica sobre su combinatoria infinita asociada: Teorema de Simon, familias de Luzin y el Lema de Solovay. El Capítulo

2 tiene por objetivo presentar el Teorema de Kannan y Rajagopalan; una caracterización por propiedades topológicas de los espacios de Isbell-Mrówka, aquí, el entendimiento del comportamiento esencial de estos espacios es clave, así que este también será un aspecto central del capítulo. Los Capítulos 3 y 4 abordan problemas específicos que son testigo de la versatilidad de los objetos de estudio de esta tesis; en el Capítulo 3 se exhibirá la relación que hay entre la propiedad de Fréchet y la compactación unipuntual de los espacios de Isbell-Mrówka (el compacto de Franklin); y, en el Capítulo 4, se estudiarán en detalle los aspectos primordiales para poder "codificar" la propiedad topológica de normalidad, presentando principalmente los resultados de Silver y Tall.

Se dará por hecho que el lector de este documento tiene conocimientos elementales tanto de la teoría axiomática (usual) de conjuntos, ZFC; así como de topología general.

0 Preeliminares

0.1. Conjuntos

1. Convención sobre las notaciones “no estándar” (potencia, colecciones $[A]^{z\kappa}$, etcétera)

2. Naturales, ordinales y cardinales.

3. Inducción y Recursión más allá de ω (?)

4. Órdenes parciales y sus elementos distinguidos, árboles.

5. Casi contención y el comportamiento básico de la misma.

0.2. Topología

1. Espacios topológicos, bases, axiomas de numerabilidad. Definición sucinta de los términos: peso, carácter

2. Convenciones sobre las notaciones para producto, suma, homeomorfismos, encajes, y esclarecimiento de los los términos: propiedades topológicas, productivas, factorizables, etc...

3. Axiomas de separación (desde T_0 a T_4, normalidad, regularidad, regularidad completa y normalidad).

4. Espacios cero dimensionales y su caracterización.

5. Convergencia de sucesiones, espacios de Fréchet y secuenciales. Convención de términos como: sucesiones convergentes, clausura secuencial, etcétera.

6. Compacidad y sus “variantes”: compacidad numerable, Lindelöf, compacidad secuencial, pseudocompacidad, compacidad local, etc...

7. Metrizabilidad: se conviene de forma breve lo que es una métrica (y métrica completa ?), un espacio metrizable (y completamente metrizable ?). Se enuncian teoremas de equivalencia para: su separabilidad; y, su compacidad.

8. Metrización:Se enuncian los teoremas de metrización de: Urysohn, Bing y Arhangelskii.

9. Categoría de Baire, se define el concepto de espacio de Baire y se enuncia el teorema de Categoría de Baire para: espacios de Hausdorff y localmente compactos; y, espacios completamente metrizables.

1 Familias casi ajenas

Las familias casi ajenas son objetos fascinantes de la teoría de conjuntos; como se verá a lo largo de este trabajo, sus aplicaciones no sólo se limitan a esta rama de las matemáticas, sino que sus repercusiones se extienden a la topología. Entre los pioneros de su estudio destacan figuras como Hausdorff, Sierpiski, Erds y Rado.

El presente capítulo tiene como meta presentar a este objeto matemático y exponer sus propiedades más inmediatas; algunos métodos para su construcción; y finalmente, un estudio básico sobre su combinatoria. En este última parte se abordarán resultados clásicos: los Lemas de Dokálková y Solovay, el Teorema de Simon y la existencia de las familias de Luzin.

1.1. Observaciones inmediatas

Definición 1.1.1. *Sea N un conjunto numerable. Una* ***familia casi ajena sobre*** *N es un subconjunto $\mathscr{A} \subseteq [N]^{\omega}$ cuyos elementos son casi ajenos por pares.* $\mathrm{AD}(N)$ *denotará el conjunto de todas las familias casi ajenas sobre N.*

El término ***familia casi ajena*** *(o simplemente* ***familia****) hará referencia a una familia casi ajena sobre ω.*

El concepto previo es fácilmente generalizable, el lector puede indagar al respecto en [4, Def. 9.20, p. 118]. Sin embargo, la teoría asociada a las familias casi ajenas, definidas como en 1.1.1, es suficientemente amplia y meritoria de un estudio dedicado.

Cualquier familia de subconjuntos ajenos por pares de N, es también una familia casi ajena sobre N; particularmente, $\varnothing$ y cualquier colección de la forma $\{A\}$, con $A \in [N]^{\omega}$. Además, resulta evidente que cada subconjunto de una familia casi ajena sobre N es, a su vez, una familia casi ajena sobre N.

Es claro que toda familia casi ajena tiene tamaño menor o igual a $\mathfrak{c}$; así que en virtud de lo previamente observado, de existir alguna de ellas de tamaño el continuo, se garantizaría la existencia de familias ajenas de cualquier tamaño inferior a $\mathfrak{c}$.

Ejemplo 1.1.2. *Las colecciones* $\{\omega\}$, $\{\{2n \mid n \in \omega\}, \{2n+1 \mid n \in \omega\}\}$ *y* $\{\{p^n \mid n \in \omega \setminus \{0\}\} \mid p \text{ es primo}\}$ *son familias casi ajenas sobre* ω.

No resulta muy difícil verificar que las primeras dos familias del ejemplo anterior son «grandes», en el siguiente sentido:

Definición 1.1.3. *Sea N conjunto numerable. Una familia $\mathscr{A}$ sobre N es **maximal en** N si es un elemento $\subseteq$-maximal del conjunto* $\mathrm{AD}(N)$. *Se denotará por* $\mathrm{MAD}(N)$ *al conjunto de todas ellas.*

*Cuando no haya riesgo de ambigüedad, el término **familia maximal** hará referencia a una familia maximal en ω.*

Dado que los elementos de toda familia casi ajena son infinitos, se tiene inmediatamente la siguiente observación:

Observación 1.1.4. *Una familia* $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(N)$ *es maximal en N si y sólo si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:*

i) Para cualquier $\mathscr{B} \subseteq [N]^\omega$, *si* $\mathscr{A} \subsetneq \mathscr{B}$, *entonces* $\mathscr{B} \notin \mathrm{AD}(N)$.

ii) Para cada $B \in [N]^\omega$ *existe* $A \in \mathscr{A}$ *tal que* $A \cap B$ *es infinito.*

Se advierte que las familias sobre ω parecerán deslucir a las construidas sobre otros conjuntos numerables; pero al no ser el estudio sobre estas últimas nulo, es menester considerar las propiedades que son transferibles entre estas dos clases de objetos.

Definición 1.1.5. *Sean N, M conjuntos numerables y $h : N \to M$ cualquier biyección. Se define $\Phi_h : \mathscr{P}(\mathscr{P}(N)) \to \mathscr{P}(\mathscr{P}(M))$ como:*

$$\Phi_h(\mathscr{A}) = \{h[A] \mid A \in \mathscr{A}\}$$

En términos de lo recién definido, se remarca que al ser h biyección, Φ_h será una biyección. Más aún, estas biyecciones se comportan bien respecto a ciertas virtudes conjuntistas, tal y como se ilustra a continuación.

Proposición 1.1.6. *Sean N, M son numerables y $h : N \to M$ una biyección cualquiera. Entonces:*

i) $\mathscr{A} \subsetneq \mathscr{B}$ *si y sólo si* $\Phi_h(\mathscr{A}) \subsetneq \Phi_h(\mathscr{B})$.

ii) $\Phi_h(\mathscr{A} \cap \mathscr{B}) = \Phi_h(\mathscr{A}) \cap \Phi_h(\mathscr{B})$.

iii) $\Phi_h(\mathscr{A} \cup \mathscr{B}) = \Phi_h(\mathscr{A}) \cup \Phi_h(\mathscr{B})$.

iv) $|\mathscr{A}| = |\Phi_h(\mathscr{A})|$.

v) $\Phi_h[\mathrm{AD}(N)] = \mathrm{AD}(M)$.

vi) $\Phi_h[\mathrm{MAD}(N)] = \mathrm{MAD}(M)$

Demostración. Se mostrarán únicamente (v) y (vi). En ambos basta probar la contención directa, pues al ser h biyección, $\Phi_h^{-1} = \Phi_{h^{-1}}$.

(v) Si $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(N)$, entonces $\mathscr{A} \subseteq [N]^\omega$ y así $\Phi_h(\mathscr{A}) \subseteq [M]^\omega$. Ahora, si $h[A], h[B] \in \Phi_h(\mathscr{A})$ son distintos, es necesario que $A \neq B$ y por ello $A \cap B =^* \varnothing$. Se obtiene que $h[A] \cap h[B] = h[A \cap B] =^* \varnothing$, y con ello, $\Phi_h(\mathscr{A}) \in \mathrm{AD}(M)$.

(vi) Si $\mathscr{A} \in \mathrm{MAD}(\mathscr{A})$ y $B \subseteq M$ es infinito, entonces $h^{-1}[B] \subseteq N$ es infinito y existe $A \in \mathscr{A}$ tal que $A \cap h^{-1}[B]$ es infinito. Al ser h biyección, $h[A \cap h^{-1}[B]] = h[A] \cap B$ es infinito, por ende $\Phi_h(\mathscr{A}) \in \mathrm{MAD}(M)$. ■

A partir de este momento se consolida la usanza de hacer hincapié en qué propiedades, u objetos, basados en familias casi ajenas se preservan bajo las biyecciones Φ_h.

Una aplicación superflua de lo anterior es el nacimiento de un método cómodo para generar familias casi ajenas; en especial, infinitas.

Ejemplo 1.1.7. *Claramente* $\mathscr{A} = \{\{n\} \times \omega \mid n \in \omega\} \in \mathrm{AD}(\omega \times \omega)$. *Así que si* $h : \omega \times \omega \to \omega$ *es biyección,* $\Phi_h(\mathscr{A}) \in \mathrm{AD}(\omega)$. *Más aún, tal familia es del mismo tamaño que* $\mathscr{A}$ *(todo gracias a 1.1.6).*

A continuación se comenzarán a examinar las propiedades de las familias casi ajenas maximales; se tiene la intención de responder a las preguntas que surgen naturalmente como: £puede haber familias casi ajenas más que numerables?, o, £existen familias maximales infinitas?

Lema 1.1.8. *Si* $\mathscr{A}$ *es familia casi ajena maximal, entonces* $\omega \subseteq^* \bigcup \mathscr{A}$.

Demostración. Por contrapuesta, supóngase que $B := \omega \setminus \bigcup \mathscr{A}$ es infinito. Si $A \in \mathscr{A}$, entonces $A \subseteq \bigcup \mathscr{A}$, y así $A \cap B \subseteq A \setminus \bigcup \mathscr{A} \subseteq A \setminus A = \varnothing$. Por lo que $B \in [\omega]^\omega$ es casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$. ■

El recíproco del Lema previo falla para familias infinitas (véase la familia $\Psi(\mathscr{A})$ del Ejemplo 1.1.7); y de hecho, no se cuenta un resultado «amigable» para determinar cuándo estas resultan ser maximales (véase 1.3.11). En contraparte a esto, se deduce rápidamente la siguiente equivalencia:

Corolario 1.1.9. *Sea* $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$. $\mathscr{A}$ *es maximal si y sólo si* $\omega \subseteq^* \bigcup \mathscr{A}$.

Demostración. Por el Lema previo, basta demostrar la necesidad.

Supóngase $\omega \subseteq^* \bigcup \mathscr{A}$ y nótese que si $B \in [\omega]^\omega$, entonces $B \subseteq^* \bigcup \mathscr{A}$ y con ello $\varnothing \neq^* B \subseteq^* B \cap \bigcup \mathscr{A} = \bigcup \{B \cap A \mid A \in \mathscr{A}\}$. Como la última es una unión finita, B debe tener intersección infinita con algún elemento de $\mathscr{A}$. ■

El posterior resultado puede ser visto como un símil al Teorema del Ultrafiltro **(ver prelims)**, o bien, cualquier resultado afín en el que se haga uso del Principio de Maximalidad de Hausdorff o sus equivalentes **(ver prelims)**.

Lema 1.1.10. *Toda familia casi ajena está contenida en una familia maximal.*

Demostración. Sean $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$ y X el conjunto de todos las familias casi ajenas que contienen a $\mathscr{A}$. Como $A \in X$, por el Principio de Maximalidad de Hausdorff (AC), existe $Y \subseteq X$, una cadena $\subseteq$-maximal de $(X, \subseteq)$.

Defínase $\mathscr{B} := \bigcup Y$, como $Y \subseteq \mathscr{P}([\omega]^\omega)$, entonces $\mathscr{B} \subseteq [\omega]^\omega$. Además, si $C, D \in \mathscr{B}$, existen $\mathscr{C}, \mathscr{D} \in Y \subseteq \mathrm{AD}(\omega)$ con $C \in \mathscr{C}$ y $D \in \mathscr{D}$. Puesto que Y es cadena de $(X, \subseteq)$, sin pérdida de generalidad, $C, D \in \mathscr{D} \supseteq \mathscr{C}$; y con ello, $C \cap D$ es finito, ya que $\mathscr{D} \in Y \subseteq X \subseteq \mathrm{AD}(\omega)$. Luego $\mathscr{B} \in \mathrm{AD}(\omega)$, y además, $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$.

Finalmente, si $\mathscr{B}' \in \mathrm{AD}(\omega)$ y $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}'$, entonces $Y \cup \{\mathscr{B}'\}$ es una cadena de $(X, \subseteq)$; lo cual, junto a la maximalidad de Y, implica que $\mathscr{B}' \in Y$ y $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$. Por lo tanto, $\mathscr{B} \in \mathrm{MAD}(\omega)$. ■

El siguiente resultado revela un fenómeno interesante respecto al tamaño de las familias maximales. Este se le atribuye a Wacaw Sierpinski (se desprende de [12, Teo. 2, p. 458]).

Lema 1.1.11. *Ninguna familia casi ajena numerable es maximal.*

Demostración. Sea $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$ enumerada por $\mathscr{A} = \{A_n \mid n \in \omega\}$. Si $n \in \omega$ es cualquiera, $A_n \cap \bigcup\{A_m \mid m < n\} = \bigcup\{A_n \cap A_m \mid m < n\}$ es finito, al ser unión finita de conjuntos finitos. Luego, por ser A_n infinito, $A_n \setminus \bigcup\{A_m \mid m < n\} = A_n \setminus \left(A_n \cap \bigcup\{A_m \mid m < n\}\right)$ debe ser infinito; y particularmente, no no vacío.

Considérese $f : \omega \to \omega$ definida por $f(n) = \min\{A_n \setminus \bigcup\{A_m \mid m < n\}\}$ para cada n. Resulta que f es inyectiva; si $m < n$, entonces $f(n) \notin A_m$, $f(m) \in A_m$ y $f(n) \neq f(m)$. Además, para cada $n \in \omega$ se tiene que $A_n \cap f[\omega] = \{f(n)\}$; y con ello $f[\omega] \subseteq \omega$ es infinito y casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$. ■

Tomando cualquier familia infinita $\mathscr{A}$ y aplicando Lema 1.1.10, se obtiene una familia maximal $\mathscr{B} \supseteq \mathscr{A}$ de tamaño infinito. Por el resultado anterior, tal infinito debe ser más que numerable. Esta consecuencia es tan inmediata como, quizás, poco satisfactoria; pues su naturaleza es «no constructiva». Durante la posterior sección se mostrarán métodos para obtener estos últimos objetos de una manera más explícita.

Observación 1.1.12. *Existe una familia maximal de tamaño al menos* $\aleph_1$.

1.2. Familias casi ajenas de tamaño $\mathfrak{c}$

Al tomar un espacio de Fréchet X y cualquier subespacio denso $D \subseteq X$, para cada $x \in X \setminus D$ ha de existir una sucesión en D convergente a x. Si a X le adicionamos la condición de ser T_1, la imagen de tal sucesión es necesariamente un conjunto numerable $A_x \subseteq D$, convergente a x en X **(revisar PRELIMS)**.

Proposición 1.2.1. *Supóngase que X es un espacio de Hausdorff, de Fréchet y que $D \subseteq X$ es denso y numerable. Para cada $A \subseteq X \setminus D$ existe una familia casi ajena sobre D biyectable con A.*

Demostración. Con sustento en los comentarios previos, para cada $x \in A$ fíjese (AC) un conjunto $A_x \subseteq D$ numerable y convergente a x en X. Defínase la colección $\mathscr{A}_{D,A}$ como $\{A_x \subseteq D \mid x \in A\} \subseteq [D]^\omega$.

Sean $x, y \in A$ con $x \neq y$, por ser X de Hausdorff, hay abiertos ajenos U, V tales que $x \in U$ y $y \in V$. Seguido de que $A_x \to x$ y $A_y \to y$, se tiene $A_x \subseteq^* U$ y $A_y \subseteq^* V$; consecuentemente $A_x \cap A_y \subseteq^* U \cap V = \emptyset$. Lo cual prueba que $\mathscr{A}_{D,A} \in \mathrm{AD}(D)$ y $|\mathscr{A}_{D,A}| = |A|$. ■

Definición 1.2.2. *Si X, D y A son como en la Proposición anterior, a $\mathscr{A}_{D,A}$ se le denomina* ***familia de sucesiones en** D **convergentes a** A **en** X.

Como la recta real $\mathbb{R}$ es de Hausdorff, de Fréchet (por ser 1 AN) y $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ es un subespacio denso numerable; de lo previamente establecido se obtiene que $\mathscr{A}_{\mathbb{Q},\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ es una familia casi ajena sobre $\mathbb{Q}$ de tamaño $\mathfrak{c} = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|$. Conviene destacar que la construcción recién mencionada no depende del AC; pues para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ el conjunto A_x de la Proposición 1.2.1 se puede construir de manera explícita. Si $q : \omega \to \mathbb{Q}$ es cualquier biyección, basta considerar:

$$A_x = \left\{ q\Big(\min \Big(q^{-1}\Big[\mathbb{Q} \cap \Big(x - \frac{1}{n+1}, x - \frac{1}{n} \Big) \Big] \Big) \Big) \,\Big|\, n \in \omega \setminus \{0\} \right\}$$

El corazón de la próxima estrategia para la obtención explícita de familias casi ajenas de tamaño el continuo, son los árboles.

Comenzaremos observando que si S es cualquier rama de un árbol $(T, \leq)$, entonces S es cerrada bajo cotas inferiores. En efecto, sean $x \in S$ y $y \leq x$. Para cada $s \in S$, al ser S cadena, se tiene que $x \leq s$ o $s < x$. En el primer caso, $y \leq x \leq s$ y y es comparable con s. En el segundo $y, s < x$; y como $(\{y \in T \mid y < x\}, \leq)$ es buen orden, y y s son comparables. Por lo tanto, $S \cup \{y\}$ es una cadena; y seguido de que S es rama, $y \in S$.

Proposición 1.2.3. *Sea $(T, \leq)$ un árbol numerable de altura ω y $\mathscr{A} \subseteq [T]^\omega$ el conjunto de todas las ramas numerables de $(T, \leq)$. Entonces $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(T)$.*

Demostración. Sean $R, S \in \mathscr{A}$ con $R \neq S$, sin pérdida de generalidad, existe $x_0 \in R \setminus S \neq \emptyset$. De existir $y \in R \cap S$ tal que $y \nless x_0$, resultaría que $x_0 \leq y$, en virtud de que $x, y \in R$ y R es rama. Lo anterior y la discusión previa a esta Proposición implican que $x_0 \in S$, lo cual es imposible.

Por lo tanto $R \cap S \subseteq \{y \in T \mid y < z\}$; y como T tiene altura ω, el orden de x_0 es un natural; consecuentemente, $R \cap S$ es finito. ■

Un ejemplo canónico de árbol numerable de altura ω es $2^{<\omega}$ **(véase PRELIMS)**; considerar la siguiente clase de familias desembocará en resultados sumamente notables (como se puede ver en la Subsección 4.1.1).

Proposición 1.2.4. *Para cada $f \in 2^\omega$ defínase $A_f := \{f \restriction n \mid n \in \omega\} \subseteq 2^{<\omega}$; entonces:*

i) *Cada A_f es una rama de $(2^{<\omega}, \subseteq)$.*

ii) *Si $f \neq g$, entonces $A_f \neq A_g$.*

Demostración. (i) Sea $f \in 2^\omega$, inmediatamente, A_f es cadena de $(2^{<\omega}, \subseteq)$. Supóngase ahora que $S \subseteq 2^{<\omega}$ es una rama de $(2^{<\omega}, \subseteq)$ y que $A_f \subseteq S$.

Sean $g \in S$ y $n = \mathrm{dom}(g)$; puesto que S es cadena de $(2^{<\omega}, \subseteq)$ y $f \in A_f \subseteq S$, entonces $f \restriction n \subseteq g$ o $g \subseteq f \restriction n$. Cualquiera de los casos anteriores implican que $f \restriction n = g$, pues $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{dom}(f \restriction n)$. Luego, $g \in A_f$ y entonces $A_f = S$.

(ii) Si $f \neq g$, entonces existe $m \in \omega$ tal que $f(m) \neq g(m)$. Así, se obtiene que $f \restriction m+1 \neq g \restriction m+1$ y $f \restriction m+1 \in R_f \setminus R_g$, por lo que $R_f \neq R_g$. ■

Las proposiciones anteriores permiten definir, de forma explícita y sin recurrir al AC, el siguiente tipo de familias casi ajenas.

Definición 1.2.5. *Para cada $X \subseteq 2^\omega$ defínase $\mathscr{A}_X := \{A_f \mid f \in X\}$ como en la Proposición previa.*

*Esta familia será nombrada la **familia de las ramas de** X **en** $2^{<\omega}$.*

En paralelo a lo comentado después de 1.2.2, también se puede concluir vía la construcción recién expuesta, y el Lema 1.1.10, lo siguiente:

Corolario 1.2.6. *Existe una familia maximal de cardinalidad $\mathfrak{c}$.*

En consecuencia, para cualquier cardinal $\lambda \leq \mathfrak{c}$ existe una familia casi ajena de cardinalidad λ.

Se concluirá esta sección comentando qué ocurre respecto una interrogante surge naturalmente tras todo lo realizado: £existen familias maximales de cualquier cardinalidad entre $\aleph_1$ y $\mathfrak{c}$?

Definición 1.2.7. *Se define el **cardinal de casi ajenidad** como:*

$$\mathfrak{a} := \min\{\kappa \geq \omega \mid \mathrm{AD}(\omega) \cap [\mathscr{P}(\omega)]^\kappa \neq \varnothing\}$$

Debido a 1.1.11, se tiene $\aleph_1 \leq \mathfrak{a} \leq \mathfrak{c}$ y claramente bajo CH se debe satisfacer que $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$; luego, es consistente con ZFC que $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$. Comentar que la teoría en relación al cardinal $\mathfrak{a}$ es basta y existen resultados de consistencia como el enunciado en seguida:

Teorema 1.2.8

Si $\aleph_1 \leq \kappa \leq \mathfrak{c}$ y κ es cardinal regular, es consistente con ZFC que $\mathfrak{a} = \kappa$.

El Teorema recién enunciado consecuencia de [8, Teo. 5.1, p. 127]; y si bien su demostración escapa a los propósitos del presente texto, sí se expondrán resultados en relación a la igualdad $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ más adelante (véase 1.4.21).

1.3. El ideal generado y su comportamiento

Definición 1.3.1. *Sean N un conjunto numerable y $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(N)$.*

*i) El **ideal generado por** $\mathscr{A}$ es el conjunto $\mathscr{I}_N(\mathscr{A})$; definido como la colección $\{B \subseteq N \mid \exists H \in [\mathscr{A}]^{<\omega}\, (B \subseteq^* \bigcup H)\}$.*

*ii) La **parte positiva de** $\mathscr{A}$ es $\mathscr{I}^+_N(\mathscr{A}) := \mathscr{P}(N) \setminus \mathscr{I}_N(\mathscr{A})$.*

Si $N = \omega$, estos conjuntos se denotarán por $\mathscr{I}(\mathscr{A})$ y $\mathscr{I}^+(\mathscr{A})$, respectivamente.

El objeto introducido previamente es de vital importancia para el estudio de la combinatoria de las familias casi ajenas. Como se había advertido anteriormente; con el propósito de no perder generalidad en los resultados expuestos durante esta sección, es necesario notar lo siguiente:

Proposición 1.3.2. *Sean N, M conjuntos numerables y $h : N \to M$ biyectiva. Si $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(N)$, entonces $\Phi_h(\mathscr{I}_N(\mathscr{A})) = \mathscr{I}_M(\Phi_h(\mathscr{A}))$.*

Demostración. Como h es biyección, $\Phi_h^{-1} = \Phi_{h^{-1}}$. Por lo cual, basta probar la contención directa de la igualdad.

Sea $Y \in \mathscr{I}_N(\mathscr{A})$, entonces existe $H \subseteq \mathscr{A}$ finito tal que $Y \setminus \bigcup H$ es finito. Como h es biyectiva, $h\big[Y \setminus \bigcup H\big] = h[Y] \setminus h\big[\bigcup H\big] = h[Y] \setminus \bigcup \Phi_h(H)$ es finito. Además, de 1.1.6, $\Phi_h(H) \subseteq \Phi_h(\mathscr{A})$ es finito. Por ello, $h[Y] \in \mathscr{I}_M(\Phi_h(\mathscr{A}))$. ■

Resulta sencillo constatar que el objeto definido en 1.3.1 es; como su nombre indica, un ideal (no necesariamente propio) sobre $\mathscr{P}(\omega)$. Además, se destaca lo siguiente:

Observación 1.3.3. *Sea $\mathscr{A}$ cualquier familia casi ajena.*

i) Cualquier subconjunto finito de ω, así como cualquier elemento de $\mathscr{A}$, es elemento de $\mathscr{I}(\mathscr{A})$. Por lo que $\varnothing \subsetneq [\omega]^{<\omega} \cup \mathscr{A} \subseteq \mathscr{I}(\mathscr{A})$.

ii) Si $\mathscr{B} \in \mathrm{AD}(\omega)$ y $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, entonces $\mathscr{I}(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{I}(\mathscr{B})$.

Obsérvese adempás que si $\mathscr{A} \in \mathrm{MAD}(\omega)$ es finita; en virtud del Lema 1.1.8 se tendrá que $\omega \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$, pues $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}$ es finito y $\omega \subseteq^* \bigcup \mathscr{A}$. El recíproco de esto también es cierto.

Proposición 1.3.4. *Sea $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$ cualquiera. Si $\omega \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$, entonces $\mathscr{A}$ es maximal y finita.*

Demostración. Supóngase que $\omega \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$, entonces existe $H \subseteq \mathscr{A}$ finito con $\omega \subseteq^* \bigcup H \subseteq \bigcup \mathscr{A}$. Por 1.1.9, basta ver que $\mathscr{A}$ es finita.

Supóngase que existe $B \in \mathscr{A} \setminus H$. Así, B casi ajeno con cada elemento de $H \subseteq \mathscr{A}$, luego, $B \cap \bigcup H = \bigcup \{B \cap h \mid h \in H\}$ es finito. De lo anterior, $B = B \cap \omega \subseteq^* B \cap \bigcup H$ es finito, lo cual es imposible. Por lo tanto, $\mathscr{A} \subseteq H$ y $\mathscr{A}$ es finita. ■

Corolario 1.3.5. *Sean N un conjunto numerable y $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(N)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) El ideal $\mathscr{I}_N(\mathscr{A})$ no es propio, es decir, $N \in \mathscr{I}_N(\mathscr{A})$.

ii) $\mathscr{A}$ es finita y maximal en N.

Con relativa frecuencia aparecerán familias que, pese a no ser maximales, satisfacen la condición (ii) de lo subsecuente; esta puede ser tomada como un debilitamiento a la condición de maximalidad.

Definición 1.3.6. *Sean N un conjunto numerable y $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(N)$.*

*i) Para cada $X \in [N]^\omega$, la **traza de** $\mathscr{A}$ **en** X es la colección $\mathscr{A} \restriction X$, definida como el conjunto $\{A \cap X \in [X]^\omega \mid A \in \mathscr{A}\}$.*

*ii) $\mathscr{A}$ es **maximal en alguna parte** si y sólo si existe $X \in \mathscr{I}^+_N(\mathscr{A})$ tal que la familia $\mathscr{A} \restriction X$ es maximal en X.*

*iii) $\mathscr{A}$ es **maximal en ninguna parte** si no es maximal en alguna parte.*

Si $X \in [N]^\omega$, entonces $\mathscr{A} \restriction X \in \mathrm{AD}(X)$. Más aún, si $\mathscr{A}$ es maximal, para cada $B \subseteq X$ infinito existe $A \in \mathscr{A}$ tal que $A \cap B = (A \cap X) \cap (B \cap X)$ es infinito, mostrando la maximalidad de $\mathscr{A} \restriction X$. Así que, efectivamente, la definición anterior es un debilitamiento de la condición de maximalidad.

Sin causa de asombro, los conceptos recién establecidos son respetados por las biyecciones Φ_h.

Proposición 1.3.7. *Sean N, M conjuntos numerables, $h : N \to M$ biyección y $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(N)$.*

i) Para cada $X \in [N]^\omega$ se cumple $\Phi_h(\mathscr{A}) \restriction h[X] = \Phi_h(\mathscr{A} \restriction X)$.

ii) $\mathscr{A}$ es maximal en alguna parte si y sólo si $\Phi_h(\mathscr{A})$ también lo es.

Demostración. (i) Como h biyección, de la definición de $\Phi_h(\mathscr{A})$ se obtiene:

$$\begin{aligned}\Phi_h(\mathscr{A}) \restriction h[X] &= \{B \cap h[X] \in \left[h[X]\right]^\omega \mid B \in \Phi_h(\mathscr{A})\}\\ &= \{h[A] \cap h[X] \in \left[h[X]\right]^\omega \mid A \in \mathscr{A}\}\\ &= \{h[A \cap X] \mid A \cap X \in [X]^\omega \wedge A \in \mathscr{A}\}\\ &= \Phi_h(\mathscr{A} \restriction X)\end{aligned}$$

(ii) Como $\Phi_h^{-1} = \Phi_{h^{-1}}$, basta probar la suficiencia. Supóngase que $\mathscr{A}$ es maximal en alguna parte, entonces existe $X \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ tal que $\mathscr{A} \restriction X$ es maximal en X.

Dada la igualdad de 1.3.2, $h[X] \in \mathcal{I}^+(\Phi_h(\mathcal{A}))$; además, la función de restricción $g := h \restriction X : X \to h[X]$ es biyección y utilizando el inciso anterior se tiene que $\Phi_h(\mathcal{A}) \restriction h[X] = \Phi_h(\mathcal{A} \restriction X) = \Phi_g(\mathcal{A} \restriction X)$. Por el último inciso de 1.1.6, $\Phi_h(\mathcal{A}) \restriction h[X]$ es maximal en $h[X]$. ■

Las siguientes propiedades son esperables, pero no por ello menos útiles. Es importante no desdeñar sus pruebas, pues en ellas, hay un par de sutilezas que deben ser atendidas.

Proposición 1.3.8. *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{AD}(\omega)$ y $X, Y \in [\omega]^\omega$ arbitrarios.*

i) Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A} \restriction X \subseteq \mathcal{B} \restriction X$.

ii) Se da la igualdad $(\mathcal{A} \restriction Y) \restriction X = \mathcal{A} \restriction (Y \cap X)$.

iii) Si $X \subseteq Y$, entonces $\mathcal{I}_X(\mathcal{A} \restriction X) \subseteq \mathcal{I}_Y(\mathcal{A} \restriction Y)$.

Demostración. El punto (i) es claro.

(ii) Si $(A \cap Y) \cap X \in (\mathcal{A} \restriction Y) \restriction X$, entonces $A \cap Y \in \mathcal{A} \restriction Y$ y $(A \cap Y) \cap X = A \cap (Y \cap X)$ es infinito; luego, $A \in \mathcal{A}$ y $(A \cap Y) \cap X \in \mathcal{A} \restriction (Y \cap X)$. Recíprocamente, si $A \cap (Y \cap X) \in \mathcal{A} \restriction (Y \cap X)$, entonces $A \in \mathcal{A}$ y $A \cap (Y \cap X) = (A \cap Y) \cap X$ es infinito. Además, $A \cap (Y \cap X) \subseteq A \cap Y$, entonces $A \cap Y$ es infinito, por lo que $A \cap Y \in \mathcal{A} \restriction Y$ y así $A \cap (Y \cap X) = (A \cap Y) \cap X \in (\mathcal{A} \restriction Y) \restriction X$.

(iii) Supóngase que $X \subseteq Y$ y sea $B \in \mathcal{I}_X(\mathcal{A} \restriction X)$. Entonces $B \subseteq X \subseteq Y$ y existe $H \subseteq \mathcal{A} \restriction X$ finito tal que $B \subseteq^* \bigcup H$. Cada elemento $A \cap X \in H$ es infinito y está contenido en $A \cap Y$, luego $J := \{A \cap Y \mid A \cap X \in H\} \subseteq \mathcal{A} \restriction Y$ es finito y $B \subseteq^* \bigcup J$ y por lo tanto $B \in \mathcal{I}_Y(\mathcal{A} \restriction Y)$. ■

Si bien se demostró, tras la Definición 1.3.6, que la maximalidad de una familia implica la de cada una de sus trazas. La próxima observación muestra que la maximalidad de aquellas trazas tomadas sobre elementos del ideal generado no constituye una condición suficiente para concluir la maximalidad de la familia dada.

Proposición 1.3.9. *Sean $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$ y $X \in [\omega]^\omega$. Entonces $X \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$ si y sólo si la familia $\mathscr{A} \restriction X$ es finita y maximal en X.*

Demostración. Por el Corolario 1.3.5, basta mostrar que $X \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$ si y sólo si $X \in \mathscr{I}_X(\mathscr{A} \restriction X)$. Dado lo demostrado en 1.3.8, la necesidad de tal equivalencia es inmediata. Ahora, si $X \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$, entonces $X \subseteq^* \bigcup H$ para cierto $H \in [\mathscr{A}^{<\omega}]$. Luego $X \subseteq^* X \cap \bigcup H$ y la finitud de H implica que:

$$\begin{aligned} X &\subseteq^* \{A \cap X \in [X]^{<\omega} \mid A \in H\} \cup \{A \cap X \in [X]^\omega \mid A \in H\} \\ &=^* \{A \cap X \in [X]^\omega \mid A \in H\} \end{aligned}$$

probando que $X \in \mathscr{I}_X(\mathscr{A} \restriction X)$. ■

Como la familia vacía no es maximal, la Proposición anterior deja como reflexión que los únicos conjuntos que podrían ser testigos de que $\mathscr{A}$ no es maximal, son aquellos que pertenecen a la parte positiva de $\mathscr{A}$.

Corolario 1.3.10. *Si $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$, $\{X \in [\omega]^\omega \mid \mathscr{A} \restriction X = \varnothing\} \subseteq \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$.*

Si $X \in [\omega]^\omega$ y $\mathscr{A}$ es maximal, entonces X debe tener intersección infinita con algún elemento de $\mathscr{A}$. Los conjuntos de $\mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ tienen un comportamiento más fuerte en caso de que $\mathscr{A}$ sea maximal, cada uno de ellos tiene intersección infinita con una infinidad de elementos de $\mathscr{A}$.

Corolario 1.3.11. *Sea $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$. Entonces $\mathscr{A}$ es maximal si y sólo si para cada $X \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ la familia $\mathscr{A} \restriction X$ es infinita.*

Demostración. Suongase que $\mathscr{A}$ es maximal y sea $X \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$. Por la maximalidad de $\mathscr{A}$, se sigue de lo comentado tras la Definición 1.3.6 que $\mathscr{A} \restriction X$ es maximal en X. Por lo que, acorde a 1.3.9, $\mathscr{A} \restriction X$ debe ser infinita.

Recíprocamente, si $\mathscr{A}$ no es maximal, existe $B \in [\omega]^\omega$ casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$. Así, $\mathscr{A} \restriction B = \varnothing$ y se sigue de 1.3.10, que $B \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$. ■

El Corolario que se avecina es una manera de condensar de todo lo comentado y demostrado tras la Definición 1.3.6.

Corolario 1.3.12. *Sean N un conjunto numerable y $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(N)$. Entonces $\mathscr{A}$ es maximal si y sólo si ocurre alguna de las siguientes condiciones equivalentes:*

i) $\mathscr{I}_N^+(\mathscr{A}) \subseteq \{X \in [N]^\omega \mid \mathscr{A} \restriction X \neq^* \emptyset\}$.

ii) $\mathscr{I}_N^+(\mathscr{A}) \subseteq \{X \in [N]^\omega \mid \mathscr{A} \restriction X \in \mathrm{MAD}(X)\}$.

Además, las contenciones recíprocas siempre ocurren.

Demostración. Dados 1.3.9 y 1.3.11, basta probar que (ii) implica que $\mathscr{A}$ es maximal. En efecto, si $\mathscr{A}$ no es maximal, de 1.3.5 se desprende que $N \in \mathscr{I}_N^+(\mathscr{A})$. Siguiéndose de (ii) que $\mathscr{A} \restriction N = \mathscr{A} \in \mathrm{MAD}(N)$, lo cual es una contradicción. ■

1.4. Resultados en combinatoria infinita

1.4.1. Teorema de Simon

La siguiente observación, y el subsecuente Lema, configuran la antesala para enunciar uno de los tres resultados más importantes que figuran en esta sección.

Observación 1.4.1. *Para toda sucesión $(X_n)_{n\in\omega} \subseteq [\omega]^\omega$, que sea $\subseteq$-decreciente, existe $Y \in [X_0]^\omega$ tal que para cada $k \in \omega$, ocurre $Y \subseteq^* X_k$.*

En efecto, si $n \in \omega$, $\{y_m \mid m < n\} \subseteq \omega$ tiene exactamente n elementos y para cada $m < n$ se tiene $y_m \in X_m$; entonces $X_n \setminus \{y_m \mid m < n\}$ es infinito y se puede fijar $y_n \in X_n \setminus \{y_m \mid m < n\}$.

Así, $Y := \{y_n \mid n \in \omega\} \subseteq X_0$ es infinito y para cualquier $k \in \omega$ debe ocurrir que: $Y \setminus X_k \subseteq \{y_n \mid n < k\} =^* \emptyset$, esto es, $Y \subseteq^* X_k$.

Lema 1.4.2 (Dokálková)**.** *Sean $\mathscr{A} \in \mathrm{MAD}(\omega)$ y $(X_n)_{n\in\omega} \subseteq \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ una sucesión $\subseteq$-decreciente. Existe $Y \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ tal que si $n \in \omega$, entonces $Y \subseteq^* X_n$.*

Demostración. Se construirán por recursión, dos conjuntos enumerados inyectivamente; $\{Y_n \mid n \in \omega\} \subseteq [\omega]^\omega$ y $\{A_n \mid n \in \omega\} \subseteq \mathscr{A}$, tales que para cada $n \in \omega$ se cumple que $Y_n \subseteq X_n$; y, para cada $k \in \omega$, $Y_n \subseteq^* X_k$; y, $Y_n \cap A_n$ es infinito.

Sea $n \in \omega$ y supóngase que los conjuntos $\{Y_m \mid m < n\} \subseteq [\omega]^\omega$ y $\{A_m \mid m < n\} \subseteq \mathscr{A}$ tienen exactamente n elementos y son tales que si $m < n$, se satisface: $Y_m \subseteq X_m$; si $k \in \omega$, entonces $Y_m \subseteq^* X_k$; y, $Y_m \cap A_m$ es infinito.

A consecuencia de que el conjunto $\{A_m \mid m < n\} \subseteq \mathscr{A}$ es finito, resulta que $B := \bigcup\{A_m \mid m < n\} \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ y debido a ello:

$$(X_{n+k} \setminus B)_{k\in\omega} \subseteq \mathscr{I}^+(\mathscr{A}) \subseteq [\omega]^\omega$$

es una sucesión $\subseteq$-decreciente. Utilizando la Observación previa, fíjese (con AC) un conjunto infinito $Y_n \subseteq X_n$ tal que para cada $k \in \omega$ ocurre $Y_n \subseteq^* X_{n+k} \setminus B$ y nótese que por ser $(X_n)_{n\in\omega}$ sucesión $\subseteq$-decreciente, $Y \subseteq^* X_k$.

Como $Y_n \subseteq X_n \setminus B \subseteq \omega$ es infinito y $\mathscr{A}$ es maximal, se puede fijar (de nuevo, con AC) un elemento $A_n \in \mathscr{A}$ tal que $Y_n \cap A_n$ es infinito. Nótese que de la Definición de B y de $Y_n \cap B = \varnothing$, se desprende tanto que $Y_n \notin \{Y_m \mid m < n\}$, como que $A_n \notin \{A_m \mid m < n\}$; pues para cada $m < n$ se tiene que $Y_m \cap B$ es infinito, a razón de que $A_m \subseteq B$ y de que $A_m \cap Y_m$ es infinito, finalizando la construcción recursiva.

Sea $Y := \bigcup\{Y_n \mid n \in \omega\}$ y obsérvese que $\mathscr{A} \upharpoonright Y$ es infinita, pues cada A_n tiene intersección finita con Y. Luego, seguido del Corolario 1.3.11 y de que $\mathscr{A}$ es maximal, se obtiene $Y \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$. Por otro lado, si $n \in \omega$ es cualquiera, entonces:

$$Y \setminus X_n = \bigcup_{m<n}(Y_m \setminus X_n) \cup \bigcup_{m\geq n}(Y_m \setminus X_n) = \bigcup_{m<n}(Y_m \setminus X_n) =^* \varnothing$$

pues si $m < n$ entonces $Y_m \subseteq^* X_n$, y si $m \geq n$, entonces se dan las contenciones $Y_m \subseteq X_m \subseteq X_n$. Finalizando la prueba. ■

El siguiente resultado fue demostrado en 1980 por Petr Simon [13, p. 751] y tiene consecuencias importantes en topología general (véase el Corolario 3.2.4).

Teorema 1.4.3 (Simon)

Para toda familia maximal e infinita $\mathscr{A}$ existe un elemento $X \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ tal que la familia $\mathscr{A} \restriction X$ es maximal en X. Además $\mathscr{A} \restriction X$ es unión ajena de dos familias maximales en ninguna parte.

Demostración. Por contradicción, supóngase que $\mathscr{A}$ es una familia maximal infinita la cual, sin perder generalidad, la podemos suponer definida sobre ω, tal que para cada $X \in \mathcal{I}^+(\mathscr{A})$ o bien $\mathscr{A} \restriction X$ no es maximal en X, o bien, si $\mathscr{A} \restriction X$ es unión ajena de $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$, entonces $\mathscr{B}$ o $\mathscr{C}$ es maximal en alguna parte.

Como $|\mathscr{A}| \leq \mathfrak{c}$, existe $F \subseteq 2^\omega$ tal que $\mathscr{A}$ se puede enumerar inyectivamente como $\mathscr{A} = \{A_f \mid f \in F\}$. Dados $n \in \omega$ y $k \in 2$, defínase:

$$\mathscr{A}(n,k) = \{A_f \in \mathscr{A} \mid f(n) = k\}$$

y nótese que para todo m natural, $\mathscr{A}$ unión ajena de $\mathscr{A}(m,0)$ y $\mathscr{A}(m,1)$.

Constrúyanse; por recursión en ω, las sucesiones $(X_n)_{n\in\omega} \subseteq \mathcal{I}^+(\mathscr{A})$ y $(k_n)_{n\in\omega} \subseteq 2$, tales que si $n \in \omega$, se da $X_{n+1} \in \mathcal{I}^+_{X_n}(\mathscr{A}(0,k_n) \restriction X_n)$ y $\mathscr{A}(n,k_n) \restriction X_{n+1} \in \mathrm{MAD}(X_{n+1})$.

Como $\mathscr{A}$ es familia maximal e infinita, defínase $X_0 := \omega \in \mathcal{I}^+(\mathscr{A})$ (véase 1.3.5); así que $\mathscr{A} = \mathscr{A} \restriction X_0$ es maximal sobre X_0. Como $\mathscr{A}$ es unión ajena de $\mathscr{A}(0,0)$ y $\mathscr{A}(0,1)$, se sigue de la hipótesis la existencia de un elemento $k_0 \in 2$ tal que $\mathscr{A}(0,k_0)$ es maximal en ninguna parte. Con AC, fíjese un elemento $X_1 \in \mathcal{I}^+(\mathscr{A}(0,k_0)) = \mathcal{I}^+_{X_0}(\mathscr{A}(0,k_0) \restriction X_0)$ de forma tal que $(\mathscr{A}(0,k_0) \restriction X_0) \restriction X_1 = \mathscr{A}(0,k_0) \restriction X_1$ sea maximal en X_1. Como $X_1 \notin \mathcal{I}_{X_0}(\mathscr{A}(0,k_0) \restriction X_0)$ y $X_1 \subseteq X_0$, se desprende de Proposición 1.3.8 que $X_1 \in \mathcal{I}^+_{X_1}(\mathscr{A}(0,k_0) \restriction X_1)$, por lo que $\mathscr{A}(0,k_0) \restriction X_1$ es infinita, en virtud de su maximalidad y del Corolario 1.3.5. Así, $\mathscr{A} \restriction X_1$ es infinita, lo cual implica que $X_1 \in \mathcal{I}^+(\mathscr{A})$, pues $\mathscr{A}$ es maximal (véase 1.3.12).

Supóngase ahora que $n \in \omega$ y que $X_n, X_{n+1} \in \mathcal{I}^+(\mathscr{A})$ y $k_n \in 2$ son tales que $X_{n+1} \in \mathcal{I}^+_{X_n}(\mathscr{A}(n,k_n) \restriction X_n)$ de modo que $\mathscr{A}(n,k_n) \restriction X_{n+1}$ es maximal en X_{n+1}. Como $\mathscr{A}$ unión ajena de $\mathscr{A}(n+1,0)$ y $\mathscr{A}(n+1,1)$, $\mathscr{A} \restriction X_{n+1}$ es unión ajena de $\mathscr{A}(n+1,0) \restriction X_{n+1}$ y $\mathscr{A}(n+1,1) \restriction X_{n+1}$. De nuevo, con AC fíjense $k_{n+1} \in 2$ y $X_{n+2} \in \mathcal{I}^+_{X_{n+1}}(\mathscr{A}(n+1,k_{n+1}) \restriction X_{n+1})$ de modo tal que $\mathscr{A}(n+1,k_{n+1}) \restriction X_{n+2} \in \mathrm{MAD}(X_{n+2})$. Al igual que antes, se obtiene de 1.3.5 y 1.3.12, que $X_{n+2} \in \mathcal{I}^+(\mathscr{A})$, lo que finaliza la construcción recursiva.

Por construcción, $(X_n)_{n\in\omega} \subseteq \mathcal{I}^+(\mathscr{A})$ es $\subseteq$-decreciente, por lo que del Lema de Dokálková, existe un conjunto $Y \in \mathcal{I}^+(\mathscr{A})$ tal que para cada $n \in \omega$ se cumple

$Y \subseteq^* X_n$. Puesto que $Y \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ y $\mathcal{A}$ es maximal, de 1.3.12 se tiene que $\mathcal{A} \restriction Y$ es infinita, y con ello, existe $g \in F \setminus \{(k_n)_{n\in\omega}\} \subseteq 2^\omega$ tal que $A_g \cap Y$ es infinito. Siendo k distinta de g, hay un natural m tal que $k_m \neq g(m)$.

Como $Y \subseteq^* X_{m+1}$, entonces $Y \setminus X_{m+1}$ es finito. Luego, derivado de que $Y \cap A_g$ es infinito, se obtiene que $A_g \cap X_{m+1} \subseteq X_{m+1}$ es infinito. Así, por la maximalidad de $\mathcal{A}(m, k_m) \restriction X_{m+1}$ en X_{m+1} se obtiene un $A_f \in \mathcal{A}(m, k_m)$ tal que $(A_g \cap X_{m+1}) \cap (A_f \cap X_{m+1})$ es infinito. Sin embargo, lo anterior conduce a una contradicción, pues $f(m) = k_m \neq g(m)$ implica que $f \neq g$, y esto a su vez, que $A_f \cap A_g$ es finito por ser $\mathcal{A}$ familia casi ajena. ■

Corolario 1.4.4. *Existe una familia maximal de tamaño $\mathfrak{c}$ que es unión ajena de dos familias maximales en ninguna parte.*

1.4.2. Familias y grietas de Luzin

Definición 1.4.5. *Sea N un conjunto numerable y $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{AD}(N)$.*

*i) El par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es una **grieta** si y sólo si $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$ y $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \in \mathrm{AD}(N)$. Se suele decir que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ **está contenida** en $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, o que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ **contiene a** $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.*

*ii) Un subconjunto $D \subseteq N$ es **particionador** de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ si y sólo si para cada $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$ se tiene $A \subseteq^* D$ y $B \cap D =^* \varnothing$.*

*iii) Una grieta $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ está **separada** si y sólo si existe un particionador de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.*

En términos de la definición anterior, no resulta complicado notar que D es particionador de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ si y sólo si $N \setminus D$ es particionador de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$. Además, en tal caso $\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \mid X \subseteq^* D\}$ y $\mathcal{B} = \{X \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \mid X \cap D =^* \varnothing\}$.

Como ha resultado ser rutina a lo largo de todo el capítulo, se deberá hacer hincapié en el comportamiento de las grietas respecto a las biyecciones Φ_h. La demostración de este hecho resulta estándar.

Observación 1.4.6. *Sean N y M conjuntos numerables. Para toda biyección $h : N \to M$ y toda grieta $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ en N se cumple:*

i) $(\Phi_h(\mathscr{A}), \Phi_h(\mathscr{B}))$ *es grieta en M.*

ii) $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ *está separada si y sólo si* $(\Phi_h(\mathscr{A}), \Phi_h(\mathscr{B}))$ *está separada.*

En virtud de lo anterior, cada vez que $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ sea grieta; y salvo que se diga lo contrario, se dará por sentado que $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathrm{AD}(\omega)$

Observación 1.4.7. *Para cualesquiera grietas $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ y $(\mathscr{A}', \mathscr{B}')$:*

i) $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{I}^+(\mathscr{B})$ *y* $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ *(seguido de la Observación 1.3.3).*

ii) $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ *está separada si y sólo si* $(\mathscr{B}, \mathscr{A})$ *está separada.*

iii) Si $(\mathscr{A}', \mathscr{B}')$ está separada, $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}'$ y $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}'$, entonces $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ está separada.

A continuación se dan dos hechos básicos sobre la separación de grietas; y sin bien se podrían exponer las correspondientes demostraciones disponiendo solamente de la artillería dada hasta el momento, se dejarán a modo de corolario de la teoría resultante de los Ψ-espacios (véase 4.1.5).

Ejemplo 1.4.8. *Sea $\mathscr{C} \in \mathrm{AD}(\omega)$, entonces:*

i) Si $|\mathscr{C}| \leq \aleph_0$, entonces cualquier grieta contenida en $\mathscr{C}$ está separada.

ii) Si $\mathscr{C}$ es inifnita y, $|\mathscr{C}| = \mathfrak{c}$ o $\mathscr{C} \in \mathrm{MAD}(\omega)$; entonces $\mathscr{C}$ contiene una grieta que no está separada.

El siguiente tipo de familias poseen virtudes que las convierten en objetos de suma relevancia para la teoria de conjuntos.

Definición 1.4.9. *Una familia casi ajena $\mathscr{A}$ es* **de Luzin** *si existe $X \in [\omega_1]^{\omega_1}$ de forma que $\mathscr{A}$ se puede enumerar como $\{A_\alpha \mid \alpha \in X\}$ y se cumple que para todo $(\alpha, n) \in \omega_1 \times \omega$, el conjunto $\{\beta < \alpha \mid A_\alpha \cap A_\beta \subseteq n\}$ es finito.*

Una de las ideas centrales detrás de que $\mathscr{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ sea de Luzin es que; fijando $\alpha \in \omega_1$, para cada $D \subseteq \alpha$ infinito, $A_\alpha \cap \bigcup\{A_\beta \mid \beta \in D\}$ es infinito. Esto se debe a que si $n \in \omega$, entonces $D \setminus \{\beta < \alpha \mid A_\alpha \cap A_\beta \subseteq n\}$ es infinito, particularmente no vacío.

Proposición 1.4.10. *Toda familia casi ajena numerable se extiende a una familia de Luzin. Particularmente, existe una familia de Luzin.*

Demostración. Sea $\mathscr{B} = \{A_n \mid n \in \omega\}$ cualquier familia casi ajena numerable y nóntese que claramente para cualesquiera $m, n \in \omega$, el conjunto $\{k < m \mid A_m \cap A_k \subseteq n\}$ es finito.

Por recursión sobre $\omega_1 \setminus \omega$, sea $\gamma \in \omega_1 \setminus \omega$ cualquiera y supóngase $\{A_\alpha \mid \alpha \in \gamma\}$ es una familia casi ajena tal que, si $\alpha < \gamma$ y $n \in \omega$, el conjunto $\{\beta < \alpha \mid A_\alpha \cap A_\beta \subseteq n\}$ es finito.

Como $\gamma \in \omega \setminus \omega_1$, γ es numerable y se puede enumerar $\{A_\alpha \mid \alpha \in \gamma\}$ como $\{B_n \mid n \in \omega\}$. Por ser tal, una familia casi ajena, cada conjunto $C_n := B_n \setminus \bigcup\{B_j \mid j < n\}$ es infinito (corrobórese ésto en la demostración de 1.1.11). Para cada $n \in \omega$ fíjese $a_n \in [C_n]^n$ y defínase:

$$A_\gamma := \bigcup\{a_m \mid m \in \omega\}$$

Nótese que si $n \neq m$, entonces $a_n \cap a_m = \emptyset$. De este modo, si $n \in \omega$ es cualquiera, resulta que $A_\gamma \cap B_n = a_n \cap B_n = a_n$ es finito. Más aún, como a_n tiene exatamente n elementos, $n \leq \text{máx}(A_n)$; y consecuentemente, si $m \in \omega$ y $A_\gamma \cap B_n \subseteq m$, entonces $n \leq m$.

Lo anterior prueba, no sólo que $\{A_\alpha \mid \alpha \ \leq \gamma\}$ es familia casi ajena, sino que para cualesquiera $\alpha \leq \gamma$ y $n \in \omega$, el conjunto $\{\beta < \alpha \mid A_\alpha \cap A_\beta \subseteq n\}$ es finito. Lo cual finaliza la construcción por recursión de los conjuntos A_α (con $\omega \leq \alpha < \omega_1$); es claro que para $\mathscr{A} := \{A_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ es una familia Luzin que extiende a $\mathscr{B}$. ■

Cualquier familia de Luizn cumplirá que ninguna grieta formada por sus subconjuntos más que numerables está separada; es decir, es una *familia inseparable* (siguiendo la nomenclatura expuesta en [2, § 3.2]).

Obsérvese que si $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ son familias casi ajenas de modo que $\bigcup \mathscr{B} \cap \bigcup \mathscr{C}$ es finito, entonces $\bigcup \mathscr{B}$ es separador de $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$, así $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ está separada. Pese a no ocurrir el recíproco de lo anterior, se configura la siguiente caracterización.

Lema 1.4.11. *Sea $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$, entonces $\mathscr{A}$ es inseparable si y sólo si para cualesquiera $\mathscr{B}, \mathscr{C} \in [\mathscr{A}]^{\omega_1}$ ajenos, $\bigcup \mathscr{B} \cap \bigcup \mathscr{C}$ es infinito.*

Demostración. Por la discusión previa, basta sólo probar la necesidad.

Por contrapuesta, supóngase que $\mathscr{B}, \mathscr{C} \in [\mathscr{A}]^{\omega_1}$ son tales que existe $D \subseteq \omega$, particionador de $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$. Entonces las asignaciones $\mathscr{B} \to \omega$ y $\mathscr{C} \to \omega$; dadas por $b \longmapsto \text{máx}(b \setminus D)$ y $c \longmapsto \text{máx}(c \cap D)$ están bien definidas. Pero en vista de que $|\mathscr{B}| = |\mathscr{C}| = \omega_1$, estas no pueden ser inyectivas, y existen $m, n \in \omega$ de modo que $\mathscr{B}' := \{b \in \mathscr{B} \mid b \setminus D \subseteq m\}$ y $\mathscr{C}' := \{b \in \mathscr{C} \mid c \cap D \subseteq n\}$ tienen tamaño ω_1.

Además $\bigcup \mathscr{B}' \setminus D \subseteq m =^* \varnothing$ y $\bigcup \mathscr{C}' \cap D \subseteq n =^* \varnothing$, por lo que $\bigcap \mathscr{B} \subseteq^* D$, $\bigcap \mathscr{C} \subseteq^* \omega \setminus D$, y así, $\bigcup \mathscr{B}' \cap \bigcup \mathscr{C}' \subseteq^* D \cap (\omega \setminus D) = \varnothing$. ■

Proposición 1.4.12. *Cualquier familia Luzin es inseparable.*

Demostración. Sean $\mathscr{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ cualquier familia de Luzin y $\mathscr{B} = \{A_\alpha \mid \alpha \in B\}, \mathscr{C} = \{A_\alpha \mid \alpha \in C\} \subseteq \mathscr{A}$ no numerables y ajenos. Como C es infinito, existe $\alpha \in \omega_1$ de manera que $C \cap \alpha$ es infinito. Nótese que B es cofinal en ω_1, por ser ω_1 regular; así que sin pérdida de generalidad, supóngase $\alpha \in B$.

En virtud de los comentarios posteriores a la Definición 1.4.9, se tiene que $A_\alpha \cap \bigcup \{A_\beta \mid \beta \in C \cap \alpha\}$ es infinito, demostrando que $\bigcup \mathscr{B} \cap \bigcup \mathscr{C}$ es infinito. Se concluye del lema previo que $\mathscr{A}$ es inseparable. ■

De manera casi dual al concepto de familia inseparable, existe el concepto de *familia parcialmente separable*; esto es, una familia casi ajena $\mathscr{A}$ tal que si $\mathscr{B}, \mathscr{C} \in [\mathscr{A}]^{\omega_1}$ son ajenas, entonces existen $\mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}$ y $\mathscr{C}' \subseteq \mathscr{C}$ tales que la grieta

$(\mathscr{B}', \mathscr{C}')$ está separada. Los siguientes objetos surgen como una suerte de debilitamiento para la condición de familia de Luzin, pues jamás resultan ser parcialmente separables.

Definición 1.4.13. *Sea $n \in \omega \backslash 2$. Una n-**grieta de Luzin** es un n-ada $(\mathscr{A}_i \mid i \in I)$ de familias casi ajenas, disjuntas entre sí, tales que existen $X \in [\omega_1]^{\omega_1}$ y $m \in \omega$, de modo que cada $\mathscr{A}_i$ se puede enumerar como $\{A^i_\alpha \mid \alpha \in X\}$ y se cumple que si $\alpha, \beta \in X$:*

i) Para cualesquiera $i, j \in n$ distintos, $A^i_\alpha \cap A^j_\alpha \subseteq m$.

ii) Si $\alpha \neq \beta$, entonces $\bigcup\{A^i_\alpha \cap A^j_\beta \mid i, j \in n \wedge i \neq j\} \nsubseteq m$.

*A los conjuntos X y m se les llama testigos de que $(\mathscr{A}_i \mid i \in I)$ es n-grieta de Luzin. Una 2-grieta de Luzin se denomina simplemente **grieta de Luzin**.*

Una observación pertiente es que las n-grietas de Luzin poseen un comportamiento en común a las familias Luzin, el comentado posteriormente a la Definición 1.4.9. Inclusive, en según qué literatura se consulte, se suelen confundir los términos “familia de Luzin” y “grieta de Luzin”.

Lema 1.4.14. *Sea $(\mathscr{A}_i \mid i \in I)$ una n- grieta de Luzin con testigos X y m. Para cada $Y \subseteq X$ no numerable, existe $Y' \subseteq Y$ no numerable tal que para cualesquiera $\alpha, \beta \in Y'$ distintos, $\bigcup\{A^i_\alpha \cap A^j_\beta \mid i, j \in n \wedge i \neq j\}$ es infinito.*

Demostración. Sea $k \in \omega \setminus m$. Para cada $i \in n$ sea $f_i : Y \to \omega$ dada por $f(\alpha) = A^i_\alpha \cap k$. Como f_0 no es inyectiva, existe $Y_0 \subseteq Y$ de modo que $f_0 \upharpoonright Y_0$ es constante. Sea ahora $j \in n \setminus \{n\}$ y supóngase que $Y_j \subseteq Y$ es no numerable y tal que para cada $l < j$ se cumple que $Y_j \subseteq Y_l$ y que $f_j \upharpoonright Y_l$ es constante. Como $f_{j+1} \upharpoonright Y_j$ no es ineyctiva, pues Y_j no es numerable, fíjese $Y_{j+1} \subseteq Y_j \subseteq Y$ no numerable de modo que f_{j+1} es constante en Y_{j+1}. Finalizando esta recursión se obtiene que $Y' := \bigcap\{Y_i \mid i \in n\}$ es un subconjunto no numerable de Y tal que para cada $i \in n$, f_i es constante en Y'.

Sean $\alpha, \beta \in Y'$ distintos, como $(\mathscr{A}_i \mid i \in I)$ es n-grieta de Luzin, existen $i, j \in n$ diferentes de manera que $A^i_\alpha \cap A^j_\beta \nsubseteq m$. Como f_i es constante en Y', entonces $A^i_\alpha \cap k = A^i_\beta \cap k$; y, como $A^i_\beta \cap A^j_\beta \subseteq m \subseteq k$, resulta necesario que $A^i_\alpha \cap A^j_\beta \nsubseteq k$. Dada la arbitrariedad de k, se concluye que $\bigcup\{A^i_\alpha \cap A^j_\beta \mid i, j \in n \wedge i \neq j\}$ es infinito. ■

Corolario 1.4.15. *Si una familia casi ajena es parcialmente separable, no puede contener ninguna n-grieta de Luzin.*

Demostración. Sea $(\mathscr{A}_i \mid i \in I)$ una n- grieta de Luzin con testigos X y m. Si $\mathscr{A} \supseteq \bigcup\{\mathscr{A}_i \mid i \in n\}$, entonces dado el Lema previo, para cualesquiera $i, j \in n$ distintos, existen $\alpha, \beta \in X$ diferentes de modo que $\bigcup\{A^i_\alpha \cap A^j_\beta \mid i, j \in n \wedge i \neq j\}$ es infinito. Es decir, $\bigcup \mathscr{A}_i \cap \bigcup \mathscr{A}_j$ es infinito, siguiéndose la conclusión automáticamente de 1.4.11. ■

La siguiente Proposición deja en claro la labor de "debilitamiento" que cumplen las n-grietas de Luzin respecto a las familias de Luzin; resulta que, cualquiera de estas últimas contiene siempre una (2-)grieta de Luzin. La prueba del hecho en cuestión requiere invocar el *Lema de Fodor* **(ver REFE)** y el hecho de que siempre existen funciones ordinales como las solicitadas en la subsecuente prueba.

Proposición 1.4.16. *Toda familia de Luzin contiene una grieta de Luzin.*

Demostración. Sea $\mathscr{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ una familia de Luzin y $f, g : \omega_1 \to \omega_1$ tales que si $\beta < \alpha < \omega_1$, entonces $g(\beta) < f(\beta) < g(\alpha)$.

Como $\omega_1 \setminus \omega$ es estacionario en ω_1 y la asignación $j : \omega_1 \setminus \omega \to \omega_1$; dada por $j(\alpha) = \text{máx}(A_{f(\alpha)} \cap A_{g(\alpha)}) + 1$, es regresiva, en virtud del Lema de Fodor, existen $S \subseteq \omega_1 \setminus \omega$ estacionario en ω_1 y un natural m tales que $j[S] \subseteq \{m\}$.

Ahora, si $\beta < \alpha$, entonces $f(\beta) < g(\alpha)$, de modo que $f[\{\beta < \alpha \mid A_{f(\beta)} \cap A_{g(\alpha)} \subseteq m\}] \subseteq \{\gamma < g(\alpha) \mid A_{g(\alpha)} \subseteq m\}$. Como $\mathscr{A}$ es de Luzin y f es inyectiva (por ser estrictamente creciente), el conjunto $\{\beta < \alpha \mid A_{f(\beta)} \cap A_{g(\alpha)} \subseteq m\}$ es finito, permitiendo la buena definición de $l : S \to \omega_1$ dada por:

$$l(\alpha) = \begin{cases} 0 & ; \ \forall\gamma < \alpha(A_{f(\gamma)} \cap A_{g(\alpha)} \nsubseteq m) \\ \text{máx}\{\gamma < \alpha \mid A_{f(\gamma)} \cap A_{g(\alpha)} \subseteq m\} & ; \ \text{otro caso} \end{cases}$$

Como $0 \notin S$, l es regresiva; nuevamente, del Lema de Fodor, se sigue la existencia de un conjunto $X \subseteq S$, estacionario en ω_1, tal que l es constante en X. Así, para cualesquiera $\alpha, \beta \in X$:

i) Como $X \subseteq S$ y $j[S] \subseteq \{m\}$, entonces $m = \text{máx}(A_{f(\alpha)} \cap A_{f(\alpha)}) + 1$ y en consecuencia $A_{f(\alpha)} \cap A_{f(\alpha)} \subseteq m$.

ii) Supóngase que $\beta < \alpha$, como l es constante en X, $l(\alpha) = l(\beta)$. Si este último valor es cero, entonces $A_{f(\beta)} \cap A_{g(\alpha)} \nsubseteq m$. En caso contrario:

$$0 \neq l(\alpha) = l(\beta) < \beta < \alpha$$

y como $l(\alpha) < \beta < \alpha$, la definición de l obliga a que $A_{f(\beta)} \cap A_{g(\alpha)} \nsubseteq m$.

Los puntos anteriores demuestran que $(\{A_{f(\alpha)} \mid \alpha \in X\}, \{A_{g(\alpha)} \mid \alpha \in X\})$ es una grieta de Luzin (con testigos X y m). ■

1.4.3. Lema de Solovay

Definición 1.4.17. *Sea $\mathscr{A}$ una familia casi ajena. El **orden basado en** $\mathscr{A}$ es el par:*

$$\mathbb{P}_{\mathscr{A}} := ([\omega]^{<\omega} \times [\mathscr{A}]^{<\omega}, \leq_{\mathscr{A}})$$

donde $(p, P) \leq_{\mathscr{A}} (h, H)$ si y sólo si $h \subseteq p$, $H \subseteq P$ y $p \setminus h \subseteq \omega \setminus \bigcup H$.

Cuando el contexto sea claro, se escribirá $\leq$ en vez de $\leq_{\mathscr{A}}$.

Habrá de verificarse que el orden basado en $\mathscr{A}$ es, en efecto, un orden parcial. Claramente es una relación reflexiva y antisimétrica. Ahora, si $(p, P) \leq (h, H)$ y $(h, H) \leq (k, K)$, es inmediato a la definición de $\leq_{\mathscr{A}}$ que $k \subseteq h \subseteq p$ y $K \subseteq H \subseteq P$;

en consecuencia $k \subseteq p$ y $K \subseteq P$. Además $p \setminus h \subseteq \omega \setminus \bigcup H$ y $h \setminus k \subseteq \omega \setminus \bigcup K$, resultando en que:

$$p \setminus k \subseteq (h \setminus k) \cup (p \setminus h) \subseteq \left(\omega \setminus \bigcup K\right) \cup \left(\omega \setminus \bigcup H\right)$$

mostrando $p \setminus k \subseteq \omega \setminus \bigcup K$, por lo que $\leq$ es transitiva, y con ello, orden parcial.

En términos informales, $(p, P) \leq (h, H)$ significa que "h se extiende a p y H a P". Conforme $H \subseteq \mathscr{A}$ crece, se aproxima a $\mathscr{A}$. Dado que, conforme h crece, este se acerca a un subconjunto casi ajeno con $\bigcup H$; eventualmente, se formará un subconjunto casi ajeno con $\bigcup \mathscr{A}$.

Consideración 1.4.18. *En lo que resta de la subsección:*

i) Para cada $a \in \mathscr{A}$, $D_a := \{(p, P) \in \mathbb{P}_{\mathscr{A}} \mid a \in P\}$.

ii) Si $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{P}_{\mathscr{A}}$, $D_{\mathcal{G}} := \bigcup \{h \subseteq \omega \mid \exists H \in [\omega]^{\omega} \left((h, H) \in \mathcal{G}\right)\}$.

Lema 1.4.19. *Sean* $\mathscr{A}$ *una familia casi ajena, y* $\mathcal{G}$ *un filtro de* $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$*, entonces para cada* $a \in \mathscr{A}$*:*

i) D_a *es denso en* $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$.

ii) Si $\mathcal{G} \cap D_a \neq \emptyset$*; entonces,* $D_{\mathcal{G}} \cap a$ *es finito.*

Demostración. (i) Si $a \in \mathscr{A}$ y $(p, P) \in \mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ son elementos arbitrarios, entonces $(p, P \cup \{a\}) \in D_a$ y además es inmediato a la Definición 1.4.17 que $(p, P \cup \{a\}) \leq (p, P)$.

(ii) Supóngase que $(p, P) \in \mathcal{G} \cap D_a$ y sea $x \in D_{\mathcal{G}} \cap a$ cualquier elemento. Por definición de $D_{\mathcal{G}}$, existe $(h, H) \in \mathcal{G}$ de modo que $x \in h$. Y por ser $\mathcal{G}$ filtro, $(k, K) \leq (p, P), (h, H)$ para cierto $(k, K) \in \mathcal{G}$. De esto, particularmente se obtiene que $h \subseteq k$, $k \setminus p \subseteq \omega \setminus \bigcup P$.

Ahora, como $a \in P$ (pues $(p, P) \in D_a$), se tiene que $x \in \bigcap P$. Además, $x \in h \subseteq k$, así que $x \in k \cap \bigcup P$, lo cual obliga a que $x \in p$. Por tanto $D_{\mathcal{G}} \cap a \subseteq p =^* \emptyset$. ∎

Corolario 1.4.20. *Sean* $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$ *y* $\mathscr{D} := \{D_a \mid a \in \mathscr{A}\}$. *Si existe un filtro* $\mathscr{D}$*-genérico,* $\mathscr{A}$ *no es maximal.*

Debido a lo recién mostrado, de tener $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ la *c.c.c.* **(ver PRELIMS)**, se satisfaría que $\mathrm{MA}(|\mathscr{A}|)$ implica $\mathscr{A} \notin \mathrm{MAD}(\omega)$.

Y en efecto, si $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ es anticadena y $(p,P),(h,H) \in \mathcal{A}$, se tiene $p \neq h$; sino $(p, P \cup H) \leq (p,P),(h,H)$ y $\mathcal{A}$ dejaría de ser anticadena. En consecuencia $|\mathcal{A}| \leq |[\omega]^{<\omega}| = \aleph_0$ y $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ tiene la *c.c.c.*

Corolario 1.4.21. *Si* κ *un cardinal con* $\omega \leq \kappa < \mathfrak{c}$*; bajo* $\mathrm{MA}(\kappa)$*, se tiene* $\mathrm{MAD}(\omega) \subseteq [[\omega]^{\omega}]^{>\kappa}$*; y por ello* $\mathfrak{a} > \kappa$*. Consecuentemente:*

i) $\mathrm{ZFC} \vdash \mathfrak{m} \leq \mathfrak{a}$

ii) $\mathrm{ZFC} + \mathrm{MA} \vdash \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$.

iii) $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ *es estrictamente más débil que* CH.

Demostración. Únicamente falta verificar (iii). Basta tener en cuenta que $\mathrm{MA} + \neg\,\mathrm{CH}$ es consistente con ZFC (consúltese [7, p. 279-281]); así que de (iii), se obtiene que $\mathrm{ZFC} + \mathrm{MA} + \neg\,\mathrm{CH} \vdash \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$. Por ende, $\mathrm{ZFC} + \mathfrak{a} = \mathfrak{c} \nvdash \mathrm{CH}$. ■

El Corolario 1.4.20 es una inmediatez, dada toda su discusión previa. Una versión bastante más fortalecida de este, es el siguiente resultado mostrado por Robert Solovay.

Lema 1.4.22 (Solovay)**.** *Sea* κ *un cardinal de modo que* $\omega \leq \kappa < \mathfrak{c}$*. Bajo* $\mathrm{MA}(\kappa)$*; para toda grieta* $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$*; con* $|\mathscr{A}|, |\mathscr{B}| \leq \kappa$*, existe* $D \subseteq \mathscr{A}$ *tal que para cada* $A \in \mathscr{A}$ *y* $b \in \mathscr{B}$*,* $a \cap D =^* \varnothing$ *y* $b \cap D \neq^* \varnothing$*.*

Demostración. Supóngase $\mathrm{MA}(\kappa)$ y sea $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ una grieta de forma que $|\mathscr{A}|, |\mathscr{B}| \leq \kappa$. Para cualesquiera $b \in \mathscr{B}$ y $n \in \omega$, defínase el conjunto $D(b,n) := \{(h,H) \in \mathbb{P}_{\mathscr{A}} \mid h \cap b \nsubseteq n\}$.

Cada $D(b,n)$ es denso en $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$. Sea $(p,P) \in \mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ cualquiera; por 1.4.7, $b \notin \mathscr{I}(\mathscr{A})$, luego $b \setminus \bigcup P$ es infinito. Por ello, existe $m \in \omega$ de modo que $n+1 \in m$ y $m \in b \setminus \bigcup P \subseteq \omega \setminus \bigcup P$; así, $p \cup \{m\}$ es finito, $(p \cup \{m\}, P) \in D(b,n)$ y $(p \cup \{m\}, P) \leq_{\mathscr{A}} (p,P)$.

Sea $\mathscr{D} = \{D(b,n) \mid (b,n) \in \mathscr{B} \times \omega\} \cup \{D_a \mid a \in \mathscr{A}\}$ y obsérvese que $\mathscr{D}$ es una familia de densos de $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ de cardinalidad menor o igual a κ. Como $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ es *c.c.c.*, de $\mathrm{MA}(\kappa)$ se desprende la existencia de un filtro $\mathcal{G}$ en $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$, $\mathscr{D}$-genérico. Se afirma que $D_{\mathcal{G}}$ es el conjunto buscado.

En efecto, por 1.4.19 se tiene que para cada $a \in \mathscr{A}$, el conjunto $D_{\mathcal{G}} \cap a$ es finito. Ahora, si $b \in \mathscr{B}$ es cualquiera, para cada $n \in \omega$ existe $(k,K) \in \mathcal{G} \cap D(b,n)$; y en consecuencia $D_{\mathcal{G}} \cap b \nsubseteq n$ (pues $h \cap b \nsubseteq n$). Por lo que el conujunto $D_{\mathcal{G}} \cap b$ no puede ser finito. ■

Sería deseable que la conclusión del Lema de Solovay fuese que la grieta $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ está separada; sin embargo tal formulación desemboca en un resultado falso.

Bajo MA +¬ CH, la existencia de una familia de Luzin (probada en 1.4.12) sería testigo de tal falsedad. Se puede decir que si una grieta $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ satisface la conclusión de 1.4.22, entonces está *débilmente separada* (siguiendo la terminología de [2, § 3.2]), si D es como en la conclusión de 1.4.22.

La siguiente es una aplicación típica quel lema de Solovay, una prueba sencilla de la consistencia, respecto a ZFC, del enunciado $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$. Como se podrá verificar en secciones futuras de este escrito, el enunciado $2^{\aleph_1} = 2^{\aleph_0}$ y su negación $2^{\aleph_1} > 2^{\aleph_0}$, tendrán repercusiones en el comportamiento topológico de los Ψ-espacios. Especialmente, se mostrarán sus efectos sobre la Conjetura de Moore (véase Subsección 4.1.1).

Corolario 1.4.23. *Sea κ un cardinal con $\omega \leq \kappa < \mathfrak{c}$, entonces bajo* $\mathrm{MA}(\kappa)$*, se tiene* $2^{\kappa} = \mathfrak{c}$.

Consecuentemente, es consistente con ZFC *que* $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$

Demostración. Sea κ un cardinal con $\omega \leq \kappa < \mathfrak{c}$ y supóngase $\mathrm{MA}(\kappa)$. Tomando en cuenta 1.2.6, fíjese una familia casi ajena $\mathscr{A}$ con $|\mathscr{A}| = \kappa$ y defínase $f : \mathscr{P}(\omega) \to \mathscr{P}(\mathscr{A})$ como $f(X) = \{b \in \mathscr{A} \mid b \cap X =^* \varnothing\}$.

Si $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ es cualquiera, entonces $|\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}|, |\mathscr{B}| \leq \kappa$ y por el Lema de Solovay (1.4.22), existe un particionador $D \subseteq \omega$ para $\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}$ y $\mathscr{B}$, resultando en que $f(D) = \{b \in \mathscr{A} \mid b \cap X =^* \varnothing\} = \mathscr{B}$. Luego f es sobreyectiva y $\mathfrak{c} \geq 2^\kappa$. Como además $\kappa \geq \aleph_0$, entonces $2^\kappa \geq 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Para la segunda parte, $\neg$ CH + MA es consistente con ZFC. Y como $\neg$ CH y MA implican MA($\aleph_1$) y $\omega \leq \aleph_1 < \mathfrak{c}$, se tiene por consiguiente que ZFC $+\neg$ CH + MA $\vdash 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$. ∎

2 Espacios de Isbell-Mrówka

Los Ψ-espacios; o espacios de Mrówka, cuentan con un lugar privilegiado en la topología de conjuntos; esto se debe a que son, entre otras cosas, espacios idóneos para la búsqueda de ejemplos. Esta virtud tiene por motivo las múltiples caracterizaciones que existen para sus propiedades topológicas.

La intención primordial del presente capítulo es presentar aspectos; en primer lugar, cubrir la definición de los Ψ-espacios y exhibir sus propiedades topológicas elementales; y en segundo lugar, dar una caracterización para los espacios de Mrówka en términos de propiedades topológicas, el hoy conocido como Teorema de Kannan y Rajagopalan.

2.1. Ψ-espacios y caracterizaciones elementales

Dada $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$, se satisface que $\omega \cap \mathscr{A} = \emptyset$. Por cómo se define la topología de Isbell-Mrókwa (en un conjunto N, dada $\mathscr{A} \subseteq [N]^{\omega}$), es conveniente establecer lo siguiente.

Consideración 2.1.1. *A partir de ahora, siempre que N sea un conjunto numerable y $\mathscr{A} \subseteq [N]^{\omega}$, se asumirá que $N \cap \mathscr{A} = \emptyset$.*

En el espacio (de ordinales) $X = \omega + 1$, cada punto de ω es aislado, pero el punto $\omega \in X$; situado "en la periferia" de X, se mantiene cercano al subconjunto $\omega \subseteq X$ del espacio.

Los Ψ-espacios tienen por conjunto subyacente a $\omega \cup \mathscr{A}$; y pueden ser vistos como una forma generalizada de $\omega + 1$. Se configura su topología de modo que ω es una masa de puntos aislados, y cada punto $\omega \cup \mathscr{A}$ "en la periferia del espacio" permanece cercano al subconjunto $a \subseteq \omega \cup \mathscr{A}$ del espacio.

Proposición 2.1.2. *Sean N un conjunto numerable y $\mathscr{A} \subseteq [N]^\omega$. La siguiente colección es una topología para $N \cup \mathscr{A}$.*

$$\mathscr{T}_{N,\mathscr{A}} := \{U \subseteq N \cup \mathscr{A} \mid \forall x \in U \cap \mathscr{A}\ (x \subseteq^* U)\}$$

Demostración. Resulta evidente que $\varnothing, N \cup \mathscr{A} \in \mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$. Ahora, dados $U, V \in \mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$ y $x \in (U \cap V) \cap \mathscr{A}$ cualquiera, $x \subseteq^* U$ y $x \subseteq^* V$, de donde $x \subseteq^* U \cap V$ y $U \cap V \in \mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$. Finalmente, dados $\mathcal{U} \subseteq \mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$ y $x \in \bigcup \mathcal{U} \cap \mathscr{A}$ arbitrarios, existe $U_0 \in \mathcal{U}$ con $x \in U_0$; así que $x \subseteq^* U_0$ y consecuentemente $x \setminus U_0$ es finito. Como $x \setminus \bigcup \mathcal{U} \subseteq x \setminus U_0$, resulta que $x \subseteq^* \bigcup \mathcal{U}$ y así $\bigcup \mathcal{U} \in \mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$. ■

Definición 2.1.3. *Sean N un conjunto numerable y $\mathscr{A} \subseteq [N]^\omega$.*

*i) La colección $\mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$ de la Proposición anterior es la **Topología de Mrówka (de Isbell-Mrókwa) generada por** $\mathscr{A}$.*

*ii) El Ψ-**espacio generado por** $\mathscr{A}$ se denota por $\Psi_N(\mathscr{A})$, y consta del conjunto $N \cup \mathscr{A}$ dotado con su topología $\mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$.*

Si $N = \omega$, se denotarán $\mathscr{T}_{\mathscr{A}} := \mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$ y $\Psi(\mathscr{A}) = \Psi_N(\mathscr{A})$.

Previo a abordar otros temas, se mostrará por qué; a efectos topológicos, bastará considerar familias de subconjuntos de ω.

Proposición 2.1.4. *Sean N, M conjuntos numerables, $\mathscr{A} \subseteq [N]^\omega$ arbitraria y $h : N \to M$ una biyección. Entonces $\Psi_N(\mathscr{A}) \cong \Psi_M(\Phi_h(\mathscr{A}))$.*

Demostración. Sea $f : \Psi_N(\mathscr{A}) \to \Psi_M(\Phi_h(\mathscr{A}))$ definida por medio de $f(x) = h(x)$ si $x \in N$ y $f(x) = h[x]$ si $x \in \mathscr{A}$. Nótese que; por la Consideración 2.1.1, f es biyectiva. Además, por definición de f, y como $\Psi_h^{-1} = \Phi_{h^{-1}}$, basta verificar únicamente la continuidad de f.

Sea U abierto en $\Psi_M(\Phi_h(\mathscr{A}))$ y supóngase que $x \in f^{-1}[U] \cap \mathscr{A}$. Entonces $f(x) = h[x] \in U \cap \Phi_h(\mathscr{A})$. Como U es abierto en $\Psi_M(\Phi_h(\mathscr{A}))$, entonces $f(x) \setminus U$

es finito. Así que $f^{-1}[f(x)\setminus U] = h^{-1}[h(x)] \setminus f^{-1}[U] = x \setminus f^{-1}[U]$ es finito y así $x \subseteq^* f^{-1}[U]$, probando $f^{-1}[U]$ es abierto en $\Psi_N(\mathscr{A})$. ■

La siguiente manera de describir la topología de Mrówka es la más común en la literatura (como ejemplo están [3] o [2]).

Proposición 2.1.5. *Sea $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^\omega$, entonces:*

i) Cada $B \subseteq \omega$ es abierto en $\Psi(\mathscr{A})$, en particular, cada $n \in \omega$ es punto aislado.

*ii) Si $x \in \mathscr{A}$, el conjunto $\mathcal{B}_x := \{\{x\} \cup x \setminus F \mid F \in [x]^{<\omega}\}$ es base local de x en $\Psi(\mathscr{A})$. $\mathcal{B}_x$ es la **base local estándar de** x **en** $\Psi_N(\mathscr{A})$.*

Demostración. (i) Si $B \subseteq \omega$, es vacuo que $B \in \mathscr{T}_{\mathscr{A}}$, pues $B \cap \mathscr{A} = \emptyset$.

(ii) Sea $x \in \mathscr{A}$, entonces $\mathcal{B}_x \subseteq \mathscr{T}_{\mathscr{A}}$. En efecto, si $G \subseteq x$ es finito y $y \in \big(\{x\} \cup x \setminus G\big) \cap \mathscr{A}$, necesariamente $y = x$, de donde $y \subseteq^* \{x\} \cup x \setminus G$ pues G es finito, así $\{x\} \cup x \setminus G \in \mathscr{T}_{\mathscr{A}}$. Ahora, si $U \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es abierto y $x \in U$, $F := x \setminus U \subseteq x$ es finito y $x \in \{x\} \cup x \setminus F \subseteq U$. ■

Corolario 2.1.6. *Si N es numerable y $\mathscr{A} \subseteq [N]^\omega$, entonces:*

i) $\Psi(\mathscr{A})$ es 1 AN.

*ii) $\mathcal{B}_{\mathscr{A}} := \bigcup\{\mathcal{B}_x \mid x \in \mathscr{A}\} \cup \big\{\{n\} \mid n \in N\big\}$; denominado la **base estándar de** $\Psi_N(\mathscr{A})$, es una base de $\Psi_N(\mathscr{A})$ de tamaño $\aleph_0 + |\mathscr{A}|$.*

iii) $w(\Psi_N(\mathscr{A})) = \aleph_0 + |\mathscr{A}|$. Por ello, $\Psi(\mathscr{A})$ es 2 AN *si y sólo si $|\mathscr{A}| \leq \aleph_0$.*

Demostración. (i), (ii) y $w(\Psi_N(\mathscr{A})) \leq \aleph_0 + |\mathscr{A}|$ son claros.

Para $\aleph_0 + |\mathscr{A}| \leq w(\Psi_N(\mathscr{A}))$ basta observar que $\omega, \mathscr{A} \subseteq \Psi(\omega)$ son subespacios discretos de tamaño (y por tanto, peso) $\aleph_0$ y $|\mathscr{A}|$, respectivamente. Por consiguiente, el peso de $\Psi(\omega)$ debe ser mayor o igual que ambos. ■

Si $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$ y $X \subseteq \Psi(\mathscr{A})$, dado que cada punto de ω es aislado, se tiene que $\operatorname{der}(X) \subseteq \mathscr{A}$. Por otra parte, si $a \in \mathscr{A}$, la única forma de que cada $a \setminus F$ (con $F \in [a]^{<\omega}$) tenga intersección no vacía con X es que $X \cap a$ sea infinito.

Debido a 2.1.5, la discusión recién dada prueba el primer inciso (y con ello todos los restantes) del siguiente útil Lema.

Lema 2.1.7. *Sea $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$, entonces:*

i) *Si $X \subseteq \Psi(\mathscr{A})$, entonces* $\operatorname{der}(X) = \{y \in \mathscr{A} \mid X \cap y \neq^* \varnothing\}$.

ii) $\mathscr{A} = \operatorname{der}(\Psi(\mathscr{A}))$ *y ω es discreto, denso en $\Psi(\mathscr{A})$.*

iii) *Cada $B \subseteq \mathscr{A}$ es un subespacio cerrado y discreto de $\Psi(\mathscr{A})$.*

iv) *$B \subseteq \omega$ es cerrado en $\Psi(\mathscr{A})$ sólo si es casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$.*

Proposición 2.1.8. *Todo Ψ-espacio es separable, primero numerable,* T_1*, disperso y desarrollable.*

Demostración. Sea $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$ cualquiera. El Ψ-espacio generado por $\mathscr{A}$ es separable pues ω es denso en $\Psi(\mathscr{A})$ y numerable; además, este espacio es primero numerable debido al Corolario 2.1.6.

(Axioma T_1) Si $x \in \mathscr{A}$, del Lema 2.1.7 se desprende la igualdad $\operatorname{der}(\{x\}) = \{y \in \mathscr{A} \mid \{x\} \cap y \neq^* \varnothing\} = \varnothing$, lo cual implica que $\{x\}$ es cerrado.

(Dispersión) Supóngase que $X \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es cualquier subconjunto no vacío. Si $X \subseteq \mathscr{A}$, cualquier $x \in X$ es aislado en X, pues X es discreto (véase 2.1.7). En caso contrario, existe un elemento $x \in X \cap \omega$ y x es aislado en X, pues $\{x\}$ es abierto al ser x elemento de ω.

(Desarrollabilidad) Defínase $\mathcal{U}_n := \{\{a\} \cup a \setminus n \mid a \in \mathscr{A}\} \cup \{\{y\} \mid y \in \omega\}$ para cada $n \in \omega$. Resulta claro que cada colección $\mathcal{U}_n$ es cubierta abierta de $\Psi(\mathscr{A})$. Sean $x \in \Psi(\mathscr{A})$ y U un abierto tal que $x \in U$.

Si $x \in \omega$, entonces $\{x\} = \operatorname{St}(x, \mathcal{U}_{x+1})$; en efecto, sea $V \in \mathcal{U}_{x+1}$ con $x \in V$, entonces $V = \{x\}$; pues de lo contrario $V = \{a\} \cup a \setminus (x+1)$ para cierto $a \in \mathscr{A}$, implicando esto que $x \notin x + 1$, lo cual es imposible ya que $x \in \omega$. Por tanto, $x \in \{x\} = \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_{x+1}) \subseteq U$.

Si $x \in \mathscr{A}$, entonces $x \subseteq^* U$ y $x \setminus U \subseteq \omega$ es finito y por ello existe $n_0 \in \omega$ tal que $x \setminus U \subseteq n_0$. Como $\{x\} \cup x \setminus n_0 \in \mathcal{U}_{n_0}$ es el único abierto de $\mathcal{U}_{n_0}$ al cual x pertenece, $x \in \{x\} \cup x \setminus n_0 = \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_{n_0}) \subseteq U$.

Así pues, para cada $n \in \omega$, la colección $\{\mathrm{St}(x, \mathcal{U}_n) \mid n \in \omega\}$ es base local de x. Así que $\{\mathcal{U}_n \mid n \in \omega\}$ es un desarrollo para $\Psi(\mathscr{A})$. ■

Como se probó recién, todo Ψ-espacio es T_1, sin embargo, cuando la familia $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^\omega$ no es casi ajena, el espacio $\Psi(\mathscr{A})$ no satisface el axioma de separación T_2. Por esta razón, en la literatura se suele dar la Definición 2.1.3 partiendo directamente de una familia casi ajena (el lector podrá corroborar esto en textos como [2, 3, 6]).

Proposición 2.1.9. *Para cualquier $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^\omega$ son equivalentes las siguientes condiciones:*

i) *$\mathscr{A}$ es familia casi ajena.*

ii) *$\Psi(\mathscr{A})$ es cero-dimensional.*

iii) *$\Psi(\mathscr{A})$ es de Tychonoff.*

iv) *$\Psi(\mathscr{A})$ es de Hausdorff.*

Demostración. (i) → (ii) Si $\mathscr{A}$ es familia casi ajena, como $\Psi(\mathscr{A})$ es T_1, basta verificar que cada elemento de la base estándar $\mathscr{B}_{\mathscr{A}}$ (definida en el Corolario 2.1.6) es cerrado. En efecto, cada $\{n\}$ con $n \in \omega$ es cerrado pues $\Psi(\mathscr{A})$ es T_1. Y dados $x \in \mathscr{A}$ y $F \subseteq x$ finto, haciendo uso de 2.1.7 se tiene que por ser $\mathscr{A}$ familia casi ajena, $\mathrm{der}(\{x\} \cup x \setminus F) = \{x\} \subseteq \{x\} \cup x \setminus F$. Así que $\{x\} \cup x \setminus F$ es cerrado, mostrando que $\Psi(\mathscr{A})$ es cero-dimensional, pues es T_1 y contiene una base de abiertos y cerrados (**resultado R)**.

(ii) → (iii) → (iv) Si $\Psi(\mathscr{A})$ es cero-dimensional, al ser espacio T_1, resulta que entonces es espacio de Tychonoff (**resultado R)**. Por su parte, si $\Psi(\mathscr{A})$ es de Tychonoff, entonces es de Hausdorff.

(iv) $\rightarrow$ (i) Si $\Psi(\mathscr{A})$ es de Hausdorff y $x, y \in \mathscr{A}$ son distintos, existen abiertos ajenos $U, V \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ abiertos tales que $x \in U$ y $y \in V$. De donde $x \subseteq^* U$, $y \subseteq^* V$ y por consiguiente $x \cap y \subseteq^* U \cap V = \emptyset$. ■

La Proposición anterior es el motivo por el cual el presente trabajo se enfocará únicamente la siguiente clase de espacios:

Definición 2.1.10. *Un* ***espacio de Mrówka (o, de Isbell-Mrówka)*** *es un Ψ-espacio generado por una familia casi ajena.*

Corolario 2.1.11. *Todo espacio de Mrókwa es separable, primero numerable, de Tychonoff, cero-dimensional, disperso y de Moore.*

La siguiente es sólo una de las múltiples relaciones importantes que existen entre los espacios de Mrówka y el conjunto de Cantor. Su demostración se basa en un hecho conocido en topología general; todo espacio cero-dimensional de peso κ se encaja en 2^κ (véase [1, Teo. 8.5.11, p. 299]).

Corolario 2.1.12. *Todo espacio de Mrówka $\Psi(\mathscr{A})$ se encaja en $2^{\aleph_0 + |\mathscr{A}|}$. Particularmente, si $|\mathscr{A}| \leq \aleph_0$, el espacio $\Psi(\mathscr{A})$ se encaja en 2^ω y es metrizable.*

2.2. Compacidad y local compacidad

Como el lector puede advertir, cada vez surgen más traducciones con las cuales maniobrar al momento de estudiar los Ψ-espacios. El ideal generado por cierta $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$ es clave para distinguir cuáles subespacios de $\Psi(\mathscr{A})$ son compactos, y cuales no.

Proposición 2.2.1. *Sean $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$ y $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$. Entonces K es compacto* *si y sólo si $K \cap \omega \subseteq^* \bigcup(K \cap \mathscr{A})$ y $K \cap \mathscr{A}$ es finito.*

Demostración. Supóngase que $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es subespacio compacto, como la colección $\mathcal{U} := \{\{n\} \mid n \in K \cap \omega\} \cup \{\{x\} \cup x \mid x \in K \cap \mathscr{A}\}$ es cubierta abierta para K en $\Psi(\mathscr{A})$, existen $F \subseteq K \cap \omega$ y $G \subseteq K \cap \mathscr{A}$ finitos tales que $\{\{n\} \mid n \in F\} \cup \{\{x\} \cup x \mid x \in G\}$ es subcubierta de $\mathcal{U}$. Luego, es necesario que $K \cap \mathscr{A} = G$, así que $K \cap \mathscr{A}$ es finito. Además $(K \cap \omega) \setminus \bigcup G = K \setminus \bigcup G \subseteq F$ es finito y con ello $K \cap \omega \subseteq^* \bigcup(K \cap \mathscr{A})$.

Conversamente, supóngase que $K \cap \omega \subseteq^* \bigcup(K \cap \mathscr{A})$ y que $K \cap \mathscr{A}$ es finito. Resulta claro que; si $y \in \mathscr{A}$, entonces $\{y\} \cup y$ es un subespacio compacto de $\Psi(\mathscr{A})$; consecuentemente $L := \bigcup\{\{y\} \cup y \mid y \in K \cap \mathscr{A}\}$ es un subespacio compacto de $\Psi(\mathscr{A})$.

Nótese que $K \cap L$ es cerrado en L; pues $L \setminus K \subseteq \omega$; consecuentemente $K \setminus L$ es compacto. Como $K \setminus L = (K \cap \omega) \setminus \bigcup(K \cap \mathscr{A})$ es finito por hipótesis, $K \setminus L$ es compacto. Así, $K = (K \setminus L) \cup (K \cap L)$ es unión de subsespacios compactos de $\Psi(\mathscr{A})$; por tanto, es compacto. ■

Así, los los subespacios compactos de $\Psi(\mathscr{A})$ son únicamente aquellos de la forma $M \cup H$; donde $H \subseteq \mathscr{A}$ es finito y $M \subseteq^* \bigcup H$. Esto es, si $\mathcal{K}$ el conjunto de los subespacios compactos de $\Psi(\mathscr{A})$:

$$\mathcal{K} = \bigcup_{H \in [\mathscr{A}]^{<\omega}} \{F \cup M \cup H \mid (F, M) \in [\omega]^{<\omega} \times \mathscr{P}(H)\}$$

Por ello $|\mathscr{A}| \cdot \aleph_0 \leq |\mathcal{K}| \leq \sum\{(\aleph_0 \cdot \mathfrak{c}) \mid H \in [\mathscr{A}]^{<\omega}\} \leq |\mathscr{A}| \cdot \mathfrak{c} \leq \mathfrak{c}$; asi que todo espacio de Mrówka tiene; a lo sumo, $\mathfrak{c}$ subespacios compactos.

La discusión sobre cuántos subespacios compactos *importantes* (esto es, los que determinan el carácter topológico de su extensión unipuntual) tiene $\Psi(\mathscr{A})$ se retomará en la Sección 3.1.

Corolario 2.2.2. *Sean $\mathscr{A}$ una familia casi ajena y $A \subseteq \omega$ cualquiera. Entonces son equivalentes las siguientes condiciones:*

i) $A \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$

ii) Existe $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ compacto tal que $A \subseteq K$.

iii) Existe $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ compacto tal que $A \subseteq^* K$.

Demostración. (i) → (ii) Si $A \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$, existe $H \subseteq \mathscr{A}$ finito tal que $A \subseteq^* \bigcup H$. De la Proposición anterior se desprende que $K := A \cup H$ es un subespacio compacto de $\Psi(\mathscr{A})$ tal que $A \subseteq K$.

La implicación (ii) → (iii) es clara, procédase con la restante.

(iii) → (i) Supóngase que K es un subespacio compacto de $\Psi(\mathscr{A})$ tal que $A \subseteq^* K$. Consecuentemente $A \setminus \bigcup(K \cap \mathscr{A}) \subseteq^* A \setminus (K \cap \omega) = A \setminus K =^* \emptyset$, en virtud de la Proposición previa. Lo anterior; dado que $K \cap \mathscr{A}$ es finito, muestra que $A \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$. ■

Proposición 2.2.3. *Sea $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$, entonces son equivalentes:*

i) $\Psi(\mathscr{A})$ es compacto.

ii) $\Psi(\mathscr{A})$ es numerablemente compacto.

iii) $\mathscr{A}$ es finita y maximal.

Demostración. La implicación (i) → (ii) es evidente.

(ii) → (iii) Supóngase que $\Psi(\mathscr{A})$ es numerablemente compacto. Dado que $\mathscr{A} \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es subespacio cerrado y discreto de $\Psi(\mathscr{A})$ (véase 2.1.7), entonces $\mathscr{A}$ es numerablemente compacto y discreto; por ello, es finito. De esta forma, $\mathcal{U} := \big\{\{n\} \mid n \in \omega\big\} \cup \big\{\{x\} \cup x \mid x \in \mathscr{A}\big\}$ es una cubierta numerable para $\Psi(\mathscr{A})$ y en consecuencia, existe $F \subseteq \omega$ finito de tal modo que la colección $\big\{\{n\} \mid n \in F\big\} \cup \big\{\{x\} \cup x \mid x \in \mathscr{A}\big\}$ es subcubierta de $\mathcal{U}$. Por ende $\omega \subseteq^* \bigcup \mathscr{A}$, al ser $\mathscr{A}$ y F finitos. Así, $\mathscr{A}$ es maximal en virtud del Corolario 1.1.9.

(iii) → (i) Si $\mathscr{A}$ es finita y maximal, se desprende del Corolario 1.1.9 que $\omega \subseteq^* \bigcup \mathscr{A}$. Así, $\Psi(\mathscr{A}) \cap \omega \subseteq^* \bigcup(\Psi(\mathscr{A}) \cap \mathscr{A})$ y $\Psi(\mathscr{A}) \cap \mathscr{A} = \mathscr{A}$ es finito, siguiéndose dela Proposición 2.2.1 la compacidad de $\Psi(\mathscr{A})$. ■

La siguiente Proposición para nada carece de importancia, pues los espacios de Isbell-Mrówka son los únicos (dentro de cierta clase) con tal propiedad.

Proposición 2.2.4. *Todo espacio de Mrówka es hereditariamente localmente compacto, y en consecuencia, es espacio de Baire.*

Demostración. Supóngase que $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$ y sea $X \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ cualquiera. Como $\Psi(\mathscr{A})$ es de Hausdorff (recuérdese 2.1.11), X es de Hausdorff y basta verificar que cada punto de X tiene una vecindad en X compacta.

Sea $x \in X$ arbitrario. Si $x \in \omega$, entonces $\{x\}$ es vecindad compacta de x en X. Ahora, si $x \in \mathscr{A}$, entonces $K := X \cap (\{x\} \cup x) \subseteq \{x\} \cup x$ es vecindad de x en X. Además K es compacto, en virtud del Corolario 2.2.2, pues $K \cap \mathscr{A} = \{x\}$ es finito y $K \cap \omega \subseteq x \subseteq^* \bigcup\{x\} = \bigcup(K \cap \mathscr{A})$. Así, X es localmente compacto y $\Psi(\mathscr{A})$ hereditariamente localmente compacto.

Consecuentemente, $\Psi(\mathscr{A})$ es localmente compacto y de Hausdorff, siendo esto suficiente para ser de Baire **(Teorema de Categoría de Baire)**. ■

2.3. Metrizabilidad y Pseudocompacidad

El Corolario 2.1.12 evidencía que la numerabilidad de una familia casi ajena $\mathscr{A}$ es suficiente para concluir la metrizabilidad de su espacio de Mrówka asociado, no resulta difícil notar que el recíproco también ocurre (dados 2.1.6 y que $\Psi(\mathscr{A})$ es separable); sin embargo, se tienen más equivalencias:

Proposición 2.3.1. *Sea $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$, entonces son equivalentes:*

i) *$\mathscr{A}$ es a lo más numerable*

ii) *$\Psi(\mathscr{A})$ es metrizable.*

iii) *$\Psi(\mathscr{A})$ es segundo numerable.*

iv) *$\Psi(\mathscr{A})$ es σ-compacto.*

v) *$\Psi(\mathscr{A})$ es de Lindelöf.*

Demostración. (i) → (ii) → (iii) Si $|\mathscr{A}| \leq \omega$, se obtiene de 2.1.12 que $\Psi(\mathscr{A})$ es metrizable. Por otro lado, si $\Psi(\mathscr{A})$ es metrizable, al ser este un espacio separable, se tiene garantizado que es 2 AN **(MtzEq)**.

(iii) → (iv) → (v) Si $\Psi(\mathscr{A})$ es 2 AN, entonces al localmente compacto, resulta que es σ-compacto **(Resultado R)**. Además; todo espacio σ-compacto, es también de Lindelöf. **(Resultado R)**

(v) → (i) Por último, supóngase que $\Psi(\mathscr{A})$ es de Lindelöf y sea $\mathcal{B}_{\mathscr{A}}$ la base estándar de $\Psi(\mathscr{A})$ (definida en 2.1.6). Luego $\mathcal{B}_{\mathscr{A}}$ es una cubierta abierta de $\Psi(\mathscr{A})$, y deben existir $\mathscr{A}' \subseteq \mathscr{A}$ y $N \subseteq \omega$ a lo más numerables tales que $\bigcup\left\{\{\{x\} \cup x \setminus F \mid F \in [x]^{<\omega}\right\} \mid x \in \mathscr{A}'\} \cup \left\{\{n\} \mid n \in N\right\}$ es subcubierta de $\mathcal{B}_{\mathscr{A}}$. Resulta así que $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}'$ y $|\mathscr{A}| \leq \aleph_0$. ■

Como fue mostrado en 1.1.11, ninguna familia casi ajena numerable es maximal. Así que si $\mathscr{A}$ es una familia casi ajena numerable, por 2.2.3, $\Psi(\mathscr{A})$ no es compacto. Consecuentemente (por 2.3.1), si $\mathscr{A}$ es numerable, $\Psi(\mathscr{A})$ es Lindelöf y σ-compacto, pero no compacto.

Observación 2.3.2. *Si $\Psi(\mathscr{A})$ es metrizable (o cualquiera de sus equivalentes planteados en 2.3.1) y no compacto, no necesariamente $\mathscr{A}$ es numerable. Esto responde al sencillo motivo de que $\mathscr{A}$ podría ser maximal o no; la Proposición 2.3.1 no toma en cuenta este aspecto.*

La observación recién hecha da constancia de que falta establecer una relación entre $\Psi(\mathscr{A})$ y la maximalidad de la familia $\mathscr{A}$. En la Sección 3.1 se ahondará con mucha más profundidad en el estudio de las sucesiones convergentes; pero de momento, es necesario considerar el siguiente Lema, en orden de dar una caracterización completa para $\mathscr{A} \in \mathrm{MAD}(\omega)$.

Lema 2.3.3. *Sean $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$, $x \in \mathscr{A}$ y $B \subseteq [\omega]^{\omega}$ cualesquiera. Entonces $B \to x$ en $\Psi(\mathscr{A})$ si y sólo si $B \subseteq^{*} x$.*

Demostración. Supóngase que $B \to x$ en $\Psi(\mathscr{A})$. Entonces, como $x \cup \{x\}$ es un abierto de $\Psi(\mathscr{A})$ que contiene a x, se tiene que $B \subseteq^{*} x \cup \{x\}$, mostrando que

$B \subseteq^* x$. Y recíprocamente, si $B \subseteq^* x$ y $U \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es cualquier abierto con $x \in U$, entonces $x \subseteq^* U$, y por tanto, $B \subseteq^* U$. ∎

Proposición 2.3.4. *Sea* $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$*, son equivalentes:*

i) $\Psi(\mathscr{A})$ *es pseudocompacto.*

ii) $\mathscr{A}$ *es maximal.*

iii) Todo subespacio discreto, abierto y cerrado de $\Psi(\mathscr{A})$ *es finito.*

iv) Toda sucesión en ω *tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. (i) → (ii). Si $\mathscr{A}$ no es maximal, existe $B \subseteq \omega$ infinito y casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$. Por 2.1.5 y 2.1.7, B es discreto, abierto y cerrado, y de **(Ree A)** se sigue que $\Psi(\mathscr{A})$ no es pseudocompacto.

(ii) → (iii) Por contrapuesta, supóngase que $B \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es infinito, discreto, abierto y cerrado de $\Psi(\mathscr{A})$. Sin pérdida de generalidad $B \subseteq \omega$ (de lo contrario cada $a \in B \cap \mathscr{A}$ cumple que $a \cap B = B \cap (\{a\} \cup a) \subseteq \omega$ es infinito, cerrado, abierto y discreto). Luego, de 2.1.7 se desprende que B casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$.

(iii) → (iv) Supóngase (iii) y sea $B \in [\omega]^\omega$. Así, B es discreto, infinito y abierto. Por hipótesis, debe existir $x \in \mathrm{der}(B) \setminus B$ y por 2.1.11, $x \in \mathscr{A}$ y $B \cap x$ es infinito. Siguiéndose del Lema 2.1.7 que $B \cap x \to x$.

(iv) → (i) Por contrapuesta, supóngase que $f : \Psi(\mathscr{A}) \to \mathbb{R}$ es continua y no acotada. Entonces; por densidad de ω, para cada $n \in \omega$ se puede fijar $m_n \in \omega \cap f^{-1}[(n, \infty)]$. Así, $B = \{m_n \mid n \in \omega\}$ es infinito, y no admite subsucesiones convergentes en $\Psi(\mathscr{A})$, pues ningún $C \in [B]^\omega$ tiene imagen no acotada bajo f. ∎

Combinando 2.2.3, 2.3.1 y 2.3.4 se obtienen ejemplos muy concretos. Por ejemplo, si un espacio de Mrówka $\Psi(\mathscr{A})$ no es pseudocompacto pero sí es metrizable, necesariamente $\mathscr{A}$ es numerable. Otro ejemplo responde con una negativa a lo que en su momento fue un problema popular: £la pseudocompacidad equivale a la compacidad numerable en espacios Tychonoff?, resultado se sabía cierto en la clase de espacios T_4 (**Reee R**) y falso dentro de la clase de espacios que no son T_1. En virtud de 2.2.3, y considerando cualquier familia maximal infinita, se obtiene:

Corolario 2.3.5. *Existe un espacio de Tychonoff, que es pseudocompacto pero no numerablemente compacto.*

La siguiente es una caracterización conocida (véase [10, p. 39, 45]) y; entre tanto, desvela que el comportamiento sumamente organizado y *amigable* de $\Psi(\mathscr{A})$ se rompe bruscamente cuando $\mathscr{A}$ deja de ser numerable. Por tal motivo, no suelen ser de tanto interés los Ψ-espacios generados por familias casi ajenas a lo más numerables.

Proposición 2.3.6. *Sea $\mathscr{A}$ una familia casi ajena con cardinalidad κ, entonces*[1] *se satisface:*

i) *Si $\kappa = 0$, entonces $\Psi(\mathscr{A}) \cong \omega$.*

ii) *Si $\kappa \in \omega$ y $\mathscr{A}$ no es maximal, $\Psi(\mathscr{A}) \cong \omega \cdot (\kappa + 1)$.*

iii) *Si $\kappa \in \omega$ y $\mathscr{A}$ es maximal, $\Psi(\mathscr{A}) \cong \omega \cdot (\kappa + 1) + 1$.*

iv) *Si $\kappa = \omega$, entonces $\Psi(\mathscr{A}) \cong \omega^2$.*

v) *Si $\kappa > \omega$, entonces $\Psi(\mathscr{A})$ no homeomorfo a ningún espacio de ordinales; más aún, $\Psi(\mathscr{A})$ no es linealmente ordenable.*

Se derivan conclusiones de interés moderado, como puede ser que ω^2 (como producto ordinal) es el único espacio de Mrówka metrizable, no compacto. Una consecuencia *curiosa* en relación a este espacio; y que además, surge como fruto del Teorema principal de la Sección 2.4, es el Corolario 2.4.10. La peculiaridad recién comentada, sugiere que todas las familias casi ajenas numerables son muy *esencialmente iguales* (conviniendo que $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son *esencialmente iguales* cuando $\Psi(\mathscr{A})$ y $\Psi(\mathscr{B})$ son homeomorfos).

[1] En los incisos (i)-(iv), los espacios homeomorfos a $\Psi(\mathscr{A})$ están escritos en aritmética ordinal y dotados de su topología de orden.

2.4. Teorema de Kannan y Rajagopalan

La meta primordial en lo que resta del capítulo será caracterizar aquellos espacios que son homeomorfos a algún espacio de Mrówka. Como fue mostrado en la Proposición 2.2.4, todos los espacios de Mrówka son hereditariamente localmente compactos, una propiedad cuanto menos peculiar. Tal propiedad será la que los caracterizará dentro de la clase de espacios infinitos, de Hausdorff y separables.

Lema 2.4.1. *Sea X un espacio de Hausdorff y localmente compacto. Si X contiene un denso D, abierto y a lo más numerable, entonces $N := X \setminus \mathrm{der}(X) \subseteq X$ discreto y denso en X.*

Demostración. Claramente N es discreto. Por el Teorema de Categoría De Baire (**TCB**), resulta que X es un espacio de Baire.

Ahora, si $x \in D$ es aislado en D, entonces $\{x\} = D \cap U$ para cierto abierto U de X y dado que D es denso y X es un espacio T_1, es necesario que $U = \{x\}$. Lo anterior prueba que $X \setminus \mathrm{der}_D(D) \subseteq N$.

Por otra parte, si $x \in \mathrm{der}_D(D) \subseteq \mathrm{der}(X)$, entonces $X \setminus \{x\}$ es abierto y denso en X. Luego $X \setminus \mathrm{der}_D(D) = \bigcap \{X \setminus \{x\} \mid x \in \mathrm{der}_D(D)\}$ es denso, debido a que X es de Baire. Lo cual basta para mostrar que N es denso. ■

Lema 2.4.2. *Sean X un espacio topológico y $N := X \setminus \mathrm{der}(X)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *N es denso y para cada $y \in \mathrm{der}(X)$, $N \cup \{y\}$ es abierto.*

ii) *$\mathrm{der}(X)$ es discreto.*

Demostración. (i) → (ii) Supóngase (i) y sea $y \in \mathrm{der}(X)$ cualquier elemento. $N \cup \{y\}$ es abierto en X, en consecuencia $y \in U \subseteq N \cup \{y\}$, para cierto abierto U. Seguido de lo anterior, $y = U \setminus N = U \cap \mathrm{der}(X)$. Mostrando que $\mathrm{der}(X)$ es discreto.

(ii) → (i) Supóngase que $\mathrm{der}(X)$ es discreto. Si N no es denso, existen $x \in X$ y un abierto U de modo tal que $x \in U \subseteq \mathrm{der}(X)$. Pero al ser $\mathrm{der}(X)$ discreto, $\{x\} = W \cap \mathrm{der}(X)$ para cierto abierto W, de donde $U \cap W = \{x\}$ y $x \in N$, esto es imposible. Así que N es denso en X.

Ahora, si $y \in \mathrm{der}(X)$ es arbitrario, existe un abierto U de modo que se da $\{y\} = U \cap \mathrm{der}(X)$, pues $\mathrm{der}(X)$ es discreto. De lo anterior se obtiene que $N \cup \{y\} = (N \cup U) \cap (N \cup \mathrm{der}(X)) = N \cup U$ es abierto en X. ■

La siguiente caracterización es debida a Varadachariar Kannan y a Minakshisundaram Rajagopalan, quienes en 1970 (consúltese [6]) dieron con el resultado.

Teorema 2.4.3 (Kannan, Rajagopalan)

Para cualquier espacio topológico X infinito, de Hausdorff y separable son equivalentes:

i) X es hereditariamente localmente compacto.

ii) X es localmente compacto $\mathrm{der}(X)$ es discreto.

iii) X es homeomorfo a un espacio de Mrówka.

Demostración. Supóngase que X es cualquier espacio infinito, de Hausdorff, separable y sea $N := X \setminus \mathrm{der}(X)$.

(i) → (ii) Supóngase que X es hereditariamente localmente compacto. Por separabilidad de X, existe $D \subseteq X$ denso y a lo más numerable. Se sigue de la hipótesis que D es localmente compacto y por ello, es abierto en su cerradura, X. Debido al Lema 2.4.1, N es denso en X.

Por otro lado, si $y \in \mathrm{der}(X)$ es cualquiera, $N \cup \{y\} \subseteq X$ es localmente compacto, y por ende, es abierto en su cerradura. Pero N es denso, así que $N \cup \{y\}$ es abierto en $X = \mathrm{cl}(N \cup \{y\})$. Por lo tanto, de 2.4.2 se obtiene que $\mathrm{der}(X)$ es discreto.

(ii) → (iii) Supóngase que X es localmente compacto y que $\mathrm{der}(X)$ es discreto. Por el Lema 2.4.2 resulta que N es denso en X y que $N \cup \{y\}$ es abierto siempre que $y \in \mathrm{der}(X)$. Por ser X infinito y separable, se tiene que N es numerable. Utilizando la compacidad local de X, para cada $x \in \mathrm{der}(X)$ fíjese (utilizando

AC) una vecindad compacta V_x de x en X contenida en $N \cup \{x\}$. Se afirma que $\mathscr{A} = \{V_x \setminus \{x\} \subseteq N \mid x \in \operatorname{der}(X)\} \in \operatorname{AD}(N)$.

En efecto, si $x \in \operatorname{der}(X)$ es cualquiera, entonces $V_x \setminus \{x\}$ no es finito. De lo contrario, $\{x\} = (N \cup \{x\}) \setminus (V_x \setminus \{x\})$ sería abierto en X (que es espacio T_1) y se contradiría que $x \in \operatorname{der}(X)$. Por tanto, $\mathscr{A} \subseteq [N]^\omega$. Además, si $x, y \in \operatorname{der}(X)$ son distintos, se tiene que $V_x \cap V_y \subseteq N$. Así $V_x \cap V_y$ es subespacio compacto del discreto N, lo cual obliga a que sea finito. Como consecuencia, $\mathscr{A}$ es familia casi ajena en N.

Defínase $f : X \to \Psi_N(\mathscr{A})$ por medio de $f(n) = n$ si $n \in N$ y $f(x) = V_x$ si $x \in \operatorname{der}(X)$. Claramente f es función biyectiva; además, como N es el conjunto de puntos aislados de X, para verificar que f es homeomorfismo basta verificar lo siguiente.

> *Afirmación.* Un subconjunto $U \subseteq X$ es abierto si y sólo si para cada $x \in U \cap \operatorname{der}(X)$ se tiene $V_x \setminus \{x\} \subseteq^* U$.
>
> *Demostración.* Sea $U \subseteq X$. Si U es abierto y $x \in U \cap \operatorname{der}(X)$ es cualquiera, entonces $V_x \setminus U \subseteq N$ es cerrado en X, así en V_x y como V_x es compacto; $V_x \setminus U$ es subespacio compacto del discreto N, por tanto finito. Así que $V_x \setminus \{x\} \subseteq^* U$.
>
> Recíprocamente, supóngase que para cada $x \in U \cap \operatorname{der}(X)$ se tiene que $V_x \setminus \{x\} \subseteq^* U$, es decir, que $V_x \setminus U$ es finito. Sea $y \in U$ cualquiera, si $y \in N$ entonces $\{y\}$ es abierto en X y U es vecindad de y. Ahora, si $y \in \operatorname{der}(X)$ entonces $V_y \setminus U$ es finito y con ello $V_y \setminus (V_y \setminus U) \subseteq U$, de donde U es vecindad de y (usando que X es espacio T_1). Luego, U es vecindad de todos sus puntos, y por tanto, es abierto. ⊠

(iii) → (i) Si X es homeomorfo a un espacio de Mrówka, las propiedades topológicas del último se satisfacen en X, siguiéndose de 2.2.4 que X es hereditariamente localmente compacto. ■

Del resultado anterior es casi inmediata la obtención de las siguientes condiciones equivalentes.

Corolario 2.4.4. *Sea X cualquier espacio infinito, de Hausdorff y separable. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) X es pseudocompacto y hereditariamente localmente compacto.

ii) X es regular, $\mathrm{der}(X)$ *es subespacio discreto de X y cualquier subespacio discreto, abierto y cerrado a la vez en X es finito.*

iii) X es homeomorfo a un espacio de Mrówka generado por una familia casi ajena maximal.

Demostración. Por el Teorema de Kannan y Rajagopalan, lo demostrado en 2.3.4 y como todo espacio de Mrówka es de Tychonoff (véase 2.1.11); particularmente regular, bastará demostrar que si X satisface (ii) entonces X es localmente compacto. Supóngase (ii), claramente cada punto aislado de X tiene una vecindad compacta en X.

Sea $x \in \mathrm{der}(X)$ arbitrario, como $\mathrm{der}(X)$ es discreto, existe $U \subseteq X$ abierto con $\{x\} = U \cap \mathrm{der}(X)$. Por regularidad de X, fíjese un abierto V tal que $x \in V \subseteq \mathrm{cl}(V) \subseteq U$ y nótese que entonces $\{x\} = \mathrm{cl}(V) \cap \mathrm{der}(X)$.

Si W es una vecindad abierta de x, entonces $\mathrm{cl}(V) \setminus W$ es discreto y abierto (por ser subespacio de $X \setminus \mathrm{der}(X)$) y cerrado (por ser intersección de cerrados). De (ii) se sigue la finitud de $\mathrm{cl}(V) \setminus W$, y de esto, la compacidad de $\mathrm{cl}(V)$, siendo tal subespacio, una vecindad compacta de x en X. ■

Corolario 2.4.5. *Sea X un espacio topológico infinito, entonces X es homeomorfo a un espacio de Mrówka si y sólo si es homeomorfo a un subespacio abierto de un espacio de Mrówka.*

Demostración. Basta probar la necesidad. Supóngase que $\mathscr{A}$ es una familia casi ajena y que $U \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es un abierto tal que $X \cong U$. Como X es infinito, U es infinito, además por ser $\Psi(\mathscr{A})$ de Hausdorff y hereditariamente localmente compacto, se tiene que U es de Hausdorff y hereditariamente localmente compacto. Por último, como ω es denso en $\Psi(\mathscr{A})$ y U es abierto en $\Psi(\mathscr{A})$, se tiene que

$U \cap \omega$ es denso en U; así que U es separable. De lo anterior U, y por tanto X, es homeomorfo a un espacio de Mrówka; a saber $\Psi_{U\cap\omega}(U \cap \mathscr{A})$. ■

Corolario 2.4.6. *Sea $\{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ una familia no vacía de espacios topológicos infinitos; sin pérdida de generalidad ajenos dos a dos, entonces son equivalentes:*

i) $Y := \coprod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$ *es homeomorfo a un espacio de Mrówka.*

ii) κ *es contable y cada X_α es homeomorfo a un espacio de Mrówka.*

Demostración. (i) → (ii) Supóngase que Y es espacio de Mrówka. Como cada $X_\alpha \subseteq Y$ es infinito y abierto en Y, se sigue del Corolario anterior que X_α es de Mrówka. Por otro lado, si κ fuese más que numerable, Y no podía ser separable, pues es la suma de κ espacios no vacíos; así que κ es a lo más numerable.

(ii) → (i) Supóngase que κ es a lo más numerable y para cada $\alpha \in \kappa$, el espacio X_α es homeomorfo a un espacio de Mrówka. Entonces, del Sección 2.4, cada X_α es (infinito) de Hausdorff, separable, localmente compacto y además el subespacio $\mathrm{der}_{X_\alpha}(X_\alpha) \subseteq X_\alpha$ es discreto.

La suma de espacios de Hausdorff (localmente compactos, respectivamente) es de Hausdorff (localmente compacta, respectivamente); además, por ser cada X_α separable y κ a lo más numerable, resulta que Y es infinito, de Hausdorff, localmente compacto y separable.

Sea $y \in \mathrm{der}_Y(Y)$ cualquiera, por definición de Y, para el único elemento $\alpha \in \kappa$ tal que $y \in X_\alpha$, se tiene $y \in \mathrm{der}_{X_\alpha}(X_\alpha)$. Y como tal subespacio de X_α es discreto, existe $V \subseteq X_\alpha$ abierto tal que $\{y\} = U \cap \mathrm{der}_{X_\alpha}(X_\alpha)$, pero U es abierto también en Y y además $\{y\} = U \cap \mathrm{der}_Y(Y)$. De lo contrario, existe $x \in V \cap \mathrm{der}_Y(Y) \setminus \{y\}$ y consecuentemente $x \notin \mathrm{der}_{X_\alpha}(X_\alpha)$, mostrando que $\{x\}$ es abierto en X_α y por tanto en Y, lo cual es absurdo dada la elección de X. Lo anterior prueba que $\mathrm{der}_Y(Y)$ es discreto, finalizando la prueba en virtud del Teorema 2.4.3. ■

Se explotará mucho la siguiente observación durante el subsecuente Corolario, pues nuevamente, se hará uso del inciso (ii) del Teorema 2.4.3.

Observación 2.4.7. *Sea X un espacio topológico,* $\operatorname{der}(X)$ *es discreto si y sólo si* $\operatorname{der}^2(X) := \operatorname{der}(\operatorname{der}(X)) = \varnothing$.

Efectivamente; como $X \setminus \operatorname{der}(X)$ es abierto, $\operatorname{der}(X)$ *es discreto si y sólo si es discreto y cerrado. Esto último sucede únicamente cuando* $\operatorname{der}_{\operatorname{der}(X)}(\operatorname{der}(X)) = \operatorname{der}(X) \cap \operatorname{der}^2(X) = \varnothing$. *Sin embargo, cualquier punto aislado en X, es aislado en* $\operatorname{der}(X)$, *así que* $\operatorname{der}^2(X) \subseteq \operatorname{der}(X)$*; por lo tanto,* $\operatorname{der}(X)$ *es discreto si y sólo si* $\operatorname{der}^2(X) = \varnothing$.

Lema 2.4.8. *Sean X y Y espacios topológicos infinitos, entonces $X \times Y$ es homeomorfo a un espacio de Mrówka si y sólo si X y Y son de Mrówka y además $X \cong \omega$ o $Y \cong \omega$*

Demostración. Obsérvese la igualdad:

$$\begin{aligned}
\operatorname{der}^2_{X\times Y}(X \times Y) &= \operatorname{der}_{X\times Y}\Big(\operatorname{der}_X(X) \times \operatorname{cl}_Y(Y) \cup \operatorname{cl}_X(X) \times \operatorname{der}_Y(Y)\Big) \\
&= \operatorname{der}_{X\times Y}\Big(\operatorname{der}_X(X) \times Y \cup X \times \operatorname{der}_Y(Y)\Big) \\
&= \operatorname{der}_{X\times Y}\Big(\operatorname{der}_X(X) \times Y\Big) \cup \operatorname{der}_{X\times Y}\Big(X \times \operatorname{der}_Y(Y)\Big) \\
&= \operatorname{der}_X(\operatorname{der}_X(X)) \times \operatorname{cl}_Y(Y) \cup \operatorname{cl}_X(\operatorname{der}_X(X)) \times \operatorname{der}_Y(Y) \cup \\
&\cup \operatorname{der}_X(X) \times \operatorname{cl}_Y(\operatorname{der}_Y(Y)) \cup \operatorname{cl}_X(X) \times \operatorname{der}_Y(\operatorname{der}_Y(Y)) \\
&= \operatorname{der}^2_X(X) \times Y \cup \operatorname{der}_X(X) \times \operatorname{der}_Y(Y) \cup X \times \operatorname{der}^2_Y(Y)
\end{aligned}$$

Puesto que $X, Y \neq \varnothing$, resulta que $\operatorname{der}^2_{X\times Y}(X \times Y)$ es vacío si y sólo si $\operatorname{der}^2_X(X) = \operatorname{der}^2_Y(Y) = \operatorname{der}_X(X) \times \operatorname{der}_Y(Y) = \varnothing$. Esto es, el subespacio $\operatorname{der}_{X\times Y}(X \times Y) \subseteq X \times Y$ es discreto si y sólo si los subespacios $\operatorname{der}_X(X)$ de X y $\operatorname{der}_Y(Y)$ de Y son discretos y además X es discreto o Y es discreto.

Como X, Y son infinitos, $X \times Y$ es infinito, además las propiedades de separabilidad, axioma de separación de Hausdorff y local compacidad son propiedades finitamente productivas y finitamente factorizables. De esto último, lo comentado en el párrafo anterior, el hecho de que el único espacio de Mrówka discreto es ω y el inciso (ii) del Teorema 2.4.3, se obtiene el resultado. ■

Corolario 2.4.9. *Sea $\{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ una familia no vacía de espacios topológicos infinitos; sin pérdida de generalidad ajenos dos a dos, entonces son equivalentes:*

i) $Y := \prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$ *es homeomorfo a un espacio de Mrówka.*

ii) κ *es finito, cada* X_α *es homeomorfo a un espacio de Mrówka y existe* $\beta_0 \in \kappa$ *tal que si* $\alpha \in \kappa \setminus \{\beta_0\}$, *se tiene* $X_\alpha \cong \omega$.

Demostración. Sin perder generalidad, tómese κ como un cardinal.

(i) → (ii) Supóngase que Y es homeomorfo a un espacio de Mrówka, entonces Y es de Hausdorff, Separable y hereditariamente localmente compacto. Todas las propiedades anteriores son factorizables, así que por el por el Teorema de Kannan y Rajagopalan (Teorema 2.4.3), cada X_α es homeomorfo a un espacio de Mrówka.

Ahora, por contradicción, supóngase $\kappa \geq \omega$. Entonces, existen $P, Q \subseteq \kappa$ ajenos e infinitos, de donde:

$$Y = \prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha \cong \prod_{\alpha\in P} X_\alpha \times \prod_{\alpha\in Q} X_\alpha$$

siguiéndose del Lema previo que; sin pérdida de generalidad, $\prod_{\alpha\in P} X_\alpha \cong \omega$. Lo anterior conduce a un absurdo, pues como P es infinito y cada X_α también, resulta que:

$$\left|\prod_{\alpha\in P} X_\alpha\right| = \prod_{\alpha\in P} |X_\alpha| \geq \prod_{\alpha\in P} \aleph_0 = \aleph_0^{|P|} \geq \aleph_0^{\aleph_0} > \aleph_0$$

imposibilitando que $\prod_{\alpha\in P} X_\alpha \cong \omega$ sea biyectable con ω. Así, $\kappa < \omega$.

Finalmente, si cada X_α es homeomorfo a ω, o $\kappa = 1$, (ii) se satisface. Supóngase pues que $\kappa \geq 2$ y que existe $\beta_0 \in \kappa$ con $X_{\beta_0} \ncong \omega$. Dado que:

$$Y = \prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha \cong X_{\beta_0} \times \prod_{\alpha\in\kappa\setminus\{\beta_0\}} X_\alpha$$

se sigue del Lema Previo que $\prod_{\alpha\in\kappa\setminus\{\beta_0\}} X_\alpha \cong \omega$. Siendo así, cada X_α (con $\alpha \in \kappa\setminus\{\beta_0\}$) infinito, numerable y discreto; esto es, homeomorfo a ω.

(ii) → (i) Supóngase que κ es finito, que cada X_α es homeomorfo a un espacio de Mrówka y que $\beta_0 \in \kappa$ es un elemento tal que si $\alpha \in \kappa\setminus\{\beta_0\}$, entonces $X_\alpha \cong \omega$. Como $\kappa\setminus\{\beta\}$ es finito, entonces:

$$Y = \prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha \cong X_\beta \times \prod_{\alpha\in\kappa\setminus\{\beta\}} X_\alpha \cong X_\beta \times \prod_{\alpha\in\kappa\setminus\{\beta\}} \omega = X_\beta \times \omega$$

y a consecuencia del Lema previo, Y es de Mrówka. ■

El siguiente Corolario del Teorema de Kannan y Rajagopalan (Teorema 2.4.3), es un resultado sencillo (y sumamente particular) de metrización.

Corolario 2.4.10. *Si X es infinito, separable, de Hausdorff y hereditariamente localmente compacto. Entonces son equivalentes:*

i) X es hereditariamente separable.

ii) X es metrizable.

Demostración. Dado el Teorema 2.4.3 y la caracterización 2.3.1, basta ver que si $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$, entonces $\Psi(\mathscr{A})$ es hereditariamente separable si y sólo si $\mathscr{A}$ es a lo más numerable.

Para la suficiencia procédase por contrapuesta suponiendo que $\mathscr{A}$ es más que numerable, entonces $\mathscr{A}$ es un subespacio de $\Psi(\mathscr{A})$ discreto y más que numerable, con lo que, no puede ser separable. Para la necesidad, si $\mathscr{A}$ es a lo más numerable, cada subespacio de $\Psi(\mathscr{A})$ es a lo más numerable, y con ello, separable. ■

La *curiosidad* (comentada posteriormente a 2.3.6) en relación al espacio de ordinales ω^2 tiene su justificación en el anterior Corolario.

Se finalizará la sección; y con ello el actual capítulo, dando un Corolario importante en relación a las imágenes continuas de los espacios de Mrówka pseudocompactos.

Corolario 2.4.11. *Sea X infinito y de Hausdorff. Son equivalentes:*

i) Existe un denso $D \subseteq X$ de X numerable tal que cada sucesión en D tiene una subsucesión convergente en X.

ii) X es imagen continua de un espacio de Mrówka generado por una familia maximal.

Demostración. (i) → (ii) Supóngase (ii) y sea $S \subseteq \mathrm{AD}(D)$ el conjunto de familias casi ajenas en D tales que para cada $\mathscr{B} \in S$, cada elemento de $\mathscr{B}$ es imagen de una sucesión en D convergente en X. Como D es numerable, existe una biyección $f_0 : \omega \to D$ biyectiva, misma que admite una subsucesión convergente, a saber $g_0 : \omega \to D$ convergente en X. Se desprende que $\{\mathrm{ima}(g_0)\} \in S$ y por tanto S es no vacío, siguiéndose de una aplicación del Principio de Maximalidad de Hausdorff (similar al utilizado en 1.1.10) la existencia de una familia casi ajena en D, $\mathscr{A} \subseteq \bigcup S$ tal que si $\mathscr{B} \in S$ y $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, entonces $\mathscr{A} = \mathscr{B}$.

Afirmación. $\mathscr{A}$ es familia casi ajena maximal sobre D.

Demostración. Obsérvese primero que si $A \in \mathscr{A}$, existe $\mathscr{C} \in S$ tal que $A \in \mathscr{C}$ tal que $A \in \mathscr{C}$; consecuentemente A es imagen de una sucesión en D convergente en X; es decir $A \in \mathscr{A}$. Ahora, si $B \subseteq D$ infinito, entonces existe una biyección $f : \omega \to B$ y, por hipótesis, existe $g : \omega \to B \subseteq D$ subsucesión de f, convergente en X y con ello $\{\mathrm{ima}(g)\} \in S$.

Por un lado, si $\mathscr{A} \cup \{\mathrm{ima}(g)\}$ no es casi ajena, existe $A \in \mathscr{A}$ de modo que $A \cap \mathrm{ima}(g)$ es infinito, y con ello $A \cap B$ es infinito. De otro modo, $\mathscr{A} \cup \{\mathrm{ima}(g)\} \in S$ y por la construcción de A se tiene $\mathscr{A} \cup \{\mathrm{ima}(g)\} = \mathscr{A}$, siendo $A := \mathrm{ima}(g) \in \mathscr{A}$ tal que $A \cap B$ es infinito (pues g es subsucesión de f). Lo anterior prueba que $\mathscr{A}$ es maximal sobre D. ⊠

Para cada $A \in \mathscr{A}$ fíjese (AC) una sucesión $f_A : \omega \to D$ convergente a x_A en X tal que $A = \mathrm{ima}(f_A)$. Nótese que, como X es de Hausdorff tal elemento x_A es el único al cual f_A converge. Además, dado que los elementos de $\mathscr{A}$ son casi ajenos dos a dos, y de nuevo por ser X de Hausdorff, cada vez que $A, B \in \mathscr{A}$ sean distintos, se tendrá que $f_A \neq f_B$ y $x_A \neq x_B$. Defínase la función $p : \Psi_D(\mathscr{A}) \to X$

como $p(d) = d$ si $d \in D$ y $p(A) = x_A$ si $A \in \mathscr{A}$, veamos que p es continua y sobreyectiva.

Sea $U \subseteq X$ abierto en X y supóngase que $A \in p^{-1}[U] \cap \mathscr{A}$ es cualquiera, entonces $p(A) = x_A \in U$ y $A = \mathrm{ima}(f_A)$. Como U es un abierto de X y f_A converge a x_A en X, resulta que $\mathrm{ima}(f_A) \subseteq^* U$ y con ello $A \subseteq^* p^{-1}[U]$; así que $p^{-1}[U]$ es abierto en $\Psi_D(\mathscr{A})$, y por tanto p es continua.

Ahora, sea $x \in X \setminus D$ cualquier elemento. Por contradicción, supóngase que $x \notin \mathrm{ima}(p)$, entonces si $s : \omega \to D$ es cualquiera, s no puede converger a a en X; de lo contrario, existe $A \in \mathscr{A}$ tal que $A \cap \mathrm{ima}(s)$ es infinito y con ello f_A converge a x en X, con lo que $x = p(A)$. Sin embargo

AQUÍ ESTO YA NO SALE

(ii) → (i) SALE FÁCIL ■

Corolario 2.4.12. *Todo espacio metrizable, separable y compacto es imagen continua de un espacio de Mrówka; en particular, el cubo de Hilbert* $[0,1]^\omega$ *y el conjunto de Cantor* 2^ω.

3 El compacto de Franklin

Se comenzará introduciendo los espacios conocidos como compactos de Franklin, que no son más que la extensión unipuntual (de Alexxandroff) de los espacios de Mrówka, si estos son no compactos.

Se logrará caracterizar cuándo estos espacios satisfacen con la propiedad de Fréchet; objetivo que requerirá los conocimientos obtenidos en el primer capítulo de este trabajo de tesis y nociones básicas sobre espacios secuenciales y de Fréchet. Durante el proceso de tal caracterización, se resolverá de paso un problema que estuvo sin solución en ZFC *durante cierta parte del siglo pasado; la productividad finita de la propiedad de Fréchet.*

3.1. Sucesiones en $\mathscr{F}(\mathscr{A})$

Definición 3.1.1. *Sea $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^\omega$ cualquiera. El* ***compacto de Franklin generado por*** *$\mathscr{A}$ es la extensión unipuntual del Ψ-espacio generado por $\mathscr{A}$, se denota por $\mathscr{F}(\mathscr{A}) := \Psi(\mathscr{A}) \cup \{\infty_{\mathscr{A}}\}$.*

Cuando el contexto así lo permita, se omitirá el subíndice "$_{\mathscr{A}}$" y se denotará el punto al infinito simplemente por ∞.

Dado que un espacio topológico no compacto admite compactaciones Hausdorff únicamente cuando es Tychonoff y localmente compacto (véase [1, p. 221]), el compacto de Franklin resulta ser la compactación de Alexandroff de $\Psi(\mathscr{A})$ únicamente cuando $\mathscr{A}$ sea una familia casi ajena, lo que garantiza que $\Psi(\mathscr{A})$ sea de Tychonoff; y sea *no compacta* (es decir, que no sea simultáneamente finita y maximal), lo cual obliga a que $\Psi(\mathscr{A})$ sea no compacto; a razón de la Proposición 2.2.3.

Por ello; y salvo se diga lo contrario, se convendrá que $\mathscr{A}$ es una familia (casi ajena) no compacta. Y más allá de esto, en pos de aligerar la notación de las futuras pruebas del capítulo, es menester convenir:

Consideración 3.1.2. *Durante esta sección:*

i) *Para cada subespacio compacto $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$, se denotará por $V(K)$ a la vecindad abierta de ∞: $\{\infty\} \cup \Psi(\mathscr{A}) \setminus K$ (como $\Psi(\mathscr{A})$ es Hausdorff, todos los abiertos al rededor de ∞ son de esta forma).*

ii) *Se utilizarán casi en exceso los resultados obtenidos en 2.2.1 y 2.2.2, así que no se referenciarán de ahora en más.*

iii) *Todas las convergencias y operadores que aparezcan sin subíndices se asumirán en $\mathcal{F}(\mathscr{A})$. En caso de aparecer éstos en otros espacios, esto se indicará en sus subíndices.*

Lo primero a observar es lo siguiente: dado que $\Psi(\mathscr{A})$ no es compacto, al ser un espacio de Tychonoff y localmente compacto, se tiene efectivamente que $\mathcal{F}(\mathscr{A})$ es de Hausdorff, compacto (en consecuencia, normal). Como es previsible, ciertas propiedades de $\Psi(\mathscr{A})$ influyen en la topología de $\mathcal{F}(\mathscr{A})$; como ejemplo inmediato, la separabilidad se preserva.

Observación 3.1.3. *Sea $\mathscr{A}$ una familia casi ajena. Entonces el espacio $\mathcal{F}(\mathscr{A})$ es de Hausdorff, compacto, normal, localmente compacto, separable y disperso.*

Comparando con el Corolario 2.1.11 con las observaciones recién hechas, vale mencionar que existen propiedades $\mathcal{F}(\mathscr{A})$ que tienen una dependencia más compleja con $\Psi(\mathscr{A})$. Entre ellas, todas las que tengan relación a las sucesiones.

Proposición 3.1.4. *Sea $\mathscr{A}$ una familia no compacta. Entonces el carácter de ∞ en $\mathcal{F}(\mathscr{A})$ es exactamente $\aleph_0 + |\mathscr{A}|$.*

Demostración. Es evidente que $\aleph_0 \leq \chi(\infty, \mathcal{F}(\mathscr{A}))$. Ahora, sea $\mathcal{B}$ una base local de ∞ en $\mathcal{F}(\mathscr{A})$. Para cada $y \in \mathscr{A}$ fíjese un elemento $B_y \in \mathcal{B}$ de modo que $B_y \subseteq$

$V(y \cup \{y\})$ (recuérdese que $y \cup \{y\}$ es compacto). Obsérvese que la asignación $y \longmapsto B_y$ es inyectiva; pues, si $x, y \in \mathscr{A}$ son distintos, entonces $B_x \subseteq U(x \cup \{x\})$ y $B_y \subseteq U(y \cup \{y\})$, de donde $x \in B_y \setminus B_x$. Por lo tanto $|\mathscr{A}| \leq |\mathcal{B}|$, y en consecuencia $\aleph_0 + |\mathscr{A}| \leq \chi(\infty, \mathscr{F}(\mathscr{A}))$.

Para la desigualdad recíproca defínase:

$$\mathcal{B} = \left\{V\big(h \cup (B \cup \bigcup h)\big) \mid (h, B) \in [\mathscr{A}]^{<\omega} \times [\omega]^{<\omega}\right\}$$

y nótese que $\mathcal{B}$ es un conjunto de vecindades de ∞ en $\mathscr{F}(\mathscr{A})$.

Si K es cualquier subespacio compacto de $\Psi(\mathscr{A})$, entonces los conjuntos $K \cap \mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}$ y $G := (K \cap \omega) \setminus \bigcup(K \cap \mathscr{A}) \subseteq \omega$ son finitos; consecuentemente $V\big((K \cap \mathscr{A}) \cup \big(G \cup \bigcup(K \cap \mathscr{A})\big)\big) \subseteq U$. Mostrando que que $\mathcal{B}$ es base local para ∞ en $\mathscr{F}(\mathscr{A})$; y además $|\mathcal{B}| \leq |[\mathscr{A}]^{<\omega} \times [\omega]^{<\omega}| \leq |\mathscr{A}| \cdot \aleph_0 = \aleph_0 + |\mathscr{A}|$. Lo anterior prueba que $\chi(\infty, \mathscr{F}(\mathscr{A})) \leq \aleph_0 + |\mathscr{A}|$. ■

El siguiente Corolario se puede enriquecer con 2.3.1.

Corolario 3.1.5. *Para toda familia no compacta $\mathscr{A}$, el espacio $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ es primero numerable si y sólo si $|\mathscr{A}| \leq \aleph_0$.*

El próximo Lema es clave por varios motivos; entre ellos, responde a una pregunta que sugiere la discusión previa al Corolario 1.3.11 £qué distingue a los subconjuntos de ω casi ajenos con cada elemento de una familia casi ajena con aquellos en su parte positiva?.

Lema 3.1.6. *Sean $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$ y $B \subseteq \Psi(\mathscr{A})$, entonces:*

i) Si B es numerable, $B \to \infty$ si y sólo si $B \subseteq^* \mathscr{A}$, o $B \cap \omega$ es infinito y casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$.

ii) $\infty \in \mathrm{cl}(B)$ si y sólo si $B \cap \mathscr{A}$ es infinito, o $B \cap \omega \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$.

Demostración. (i) Supóngase que B es numerable. Pruébese la suficiencia por contradicción; esto es, asúmase que $B \to \infty$ pero $B \not\subseteq^* \mathscr{A}$ ($B \cap \mathscr{A}$ es infinito) y que existe cierto $a \in \mathscr{A}$ cuya intersección con $B \cap \omega$ es infinita. Como $B \to \infty$ y $a \cap B = a \cap (B \cap \omega) \subseteq B$ es infinito, ocurre que $a \cap B \to \infty$. Sin embargo, $a \cap B \subseteq a$ es infinito y a razón del Lema 2.3.3 se tiene que $a \to a$ en $\Psi(\mathscr{A})$; así mismo en $\mathscr{F}(\mathscr{A})$. Lo anterior implica que $a \cap B \to a$ y $a \cap B \to \infty$, siendo esto un absurdo.

Conversamente, si $B \not\to \infty$, existe un compacto $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ de modo que $B \not\subseteq^* U_K$; esto es, $B \cap K$ es infinito. Como $K \cap \mathscr{A}$ es finito, lo anterior prueba que $B \cap \omega \subseteq (B \cap \omega) \cap K$ es infinito, y así mismo, $B \not\subseteq^* \mathscr{A}$. Además $C := (B \cap \omega) \cap K$ es un elemento en $\mathscr{I}(\mathscr{A})$; a consecuencia de esto y lo comentado antes de 1.3.11, existe cierto $a \in A$ con $C \cap a$ infinito; de donde, $B \cap a$ es infinito.

(ii) Para la suficiencia, supóngase que $\infty \in \mathrm{cl}(B)$ y que $B \cap \mathscr{A}$ es finito. Resulta necesario que $\infty \in \mathrm{cl}(B \cap \omega)$ y con ello $B \cap \omega \not\to \mathscr{I}(\mathscr{A})$. En efecto; de lo contrario, $B \cap \omega$ sería compacto y por ello lo tanto $\infty \in \mathrm{cl}(B \cap \omega) \subseteq B$, lo cual es imposible pues $\infty \notin \Psi(\mathscr{A})$. Así que $B \cap \omega \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$.

Para la necesidad, sí $B \cap \mathscr{A}$ es infinito, existe $C \subseteq B \cap \mathscr{A}$ numerable y por el inciso anterior $C \to \infty$, de donde $\infty \in \mathrm{cl}(C) \subseteq \mathrm{cl}(B)$. Por otra parte, si $B \cap \omega \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ y $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ es compacto, resulta que $B \cap \omega \not\subseteq K$ y con ello $B \cap U_K \neq \varnothing$, mostrando que $\infty \in \mathrm{cl}(B)$. ■

Si $\mathscr{A}$ es una familia casi ajena maximal e infinita, entonces la condición (i) del Teorema anterior implica que las únicas sucesiones convergentes a ∞ son únicamente las (infinitas) contenidas en $\mathscr{A}$; por ello:

Corolario 3.1.7. *Supóngase que $\mathscr{A}$ es una familia casi ajena maximal e infinita, entonces para cada $X \in [\mathscr{F}(\mathscr{A})]^\omega$:*

i) X es convergente si y sólo si $X \subseteq^* \mathscr{A}$, o, para algun $a \in \mathscr{A}$ se tiene que $X \subseteq^* a$.

ii) Si $X \subseteq \omega$ y $x \in \omega \cup \{\infty\}$, entonces $X \not\to x$.

iii) Si $B \subseteq \omega \cap \mathrm{sqcl}(X)$, entonces $B \subseteq X$.

Demostración. (i) Sea $X \in [\mathscr{F}(\mathscr{A})]^\omega$ cualquiera. El recíproco es inmediato a razón de 2.3.3 y el Lema previo. Para la suficiencia asúmase que $X \to x$ en el compacto de Franklin. Si $x = \infty$, se sigue del lema anterior y la maximalidad de $\mathcal{A}$ que $X \subseteq^* \mathcal{A}$. En otro caso, se puede suponer sin pérdida de generalidad que $X \subseteq \Psi(\mathcal{A})$, siguiéndose de 2.3.3 que X debe estar casi contenido en algún elemento de $\mathcal{A}$.

(ii) y (iii) Se desprenden inmediatamente del inciso (i) y de que cada punto en ω es aislado (por lo que las sucesiones convergentes a puntos de ω son eventualmente constantes). ■

Corolario 3.1.8. *Sea $\mathcal{A} \in \mathrm{MAD}(\omega)$ infinita, entonces el orden secuencial de $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ es 2.*

Demostración. Nótese que $\mathrm{sqcl}^2(\omega) \nsubseteq \mathrm{sqcl}(\omega)$. Efectivamente; dado el Corolario anterior, $\mathrm{sqcl}(\omega) = \omega \cup \mathcal{A}$. Más aún, como $\mathcal{A}$ es infinita, contiene cierto subconjunto numerable $B \subseteq \mathcal{A}$. Y se obtiene de 3.1.6 que $B \to \infty$, esto muestra que $\infty \in \mathrm{sqcl}^2(\omega) \setminus \mathrm{sqcl}(\omega)$, por lo que $\mathrm{O}_{\mathrm{sq}}(\mathcal{F}(\mathcal{A})) \geq 2$.

Ahora, sea $X \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{A})$ cualquiera y supóngase que $x \in \mathrm{sqcl}^3(X)$. Como $\Psi(\mathcal{A})$ tiene orden secuencial 1 (pues es 1 AN, consecuentemente de Fréchet), es requisito que $x = \infty$. Así, existe $A \subseteq \mathrm{sqcl}^2(X)$ numerable tal que $A \to \infty$ en $\mathcal{F}(\mathcal{A})$. Por el Lema 3.1.6, sin pérdida de generalidad, $A \subseteq \mathcal{A}$. Para cada $a \in A$ fíjese un conjunto numerable $B_a \subseteq \mathrm{sqcl}(X)$ de modo que $B_a \to a$. Se afirma que $\mathrm{sqcl}(X) \cap \mathcal{A}$ es infinito.

Supóngase lo contrario, es decir, $\mathrm{sqcl}(X) \subseteq^* \omega$. Como cada $B_a \subseteq X$ es convergente, se puede asumir sin pérdida de generalidad que $B_a \subseteq \omega$. En consecuencia de lo anterior, $B_a \subseteq \omega \cap \mathrm{sqcl}(X)$ y se obtiene del inciso (iii) del Corolario anterior que $B_a \subseteq X$. Así $A \subseteq \mathrm{sqcl}(X)$ ya que cada B_a satisface $B_a \to a \in A$. Esto muestra que $x \in \mathrm{sqcl}(\mathrm{sqcl}(X)) = \mathrm{sqcl}^2(X)$. Es decir, $\mathrm{sqcl}^3(X) \subseteq \mathrm{sqcl}^2(X)$ y $\mathrm{O}_{\mathrm{sq}}(\mathcal{F}(\mathcal{A})) \leq 2$. ■

El posterior Teorema sigue la línea del Teorema de Kannan y Rajagopalan (Teorema 2.4.3), es una caracterización en propiedades topológicas de ciertos compactos de Franklin.

Teorema 3.1.9

Sea X un espacio topológico infinito. X es homeomorfo a un compacto de Franklin generado por una familia maximal infinita si y sólo si se satisfacen:

i) X es compacto, de Hausdorff y separable, y

ii) Existe $x_0 \in X$ tal que x_0 es el único punto de acumulación de $\mathrm{der}(X)$, y, para cada $B \in [X \setminus \mathrm{der}(X)]^\omega$ se tiene $B \not\to x_0$.

Claramente, en tal caso x_0 se identifica bajo algún homeomorfismo con el punto al infinito del compacto de Franklin.

Demostración. Para la suficiencia basta suponer que $X = \mathscr{F}(\mathscr{A})$; con $\mathscr{A} \in \mathrm{MAD}(\omega)$ infinita, y probar (ii). Sea $x_0 := \infty$. Por ser X la compactación unipuntual de $\Psi(\mathscr{A})$, se tiene que $\Psi(\mathscr{A})$ es un denso de X y por ello $\mathrm{der}(X) = \{\infty\} \cup \mathrm{der}_{\Psi(\mathscr{A})}(\Psi(\mathscr{A}))$. De lo anterior y 2.1.7 se tiene que $\mathrm{der}(X) = \{\infty\} \cup \mathscr{A}$; y además que $\mathscr{A}$ es discreto. En consecuencia, $\mathrm{der}_{\mathrm{der}(X)}(\mathrm{der}(X)) \subseteq \{\infty\}$ y la contención recíproca ocurre; pues cada subespacio compacto de $\Psi(\mathscr{A})$ tiene intersección finita; particularmente no vacía, con el conjunto (infinito) $\mathscr{A}$. Por lo que $\mathrm{der}(X)$ sólo se acumula en $x_0 = \infty$. Ahora, si $B \in [X \setminus \mathrm{der}(X)]^\omega$, entonces $B \subseteq \omega$ y por la maximalidad de $\mathscr{A}$, se obtiene que $B \not\to \infty$ (utilizando el Corolario 3.1.7).

Véase ahora la necesidad; esto es, supóngase que es compacto, de Hausdorff, separable y que x_0 actúa tal cual dicta (ii). Defínase $Y := X \setminus \{x_0\}$, se mostrará primero que $Y \cong \Psi(\mathscr{A})$ para alguna familia maximal $\mathscr{A}$. Efectivamente, nótese que Y es infinito, de Hausdorff y separable (ya que Y es abierto al ser $\{x_0\}$ cerrado); así que haciendo uso del Corolario 2.4.4, es suficiente mostrar los siguientes tres puntos:

(Y es regular) Dado que X es compacto, de Hausdorff es normal y particularmente, regular. Esto prueba que $Y \subseteq X$ es regular.

($\mathrm{der}_Y(Y)$ es discreto) Efectivamente, si $y \in \mathrm{der}_Y(Y)$ es cualquiera, entonces $y \in Y$ es punto de acumulación de X. Como $y \neq x_0$ y x_0 es el único punto de acumulación de $\mathrm{der}_X(X)$, $\{y\}$ es abierto en $\mathrm{der}_X(X)$; y por tanto, $\{y\}$ es abierto en $\mathrm{der}_Y(Y)$. Mostrando que $\mathrm{der}_Y(Y)$ es discreto.

(Si $B \subseteq Y$ es discreto, abierto y cerrado a la vez, entonces B es finito) Supóngase que $B \subseteq Y$ es discreto, abierto y cerrado a la vez. Por ser B discreto y abierto, se da $B \subseteq X \setminus \mathrm{der}(X)$. Ahora, si B es infinito (sin pérdida de generalidad, numerable) se tiene de la hipótesis que $B \not\to x_0$; así, existe una vecindad de x_0; a saber U, de modo que $B \setminus U$ es infinito. Sin embargo, $B \cap U$ es cerrado en vista de que B es cerrado; por ello, tal conjunto es cerrado, discreto e infinito en X; lo que contradice que X sea compacto y T_1. Por ello, es necesario que B sea finito. Concluyéndose de 2.4.4, la existencia de una familia $\mathscr{A} \in \mathrm{MAD}(\omega)$ de modo que $Y \cong \Psi(\mathscr{A})$.

Para finalizar, obsérvese que $\{x_0\}$ no es abierto en X, pues de lo contrario no podría ser punto de acumulación de ninguno de sus subespacios. Así, Y es un subespacio denso de X y como X es de Hausdorff, compacto, con $X \setminus Y = \{x_0\}$, resulta que X es la compactación unipuntual de $Y \cong \Psi(\mathscr{A})$; esto es, $X \cong \mathscr{F}(\mathscr{A})$. ■

3.2. La propiedad de Fréchet

Continuando con los frutos del Lema 3.1.6, se extrae el siguiente Corolario; este relaciona las propiedades de combinatoria de las familias casi ajenas con propiedades de convergencia.

Lema 3.2.1. *Si $\mathscr{A}$ es una familia no compacta, entonces para cada $X \subseteq \omega$ son equivalentes:*

i) $\infty \in \mathrm{sqcl}(X)$.

ii) $\mathscr{A} \restriction X \notin \mathrm{MAD}(X)$.

Demostración. (i) → (ii) Si $\infty \in \mathrm{sqcl}(X)$, entonces existe $B \subseteq X \subseteq \omega$ de modo que $B \to x$ y de acuerdo al Lema 3.1.6 se tiene garantizado que B es casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$ (pues $B \cap \mathscr{A}$ es finito, por ser vacío). Entonces $B \in [X]^\omega$ es casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A} \restriction X$; efectivamente, si $a \cap X \in \mathscr{A} \restriction X$ es cualquiera, entonces $B \cap (X \cap a) = X \cap (a \cap B) \subseteq a \cap B =^* \emptyset$. Mostrando que $\mathscr{A} \restriction X$ no es maximal en X.

(ii) → (i) Si $\mathscr{A} \upharpoonright X$ no es maximal en X, existe $B \subseteq X$ infinito y casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A} \upharpoonright X$. Nótese que entonces $B \cap X$ es casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$; y por lo tanto, $B \to \infty$ (por 3.1.6). Por ello $\infty \in \mathrm{sqcl}(B) \subseteq \mathrm{sqcl}(X)$. ∎

Del Corolario 1.3.11 se desprende fácilmente la contención:

$$\{X \in [\omega]^\omega \mid \forall A \in \mathscr{A}\ (A \cap X =^* \emptyset)\} \subseteq \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$$

Resulta que la contención recíproca encapsula la conexión que existe entre la combinatoria de $\mathscr{A}$ y la propiedad de Fréchet de su compacto de Franklin asociado.

Corolario 3.2.2. *Sea $\mathscr{A}$ una familia casi ajena no compacta. Son equivalentes:*

i) $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ *es de Fréchet.*

ii) $\{X \in [\omega]^\omega \mid \forall A \in \mathscr{A}\ (A \cap X =^* \emptyset)\} = \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$.

iii) $\mathscr{A}$ *es maximal en ninguna parte.*

Demostración. (i) → (ii) Supóngase que $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ es de Fréchet. Basta probar la contención recíproca de (ii). Y efectivamente, si $X \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$, entonces $\infty \in \mathrm{cl}(X)$ debido 3.1.6, pero como $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ es de Fréchet, $\infty \in \mathrm{sqcl}(X)$; siguiéndose del mismo Lema 3.1.6, que X es casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{A}$.

(ii) → (iii) Supóngase (ii) y sea $X \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ cualquiera. Dada la hipótesis, X es casi ajeno con cada elemento en $\mathscr{A}$, así que por 3.1.6, $\infty \in \mathrm{sqcl}(X)$. Obteniéndose del Lema 3.2.1, que $\mathscr{A} \upharpoonright X \notin \mathrm{MAD}(X)$.

(iii) → (i) Supóngase que $\mathscr{A}$ es maximal en ninguna parte. Como $\Psi(\mathscr{A})$ es de Fréchet (por ser primero numerable) basta verificar la propiedad de Fréchet en $\infty \in \mathscr{F}(\mathscr{A})$. Sea $X \subseteq \mathscr{F}(\mathscr{A})$ de modo que $\infty \in \mathrm{cl}(X)$, entonces por 3.1.6, $X \cap \mathscr{A}$ es infinito o $X \cap \omega \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$. Si ocurre lo primero, sea $B \subseteq X \cap \mathscr{A}$ numerable y nótese que entonces $B \to \infty$, lo cual basta para mostrar que $\infty \in \mathrm{sqcl}(X)$. Si ocurre el segundo caso, de la hipótesis se obtiene $A \upharpoonright (X \cap \omega) \notin \mathrm{MAD}(X \cap \omega)$, probando que $\infty \in \mathrm{sqcl}(X \cap \omega) \subseteq \mathrm{sqcl}$ (en virtud 3.2.1). En ambos casos, $\infty \in \mathrm{sqcl}(X)$; y por tanto $\mathrm{sqcl}(X) = \mathrm{cl}(X)$. ∎

El Corolario anterior puede ser empleado para solucionar un problema clásico en topología general; determinar si el producto de dos espacios de Fréchet es de Fréchet. Los espacios de Mrówka dejan ver su "maleabilidad" al momento de generar contraejemplos a través de la subsecuente ilación de ideas.

Proposición 3.2.3. *Sea $\mathscr{A}$ una familia casi ajena, unión ajena de las familias no vacías $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$. Si $\mathscr{A}$ es maximal en alguna parte, entonces $\mathscr{F}(\mathscr{B})\times\mathscr{F}(\mathscr{C})$ no es de Fréchet.*

Demostración. Supóngase que existe $X \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ de modo que $\mathscr{A} \upharpoonright X \in \mathrm{MAD}(X)$ y sea $B := \{(n,n) \mid n \in X\}$.

Como $X \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ y $\mathscr{B},\mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}$, resulta que $X \in \mathscr{I}^+(\mathscr{B})$ y $X \in \mathscr{I}^+(\mathscr{C})$ (véase 1.3.8). Entonces se tiene que $\infty_{\mathscr{B}} \in \mathrm{cl}_{\mathscr{F}(\mathscr{B})}$ y $\infty_{\mathscr{C}} \in \mathrm{cl}_{\mathscr{F}(\mathscr{C})}$ a consecuencia del Lema 3.1.6. De este modo:

$$(\infty_{\mathscr{B}}, \infty_C) \in \mathrm{cl}_{\mathscr{F}(\mathscr{B})\times\mathscr{F}(\mathscr{C})}(B)$$

sin embargo $(\infty_{\mathscr{B}}, \infty_{\mathscr{C}}) \notin \mathrm{sqcl}_{\mathscr{F}(\mathscr{B})\times\mathscr{F}(\mathscr{C})}(B)$. Efectivamente, de lo contrario, existe $Y \in [X]^{\omega}$ de manera que $\{(n,n) \mid n \in Y\}$ converge a $(\infty_{\mathscr{B}}, \infty_C)$. De lo anterior, y la continuidad de las funciones proyección, se obtiene que $Y \to \infty_{\mathscr{B}}$ en $\mathscr{F}(\mathscr{B})$ y $Y \to \infty_{\mathscr{C}}$ en $\mathscr{F}(\mathscr{C})$. Sin embargo a consecuencia de ello; y por 3.1.6, $Y \subseteq X$ es infinito y casi ajeno con cada elemento de $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$; es decir, con cada elemento de $\mathscr{A}\mathscr{B} \cup \mathscr{C}$, siendo esto una contradicción a la maximalidad de $\mathscr{A} \upharpoonright X$ en X.

Por lo tanto $(\infty_{\mathscr{B}}, \infty_{\mathscr{C}}) \notin \mathrm{sqcl}_{\mathscr{F}(\mathscr{B})\times\mathscr{F}(\mathscr{C})}(B)$ y el producto $\mathscr{F}(\mathscr{B})\times\mathscr{F}(\mathscr{C})$ no tiene la propiedad de Fréchet. ■

Combinando con el Teorema de Simon (1.4.3), se tiene la siguiente fuente de contrajemplos: Cada vez que $\mathscr{A}$ sea una familia infinita y maximal (por ello, no compacta), se pueden dar dos familias $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{C}$ no vacías, maximales en ninguna parte, de modo que $\mathscr{A} = \mathscr{B} \cup \mathscr{C}$. Y se desprende de la Proposición previa que $\mathscr{F}(\mathscr{B})\times\mathscr{F}(\mathscr{C})$ no es de Fréchet; pues claramente $\mathscr{A}$ es maximal en alguna parte, ya que $\omega \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ (por 1.3.5); y además, $\mathscr{F}(\mathscr{B})$ y $\mathscr{F}(\mathscr{C})$ son ambos de Fréchet (por 3.2.2). Esto implica:

Corolario 3.2.4. *Existen dos espacios de Mrówka cuyas compactaciones unipuntuales son de Fréchet, pero su producto no*

En particular, la propiedad de Fréchet no es finitamente productiva; ni siquiera en la clase de espacios compactos, de Hausdorff.

Dado el Teorema de Simon (1.4.3), toda familia maximal de tamaño $\varkappa$ contiene una familia maximal en ninguna parte de cardinalidad, también $\varkappa$. De la caracterización dada en 3.2.2 y la Proposición 3.1.4, se obtiene:

Corolario 3.2.5. *Si existe una familia maximal de tamaño $\varkappa$, existe un espacio de Fréchet tal que uno de sus puntos tiene carácter $\varkappa$.*

Particularmente, existe un espacio de Fréchet, que contiene un punto de carácter $\mathfrak{c}$.

4 Normalidad en los espacios de Mrówka

La hoy conocida como «Conjetura de Moore» (MC*), establece que todo espacio de Moore normal es metrizable; se trata de un problema lanzado a la comunidad matemática por Jones en 1933 que atiende a la cuestión £qué requiere un espacio de Moore para ser metrizable?. Este problema marcó un antes y un después para la topología general, consolidándose como uno de los problemas (sino el que más) importantes en la topología y la teoría de conjuntos.* MC *tiene, presumiblemente, una solución independiente a la axiomática* ZFC *([11, p. 429-435]).*

En el año 1937 (véase [5, Teo 5, p. 676]), el propio Jones muestra la consistencia de la «Conjetura Débil de Moore» (WMC*); esto es, cualquier espacio separable, normal y de Mooore, debe ser metrizable. Pero no sería sino hasta 1969 cuando Tall, en su tesis doctoral [14], logra establecer una equivalencia para* WMC *en términos de la existencia ciertos espacios topológicos (Q-sets, Definición 4.1.8) no numerables; mismos para los cuales, Silver mostró consistente su existencia.*

La meta de este capítulo será exponer las contribuciones de Jones, Silver y Tall; las cuales conjuntamente, permiten mostrar la independencia de WMC *de la axiomática usual de* ZFC.

4.1. Independencia de la Conjetura Débil de Moore

Por otra parte, todo espacio de Mrówka es de Moore y separable (Corolario 2.1.11); así que el enunciado WMC (por consiguiente, MC) implica que ningún espacio $\Psi(\mathscr{A})$; con $\mathscr{A}$ una familia casi ajena más que numerable, puede ser normal. Lo que ataña a la presente sección; y claramente presenta una dificultad mayor, es mostrar el recíproco de la anterior implicación.

Se comenzará exponiendo una condición necesaria que dicta ”dónde buscar” espacios de Mrówka que sirvan de contrajemplo para WMC.

Proposición 4.1.1. *Sea* $\mathscr{A} \in \mathrm{AD}(\omega)$*, se cumple:*

i) Si $|\mathscr{A}| \leq \aleph_0$*, entonces* $\Psi(\mathscr{A})$ *es normal.*

ii) Si $\mathscr{A}$ *es infinita y* $\Psi(\mathscr{A})$ *es normal,* $\mathscr{A}$ *no es maximal y además* $\aleph_1 \leq |\mathscr{A}| < \mathfrak{c}$*.*

Demostración. (i) Cualquier espacio de Mrówka numerable es metrizable (por 2.3.1), particularmente normal (**Ree BSB**).

(ii) Supóngase que $\mathscr{A}$ es infinita y que $\Psi(\mathscr{A})$ es normal. Si $\mathscr{A}$ fuera maximal, entonces por 2.3.4 y 2.2.3, se tiene que $\Psi(\mathscr{A})$ es pseudocompacto pero no numerablemente compacto. Lo cual (por el **RAKA**) imposibilita que $\Psi(\mathscr{A})$ sea normal. Por tanto, $\mathscr{A}$ no es maximal. Esto también implica que $\aleph_1 \leq |\mathscr{A}|$ (en virtud de la Lema 1.1.11).

Finalmente, $|\mathscr{A}| = \mathfrak{c}$, debido a 2.1.7, $\mathscr{A}$ es un subespacio cerrado y discreto de $\Psi(\mathscr{A})$ de tamaño $\mathfrak{c}$. Así, de la separabilidad y normalidad de $\Psi(\mathscr{A})$ se desprende; por el Lema de Jones (léase **TAL**), que $2^{\mathfrak{c}} = 2^{|\mathscr{A}|} \leq 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, lo cual es imposible. Por lo tanto $|\mathscr{A}| < \mathfrak{c}$. ■

Corolario 4.1.2. *Bajo* CH*; ningún espacio de Mrówka más que numerable, es normal.*

Lo subsecuente caracteriza; en términos simples, la normalidad de un espacio de Mróka, a través de la combinatoria de su familia asociada.

Proposición 4.1.3. *Sean* $\mathscr{A}$ *una familia casi ajena y* $F, G \subseteq \Psi(\omega)$ *cerrados ajenos. Son equivalentes:*

i) F *y* G *se separan por abiertos ajenos de* $\Psi(\mathscr{A})$*.*

ii) $F \cap \mathscr{A}$ *y* $G \cap \mathscr{A}$ *se separan por abiertos ajenos de* $\Psi(\mathscr{A})$*.*

iii) *La grieta* $(F \cap \mathscr{A}, G \cap \mathscr{A})$ *está separada.*

Demostración. La implicación (i) → (ii) es inmediata.

(ii) → (iii) Supóngase que $U, V \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ son abiertos ajenos tales que $F \cap \mathscr{A} \subseteq U$ y $G \cap \mathscr{A} \subseteq U$.

Si $a \in F \cap \mathscr{A}$ es cualquiera, entonces $a \in U$ y por definición de la topología en $\Psi(\mathscr{A})$ resulta que $a \subseteq^* U$. Ahora, si $b \in G \cap \mathscr{A}$ es cualquiera, entonces $b \subseteq^* V \subseteq \omega \setminus U$; de donde, $b \cap U =* \emptyset$. Por lo tanto, U es particionador de $F \cap \mathscr{A}$ y $G \cap \mathscr{A}$.

(iii) → (i) Supóngase que $D \subseteq \omega$ es particionador de $F \cap \mathscr{A}$ y $G \cap \mathscr{A}$. Nótese que $F \subseteq U := F \cup D \setminus G$; y además, U es abierto. Efectivamente, dado $a \in U \cap \mathscr{A} \subseteq F \cap \mathscr{A}$ se tiene que $a \subseteq^* D$ (por ser D particionador de $F \cap \mathscr{A}$ y $G \cap \mathscr{A}$) y $a \subseteq^* \Psi(\mathscr{A}) \setminus G$ (por ser G cerrado y ajeno a F), en consecuencia $a \subseteq^* D \setminus G \subseteq U$.

Como D es particionador de $F \cap \mathscr{A}$ y $G \cap \mathscr{A}$; $\omega \setminus D$ es particionador de $G \cap \mathscr{A}$ y $F \cap \mathscr{A}$, y resulta análogo que $G \subseteq V := G \cup (\omega \setminus D) \setminus F$ y V es abierto. Probando que F y G se separan por los abiertos ajenos U y V. ■

Debido al Lema 2.1.7 y la Observación 1.4.7, se desprende:

Corolario 4.1.4. *Para cada familia casi ajena* $\mathscr{A}$ *son equivalentes:*

i) $\Psi(\mathscr{A})$ *es normal.*

ii) *Para cada* $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$*, la grieta* $(\mathscr{B}, \mathscr{A} \setminus \mathscr{B})$ *está separada.*

La traducción de la Proposición 4.1.1 en términos combinatorios es la siguiente proposición (lo cual, por cierto, demuestra el Ejemplo 1.4.8 de la Subsección 1.4.2):

Corolario 4.1.5. *Sea* $\mathscr{C} \in \mathrm{AD}(\omega)$*, entonces:*

i) *Si* $|\mathscr{C}| \leq \aleph_0$*, toda grieta contenida en* $\mathscr{C}$ *está separada.*

ii) *Si* $\mathscr{C}$ *es infinita y,* $|\mathscr{C}| = \mathfrak{c}$ *o* $\mathscr{C} \in \mathrm{MAD}(\omega)$*; entonces* $\mathscr{C}$ *contiene una grieta que no está separada.*

En términos topológicos, todo espacio $\Psi(\mathscr{A})$ no normal (con $\mathscr{A}$ infinita) contiene dos cerrados ajenos que no se pueden separar por abiertos ajenos, y en virtud del punto (i) del anterior corolario, alguno de ellos debe ser no numerable. Surge la siguiente cuestión: £cuándo ningún par de cerrados ajenos no numerables se pueden separar?.

El análisis expuesto en Subsección 1.4.2 establece que estos espacios son, exactamente, aquellos generados por una familia inseparable (en el sentido de lo comentado en la Página 22), particularmente:

Corolario 4.1.6. *Si* $\mathscr{A}$ *es una familia que contiene una n-grieta de Luzin, ningún par de cerrados ajenos no numerables de* $\Psi(\mathscr{A})$ *se pueden separar por abiertos ajenos.*

Particularmente, $\Psi(\mathscr{A})$ *tiene tamaño* $\aleph_1$ *y no es normal.*

Ahora, en virtud del Corolario 1.4.15 se obtiene la siguiente implicación. El recíproco de la misma es claramente meritorio de un esdtudio más profundo, pues entre más cosas, logra caracterizar por completo la normalidad de los espacios de Mrówka; en $\mathrm{ZFC} + \mathrm{MA} + \neg\, \mathrm{CH}$.

Corolario 4.1.7. *Si* $\mathscr{A}$ *es una familia casi ajena tal que* $\Psi(\mathscr{A})$ *es normal, entonces* $\mathscr{A}$ *no contiene n-grietas de Luzin.*

4.1.1. Consistencia de WMC

Siguiendo la técnica de Tall, para probar la independencia de la Conjetura Débil de Moore (de ZFC), se utilizarán a modo de intermediario los espacios metrizables conocidos como Q-sets.

Definición 4.1.8. *Un Q-set es un espacio metrizable, separable y tal que todos sus subespacios son de tipo G_δ (equivalentemente; F_σ).*

Ejemplo 4.1.9. *Cualquier espacio X a lo más numerable y metrizable es un Q-set. Efectivamente, nótese que X es separable. Y además, si $A \subseteq X$ es cualquiera, entonces $A = \bigcup \big\{\{a\} \mid a \in X\big\}$ es de tipo F_σ.*

Se comenzará por observar que todo Q-set es; salvo homeomorfismos, un subespacio de $\mathbb{R}$ (o del conjunto de cantor, 2^ω). El siguiente lema, incluido en [9, Teo. 1, p. 286] por Kuratowski; se enunciará y demostrará con terminología moderna.

Lema 4.1.10. *Sea X un espacio metrizable por la métrica d. Si $|X| < \mathfrak{c}$, entonces X es cero-dimensional.*

Demostración. Supóngase que $|X| < \mathfrak{c}$. Basta corroborar que cada $x \in X$ admite una base local de abiertos y cerrados. Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$.

Supóngase ahora que para cada $\delta \in (0, \varepsilon)$, el conjunto $\operatorname{fr}(B(x, \delta))$ es no vacío, y fíjese (AC) un elemento $x_\delta \in \operatorname{fr}(B(x, \delta)) \subseteq X$. Como $|(0, \varepsilon)| = \mathfrak{c}$, la asignación $\delta \to x_\delta$ no puede ser inyectiva. Consecuentemente, existen distintos $\delta, \delta' \in (0, \varepsilon)$ de modo que $\operatorname{fr}(B(x, \delta)) \cap \operatorname{fr}(B(x, \delta')) \neq \varnothing$. Pero esto es imposible, dado que $\delta \neq \delta'$.

Por lo tanto, para cada $\varepsilon > 0$ se puede fijar (AC) cierto $\delta_\varepsilon \in (0, \varepsilon)$ tal que $\operatorname{fr}(B(x, \delta_\varepsilon)) = \varnothing$; esto es, $B(x, \delta_\varepsilon)$ es abierto y cerrado a la vez. Claramente $\{B(x, \delta_\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ es una base local para x en X. ■

Proposición 4.1.11. *Para todo espacio X son equivalentes:*

i) X es un Q-set.

ii) X se encaja en 2^ω y todos sus subespacios son de tipo G_δ.

iii) X se encaja en $\mathbb{R}$ y todos sus subespacios son de tipo G_δ.

Demostración. Dada la universalidad del conjunto de Cantor, $2^\omega \subseteq \mathbb{R}$, sobre la clase de espacios cero-dimensionales; y que todo subespacio de $\mathbb{R}$ es metrizable y separable, basta probar que todo Q-set es cero-dimensional.

Supóngase que X es un Q-set, como X es metrizable y separable, entonces es 2 AN. Sea $\mathcal{B}$ una base a lo más numerable $\mathcal{B}$ para X.

Como X es Q-set, para cada $A \subseteq X$ fíjese (AC) una colección a lo más numerable de abiertos $\mathcal{U}$ de modo que $A = \bigcap \mathcal{U}$. Y como $\mathcal{B}$ es base; de nuevo haciendo uso de AC, para cada abierto U fíjese $\mathcal{B}_U \subseteq \mathcal{B}$ de modo que $U = \bigcup \mathcal{B}_U$.

Lo anterior permite definir $\mathscr{P}(X) \to [\mathscr{P}(\mathcal{B})]^{\leq\omega}$ por medio de la correspondencia: $A \longmapsto \{B_U \mid U \in \mathscr{A}\}$. Nótese que tal asignación es inyectiva, pues si $\{B_U \mid U \in \mathscr{A}\} = \{B_U \mid U \in \mathscr{B}\}$, entonces:

$$\mathcal{U}_A = \{\bigcap \mathcal{B}_U \mid U \in \mathcal{U}_A\} = \{\bigcap \mathcal{B}_U \mid U \in \mathcal{U}_B\} = \mathcal{U}_A$$

y con ello $A = \bigcap \mathcal{U}_A = \bigcap \mathcal{U}_B = B$. De esta manera:

$$2^{|X|} \leq \left|[\mathscr{P}(\mathcal{B})]^{\leq\omega}\right| \leq \left(2^{|B|}\right)^{\aleph_0} \leq \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_2} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

La última desigualdad implica que $|X| < \mathfrak{c}$. Siguiéndose del Lema previo, la cero-dimensionalidad de X. ∎

Observación 4.1.12. *Todo Q-set tiene tamaño menor que $\mathfrak{c}$. Consecuentemente, bajo* CH*; no existen Q-sets más que numerables.*

El paralelismo del resultado anterior con el Corolario 4.1.2 no es coincidencia. La meta ahora es mostrar que la existencia de Q-sets no numerables es equivalente a la existencia de espacios de Mrówka no numerables y normales; más aún, si estos espacios no existen, entonces WMC se satisface.

Lema 4.1.13. *Supóngase que X es normal, de Moore, no metrizable y que $D \subseteq X$ es denso a lo más numerable; entonces existe $A \subseteq X \setminus D$ más que numerable, discreto y cerrado en X.*

Demostración. El Tereoma de Bing (**BINGEEE**) caracteriza la metrización de los espacios de Moore a través de la normalidad colectiva. Por ello, X no es colectivamente normal y existe una familia discreta $\mathcal{A}$ de cerrados de X, cuyos elementos no se pueden separar por abiertos ajenos.

Como X es normal, para cada par de cerrados ajenos de X; digamos F y G, elíjanse (AC) abiertos ajenos $W(F,G), S(F,G)$ de modo que $F \subseteq W(F,G)$ y $G \subseteq S(F,G)$. Es claro que $\mathcal{A}$ no puede ser finito.

Afirmación. $\mathcal{A}$ es más que numerable.

Demostración. Supóngase que $\mathcal{A}$ está enumerado inyectivamente como $\{A_n \mid n \in \omega\}$. Por ser $\mathcal{A}$ familia discreta de cerrados, si $n \in \omega$, entonces $B_n := \bigcup\{A_m \mid m > n\}$ es cerrado.

Por recursión, sean $U_0 := W(A_0, B_0)$ y $V_0 := S(A_0, B_0)$; y, para $n \in \omega$, $U_{n+1} := W(A_{n+1}, B_{n+1}) \cap V_n$ y $V_{n+1} = S(A_{n+1}, B_{n+1}) \cap V_n$.

Por construcción, $\{U_n \mid n \in \omega\}$ es una familia de abiertos, ajenos por pares tales que para cada $n \in \omega$ se tiene $A_n \subseteq U_n$. Así, los elementos de $\mathcal{A}$ se separan por abiertos ajenos; contradiciendo su elección. ⊠

Dada la afirmación anterior, y fijando para cada $a \in \mathcal{A}$ un elemento $x_a \in \mathcal{A}$, se obtiene un conjunto mas que numerable $B := \{x_a \mid a \in \mathcal{A}\}$; mismo que por ser $\mathscr{A}$ familia discreta y X de Hausdorff, resulta ser cerrado y discreto.

Por último nótese que cada subespacio de B es discreto y cerrado en X; pues B es discreto y cerrado en X. Particularmente, $A := B \setminus D$ es discreto, discreto en X y no numerable (pues B es más que numerable y D es numerable). ■

El siguiente teorema aparece en la tesis doctoral de Franklin David Tall (ver [14]), y es la pieza clave para atacar la Conjetura Débil de Moore.

Teorema 4.1.14 (Tall)

Si $\varkappa$ es un cardinal infinito, son equivalentes:

i) Existe un espacio de Moore, normal, no metrizable de tamaño $\varkappa$.

ii) Existe un espacio de Mrówka normal de tamaño $\varkappa$.

iii) Existe un Q-set de tamaño $\varkappa$.

Demostración. (i) → (ii) Supóngase que X es un espacio, normal, de Moore y no metrizable de tamaño $\varkappa$ y sea fíjese $D \subseteq X$ denso numerable de X. Por 4.1.13, D es infinito y existe un subespacio $A \subseteq X \setminus D$ más que numerable; discreto y cerrado de X. Como X es de Hausdorff y primero numerable, considérese $\mathscr{A}_{D,A} = \{A_x \in [D]^\omega \mid x \in A\}$; la familia de sucesiones en D convergentes a A (definida en 1.2.2), donde cada A_x converge a x. Por la Proposición 1.2.1, $|\mathscr{A}_{D,A}| = \varkappa$ y así mismo, $\Psi_D(\mathscr{A}_{D,A}) = \varkappa$.

Sea $\mathscr{B} := \{A_x \mid x \in F\} \subseteq \mathscr{A}_{D,A}$ cualquiera. Como A es discreto y cerrado en X, cualquiera de sus subespacios es cerrado en X; en consecuencia y por normalidad de X, existen abiertos $U, V \subseteq X$ ajenos, de modo que $F \subseteq U$ y $A \setminus F \subseteq V$. Si $x \in F$, entonces $A_x \to x$ y por ello $A_x \subseteq^* U$, similarmente, si $y \in A \setminus F$, entonces $A_y \subseteq^* V \subseteq X \setminus U$; de donde $A_y \cap U^* = \emptyset$.

Por tanto $(\mathscr{B}, \mathscr{A}_{D,A} \setminus \mathscr{B})$ está separada, obteniéndose de 4.1.4 la normalidad de $\Psi_D(\mathscr{A}_{D,A})$.

(ii) → (iii) Si $\varkappa = \omega$, la implicación resulta vacua; pues todo subespacio numerable de 2^ω es un Q-set (Ejemplo 4.1.9). Supóngase pues, que $\Psi(\mathscr{A})$ es un espacio normal de tamaño $\varkappa > \omega$; siendo necesario que $|\mathscr{A}| = \varkappa$.

Para cada $C \subseteq \omega$ denótese por $\varphi_C \in 2^\omega$ a la función característica de C y sea $X := \{\varphi_A \in 2^\omega \mid A \in \mathscr{A}\}$. Obsérvese que X es un espacio metrizable, separable (por ser subespacio del metrizable, separable, 2^ω) de tamaño $\varkappa$.

Sea $Y = \{\varphi_A \in X \mid A \in \mathscr{B}\} \subseteq X$ cualquiera. Dado el Corolario 4.1.4, la normalidad de $\Psi(\mathscr{A})$ implica la existencia de un particionador de $\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}$ y $\mathscr{B}$; de este modo:

$$\begin{aligned} Y &= \{\varphi_A \in X \mid A \in \mathscr{B}\} \\ &= \{\varphi_A \in X \mid A \cap D \neq^* \varnothing\} \\ &= \{\varphi_A \in X \mid \forall n \in \omega\, (A \cap D \nsubseteq n)\} \\ &= \bigcap_{n\in\omega} \{\varphi_A \in X \mid A \cap D \nsubseteq n\} \end{aligned}$$

Ahora, si $n \in \omega$ y $\varphi \in U_n := \{\varphi_A \in X \mid A \cap D \nsubseteq n\}$ es cualquiera, existe cierto $k \in (A \cap D) \setminus n$. Por ello, si $x = \varphi_B \in X$ es tal que $x(k) = 1$, entonces $k \in (B \cap D) \setminus n$ y $B \cap D \nsubseteq n$; es decir $f \in U_n$. Mostrando así que $\{x \in X \mid x \upharpoonright \{k\} = \varphi \upharpoonright \{k\}\} \subseteq U_n$. Por lo tanto, cada U_n es abierto en X. De esta manera, cualquier $Y \subseteq X$ es G_δ en X y X es un Q-set.

(iii) → (i) Supóngase que X es un Q-set de tamaño κ. En virtud del Proposición 4.1.11, supóngase sin pérdida de generalidad que $X \subseteq 2^\omega$. Para cada $E \subseteq X$ considérese $\mathscr{A}_E := \{A_x \in [N]^\omega \mid x \in E\}$, la familia de las ramas de E en N (definida en 1.2.5); donde $N := 2^{<\omega}$ y cada A_x es el conjunto $\{x \upharpoonright n \mid n \in \omega\} \subseteq N$. Puesto que $|X| = \kappa$, del Definición 1.2.5 se sigue que $|\mathscr{A}_X| = \kappa$, y con ello $|\Psi_N(\mathscr{A}_X)| = \kappa$.

Sea $Y \subseteq X$ cualquiera. Como X es un Q-set, $Y = \bigcup\{F_n \mid n \in \omega\}$ y $X \setminus Y = \bigcup\{G_n \mid n \in \omega\}$; donde cada conjunto F_n y G_n es cerrado en $X \subseteq 2^\omega$. Para cada $n \in \omega$ defínanse los conjuntos:

$$\begin{aligned} D_n &:= \left(\bigcup \mathscr{A}_{F_n}\right) \setminus \bigcup_{m<n} \left(\bigcup \mathscr{A}_{G_m}\right) \\ L_n &:= \left(\bigcup \mathscr{A}_{G_n}\right) \setminus \bigcup_{m\leq n} \left(\bigcup \mathscr{A}_{F_m}\right) \end{aligned}$$

y sea $D := \bigcup\{D_n \mid n \in \omega\}$. Nótese que por construcción, si $m, n \in \omega$, se tiene $D_n \cap L_m = \varnothing$; consecuentemente, cada L_n es ajeno con D.

Sea $y \in A_Y$; entonces existe $n \in \omega$ de modo que $y \in F_n$. Por otra parte, cada $G_m \subseteq X \setminus Y$ (con $m < n$) es cerrado en X, por lo que existe $s \in \omega$ de modo que:

$$\{x \in X \mid x \upharpoonright s = y \upharpoonright s\} \subseteq X \setminus \bigcup_{m<n} G_m$$

Por ello, si $v \in A_y \setminus D_n \subseteq F_n$, existen $x \in F_n$ y $k \in \omega$ de modo que $v = x \upharpoonright k$. Así que $x \in \bigcup \mathscr{A}_{F_n}$; y como $v \notin D_n$, existen $m < n$ y $g \in G_m$ de manera que $v = y \upharpoonright k = g \upharpoonright k$. Y a razón de ello, no puede ocurrir $s \subseteq k$. Por lo tanto $k < s$ y $A_y \setminus D_n \subseteq 2^{<s} =^* \emptyset$; esto es, $A_y \subseteq^* D_n \subseteq D$.

Similarmente, para cada $y \in X \setminus Y$ existe un $n \in \omega$ tal que $A_y \subseteq^* L_n \subseteq N \setminus D$; de donde, $A_y \cap D {=} \emptyset$. Así que D es separador de $\mathscr{B}$ y $\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}$; probando por el Corolario 4.1.4 la normalidad de $\Psi_N(\mathscr{A}_X)$. ■

Es inmediato al Teorema 4.1.14 (y a 4.1.2, o bien, 4.1.12) la siguiente consecuencia:

Corolario 4.1.15. *Bajo* CH*; se cumple* WMC*, y:*

i) Ningún espacio de Mrówka no numerable es normal.

ii) Ningún Q-set es más que numerable.

Consecuentemente WMC *es consistente con* ZFC*.*

4.1.2. Consistencia de ¬WMC

Para la segunda parte de la prueba de independencia de WMC se hará uso; como es previsible desde anteriores capítulos, de la negación de CH con el Axioma de Martin. Se comenzará observando cómo se pueden caracterizar a todos los Q-sets haciendo uso del Lema de Solovay y MA.

Lema 4.1.16. *Sea X un espacio metrizable y separable. Entonces existe una base $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \omega\}$ para X de modo que $\{A_x \mid x \in X\}$ es familia casi ajena; donde, cada A_x es $\{n \in \omega \mid x \in B_n\}$.*

Demostración. Por el teorema (**Arhangelskii**), X admite una base regular (véase **BsRg**) $\mathcal{C}$. Como X es 2 AN (a consecuencia de ser metrizable y separable **VeR**), existe una base $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \omega\} \subseteq \mathcal{C}$, claramente $\mathcal{B}$ sigue siendo regular.

Dados $x, y \in X$ son distintos, sean U, V abiertos ajenos que separan a x y y. Por regularidad de la base $\mathcal{B}$, existe $W \subseteq U$ abierto con $x \in W$ y $\mathcal{B}_W := \{n \in$

$\omega \mid B_n \cap W \neq \varnothing \wedge B_n \setminus W \neq \varnothing\} =^* \varnothing$. Por consiguiente, el conjunto $A_x \cap A_y \subseteq \mathcal{B}_W$ es finito. ■

Proposición 4.1.17 (Tall, Silver)**.** *Sea X espacio topológico. Bajo* MA*; X es un Q-set si y sólo si es homeomorfo a un subespacio $X \in [\mathbb{R}]^{<\mathfrak{c}}$.*

Demostración. Supóngase MA. La suficiencia viene dada por 4.1.14 y 4.1.11. Para la necesidad supóngase que $X \in [\mathbb{R}]^{<\mathfrak{c}}$, si X es a lo más numerable, de 4.1.14 y 4.1.1 se sigue que X es un Q-set.

Como X es metrizable y separable, sean $\mathcal{B}$, B_x (para cada $x \in X$) y $\mathscr{A}$ como en el Lema previo. Tómense $Y \subseteq X$ cualquiera y $B := \{B_y \in \mathscr{A} \mid y \in Y\}$.

Como $|\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}|, |\mathscr{B}| < \mathfrak{c}$ y se cumple MA, del Lema 1.4.22 se desprende la existencia de cierto $D \subseteq \omega$ de modo que para cada $y \in Y$ y $x \in X \setminus Y$ se tiene $A_y \cap D \neq^* \varnothing$ y $A_x \cap D =^* \varnothing$.

Para cada $n \in \omega$ sea $U_n := \bigcup\{B_m \in \mathcal{B} \mid m \in D \setminus n\}$, se afirma que $Y = \bigcap\{U_n \mid n \in \omega\}$. Efectivamente; si $y \in X \setminus Y$ y $n \in \omega$ son cualesquiera, $A_y \cap D$ es infinito, y por ello, existe $m \in D \setminus n$ tal que $y \in B_m$. En consecuencia $y \in U_n$, y así $Y \subseteq \bigcap\{U_n \mid n \in \omega\}$.

De manera similar, si $x \in X \setminus Y$, $A_x \cap D$ es finito y existe $n \in \omega$ de modo que $A_x \cap D \subseteq n$. Por lo que para cada $m > n$ se tiene que $x \notin B_m$; luego entonces, $x \notin U_n$. Lo anterior muestra que $X \setminus Y \subseteq X \setminus \bigcap\{U_n \mid n \in \omega\}$.

Por lo tanto $Y = \bigcap\{U_n \mid n \in \omega\}$ y es G_δ. ■

Nótese que la influencia de MA en la previa caracterización radica únicamente en la necesidad, cuando $\aleph_1 \leq |X| < \mathfrak{c}$.

De la proposición recién mostrada, el Teorema 4.1.14 y el Corolario 4.1.15 surge el resultado que pone punto final a la Conjetura Débil de Moore (y prueba la consistencia de la negación de la Conjetura de Moore).

Corolario 4.1.18. *Bajo* MA*; para cada cardinal infinito $\kappa < \mathfrak{c}$ existe un espacio de Mrówka normal, de tamaño κ. Consecuentemente:*

i) Bajo MA $+\neg$ CH*; existen tales espacios.*

ii) $\neg$ WMC *(y por ello,* $\neg$ MC*) es consistente con* ZFC.

iii) WMC *es independiente de* ZFC.

Contrastable con 4.1.17 es el hecho de que aun no se ha dado una caracterización para la normalidad de los espacios de Mrówka. Resulta seductor conjeturar que cualquier espacio de Isbell-Mrówka de tamaño menor al continuo es normal. Sin embargo, el Corolario 4.1.6 muestra que; bajo MA $+\neg$ CH, existe un espacio de Mrówka, no normal y de tamaño menor al continuo.

El comentario anterior deja como consecuencia la falsedad de que cualquier familia casi ajena sea *esencialmente igual* a alguna de las definidas en 1.2.5 (en el sentido lo comentado en la Página 42); de lo contrario, cualquier espacio espacio de Isbell-Mrówka de tamaño menor al continuo sería es normal, cosa que es falsa (al menos desde ZFC únicamente).

4.2. Equivalencia para la normalidad de $\Psi(\mathscr{A})$ bajo MA

En esta sección se concluirá el capítulo (y posiblemente la tesis) mostrando un resultado del artículo "n-Luzin Gaps" de Hrusak y Osvaldo Guzman «falta crear la referencia». Específicamente, se mostrará utilizando técnicas básicas de forcing y forcing iterado, que, bajo MA *y* $\neg$ CH, *el espacio* $\Psi(\mathscr{A})$ *es normal si y sólo si* $|\mathscr{A}| < \mathfrak{c}$ *y* $\mathscr{A}$ *no contiene n-grietas de Luzin.*

AQUI EMPIEZA EL DOLOOOOR EQUISDE

Caracterizaciones

σ-compacidad de $\Psi(\mathscr{A})$, 39

cero-dimensionalidad de $\Psi(\mathscr{A})$, 35
compacidad de $\Psi(\mathscr{A})$, 38
compacidad de los subespacios de $\Psi(\mathscr{A})$, 36
compacidad local hereditaria de cualquier espacio infinito, separable, de Hausdorff, 44
compacidad local hereditaria y pseudocompacidad de cualquier espacio infinito, separable, de Hausdorff, 46
compacidad numerable de $\Psi(\mathscr{A})$, 38

homeomorfismo con $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ ($\mathscr{A}$ maximal), 58

metrizabilidad de $\Psi(\mathscr{A})$, 39

Normalidad de $\Psi(\mathscr{A})$ (con grietas separables), 65

ordenabilidad lineal de $\Psi(\mathscr{A})$, 42

primero numerabilidad de $\mathscr{F}(\mathscr{A})$, 55
propiedad de
- Tychonoff en $\Psi(\mathscr{A})$, 35
- Fréchet en $\mathscr{F}(\mathscr{A})$, 60
- Hausdorff en $\Psi(\mathscr{A})$, 35
- Lindelöf en $\Psi(\mathscr{A})$, 39

pseudocompacidad de $\Psi(\mathscr{A})$, 41

segundo numerabilidad de $\Psi(\mathscr{A})$, 39
separabilidad hereditaria de cualquier espacio infinito, separable, de Hausdorff, hereditariamente localmente compacto, 50

Índice Simbólico

D_G (si $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{P}_{\mathscr{A}}$), 26
D_a (si $a \in \mathscr{A}$), 26
AD(N), 3
MAD(N), 4
WMC, 63
Φ_h, 5
MC, 63
$\Psi(\mathscr{A})$, 32
$\Psi_N(\mathscr{A})$, 32
$\leq_{\mathscr{A}}$, 25
$\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$, 25
$\mathcal{B}_{\mathscr{A}}$, 33
$\mathcal{B}_x$, 33
$\mathfrak{a}$, 10
$\mathscr{A} \upharpoonright X$, 13
$\mathscr{A}_X$, 10
$\mathscr{A}_{D,A}$, 8
$\mathscr{F}(\mathscr{A})$, 53
$\mathscr{I}(\mathscr{A})$, 11
$\mathscr{I}^+(\mathscr{A})$, 11
$\mathscr{I}_N(\mathscr{A})$, 11
$\mathscr{I}_N^+(\mathscr{A})$, 11
$\mathscr{T}_{\mathscr{A}}$, 32
$\mathscr{T}_{N,\mathscr{A}}$, 32

Índice Alfabético

Q-set, 67
Ψ-espacio, 32
n-grieta
  de Luzin, 23

base
  estándar de $\Psi_N(\mathscr{A})$, 33
  local
    estándar de x en $\Psi_N(\mathscr{A})$, 33

cardinal
  de casi ajenidad, 10
casi
  ajena sobre N, familia, 3
  ajena, familia, 3
  ajenidad, cardinal de, 10
  ajeno, 3
compacto
  de Franklin, 53
Conjetura
  de Moore, 63
  débil de Moore, 63

Dokálková
  Lema de, 16

espacio
  ,Ψ, 32
  de Isbell-Mrówka, 36
  de Mrówka, 36

familia
  casi ajena, 3
    maximal, 4
  casi ajena sobre N, 3
    maximal en N, 4
  de
    ramas de X en 2^ω, 10
    sucesiones en D convergentes
      a A en X, 8
  de Luzin, 21
  débilmente separada, 28
  inseparable, 22
  maximal en alguna parte, 13
  maximal en ninguna parte, 13
  no compacta, 53
  parcialmente separable, 22
  que contiene a una grieta, 19
Franklin
  compacto de, 53

grieta, 19
  contenida en una familia, 19
  de Luzin, 23
  separada, 19

ideal generado por $\mathscr{A}$, 11
Isbell-Mrówka
espacio de, 36
topología de, 32

Kannan
Teorema de Rajagopalan y, 44

Lema
de Dokálková, 16
de Solovay, 27
Luzin
n-grieta de,, 23
familia de, 21
grieta de,, 23

Moore
conjetura de, 63
conjetura débil de, 63
Mrówka
topología de, 32
espacio de, 36

orden
basado en $\mathscr{A}$, 25

parte
positiva de $\mathscr{A}$, 11
particionador, 19

Rajagopalan
Teorema de Kannan y, 44

Simon
Teorema de, 17
Solovay
Lema de, 27

Teorema
de Kannan y Rajagopalan, 44
de Simon, 17
topología
de Isbell-Mrówka, 32
de Mrówka, 32
traza de $\mathscr{A}$ en X, 13

Referencias

[1] Fidel Casarrubias y Angel Tamariz. *Elementos de Topología General*. 1.ª ed. Aportaciones Matemáticas, 2019.

[2] Michael Hruák. «Almost disjoint families and topology». En: *Recent Progress in General Topology III*. Springer, 2013, págs. 601-638.

[3] Michael Hruák y Fernando Hernández. «Topology of Mrówka-Isbell Spaces». En: *Pseudocompact topological spaces, Gainesville*. Springer. 2018, págs. 253-289.

[4] Thomas Jech y Thomas Jech. *Set theory: The third millennium edition, revised and expanded*. Vol. 3. Springer, 2006.

[5] F Burton Jones. «Concerning normal and completely normal spaces». En: (1937).

[6] Varadachariar Kannan y Minakshisundaram Rajagopalan. «Hereditarily locally compact separable spaces». En: *Categorical Topology: Proceedings of the International Conference, Berlin*. Springer. 1979, págs. 185-195.

[7] Kenneth Kunen. *Set theory an introduction to independence proofs*. Vol. 102. Elsevier, 1980.

[8] Kenneth Kunen y Jerry Vaughan. *Handbook of set-theoretic topology*. Elsevier, 1984.

[9] Kazimierz Kuratowski. *Topology: Volume I*. Vol. 1. Elsevier, 1966.

[10] Georgina Noriko. «Algunas propiedades de los espacios de Mrówka». Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias, UNAM, 2009.

[11] Peter J Nyikos. «A provisional solution to the normal Moore space problem». En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 78.3 (1980).

[12] Waclaw Sierpinski. «Cardinal and ordinal numbers». En: *Polska Akademia Nauk, Monografie Matematyczne* 34 (1958).

[13] Petr Simon. «A compact Fréchet space whose square is not Fréchet». En: *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* (1980).

[14] Franklin David Tall. «Set-theoretic consistency results and topological theorems concerning thenormal Moore space conjecture and related problems». Tesis Doctoral. The University of Wisconsin-Madison, 1969.