

Langages Formels

Série 10 - Machines de Turing, partie 1

1er Décembre 2025

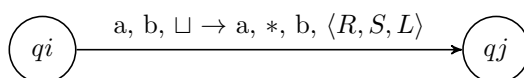
Pensez à justifier vos réponses.

1. Dessinez explicitement la machine formelle qui accepte le langage suivant, sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$: $L_1 = \{z = WcW \mid W \in \{a, b\}^*\}$.
2. **Machine de Turing à plusieurs bandes** : une machine de Turing à plusieurs bandes fonctionne de la même manière qu'une machine de Turing à une bande, à la différence qu'elle possède d'autres bandes en plus de la bande sur laquelle est le mot donné en entrée (on appelle généralement ces autres bandes des bandes de travail).

La machine possède un pointeur sur chaque bande, et pour chaque transition, on lit un caractère sur chaque bande, on écrit un caractère sur chaque bande, et on se déplace sur chaque bande.

Attention : le nombre de bandes doit être fini et fixé, il ne peut pas changer selon l'entrée de la machine !

Formellement, voici un exemple de transition avec 3 bandes :

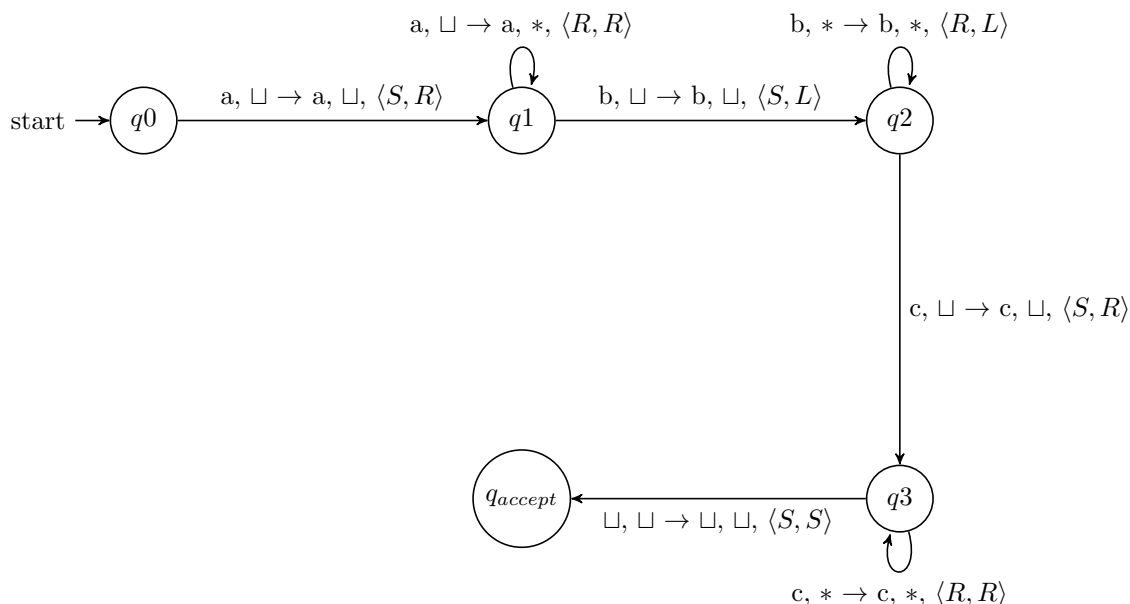


Cette transition signifie donc qu'on doit :

- lire "a" sur la première bande (bande d'entrée), "b" sur la deuxième bande, "□" sur la troisième bande.
- écrire "a", "*" et "b" à la place respectivement (par exemple, pour la deuxième bande, on remplace donc le "b" qu'on avait lu par un "*").
- et enfin les mouvements des pointeurs sur les trois bandes sont R,S,L : on déplace donc le pointeur de la première bande à droite (R), celui de la deuxième bande reste stationnaire (S), et celui de la troisième bande se déplace à gauche (L).

On notera qu'avec plusieurs bandes, il est nécessaire d'explicitier ce qu'on écrit sur chaque bande, même si on souhaite n'écrire que sur certaines bandes : si on écrivait la transition "a, b, □ → *, a, ⟨R, S, L⟩", comment saurait-on sur laquelle des trois bandes on doit ne pas écrire ?

Voici un exemple d'une telle machine à deux bandes. Donnez le langage accepté par cette machine.



Equivalence des modèles de machines : On a vu au cours qu'il existait différents modèles équivalents de machines de Turing : on peut autoriser de rester stationnaire sur une bande ou non, avoir une ou plusieurs bandes, on peut avoir une bande infinie des deux côtés ou d'un seul côté (à gauche ou à droite), etc.

Ces modèles étant équivalents, on pourra en général choisir lequel utiliser lorsqu'on veut créer une machine pour un langage ou problème donné.

Par défaut, on utilisera donc toujours le modèle le plus permissif dans les exercices, sauf indication contraire : on considère donc le modèle de machines de Turing dans lequel on peut avoir plusieurs bandes, les pointeurs peuvent rester stationnaires, et les bandes sont infinies des deux côtés.

Vous pouvez utiliser le modèle de votre choix, mais celui-ci doit être précisé, car bien que ces modèles soient équivalents en terme de puissance, l'algorithme dépend du modèle de machine : pour accepter le même langage, deux modèles de machines différentes auront parfois un algorithme quelque peu différent.

3. Dessinez explicitement la machine formelle (vous pouvez utiliser plusieurs bandes) pour une machine de Turing qui reconnaît le langage $L_2 = \{a^n b^m c^{2m+n} \mid n \geq 1, m \geq 0\}$.
4. Décrivez (avec des phrases, en expliquant l'algorithme de la machine) une machine de Turing qui reconnaît le langage $L_3 = \{a^{2n} b^n c^{3n} \mid n \geq 1\}$.
5. Décrivez une machine de Turing qui reconnaît le langage suivant : $L_4 = \{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c = |w|_d\}$.