Langages Formels
Série 7 Correction - Grammaires Régulières

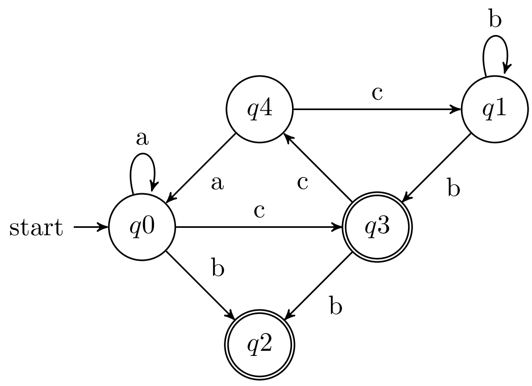
10 Novembre 2025

Pensez à justifier vos réponses.

1. Donnez une grammaire régulière équivalente à l'expression régulière suivante : $E = (01(11 \cup 00)(11 \cup 00)^*1)^*$.

   Une grammaire régulière équivalente est :
   $G_3 = \langle \{S, A, B, C, D, E\}, \{0, 1\}, S, \mathcal{P} \rangle$ avec :
   $\mathcal{P} = \{$
   $S \to \varepsilon,$
   $S \to 0A,$
   $A \to 1B,$
   $B \to 1C,$
   $C \to 1D,$
   $B \to 0E,$
   $E \to 0D,$
   $D \to 1C,$
   $D \to 0E,$
   $D \to 1S$
   $\}$

2. Donnez une grammaire régulière qui génère le même langage que l'automate fini suivant (Exercice supplémentaire à la maison : donnez une expression régulière) :



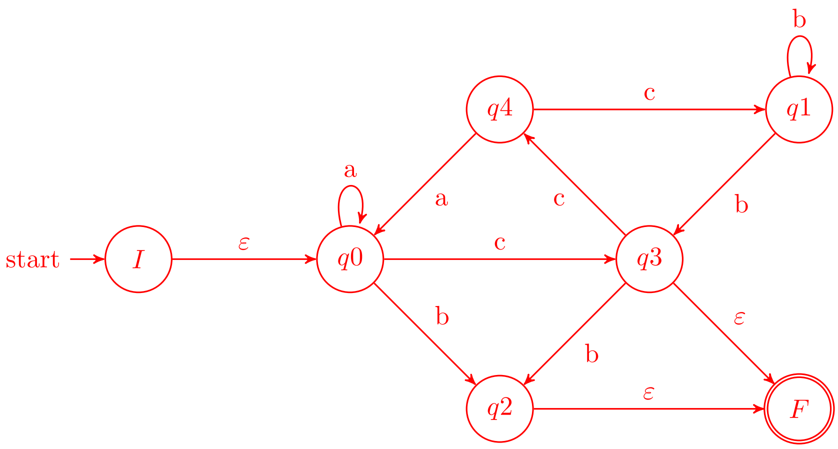
On assigne à chaque état une variable, on traduit chaque flèche comme une règle, et on ajoute la possibilité de finir pour les états finaux : $G = \langle\{S, A, B, C, D\}, \{a, b, c\}, S, \mathcal{P}\rangle$, avec les règles suivantes :
$\mathcal{P} = \{$
$S \to aS$,
$S \to bB$,
$S \to cC$,
$A \to bA$,
$A \to bC$,
$B \to \varepsilon$,
$C \to bB$,
$C \to cD$,
$C \to \varepsilon$,
$D \to aS$,
$D \to cA$
$\}$

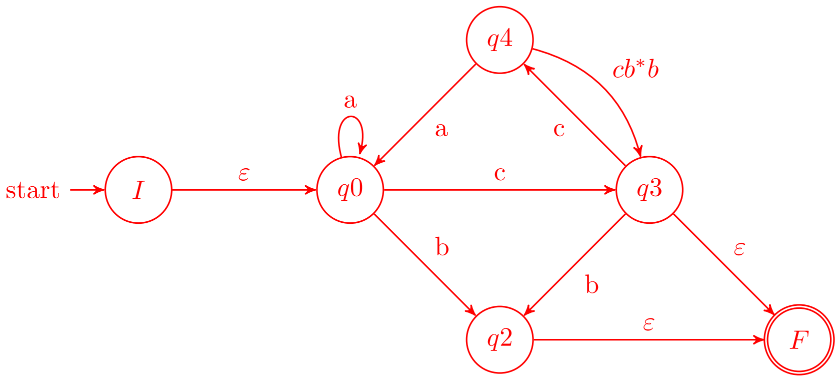
(Question supplémentaire :

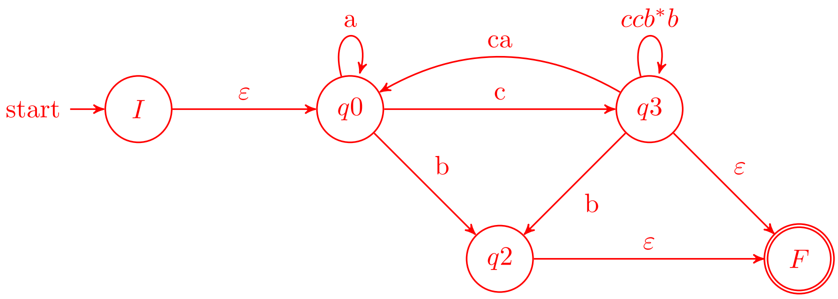
- Méthode intuitive : $\underbrace{(a \cup cc(cb^*bc)^*a)^*b \cup (a^*c(c(cb^*b \cup aa^*c))^*)b}_{q_2} \cup \underbrace{a^*c(c(cb^*b \cup aa^*c))^*}_{q_3}$

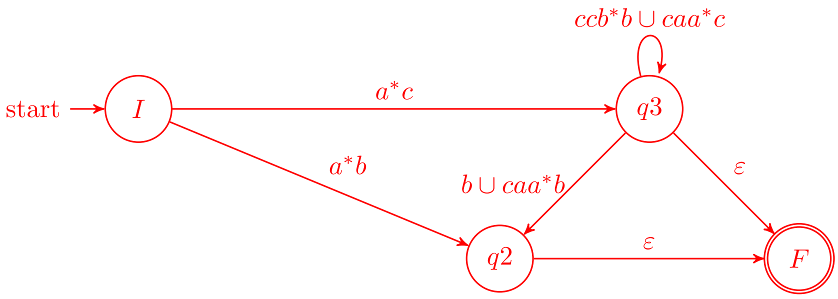
  (On a donc l'union des mots finissant en q2 et des mots finissant en q3.
  On peut donc de commencer par construire l'expression pour q3 (on a les differents moyens d'arriver a q3 (a^*c) puis les boucles de q3 à q3), qui est plus simple que pour q2.
  Et ensuite, pour q2, on observe qu'on peut uniquement terminer en q2 en lisant un b depuis q0 ou q3 (et on ne repart jamais de q2).
  On peut donc écrire l'expression des mots acceptés en q2 comme les mots de q0 suivis d'un b et les mots de q3 suivis d'un b, avec la structure suivante :(mots q0) b $\cup$ (mots q3) b.)

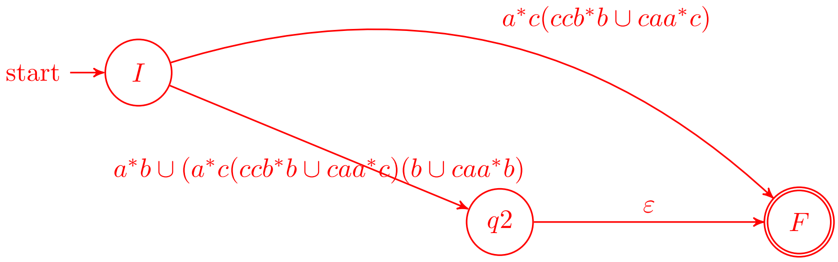
- Méthode vue en classe :

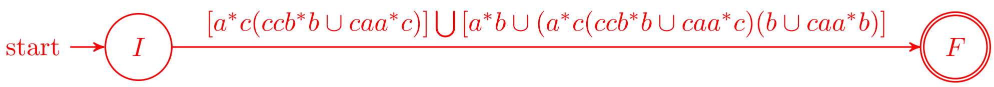












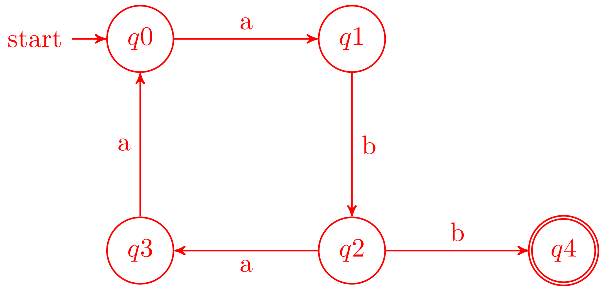
3. Donnez une grammaire régulière générant le langage $L_7 = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0\,,\ j \equiv i \mod 3\}$.

La grammaire G suivante génère L_7 :
$G = \langle \{S, A, B, C, X, Y, Z\}, \{a, b\}, S, \mathcal{P} \rangle$, avec les règles suivantes :
$\mathcal{P} = \{$
$S \to aA,$
$A \to aB,$
$B \to aS,$
$S \to \varepsilon,$
$S \to bX,$
$X \to bY,$
$Y \to bZ,$
$Z \to \varepsilon,$
$Z \to bX,$
$A \to bZ$

$B \to bC$
$C \to bZ$
$\}$

4. Soit la grammaire régulière $G = \langle \{S, A, B, C\}, \{a, b\}, S, P\rangle$ avec les règles $P = \{S \to aA,\ A \to bB,\ B \to aC,\ B \to b,\ C \to aS\}$. Donnez un automate fini équivalent.

   Voici un automate équivalent (le langage accepté est décrit par l'expression régulière $E = (abaa)^*abb$) :

5. Les grammaires suivantes ne sont pas régulières, mais acceptent des langages réguliers. Déterminez quel langage est accepté par ces grammaires, puis donnez une expression régulière équivalente :

   - $G_1 = \langle \{S, X, Y, Z, W\}, \{s, m, o, g\}, S, P\rangle$ avec :
     $P = \{S \to XY$
     $X \to smZ$
     $Z \to ogW$
     $W \to \varepsilon$
     $Y \to o \mid ogY\ \}$

     Une expression régulière équivalente au langage généré par G_1 est : $E = smog(og)^*o$.

   - $G_2 = \langle \{S, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, S, P\rangle$ avec :
     $P = \{S \to XYZ$
     $X \to aX \mid bX \mid c \mid \varepsilon$
     $Y \to bY \mid cY \mid c$
     $Z \to aZ \mid a \mid \varepsilon\ \}$

     Une expression régulière équivalente au langage généré par G_2 est : $E = (a \cup b)^*(c \cup \varepsilon)(b \cup c)^*c(a)^*$

6. Les grammaires régulières sont soit régulières à gauche, soit régulières à droite. Mais on ne peut pas mélanger les deux dans une grammaire régulière, sinon ce n'est plus une grammaire régulière car cela peut générer des langages qui ne sont pas réguliers.

Voici un exemple d'une telle grammaire, qui mélange les deux types de règles : $G_{pas-reg???} = \langle \{S, X\}, \{a, b\}, S, P\rangle$ avec : $P = \{S \to aX,\ X \to Sb,\ S \to \varepsilon\}$
Quel le langage accepté par cette grammaire ? Est-il régulier ?

Le langage accepté par cette grammaire est $L_{pas-regulier} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, qui n'est clairement pas régulier !