10. Réalisation d’un circuit combinatoire

Principes de fonctionnement des ordinateurs

Jonas Lätt
Départemetn d’Informatique

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
CENTRE UNIVERSITAIRE D’INFORMATIQUE

Trouvé une erreur sur un transparent? Envoyez-moi un message
- *sur Twitter @teachjl ou*
- *par e-mail jonas.latt@unige.ch*

Contenu du cours

Partie I: Introduction

Partie II: Codage de l'information

Partie III: Circuits logiques

Partie IV: Architecture des ordinateurs

Rappel

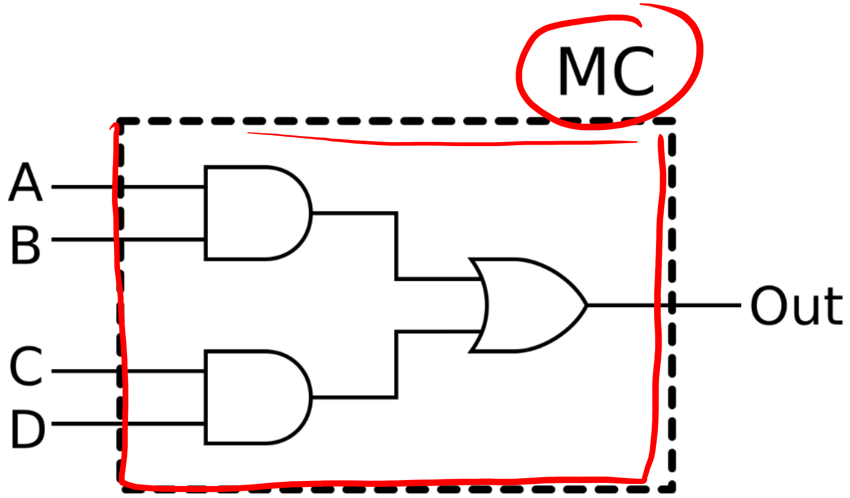
- Un **circuit logique combinatoire** implémente une fonction logique.

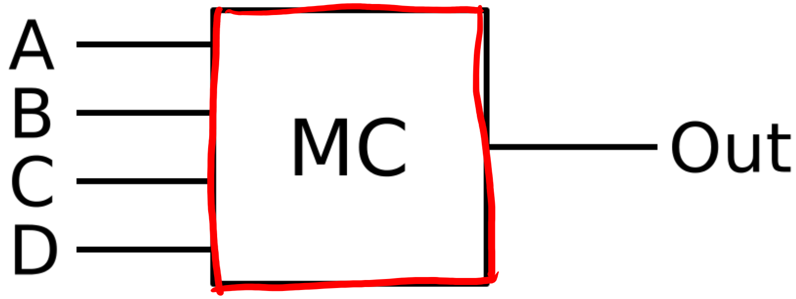
- **M bits de sortie** S_j, j=1..M dépendent uniquement de **N bits d'entrée** E_i, i=1…N.

$$S_j=f_j(E_1, E_2,\ldots E_N) \text{ pour tout } j=1...M$$

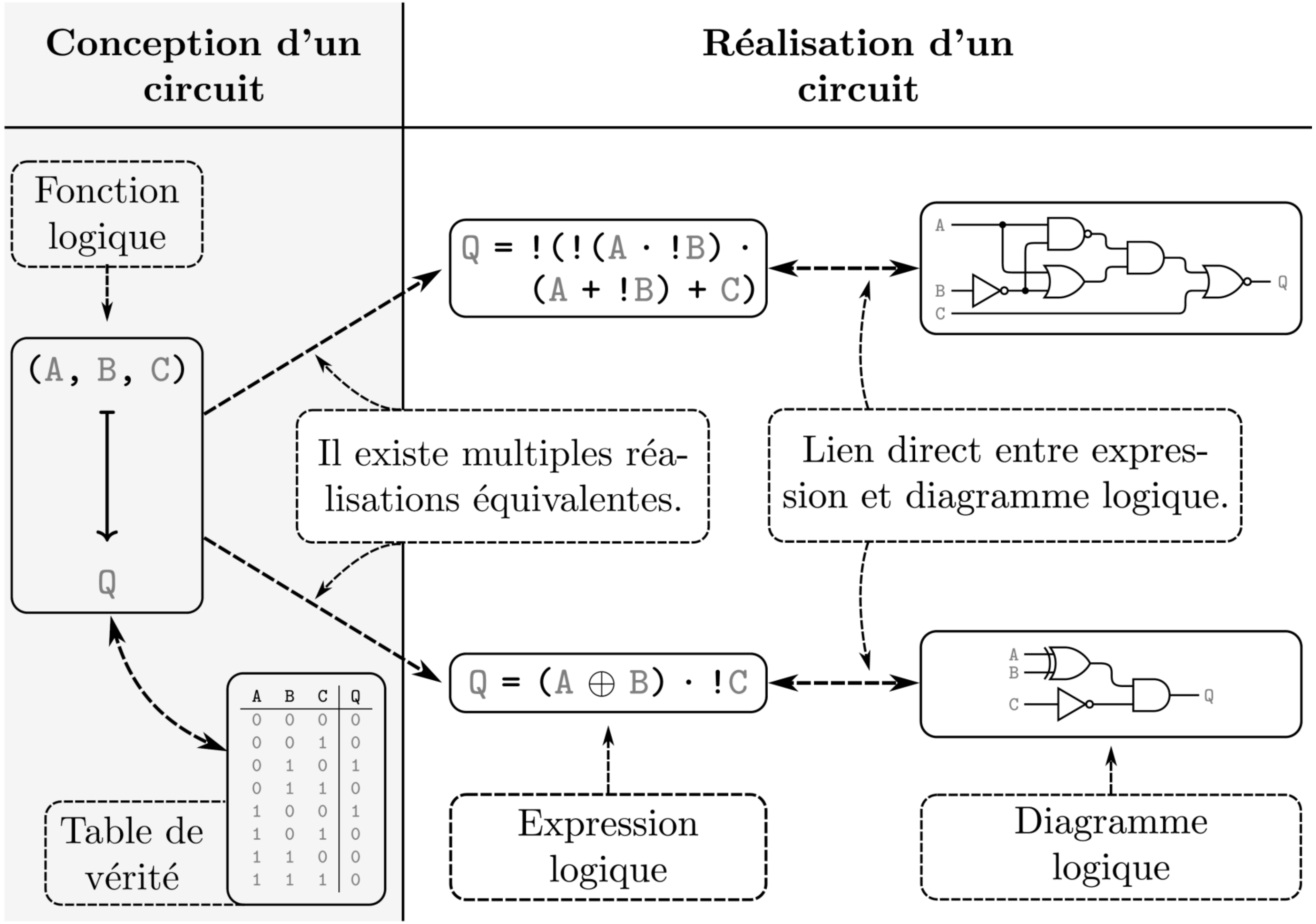
Définition d'un nouveau circuit

Dans ce chapitre, nous allons créer des nouveaux circuits. Lorsqu'on crée un circuit, on peut lui donner un nom, puis le réutiliser en mentionnant son nom. Il s'agit d'un exemple de l'application de couches d'abstraction en informatique.



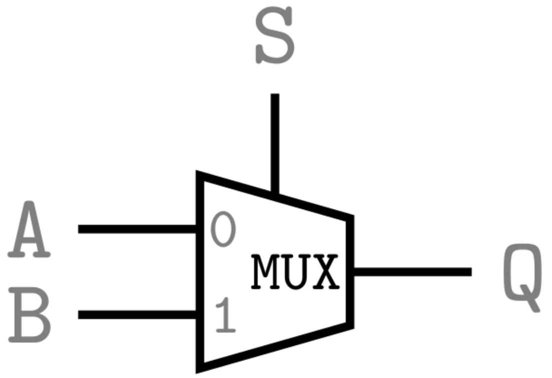


Conception vs Réalisation d’un circuit

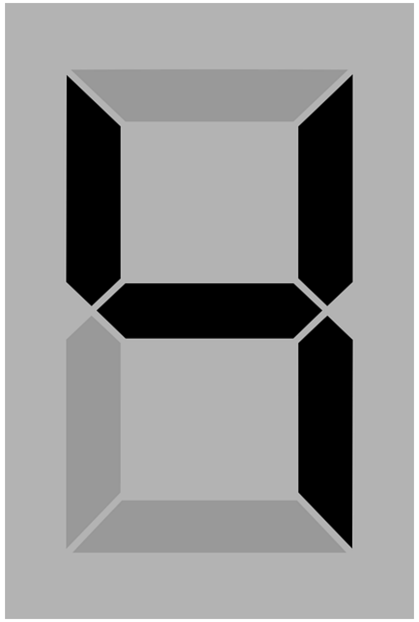


Maintenant: deux circuits concrets

Multiplexeur

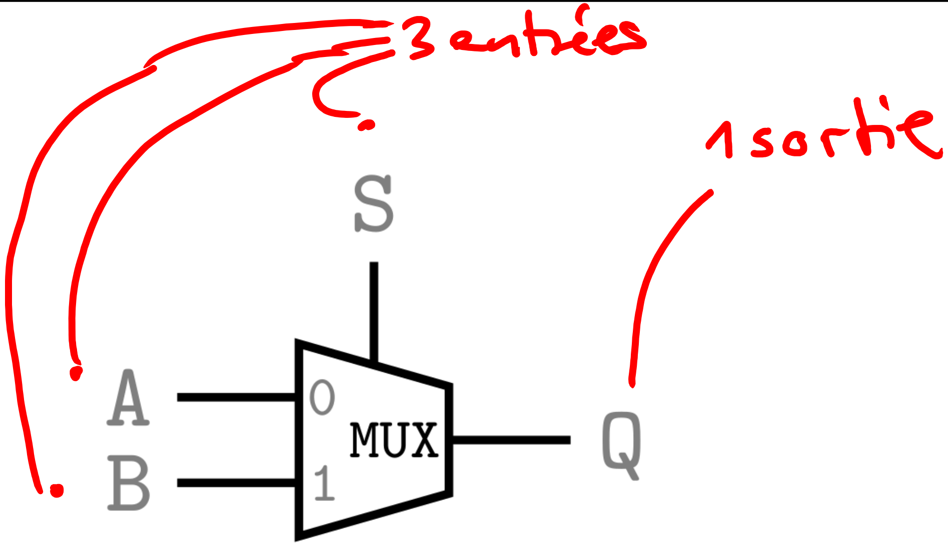


Circuit Affichage 7-Segments



1. Ecriture de la table de vérité du circuit.
2. Réalisation du circuit: construction d’une expression booléenne.

Le multiplexeur à deux voies

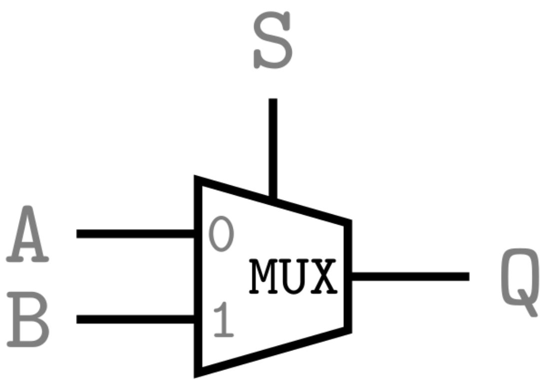


- Q est égal à **A** si S vaut 0.
- Q est égal à **B** si S vaut 1.

Réalisation électronique d'une sélection («*if-else*»):

```
si S vaut 0
    Q = A
autrement
    Q = B
```

Le multiplexeur à deux voies




```
si S vaut 0
      Q = A
autrement
      Q = B
```

S	A	B	Q=MUX (S,A,B)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Comment réaliser un circuit?

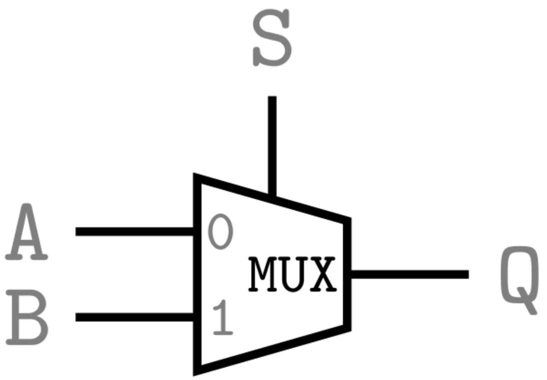
Méthode de l'intuition logique ⟷ Méthode systématique

Rappel: méthode de l'intuition logique

D est vrai si (M est vrai et A est vrai) ou (M est vrai et C est vrai) ou P est vrai

$$D = (M \cdot A) + (M \cdot C) + P$$

Trouver une expression booléenne: Méthode de l’intuition logique

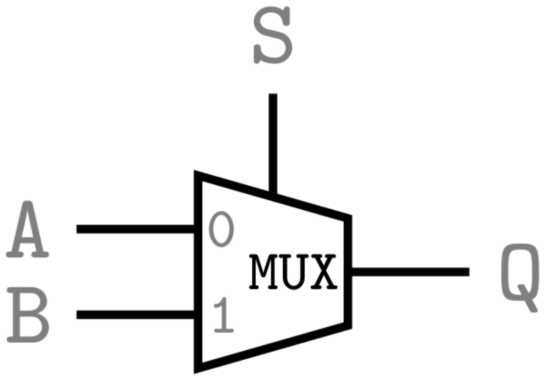



```
si S vaut 0
    Q = A
autrement
    Q = B
```

Méthode:

On énonce une phrase à haute voix qui commence par Q vaut 1 si et seulement si …

Trouver une expression booléenne: Méthode de l'intuition logique



- Q est égal à A si S vaut 0.
- Q est égal à B si S vaut 1.

Q vaut 1 si et seulement si

- L'entrée sélectionnée par S vaut 1

Q vaut 1 si et seulement si

- S vaut 0 ET A vaut 1 OU
- S vaut 1 ET B vaut ~~0~~ 1

Q vaut 1 $\rightarrow$ Q
S vaut 1 $\rightarrow$ S
ET $\rightarrow$ $\cdot$
OU $\rightarrow$ +
S vaut 0 $\rightarrow$!S

$$\boxed{Q = !S \cdot A + S \cdot B}$$

Méthode systématique: La méthode des minterms et des maxterms

Idée: la méthode de l’intuition logique est appliquée à la table de vérité

Exemple: un circuit pour la porte XOR

Méthode des minterms

Problème: Table de vérité -> Expression Booléenne dans le cas général.
Solution: Méthode de l'intuition logique appliquée à la table de vérité.

Exemple: XOR

A	B	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Q vaut 1 si et seulement si...

1) les entrées A et B correspondent à une ligne où Q vaut 1
2) les entrées A et B correspondent à la ligne 2 ou la ligne 3
3) (A vaut 0 et B vaut 1) ou (A vaut 1 et B vaut 0)

$Q = !A \cdot B + A \cdot !B$

Ce procédé s'appelle la Méthode des Minterms

Méthode des minterms

1. Rechercher les lignes dans lesquelles Q vaut 1.
2. Ecrire un minterm pour chacune de ces lignes. Un minterm contient toutes les variables d'entrée, inversées par un NOT si la variable d'entrée vaut 0 dans la ligne en question, combinées à l'aide de AND.
3. Exprimer Q comme somme logique (OR) de ces Minterms.

②
minterm1 = !A · B
minterm2 = A · !B

①

A	B	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Q est **vrai** si et seulement si

A est **faux ET** B est **vrai**
OU
A est **vrai ET** B est **faux**

③
Q = minterm1 + minterm2
= !A · B + A · !B

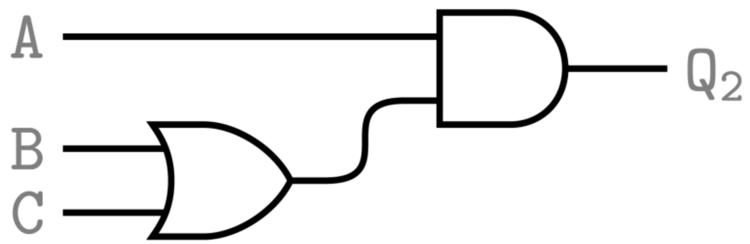
Méthode des minterms: commentaires

- Une fonction logique peut être réalisée par une infinité d’expressions, mais l’expression obtenue par minterms est unique (à part des permutations).
- Cette expression peut être vue comme une manière alternative d’écrire la table de vérité.
- Noms utilisés pour cette expression:
  - **Forme canonique** de l’expression logique
  - Forme **somme-de-produits** de l’expression logique

Exemple: Ecrivons la forme canonique de Q2

$$Q_2 = A \cdot (B + C)$$

A	B	C	Q_2
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



votamatic.unige.ch

code d'accès

HNWW

Alternative: Méthode des maxterms

Idée: on se concentre sur les cas Q = 0

A	B	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Q vaut 0 si et seulement si…

Méthode des maxterms

1. Rechercher les lignes dans lesquelles **Q** vaut **0**.
2. Ecrire un maxterm pour chacune de ces lignes. Un maxterm contient toutes les variables d'entrée, inversées par un `NOT` si la variable d'entrée vaut **1** dans la ligne en question, combinées à l'aide de `OR`.
3. Exprimer **Q** comme produit logique (`AND`) de ces Minterms.

A	B	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Q vaut **1** si et seulement si

A vaut **1** **OU** B vaut **1**
ET
A vaut **0** **OU** B vaut **0**

Minterms: Somme-de-produits

Maxterms: Produit-de-sommes

Minterms vs. Maxterms

Minterms

A	B	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

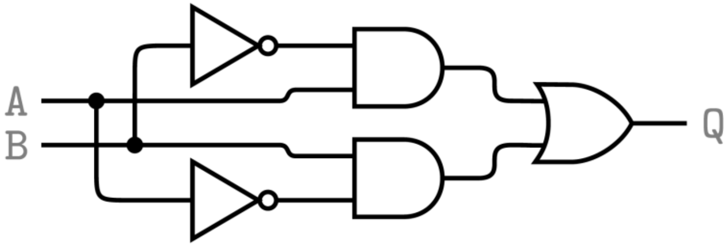
Q = !A · B + A ·!B

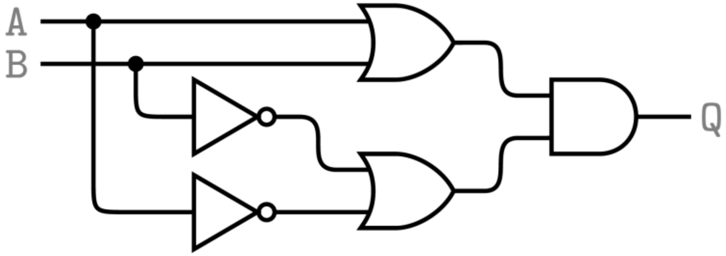
Maxterms

A	B	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Q = (A+B)·(!A+!B)

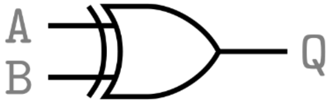
Expressions équivalentes





En général, laquelle des deux choisir? Cela dépend du nombre de 1 dans la colonne Q.

Interprétations de la porte XOR:
Retour à l'intuition logique



A	B	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Interprétation:

$Q = !A \cdot B + A \cdot !B$

$Q = (A+B)\cdot(!A+!B)$

Equivalent dual:

Parenthèse: équivalence de Q3 et Q5

$$Q_3 = !(!(A \cdot !B) \cdot (A + !B) + C)$$

$$Q_5 = (A \oplus B) \cdot !C$$

Remarque intéressante:
Universalité des portes logiques

Opérateurs logiques / Portes logiques

Quelques observations

- Il existe 2 portes logiques à une entrée, et 16 portes logiques à deux entrées.
- Ces portes logiques sont liées entre elles: certaines portes s'expriment par d'autres portes. Exemple: La porte NAND peut être remplacée par NOT et AND: NAND(A, B) = !(A · B).
- Lorsqu'on écrit une expression logique, ou lorsqu'on développe un circuit, on fait le choix de se limiter à un groupe d'opérateurs logiques, ou de portes logiques, qui est utile. Exemple: en algèbre de Boole, on se limite à la somme (OR), le produit (AND), et la négation (NOT).

Ensemble suffisant de portes logiques

- Un circuit est une réalisation d'une fonction logique, et toute fonction logique peut être exprimée par sa table de vérité.
- De quelles opérateurs logiques ai-je besoin pour traduire n'importe quelle table de vérité en expression logique ?
- On verra dans le chapitre suivant: les trois opératurs OR, AND, et NOT sont suffisants, car ils permettent d'écrire toute fonction logique sous **forme canonique**.

Universalité de portes logiques

Question fondamentale: de combien de types de portes logique différents a-t-on vraiment besoin pour construire n’importe quel circuit?

Première réponse: Les trois portes suivantes sont suffisantes (il suffit d’écrire la forme canonique):

AND, OR, NOT

Deuxième réponse: Il existe aussi des choix plus concis. Il est par exemple possible de construire n’importe quell circuit à l’aide de NAND.

On peut construire n'importe quel circuit à l'aide du NAND

AND OR NOT

Le OR peut s'exprimer en fonction de AND et NOT.

AND NOT

Le NOT et le AND peuvent s'exprimer en fonction du NAND.

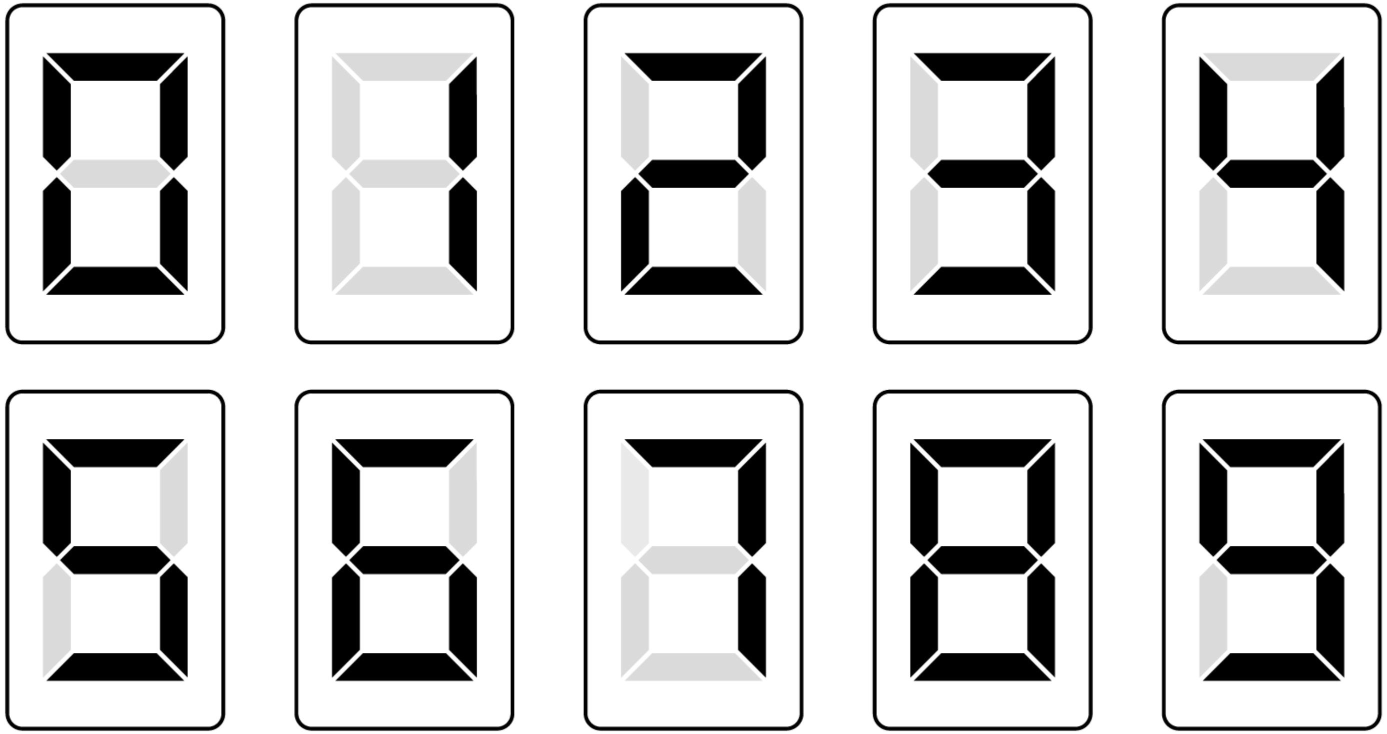
NAND

Argument équivalent: on peut construire n'importe quel circuit à l'aide du NOR.

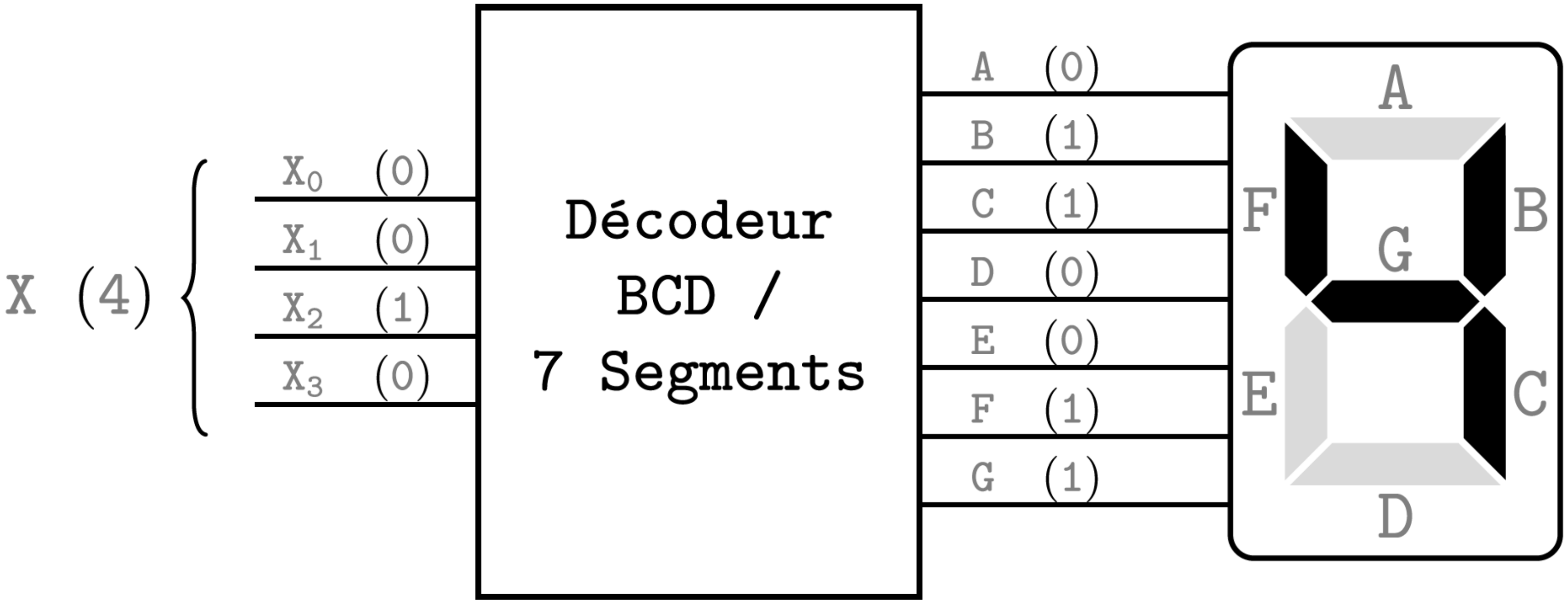
Retour à la méthode des minterms / maxterms

- Circuit de l'afficheur 7-segments: un exemple qui ne se pête pas à l'approche d'intuition logique

Circuit pour l’afficheur 7-segments



Exemple: circuit pour l'afficheur 7-segments



Ici, les entrées du circuit représentent les bits d'un mot à k bits: ce mot représente un nombre entier.
Ca sera le cas pour beaucoup de circuits dans les chapitres à venir.

Exemple: circuit pour l'afficheur 7-segments

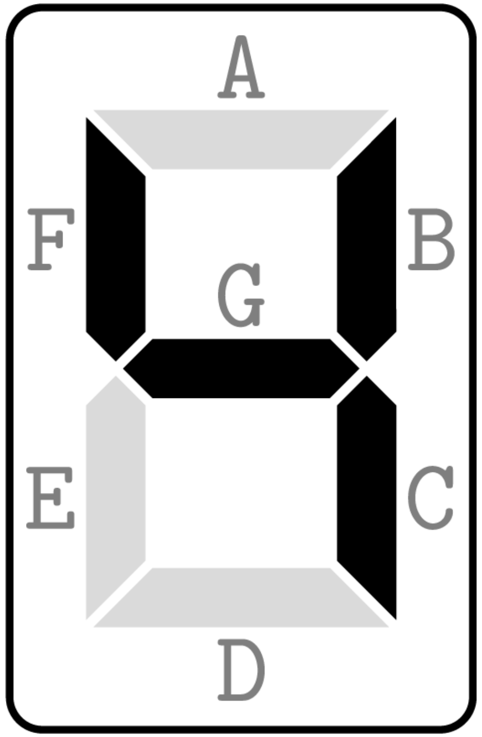
Entrée du circuit:

N = 4

X3	X2	X1	X0
0	1	0	0

Sortie du circuit:

A	B	C	D	E	F	G
0	1	1	0	0	1	1



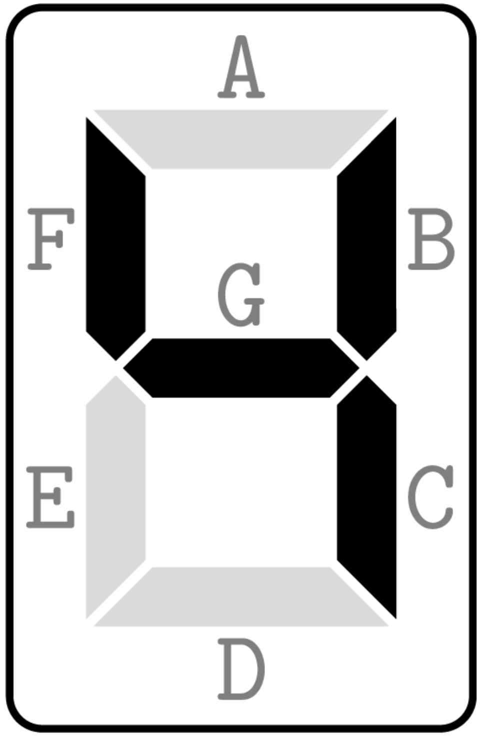
Exemple: Minterms appliqués au circuit 7-segments

- Segment “E” de l’affichage LCD.
- Application des Minterms.

Les Minterms sont:

E =

	X_3	X_2	X_1	X_0	E
0	0	0	0	0	
1	0	0	0	1	
2	0	0	1	0	
3	0	0	1	1	
4	0	1	0	0	
5	0	1	0	1	
6	0	1	1	0	
7	0	1	1	1	
8	1	0	0	0	
9	1	0	0	1	
	1	0	1	0	
	1	0	1	1	
	1	1	0	0	
	1	1	0	1	
	1	1	1	0	
	1	1	1	1	



Exemple: Minterms appliqués au circuit LCD

L’expression trouvée

$E = !X_3 \; !X_2 \; !X_1 \; !X_0 + !X_3 \; !X_2 \; X_1 \; !X_0 + !X_3 \; X_2 \; X_1 \; !X_0 + X_3 \; !X_2 \; !X_1 \; !X_0$

Nécessite 26 portes logiques. Simplifions!

1. Factorisation de $!X_0$:

2. Factorisation de $!X_3 \; !X_2$:

3. Complément de l’addition:

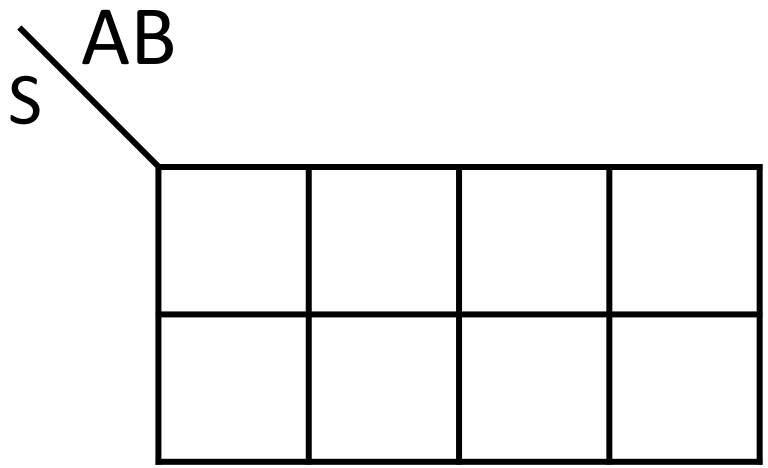
4. Factorisation de $!X_3$:

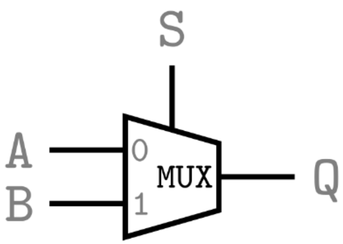
Comment simplifier un circuit de manière systématique?

- Grands circuits, cas général: il n’existe pas de méthode permettant de trouver un circuit optimal en un temps utile.
- Il existe des méthodes heuristiques permettant de trouver des circuits «raisonnablement bons».
- Pour des petits circuits, il existe des méthodes de simplification systématiques. Nous allons présenter les **tables de Karnaugh** (Maurice Karnaugh 1954 @ Laboratoires Bell).

Table de Karnaugh: Table de vérité en format compact

S	A	B	Q=MUX (S,A,B)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1





Tables de Karnaugh: Minterms

S \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	1	1	0

- On a deux groupes.
- Dans chaque groupe, une variable est éliminée (elle est redondante).
- La méthode des tables de Karnaugh permet d’identifier les variables redondantes.

Tables de Karnaugh: Idée

(i)

S \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	1	1	0

(ii)

S \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	1	1	0

Stratégie:

- On regroupe les 1 adjacents en carrés ou rectangles.
- Chaque rectangle donne lieu à un seul Minterm.
- Une variable qui apparait sous forme X et !X est redondante: on l’élimine.

Tables de Karnaugh: formes

2 entrées:

A \ B	0	1
0		
1		

3 entrées:

A \ BC	00	01	11	10
0				
1				

4 entrées:

X_3X_2 \ X_1X_0	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Important: les entrées ne sont pas en ordre binaire. On les ordonne de manière à ce qu'un seul bit change à la fois: le 01 est suivi du 11 et non pas du 10. Cela est aussi valable le long du bord: le 10 est suivi du 00, avec un seul changement de bit.

Tables de Karnaugh: règles

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	1	1	0

- Il ne peut y avoir que des 1 dans un groupe. Les 0 ne sont pas permis.
- Un groupe doit être rectangulaire.
- Le nombre de 1 dans le groupe doit être une puissance de 2 (1, 2, 4, 8, 16).

Tables de Karnaugh: règles

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0

- Les groupes peuvent se chevaucher.
- Les chevauchements sont souhaitables: groupes plus grands = davantage de redondance

Tables de Karnaugh: règles

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

Ce groupe est cyclique

- Les groupes peuvent se construire de manière cyclique (haut/bas ou gauche/droite).

Tables de Karnaugh pour Minterms: résumé

- Ce qu’on vient de faire, c’est la méthode des «**tables de Karnaugh pour les minterms**», car on encercle des groupes de «1».
- Faites des groupes aussi grands que possible!
- Faites aussi peu de groupes que possible!

Tables de Karnaugh pour Maxterms

«C'est la même chose, sauf que c'est partout l'inverse»:

- Faites des groupes de «0».
- Quand vous prenez une variable, inversez-la: X pour 0 et !X pour 1.
- A l'intérieur d'un groupe, enchaînez les variables par des «+» (et non pas par des «*», comme pour les Minterms).
- Enchaînez les groupes par des «*» (et non pas par des «+», comme pour les Minterms).

Segment E de l'affichage 7-segments: Minterms

X_3X_2 \ X_1X_0	*00*	*01*	*11*	*10*
00				
01				
11				
10				

X_3X_2 \ X_1X_0	*00*	*01*	*11*	*10*
00				
01				
11				
10				

	X_3	X_2	X_1	X_0	E
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
	1	0	1	0	*
	1	0	1	1	*
	1	1	0	0	*
	1	1	0	1	*
	1	1	1	0	*
	1	1	1	1	*

Segment E de l’affichage 7-segments: Maxterms

X_3X_2 \ X_1X_0	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	1
11	*	*	*	*
10	1	0	*	*