Langages Formels
Série 5 Correction - Lemme de l'étoile

20 Octobre 2025

Pensez à justifier vos réponses.

1. - $L_2 = \{a^i b^j c^k$ avec i=j ou i=k$\}$, avec le mot $w = a^N c^N$.

     On applique donc :
     $\forall N$,
     $\exists w = a^N c^N \in L_2$ (appartient bien à L_2 car i=k, et longueur suffisante car égale à 2N),
     $\forall x, y, z$:
     $x = a^p$
     $y = a^q$
     $z = a^{N-p-q} c^N$
     avec $p + q \leq N$ et $q \geq 1$.
     $\exists i = 2$ tel que $w' = xy^i z = a^p a^q a^q a^{N-p-q} c^N = a^{N+q} c^N \notin L_2$ (car ce mot w' ne respecte ni i=j (on a plus de a que de b), ni i=k (on a plus de a que de c)).
     Donc L_2 n'est pas régulier.
   - Cette fois ci, on utilise le mot $w = a^{\lceil \frac{N}{2} \rceil} c^{\lceil \frac{N}{2} \rceil}$:
     On applique donc :
     $\forall N$,
     $\exists w = a^{\lceil \frac{N}{2} \rceil} c^{\lceil \frac{N}{2} \rceil} \in L_2$ (appartient bien à L_2 car i=k, et longueur suffisante car égale à N (si N pair) ou N+1 (si N impair)),
     $\forall x, y, z$, avec $p+q \leq N$ et $q \geq 1$, on a alors trois formes de découpages possibles :

     Cas 1) $x = a^p$, $y = a^q$, $z = a^{\lceil \frac{N}{2} \rceil - p - q} c^{\lceil \frac{N}{2} \rceil}$
     Ici, $\exists i = 2$ tel que $w' = xy^i z = a^p a^q a^q a^{\lceil \frac{N}{2} \rceil - p - q} c^{\lceil \frac{N}{2} \rceil} = a^{\lceil \frac{N}{2} \rceil + q} c^{\lceil \frac{N}{2} \rceil} \notin L_2$ (car ce mot w' ne respecte ni i=j (on a plus de a que de b), ni i=k (on a plus de a que de c)).

     Cas 2) $x = a^p$, $y = a^q c^k$, $z = c^{\lceil \frac{N}{2} \rceil - k}$
     (Ici on a donc $p + q = \lceil \frac{N}{2} \rceil$)
     Ici aussi, $\exists i = 2$ tel que $w' = xy^i z = a^p a^q c^k a^q c^k c^{\lceil \frac{N}{2} \rceil - k} = a^{\lceil \frac{N}{2} \rceil} c^k a^k c^{\lceil \frac{N}{2} \rceil} \notin$

L_2 (car ce mot w' n'a plus la forme voulue, on a 4 blocs, avec une forme a-c-a-c).

Cas 3) $x = a^{\lceil \frac{N}{2} \rceil} c^p$, $y = c^q$, $z = c^{\lceil \frac{N}{2} \rceil - p - q}$
Similairement, $\exists i = 2$ tel que $w' = xy^iz = a^{\lceil \frac{N}{2} \rceil} c^p c^q c^q c^{\lceil \frac{N}{2} \rceil - p - q} = a^{\lceil \frac{N}{2} \rceil} c^{\lceil \frac{N}{2} \rceil + q} \notin L_2$ (car ce mot w' ne respecte ni i=j (on a plus de a que de b), ni i=k (on a plus de a que de c)).

On a donc montre que pour tous les découpages possibles d'après le lemme (qui ont donc l'une de ces trois formes), il existe un i tel que w' sort du langage. Donc L_2 n'est pas régulier.

2. Montrez que les langages suivants ne sont pas réguliers :

- $L_3 = \{w \mid w = a^i b^j,\ i < j\}$
Ce langage n'est pas régulier. On le montre donc avec le lemme de l'étoile :
$\forall N$
$\exists a^N b^{N+1} \in L_3$
$\forall x, y, z$:
$x = a^j$
$y = a^k$
$z = a^{N-j-k} b^{N+1}$
avec $j + k \leq N$ et $k \geq 1$,
$\exists i = 2$ tel que $w' = a^{N+k} b^{N+1} \notin L_3$ (car $N + k \geq N + 1$).
Donc L_3 n'est pas régulier.
- $L_4 = \{w \mid w = a^i b^j,\ i > j\}$ Ce langage n'est pas régulier. On le montre donc avec le lemme de l'étoile :
$\forall N$
$\exists a^{N+1} b^N \in L_{10}$
$\forall x, y, z$:
$x = a^j$
$y = a^k$
$z = a^{N+1-j-k} b^N$
avec $j + k \leq N$ et $k \geq 1$,
$\exists i = 0$ tel que $w' = a^{N+1-k} b^N \notin L_4$.
Donc L_4 n'est pas régulier.
- $L_5 = \{w \mid w \in \Sigma^*,\ |w|_a \neq |w|_b\}$ Ce langage n'est pas régulier. On peut le montrer de deux manières : Soit avec le lemme de l'étoile directement, ce qui est ici compliqué :
$\forall N$
$\exists a^N b^{N+N!} \in L_5$ (Ici, $N! = \prod_{i=1}^{N} i = 1 * 2 * ... * (N-1) * N$ désigne la factorielle de N)
$\forall x, y, z$:
$x = a^j$
$y = a^k$
$z = a^{N-j-k} b^{N+N!}$
avec $j + k \leq N$ et $k \geq 1$,
$\exists i = \frac{N!}{k} + 1$. Ici, le i est différent selon le découpage. On obtient $w' =$

$xy^{\frac{N!}{k}+1}z = xyy^{\frac{N!}{k}}z = a^j a^k a^{\frac{N!}{k}*k} a^{N-j-k} b^{N+N!} = a^{N+N!} b^{N+N!} \notin L_5$ (car on a ici le même nombre de a que de b, et on les voulait différents).
Donc L_5 n'est pas régulier.

Soit, deuxième méthode : on sait que le complémentaire d'un langage régulier est régulier, et donc que le complémentaire d'un langage non régulier n'est pas non plus régulier.
Or, le langage complémentaire de L_5 est $\overline{L_5} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$, et peut très facilement être montré non régulier (comme montré dans l'intro de cette série).
Donc L_5 n'est pas régulier.

- $L_6 = \{w \mid w \text{ est un palindrome}\}$ (i.e. un mot qui se lit pareil de gauche a droite et de droite à gauche, comme par exemple "abcba")
Ce langage n'est pas régulier. On le montre donc avec le lemme de l'étoile :
$\forall N$
$\exists a^N b a^N \in L_6$
$\forall x, y, z$:
$x = a^j$
$y = a^k$
$z = a^{N-j-k} b a^N$
avec $j + k \leq N$ et $k \geq 1$,
$\exists i = 2$ tel que $w' = a^{N+k} b a^N \notin L_6$ (car ce n'est plus un palindrome).
Donc L_6 n'est pas régulier.

- $L_7 = \{w \mid w \text{ n'est pas un palindrome}\}$ Ce langage est le complément du langage précédent : $L_7 = \overline{L_6}$. Or L_6 n'est pas régulier, et donc son complément $L_7 = \overline{L_6}$ n'est pas régulier non plus (le complément d'un langage régulier).

- $L_8 = \{a^i,\ i \text{ est un nombre premier}\}$ Ce langage n'est pas régulier. On le montre donc avec le lemme de l'étoile :
$\forall N$
$\exists a^p \in L_8$ avec p le plus petit nombre premier tel que $p \geq N$.
$\forall x, y, z$:
$x = a^j$
$y = a^k$
$z = a^{p-j-k}$
avec $j + k \leq N$ et $k \geq 1$,
$\exists i = p + 1$ tel que $w' = a^j a^{(p+1)k} a^{p-j-k} = a^{j+pk+k+(p-j-k)} = a^{p+pk} = a^{p(k+1)} \notin L_9$ (car $p(k+1)$ est un nombre composite, et donc pas premier).
Donc L_8 n'est pas régulier.