Langages Formels
Série 1 Correction - Alphabets, Langages, rappels bases mathématiques

22 Septembre 2025

Pensez à justifier vos réponses.

1. (a) Soit l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Construisez le langage Σ^2.
   (b) Soit un langage $L = \{pika, chu\}$. Construisez le langage L^2.
   (c) Soit un langage $L = \{0, 11\}$. Construisez le langage L^3.
   (d) Soit un langage $L = \{\epsilon, a, ab\}$. Construisez le langage L^2.

   On rappelle que L^2 est défini comme $L \circ L$ (L concaténé à L), ce qui veut dire qu'un élément de L^2 est simplement un élément de L concaténé à un élément de L. Le même principe s'applique pour L^3, ainsi que n'importe quel L^k.

   (a) On construit donc les mots contenant deux caractères, et on obtient le langage suivant $\Sigma^2 = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$.
   (b) On concatène un élément de L à un élément de L. On obtient donc : $pika \cdot pika = pikapika$, $pika \cdot chu = pikachu$, $chu \cdot pika = chupika$ et $chu \cdot chu = chuchu$. On obtient donc :
   $L^2 = \{pikapika, pikachu, chupika, chuchu\}$.
   (c) On applique le même principe, mais cette fois avec trois éléments. On obtient donc le langage suivant :
   $L^3 = \{000, 0011, 0110, 1100, 01111, 11011, 11110, 111111\}$.
   (d) Même principe mais on a aussi le mot vide cette fois, et certains mots sont générés par plusieurs concaténations différentes (par ex $\epsilon \cdot a = a \cdot \epsilon = a$). On obtient donc les mots suivants : $\epsilon, a, ab, a, aa, aab, ab, aba, abab$.
   Et en enlevant les doublons, on obtient le langage $L^2 = \{\epsilon, a, ab, aa, aab, aba, abab\}$.

2. Montrez que :
   (a) $(L^*)^* = L^*$
   (b) $(\Sigma^+)^* = (\Sigma^*)^*$

(c) $(\Sigma^+)^* = (\Sigma^*)^+$

On applique ici simplement deux choses :
D'une part, le fait que $X^* = X^+ \cup \{\epsilon\}$,
D'autre part, que $(X^+)^+ = X^+$ (puisque l'on crée tout élément possible à créer en concaténant des éléments de X, le fait d'appliquer une deuxième fois ce processus ne permet pas de créer de nouveaux éléments). La même chose est valable pour l'étoile : $(X^*)^* = X^*$.

(a) $(L^*)^* = ((L^+ \cup \epsilon)^+ \cup \epsilon) = L^+ \cup \epsilon \cup \epsilon = L^*$

(b) $(\Sigma^+)^* = (\Sigma^+)^+ \cup \epsilon = (\Sigma^+) \cup \epsilon = (\Sigma^*) = (\Sigma^*)^*$.

(c) $(\Sigma^+)^* = \Sigma^+ \cup \epsilon = \Sigma^* = (\Sigma^*)^+$

3. Pour chacun des langages suivants, donnez tous les mots de longueur inférieure ou égale à 4 qui appartiennent au langage.

   (a) $L_A = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$

   (b) $L_B = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

   (c) $L_C = \{(ab)^n \mid n \geq 0\}$

   (d) $L_D = \{ab^n \mid n \geq 0\}$

   (e) $L_E = \bigcup_{n \geq 0} \{a, b\}^n$

   Voici les mots de longueur inférieure ou égale à 4 appartenant à chacun des langages en question :

   (a) L_A : ϵ, a, b, aa, ab, bb, aaa, aab, abb, bbb, aaaa, aaab, aabb, abbb, bbbb.

   (b) L_B : ϵ, ab, aabb.

   (c) L_C : ϵ, ab, abab.

   (d) L_D : a, ab, abb, abbb.

   (e) L_E : ϵ, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, aaaa, aaab, aaba, aabb, abaa, abab, abba, abbb, baaa, baab, baba, babb, bbaa, bbab, bbba, bbbb.

4. Soit les langages $L_{Poke} = \{pikachu, joliflor, nigirigon\}$ et $L_{Jo} = \{joliflor, johncena, joehendry\}$. Donnez les langages suivants :

   (a) $L_{Poke} \cup L_{Jo}$ (union)

   (b) $L_{Poke} \cap L_{Jo}$ (intersection)

   (c) $L_{Poke} \circ L_{Jo}$ (concaténation)

   On a $L_{Poke} = \{pikachu, joliflor, nigirigon\}$ et $L_{Jo} = \{joliflor, johncena, joehendry\}$.
   On crée donc :

   - $L_{Poke} \cup L_{Jo} = \{pikachu, johncena, joliflor, nigirigon, joehendry\}$
   - $L_{Poke} \cap L_{Jo} = \{joliflor\}$

- $L_{Poke} \circ L_{Jo} = \{pikachujoliflor, pikachujohncena, pikachujoehendry,$ $joliflorjoliflor, joliflorjohncena, joliflorjoehendry,$ $nigirigonjoliflor, nigirigonjohncena, nigirigonjoehendry\}$.

5. Soit les langages $L_1 = \{a^n b^m | 1 \leq n \leq m\}$ et $L_2 = \{a^n b^m | n \geq m \geq 1\}$. Donnez les langages suivants :

   (a) $L_1 \cup L_2$ (union)

   (b) $L_1 \cap L_2$ (intersection)

   (c) $L_1 \circ L_2$ (concaténation)

   On a $L_1 = \{a^n b^m | 1 \leq n \leq m\}$ et $L_2 = \{a^n b^m | n \geq m \geq 1\}$. On crée donc :

   - $L_1 \cup L_2 = \{a^n b^m | n, m \geq 1\}$ (que l'on peut aussi écrire $\{aa^* bb^*\}$, ou encore $\{a^+ b^+\}$).
   - $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n | n \geq 1\}$.
   - $L_1 \circ L_2 = \{a^n b^m a^i b^j | 1 \leq n \leq m\,; i \geq j \geq 1\}$.

6. Donnez le résultat des calculs suivants :

   - $24 \mod 7 = 3$
   - $(4 + 8) \mod 5 = 12 \mod 5 = 2$
   - $(2 * 5) \mod 6 = 10 \mod 6 = 4$

7. Donnez la ou les valeur(s) possible(s) pour "a" et "b" (dans les entiers relatifs) dans les cas suivants :

   - $a \equiv 3 \mod 5$
     Ici, a est congru à 3 modulo 5. a peut donc prendre n'importe quelle valeur entière dont la division par 5 aura pour reste 3 : ... -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, ...
   - $a = 3 \mod 5$
     Ici, a est égal au résultat de $3 \mod 5$. Donc a = 3. a ne peut pas avoir d'autre valeur.
   - $a = 12 \mod 7$
     Ici aussi, a est égal au résultat de $12 \mod 5$. Donc a = 5 (résultat de $12 \mod 7$).
   - $a \equiv b \mod 4$, $b = i \mod 4$, $i \geq 1$
     Ici, b est égal à $i \mod 4$, ou i est entier. b peut donc uniquement valoir 0, 1, 2 ou 3, selon la valeur de i. En revanche, a est congru à b modulo 4. Donc a peut prendre n'importe quelle valeur ayant b comme reste dans la division par 4 (Par exemple, si b vaut 1, a peut valoir 1,5,9,... ou encore -3, -7, -11, ...).

8. Donnez tous les mots de longueur inférieure ou égale à 6 appartenant aux langages suivants :

(a) $L_3 = \{a^n b^m | n \geq 0, m \equiv 2 \mod 3\}$
(b) $L_4 = \{a^n b^m | n \geq 0, m = 2 \mod 3\}$
(c) $L_5 = \{a^n b^n | n \equiv 1 \mod 2\}$
(d) $L_6 = \{a^n b^m | n \equiv m \equiv 1 \mod 2\}$
(e) $L_7 = \{a^n b^m | n \equiv m \mod 3\}$

(a) L_3 : bb, abb, aabb, aaabb, aaaabb, bbbbb, abbbbb.
(b) L_4 : bb, abb, aabb, aaabb, aaaabb.
(c) L_5 : ab, aaabbb.
(d) L_6 : ab, abbb, abbbbb, aaab, aaabbb, aaaaab.
(e) L_7 : ϵ, aaa, bbb, aaaaaa, bbbbbb, aaabbb, ab, aaaab, abbbb, aabb.