Langages Formels
Série 4 Correction - Expressions régulières

13 Octobre 2025

Pensez à justifier vos réponses.

1. Pour chaque description de langage sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$, donnez une expression régulière qui accepte le même langage :

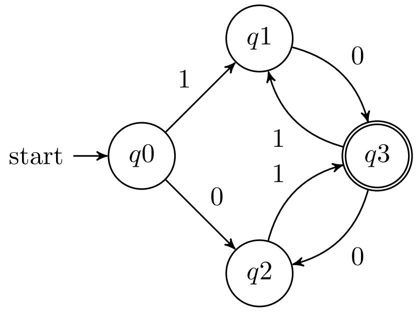
   - Les mots qui se terminent par aa.
     $\Sigma^* aa$
   - Les mots qui contiennent au moins trois b.
     $\Sigma^* b \Sigma^* b \Sigma^* b \Sigma^*$
   - Les mots qui contiennent au moins trois c consécutifs.
     $\Sigma^* ccc \Sigma^*$
   - Les mots qui ne contiennent pas le facteur aaa.
     $((\varepsilon \cup a \cup aa)(b \cup c))^*(\varepsilon \cup a \cup aa)$
   - Les mots de longueur impaire.
     $\Sigma(\Sigma\Sigma)^*$
   - Les mots dont le $3^{\text{ème}}$ symbole en partant de la fin est un a.
     $\Sigma^* a \Sigma\Sigma$
   - (Question dure) Les mots qui ne contiennent pas le facteur ab.
     $(b \cup c \cup a^+ c)^*(\varepsilon \cup a^+)$

2. Soit le langage $\mathrm{L} = \{ac^n w a^k c, \mid w \in \{bb, a\}^m,\ n \geq 1,\ m \geq 1,\ k \geq 0\}$ sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Donnez une expression régulière décrivant ce langage.

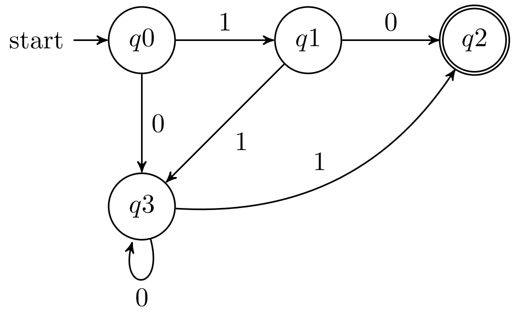
   Une expression équivalente est $E_L = ac^+(bb \cup a)^+ a^* c$.

3. Pour chacune des expressions régulières suivantes, construisez un automate acceptant le même langage :

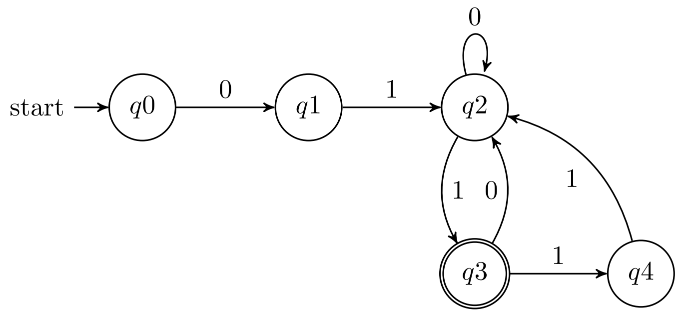
   - $(10 \cup 01)(10 \cup 01)^*$



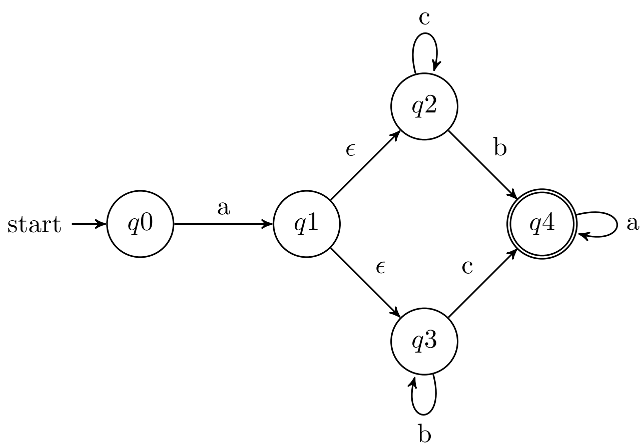
- $10 \cup (0 \cup 11)0^*1$



- $01(((10)^* \cup 111)^* \cup 0)^*1$

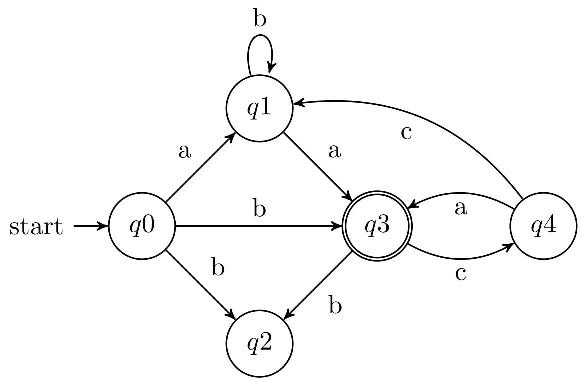


- $a(b^*c \cup c^*b)a^*$



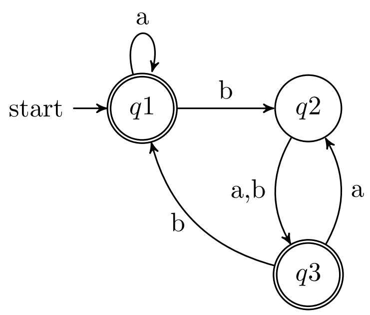
4. Pour chacun des automates suivants, donnez une expression régulière qui décrit le même langage :

   (a) A_1 :



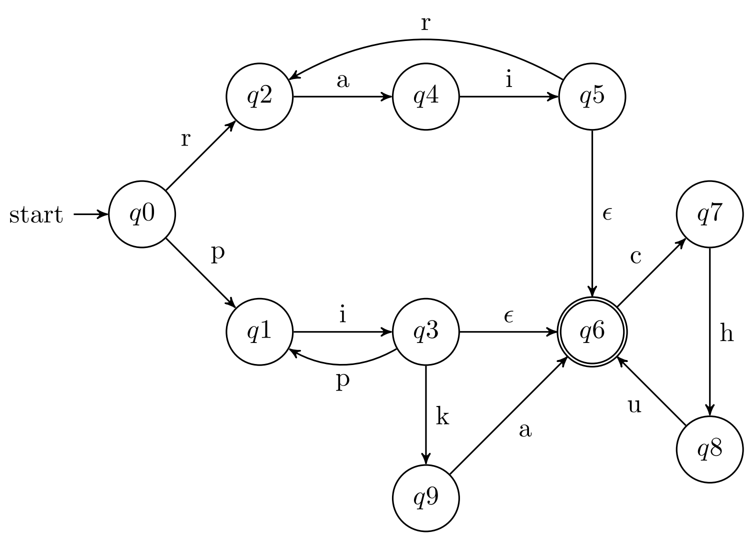
On note d'abord que puisque q_2 est un puits, on peut l'ignorer complètement, puisqu'on en sort jamais, et on y accepte jamais aucun mot.
Une expression régulière équivalente à l'automate est :
$E = (ab^*a \cup b)(c(a \cup cb^*a))^*$.
La première parenthèse peut être vue comme les différents moyens d'atteindre l'état final q_3 (soit directement, soit via q_1), et la seconde parenthèse, avec l'étoile, comme les différentes possibilités de boucler de q_3 à q_3 (le seul choix est vers q_4, et ensuite, soit on revient à q_3 directement, soit on passe par q_1).

   (b) A_2 :



Voici une expression régulière équivalente :
$E = (a \cup b(a \cup b)(a(a \cup b))^* b)^* \cup a^* b(a \cup b)(a(a \cup b) \cup ba^* b(a \cup b))^*$
Elle est construite comme suit : on a deux états finaux, on a donc l'union des mots acceptés en q_1 et des mots acceptés en q_3 (le $\cup$ central : on a à gauche les mots acceptés en q_1 et à droite eux en q_3).
Pour les mots acceptés en q_1 : on construit d'abord les différents moyens d'arriver à q_1 (facile, c'est le mot vide, vu qu'on commence directement en q_1), puis les différents moyens de faire une boucle de q_1 à q_1 (plus compliqué, c'est toute la partie gauche de l'expression). Cela nous donne une expression pour tous les mots terminant en q_1, c'est à dire tous les mots acceptés en q_1.
Puis sur le même principe on construit une expression pour les mots acceptés en q_3 : on commence par les différents moyens d'arriver à q_3 (c'est à dire $a^* b(a \cup b)$), puis on construit les moyens de boucler de q_3 à q_3 (la parenthèse qui suit).

(c) A_3 :



Voici une expression régulière équivalente :
$E = ((rai)^+ \cup (pi)^+ \cup (pi)^+ ka)(chu)^*$
Elle est construite comme suit : on a trois chemins différents pour

arriver à l'état final (q_6) (soit on passe par q_2 (puis q_4 et q_5), soit on passe par q_1 et q_3 sans passer par q_9, soit on passe par q_1 et q_3 et on passe également par q_9), puis depuis l'état final on a une boucle de trois états qu'on peut répéter.