Langages Formels
Série 1 - Alphabets, Langages, Rappels Bases Mathématiques

22 Septembre 2025

Pensez à justifier vos réponses.

1. (a) Soit l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Construisez le langage Σ^2.
   (b) Soit un langage $L = \{pika, chu\}$. Construisez le langage L^2.
   (c) Soit un langage $L = \{0, 11\}$. Construisez le langage L^3.
   (d) Soit un langage $L = \{\epsilon, a, ab\}$. Construisez le langage L^2.

2. Montrez que :
   (a) $(L^*)^* = L^*$
   (b) $(\Sigma^+)^* = (\Sigma^*)^*$
   (c) $(\Sigma^+)^* = (\Sigma^*)^+$

3. Pour chacun des langages suivants, donnez tous les mots de longueur inférieure ou égale à 4 qui appartiennent au langage.
   (a) $L_A = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$
   (b) $L_B = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
   (c) $L_C = \{(ab)^n \mid n \geq 0\}$
   (d) $L_D = \{ab^n \mid n \geq 0\}$
   (e) $L_E = \bigcup_{n \geq 0} \{a, b\}^n$

4. Soit les langages $L_{Poke} = \{pikachu, joliflor, nigirigon\}$ et $L_{Jo} = \{joliflor, johncena, joehendry\}$. Donnez les langages suivants :
   (a) $L_{Poke} \cup L_{Jo}$ (union)
   (b) $L_{Poke} \cap L_{Jo}$ (intersection)
   (c) $L_{Poke} \circ L_{Jo}$ (concaténation)

5. Soit les langages $L_1 = \{a^n b^m | 1 \leq n \leq m\}$ et $L_2 = \{a^n b^m | n \geq m \geq 1\}$. Donnez les langages suivants :

   (a) $L_1 \cup L_2$ (union)
   (b) $L_1 \cap L_2$ (intersection)
   (c) $L_1 \circ L_2$ (concaténation)

6. **Arithmétique modulaire** : On rappelle que l'opération du modulo désigne le reste dans la division entière. Par exemple, $14 \mod 5 = 4$, car $14 = 2 * 5 + 4$: lorsqu'on divise 14 par 5, on obtient un reste de 4.
   Lorsqu'on effectue des calculs modulo 5, on travaille donc avec 5 valeurs possibles : 0, 1, 2, 3 et 4. En général, quand on travaille modulo un nombre y, on a donc $x \mod y = k$ où k est le reste (compris entre 0 et y-1) de la division de x par y.

   Donnez le résultat des calculs suivants :

   (a) $24 \mod 7$
   (b) $(4 + 8) \mod 5$
   (c) $(2 * 5) \mod 6$

7. **Différence entre égalité et équivalence** : lorsqu'on écrit "$a = 1 \mod 4$", il s'agit d'une égalité : a est égal au résultat de l'opération posée à droite (c'est à dire $1 \mod 4 = 1$). a ne peut donc prendre comme valeur que le résultat de cette opération.
   Lorsqu'on écrit $a \equiv 1 \mod 4$, il s'agit d'une équivalence. Cela signifie que a et 1 font partie de la même classe d'équivalence, i.e. qu'ils ont le même résultat modulo 4 (on parle également de congruences, et on dit que a est congru à 1 modulo 4). ici, il existe plein de valeurs possibles pour a, qui sont toutes celles ayant un reste de 1 modulo 4 (par exemple 1, 5, 9, etc, mais aussi -3, -7, etc).

   Donnez la ou les valeur(s) possible(s) pour "a" et "b" (dans les entiers relatifs, i.e. positifs et négatifs) dans les cas suivants :

   (a) $a \equiv 3 \mod 5$
   (b) $a = 3 \mod 5$
   (c) $a = 12 \mod 7$
   (d) $a \equiv b \mod 4$, $b = i \mod 4$, $i \geq 1$

8. Donnez tous les mots de longueur inférieure ou égale à 6 appartenant aux langages suivants :

   (a) $L_3 = \{a^n b^m | n \geq 0, m \equiv 2 \mod 3\}$
   (b) $L_4 = \{a^n b^m | n \geq 0, m = 2 \mod 3\}$
   (c) $L_5 = \{a^n b^n | n \equiv 1 \mod 2\}$
   (d) $L_6 = \{a^n b^m | n \equiv m \equiv 1 \mod 2\}$
   (e) $L_7 = \{a^n b^m | n \equiv m \mod 3\}$