Langages Formels
Série 7 - Grammaires Régulières

10 Novembre 2025

Pensez à justifier vos réponses.

Rappel : Grammaires régulières

Une **grammaire régulière** est un cas particulier de grammaire hors-contexte, avec des règles de production au format très spécifique.

Une **grammaire est dite régulière à droite** si toutes ses règles $\alpha \to \beta$ respectent $\alpha \in V$ (c'est donc une grammaire Hors-Contexte) mais aussi toutes les règles doivent être de l'une des trois formes suivantes, avec a un symbole terminal et X un symbole non-terminal :

- $\alpha \to aX$ (β est exactement un seul symbole terminal puis un seul symbole non-terminal)
- $\alpha \to a$ (β est exactement un seul symbole terminal)
- $\alpha \to \varepsilon$ (β est le mot vide)

Ces trois formes de règles sont les seules formes autorisées dans une grammaire régulière à droite (on l'appelle "à droite" car dans la première forme $\alpha \to aX$, le non-terminal est à droite du terminal).

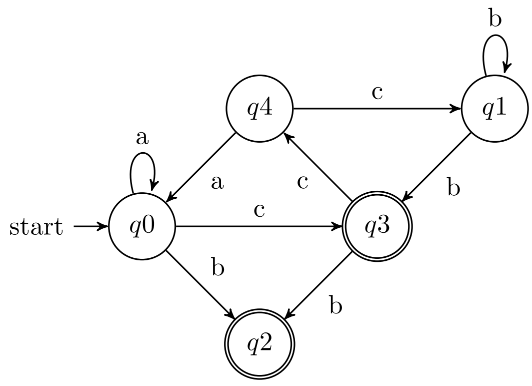
Similairement, on peut définir une **grammaire régulière à gauche** : les règles doivent avoir la forme $\alpha \to Xa$ (cette fois-ci, le non-terminal est à gauche du terminal, d'ou le nom de grammaire régulière à gauche), ou $\alpha \to a$ ou $\alpha \to \varepsilon$ (ces deux autres formes sont inchangées).

Une grammaire régulière doit être soit régulière à droite, soit régulière à gauche, mais ne peux pas combiner les deux types de règles $\alpha \to aX$ et $\alpha \to Xa$, sinon ce n'est plus une grammaire régulière !

Enfin, on rappelle que ces grammaires s'appellent grammaires "régulières" car elles génèrent exactement l'ensemble des langages réguliers (c'est donc encore un autre modèle équivalent aux expressions régulières ou aux AFD/AFN : ces modèles génèrent tous les mêmes langages) !

Exercices

1. Donnez une grammaire régulière équivalente à l'expression régulière suivante : $E = (01(11 \cup 00)(11 \cup 00)^*1)^*$.
2. Donnez une grammaire régulière qui génère le même langage que l'automate fini suivant (Exercice supplémentaire à la maison : donnez une expression régulière) :



3. Donnez une grammaire régulière générant le langage $L_7 = \{a^i b^j \mid i \geq 0\,,\ j \equiv i \mod 3\}$.
4. Soit la grammaire régulière $G = \langle \{S, A, B, C\}, \{a, b\}, S, P\rangle$ avec les règles $P = \{S \to aA,\ A \to bB,\ B \to aC,\ B \to b,\ C \to aS\}$. Donnez le langage généré par cette grammaire, puis donnez un automate fini équivalent.
5. Les grammaires suivantes ne sont pas régulières, mais acceptent des langages réguliers. Déterminez quel langage est accepté par ces grammaires, puis donnez une grammaire régulière qui les génère :
   - $G_1 = \langle \{S, X, Y, Z, W\}, \{s, m, o, g\}, S, P\rangle$ avec :
     $P = \{S \to XY$
     $X \to smZ$
     $Z \to ogW$
     $W \to \varepsilon$
     $Y \to o \mid ogY\ \}$
   - $G_2 = \langle \{S, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, S, P\rangle$ avec :
     $P = \{S \to XYZ$
     $X \to aX \mid bX \mid c \mid \varepsilon$
     $Y \to bY \mid cY \mid c$
     $Z \to aZ \mid a \mid \varepsilon\ \}$
6. Les grammaires régulières sont soit régulières à gauche, soit régulières à droite. Mais on ne peut pas mélanger les deux dans une grammaire régulière, sinon ce n'est plus une grammaire régulière car cela peut générer des langages qui ne sont pas réguliers.
   Voici un exemple d'une telle grammaire, qui mélange les deux types de règles : $G_{pas-reg???} = \langle \{S, X\}, \{a, b\}, S, P\rangle$ avec : $P = \{S \to aX,\ X \to Sb,\ S \to \varepsilon\}$
   Quel le langage accepté par cette grammaire ? Est-il régulier ?