9. Circuits logiques combinatoires et algèbre de Boole

Principes de fonctionnement des ordinateurs

Jonas Lätt

Centre Universitaire d'Informatique

UNIVERSITÉ DE GENÈVE

CENTRE UNIVERSITAIRE D'INFORMATIQUE

Trouvé une erreur sur un transparent? Envoyez-moi un message

- *sur Twitter @teachjl ou*
- *par e-mail jonas.latt@unige.ch*

Contenu du cours

Partie I: Introduction

Partie II: Codage de l'information

Partie III: Circuits logiques

Partie IV: Architecture des ordinateurs

1. Introduction
2. Histoire de l'informatique
3. Information digitale et codage de l'information
4. Codage des nombres entiers naturels
5. Codage des nombres entiers relatifs
6. Codage des nombres réels
7. Codage de contenu média
8. Portes logiques
9. **Circuits logiques combinatoires et algèbre de Boole**
10. Réalisation d'un circuit combinatoire
11. Circuits combinatoires importants
12. Principes de logique séquentielle
13. Réalisation de la bascule DFF
14. Architecture de von Neumann
15. Réalisation des composants
16. Code machine et langage assembleur
17. Réalisation d'un processeur
18. Performance et micro-architecture
19. Du processeur au système

Les Circuits

- Un **circuit logique combinatoire** implémente une fonction logique.
- M bits de sortie S_j, j=1..M dépendent uniquement de N bits d'entrée E_i, i=1…N.

$$S_j=f(E_1, E_2,\dots, E_N) \text{ pour tout } j=1...M$$

- **Comportement** du circuit entièrement défini par la table de vérité.
- **Réalisation** d'un circuit: combinaison de plusieurs portes logiques ou d'autres circuits. Décrit par une expression Booléenne ou un diagramme logique.

Porte vs Circuit

Porte Logique

- Exécute une opération élémentaire.
- Exemple: réalisation d’un opérateur de la logique de Boole

Circuit Logique Combinatoire

- Réalisation de n’importe quelle fonction logique, et donc, de n’importe quelle expression en algèbre de Boole.
- En pratique: se construit en composant plusieurs portes logiques.

La différence n’est pas stricte: certains auteurs désignent tous les circuits combinatoires de “portes”.

Exemples à trois entrées

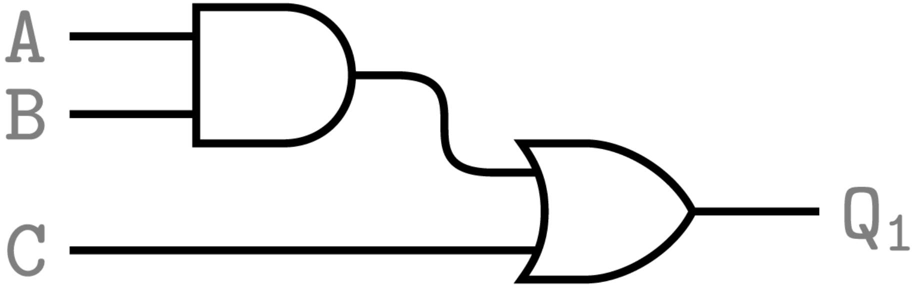
$$Q_1 = A \cdot B + C$$

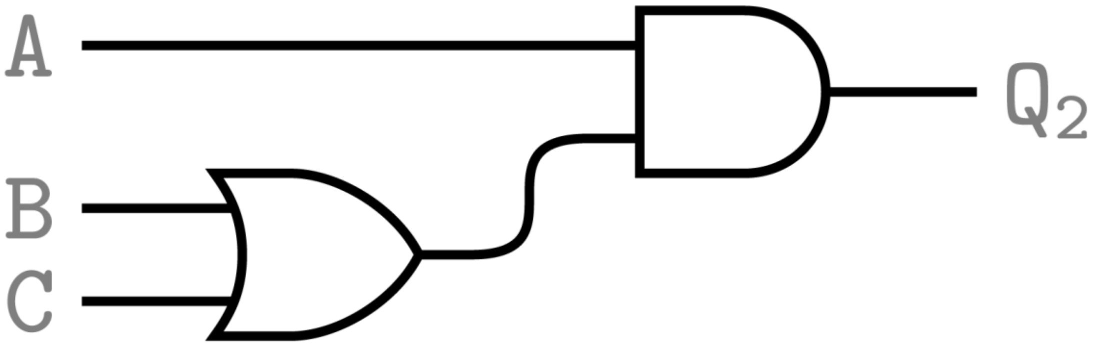
$$Q_2 = A \cdot (B + C)$$

Exemples à trois entrées

$$Q_1 = A \cdot B + C$$

$$Q_2 = A \cdot (B + C)$$





Interlude: priorité des opérateurs Booléens

Pour des expressions comprenant NOT, AND, OR

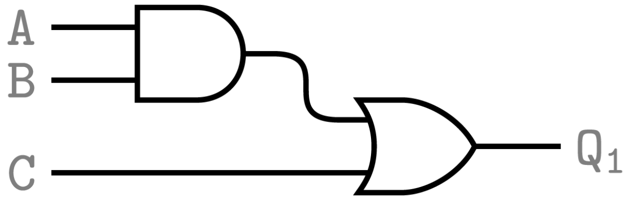
1. Priorité maximale: NOT
2. Priorité moyenne: AND
3. Priorité minimale: OR

Exemple:

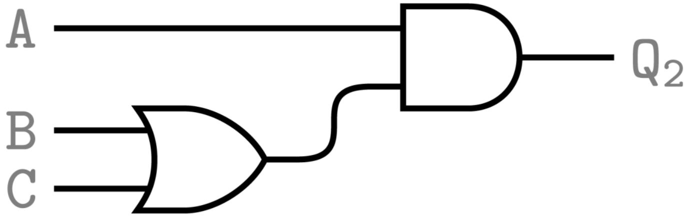
!A*B + C =

Circuits à deux portes

$$Q_1 = A \cdot B + C$$



$$Q_2 = A \cdot (B + C)$$

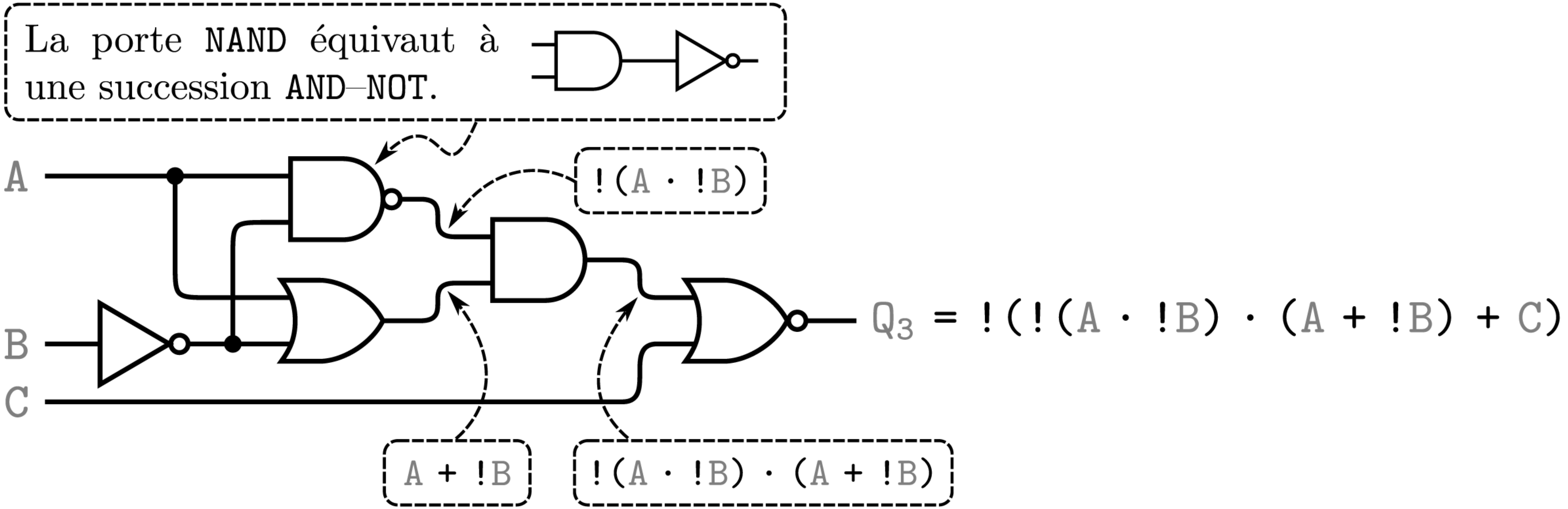


A	B	C	Q_1	Q_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Un exemple plus complexe

$$Q_3 = !(!(A \cdot !B) \cdot (A + !B) + C)$$

Un exemple plus complexe



Un exemple plus complexe

$$Q_3 = !(!(A \cdot !B) \cdot (A + !B) + C)$$

A	B	C	!B	(A · !B)	!(A · !B)	(A+!B)	!(A·!B)·(A+!B)	!(A·!B)·(A+!B)+C	Q_3
0	0	0	1	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0

A vous de jouer: diagramme logique et table de vérité

$$Q_5 = \underbrace{(A \oplus B) \cdot !C}$$

Q = A XOR B

A	B	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	C	A XOR B	!C	Q_5
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0

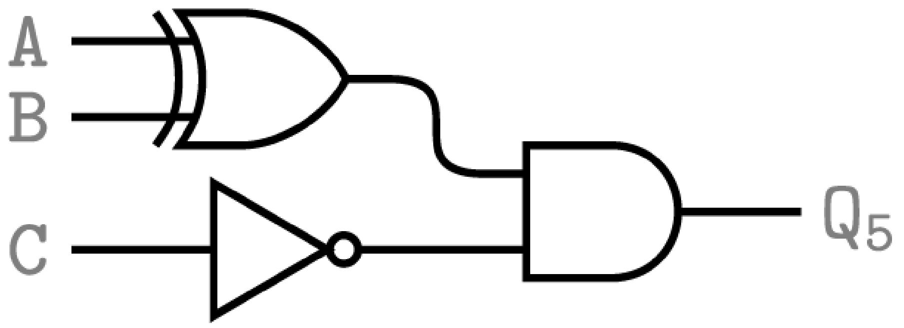
Equivalence de circuits

La table pour Q_5 est identique à la table pour Q_3. Il s'agit donc de **circuits équivalents**.

A	B	C	Q3/Q5
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$$Q_3 = !(!(A \cdot !B) \cdot (A + !B) + C)$$

$$Q_5 = (A \oplus B) \cdot !C$$



Equivalence de circuit

$Q_3 = Q_5$

$$!(!(A \cdot !B) \cdot (A + !B) + C) = (A \oplus B) \cdot !C$$

L'equivalence de circuits s'exprime, en algèbre de Boole, par une égalité arithmétique.

Les règles de l'algèbre de Boole nous permettent de manipuler des expressions, et donc de *simplifier des circuits*.

Algèbre de Boole

Opérations de base de l'algèbre de Boole:
AND ("la multiplication") et OR ("l'addition").

Règle	AND	OR
Commutativité	$A \cdot B = B \cdot A$	$A+B = B+A$
Associativité	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A+(B+C) = (A+B)+C$
Distributivité	$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A+(B \cdot C) = (A+B) \cdot (A+C)$
Valeur neutre	$1 \cdot A = A$	$0+A = A$
Nullité	$0 \cdot A = 0$	$1+A = 1$
Idempotence	$A \cdot A = A$	$A+A = A$
Complément	$A \cdot (!A) = 0$	$A + (!A) = 1$
Lois de De Morgan	$!(A \cdot B) = !A + !B$	$!(A+B) = (!A) \cdot (!B)$

Commutativité

$A \cdot B = B \cdot A$ $\qquad$ $A + B = B + A$

Règle	AND	OR
Commutativité	A·B = B·A	A+B = B+A
Associativité	A·(B·C) = (A·B)·C	A+(B+C) = (A+B)+C
Distributivité	A·(B+C) = A·B + A·C	A+(B·C) = (A+B)·(A+C)
Valeur neutre	1·A = A	0+A = A
Nullité	0·A = 0	1+A = 1
Idempotence	A·A = A	A+A = A
Complément	A · (!A) = 0	A + (!A) = 1
Lois de De Morgan	!(A·B) = !A + !B	!(A+B) = (!A)·(!B)

Associativité

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot B \cdot C$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$$

Règle	AND	OR
Commutativité	A·B = B·A	A+B = B+A
Associativité	A·(B·C) = (A·B)·C	A+(B+C) = (A+B)+C
Distributivité	A·(B+C) = A·B + A·C	A+(B·C) = (A+B)·(A+C)
Valeur neutre	1·A = A	0+A = A
Nullité	0·A = 0	1+A = 1
Idempotence	A·A = A	A+A = A
Complément	A · (!A) = 0	A + (!A) = 1
Lois de De Morgan	!(A·B) = !A + !B	!(A+B) = (!A)·(!B)

Distributivité ("Factorisation")

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ Distributivité de la multiplication

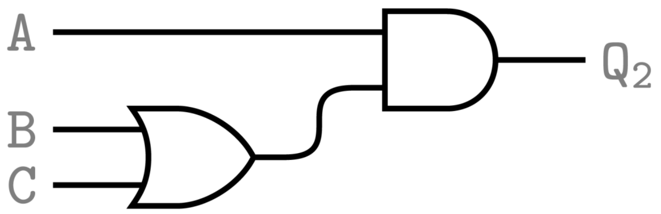
$A + (B \cdot C) = (A+B) \cdot (A+C)$ Distributivité de l'addition

Règle	AND	OR
Commutativité	A·B = B·A	A+B = B+A
Associativité	A·(B·C) = (A·B)·C	A+(B+C) = (A+B)+C
Distributivité	A·(B+C) = A·B + A·C	A+(B·C) = (A+B)·(A+C)
Valeur neutre	1·A = A	0+A = A
Nullité	0·A = 0	1+A = 1
Idempotence	A·A = A	A+A = A
Complément	A · (!A) = 0	A + (!A) = 1
Lois de De Morgan	!(A·B) = !A + !B	!(A+B) = (!A)·(!B)

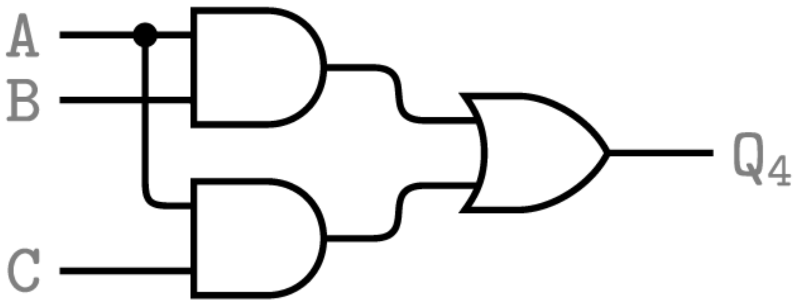
Distributivité: Démonstration

$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$

$$Q_2 = A\cdot(B+C)$$



$$Q_4 = A\cdot B + A\cdot C$$



A	B	C	Q_2	Q_4	$A\cdot B$	$A\cdot C$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Valeur neutre

$$1 \cdot A = A$$

$$0 + A = A$$

Règle	AND	OR
Commutativité	A·B = B·A	A+B = B+A
Associativité	A·(B·C) = (A·B)·C	A+(B+C) = (A+B)+C
Distributivité	A·(B+C) = A·B + A·C	A+(B·C) = (A+B)·(A+C)
Valeur neutre	1·A = A	0+A = A
Nullité	0·A = 0	1+A = 1
Idempotence	A·A = A	A+A = A
Complément	A · (!A) = 0	A + (!A) = 1
Lois de De Morgan	!(A·B) = !A + !B	!(A+B) = (!A)·(!B)

Jonas Lätt

Nullité

$0 \cdot A = 0$

$1 + A = 1$

Règle	AND	OR
Commutativité	A·B = B·A	A+B = B+A
Associativité	A·(B·C) = (A·B)·C	A+(B+C) = (A+B)+C
Distributivité	A·(B+C) = A·B + A·C	A+(B·C) = (A+B)·(A+C)
Valeur neutre	1·A = A	0+A = A
Nullité	0·A = 0	1+A = 1
Idempotence	A·A = A	A+A = A
Complément	A · (!A) = 0	A + (!A) = 1
Lois de De Morgan	!(A·B) = !A + !B	!(A+B) = (!A)·(!B)

Idempotence

$A \cdot A = A$
$A + A = A$

Règle	AND	OR
Commutativité	A·B = B·A	A+B = B+A
Associativité	A·(B·C) = (A·B)·C	A+(B+C) = (A+B)+C
Distributivité	A·(B+C) = A·B + A·C	A+(B·C) = (A+B)·(A+C)
Valeur neutre	1·A = A	0+A = A
Nullité	0·A = 0	1+A = 1
Idempotence	A·A = A	A+A = A
Complément	A · (!A) = 0	A + (!A) = 1
Lois de De Morgan	!(A·B) = !A + !B	!(A+B) = (!A)·(!B)

Complément

$A \cdot (!A) = 0$

$A + (!A) = 1$

Règle	AND	OR
Commutativité	A·B = B·A	A+B = B+A
Associativité	A·(B·C) = (A·B)·C	A+(B+C) = (A+B)+C
Distributivité	A·(B+C) = A·B + A·C	A+(B·C) = (A+B)·(A+C)
Valeur neutre	1·A = A	0+A = A
Nullité	0·A = 0	1+A = 1
Idempotence	A·A = A	A+A = A
Complément	A · (!A) = 0	A + (!A) = 1
Lois de De Morgan	!(A·B) = !A + !B	!(A+B) = (!A)·(!B)

Lois de De Morgan

"Distributivité du NOT"

Le cours reprend à 14:15

$!(A \cdot B) = !A + !B$

$!(A+B) = !A \cdot !B$

Règle	AND	OR
Commutativité	A·B = B·A	A+B = B+A
Associativité	A·(B·C) = (A·B)·C	A+(B+C) = (A+B)+C
Distributivité	A·(B+C) = A·B + A·C	A+(B·C) = (A+B)·(A+C)
Valeur neutre	1·A = A	0+A = A
Nullité	0·A = 0	1+A = 1
Idempotence	A·A = A	A+A = A
Complément	A · (!A) = 0	A + (!A) = 1
Lois de De Morgan	!(A·B) = !A + !B	!(A+B) = (!A)·(!B)

Algèbre de Boole

Règle	AND	OR
Commutativité	A·B = B·A	A+B = B+A
Associativité	A·(B·C) = (A·B)·C	A+(B+C) = (A+B)+C
Distributivité	A·(B+C) = A·B + A·C	A+(B·C) = (A+B)·(A+C)
Valeur neutre	1·A = A	0+A = A
Nullité	0·A = 0	1+A = 1
Idempotence	A·A = A	A+A = A
Complément	A · (!A) = 0	A + (!A) = 1
Lois de De Morgan	!(A·B) = !A + !B	!(A+B) = (!A)·(!B)

valeur neutre

commutativité

Exemple de simplification:

$$A \cdot B + A = A \cdot B + 1 \cdot A = A \cdot B + A \cdot 1$$

$$= A \cdot (B+1) = A \cdot (1)$$

Distributivité Nullité

$$= A$$

Principe de dualité

Les lois de De Morgan:

Lois de De Morgan	**!(A·B) = !A + !B**	**!(A+B) = (!A)·(!B)**

Mènent au principe de dualité:

Si une affirmation logique (ou autrement dit, une égalité en algèbre de Boole) est vraie, alors son équivalent dual est vrai aussi. L'équivalent dual d'une expression se trouve en remplaçant les AND par des OR, des OR par des AND, et en remplaçant chaque variable par son complément (X par !X et vice-versa).

Principe de dualité

1. Le principe de dualité peut s'appliquer groupe par groupe:

$$Q = \underbrace{(A + !B)}_{X} \cdot \underbrace{(!A + C)}_{Y} \cdot !\underbrace{(B + C)}_{Z}$$

$$Q = X \cdot Y \cdot !Z$$

Dualité $\quad !Q = !X + !Y + Z$

$$!Q = !(A+!B) + !(!A+C) + (B+C)$$

c'est une conséquence du principe de dualité. Le résultat s'obtient en appliquant deux fois la règle $!(A \cdot B) = !A + !B$

Principe de dualité

2. Le principe de dualité peut s'appliquer élément par élément:

$$Q = (A + !B) \cdot (!A + C) \cdot !(B + C)$$

$$!Q = (!A \cdot B) + (A \cdot !C) + !(!B \cdot !C)$$

Attention: avant d'appliquer le principe de dualité élément-par-élément, mettez des parenthèses autour des produits, car les règles de précédence ne s'ajustent pas automatiquement.

Principe de dualité

Attention: avant d’appliquer le principe de dualité élément-par-élément, mettez des parenthèses autour des produits, car les règles de précédence ne s’ajustent pas automatiquement.