Langages Formels
Série 2 Correction - Automates Finis Déterministes

29 Septembre 2025

Pensez à justifier vos réponses.

1. Voici un automate fini :

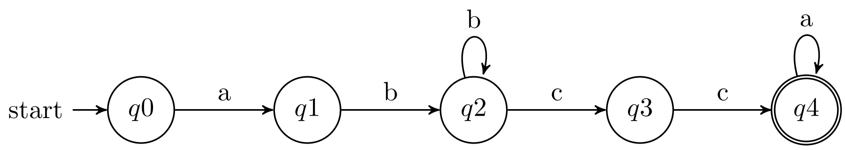


Figure 1: Automate fini A

   (a) Donnez le langage L accepté par cet automate.
   $L_A = \{abb^n cca^k \mid n \geq 0, k \geq 0\}$.
   On peut aussi l'écrire abb*cca* (c'est une expression régulière).

   (b) Complétez cet automate en ajoutant l'état puits. On rappelle qu'un automate complet est un automate où l'on peut lire n'importe quel caractère depuis n'importe quel état (i.e., pour chaque état dans l'automate, il existe un flèche avec chaque caractère partant de cet état). Attention, cela ne doit pas changer le langage accepté par l'automate !
   Voici l'automate complété :

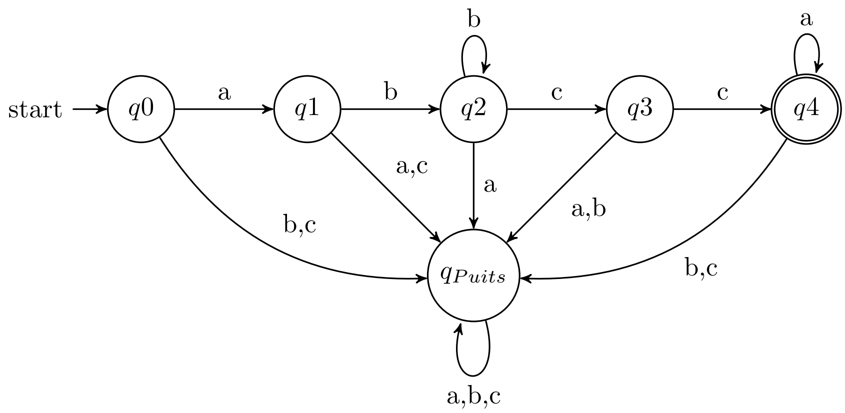


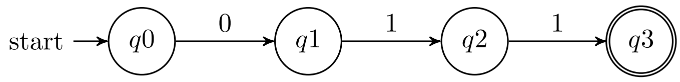
Figure 2: Automate complété

(c) Si l'on inverse les états finaux et non-finaux (on rend tous les états finaux de l'automate non-finaux et vice-versa) de l'automate complet, quel est le langage accepté par cet automate inversé, par rapport au langage L ?
Comme l'automate est complet, alors en inversant les états, on va refuser les mots de L, et accepter tous les mots qui ne sont pas dans L. On crée donc un automate qui accepte exactement le complémentaire de L, noté $\overline{L}$.

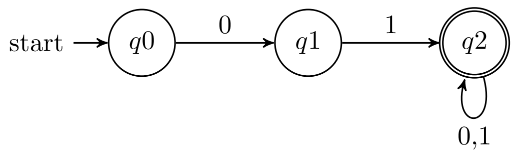
(d) Et si on avait inversé les états de l'automate non-complet initialement donné, cela aurait-il créé le même langage ?
Si l'automate n'est pas complet, cela ne marche pas, car on acceptera pas tous les mots de $\overline{L}$ (tous les mots que l'on ne peut pas suivre dans l'automate restent refusés, par exemple "bca" ou "abba").

2. Montrez que les langages suivants (sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$) sont réguliers en construisant des automates finis déterministes qui les acceptent :

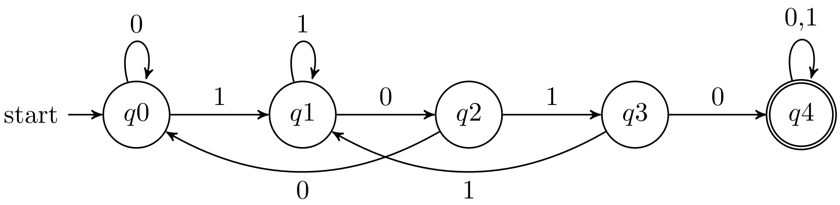
- $L_1 = \{011\}$



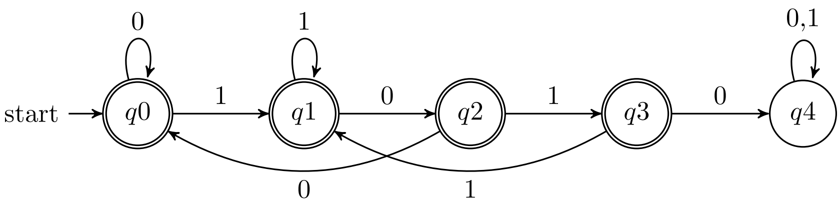
- $L_2 = \{\omega \mid \omega$ commence par 01 $\}$



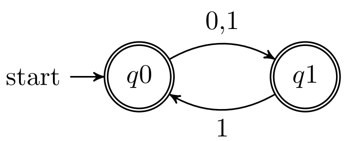
- $L_3 = \{\omega \mid \omega$ contient la sous chaine 1010 $\}$



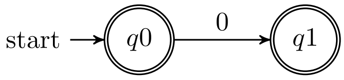
- $L_4 = \overline{L_3} = \{\omega \mid \omega$ ne contient pas la sous chaine 1010 $\}$.
  Le langage qu'on veut créer est exactement le complémentaire du précédent : $L_4 = \overline{L_3}$. Et l'automate précédent est déterministe et déjà complet ! Il suffit donc d'inverser les états pour obtenir un automate pour L_4 :



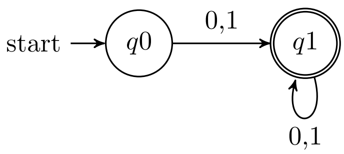
- $L_5 = \{\omega \mid \omega$ contient un 1 à chaque position paire $\}$



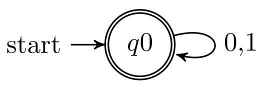
- $L_6 = \{\epsilon, 0\}$



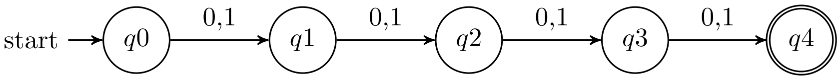
- $L_7 = \Sigma^+$



- $L_8 = \Sigma^*$



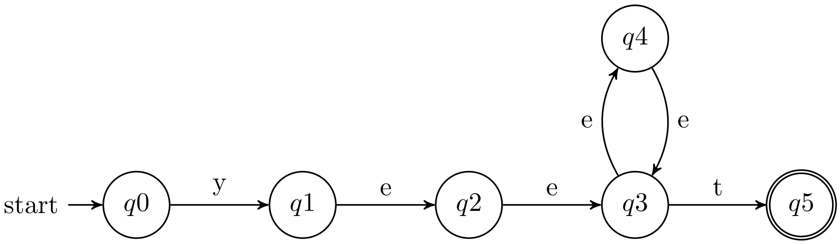
- $L_9 = \{\omega \mid |\omega| = 4\}$



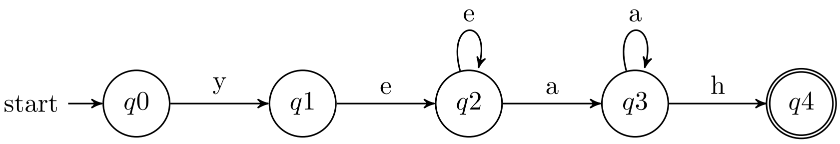
3. Montrez que les langages suivants sont réguliers en construisant des automates finis déterministes qui les acceptent :

   Notation : on note $|w|_a$ le nombre de "a" dans le mot w.

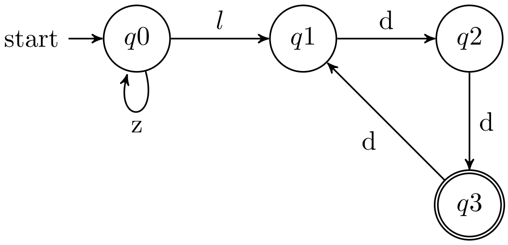
   - $L_A = \{y(ee)^n t \mid n \geq 1\}$ (sur l'alphabet $\Sigma = \{y, e, t\}$)

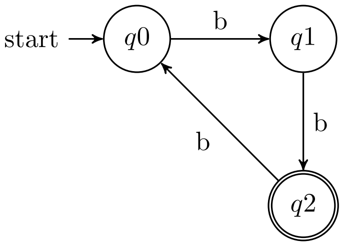
   - $L_B = \{ye^n a^m h \mid n, m \geq 1\}$ ($\Sigma = \{y, e, a, h\}$)

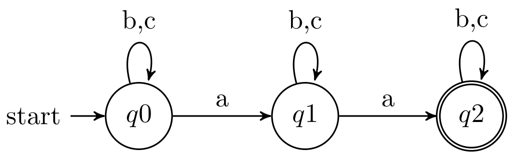
   - $L_C = \{z^e l d^a \mid e \geq 0\ ,\ a \equiv 2 \mod 3\}$ ($\Sigma = \{z, l, d\}$)

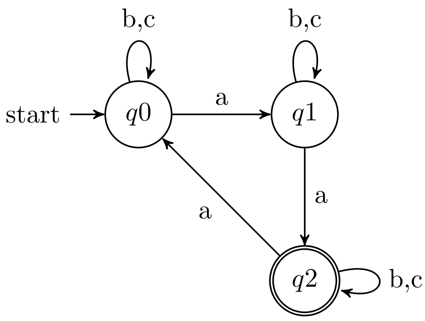
   - $L_D = \{w \in \{b\}^* \mid |w|_b \equiv 2 \mod 3\}$ ($\Sigma = \{b\}$)

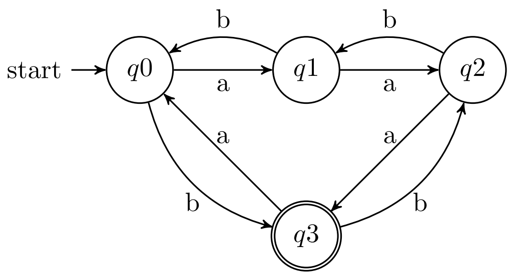
   - $L_E = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a = 2\}$ ($\Sigma = \{a, b, c\}$)



- $L_F = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid |w|_a \equiv 2 \mod 3\}$ $(\Sigma = \{a,b,c\})$



4. Décrivez le langage accepté par l'automate suivant :



Le langage décrit par cet automate est : $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a - |w|_b \equiv 3 \mod 4\}$.
Cela signifie que "le nombre de a dans le mot" moins "le nombre de b dans le mot" doit être congru à 3 modulo 4, i.e. être un multiple de 4 plus 3. La définition d'un modulo fait que cela inclut également tous les multiples négatifs, qui correspondent aux cas ou l'on aurait plus de b.
Remarque : On peut également exprimer la condition comme $|w|_b - |w|_a \equiv 1 \mod 4$*, c'est équivalent.*