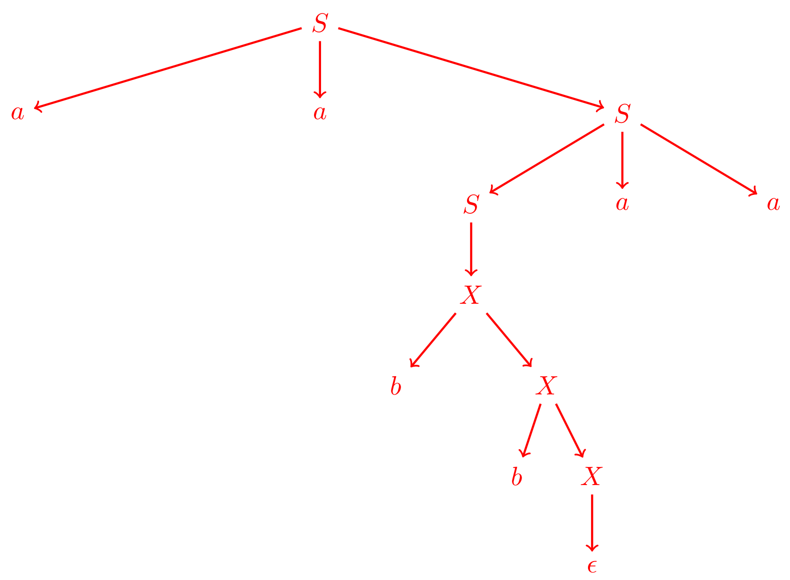
Langages Formels
Série 6 Correction - Grammaires Hors-Contextes

3 Novembre 2025

Pensez à justifier vos réponses.

1. Soit la grammaire : $G = \langle \{S, X\}, \{a, b\}, S, \mathcal{P} \rangle$ avec les règles :
   $\mathcal{P} = \{$
   $S \rightarrow aaS \mid Saa \mid X$
   $X \rightarrow bX \mid \epsilon$
   $\}$

   (a) Donnez un arbre de dérivation qui permet de générér le mot $aabbaa$.
   On suit ces dérivations : $S \Rightarrow aaS \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aaXaa \Rightarrow aabXaa \Rightarrow aabbXaa \Rightarrow aabbaa$, ce qui nous donne l'arbre de dérivation suivant :

   (b) Combien de variables, de symboles terminaux et de règle de production cette grammaire possède-t-elle ?
   Elle en possède 2 variables (S et P), 2 symboles terminaux (a et b) et 5 règles de productions (3 pour S et 2 pour X).

(c) Donnez trois autres mots générés par cette grammaire.
Voici quelques mots de ce langage : b, aaaab, $a^6b^4a^{10}$

(d) Donnez le langage généré par cette grammaire.
$L = \{a^{2i}b^k a^{2j} \mid i, j, k \geq 0\}$

(e) Ce langage est-il régulier ? Montrez-le.
Ce langage est régulier. On le prouve avec l'expression régulière suivante :
$L = (aa)^*b^*(aa)^*$

2. Donnez le langage généré par la grammaire suivante :
$G = \langle \{S, X, Y\}, \{a, b, c\}, S, P\rangle$ avec les règles :
$P = \{S \to XY$
$X \to aXb \mid ab$
$Y \to bYc \mid Yc \mid bc\}$

Le langage généré par cette grammaire est $L = \{a^i b^{i+k} c^j \mid i, j, k \geq 1, j \geq k\}$.

3. Construisez une grammaire hors-contexte pour chacun des langages suivants :

- $L_1 = \{1^n 0^n \mid n \geq 1\} \cup \{1^n 0^{2n} \mid n \geq 0\}$.
  Puisqu'on a un ensemble décrit comme une union, on va construire la grammaire similairement (depuis S, on a le choix entre soit X, soit Y. X permettra de générer la première partie. Y génèrera la seconde) :
  $G = \langle \{S, X, Y\}, \{0, 1\}, S, P\rangle$, avec les règles P suivantes :
  $P = \{$
  $S \to X$
  $S \to Y$
  $X \to 1X0$
  $X \to 10$
  $Y \to 1Y00$
  $Y \to \epsilon$
  $\}$
- $L_2 = \{0^n 1^n 2^i \mid n \geq 1,\ i \geq 0\}$.

  Ici, on a un langage qu'on peut facilement séparer en deux "blocs" indépendants : d'abord la partie 0^n1^n, puis la partie 2^i :
  $G = \langle \{S, X, Y\}, \{0, 1, 2\}, S, P\rangle$, avec les règles P suivantes :
  $P = \{$
  $S \to XY$
  $X \to 0X1$
  $X \to 01$
  $Y \to 2Y$
  $Y \to \epsilon$
  $\}$

4. Soit le langage $L_{PaldeanPokemon} = \{Poussacha, Chochodile, Coiffeton, Koraidon, Miraidon, Pohm\}$ sur l'alphabet $\Sigma = \{C, K, M, P, a, c, d, e, f, h, i, l, m, n, o, r, s, t, u\}$.
Montrez que les deux langages suivants sont Hors-Contextes, en créant des grammaires Hors-Contexte qui génèrent ces langages :

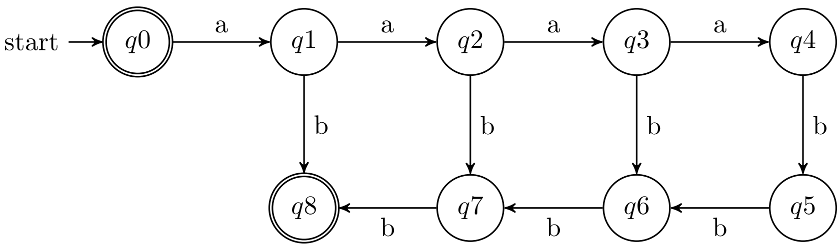
- $L_{Starters} = \{w = x \cdot y \mid x \in \{Poussacha, Chochodile, Coiffeton\}^*,\ y \in \{Koraidon, Miraidon, Pohm\}^*,$ tels que x contient strictement plus de pokémon que y}.
  Voici une grammaire pour $L_{Starters}$: $G = \langle \{S, X, Y\}, \Sigma, S, P\rangle$, avec les règles P suivantes :
  $P = \{$
  $S \to XSY$
  $S \to X$
  $X \to Poussacha$
  $X \to Chochodile$
  $X \to Coiffeton$
  $Y \to Miraidon$
  $Y \to Koraidon$
  $Y \to Pohm$
  $Y \to \epsilon$
  $\}$
- $L_{Equilibre} = \{w \in (L_{PaldeanPokemon})^* \mid w$ contient autant de Koraidon que de Miraidon}
  Voici une grammaire pour $L_{Equilibre}$: $G = \langle \{S, M, K, A\}, \Sigma, S, P\rangle$, avec les règles P suivantes :
  $P = \{$
  $S \to MSK$
  $S \to MKS$
  $S \to SMK$
  $S \to KSM$
  $S \to KMS$
  $S \to SKM$
  $S \to SS$
  $S \to AS$
  $S \to SA$
  $S \to \epsilon$
  $M \to Miraidon$
  $K \to Koraidon$
  $A \to Poussacha$
  $A \to Chochodile$
  $A \to Coiffeton$
  $A \to Pohm$
  $\}$

5. **Rappels Reguliers -** Montrez si les langages suivants sont réguliers ou non :

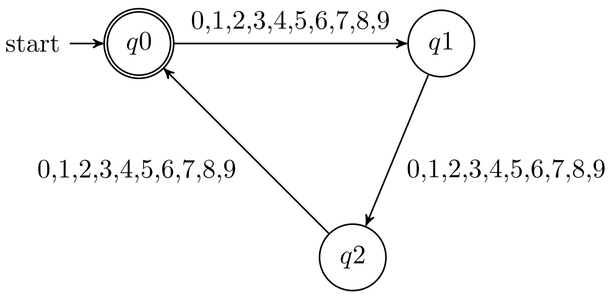
- $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w$ est un mot constitué de parenthèses correctement entrelacées } $(\Sigma = \{(,)\})$
  Ce langage n'est pas régulier. On le prouve avec le lemme de l'étoile : $\forall N$ $\exists (^N)^N \in L_1$
  $\forall x, y, z$:
  $x = (^j$
  $y = (^k$
  $z = (^{N-j-k})^N$
  avec $j + k \leq N$ et $k \geq 1$,
  $\exists i = 2$ tel que $w' = (^{N+k})^N \notin L_1$ (car ce n'est plus une expression bien

parenthèsée).
Donc L_1 n'est pas régulier.

- $L_2 = \{e^i evu^i,\ i \geq 1\}$ $(\Sigma = \{e, v, u\})$
  Ce langage n'est pas régulier. On le prouve avec le lemme de l'étoile : $\forall N$
  $\exists e^N evu^N \in L_1$
  $\forall x, y, z$:
  $x = e^j$
  $y = e^k$
  $z = e^{N-j-k} evu^N$
  avec $j + k \leq N$ et $k \geq 1$,
  $\exists i = 2$ tel que $w' = e^{N+k} evu^N \notin L_1$.
  Donc L_1 n'est pas régulier.
- $L_3 = \{a^i b^i,\ i \leq 4\}$ $(\Sigma = \{a, b\})$
  Ce langage est régulier. On le prouve avec l'automate suivant :



- $L_4 = \{a^i b^j c^k,\ i, j, k \geq 0,\ j + i = k\}$ $(\Sigma = \{a, b, c\})$
  Ce langage n'est pas régulier. On le prouve avec le lemme de l'étoile : $\forall N$
  $\exists a^N b^N c^{2N} \in L_4$
  $\forall x, y, z$:
  $x = a^j$
  $y = a^k$
  $z = a^{N-j-k} b^N c^{2N}$
  avec $j + k \leq N$ et $k \geq 1$,
  $\exists i = 2$ tel que $w' = a^{N+k} b^N c^{2N} \notin L_4$.
  Donc L_4 n'est pas régulier.
- $L_5 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ est un multiple de } 3\}$ $(\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\})$
  Ce langage est régulier. On le prouve avec l'automate suivant :



- $L_6 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ est un multiple de } 3\}$ $(\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\})$
  Ce langage est régulier. On le prouve avec l'automate suivant (on utilise le

fait qu'un multiple de 3, lorsqu'il est écrit en décimal, est un nombre dont la somme des chiffres est aussi un multiple de 3) :