

Langages Formels

Série 6 - Rappels Réguliers et Grammaires Hors-Contextes

3 Novembre 2025

Pensez à justifier vos réponses.

Rappel : Grammaires Hors-Contexte

Une **grammaire Hors-Contexte** est définie comme un 4-uplet $(V, \Sigma, S, \mathcal{P})$ avec :

- V l'ensemble des symboles non-terminaux (les variables),
- Σ l'ensemble des symboles terminaux (symboles du langage),
- S le symbole de départ, aussi appelé axiome,
- \mathcal{P} l'ensemble des règles de production de la forme $\alpha \rightarrow \beta$, avec $\alpha \in V$ et $\beta \in (V \cup \Sigma)^*$

Autrement dit, une grammaire Hors-Contexte est une grammaire dans laquelle toutes les règles de production ont un unique symbole non-terminal à gauche de la règle.

Exercices

1. Soit la grammaire : $G = \langle \{S, X\}, \{a, b\}, S, \mathcal{P} \rangle$ avec les règles :
$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aaS \mid Saa \mid X \\ X \rightarrow bX \mid \epsilon \end{array} \right\}$$
 - (a) Combien de variables, de symboles terminaux et de règle de production cette grammaire possède-t-elle ?
 - (b) Donnez un arbre de dérivation qui permet de générer le mot $aabbbaa$.
 - (c) Donnez trois autres mots générés par cette grammaire.

- (d) Donnez le langage généré par cette grammaire.
 (e) Ce langage est-il régulier ? Montrez-le.

2. Donnez le langage généré par la grammaire suivante :

$G = \langle \{S, X, Y\}, \{a, b, c\}, S, \mathcal{P} \rangle$ avec les règles :

$\mathcal{P} = \{$

$S \rightarrow XY$

$X \rightarrow aXb \mid ab$

$Y \rightarrow bYc \mid Yc \mid bc$

$\}$

3. Construisez une grammaire hors-contexte pour chacun des langages suivants :

- $L_1 = \{1^n 0^n \mid n \geq 1\} \cup \{1^n 0^{2n} \mid n \geq 0\}$.
- $L_2 = \{0^n 1^n 2^i \mid n \geq 1, i \geq 0\}$.

4. Soit le langage $L_{PaldeanPokemon} = \{Poussacha, Chochodile, Coiffeton, Koraidon, Miraidon, Pohm\}$ sur l'alphabet $\Sigma = \{C, K, M, P, a, c, d, e, f, h, i, l, m, n, o, r, s, t, u\}$. Montrez que les deux langages suivants sont Hors-Contextes, en créant des grammaires Hors-Contexte qui génèrent ces langages :

- $L_{Starters} = \{w = x \cdot y \mid x \in \{Poussacha, Chochodile, Coiffeton\}^*, y \in \{Koraidon, Miraidon, Pohm\}^*, \text{ tels que } x \text{ contient strictement plus de pokémon que } y\}$.
- $L_{Equilibre} = \{w \in (L_{PaldeanPokemon})^* \mid w \text{ contient autant de Koraidon que de Miraidon}\}$.

5. **Rappels réguliers** - Montrez si les langages suivants sont réguliers ou non :

- $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ est un mot constitué de parenthèses correctement entrelacées}\}$ ($\Sigma = \{(\,,\,)\}\}$)
- $L_2 = \{e^i evu^i, i \geq 1\}$ ($\Sigma = \{e, v, u\}$)
- $L_3 = \{a^i b^i, i \leq 4\}$ ($\Sigma = \{a, b\}$)
- $L_4 = \{a^i b^j c^k, i, j, k \geq 0, j + i = k\}$ ($\Sigma = \{a, b, c\}$)
- $L_5 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ est un multiple de } 3\}$ ($\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$)
- $L_6 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ est un multiple de } 3\}$ ($\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$)