Langages Formels
Partiel

27 Octobre 2025

Nom : ____________________________________

Prénom : ____________________________________

Numéro d'étudiant-e : ____________________________________

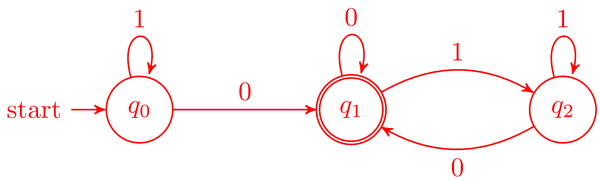
Aucun matériel n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites.

Répondez directement sur cet énoncé.

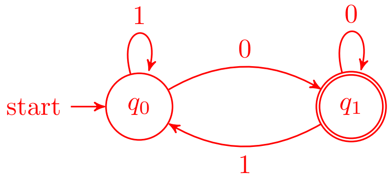
(1 pt) Question 1 : Automate Déterministe

Sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, créez un automate fini déterministe qui accepte le langage régulier $L_1 = (1^*0)(0 \cup (1^+0))^*$.

- Réponse attendue :



- Réponse alternative : En observant l'expression régulière, on peut remarquer que c'est la même que celle des nombres pairs (terminant par 0), comme observée en classe.



(1 pt) Question 2 : Déterminisation d'un Automate

Soit l'automate fini A_2, acceptant le langage L_2. **Déterminisez-le (donnez uniquement le tableau complet) pour obtenir un automate fini déterministe acceptant L_2. Puis dessinez un automate déterministe acceptant le langage $\overline{L_2}$.**

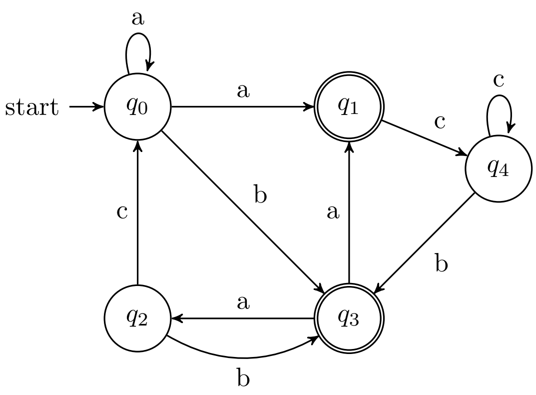


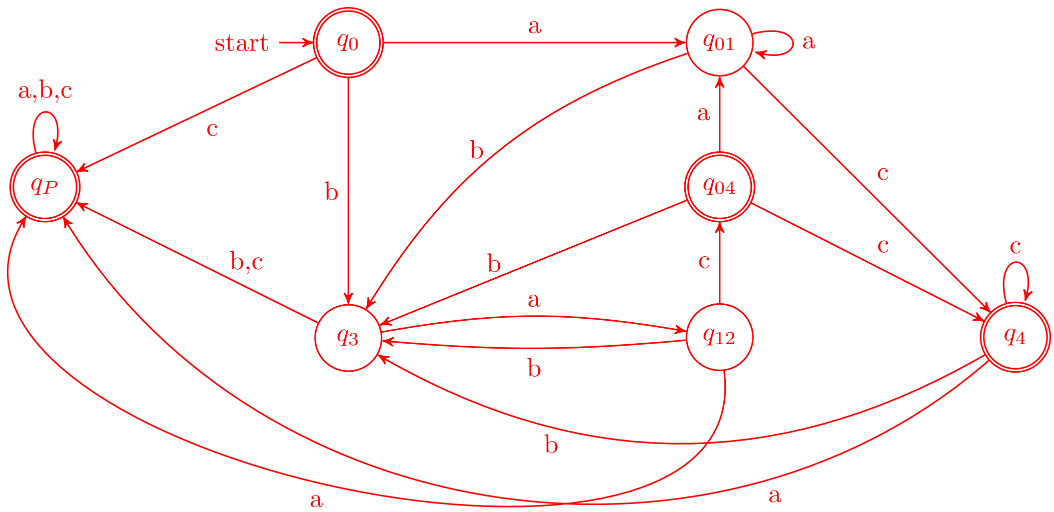
Figure 1: Automate A_2

- D'abord, on déterminise l'automate:

état	a	b	c
q_0	q_{01}	q_3	$\emptyset$
q_{01}	q_{01}	q_3	q_4
q_3	q_{12}	$\emptyset$	$\emptyset$
q_4	$\emptyset$	q_3	q_4
q_{12}	$\emptyset$	q_3	q_{04}
q_{04}	q_{01}	q_3	q_4

Les états finaux sont ceux contenant q_1 ou q_3, c'est à dire $\{q_{01}, q_3, q_{12}\}$.

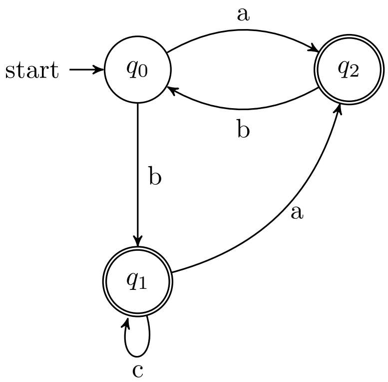
- On dessine l'automate déterminisé, puis on le complète : on remplace dans le tableau les cases avec l'ensemble vide $\emptyset$ par un état puits q_P, et on ajoute une ligne où q_P va vers q_P pour chaque caractère. Puis on inverse les états finaux. On obtient l'automate suivant :



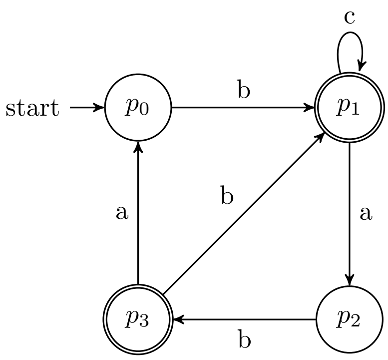
(1 pt) Question 3 : Opérations et Automates

A partir des automates finis A_X et A_Y ci-dessous, qui reconnaissent les langages L_X et L_Y respectivement (sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$), **construisez des automates finis pour les langages suivants** :

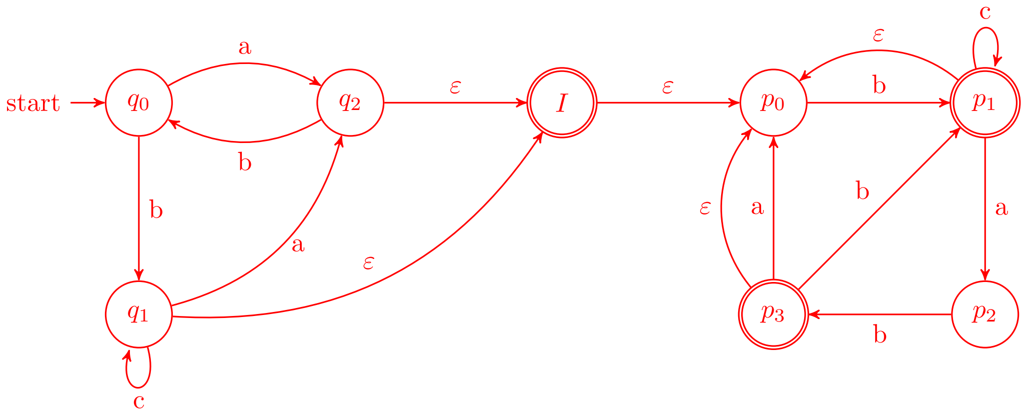
Automate A_X :



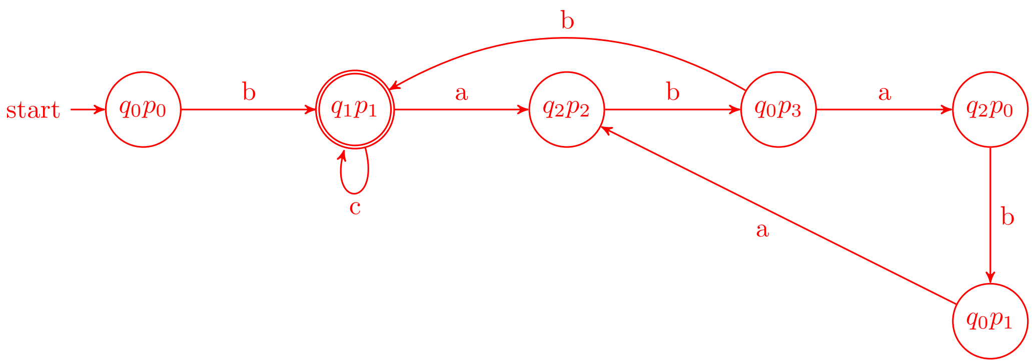
Automate A_Y :



1. (0.5 pt) Un automate fini acceptant $L_X \circ (L_Y)^*$.



2. (0.5 pt) Un automate fini acceptant $L_X \cap L_Y$.



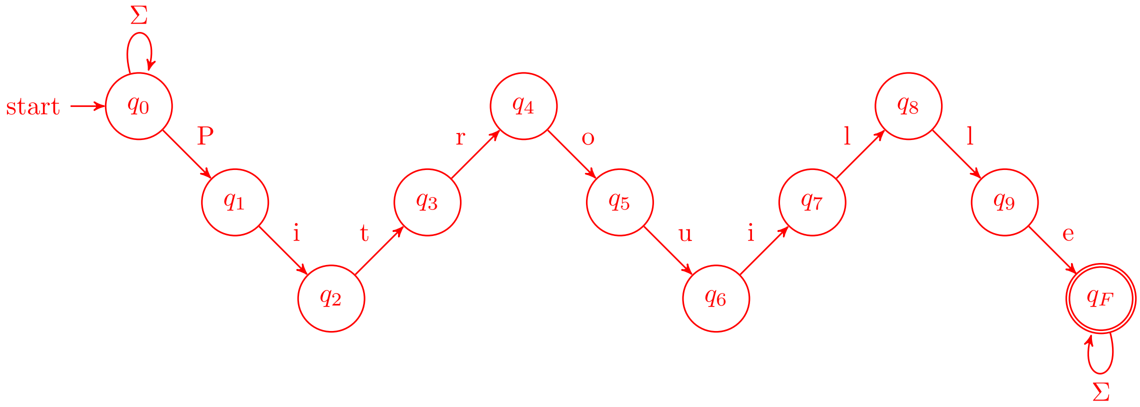
(1 pt) Question 4 : Langages et problèmes réels

Soit l'alphabet Σ contenant les caractères du langage courant (minuscules, majuscules et chiffres), sur lequel sont écrits les langages de cet exercice.

1. (0.5 pt) Soit le langage $L_{PkmnHalloween} = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ contient le facteur "Pitrouille" }\}$.
Montrez que le langage $L_{PkmnHalloween}$ est régulier.

Il y a deux façons de prouver que ce langage est régulier, soit on crée une expression régulière qui est équivalente, soit on crée un automate fini qui le reconnaît.

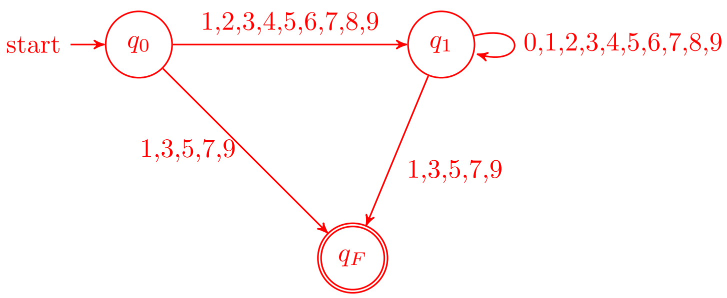
- expression régulière : $\Sigma^* Pitrouille \Sigma^*$;
- automate fini non déterministe :



2. (0.5 pt) Soit le langage $L_{NombreImpair} = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ est un nombre entier positif impair écrit en décimal }\}$.
Montrez que le langage $L_{NombreImpair}$ est régulier.
Rappel : un nombre entier différent de 0 ne doit pas commencer par un 0 (exemple : on écrit "1203", mais pas "01203"), et un nombre impair en décimal finit par 1,3,5,7 ou 9.

Il y a deux façons de prouver que ce langage est régulier, soit on crée une expression régulière qui est équivalente, soit on crée un automate fini qui le reconnaît.

- expression régulière : $(\epsilon \cup (1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 6 \cup 7 \cup 8 \cup 9)(0 \cup 1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 6 \cup 7 \cup 8 \cup 9)^*)(1 \cup 3 \cup 5 \cup 7 \cup 9)$;
- automate fini non déterministe :



(1 pt) Question 5 : Lemme de l'étoile

On rappelle que pour un mot u, $|u|$ désigne la longueur du mot u. Sur l'alphabet $\Sigma = \{e, f\}$, on définit le langage $L_3 = \{u \cdot f^n \mid u \in \Sigma^*, |u| = n, n \geq 1\}$. Donnez trois mots de L_3. Montrer que le langage L_3 n'est pas régulier.

Voici trois exemples de mots dans L_3 :
$w_1 = e^6 f^6$,
$w_2 = f^{40}$,
et $w_3 = effeeffff f$.

Pour montrer que L_3 n'est pas régulier, on applique (la contraposée) le lemme de l'étoile :
$\forall N > 0$,
$\exists w = e^N f^N \in L_3$ (de longueur $|w| = 2N \geq N$),
$\forall x, y, z$ découpage de w tels que $|xy| \leq N$ et $|y| \geq 1$, on peut exprimer tous ces découpages sous la forme :
$x = e^p$
$y = e^q$
$z = e^{N-p-q} f^N$
avec $p + q \leq N$ et $q \geq 1$.
$\exists i = 2$ tel que $w' = xy^i z = e^p e^q e^q e^{N-p-q} f^N = e^{N+q} f^N \notin L_3$.
Donc L_3 n'est pas régulier.

(1 pt) Question 6 : Expression Régulière

1. (0.75 pt) Donnez une expression régulière équivalente à l'automate fini A_4 suivant.

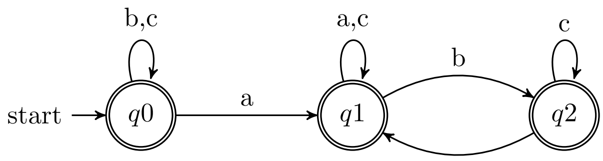
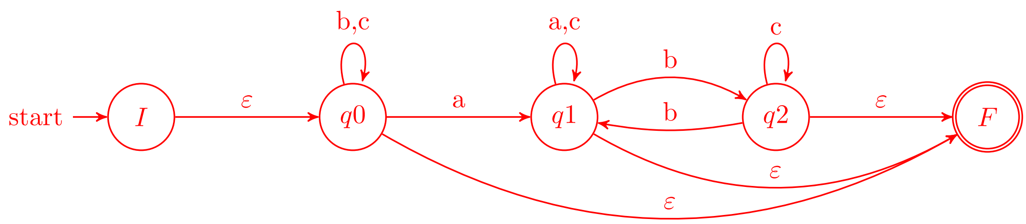


Figure 2: Automate A_4

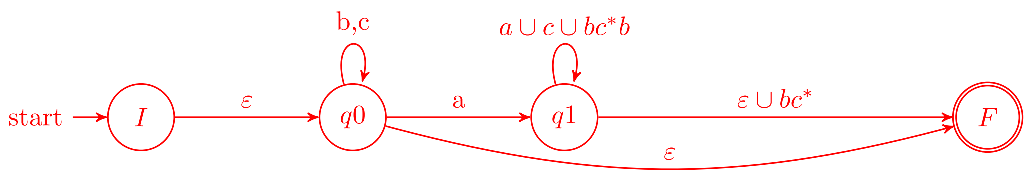
Avec la méthode vue en exercice : $\underbrace{(b \cup c)^*}_{q_0} \cup \underbrace{(b \cup c)^* a(a \cup c \cup bc^*b)^*}_{q_1} \cup \underbrace{(b \cup c)^* a(a \cup c)^* b(c \cup b(a \cup c)^* b)^*}_{q_2}$

Avec la méthode vue en classe :

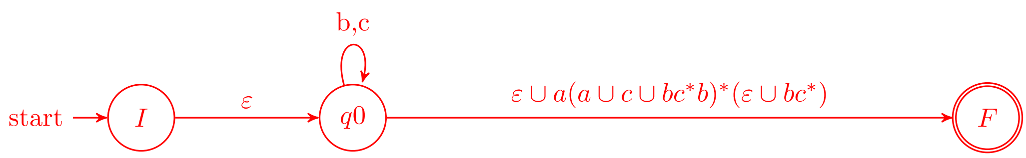
- Première étape :



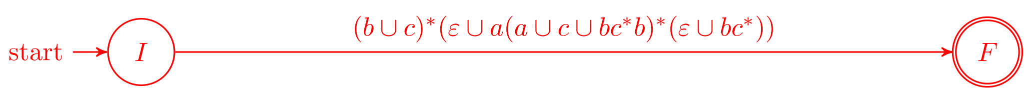
- On supprime q_2 :



- On supprime q_1 :



- On supprime q_0 :



L'expression régulière reconnue par cet automate est : $(b \cup c)^*(\varepsilon \cup a(a \cup c \cup bc^*b)^*(\varepsilon \cup bc^*))$.

2. (0.25 pt) *Question difficile* : expliquez avec des phrases quel est le langage accepté par cet automate, c'est-à-dire, donnez la particularité des mots accepté par cette automate.

Cet automate reconnaît le langage constitué des mots dans lesquels le nombre de b séparant deux a est pair, c'est-à-dire que, entre deux a, on trouve $0, 2, 4, \ldots$ lettres b. A noter que ces b ne sont pas nécessairement consécutifs.