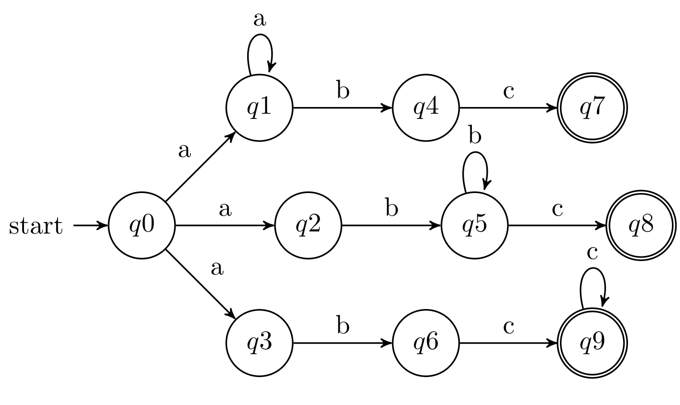
Langages Formels
Série 3 Correction - Automates finis non-déterministes

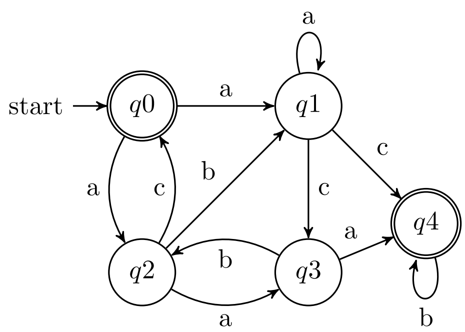
6 Octobre 2025

Pensez à justifier vos réponses.

1. Créez un automate non-déterministe qui n'est pas déterministe pour le langage suivant : $L_A = \{a^n bc \mid n \geq 1\} \cup \{ab^n c \mid n \geq 1\} \cup \{abc^n \mid n \geq 1\}$.



2. Déterminisez l'automate suivant, puis complétez et inversez-le pour construire un automate acceptant $\overline{L}$.



- D'abord, on déterminise l'automate :

état	a	b	c
q_0	q_{12}	$\emptyset$	$\emptyset$
q_{12}	q_{13}	q_1	q_{034}
q_{13}	q_{14}	q_2	q_{34}
q_1	q_1	$\emptyset$	q_{34}
q_{034}	q_{124}	q_{24}	$\emptyset$
q_{14}	q_1	q_4	q_{34}
q_2	q_3	q_1	q_0
q_{34}	q_4	q_{24}	$\emptyset$
q_{124}	q_{13}	q_{14}	q_{034}
q_{24}	q_3	q_{14}	q_0
q_4	$\emptyset$	q_4	$\emptyset$
q_3	q_4	q_2	$\emptyset$

  Les états finaux sont tous ceux qui contiennent au moins un des anciens états finaux. Ici, ce sont donc les états contenant q_0 ou q_4, c'est à dire $\{q_0, q_{034}, q_{14}, q_{34}, q_{124}, q_{24}, q_4\}$.

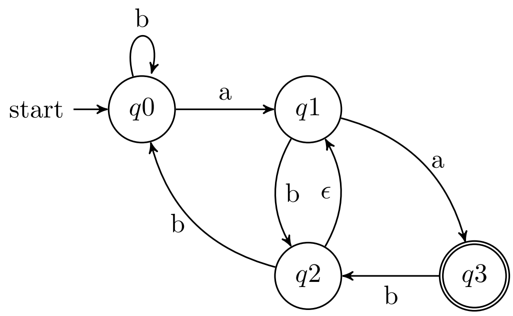
- Ensuite, on le complète : il suffit donc de remplacer dans le tableau les cases avec l'ensemble vide $\emptyset$ par un état puits q_P, et d'ajouter une ligne ou q_P va vers q_P pour chaque caractère (pour la boucle de q_P vers lui-même) :

état	a	b	c
q_0	q_{12}	q_P	q_P
q_{12}	q_{13}	q_1	q_{034}
q_{13}	q_{14}	q_2	q_{34}
q_1	q_1	q_P	q_{34}
q_{034}	q_{124}	q_{24}	q_P
q_{14}	q_1	q_4	q_{34}
q_2	q_3	q_1	q_0
q_{34}	q_4	q_{24}	q_P
q_{124}	q_{13}	q_{14}	q_{034}
q_{24}	q_3	q_{14}	q_0
q_4	q_P	q_4	q_P
q_3	q_4	q_2	q_P
q_P	q_P	q_P	q_P

- Enfin, pour construire un automate acceptant $\overline{L}$, il suffit d'inverser les états finaux et non finaux. On garde donc le même automate (défini par le même tableau), mais en changeant juste les états finaux, qui deviennent $\{q_1, q_2, q_3, q_{12}, q_{13}, q_P\}$.

3. Déterminisez l'automate suivant :

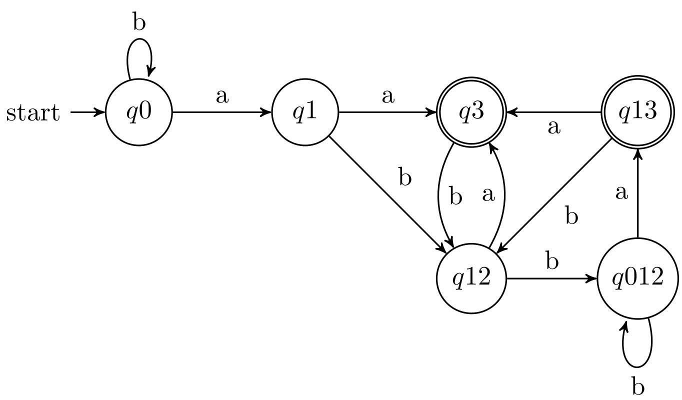
   On construit donc le tableau suivant :



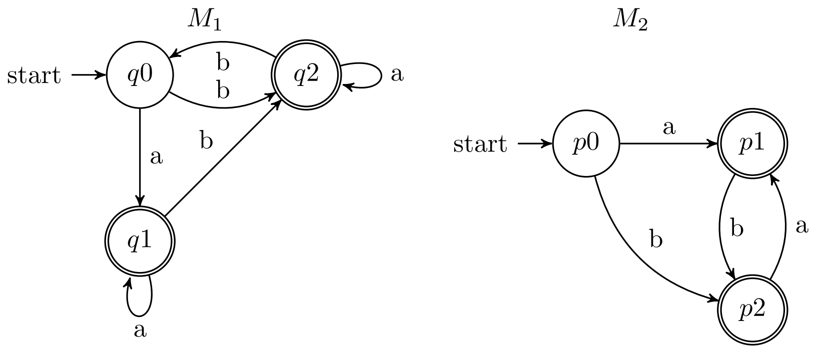
état	a	b
q_0	q_1	q_0
q_1	q_3	q_{12}
q_3	$\emptyset$	q_{12}
q_{12}	q_3	q_{012}
q_{012}	q_{13}	q_{012}
q_{13}	q_3	q_{12}

Les états finaux sont tous ceux qui contiennent au moins un des anciens états finaux. Ici, ce sont donc uniquement ceux qui contiennent q_3, c'est à dire $\{q_3, q_{13}\}$.

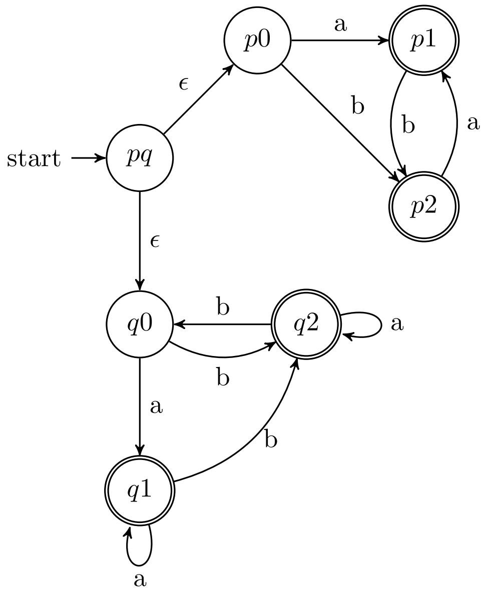
Dessiné, cela donne :



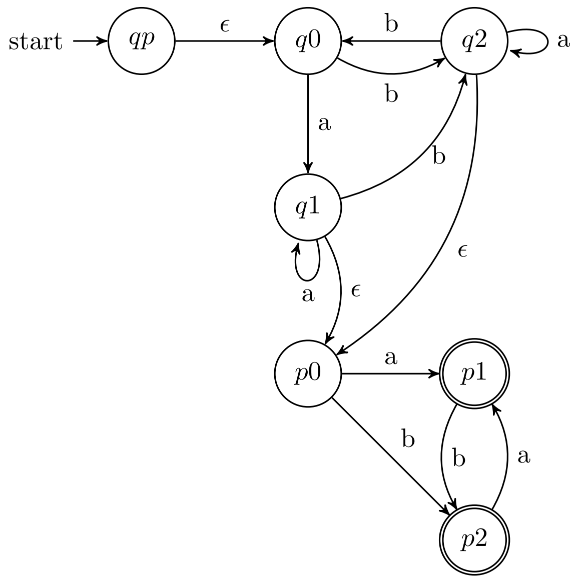
4. Voici deux automates M_1 et M_2, acceptant les langages L_1 et L_2 respectivement. A partir de ces deux automates, construisez des automates acceptant les langages suivants :



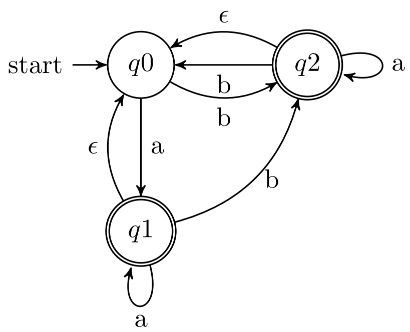
(a) $L_1 \cup L_2$:



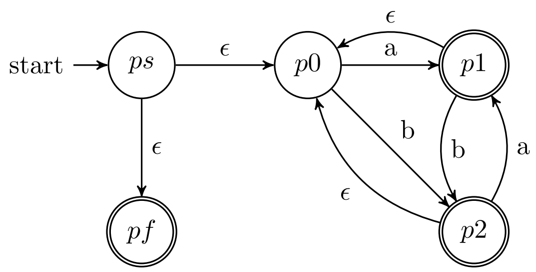
(b) $L_1 \circ L_2$:



(c) L_1^+ :



(d) L_2^* :



(e) $L_1 \cap L_2$:

On peut construire un nouvel automate ou chaque état représente une "paire" d'états de nos deux automates : on commence donc en p_0q_0. On ajoute une flèche vers un nouvel état quand il est possible de lire un même caractère depuis les deux états donnés (puisqu'on

veut l'intersection).
Par exemple, lire un "b" en p_0q_0 est possible, et nous amène en p_2q_2. Mais dans p_2q_2, lire un "b" n'est pas possible, car on peut en lire un dans q_2, mais pas dans p_2. On peut en revanche y lire un "a", qui nous amène en p_1q_2 (flèche de p_2 vers p_1 et boucle de q_2 à q_2).
Et un état q_ip_j n'est final que si les deux états q_i et p_j étaient finaux.
On obtient l'automate suivant :