44 | 最短路径：地图软件是如何计算出最优出行路径的？

time.geekbang.org/column/article/76468

基础篇的时候，我们学习了图的两种搜索算法，深度优先搜索和广度优先搜索。这两种算法主要是针对无权图的搜索算法。针对有权图，也就是图中的每条边都有一个权重，我们该如何计算两点之间的最短路径（经过的边的权重和最小）呢？今天，我就从地图软件的路线规划问题讲起，带你看看常用的**最短路径算法**（Shortest Path Algorithm）。

算法解析

我们刚提到的最优问题包含三个：最短路线、最少用时和最少红绿灯。我们先解决最简单的，最短路线。

解决软件开发中的实际问题，最重要的一点就是**建模**，也就是将复杂的场景抽象成具体的数据结构。针对这个问题，我们该如何抽象成数据结构呢？

我们之前也提到过，图这种数据结构的表达能力很强，显然，把地图抽象成图最合适不过了。我们把每个岔路口看作一个顶点，岔路口与岔路口之间的路看作一条边，路的长度就是边的权重。如果路是单行道，我们就在两个顶点之间画一条有向边；如果路是双行道，我们就在两个顶点之间画两条方向不同的边。这样，整个地图就被抽象成一个有向有权图。

具体的代码实现，我放在下面了。于是，我们要求解的问题就转化为，在一个有向有权图中，求两个顶点间的最短路径。

```
public class Graph { // 有向有权图的邻接表表示
private LinkedList<Edge> adj[]; // 邻接表
private int v; // 顶点个数

public Graph(int v) {
this.v = v;
this.adj = new LinkedList[v];
for (int i = 0; i < v; ++i) {
this.adj[i] = new LinkedList<>();
}
}

public void addEdge(int s, int t, int w) { // 添加一条边
this.adj[s].add(new Edge(s, t, w));
}

private class Edge {
public int sid; // 边的起始顶点编号
public int tid; // 边的终止顶点编号
public int w; // 权重
public Edge(int sid, int tid, int w) {
this.sid = sid;
this.tid = tid;
this.w = w;
}
}
// 下面这个类是为了 dijkstra 实现用的
private class Vertex {
public int id; // 顶点编号 ID
```

```
public int dist; // 从起始顶点到这个顶点的距离
public Vertex(int id, int dist) {
this.id = id;
this.dist = dist;
}
}
}
```

榭复制代码

想要解决这个问题，有一个非常经典的算法，最短路径算法，更加准确地说，是**单源最短路径算法**（一个顶点到一个顶点）。提到最短路径算法，最出名的莫过于 Dijkstra 算法了。所以，我们现在来看，Dijkstra 算法是怎么工作的。

这个算法的原理稍微有点儿复杂，单纯的文字描述，不是很好懂。所以，我还是结合代码来讲解。

```
// 因为 Java 提供的优先级队列，没有暴露更新数据的接口，所以我们需要重新实现一个
private class PriorityQueue { // 根据 vertex.dist 构建小顶堆
private Vertex[] nodes;
private int count;
public PriorityQueue(int v) {
this.nodes = new Vertex[v+1];
this.count = v;
}
public Vertex poll() { // TODO: 留给读者实现... }
public void add(Vertex vertex) { // TODO: 留给读者实现...}
// 更新结点的值，并且从下往上堆化，重新符合堆的定义。时间复杂度 O(logn)。
public void update(Vertex vertex) { // TODO: 留给读者实现...}
public boolean isEmpty() { // TODO: 留给读者实现...}
}

public void dijkstra(int s, int t) { // 从顶点 s 到顶点 t 的最短路径
int[] predecessor = new int[this.v]; // 用来还原最短路径
Vertex[] vertexes = new Vertex[this.v];
for (int i = 0; i < this.v; ++i) {
vertexes[i] = new Vertex(i, Integer.MAX_VALUE);
}
PriorityQueue queue = new PriorityQueue(this.v);// 小顶堆
boolean[] inqueue = new boolean[this.v]; // 标记是否进入过队列
vertexes[s].dist = 0;
queue.add(vertexes[s]);
inqueue[s] = true;
while (!queue.isEmpty()) {
Vertex minVertex= queue.poll(); // 取堆顶元素并删除
if (minVertex.id == t) break; // 最短路径产生了
for (int i = 0; i < adj[minVertex.id].size(); ++i) {
Edge e = adj[minVertex.id].get(i); // 取出一条 minVetex 相连的边
Vertex nextVertex = vertexes[e.tid]; // minVertex-->nextVertex
if (minVertex.dist + e.w < nextVertex.dist) { // 更新 next 的 dist
nextVertex.dist = minVertex.dist + e.w;
predecessor[nextVertex.id] = minVertex.id;
if (inqueue[nextVertex.id] == true) {
queue.update(nextVertex); // 更新队列中的 dist 值
} else {
queue.add(nextVertex);
inqueue[nextVertex.id] = true;
}
}
}
}
// 输出最短路径
}

private void print(int s, int t, int[] predecessor) {
if (s == t) return;
}
```

榭复制代码

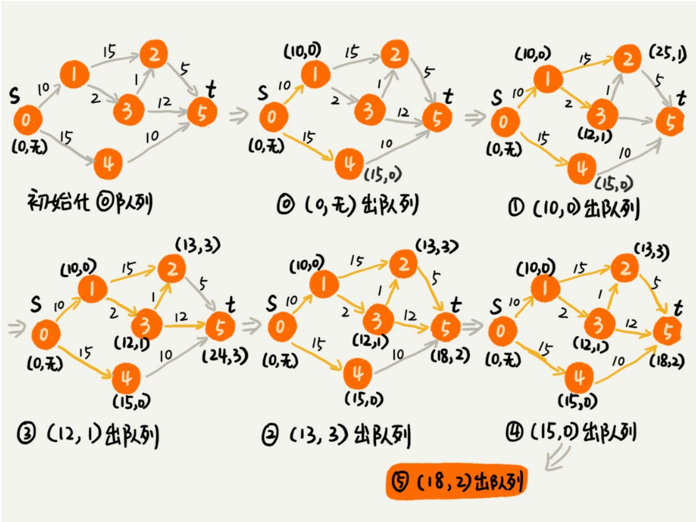
我们用 vertexes 数组，记录从起始顶点到每个顶点的距离（dist）。起初，我们把所有顶点的 dist 都初始化为无穷大（也就是代码中的 Integer.MAX_VALUE）。我们把起始顶点的 dist 值初始化为 0，然后将其放到优先级队列中。

我们从优先级队列中取出 dist 最小的顶点 minVertex，然后考察这个顶点可达的所有顶点（代码中的 nextVertex）。如果 minVertex 的 dist 值加上 minVertex 与 nextVertex 之间边的权重 w 小于 nextVertex 当前的 dist 值，也就是说，存在另一条更短的路径，它经过 minVertex 到达 nextVertex。那我们就把 nextVertex 的 dist 更新为 minVertex 的 dist 值加上 w。然后，我们把 nextVertex 加入到优先级队列中。重复这个过程，直到找到终止顶点 t 或者队列为空。

以上就是 Dijkstra 算法的核心逻辑。除此之外，代码中还有两个额外的变量，predecessor 数组和 inqueue 数组。

inqueue 数组是为了避免将一个顶点多次添加到优先级队列中。我们更新了某个顶点的 dist 值之后，如果这个顶点已经在优先级队列中了，就不要再将它重复添加进去了。

看完了代码和文字解释，你可能还是有点懵，那我就举个例子，再给你解释一下。



理解了 Dijkstra 的原理和代码实现，我们来看下，**Dijkstra 算法的时间复杂度是多少？**

在刚刚的代码实现中，最复杂就是 while 循环嵌套 for 循环那部分代码了。while 循环最多会执行 V 次（V 表示顶点的个数），而内部的 for 循环的执行次数不确定，跟每个顶点的相邻边的个数有关，我们分别记作 E0，E1，E2，……，E(V-1)。如果我们把这 V 个顶点的边都加起来，最大也不会超过图中所有边的个数 E（E 表示边的个数）。

for 循环内部的代码涉及从优先级队列取数据、往优先级队列中添加数据、更新优先级队列中的数据，这样三个主要的操作。我们知道，优先级队列是用堆来实现的，堆中的这几个操作，时间复杂度都是 O(logV)（堆中的元素个数不会超过顶点的个数 V）。

所以，综合这两部分，再利用乘法原则，整个代码的时间复杂度就是 O(E*logV)。

弄懂了 Dijkstra 算法，我们再来回答之前的问题，如何计算最优出行路线？

从理论上讲，用 Dijkstra 算法可以计算出两点之间的最短路径。但是，你有没有想过，对于一个超级大地图来说，岔路口、道路都非常多，对应到图这种数据结构上来说，就有非常多的顶点和边。如果为了计算两点之间的最短路径，在一个超级大图上动用 Dijkstra 算法，遍历所有的顶点和边，显然会非常耗时。那我们有没有什么优化的方法呢？

做工程不像做理论，一定要给出个最优解。理论上算法再好，如果执行效率太低，也无法应用到实际的工程中。**对于软件开发工程师来说，我们经常要根据问题的实际背景，对解决方案权衡取舍。类似出行路线这种工程上的问题，我们没有必要非得求出个绝对最优解。很多时候，为了兼顾执行效率，我们只需要计算出一个可行的次优解就可以了**。

有了这个原则，你能想出刚刚那个问题的优化方案吗？

虽然地图很大，但是两点之间的最短路径或者说较好的出行路径，并不会很“发散”，只会出现在两点之间和两点附近的区块内。所以我们可以在整个大地图上，划出一个小的区块，这个小区块恰好可以覆盖住两个点，但又不会很大。我们只需要在这个小区块内部运行 Dijkstra 算法，这样就可以避免遍历整个大图，也就大大提高了执行效率。

不过你可能会说了，如果两点距离比较远，从北京海淀区某个地点，到上海黄浦区某个地点，那上面的这种处理方法，显然就不工作了，毕竟覆盖北京和上海的区块并不小。

我给你点提示，你可以现在打开地图 App，缩小放大一下地图，看下地图上的路线有什么变化，然后再思考，这个问题该怎么解决。

对于这样两点之间距离较远的路线规划，我们可以把北京海淀区或者北京看作一个顶点，把上海黄浦区或者上海看作一个顶点，先规划大的出行路线。比如，如何从北京到上海，必须要经过某几个顶点，或者某几条干道，然后再细化每个阶段的小路线。

这样，最短路径问题就解决了。我们再来看另外两个问题，最少时间和最少红绿灯。

前面讲最短路径的时候，每条边的权重是路的长度。在计算最少时间的时候，算法还是不变，我们只需要把边的权重，从路的长度变成经过这段路所需要的时间。不过，这个时间会根据拥堵情况时刻变化。如何计算车通过一段路的时间呢？这是一个蛮有意思的问题，你可以自己思考下。

每经过一条边，就要经过一个红绿灯。关于最少红绿灯的出行方案，实际上，我们只需要把每条边的权值改为 1 即可，算法还是不变，可以继续使用前面讲的 Dijkstra 算法。不过，边的权值为 1，也就相当于无权图了，我们还可以使用之前讲过的广度优先搜索算法。因为我们前面讲过，广度优先搜索算法计算出来的两点之间的路径，就是两点的最短路径。

不过，这里给出的所有方案都非常粗糙，只是为了给你展示，如何结合实际的场景，灵活地应用算法，让算法为我们所用，真实的地图软件的路径规划，要比这个复杂很多。而且，比起 Dijkstra 算法，地图软件用的更多的是类似 A* 的启发式搜索算法，不过也是在 Dijkstra 算法上的优化罢了，我们后面会讲到，这里暂且不展开。

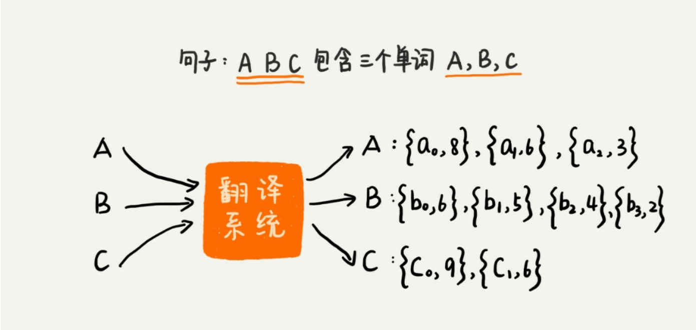
总结引申

今天，我们学习了一种非常重要的图算法，**Dijkstra 最短路径算法**。实际上，最短路径算法还有很多，比如 Bellford 算法、Floyd 算法等等。如果感兴趣，你可以自己去研究。

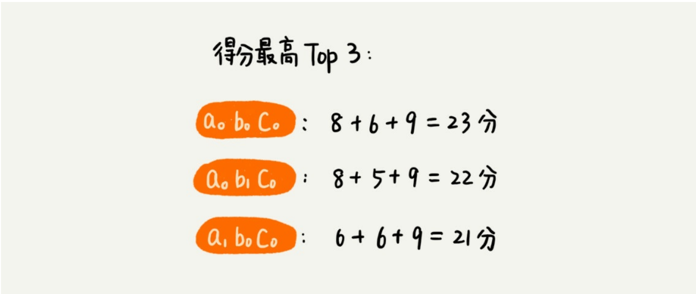
关于 Dijkstra 算法，我只讲了原理和代码实现。对于正确性，我没有去证明。之所以这么做，是因为证明过程会涉及比较复杂的数学推导。这个并不是我们的重点，你只要掌握这个算法的思路就可以了。

这些算法实现思路非常经典，掌握了这些思路，我们可以拿来指导、解决其他问题。比如 Dijkstra 这个算法的核心思想，就可以拿来解决下面这个看似完全不相关的问题。这个问题是我之前工作中遇到的真实的问题，为了在较短的篇幅里把问题介绍清楚，我对背景做了一些简化。

我们有一个翻译系统，只能针对单个词来做翻译。如果要翻译一整个句子，我们需要将句子拆成一个一个的单词，再丢给翻译系统。针对每个单词，翻译系统会返回一组可选的翻译列表，并且针对每个翻译打一个分，表示这个翻译的可信程度。



针对每个单词，我们从可选列表中，选择其中一个翻译，组合起来就是整个句子的翻译。每个单词的翻译的得分之和，就是整个句子的翻译得分。随意搭配单词的翻译，会得到一个句子的不同翻译。针对整个句子，我们希望计算出得分最高的前 k 个翻译结果，你会怎么编程来实现呢？



当然，最简单的办法还是借助回溯算法，穷举所有的排列组合情况，然后选出得分最高的前 k 个翻译结果。但是，这样做的时间复杂度会比较高，是 O(m^n)，其中，m 表示平均每个单词的可选翻译个数，n 表示一个句子中包含多少个单词。这个解决方案，你可以当作回溯算法的练习题，自己编程实现一下，我就不多说了。

实际上，这个问题可以借助 Dijkstra 算法的核心思想，非常高效地解决。每个单词的可选翻译是按照分数从大到小排列的，所以 a0b0c0a0b0c0 肯定是得分最高组合结果。我们把 a0b0c0a0b0c0 及得分作为一个对象，放入到优先级队列中。

我们每次从优先级队列中取出一个得分最高的组合，并基于这个组合进行扩展。扩展的策略是每个单词的翻译分别替换成下一个单词的翻译。比如 a0b0c0a0b0c0 扩展后，会得到三个组合，a1b0c0a1b0c0、a0b1c0a0b1c0、a0b0c1a0b0c1。我们把扩展之后的组合，加到优先级队列中。重复这个过程，直到获取到 k 个翻译组合或者队列为空。

我们来看，这种实现思路的时间复杂度是多少？

假设句子包含 n 个单词，每个单词平均有 m 个可选的翻译，我们求得分最高的前 k 个组合结果。每次一个组合出队列，就对应着一个组合结果，我们希望得到 k 个，那就对应着 k 次出队操作。每次有一个组合出队列，就有 n 个组合入队列。优先级队列中出队和入队操作的时间复杂度都是 O(logX)，X 表示队列中的组合个数。所以，总的时间复杂度就是 O(k*n*logX)。那 X 到底是多少呢？

k 次出入队列，队列中的总数据不会超过 k*n，也就是说，出队、入队操作的时间复杂度是 O(log(k*n))。所以，总的时间复杂度就是 O(k*n*log(k*n))，比之前的指数级时间复杂度降低了很多。

课后思考

1. 在计算最短时间的出行路线中，如何获得通过某条路的时间呢？这个题目很有意思，我之前面试的时候也被问到过，你可以思考看看。
2. 今天讲的出行路线问题，我假设的是开车出行，那如果是公交出行呢？如果混合地铁、公交、步行，又该如何规划路线呢？

欢迎留言和我分享，也欢迎点击“请朋友读”，把今天的内容分享给你的好友，和他一起讨论、学习。