27 | 递归树：如何借助树来求解递归算法的时间复杂度？

time.geekbang.org/column/article/69388

今天，我们来讲树这种数据结构的一种特殊应用，递归树。

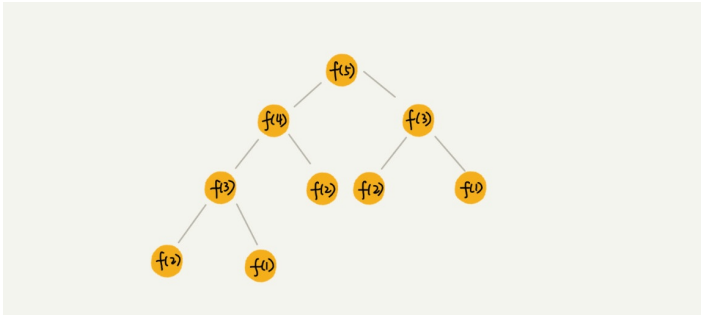
我们都知道，递归代码的时间复杂度分析起来很麻烦。我们在第 12 节《排序（下）》那里讲过，如何利用递推公式，求解归并排序、快速排序的时间复杂度，但是，有些情况，比如快排的平均时间复杂度的分析，用递推公式的话，会涉及非常复杂的数学推导。

除了用递推公式这种比较复杂的分析方法，有没有更简单的方法呢？今天，我们就来学习另外一种方法，**借助递归树来分析递归算法的时间复杂度**。

递归树与时间复杂度分析

我们前面讲过，递归的思想就是，将大问题分解为小问题来求解，然后再将小问题分解为小小问题。这样一层一层地分解，直到问题的数据规模被分解得足够小，不用继续递归分解为止。

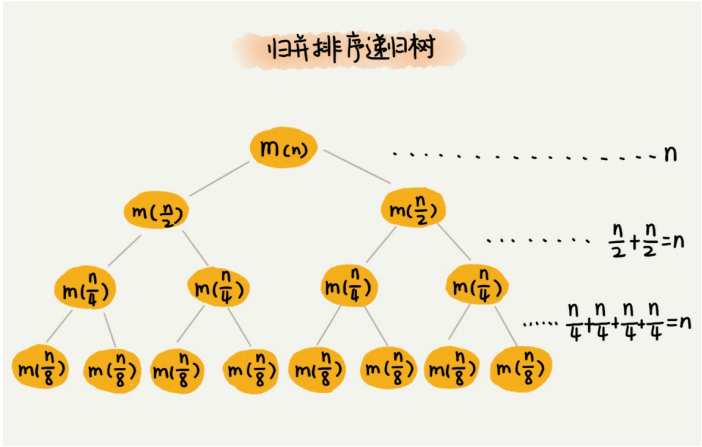
如果我们把这个一层一层的分解过程画成图，它其实就是一棵树。我们给这棵树起一个名字，叫作**递归树**。我这里画了一棵斐波那契数列的递归树，你可以看看。节点里的数字表示数据的规模，一个节点的求解可以分解为左右子节点两个问题的求解。



通过这个例子，你对递归树的样子应该有个感性的认识了，看起来并不复杂。现在，我们就来看，**如何用递归树来求解时间复杂度**。

归并排序算法你还记得吧？它的递归实现代码非常简洁。现在我们就借助归并排序来看看，如何用递归树，来分析递归代码的时间复杂度。

归并排序的原理我就不详细介绍了，如果你忘记了，可以回看一下第 12 节的内容。归并排序每次会将数据规模一分为二。我们把归并排序画成递归树，就是下面这个样子：



因为每次分解都是一分为二，所以代价很低，我们把时间上的消耗记作常量 1。归并算法中比较耗时的是归并操作，也就是把两个子数组合并为大数组。从图中我们可以看出，每一层归并操作消耗的时间总和是一样的，跟要排序的数据规模有关。我们把每一层归并操作消耗的时间记作 n。

现在，我们只需要知道这棵树的高度 h，用高度 h 乘以每一层的时间消耗 n，就可以得到总的时间复杂度 O(n*h)。

从归并排序的原理和递归树，可以看出来，归并排序递归树是一棵满二叉树。我们前两节中讲到，满二叉树的高度大约是 log2n，所以，归并排序递归实现的时间复杂度就是 O(nlogn)。我这里的时间复杂度都是估算的，对树的高度的计算也没有那么精确，但是这并不影响复杂度的计算结果。

利用递归树的时间复杂度分析方法并不难理解，关键还是在实战，所以，接下来我会通过三个实际的递归算法，带你实战一下递归的复杂度分析。学完这节课之后，你应该能真正掌握递归代码的复杂度分析。

实战一：分析快速排序的时间复杂度

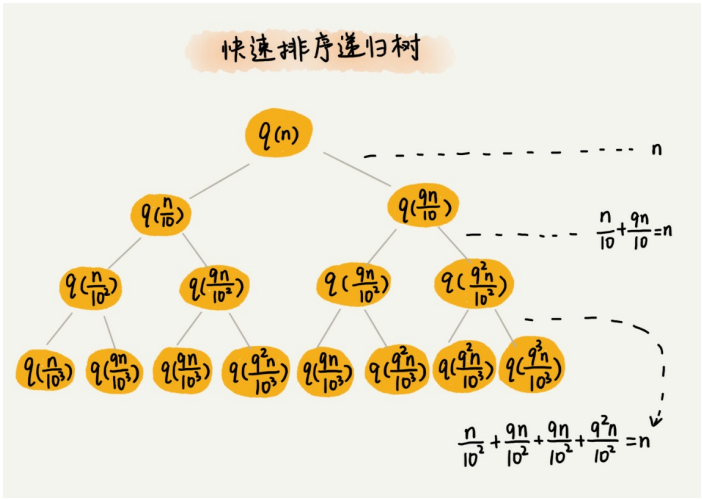
在用递归树推导之前，我们先来回忆一下用递推公式的分析方法。你可以回想一下，当时，我们为什么说用递推公式来求解平均时间复杂度非常复杂？

快速排序在最好情况下，每次分区都能一分为二，这个时候用递推公式 T(n)=2T(n2)+n，很容易就能推导出时间复杂度是 O(nlogn)。但是，我们并不可能每次分区都这么幸运，正好一分为二。

我们假设平均情况下，每次分区之后，两个分区的大小比例为 1:k。当 k=9 时，如果用递推公式的方法来求解时间复杂度的话，递推公式就写成 T(n)=T(n10)+T(9n10)+n。

这个公式可以推导出时间复杂度，但是推导过程非常复杂。那我们来看看，**用递归树来分析快速排序的平均情况时间复杂度，是不是比较简单呢？**

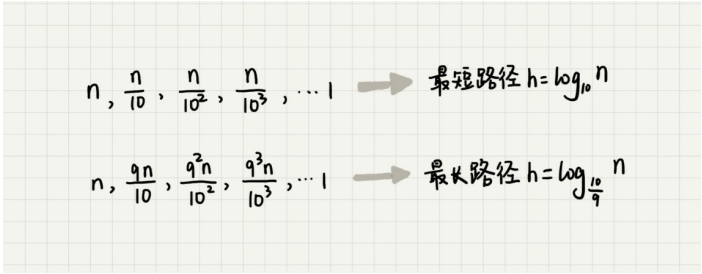
我们还是取 k 等于 9，也就是说，每次分区都很不平均，一个分区是另一个分区的 9 倍。如果我们把递归分解的过程画成递归树，就是下面这个样子：



快速排序的过程中，每次分区都要遍历待分区区间的所有数据，所以，每一层分区操作所遍历的数据的个数之和就是 n。我们现在只要求出递归树的高度 h，这个快排过程遍历的数据个数就是 h*n ，也就是说，时间复杂度就是 O(h*n)。

因为每次分区并不是均匀地一分为二，所以递归树并不是满二叉树。这样一个递归树的高度是多少呢？

我们知道，快速排序结束的条件就是待排序的小区间，大小为 1，也就是说叶子节点里的数据规模是 1。从根节点 n 到叶子节点 1，递归树中最短的一个路径每次都乘以 110，最长的一个路径每次都乘以 910。通过计算，我们可以得到，从根节点到叶子节点的最短路径是 log10n，最长的路径是 log109n。



所以，遍历数据的个数总和就介于 nlog10n 和 nlog109n 之间。根据复杂度的大 O 表示法，对数复杂度的底数不管是多少，我们统一写成 logn，所以，当分区大小比例是 1:9 时，快速排序的时间复杂度仍然是 O(nlogn)。

刚刚我们假设 k=9，那如果 k=99，也就是说，每次分区极其不平均，两个区间大小是 1:99，这个时候的时间复杂度是多少呢？

我们可以类比上面 k=9 的分析过程。当 k=99 的时候，树的最短路径就是 log100n，最长路径是 log10099n，所以总遍历数据个数介于 nlog100n 和 nlog10099n 之间。尽管底数变了，但是时间复杂度也仍然是 O(nlogn)。

也就是说，对于 k 等于 9，99，甚至是 999，9999……，只要 k 的值不随 n 变化，是一个事先确定的常量，那快排的时间复杂度就是 O(nlogn)。所以，从概率论的角度来说，快排的平均时间复杂度就是 O(nlogn)。

实战二：分析斐波那契数列的时间复杂度

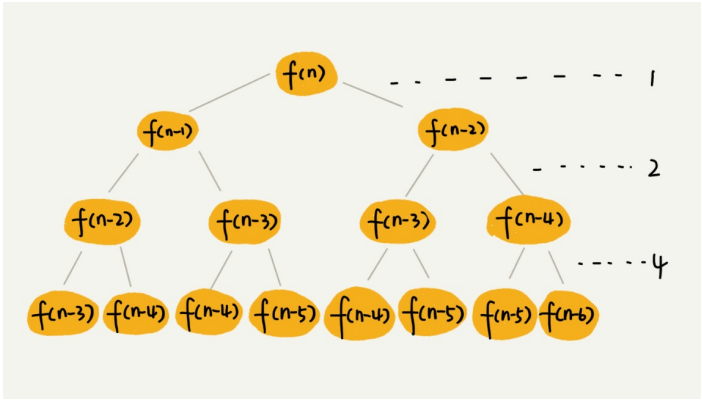
在递归那一节中，我们举了一个跨台阶的例子，你还记得吗？那个例子实际上就是一个斐波那契数列。为了方便你回忆，我把它的代码实现贴在这里。

```
int f(int n) {
if (n == 1) return 1;
if (n == 2) return 2;
return f(n-1) + f(n-2);
}
```

复制代码

这样一段代码的时间复杂度是多少呢？你可以先试着分析一下，然后再来看，我是怎么利用递归树来分析的。

我们先把上面的递归代码画成递归树，就是下面这个样子：

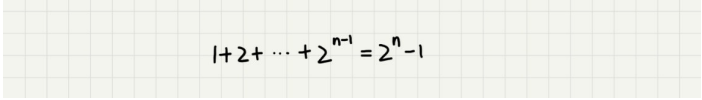


这棵递归树的高度是多少呢？

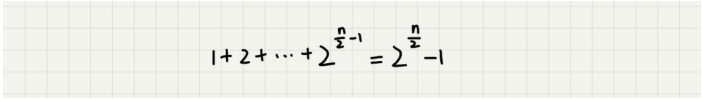
f(n) 分解为 f(n−1) 和 f(n−2)，每次数据规模都是 −1 或者 −2，叶子节点的数据规模是 1 或者 2。所以，从根节点走到叶子节点，每条路径是长短不一的。如果每次都是 −1，那最长路径大约就是 n；如果每次都是 −2，那最短路径大约就是 n2。

每次分解之后的合并操作只需要一次加法运算，我们把这次加法运算的时间消耗记作 1。所以，从上往下，第一层的总时间消耗是 1，第二层的总时间消耗是 2，第三层的总时间消耗就是 22。依次类推，第 k 层的时间消耗就是 2k−1，那整个算法的总的时间消耗就是每一层时间消耗之和。

如果路径长度都为 n，那这个总和就是 2n−1。



如果路径长度都是 n2 ，那整个算法的总的时间消耗就是 2n2−1。



所以，这个算法的时间复杂度就介于 O(2n) 和 O(2n2) 之间。虽然这样得到的结果还不够精确，只是一个范围，但是我们也基本上知道了上面算法的时间复杂度是指数级的，非常高。

实战三：分析全排列的时间复杂度

前面两个复杂度分析都比较简单，我们再来看个稍微复杂的。

我们在高中的时候都学过排列组合。“如何把 n 个数据的所有排列都找出来”，这就是全排列的问题。

我来举个例子。比如，1，2，3 这样 3 个数据，有下面这几种不同的排列：

```
1, 2, 3
1, 3, 2
2, 1, 3
2, 3, 1
3, 1, 2
3, 2, 1
```


如何编程打印一组数据的所有排列呢？这里就可以用递归来实现。

如果我们确定了最后一位数据，那就变成了求解剩下 n−1 个数据的排列问题。而最后一位数据可以是 n 个数据中的任意一个，因此它的取值就有 n 种情况。所以，“n 个数据的排列”问题，就可以分解成 n 个“n−1 个数据的排列”的子问题。

如果我们把它写成递推公式，就是下面这个样子：

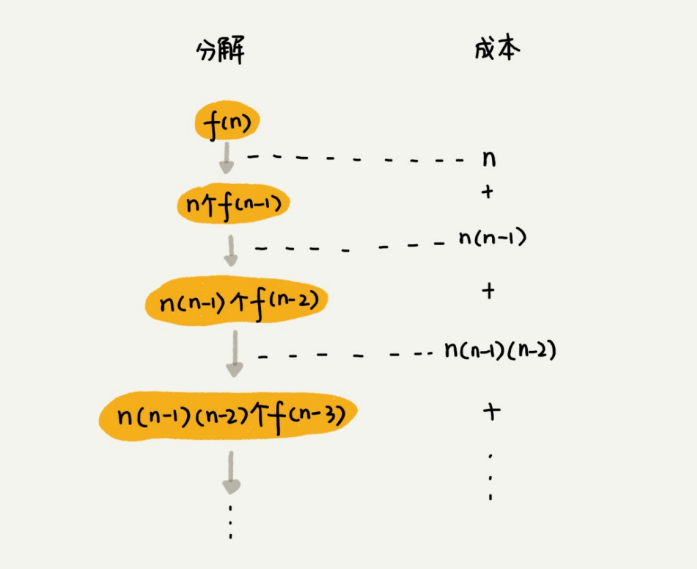
```
假设数组中存储的是 1，2， 3...n。

f(1,2,...n) = {最后一位是 1, f(n-1)} + {最后一位是 2, f(n-1)} +...+{最后一位是 n, f(n-1)}。
```


如果我们把递推公式改写成代码，就是下面这个样子：

```
// 调用方式：
// int[]a = a={1, 2, 3, 4}; printPermutations(a, 4, 4);
// k 表示要处理的子数组的数据个数
public void printPermutations(int[] data, int n, int k) {
if (k == 1) {
for (int i = 0; i < n; ++i) {
}
System.out.println();
}

for (int i = 0; i < k; ++i) {
int tmp = data[i];
data[i] = data[k-1];
data[k-1] = tmp;

printPermutations(data, n, k - 1);

tmp = data[i];
data[i] = data[k-1];
data[k-1] = tmp;
}
}
```


如果不用我前面讲的递归树分析方法，这个递归代码的时间复杂度会比较难分析。现在，我们来看下，如何借助递归树，轻松分析出这个代码的时间复杂度。

首先，我们还是画出递归树。不过，现在的递归树已经不是标准的二叉树了。



第一层分解有 n 次交换操作，第二层有 n 个节点，每个节点分解需要 n−1 次交换，所以第二层总的交换次数是 n∗(n−1)。第三层有 n∗(n−1) 个节点，每个节点分解需要 n−2 次交换，所以第三层总的交换次数是 n∗(n−1)∗(n−2)。

以此类推，第 k 层总的交换次数就是 n∗(n−1)∗(n−2)∗…∗(n−k+1)。最后一层的交换次数就是 n∗(n−1)∗(n−2)∗…∗2∗1。每一层的交换次数之和就是总的交换次数。

```
n + n*(n-1) + n*(n-1)*(n-2) +... + n*(n-1)*(n-2)*...*2*1
```


这个公式的求和比较复杂，我们看最后一个数，n∗(n−1)∗(n−2)∗…∗2∗1 等于 n!，而前面的 n−1 个数都小于最后一个数，所以，总和肯定小于 n∗n!，也就是说，全排列的递归算法的时间复杂度大于 O(n!)，小于 O(n∗n!)，虽然我们没法知道非常精确的时间复杂度，但是这样一个范围已经让我们知道，全排列的时间复杂度是非常高的。

这里我稍微说下，掌握分析的方法很重要，思路是重点，不要纠结于精确的时间复杂度到底是多少。

内容小结

今天，我们用递归树分析了递归代码的时间复杂度。加上我们在排序那一节讲到的递推公式的时间复杂度分析方法，我们现在已经学习了两种递归代码的时间复杂度分析方法了。

有些代码比较适合用递推公式来分析，比如归并排序的时间复杂度、快速排序的最好情况时间复杂度；有些比较适合采用递归树来分析，比如快速排序的平均时间复杂度。而有些可能两个都不怎么适合使用，比如二叉树的递归前中后序遍历。

时间复杂度分析的理论知识并不多，也不复杂，掌握起来也不难，但是，在我们平时的工作、学习中，面对的代码千差万别，能够灵活应用学到的复杂度分析方法，来分析现有的代码，并不是件简单的事情，所以，你平时要多实战、多分析，只有这样，面对任何代码的时间复杂度分析，你才能做到游刃有余、毫不畏惧。

课后思考

1 个细胞的生命周期是 3 小时，1 小时分裂一次。求 n 小时后，容器内有多少细胞？请你用已经学过的递归时间复杂度的分析方法，分析一下这个递归问题的时间复杂度。

欢迎留言和我分享，我会第一时间给你反馈。