

# Determinação da Viscosidade do Ar

Iago Braz Mendes, Hugo Danilo Santos Alkimim, Gabriel Oliveira Mota, e Marcos Aurélio Duarte Carvalho

## Resumo

Neste artigo, explora-se um arranjo experimental de um oscilador massa-mola para investigar a oscilação harmônica amortecida. A determinação da amplitude da oscilação como uma função temporal foi determinada precisa e economicamente, utilizando vídeos obtidos por meio de um celular, a ferramenta *Tracker – Video Analysis and Modeling Tool for Physics Education* – e algoritmos em *MATLAB*. Assim, foi possível determinar o coeficiente de amortecimento, que foi usado para encontrar a viscosidade do ar.

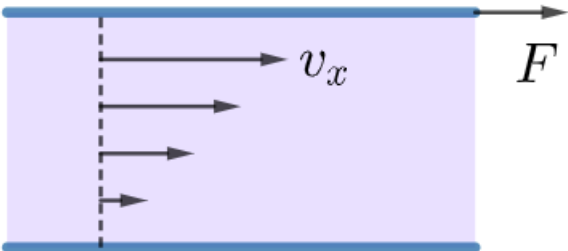
## 1. Introdução

A teoria acerca de sistemas oscilatórios amortecidos é aprofundada por alguns artigos [referência(s)]. Contudo, é comum encontrar discrepâncias entre as previsões e os resultados obtidos em laboratórios. Nesse sentido, este artigo apresenta um modelo experimental de fácil implementação para determinar a viscosidade do ar a partir de uma oscilação massa-mola amortecida. Com os dados coletados, fazemos 3 análises a fim de encontrar qual método mais se aproxima da realidade.

Na seção 2, a parte teórica sobre viscosidade e oscilações amortecidas é rapidamente exposta. Na seção 3, o modelo experimental usado para obter dados é explicado. Na seção 4, a análise de dados e seus resultados são discutidos, abrangendo 3 métodos distintos. Por fim, as conclusões são apresentadas na seção 5.

## 2. Teoria

Em primeira instância, viscosidade ( $\eta$ ) é a propriedade física que descreve a resistência de um fluido para escoar, que é geralmente expressa usando a Lei de Newton da Viscosidade:



$$\frac{F}{A} = \eta \frac{dv_x}{dy} \quad (1)$$

em que  $F$  é a força aplicada,  $A$  é a área em  $y$  e  $z$ , e  $\frac{dv_x}{dy}$  é a derivada espacial da velocidade. No

Sistema Internacional, a viscosidade possui *pascal-segundo* [ $Pa \cdot s$ ] como unidade de medida.

Além disso, quando estudamos a mecânica de fluidos, devemos sempre considerar o número de Reynolds, um coeficiente adimensional utilizado para o cálculo do regime de escoamento de um fluido sobre uma superfície. Esse coeficiente é dado por:

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta} \quad (2)$$

em que  $\rho$  é a densidade do fluido e  $l$  é a dimensão linear característica do objeto oscilante (para uma esfera,  $l = 2r$ , em que  $r$  é o raio).

Finalmente, quando analisamos oscilações harmônicas simples no mundo real, precisamos considerar a energia dissipada devido à força de atrito. Para pequenos números de Reynolds, a força de atrito na esfera é dada pela Lei de Stoke:

$$F = 6\pi r \eta v \quad (3)$$

Nesse caso, a equação do movimento para uma esfera com massa  $m$  e uma mola com constante elástica  $k$  é dada por

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4)$$

em que as constantes são dadas por

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \gamma = \frac{3\pi\eta r}{m} \quad (5)$$

Portanto, quando  $\omega_0 > \gamma$  (caso de sub-amortecimento), a solução é

$$x = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) \quad (6)$$

em que  $A$ ,  $\phi$  e  $\omega$  são, respectivamente, a amplitude, a fase, e a frequência da oscilação.

Contudo, quando os números de Reynolds não são pequenos, podemos usar a equação desenvolvida por Landau e Lifshitz:

$$F = 6\pi\eta r \left(1 + \frac{r}{\delta}\right) v + 3\pi r^2 \left(1 + \frac{2r}{9\delta}\right) \rho \delta \frac{dv}{dt} \quad (7)$$

em que  $\delta$  a profundidade de penetração dentro do fluido ao redor do objeto oscilante, que é dada por

$$\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\rho\omega}} \quad (8)$$

Quando resolvemos essa equação, encontramos uma solução análoga à anterior:

$$x = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) \quad (9)$$

Todavia, agora as constantes são determinadas por

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{k}{f_2 3\pi r^2 \left(1 + \frac{2r}{9\delta}\right) + m} \\ \gamma &= \frac{3\pi\eta r \left(1 + \frac{r}{\delta}\right)}{f_1 \left[f_2 3\pi r^2 \left(1 + \frac{2r}{9\delta}\right) \rho\delta + m\right]} \end{aligned} \quad (10)$$

em que  $f_1$  e  $f_2$  são coeficientes semi-empíricos.

Neste artigo, fazemos uso somente dos pontos máximos da oscilação (ou seja, das amplitudes). Com isso, a equação 9 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$A = A_0 e^{-\gamma t} \quad \therefore \quad \ln A = -\gamma t + \ln A_0 \quad (11)$$

em que  $A$  é a amplitude em função do tempo e  $A_0$  é a amplitude inicial.

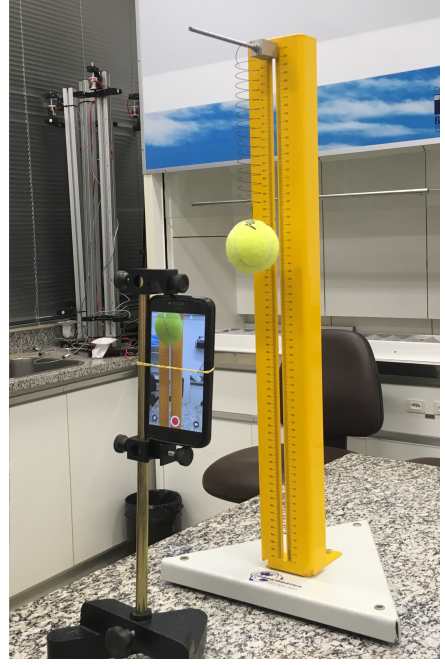
### 3. Experimento

A configuração experimental é simples e pode ser facilmente repetida. Ela consiste de uma bola com uma massa conhecida, uma mola, um suporte com uma escala de comprimento, um dispositivo para gravar a oscilação, um suporte para o dispositivo, e um cronômetro.

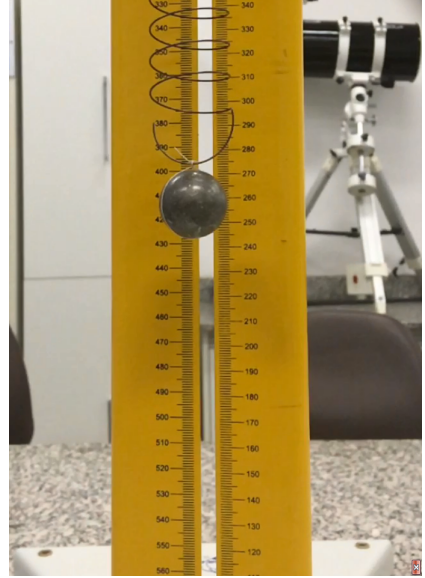
Inicialmente, fizemos o experimento usando uma bola de tênis (Figura 1) e filmamos toda a oscilação. Após analisar os dados dessa configuração, optamos por utilizar um objeto de estudo com menor rugosidade superficial, visando a adequar nosso experimento aos modelos matemáticos utilizados. Além disso, optamos por gravar trechos mais curtos, a fim de obter vídeos que representem a oscilação em cada minuto, facilitando a análise de dados.

Portanto, fizemos um segundo experimento usando uma bola de metal (Figura 2) e filmamos entre 5 e 10 segundos em intervalos de 1 minuto.

Por fim, uma terceira configuração foi estabelecida, em que o movimento amortecido de uma bola de metal (similar à Figura 2) foi gravado num período de 30 minutos sem interrupções.



**Figura 1:** Experimento com bola de tênis.



**Figura 2:** Experimento com bola de metal.

### 4. Análise de Dados

Com os dados da segunda configuração, fizemos duas análises para determinar o valor da viscosidade do ar: utilizando a maior amplitude de cada vídeo e fazendo a média aritmética das amplitudes atingidas em cada trecho.

No primeiro método, analisamos cada gravação – quadro a quadro –, com o auxílio de um editor de vídeo (Figura 3), para encontrar a maior amplitude atingida e o correspondente tempo no cronômetro em tela. Os dados coletados podem ser vistos na Figura 4. Usando a relação 11, temos que a constante  $\gamma \simeq 2.761 \cdot 10^{-3}$ . Com isso, a viscosidade foi calculada usando as constantes mostradas

na equação 5 e na equação 10, tendo como resultados – respectivamente –  $\#.\#.\#.\# \cdot 10^{-\#} Pa \cdot s$  e  $\#.\#.\#.\# \cdot 10^{-\#} Pa \cdot s$ .

No segundo método, usamos o programa *Tracker* – *video analysis and modelling tool* – para conseguir mais posições em cada vídeo e depois calcular a média aritmética das amplitudes atingidas nesse intervalo. Os dados coletados podem ser vistos na Figura 5. Usando a relação 11, temos que a constante  $\gamma \simeq 2.313 \cdot 10^{-3}$ . Com isso, a viscosidade foi calculada usando as constantes mostradas na equação 5 e na equação 10, tendo como resultados – respectivamente –  $\#.\#.\#.\# \cdot 10^{-\#} Pa \cdot s$  e  $\#.\#.\#.\# \cdot 10^{-\#} Pa \cdot s$ .

Além disso, com os dados da terceira configuração, um algoritmo escrito em MatLab (disponível [aqui](#)) foi utilizado para encontrar os máximos e, conseqüentemente, encontrar a constante  $\gamma \simeq 2.367 \cdot 10^{-4}$  (usando a relação 11). Os dados coletados podem ser vistos na Figura 6. Com isso, a viscosidade foi calculada usando as constantes mostradas na equação 5 e na equação 10, tendo como resultados – respectivamente –  $\#.\#.\#.\# \cdot 10^{-\#} Pa \cdot s$  e  $\#.\#.\#.\# \cdot 10^{-\#} Pa \cdot s$ .

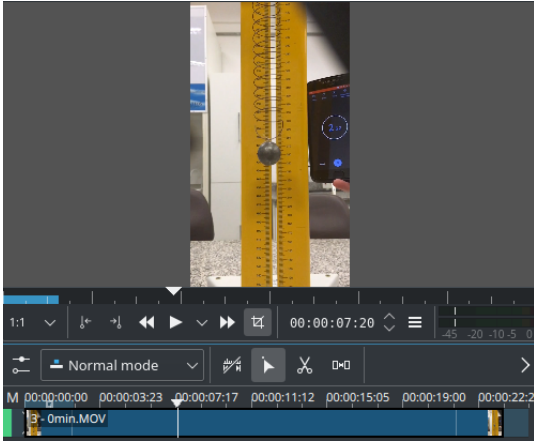


Figura 3: Análise da gravação quadro a quadro.

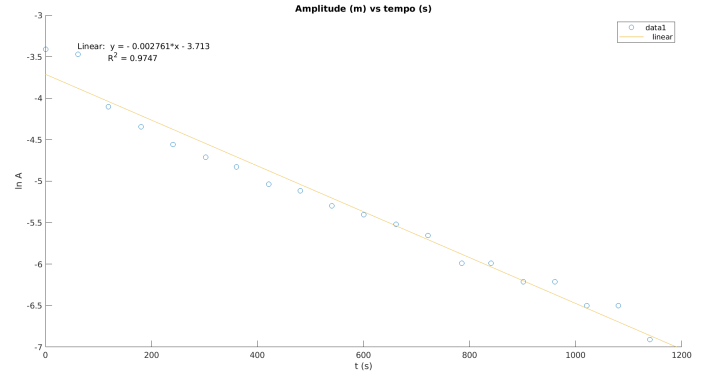


Figura 4: Gráfico com dados do primeiro método.

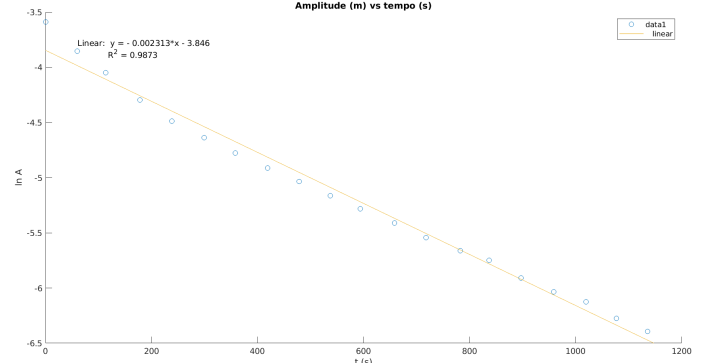


Figura 5: Gráfico com dados do segundo método.

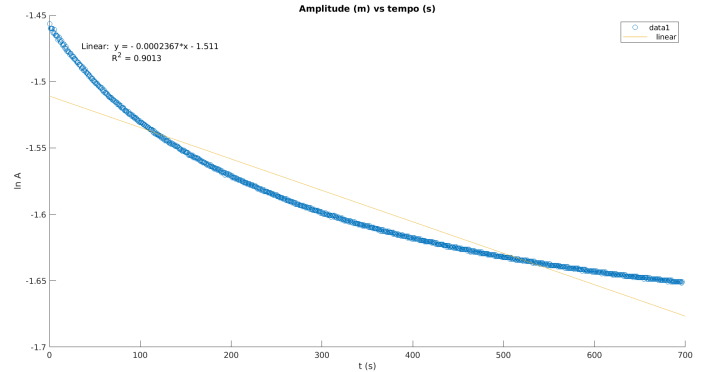


Figura 6: Gráfico com dados do terceiro método.

## 5. Conclusão

## 6. Referências