Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Taller de Matemática 2
Segundo semestre 2018
Catedrático: Hugo García
Guatemala, 3 de septiembre de 2018

TAREA 2

Instrucciones: Resuelva los siguiente problemas, deberá subir a la plataforma `elearning.hagarcia.com` tanto el pdf como el código LaTeX.

Problema 1

1. Sean a, b, c, d números reales positivos tales que $a + b + c + d = 4$. Demuestre que

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geq 2$$

5 puntos

Problema 2

Sean s y r el semiperímetro y el inradio de un triángulo respectivamente. Demuestre que $s \geq 3r\sqrt{3}$

5 puntos

Problema 3

Sean $x_i, i = 1, 2, \ldots, n$ números reales con el mismo signo, mayores que -1. Demuestre que

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Hint: Utilice inducción matemática sobre n **5 puntos**

Problema 4

Demuestre que para x, y números reales positivos $x^y + y^x \geq 1$

Hint: Hacer casos separados x o y es mayor o igual que 1 y $x, y < 1$ y usar Bernoulli notando que $x^y = (1 + (x - 1))^y$ **5 puntos**

Problema 5

Sean a, b, c números reales positivos. Demuestre que

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$$

5 puntos

Problema 6

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números enteros positivos todos distintos. Demuestre que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i^2} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

Hint: Considere una permutación en orden creciente de los números a_i y utilice la desigualdad de reacomodo.

5 puntos

Problema 7

Sean x, y, z números reales positivos. Demuestre que

$$\frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy} \geq x + y + z$$

5 puntos

Problema 8

Sean a, b, c números reales positivos tales que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$. Si el valor máximo que puede tomar la expresión $\sum_{ciclica} \frac{1}{(2a+b+c)^2}$ es de la forma $\frac{m}{n}$, donde m y n son primos relativos, encuentre el valor de $m + n$.

5 puntos

Problema 9

La sucesión de Fibonacci está definida por $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Demuestre que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{8}{2^6} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} < 2$$

5 puntos

Problema 10

Demuestre que

$$\frac{(a-b)^2}{8a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{(a-b)^2}{8b}$$

para $a \geq b > 0$

Hint: Para la cota inferior multiplique por $8a$ la desigualdad y haga álgebra hasta llegar a AM-GM. De manera similar puede construir la cota superior **5 puntos**

Problema 11

Sean a, b, c números reales no negativos tales que $a + b + c = 1$. Demuestre que

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq \frac{1}{4}$$

5 puntos

Problema 12

Halle las raíces r_1, r_2, r_3 y r_4 de la ecuación $4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0$ sabiendo que son reales positivas y que $\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1$

5 puntos

Problema 13

Para $x > 0$ y $y < 1$ demuestre que $x^y + y^x > 1$

5 puntos

Problema 14

Sean $x, y, z > 1$ tales que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Demuestre que $\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$

5 puntos

Problema 15

Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo ABC y sea h_a, h_b, h_c las longitudes de las alturas sobre A, B, C respectivamente. Demuestre que $\sum_{ciclica} \frac{a^2}{h_b h_c} \geq 4$

Hint: Nótese que $h_b = \frac{2(ABC)}{b}$ y sustituya en el lado izquierdo de la desigualdad para cada altura dada. **5 puntos**

Problema 16

Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo ABC y (ABC) su área. Demuestre que $4\sqrt{3}(ABC) \leq ab + bc + ca$

5 puntos

Problema 17

Sea $x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n}$ para $n \geq 1$. Demuestre que $\sqrt{n} \leq x_n \leq \sqrt{n} + 1$

Hint: Utilice inducción matemática sobre n **5 puntos**

Problema 18

Sea $x_i > 0, s = x_1 + \cdots + x_n$. Demuestre que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{s}{s - x_i} \geq \frac{n^2}{n-1}$$

Hint: Considere los términos de la forma $\frac{s-x_i}{s}$ **5 puntos**

Problema 19

Demuestre que

$$16 < \sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{k}} < 17$$

5 puntos

Problema 20

Encuentre el entero positivo m mas pequeño tal que

$$\binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}} < m$$

5 puntos