Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Taller de Matemática 1
Primer semestre 2019
Catedrático: Hugo García
Guatemala, 18 de febrero de 2019

TAREA 1

Instrucciones: Resuelva los siguiente problemas, deberá subir a la plataforma `elearning.hagarcia.com` tanto el pdf como el código LaTeX.

Problema 1

1. Dados cuatros puntos en el espacio, no todos en el mismo plano. ¿Cuántos planos se pueden dibujar que sean equidistantes a los cuatro puntos dados?

5 puntos

Problema 2

Dados 6 colores de pintura se debe pintar cada cara de un cubo con un color distinto. ¿De cuántas maneras distintas se puede realizar dicha coloración?
Nota: Dos coloraciones de un cubo son distintas si una se puede obtener de la otra bajo rotaciones del cubo

10 puntos

Problema 3

De cuántas maneras distintas se pueden color una torre blanca y una torre negra en un tablero de ajedrez de manera que se ataquen?

5 puntos

Problema 4

Sea A un conjunto, de tal manera que $|A| = n$. Calcule $|P(A)|$ (cardinalidad del conjunto potencia de A)

5 puntos

Problema 5

m hombres y n mujeres se desean formar en una fila para hacer una cola ($m, n \in \mathbb{N}$). Determine el número de formas de hacer esto para cada uno de los siguientes casos:

1. No hay restricciones
2. No hay hombres que sean adyacentes ($m \leq n+1$)
3. Las n mujeres forman un bloque
4. Un hombre y una mujer en particular deben estar adyacentes.

10 puntos

Problema 6

Encuentre el número de enteros impares entre 3000 y 8000 que no tienen dígitos repetidos.

5 puntos

Problema 7

Calcule el valor de $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i!$ donde $n \in \mathbb{N}$

5 puntos

Problema 8

Demuestre que el número de divisores positivos de $\underbrace{111\ldots11}_{1992}$ es par

5 puntos

Problema 9

Demuestre que ${}_{n+1}P_r = {}_nP_r + r \cdot {}_nP_{r-1}$

5 puntos

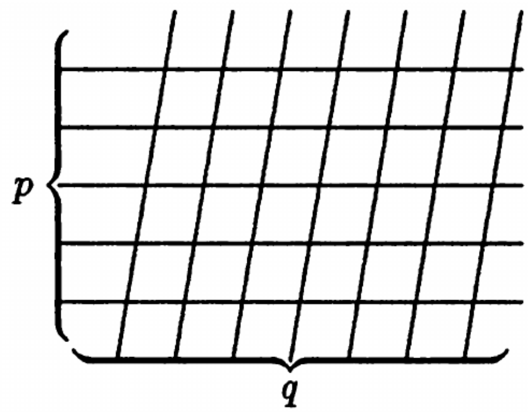
Problema 10

Demuestre que ${}_{n+1}P_r = r! + r({}_nP_{r-1} + {}_{n-1}P_{r-1} + \cdots + {}_rP_{r-1})$

5 puntos

Problema 11

Dos conjuntos de líneas paralelas de p x q rectas se muestran en la siguiente figura. Calcule el número de paralelogramos formados por esas rectas.



5 puntos

Problema 12

Sea $S = \{1, 2, 3, \ldots, n+1\}$ donde $n \geq 2$ y

$$T = \{(x, y, z) \in S^3 | x < z \quad \text{y} \quad y < z\}$$

. Demuestre que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = |T| = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$$

10 puntos

Problema 13

Se dibujan 15 puntos en el plano $P_1, \ldots, P_{15}$ de tal forma que P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 están en una recta pero aparte de ellos cualesquiera tres puntos forman necesariamente un triángulo (es decir no hay 3 puntos colineales aparte de P_1, P_2, P_3, P_4, P_5). Calcule:

- El número de lineas rectas que pasan por al menos 2 de los 15 puntos dados
- El número de triángulos cuyos vértices son 3 de los 15 puntos dados.

10 puntos

Problema 14

Sea $X = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$. Encuentre el número de subconjuntos de 2 elementos $\{a, b\}$ de X tal que el producto $a\dot{b}$ es divisible por 5.

5 puntos

Problema 15

6 niños y 5 niñas se desean sentar alrededor de una mesa rendonda. Calcule el número de formas de hacerlo para cada caso:

1. No hay restricciones
2. No pueden haber 2 niñas juntas
3. Todas las niñas están en un sólo bloque
4. Una niña en particular G está a la par de dos niños en particular B_1 y B_2

5 puntos

Problema 16

Demuestre que

$$\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$$

donde $n \geq m \geq r \geq 0$

5 puntos