/burl@stx null def /BU.S /burl@stx null def def /BU.SS currentpoint /burl@lly exch def /burl@llx exch def burl@stx null ne burl@endx burl@llx ne BU.FL BU.S if if burl@stx null eq burl@llx dup /burl@stx exch def /burl@endx exch def burl@lly dup /burl@boty exch def /burl@topy exch def if burl@lly burl@boty gt /burl@boty burl@lly def if def /BU.SE currentpoint /burl@ury exch def dup /burl@urx exch def /burl@endx exch def burl@ury burl@topy lt /burl@topy burl@ury def if def /BU.E BU.FL def /BU.FL burl@stx null ne BU.DF if def /BU.DF BU.BB [/H /I /Border [burl@border] /Color [burl@bordercolor] /Action ¡¡ /Subtype /URI /URI BU.L ¿¿ /Subtype /Link BU.B /ANN pdfmark /burl@stx null def def /BU.BB burl@stx HyperBorder sub /burl@stx exch def burl@endx HyperBorder add /burl@endx exch def burl@boty HyperBorder add /burl@boty exch def burl@topy HyperBorder sub /burl@topy exch def def /BU.B /Rect[burl@stx burl@boty burl@endx burl@topy] def /eop where begin /@ldeopburl /eop load def /eop SDict begin BU.FL end @ldeopburl def end /eop SDict begin BU.FL end def ifelse

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingenier Escuela de Ciencias

TEOR DE LOS GRUPOS-ANILLOS Y SUS APLICACIONES

Hugo Allan Garconterrosa

Asesorado por el Lic. William Roberto Gutiez Herrera

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIER

TITULO DE TU TESIS (identi.tex)

TRABAJO DE GRADUACI
PRESENTADO A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA
FACULTAD DE INGENIER
POR

HUGO ALLAN GARC MONTERROSA
ASESORADO POR EL Lic. WILLIAM ROBERTO GUTIERREZ HERRERA

AL CONFERSELE EL TULO
LICENCIADO EN MATEMTICA APLICADA

GUATEMALA, FECHA

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIER

NINA DE JUNTA DIRECTIVA

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
VOCAL I	Ing. Alfredo Enrique Beber Aceituno
VOCAL II	Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco
VOCAL III	Ing. Miguel Angel Dla Calder Br. Juan Carlos Molina Jimez VOCAL IV
VOCAL V	Br. Mario Maldonado Muralles
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pz

TRIBUNAL QUE PRACTICL EXAMEN GENERAL PRIVADO (Ver nomina.tex)

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
EXAMINADORA	Dra. Mayra Virginia Castillo Montes
EXAMINADOR	Lic. William Roberto Gutiez Herrera
EXAMINADOR	Lic. Francisco Bernardo Ral De La Rosa
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pz

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

Cumpliendo con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideraci trabajo de graduacitulado:

TEOR DE LOS GRUPO-ANILLOS Y SUS APLICACIONES

tema que me fuera asignado por la Coordinaci la Carrera de Licenciatura en Matemca Aplicada, el (Fecha).

Hugo Allan Garconterrosa

AGRADECIMIENTOS A:

Dios	Por permitirme culminar mis estudios de pregrado, brindando fortaleza y ayuda en todo momento.
Dedicatoria2	Ver agrade.tex.

ÍNDICE GENERAL

LISTA DE SÍMBOLOS III

RESUMEN V

OBJETIVOS VII

INTRODUCCIÓN IX

1. CONCEPTOS PRELIMINARES 1

- 1.1. Antecedentes . . . 1
- 1.2. Teoría de grupos . . . 1
- 1.3. Anillos, Módulos y Álgebras . . . 1

2. GRUPO-ANILLOS 3

- 2.1. Hechos Básicos De Los Grupo-Anillos . . . 3
- 2.2. Ideales de aumento . . . 11
- 2.3. Semisimplicidad . . . 16
- 2.4. Grupo-Algebras de grupos abelianos . . . 22

3. TEORÍA DE REPRESENTACIÓN DE GRUPOS 33

- 3.1. Definición y Ejemplos . . . 33
- 3.2. Representación y Módulos. . . . 46

CONCLUSIONES 47

RECOMENDACIONES 49

BIBLIOGRAFÍA 51

LISTA DE SBOLOS

Solo	Significado
$\cancel{x}^{n}$	cancelaci x al valor n
E^c	complemento de E
$\mathbb{C}$	conjunto de los nmeros complejos
$\mathbb{Z}$	conjunto de los nmeros enteros
$\mathbb{Z}^+$	conjunto de los nmeros enteros positivos
$\mathbb{R}$	conjunto de los nmeros reales
$\varnothing$	conjunto vac[3pt]
	∞
infinito	
$\ln$	logaritmo natural
(m, n)	mmo comn divisor entre m y n
$\frac{d^n}{dx^n}$	n-ma derivada respecto de x
$\notin$	no pertenencia
$\forall$	para todo
$\in$	pertenencia
$\frac{d}{dx}$	primera derivada respecto de x
$\prod$	productoria
$\Leftrightarrow$	si y si
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$	sucesi a_n
$\sum$	sumatoria
$\lvert \cdot \rvert$	valor absoluto
$[\cdot]\rvert_{x=m}$	valuaci expresin $x = m$

RESUMEN

Resumen de tesis (obje.tex)

OBJETIVOS

General

- Solo un objetivo general (obje.tex)

Especcos

1. Al menos un objetivo especco (obje.tex)

INTRODUCCI

Introducci la tesis (intr.tex)

1. CONCEPTOS PRELIMINARES

1.1. Antecedentes

1.2. Teore grupos

aquda la teore grupos que se tenga que desarrollar previo a comenzar propiamente la ts.

1.3. Anillos, Mos y lgebras

aqumbie tiene que escribir las definiciones, teoremas de morf y todo lo de semisimplicidad.

2. GRUPO-ANILLOS

2.1. Hechos Bcos De Los Grupo-Anillos

En este caplo se daras definiciones formales matemcas que dan paso al estudio de los grupo-anillos y se relacionar teore grupos y anillos con esta nueva estructura matemca.

Considse la siguiente construcciea G un grupo cualquiera y R un anillo cualquiera. Entonces se define $RG := \{\alpha | \alpha \colon G \to R, |sop(\alpha)| < \infty\}$ donde $sop(\alpha) := \{g \in G : \alpha(g) \neq 0\}$, a el conjunto $sop(\alpha)$ se le llama el soporte de α. Se puede observar entonces que los elementos de RG son funciones con soporte finito.

Como RG es un conjunto de funciones, se puede considerar la suma usual de funciones para definir la operacima en RG, a saber $+\colon RG \times RG \to R$ de tal forma que si $\alpha, \beta \in RG$ entonces $(\alpha + \beta)(g) := \alpha(g) + \beta(g)$ para todo g elemento de G . Similarmente se puede definir la operacioducto en RG como $\cdot\colon RG \times RG \to R$ de tal forma que si $u \in G$ $(\alpha \cdot \beta)(u) := \sum_{gh=u} \alpha(g)\beta(h)$. Con estas nociones en mente se procede a definir a un grupo-anillo.

Definici 1. *El conjunto RG con las operaciones $+$ y $\cdot$ mencionadas anteriormente es llamado el **grupo-anillo de G sobre R**. En el caso en que R es conmutativo a RG se le llama tambil **grupo-algebra de G sobre R***

Ahora se procede a mostrar dos teoremas que son bcos para el estudio de esta nueva estructura algebraica.

Teorema 1. *Existe una copia de G en RG, es decir, se puede encontrar $G_1 \subset RG$ tal que existe un homomorfismo entre G y G_1.*

Demostración. Considse la funci $: G \to RG$ tal que $x \mapsto \alpha$ donde $\alpha(x) = 1$ y $\alpha(g) = 0$ si $g \neq 0$. Con la identificaciterior es fl notar que i es una funciyectiva. En efecto, si

$x, y \in G$ entonces $i(x) = \alpha$, $i(y) = \beta$, pero $\alpha \neq \beta$ si $x \neq y$, por definicihora se probare i es un homomorfismo de grupos. Ne que $i(xy) = \gamma$, donde $\gamma(xy) = 1$ y $\gamma(g) = 0$ si $g \neq xy$. Por otro lado, $i(x)i(y) = \alpha\beta$ donde $(\alpha\beta)(u) = \sum_{gh=u} \alpha(g)\beta(h)$, pero el producto $\alpha(g)\beta(h)$ se anula a menos que $g = x$ y $h = y$, en cuyo caso la funcile 1, con lo que se ha demostrado que $i(x)i(y) = i(xy)$. □

Generalmente a i se le llama la funci inclusise ser forma en que se nombrar aqu adelante.

Teorema 2. *Existe una copia de R en RG.*

Demostración. Considse la funci : $R \to RG$ tal que $v(r) = \beta$ con $\beta(g) = r$ si $g = 1_G$ y $\beta(g) = 0$ si $g \neq 1_G$. Es claro que v es inyectiva y la demostraci exactamente igual que en el teorema anterior. Ahora falta probar que v es un homomorfismo de anillos (con la aclaracie el hecho que RG es un anillo se probars adelante). En efecto, $v(sr) = \theta$ donde $\theta(g) = sr$ si $g = 1_G$ y $\theta(g) = 0$ si $g \neq 1_G$. De manera similar se tiene que $v(s)v(r) = \gamma\beta$ donde $(\gamma\beta)(u) = \sum_{gh=u} \gamma(g)\beta(h)$ pero γ y β se anulan a menos que $g = h = 1_G$ y en ese caso $u = 1_G$, por lo que se ha probado que v es un homomorfismo de anillos. □

Con las identificaciones anteriores en mente es fl probar la siguiente propiedad.

Propiedad 1. *Si $g \in G$ y $r \in R$ entonces $rg = gr$ en RG.*

Demostración. Ne que $r = \gamma$ y $x = \alpha$ y usando la definicil producto en RG se ve que $rx = \gamma\alpha$ donde $(\gamma\alpha)(u) = \sum_{gh=u} \gamma(g)\alpha(h)$ pero por definici$y\alpha$ se anulan en todas partes excepto en $g = 1_G$ y $h = x$ respectivamente, por lo tanto $(\gamma\alpha)(u) = r$ cuando $u = x$ y $(\gamma\alpha)(u) = 0$ para $u \neq x$
Por otro lado $xr = \alpha\gamma$ dada por $(\alpha\gamma)(u) = \sum_{gh=u} \alpha(g)\gamma(h)$ de nuevo la funcilo existe cuando $g = x$ y $h = 1_G$ de esa forma $(\alpha\gamma)(u) = r$ cuando $u = x$ y se anula en cualquier otro caso, con la cual concluye la demostraci □

La definici grupo-anillo que se presenteriormente es bastante rigurosa y adems bien definida, ya que se ha construido un espacio vectorial de funciones en el cual todas las operaciones tienen sentido, lo cual le brinda el soporte necesario para trabajar en ebra. En algunas ocasiones resulta un poco tedioso y complicado estar trabajando sobre un espacio vectorial de funciones, ase se replantears grupo-anillos como R-*combinaciones lineales*, es decir, a cada elemento de RG se le asigna una combinacineal de elementos de G con coeficientes en R, de la siguiente manera

$$\alpha = \sum_{g \in G} a_g g \tag{2.1}$$

donde $a_g \in R$ y $a_g \neq 0$ si $g \in sop(\alpha)$

Nota 1. Con la identificaciterior se verifica que la suma de $\alpha, \beta \in RG$ es componente a componente, es decir $\alpha + \beta = \sum_{g \in G} a_g g + \sum_{g \in G} b_g g = \sum_{g \in G}(a_g + b_g)g$ y el producto estdo por $\alpha\beta = \sum_{g,h \in G} a_g b_h gh$

Ahora es prico establecer los siguientes teoremas:

Teorema 3. *RG es un grupo aditivo*

Demostración. Se procede por incisos:

i) Sean $\alpha, \beta, \gamma \in RG$ entonces $\alpha + (\beta + \gamma) = \sum_{g \in G} a_g g + \left(\sum_{g \in G} b_g g + \sum_{g \in G} c_g g\right) = \sum_{g \in G} a_g g + \left(\sum_{g \in G}(b_g + c_g)g\right) = \sum_{g \in G}(a_g + b_g + c_g)g = \sum_{g \in G}((a_g + b_g) + c_g)g = \left(\sum_{g \in G}(a_g + b_g)g\right) + \sum_{g \in G} c_g g = (\alpha + \beta) + \gamma$

ii) Existe $0 \in RG$ tal que $0 + \gamma = \gamma + 0 = \gamma$ para cualquier $\gamma \in RG$. A saber $0 = \sum_{g \in G} 0 \cdot g$. Con esta identificaci mente se procede a hacer los culos: $\alpha + 0 = \sum_{g \in G}(a_g + 0)g = \sum_{g \in G}(0 + a_g) = \sum_{g \in G} a_g g = \alpha$

iii) Existe $-\alpha$ tal que $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$ para cualquier $\alpha \in RG$. En efecto $-\alpha = \sum_{g \in G} -a_g g$ y por lo tanto $\alpha + (-\alpha) = \sum_{g \in G}(a_g + (-a_g))g = \sum_{g \in G}((-a_g) + a_g)g = \sum_{g \in G} 0 \cdot g = 0$

iv) $\alpha+\beta = \sum_{g\in G} a_g g + \sum_{g\in G} b_g g = \sum_{g\in G}(a_g+b_g)g = \sum_{g\in G}(b_g+a_g)g = \beta+\alpha$ $\square$

La clausura de la operaci$sesiguedirectamentedeladefinicialelapenanotarqueparar ealizarestapruebaseu$

Ne que se ha probado que $(RG,+)$ es un grupo abeliano, lo cual ser utilidad para el siguiente teorema:

Teorema 4. *RG es un anillo con las operaciones $+$ y $\cdot$*

Demostración. Ya se ha probado que $(RG,+)$ es un grupo abeliano, por lo que a continuaci probare nuevo por incisos, que $(RG,\cdot)$ es asociativo y distributivo tanto por la derecha como por la izquierda:

v) $\alpha(\beta\gamma) = \left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left[\left(\sum_{g\in G} b_g g\right)\left(\sum_{g\in G} c_g g\right)\right] = \left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left(\sum_{g,h\in G} b_g c_h gh\right) = \sum_{f,g,h\in G} a_f(b_g c_h)f(gh) = \sum_{f,g,h\in G}(a_f b_g)c_h(fg)h = (\alpha\beta)\gamma$

vi) $\alpha(\beta+\gamma) = \left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left(\sum_{g\in G} b_g g + \sum_{g\in G} c_g g\right) = \sum_{g\in G} a_g g\left(\sum_{g\in G}(b_g+c_g)\right) = \sum_{g,h\in G} a_g(b_h+c_h)gh = \sum_{g,h\in G} a_g b_h gh + \sum_{g,h\in G} a_g c_h gh = \alpha\beta+\alpha\gamma$

vii) $(\alpha+\beta)\gamma = \left(\sum_{g\in G}(a_g+b_g)g\right)\left(\sum_{g\in G} c_g g\right) = \sum_{g,h\in G}(a_g+b_g)c_h gh = \sum_{g,h\in G} a_g c_h gh + \sum_{g,h\in G} b_g c_h gh = \alpha\gamma+\beta\gamma$ $\square$

Es de interstudiar la estructura algebraica de RG, ase se introduce una operacis sobre RG

Definici 2. *Sea $\lambda \in R$ entonces se define el producto por elementos del anillo como:*

$$\lambda\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum_{g\in G} \lambda a_g g \tag{2.2}$$

Con esta definicidemos proclamar el siguiente teorema

Teorema 5. *RG es un R -mo*

Demostración. Ya se establecil teorema 3 que $(RG, +)$ es un grupo aditivo. De la definiciterior se sigue que $\lambda\gamma \in RG$. Ahora se procede por incisos:

i) $(\lambda_1 + \lambda_2)\alpha = \sum_{g\in G}(\lambda_1 + \lambda_2)a_g g = \sum_{g\in G} \lambda_1 a_g g + \sum_{g\in G} \lambda_2 a_g g = \lambda_1\alpha + \lambda_2\alpha$

ii) $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda \sum_{a_g+b_g} g = \sum g \in G\lambda(a_g + b_g)g = \sum_{g\in G} \lambda a_g g + \sum_{g\in G} \lambda b_g g = \lambda\alpha + \lambda\beta$

iii) $\lambda_1(\lambda_2\alpha) = \lambda_1 \sum_{g\in G} \lambda_2 a_g g = \sum_{g\in G}(\lambda_1(\lambda_2 a_g))g = \sum_{g\in G}((\lambda_1\lambda_2)a_g)g = \lambda_1\lambda_2\alpha$

iv) $1_R\alpha = \sum g \in G1_R a_g g = \sum_{g\in G} a_g g$

Y con esto concluye la prueba. $\square$

Una extensil resultado anteriormente presentado es que si R es un anillo conmutativo entonces RG es un ebra sobre R. Se puede resaltar que si R es conmutativo entonces el rango de RG como mo libre sobre R esten definido, de hecho si G es finito se tiene que $rango(RG) = |G|$

Ahora se establecer resultado de mucha importancia en los grupo-anillos, ya que relaciona a estos con los homomorfismos, que es uno de los objetivos del ebra.

Proposici 1. *Sea G un grupo y R un anillo. Dado cualquier anillo A tal que $R \subset A$ y cualquier funci : $G \to A$ tal que $f(gh) = f(g)f(h)$ para cualquier $g, h \in G$, existe un nico homomorfismo de anillos $f^*\colon RG \to A$, que es R-lineal, tal que $f^* \circ i = f$, donde i es la funci inclusio anterior se reduce a decir que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & A \\
RG \arrow[ur, dashed, "f^*"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Considse la funci$^*\colon RG \to A$ tal que $f^*(g) = \sum_{g\in G} a_g f(g)$. Ahora solo falta hacer los culos correspondiente para mostrar que f^* es un homomorfismo de anillos. En efecto, $f^*(\alpha+\beta) = \sum_{g\in G}(a_g+b_g)f(g) = \sum_{g\in G} a_g f(g)+\sum_{g\in G} b_g f(g) =$

$f^*(\alpha) + f^*(\beta)$.
Similarmente $f^*(\alpha\beta) = \sum_{g,h\in G} a_g b_h f(gh) = \sum_{g,h\in G} a_g b_h f(g)f(h) = f^*(\alpha)f^*(\beta)$. Ahora sea $r \in R$ entonces $f^*(r\alpha) = \sum_{g\in G} ra_g f(g) = r\sum_{g\in G} a_g f(g) = rf^*(\alpha)$ Sea $x \in G$ entonces $i(x) = \sum_{g\in G} a_g g$ donde $a_g = 1$ si $g = x$ y $a_g = 0$ en cualquier otro caso, por lo tanto $f^*(i(g)) = \sum_{g\in G} a_g f(g) = f(x)$. De los culos anteriores se sigue que $f^* \circ i = f$, con lo cual concluye la prueba. □

De la proposiciterior se deriva un corolario que no es mas que un caso especial de la misma, pero se establecerr aparte porque ser utilidad en el desarrollo de este trabajo de graduaci

Corolario 1. *Sea $f\colon G \to H$ un homomorfismo de grupos. Entonces, existe un nico homomorfismo de anillos $f^*\colon RG \to RH$ tal que $f^*(g) = f(g)$ para cualquier $g \in G$. Si R es conmutativo, entonces f^* es un homomorfismo de $R-$ ebras, mas an si f es un epimorfismo (monomorfismo), entonces f^* es tambin epimorfismo (monomorfismso)*

Demostración. Usar el teorema anterior con $A = RH$ lo anterior se puede hacer porque RH es un anillo que contiene a R y hay una copia de H en RH, con lo cual se deriva que debe existir f^* homomorfismo $R-$ lineal de anillos tal que $f^*(g) = f(g)$ para cualquier elemento $g \in G$. Con lo cual concluye la prueba. □

De hecho la proposici se puede utilizar como una definici RG, como se sigue de la siguiente proposici

Proposici 2. *Sea G un grupo y R un anillo. Sea X un anillo conteniendo R y $\nu\colon G \to X$ una funcil que $\nu(gh) = \nu(g)\nu(h)$ para todo $g, h \in G$ y tal que, para todo anillo A que contiene a R y cualquier funci $: G \to A$ que satisface $f(gh) = f(g)f(h)$ para todo $g, h \in G$, existe un nico homomorfismo R-lineal $f^*\colon X \to A$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\nu"'] & A \\ X \arrow[ur, dashed, "f^*"'] & \end{tikzcd}$$

Entonces $X \simeq RG$

Demostración. La demostraci tan simple como notar que el siguiente diagrama conmuta con I_X

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[ddr, dashed, "I_X"] & \\
 & RG \arrow[u, dashed, "i*"'] \arrow[dr, dashed, "\nu^*"'] & \\
G \arrow[uur, "\nu"] \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "\nu"] & & X
\end{tikzcd}$$

□

Nota 2. Si en el corolario 6 se hace $H = \{1\}$ y se considera la funci : $G \to \{1\}$ entonces esta funciduce un homomorfismo de anillos $\epsilon\colon RG \to R$ tal que $\epsilon\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum_{g\in G} a(g)$.

Definici 3. *El homomorfismo $\epsilon\colon RG \to R$ dado por*

$$\epsilon\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum_{g\in G} a_g$$

es llamado la ***funci aumento de RG*** *y su ncleo, denotado por $\Delta(G)$, es llamado el* ***el ideal de aumento*** *de RG*

Ahora se puede decir algunas propiedades importantes del ideal de aumento de RG. Ne que si un elemento $\alpha = \sum_{g\in G} a_g g$ pertenece al ideal de aumento entonces $\epsilon\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum_{g\in G} a_g = 0$ por lo tanto se puede escribir α de la siguiente forma:

$$\alpha = \sum_{g\in G} a_g g - \sum_{g\in G} a_g = \sum_{g\in G} a_g(g-1)$$

Por lo tanto es claro que cualquier elemento de la forma $g-1, g \in G$ pertenece a $\Delta(G)$, mas an se acaba de probar que el conjunto $\{g-1 : g \in G, g \neq 1\}$ es un conjunto de generadores del ideal de aumento de RG. Por otro lado, de la definici RG se sigue que el conjunto anterior en linealmente independiente, con lo cual se ha probado la siguiente proposici

Proposici 3. *El conjunto* $\{g-1 : g \in G, g \neq 1\}$ *es base de* $\Delta(G)$ *sobre* R. *Es decir, se puede escribir*

$$\Delta(G) = \left\{ \sum_{g \in G} a_g(g-1) : g \in G, g \neq 1, a_g \in R \right\}$$

donde, como es usual, se debe asumir que solo un nmero finito de los coeficientes a_g *son distintos de cero.*

Ne que, en particular, si R es conmutativo y G es finito, entonces $\Delta(G)$ es un mo libre sobre R con rango $|G|-1$

Se concluye esta seccistrando que el grupo-anillo RG donde R es conmutativo es un anillo con **involuci**

Proposici 4. *Sea* R *un anillo conmutativo. La funci* : $RG \to RG$ *definida por*

$$\left(\sum_{g \in G} a(g)g \right)^* = \sum_{g \in G} a(g)g^{-1} \tag{2.3}$$

satisface:

(i) $(\alpha+\beta)^* = \alpha^* + \beta^*$

(ii) $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$

(iii) $\alpha^* = \alpha$

Demostración. Se procede por incisos:

(i) $\left(\sum_{g\in G}(a_g+b_g)g\right)^* = \sum_{g\in G}(a_g+b_g)g^{-1} = \alpha^*+\beta^*$

(ii) $\left(\sum_{g,h\in G}(a_g b_h)gh\right)^* = \sum_{g,h\in G} a_g b_h h^{-1}g^{-1} = \sum_{g,h\in G} b_h a_g h^{-1} g^{-1} = \beta^*\alpha^*$

(iii) $\left(\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)^*\right)^* = \left(\sum_{g\in G} a_g g^{-1}\right)^* = \sum_{g\in G} a_g g$ $\square$

2.2. Ideales de aumento

En lo que sigue es de mucho interncontrar condiciones de R y G que permitan descomponer a RG como sumas directas de ciertos subanillos. Ser especial interonocer cuando RG es un anillo semisimple para asder escribirlo como sumas directas de ideales minimales.

Con este fin se har estudio de la relacie hay entre los subgrupos de G y los ideales de RG. Estlacindrcho utilidad cuando se trate con problemas concernientes a la estructura y propiedades de RG. Estas relaciones aparecieron por primera vez en un artlo publicado por A. Jennings (dar cita) y, en la forma que se presentar este trabajo, en el trabajo hecho por W. E. Deskins (dar cita). La idea de aplicarlo por primera vez en el estudio de la reducibilidad completa (como se har la siguiente secciue de I.G. Connell (dar cita).

Ya en materia de hecho, considse el grupo G y el anillo R, se denotarn $\mathcal{S}(G)$ el conjunto de todos los subgrupos de G y con $\mathcal{I}(RG)$ el conjunto de los ideales por izquierda de RG.

Definici 4. *Para un subgrupo $H \in \mathcal{S}(G)$ se denota por $\Delta_R(G,H)$ el anillo por izquierda de RG generado por el conjunto $\{h-1 : h \in H\}$. Esto es,*

$$\Delta_R(G,H) = \left\{ \sum_{h \in H} \alpha_h (h-1) : \alpha_h \in RG \right\} \tag{2.4}$$

Cuando se estabajando con un anillo fijo R se omitir subind y por lo tanto al ideal anterior se le denotarmplemente como $\Delta(G,H)$. Ne que el ideal $\Delta(G,G)$ coincide con $\Delta(G)$, del cual se habla secciterior.

Lema 1. *Sea H un subgrupo de un grupo G y sea S el conjunto de los generadores de H. Entonces, el conjunto $\{s-1 : s \in S\}$ es un conjunto de generadores de $\Delta(G,H)$ como ideal por izquierda de RG*

Demostración. Como S es un conjunto de generadores de H, cada elemento $1 \neq h \in$

H puede ser escrito en la forma $h = s_1^{\epsilon_1} s_2^{\epsilon_2} \cdot s_r^{\epsilon_r}$ donde $s_i \in S$ y $\epsilon_i = \pm 1$, $1 \leq i \leq r$. Por lo tanto es suficiente probar que todo elemento de la forma $h - 1$ con $h \in H$ pertenece al ideal generado por $\{s - 1 : s \in S\}$. Para hacer esto se procede por induccitemca sobre r.

Caso Base: Ne que el menor caso sucede en $r = 2$. Por lo tanto sea $h \in H$ entonces $h - 1 = s_1^{\epsilon_1} s_2^{\epsilon_2} = s_1^{\epsilon_1}(s_2^{\epsilon_2} - 1) + (s_1^{\epsilon_1} - 1) \in (S)$ donde (S) es el ideal generado por $\{s - 1 : s \in S\}$

Hipis de Inducci Supse que cualquier expresi la forma $(s_1^{\epsilon_1} s_2^{\epsilon_2} \cdots s_k^{\epsilon_k} - 1) \in (S)$

Conclusi Considse la expresi la forma $(s_1^{\epsilon_1} s_2^{\epsilon_2} \cdots s_k^{\epsilon_k} s_{k+1}^{\epsilon_{k+1}} - 1)$, hse la sustituci = s$_1^{\epsilon_1} s_2^{\epsilon_2} \cdots s_k^{\epsilon_k}$ entonces $(s_1^{\epsilon_1} s_2^{\epsilon_2} \cdots s_k^{\epsilon_k} s_{k+1}^{\epsilon_{k+1}} - 1) = x s_{k+1}^{\epsilon_{k+1}} - 1 = x(s_{k+1}^{\epsilon_{k+1}} - 1) + (x - 1) \in (S)$ ya que $x - 1, x(s_{k+1}^{\epsilon_{k+1}} - 1) \in (S)$ por la hipis de inducci la prueba estsi completa, sola falta decir que si apareciera algn $\epsilon_i = -1$ se aplica la factorizaci$^{-1} - 1 = y^{-1}(1 - y)$ y el problema estsuelto. □

Para dar un mejor caracterizaci $\Delta_R(G, H)$, dene con $\mathcal{T} = \{q_i\}_{i \in I}$ un conjunto completo de representantes de clases izquierdas de H en G, un *transversal* de H en G. Se asumire siempre se elige como representante de la clase H en $\mathcal{T}$ a la unidad de G. De esa manera todo elemento $g \in G$ puede ser escrito de manera nica en la forma $g = q_i h_j$ con $q_i \in \mathcal{T}$ y $h_j \in H$

Proposici 5. *El conjunto* $B_H = \{q(h - 1) : q \in \mathcal{T}, h \in H, h \neq 1\}$ *es una base de* $\Delta_R(G, H)$ *sobre* R.

Demostración. Se procede en dos partes, primero se debe probar que el conjunto dado es linealmente independiente y luego que tambis un generador de $\Delta_R(G, H)$.

Independecia Lineal Supse que se tiene una combinacineal de elementos de B_H que se anula, esto es $\sum_{i,j} r_{ij} q_i (h_j - 1) = 0$ con $r_{ij} \in R$. De lo anterior se sigue que $\sum_{i,j} r_{ij}q_i(h_j) - \sum_{i,j} r_{ij}q_i = 0$ por lo tanto $\sum_{i,j} r_{ij}q_i(h_j) = \sum_{i,j} r_{ij}q_i$ lo cual se puede rescribir como $\sum_{i,j} r_{ij}q_ih_j = \sum_i \left(\sum_j r_{ij}q_i\right)$. En la igualdad anterior se puede observar que como $h_j \neq 1$ entonces necesariamente el lado izquierdo de la ecuacienen distinto soporto que el lado derecho, por lo tanto ambos deben ser igual a cero, pero los elementos de G son linealmente independientes sobre R entonces $r_{ij} = 0$ para todo i, j.

Generador Se debe probar que B_H es generador de $\Delta_R(G, H)$ para esto es suficiente demostrar que $g(h-1)$ se puede expresar como combinacineal de elemtos de B_H. Para esto basta recordar que $g = q_ih_j$ para algn $q_i \in \mathcal{T}$ y $h_j \in H$ entonces $g(h-1) = q_ih_j(h-1) = q_i(h_jh-1) + (q_i - 1)$ con lo que se demuestra lo que se ped □

Nota 3. Es claro que si $G = H$ en la proposiciterior entonces $\mathcal{T} = \{1\}$ y por lo tanto $B_H = \{(h-1, h \in H, h \neq 1)\}$ y asto se reduce a la proposici

Ahora se explorar opciual cuando se estblando de subgrupos, es decir, los subgrupos normales. De hecho, si $H \triangleleft G$ entonces el homomorfismo cano $\omega : G \to G/H$ puede ser extendido a un epimorfismo, a saber

$$\omega* : RG \to R(G/H)$$

tal que

$$\omega^*\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum_{g\in G} a_g\omega(g)$$

Proposici 6. *Con la notaciterior*

$$Ker(\omega^*) = \Delta(G, H)$$

Demostración. Considse de nuevo $\mathcal{T}$ el transversal de H en G. Entonces, cada elemento $\alpha \in RG$ se puede escribir como $\alpha = \sum i, jr_{ij}q_ih_j$, $r_{ij} \in R$, $q_i \in \mathcal{T}$, $h_i \in H$. Si se denota $\overline{q_i} = \omega(q_i)$ entonces se tiene

$$\omega^*(\alpha) = \sum_i \left(\sum_j r_{ij}\right) \overline{q_i}$$

Entonces, $\alpha \in Ker(\omega^*)$ si y si $\sum_j r_{ij} = 0$ para cada calor de i. Entonces si se tiene un $\alpha \in Ker(w^*)$ se puede escribir

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_i \left(\sum_j r_{ij}\right) \overline{q_i} && (2.5) \\ &= \sum_{ij} r_{ij} q_i (h_j - 1) \in \Delta(G, H) && (2.6) \end{aligned}$$

Con lo cual se tiene que $Ker(\omega^*) \subset \Delta(G, H)$. El hecho que $\Delta(G, H) \subset Ker(\omega^*)$ es trivial, por lo tanto $Ker(\omega^*) = \Delta(G, H)$ □

Corolario 2. *Sea H un subgrupo normal de G. Entonces $\Delta(G, H)$ es un ideal bilateral de RG y*

$$\frac{RG}{\Delta(G, H)} \simeq R(G/H)$$

Demostración. Como $Ker(\omega^*) = \Delta(G, H)$ entonces por el primer teorema de ismorfia $\frac{RG}{\Delta(G,H)} \simeq Im(\omega^*)$ pero como ω^* es sobreyectiva entonces $Im(\omega^*) = R(G/H)$ con lo que concluye la prueba. □

Hasta este punto se ha visto que hay una relacitre subgrupos normales de G e ideales bilaterales de RG, es decir, se pueden construir funciones de (S) a $\mathcal{I}(RG)$. La pregunta es entonces, Qusa con las funciones en la otra v. Para responder esa pregunta considse

$$\nabla(I) = \{g \in G \colon g - 1 \in I\}$$

Es fl notar que $\nabla(I) = G \cap (1 + I)$

Lema 2. $\nabla(I)$ *es subgrupo de* G

Demostración. Se debe probar dos cosas:

(i) Sean $g_1, g_2 \in \nabla(I)$ entonces

$$g_1g_2 - 1 = g_1(g_2 - 1) + (g_2 - 1) \in I$$

por lo tanto $g_1g_2 \in \nabla(I)$

(ii) Si $g\$in\nabla(I)$ entonces $g^{-1} - 1 = g^{-1}(1 - g) \in I$ de donde se sigue que $g^{-1} \in \nabla(I)$ $\square$

Lema 3. *Si* I *es un ideal bilateral entonces* $\nabla(I) \lhd G$

Demostración. Se quiere probar que $gig^{-1} \in \nabla(I)$ entonces todo se reduce a demostrar que $gig^{-1} - 1 \in I$. Ne que $gig^{-1} - 1 = gi(g^{-1} - 1) + (gi - 1)$ como I es ideal bilateral, entonces $gi(g^{-1} - 1) \in I$ y $(g_i - 1) \in I$ por lo tanto $gig^{-1} \in I$. $\square$

Proposici 7. *Si* $H \in (S)(G)$ *entonces* $\nabla(\Delta(G, H)) = H$

Demostración. Sea $1 \neq x \in \nabla(\Delta(G, H))$ entonces $x - 1 \in \Delta(G, H)$ por lo tanto se puede escribir

$$x - 1 = \sum_{i,j} r_{ij}q_i(h_j - 1)$$

Como 1 aparece en el lado izquierdo de la ecuacimbiebe aparecer en el lado derecho, por lo tanto alguno de los q_i debe ser $q_1 = 1$ por lo tanto hay en tino de la forma $r_{1j}(h_j - 1)$. Ne que todos los elementos de G del lado derecho de la ecuacin distintos a pares pero x debe aparecer allor lo tanto $x = h_j$. De lo anterior es inmediato que $\nabla(\Delta(G, H)) \subset H$. La otra contenci trivial. $\square$

Segn lo expuesto en la proposiciterior pareciera ser cierto que ∇ y $\Delta/$ son funciones inversas la una de la otra, pero esto no es cierto. Si se toma un ideal

$I \in (I)(RG)$ entonces Qusa con $\Delta(G, \nabla(I))$? Pues bien, sea $x \in \Delta(G, \nabla(I))$ entonces $x = \sum_{i,j} r_{ij} q_i (m_j - 1)$, $m_j \in \nabla(I)$ por lo tanto $m_j - 1 \in I$ y de alli que $x \in I$. Con eso se ha probado que $\Delta(G, \nabla(I)) \subset I$, pero la igualdad no es necesariamente cierta. Considse $I = RG$ entonces $\nabla(RG) = G$ de donde $\Delta(G, \nabla(RG)) = \Delta G \neq RG$

2.3. Semisimplicidad

Con lo visto en la anterior secciora es accesible determinar condiciones necesarias y suficientes de R y G para que RG sea semisimple. Pero antes se probarlgunos resultados ticos acerca de aniquiladores.

Definici 5. *Sea X un subconjunto de RG. El aniquilador de X por la izquierda es el conjunto*

$$Ann_i(X) = \{\alpha \in RG : \alpha x = 0, \forall x \in X\}$$

y de manera anga el aniquilador de X por la derecha es el conjunto

$$Ann_d(X) = \{\alpha \in RG : x\alpha = 0, \forall x \in X\}$$

Definici 6. *Dado un grupo-anillo RG y un subconjunto finito X del grupo G, se denotarr $\hat{X}$ los siguientes elementos de RG*

$$\hat{X} = \sum_{x \in X} x$$

Lema 4. *Sea H un subgrupo de G y sea R un anillo.Entonces $Ann_d(\Delta(G, H)) \neq \{0\}$ si y si H es finito. En ese caso, se tiene*

$$Ann_d(\Delta(G, H)) = \hat{H} \cdot RG$$

Mas an, si $H \lhd G$ entonces $\hat{H}$ es central en RG y

$$Ann_d(\Delta(G, H)) = Ann_i(\Delta(G, H)) = RG \cdot \hat{H}$$

Demostración. Supse que $Ann_d(\Delta(G, H)) = \{0\}$ y considse $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g \in RG$,

$\alpha \in Ann_d(\Delta(G, H))$ entonces

$$\begin{aligned} (h-1)\alpha &= 0 \quad \text{para cada } h \in H & (2.7)\\ h\alpha - \alpha &= 0 & (2.8)\\ \sum_{g\in G} a_g a h &= \sum_{g\in G} a_g g & (2.9) \end{aligned}$$

De la ltima ecuaci aprecia que $hg \in sop(\alpha)$ siempre y cuando $g \in sop(\alpha)$, pero $sop(\alpha)$ es finito, por tanto H es finito. De nuevo analizando la ecuaci se deduce que dado $g_0 \in sop(\alpha)$ entonces $hg_o \in sop(\alpha)$ para cualquier h elemento de H. De alle se de la siguiente igualdad:

$$\alpha = a_{g_0}\hat{H}g_0 + \cdots + a_{g_t}\hat{H}g_t = \hat{H}\beta, \quad \beta \in RG$$

Lo anterior muestra que si H es finito entonces $Ann_d(\Delta(G, H)) \subset \hat{H}RG$. Por otro lado $h\hat{H} = \hat{H}$ ya que H es finito, entonces $h\hat{H} - \hat{H} = 0$ y por consiguiente $(h-1)\hat{H} = 0$ de donde $\hat{H}RG \subset Ann_d(\Delta(G, H))$

Por ltimo si $H \lhd G$ entonces para todo g elemento de G se cumple que $gHg^{-1} = H$ de donde $g\hat{H}g^{-1} = \hat{H}$ de donde se concluye inmediatamente que $\hat{H}g = g\hat{H}$ lo cual prueba que $\hat{H}$ es central en RG y de alli se sigue flmente la conclusi □

Del lema anterior se sigue el siguiente corolario.

Corolario 3. *Sea G un grupo finito. Entonces*

(i) $Ann_i(\Delta(G)) = Ann_d(\Delta(G)) = R \cdot \hat{H}$

(ii) $Ann_d(\Delta(G)) \cap \Delta(G) = \{a\hat{G} : a \in R, a|G| = 0\}$

Demostración. Se procede por incisos

(i) Ya se ha establecido que $\Delta(G, G) = G$, por lo tanto hse $H = G$ en el teorema anterior y el resultado es inmediato.

(ii) Sea $x \in Ann_d(\Delta G) \cap \Delta G$ entonces $x = a\sum_{g\in G} g$ y ademx $\in Ker(\omega^*)$ por tanto $Ker(x) = a\omega^*\hat{G} = a|G| = 0$ □

Lema 5. *Sea I un ideal bilateral de R. Supse que existe un ideal por la izquierda J tal que $R = I \oplus J$ (como $R-$ mos). Entonces $J \subset Ann_d(I)$*

Demostración. Sea $x \in J$ y $y \in I$ entonces $yx \in J$, $yx \in I$ entonces $yx \in J \cap I$ por lo tanto $yx = 0$ de donde $x \in Ann_d(I)$ y por consiguiente $J \subset Ann_d(J)$ □

Lema 6. *Si el ideal de aumento de RG es un sumando directo de RG como un $RG-$mo entonces G es finito y $|G|$ es invertible en R*

Demostración. Las condiciones anteriores aseguran que existe J como en el lema anterior tal que $RG = \Delta G \oplus J$ de donde $J \subset \Delta G$ y por tanto $\Delta G \neq \{0\}$, con lo cual G es necesariamente finito. Por otra parte $1 \in RG$ entonces $1 = e_1 + e_2$ donde $e_1 \in \Delta G$ y $e_2 = a\hat{G}$, de lo cual se sigue que $\epsilon(1) = 1 = \epsilon(e_1) + \epsilon(e_2)$ pero $\epsilon(e_1) = 0$ por ser ΔG el ncleo de ϵ por ende se tiene $a|G| = 1$ con lo que se ha mostrado lo pedido. □

Ahora se est disposici determinar condiciones necesarias y suficientes en R y G para que el grupo-anillo RG sea semisimple. Los primeros resultados que apuntaron en esta direccieron dados por Maschkes, logros que estlasmados en el siguiente teorema:

Teorema 6 (Maschke)**.** *Sea G un grupo. Entonces, el grupo-anillo RG es semisimple si y si las siguientes condiciones son verdaderas:*

(i) R es un anillo semisimple

(ii) G es finito

(iii) $|G|$ es invertible en R

Demostración. Se procederrobar las implicaciones en ambos sentidos:

- En esta parte se asume que RG es semisimple, por lo tanto se puede utilizar el hecho que $\frac{RG}{\Delta(G)} = R$. De lo anterior se deduce que R es un cociente y ya se ha demostrado que los cocientes son simples. Por otro lado se sabe que $\Delta(G)$ es un ideal y de la semisimplicidad de RG se sabe que $\Delta(G)$ es sumando directo y del lema 6 se asegura que las condiciones (ii) y (iii) se satisfacen.

- Para mostrar la segunda implicacismase que (i), (ii) y (iii) son verdaderas. De (i) se sigue que RG es semisimple como $R - modulo$. [1] Considse M como $RG - modulo$, tal que $M \in RG$, entonces existe N como R-modulo tal que

$$RG = M \oplus N$$

Sea $\pi RG \to M$ la proyeccina asociada con la suma directa. Se define $\pi^* \colon RG \to M$ tal que:

$$x \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \pi(gx) \quad \text{para cada } x \in RG$$

Es claro que dicha funciiste, ya que G es finito por (ii) y es $\frac{1}{|G|} < \infty$ por (iii). Se desea probar que π^* es un RG - homomorfismo tal que $(\pi^*)^2 = \pi^*$ y $M = Im(\pi^*)$, lo cual se muestra en dos partes a continuaci

Homomorfismo:
Basta demostrar que $\pi^*(ax) = a\pi^*(x)$ para cada $a, g \in G$, ya que π^* ya es un R - homomorfismo. En efecto $\pi^*(ax) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \pi(gax) = \frac{a}{|G|} \sum_{g \in G} (ga)^{-1} \pi((ga)x)$.

Ahora se tiene que $ga \in G$, por ser G un grupo, por lo tanto cuando g recorre todo G el producto ga tambio hara que a es un elemento dado fijo. Por lo tanto la ltima expresi puede volver a escribir como:

$$\pi^*(ax) = \frac{a}{|G|} \sum_{t \in G} t^{-1} \pi(tx) = a\pi^*(x)$$

Sobreyectiva y Composici
Ne que $gm \in M$ ya que M es un RG - modulo, ase $\pi(gm) = gm$ y por lo tanto

[1] Recordar que esto es por una propiedad de anillos que debo poner en el capitulo 1

$$\pi^*(m) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}\pi(gm) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}(gm) = \frac{1}{|G|}|G|m = m$$

De lo anterior se sigue que $Im(\pi^*) \subset M$ y adem$(\pi^*)^2 = \pi$. Por otro lado sea $m \in M$, entonces $\pi^*(m) = m \in Im(\pi^*)$, de donde $M \in Im(\pi^*)$.

Por lo anteriormente expuesto se sigue directamente que $Ker(\pi^*)$ es un RG -submodulo tal que $RG = M \oplus ker(\pi^*)$ $\square$

Como es usual en ciencias, se explorar caso particular del teorema anterior con la interrogante natural Qusa si en lugar de un anillo se considera un campo?. La pregunta anterior se reduce a contemplar el caso $R = K$, donde K es un campo. Un campo siempre es semisimple, ademe sabe que $|G|$ es invertible siempre y cuando $|G| \neq 0$, es decir, $car(K) \nmid |G|$, de donde se sigue el siguiente corolario:

Corolario 4. *Sea G un grupo finito y K un campo. Entonces KG es semisimple si y solo si $car(K) \nmid |G|$*

Aunque no es el objetivo de este trabajo de graduacir una descripci los grupo-ebra, resulta tentador replantear el teorema de Wedderburn-Artin en este contexto, con lo cual se brinda mas informacierca de la estructura algebraica de un grupo-ebra.

Teorema 7. *Sea G un grupo finito y sea K un campo tal que $car(K) \nmid |G|$. Entonces:*

- *KG es suma directa de un numero finito de ideales bilaterales $\{B_i\}_{1\leq i\leq r}$, los componentes simples de KG. Cada B_i es una anillo simple.*
- *Todo ideal bilateral de KG es suma directa de algunos de los miembros de la familia $\{B_i\}_{1\leq i\leq r}$*
- *Cada componente simple B_i es isomorfo a un anillo completo de matrices de la forma $M_{n_i}(D_i)$, donde D_i es un anillo de divisinteniendo una copia isomorfa de K en su centro. Ademl isomorfismo*

$$KG \simeq \oplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)$$

es un isomorfismo de ebras.

- *En cada anillo de matrices $M_{n_i}(D_i)$, el conjunto*

$$I_i = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n_i} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} : x_1, x_2, \dots, x_{n_i} \in D_i \right\} \simeq D_i^{n_i}$$

  es un ideal minimal izquierdo. Dado $x \in KG$, se considera $\phi(x) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \oplus_{i=1}^r M_{n_i}(D_i)$ y se define el producto de x por un elemento $m_i \in I_i$ como $xm_i = \alpha_i m_i$. Con esta definiciI$_i$ se convierte en un KG - mo simple.

- *$I_i \not\simeq I_j$, si $i \neq j$*

- *Cualquier KG - mo simple es isomorfo a algn I_i,* $\quad 1 \leq i \leq r$

Se ha hecho asis en este resultado, ya que en el siguiente capitulo de este trabajo, se explorar conexitre este resultado y la teore representaci grupos.

Corolario 5. *Sea G un grupo finito y K un campo algebraicamente cerrado tal que $car(K) \nmid |G|$. Entonces:*

$$Kg \simeq \oplus_{i=1}^r M_{n_i}(K)$$

ss y $n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_r^2 = |G|$

Demostración. Como $car(K) \nmid |G|$ es inmediato que

$$KG \simeq \oplus_{i=1}^r M_{n_i}(D_i)$$

donde D_i es un anillo de divisinteniendo una copia de K en su centro. Calculando la dimensibre K en ambos lados de la ecuaci tiene:

$$|G| = \sum_{i=1}^r n_i^2 [D_i : K]$$

de donde se sique que cada anillo de divisi$_i$ es finito dimensional. Sea $0 \neq d_i \in D_i$ entonces $kd_i = 0$ implica que $k = 0$. Similarmente, dado $a_i \in D_i$ tal que $kd_i 0 a_i$ se tiene que $k = a_i d_i^{-1} \in K$ por ser K algebraicamente cerrado y por lo tanto $[D_i : K = 1]$ y $D_i = K$ para $1 \leq i \leq r$, con lo cual concluye la demostraciproof

2.4. Grupo-Algebras de grupos abelianos

En esta secci dara descripcimpleta de grupo-anillo cuando el grupo es finito y adembeliano.

Como en la parte final de la secciterior, se supone que K es un campo tal que $car(K) \nmid |G|$. Esta caracterizacie dada por primera vez por S. Perlis y G Walker (dar la referencia).

Se comenzarn el caso donde G es un grupo cico, ase se asume que $G =< a\colon a^n = 1 >$ y que K 4s un campo tal que $car(K) \nmid |G|$. Considse la funci: $K[X] \to KG$ dada por

$$K[X] \ni f \mapsto f(a) \in KG$$

Debido a que la funci$consisteentomarunpolinomiode$K[G]$yevaluarloen$a, $esobvioque \phi$ es un epimorfismo de anillos y por lo tanto:

$$KG \simeq \frac{K[X]}{Ker(\phi)}$$

donde $ker(\phi) = \{f \in K[X] : f(a) = 0\}$. Como $K[X]$ es un dominio[2] de ideales principales se deduce que $Ker(\phi)$ es un ideal generado por el polinomio mo f_0, de menor grado posible, tal que $f_0(a) = 0$.

Ne que bajo el isomorfismo anterior, es claro que el elemento $a \in RG$ se mapea en $X + (f_0) \in \frac{K[X]}{(f_0)}$. Ademe $a^n = 1$ se sigue que $X^n - 1 \in Ker(\phi)$, ya que si existiera un polinomio $f = \sum_{i=0}^{r} k_i x^i$ con $r < n$ entonces $f(a) \neq 0$ debido a que los elementos de $\{1, a, a^2, \ldots, a^r\}$ son linealmente independientes sobre K.De esa manera se puede asegurar que $Ker(\phi) = (X^n - 1)$ por lo que se satisface

$$KG \simeq \frac{K[X]}{(X^n - 1)}$$

Sea $X^n - 1 = f_1 f_2 \cdots f_t$ la descomposici $X^n - 1$ como producto de polinomios irreducibles en $K[X]$. Como se estumiendo que $char(K) \nmid n$, este polinomio debe ser

[2]poner esto en el capitulo uno y hacer referencia

separable y por lo tanto $f_i \neq f_j$ si $i \neq j$. Utilizando el teorema chino del residuo [3] se puede escribir:

$$KG \simeq \frac{K[X]}{f_1} \oplus \frac{K[X]}{f_2} \oplus \cdots \oplus \frac{K[X]}{f_t}$$

Utilizando este isomorfismo es fl notar que el generador a tiene imagen $(X + (f_1), \ldots, X + (f_t))$.

Considse ζ_i una rae f_i, $1 \leq i \leq t$. Entonces, se tiene $\frac{K[X]}{(f_i)} \simeq K(\zeta_i)$. Por lo tanto

$$KG \simeq K(\zeta_1) \oplus K(\zeta_2) \oplus \cdots \oplus K(\zeta_t)$$

Como todos los elementos $\zeta_i, \quad 1 \leq i \leq t$ son ras de $X^n - 1$, se ha probado que KG es isomorfo a la suma directa de extensiones ciclotas de K. Finalmente baja este ultimo isomorfismo el elemento a tiene imagen $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_t)$

Antes de continuar, se presentan algunos ejemplos para estudiar y comprender de mejor manera como trabajan las conclusiones anteriores.

Ejemplo 1. *Sea $G =< a \colon a^7 = 1 >$ y $K = \mathbb{Q}$. En este caso la descomposici $X^7 - 1$ en $\mathbb{Q}$ es*

$$X^7 - 1 = (X - 1)(X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$$

de esta forma si ζ es una rae la unidad de orden 7 distinta de 1, se puede escribir lo siguiente

$$\mathbb{Q}G = \mathbb{Q}(1) \oplus \mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(\zeta)$$

Ejemplo 2. *Sea $G =< a \colon a^6 = 1 >$ y $K = \mathbb{Q}$. La descomposici $X^6 - 1$ en $\mathbb{Q}[X]$ es*

[3] tambien en la parte inicial y luego referencia a el

$$X^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)$$

entonces se obtiene

$$\mathbb{Q}G \simeq \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \oplus \mathbb{Q}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

donde $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ *es rae* X^2+X+1 *y* $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ *es rae* X^2-X+1*, pero* $\mathbb{Q}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \simeq \mathbb{Q}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \simeq \mathbb{Q}\left(\frac{-(1+i\sqrt{3})}{2}\right) \simeq \mathbb{Q}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$

por lo que en realidad los ltimos dos sumandos son iguales, dejando la expresi la siguiente manera:

$$\mathbb{Q}G \simeq \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

Los resultados anteriores dan una muy buena descripci los grupos anillos cuando el anillo es un campo y el grupo es abeliano, por lo cual ahora se trabajar un caso mas general.

Para poder hacer esto, se tratar calcular todos los sumando directos en la descomposici KG.

El lector debe recordar que para un d entero positivo dado, el polinomio cicloto de orden d, denotado por Φ_d , es el producto $\Phi_d = \prod_j (x - \zeta_j)$, donde ζ_j hace el recorrido por todas las ras primitivas de la unidad de orden d. Tambie es conocido que $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$, es decir que $X^n - 1$ se puede expresar como el producto de todos los polinomios ciclotos Φ_d en $K[X]$, donde d es un divisor de n. Para cada d sea $\Phi_d = \prod_{i=1}^{a_d} f_{d_i}$ la descomposici Φ_d como producto de polinomios irreducibles en $K[X]$

Entonces la descomposici KG puede ser escrita en la forma:

$$KG \simeq \oplus_{d|n} \oplus_{i=1}^{a_d} \frac{K[X]}{(f_{d_i})} \simeq \oplus_{d|n} \oplus_{i=1}^{a_d} K(\zeta_{d_i})$$

donde ζ_{d_i} denota una rae $f_{d_i}, \quad 1 \leq i \leq a_d$. Para un d fijo, todos los elementos ζ_{d_i} son ras primitivas de la unidad de orden d, por lo tanto, todos los campos de la forma $K(\zeta_{d_i}), \quad 1 \leq i \leq a_d$ son iguales y se puede escribir simplemente

$$KG \simeq \oplus_{d|n} a_d K(\zeta_d)$$

donde ζ_d es una rarimitiva de orden d y $a_d K[\zeta_d]$ denota la suma directa de a_d campos diferentes, todos ellos isomorfos a $K(\zeta_d)$.

Por otro lado, como $grad(f_{d_i}) = [K(\zeta_d) : K]$, se deduce que todos los polinomios tienen el mismo grado para $1 \leq i \leq a_d$. De esta forma, calculando el grado en la descomposici Φ_d, se tiene

$$\phi(d) = a_d[K(\zeta_d) : K]$$

donde ϕ es la funcitiente de Euler. Como G es un grupo cico de orden n, para cada divisor de n, el nmero de elementos de orden d en G, que se denota con n_d, es precisamente $\phi(d)$, entonces:

$$a_d = \frac{n_d}{|K(\zeta_d) : K|}$$

Ejemplo 3. *Sea $G =< a : a^n = 1 >$ un grupo cico de orden n y $K = \mathbb{Q}$. Es conocido que el polinomio $X^n - 1$ se descompone en $\mathbb{Q}[X]$ como un producto de polinomios ciclotos, a saber:*

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$$

y los polinomios Φ_d son irreducibles en $\mathbb{Q}[Q]$. Por lo tanto, en este caso en particular, la descomposici $\mathbb{Q}G$ es:

$$\mathbb{Q}G \simeq \oplus_{d|n}\mathbb{Q}(\zeta_d)$$

Hay que notar, que como en casos anteriores, bajo este isomorfismo el generador a corresponde a la tupla cuyas entradas son ras primitivas de la unidad de orden d, donde d es cualquier divisor positivo de n.

Finalmente se cerrarta seccimostrando un hecho muy importante, a saber, que la caracterizaciteriormente dada tambis vda en los grupo-anillos con grupos abelianos finitos.

Teorema 8. *Perlis-Walker Sea G un grupo finito abeliano de orden n y sea K un campo tal que $char(K) \nmid n$. Entonces*

$$KG \simeq \oplus_{d|n} a_d K(\zeta)$$

donde ζ_d es una rarimitiva de la unidad de orden d y $a_d = \frac{n_d}{[K(\zeta_d):K]}$. En este fla n_d denota el nmero de elementos de orden d en G.

Demostración. Para proceder con la demostraci necesario enunciar y demostrar los siguientes lemas:

Lema 7. *Sea R un anillo conmutativo y G, H grupos, entonces $R(G \times H) \simeq (RG)H$ (el grupo-anillo de H sobre el anillo RG)*

Demostración. Considse el conjunto $M_{n,\gamma} = \{g : (g,h) \in sop(\gamma)\}$. y la funci : $R(G \times H) \to (RG)H$ tal que $\gamma \mapsto \beta$ donde $\beta = \sum_{h\in H} \alpha_h h$ con $\alpha_h = \sum_{g\in M_{h,\gamma}} a_{gh} g$. Se debe demostrar que f es una funciyectiva y adems un homomorfismo de anillos.

Homomorfismo:

1. **Conserva sumas:** Sea $\gamma_1, \gamma_2 \in R(G \times H)$, $\quad \gamma_1 = \sum_{g\in G, h\in H} a_{gh}(g,h)$, $\quad \gamma_2 = \sum_{g\in G, h\in H} b_{gh}(g,h)$. De esta forma se tiene $f(\gamma_1) = \sum_{h\in H} \beta_h h$, $\quad \beta_h = \sum_{g\in M_{h,\gamma_1}} a_{gh} h$ y $f(\gamma_2) = \sum_{h\in H} \xi_h h$, $\quad \xi_h = \sum_{g\in M_{h,\gamma_2}} b_{gh} h$.

   Haciendo la operatoria se tiene:

   $$f(\gamma_1) + f(\gamma_2) = \sum_{h\in H} (\beta_h + \xi_h) h = \sum_{h\in H} \alpha_h h$$

   en donde $\alpha_h = \beta_h + \xi_h$

   Por otro lado:

   $$f(\gamma_1) + f(\gamma_2) = f\left(\sum_{g\in G, h\in H} (a_{gh} + b_{gh}) g\right) = \sum_{h\in H} \alpha_h h, \quad \alpha_h = \sum_{g\in M_{h,\gamma_1+\gamma_2}} (a_{gh} + b_{gh}) g$$

   De lo anterior se deduce flmente que $\alpha_h = \sum_{g\in M_{h,\gamma_1}} a_{gh} g + \sum_{g\in M_{h,\gamma_2}} b_{gh} g = \beta_h + \xi_h$

2. **Conserva productos:** Sean $\gamma_1, \quad \gamma_2 \in R(G \times H)$, entonces haciendo la operatoria:

   $$\gamma_1 \gamma_2 = \sum_{g,m\in G, h,n\in H} a_{gh} b_{mn} (g,h)(m,n)$$

   Como ya se ha probado que f conserva sumas, ahora es suficiente demostrar que dados $(g,h), \quad (m,n) \in (G \times H)$ se cumple que $f((g,h)(m,n)) = f((g,h)) f((m,n))$ y que ademfesR-lineal.$Enefecto, porunlado$

   $$f((g,h)) f((m,n)) = (gh)(nm) = gnhm$$

y por el otro lado se tiene:

$$f((g,h)(n,m)) = f((gn,hm)) = gnhm$$

El hecho de que f es $R-$ lineal se sigue directamente de la definici f.

3. f **es inyectiva:** Para demostrar que f es inyectiva se debe demostrar que el nico elemento que anula a f es elemento neutro de $R(G\times H)$. Para el efecto, considse $\gamma\in R(G\times H)$, $\quad \gamma=\sum_{g\in G,h\in H}a_{gh}(g,h)$ tal que $f(\gamma)=\sum_{h\in H}\alpha_h h=0$, $\quad \alpha_h=\sum_{g\in M_{h,\gamma}=a_{gh}h}$, lo cual implica que $a_{gh}=0$ para cada$g\in G, h\in H$, de donde $\gamma=0$

4. f **es sobreyectiva:** Dado $\sum_{h\in h}\alpha_h h\in (RG)H$ se construye $\gamma=\sum_{g\in G,h\in H}a_{gh}(g,h)$, donde a_{gh}, es decir, el coeficiente de (g,h) es el mismo que el de g en α_h. Con lo que concluye la prueba. $\square$

Lema 8. *Sea $\{R_i\}_{i\in I}$ una familia de anillos y sea $R=\oplus_{i\in I}R_i$. Entonces para cualquier grupo G se tiene $RG\simeq\oplus_{i\in I}R_iG$*

Demostración. Considse la funci : $\oplus_{i\in I}R_iG\to RG$ dado por $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\mapsto\sum_{g\in G}a_g g$, $\quad a_g=(a_g^{(1)},\cdots,a_g^{(n)})$, donde $a_g^{(i)}$ es el coeficiente de g en $\alpha_i=\sum_{g\in G}a_g^{(i)}g$. Se debe comprobar que f es un homomorfismo de anillos.

1. **Conserva sumas:** Sean $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $\quad \beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in\oplus_{i\in I}R_iG$, entonces su suma viene dada por $\gamma=(\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\alpha_n)$, y con ello la imagen de la suma seria $f(\gamma)=\sum_{g\in G}c_g g$, $\quad c_g=(a_g^{(1)},\cdots,a_g^{(n)})$.

   Por otro lado, se tiene:

$$\begin{aligned} f(\alpha)+f(\beta) &= \sum_{g\in G}a_g g+\sum_{g\in G}b_g g\\ &= \sum_{g\in G}(a_g+b_g)g\\ &= \sum_{g\in G}d_g g, \quad d_g=(a_g^{(1)}+b_g(1),\cdots,a_g^{(n)}+b_g(n)) \end{aligned}$$

   por lo tanto $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$

2. **Conserva productos:** Como en el caso anterior, se tiene $\gamma=\alpha\beta=(\alpha_1\beta_1,\cdots,\alpha_n\beta_n)$, y por lo tanto, su imagen bajo f, es $f(\gamma)=\sum_{u\in G}c_u u$, $\quad c_u=(c_u^{(1)},\cdots,c_u^{(n)})$, $\quad c_u^{(i)}=\sum_{gh=u}a_g^{(i)}b_h^{(i)}$.

   Por otro lado, $f(\alpha)=\sum_{g\in G}a_g g$, $\quad f(\beta)=\sum_{g\in G}b_g g$, multiplicando, se obtiene $f(\alpha)f(\beta)=\sum_{u\in G}d_u u$, $\quad d_u=\sum_{gh=u}a_g b_h=\left(\sum_{gh=u}a_g^{(1)}b_g^{(1)},\cdots,\sum_{gh=u}a_g^{(n)}b_g^{(n)}\right)=c_u$

3. f **es inyectiva:** Supse que $f(\alpha)=\sum_{g\in G} a_g g=0$ entonces $a_g=(0,\cdots,0)$, de donde $\alpha=(0,\cdots,0)$

4. f **es sobreyectiva:** Dado $\sum_{g\in G} a_g g, \quad a_g=(a_g^{(1)},\cdots,a_g^{(n)})$. Entonces se construye $\alpha=\left(\sum_{g\in G} a_g^{(1)} g,\cdots,\sum_{g\in G} a_g^{(n)} g\right)$ y es fl verificar que $f(\alpha)=\sum_{g\in G} a_g g$

$\square$

Para demostrar el teorema se procede por induccibre el orden de G. Supse que el resultado es vdo para cualquier grupo abeliano de orden menor que n.

Sea G tal que $|G|=n$. Si G es generado no hay algo que demostrar. Si G no fuera un grupo generado se puede utilizar el teorema de estructura [4] de los grupos finitos abelianos para escribir $G=G_1xH$ donde H 4s generado y $|G_1|=n_1<n$. Por hipis de inducci puede escribir

$$RG_1 \simeq \oplus_{d_1|n_1} a_{d_1} K(\zeta_{d_1})$$

donde $a_{d_1}=\frac{n_{d_1}}{[K(\zeta_{d_1}):K]}$ y n_{d_1} denota el numero de elementos de orden d_1 en G_1. Aplicando el lema 7 se cumple

$$RG=R(G_1xH)\simeq (RG_1)H \simeq \left(\oplus_{d_1|n_1} a_{d_1} K(\zeta_{d_1})\right) H$$

utilizando el lema 8 se obtiene

$$\left(\oplus_{d_1|n_1} a_{d_1} K(\zeta_{d_1})\right) H \simeq \oplus_{d_1|n_1} a_{d_1} K(\zeta_{d_1}) H$$

Como H es cico se puede escribir

$$\oplus_{d_1|n_1} \oplus_{d_2||H|} a_{d_1} a_{d_2} K(\zeta_{d_1},\zeta_{d_2})$$

[4]poner en capitulo 1

donde $a_{d_2} = \frac{n_{d_2}}{[K(\zeta_{d_1},\zeta_{d_2}):K(\zeta_{d_1})]}$ y n_{d_2} es el nmero de elementos en H de orden d_2.

Sea $d = [d_1, d_2]$ entonces por el teorema del elemento primitivo, se tiene $K(\zeta_d) = K(d_1, d_2)$ por tanto

$$KG \simeq \oplus_{d|n} a_d K(\zeta_d)$$

con $a_d = \sum_{d1,d2} a_{d_1} a_{d_2}$ y donde la suma recorre todos los d_1, d_2 son nmeros naturales tales que $[d_1, d_2] = d$. Por otro lado, del hecho que $[K(\zeta_d) : K] = [K(\zeta_{d_1,\zeta_{d_2}}) : K(\zeta_{d_1})][K(\zeta_{d_1}) : K]$ se tiene que:

$$a_d[K(\zeta_d : K)] = \sum_{d_1,d_2} a_{d_1} a_{d_2}[K(\zeta_{d_1,\zeta_{d_2}}) : K(\zeta_{d_1})][K(\zeta_{d_1}) : K] = \sum_{d_1,d_2} n_{d_1} n_{d_2}$$

$\square$

3. TEOR DE REPRESENTACI DE GRUPOS

3.1. Definicijemplos

Como se mencionl caplo 1 [1] el concepto de **grupo de permutaciones** fue dado expltamente por primera vez en [2] 1830, aunque la primera definici grupo abstracto fue dado hasta en 1854 por Cayley, aunque pasdvertidamente por un tiempo, hasta que dicha definicie dada nuevamente en repetidas ocasiones por varios matemcos, a saber: Leopold Kronecker en 1870, Heinrich Martin Weber en 1882 y Ferdinand Georg Frobenius en 1887. De esa forma los grupos fueron considerados por mucho tiempo como objetos concretos antes de llegar a ser estudiados como estructuras algebraicas abstractas.

En este contexto histo es natural hacer la pregunta: Dado un grupo abstracto Ce puede saber que grupo es -en particular - ? Es decir, Se puede decir cuando es un grupo de permutaciones, un grupo lineal o un grupo de transformaciones proyectivas - sor citar algunos ejemplos- ?

En 1879, durante las lecturas de un coloquio matemco realizado en Evanston, Illinois, Felix Klein planteosibilidad de representar un grupo abstracto dado como un grupo de transformaciones lineales [3].

Siguiendo estas ideas, Theodor Molien, Georg Frobenius, Issai Schur, William Burnside y Heinrich Maschke desarrollaron la teorca de la representaci grupos al inicio del siglo XX y Burnside presentrimera exposicistemca de este tema en su libro [4], que actualmente es considerado un libro clco en este tema.

[1]ponerlo ejemplos en esta parte de la definici grupos

[2]poner el libro: Memorias de Galois

[3]hacer referencia al libro T Hawkins, Hypercomplex number Lie groups and the creation of group representation theory, Archive Hist. Exact Sci. 8 (1972), pagina 269

[4]referencia al libro

La teore la representaci volvi importante a medida que se fueron obteniendo nuevos resultados.

Uno de los resultados mas importantes es el famoso teorema que establece que si p y q son nmeros enteros primos y a, b enteros positivos, entonces cualquier grupo de orden $p^a q^b$ es soluble. [5] Este teorema fue demostrado en 1904 por William Burnside usando la teore representaci grupos y, como dato curioso, la primera demostracie no utiliza dicha teorue proporcionada por John Griggs Thompson mas de 60 aespuver [6])

William Burnside tambionjetur todo grupo de orden impar es soluble. Esta conjetura fue un problema abierto hasta que Walter Feit y John Thompson dieron una demostraci esta conjetura en 1963 [7], usando para ello teore la representaci

Luego de hacer asis en la importancia hista que tiene la teore representaci grupos, se entra a estudiar algunas definiciones de la misma.

Definici 7. *Sea G un grupo, R un anillo conmutativo y V un R-mo libre de rango finito. Una **representaci** de G sobre R, con espacio de representaci, $esunhomomorfismodegruposT$ $: G \to GL(V)$, donde $GL(V)$ es el grupo de automorfismos de V. El rango de V es llamado **grado** de la representaciysedenotarmograd(T).*

Para $g \in G$ se denotarmo $T_g \colon V \to V$ al automorfismo correspondiente bajo T. Asi $g, h \in G$, se tiene que $T_{gh} = T_g \circ T_h$ y $T_1 = I$.

El caso en el que R es un campo es de particular importancia. Histamente, este fue el primer caso que se estudi en ese contexto donde se obtuvieron la mayor parte de resultados.

Si se escoge una R-base de V, se puede definir un isomorfismo ϕ de $GL(V)$ al grupo $GL(n, R)$ de matrices invertibles $n \times n$ con coeficientes en R, asignole a cada automorfismo $T \in GL(V)$ su matriz respecto a la base dada. Esto da paso a la

[5] poner esto en el glosario o en donde corresponde: Un grupo G es soluble si hay una cadena de subgrupos $e = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_n \subset H_n = G$ tal que para cada i, el subgrupo H_i es normal en H_{i+1} y el grupo cociente H_{i+1}/H_i es abeliano.

[6] poner la bibliografia 48

[7] ver 39

siguiente definici

Definici 8. *Sea G un grupo y R un anillo conmutativo. Una representacitricial de G sobre R de grado n es un homomorfismo de grupos $T\colon G \to GL(n,R)$.*

Si $T\colon G \to GL(V)$ es una representaci G sobre R con espacio de representaci$yseconsideraeliso$ $GL(n,R)$ asociada a alguna $R-$base, entonces $\phi\circ T\colon G \to GL(n,R)$ es una representacitricial de G. De manera similar, dada una representacitricial $T\colon G \to GL(n,R)$, entonces $\phi^{-1}\circ T\colon G \to GL(V)$ es una representaci G sobre R. Debido a este hecho, no se harstincitre representaciepresentacitricial.

Para ilustrar lo que se expuso anteriormente, se ha considerado necesario, exponer algunos ejemplos sencillos.

Ejemplo 4. *Dado un grupo G y un anillo conmutativo R, la funci $: G \to GL(n,R)$ tal que a cada elemento G le asocia la matriz identidad de $GL(n,R)$ es una representacitricial de G. A esta funci le llama **representaciivial** de G sobre R de grado n.*

Ejemplo 5. *Sea G el grupo de Klein de cuatro elementos,es decir, $G = \{1,a,b,ab\}$. Este grupo tiene tres elementos de orden dos. Entonces $T\colon G \to GL(2,\mathbb{Z})$ es la funcil que:*

$$\mathsf{T(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{T(a)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{T(b)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{T(ab)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6. *Sea S_n el grupo de simetr de n solos y R un anillo conmutativo. Sea V un $R-$mo libre de rango n con base $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. Para facilitar la comprensi este ejemplo, se sugiere al lector imaginar que $V = \underbrace{\mathbb{R}\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}}_{n}$ con su base cana.*

Por otra parte, considse la funci $: S_n \to GL(V)$ de la siguiente manera: a cada elemento $\sigma \in S_n$, se le asigna la funci$_\sigma \in GL(V)$, que acta, de manera natural, como:

$$T_\sigma(v_i) = v_{\sigma(i)}.$$

Como T_σ deja a la base intacta (salvo permutaciones), es claro que T_σ es un isomorfismo.

Es claro que T es un isomorfismo, por su definici por lo tanto una representaci S_n.

Como se puede apreciar una representacir si suede ser poca descriptiva, por lo tanto se considera de mas utilidad conocer la representacitricial. Para este caso en particular, considse $A(\sigma)$, la matriz asociada a T_σ, que se obtiene al calcular $T_\sigma(v_j)$ como combinacineal de la base. Como $T_\sigma(v_j) = v_{\sigma(j)}$, entonces los coeficientes de la matriz anterior son cero en todas sus entradas excepto en $(\sigma(j), j)$, en la cual la entrada vale uno. De esta manera es fl notar que $A(\sigma)$ es una matriz que tiene exactamente una entrada igual a uno en cada fila y columna y las demguales a cero. Dicha matriz se conoce como la ***matriz de permutaci****.*

Ejemplo 7 (La representacigular)**.** *Sea G un grupo finito de orden n y R un anillo conmutativo. Se requiere definir una representaci G sobre R, para ello se considerarmo espacio de representaci$RG, es decir, a el grupo - anillo de G sobre R$.*

Considse la funci $: G \to GL(RG)$ de la siguiente manera: a cada elemento $g \in G$ se le asigna la funcineal T_g que transforma a los elementos de la base por medio de multiplicacir la izquierda, esto es, $T_g(g_i) = gg_i$. Es claro que T es una representaci G, debido a que:

$$T_{gh}(y) = (gh)y = g(h(y)) = T_g T_h(y).$$

En este caso hay que recordar que G es una base de RG sobre R y se pueden enumerar, en algn orden, los elementos de G como sigue:

$$G = \{1 = g_1, g_2, \cdots, g_n\},$$

por lo tanto es fl notar que en la correspondiente representacitricial con respecto a la base G de RG, la imagen de cualquier elemento $g \in G$ es una matriz de permutacie-bido a la cerradura del producto en G.

La representaciterior usualmente es llamada la **representacigular de G sobre** R. Es importante notar que esta representaci construyrtir de la multiplicacir la izquierda, ase seras apropiado llamarla representacigular por la izquierda de G sobre R.

Para ilustrar de mejor manera a continuaci muestra un ejemplo:

Ejemplo 8. *Sea $G = \{1, a, a^2\}$ un grupo cico de orden tres. Enmerese los elementos de G como $g_1 = 1$, $g_2 = a$, $g_3 = a^2$. Para encontrar la representacigular de a, basta con multiplicar por a los elementos de G por la izquierda:*

$$ag_1 = g_2, \quad ag_2 = g_3, \quad ag_3 = g_1$$

entonces se tiene:

$$T_a(g_1) = g_2, \quad T_a(g_2) = g_3, \quad T_a(g_3) = g_1,$$

por lo tanto la matriz asociada con a en la base dada es:

$$\rho(\mathsf{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que no es mue una matriz de permutaci

Ejemplo 9. *Considse, de nuevo, el grupo de Klein de cuatro elementos, $G = \{1, a, b, ab\}$ con la numeracig$_1 = 1$, $g_2 = a$, $g_3 = b$, $g_4 = ab$.*

Para conocer la representacigular de a, se procede a multiplicar por la izquierda por a a los elementos de G:

$$ag_1 = g_2, \quad ag_2 = g_1, \quad ag_3 = g_4, \quad ag_4 = g_3,$$

entonces

$$T_a(g_1) = g_2, \quad T_a(g_2) = g_1, \quad T_a(g_3) = g_4, \quad T_a(g_4) = g_3$$

y como en el ejemplo anterior, se puede obtener la representacitricial de a:

$$\rho(\mathsf{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De manera similar se obtiene la representacitricial de los elementos restantes de G:

$$\rho(\mathsf{b}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(\mathsf{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(\mathsf{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota 4. Ya se mencion $\rho(g)$ con $g \in G$ es una matriz de permutaciero es importante hacer notar que si se toma $1 \neq g \in G$, entonces para cualquier $g_i \in G$ se tiene que $gg_i \neq g_i$. Esto implica que para cualquier elemento g_i de la base se cumple que $T_g(g_i) \neq g_i$ y por ende los elementos de la diagonal de $\rho(g)$ son todos iguales a cero. Mn, de lo anteriormente expuesto, se deduce que si $g \neq 1$ entonces $tr(\rho(g)) = 0$ si $g \neq 1$ y $tr(\rho(g)) = |G|$ si $g = 1$. Este resultado elemental es de mucha importancia cuando se estabajando con la representacigular.

Ejemplo 10. *[Algunas representaciones de grupos cicos] Considse el grupo cico* $G = \{1, a, \cdots, a^{m-1}\}$ *y sea K un campo. Si se desea construir una representacitricial*

$A\colon G \to GL(n,K)$ *es necesario escoger la matriz* $A(a)$, *ya que por ser* A *un homomorfismo, las matrices de representaci los restantes elementos del grupo esteterminadas por* $A(a^r) = (A(a))^r$. *Ademara demostrar que* A *es un homomorfismo de grupos, basta con probar que* $(A(a))^r = I$, *para algn* $r \in \mathbb{Z}$.

Spongase que $car(K) \nmid m$ *y que* K *contiene una rarimitiva de la unidad de orden* m, ξ. *Entonces*

$$A\colon G \to GL(1,K)$$

tal que, $A(a) = \xi$ *es una representacia que* $(A(a))^r = \xi^r = 1$ *para algn* r. *Adem si* $\{\xi_1, \cdots, \xi_m\}$ *es un conjunto de todas las ras de la unidad unidad de ordem* m *que son distintas a pares entonces la funci* $: G \to GL(m,K)$ *dada por*

$$\mathsf{B(a)} = \begin{pmatrix} \xi_1 & & \dots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \xi_m \end{pmatrix}$$

es una represetanci G *sobre* K *de grado* m, *ya que* $\xi_i^r = 1$ *para algn* $r \in \mathbb{Z}$, *entonces*

$$(\mathsf{B(a)})^{\mathsf{r}} = \begin{pmatrix} \xi_1^r & & \dots & 0 \\ 0 & \xi_2^r & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \xi_m^r \end{pmatrix} = I.$$

Ne que esta representaci distinta a la representacigular, que en el caso de a, *estda por*

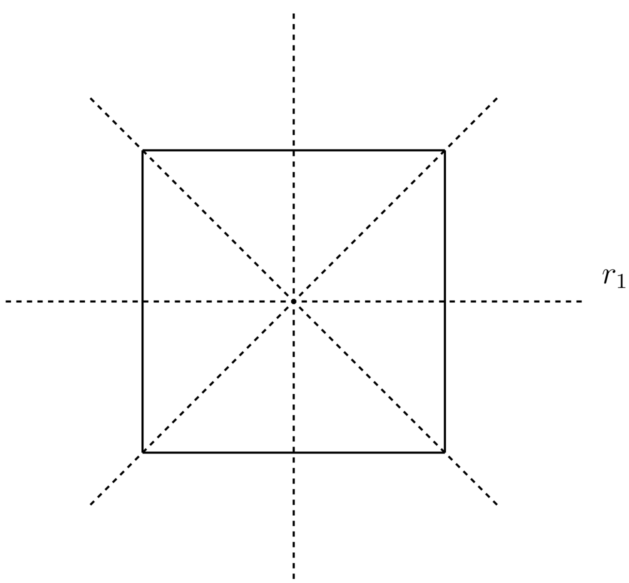
$$\Gamma(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente si $car(K) \mid m$ *entonces se propone la representaci* $: G \to GL(2,K)$, *dada por*

$$\mathsf{C}(\mathsf{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ya que $(\mathsf{C}(\mathsf{a}))^{\mathsf{r}} = \begin{pmatrix} 1 & r \cdot 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ *para* $r \in \mathbb{Z}$, *esto por que* $car(K) < \infty$.

Ejemplo 11 (Representaci D_4)**.** *Considse el grupo de simetr de un cuadrado. Este grupo de 8 elementos, a saber, las reflecciones a trave los ejes* r_1, r_2, r_3, r_4 *(como se ve en) y las rotaciones con ulos* $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ *y* 2π *alrededor del centro.*



Sea a la rotaci ulo $\frac{\pi}{2}$ *y b la reflexiravel eje* r_2*. Es fl ver, bajo consideraciones geomicas, que cualquier otro elemento de este grupo se puede obtener por medio de a y b.*

De manera mas abstracta, este grupo –que es llamado grupo dihico de orden ocho y usualmente denotado por D_4 *– puede ser definido con dos generadores que satisfacen las relaciones*

$$a^4 = 1, \quad b^2 = 1, \quad baba = 1.$$

Por lo tanto este grupo puede ser descrito como

$$D_4 = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}.$$

Como todas los elementos de este grupo estn terminos de a y b, entonces para encontrar una representacitricial $A\colon D_4 \to GL(n, K)$ *sobre el campo* K*, serficiente encontrar matrices* $A(a)$*,* $B(b)$ *tales que* $A(a)^4 = I$*,* $A(b)^2 = I$*,* $A(b)A(a)A(b)A(a) = I$*.*

Es fl determinar representaciones de grado uno para D_4 *en un campo* K *de caracterica diferente a dos, de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} A(a) &= 1 & A(b) &= 1 \\ B(a) &= 1 & B(b) &= -1 \\ C(a) &= -1 & C(b) &= 1 \\ D(a) &= -1 & D(b) &= -1. \end{aligned}$$

Pensando en el significado geomico de a y b, como dos funciones del plano al plano, se puede calcular sus matrices con respecto a la base cana para obtener otra representacitricial de D_4*:*

$$\mathsf{W}(\mathsf{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{W}(\mathsf{b}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 12 (Suma directa de representaciones)**.** *Sean* $T\colon G \to GL(V)$ *y* $S\colon G \to GL(W)$ *dos representaciones de un grupo* G *sobre un anillo conmutativo* R*. Se puede definir una nueva representaci* $\oplus W$*, que es llamada la* ***suma directa*** *de dos representaciones dadas y se denota como* $T \oplus S$*, de la siguiente manera:*

$$(T \oplus S)_g = T_g \oplus S_g, \quad \textit{para cada } g \in G.$$

Si se eligen bases $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *y* $\{w_1, \ldots, w_m\}$ *de* V *y* N *respectivamente y se denota por* $g \mapsto A(g)$ *y* $g \mapsto B(g)$ *las correspondientes representaciones matriciales en las bases dadas, entonces la representacitricial asociada a* $T \oplus S$ *con respecto a la base* $\{(v_1, 0), \ldots, (v_n), (0, w_1), \ldots, (0, w_n)\}$ *de* $V \oplus W$*, viene dada por*

$$g \mapsto \begin{pmatrix} A(g) & 0 \\ 0 & B(g) \end{pmatrix}.$$

Los ejemplos anteriormente expuestos sirven de motivacira introducir algunos conceptos de teore la representacin este trabajo se restringiras representaciones al caso en el cual R es un campo, debido a que con este caso se logra ilustrar la relaci teore representacin los problemas de grupo-anillos.

Primero considse $T\colon G \to GL(V)$ una representaci un grupo G sobre un campo K y asmase que $\phi\colon V \to W$ es un isomorfismo de espacios vectoriales sobre K. Entonces se puede definir una nueva representaciT $: G \to GL(W)$ por medio de $\overline{T_g}\colon \phi \circ T_g \circ \phi^{-1}$ para todo $g \in G$. Esto es, escensialmente, una copia de T. La relacitre estas dos representaciones estustrada en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T_g"] \arrow[d, "\phi"'] & V \arrow[d, "\phi"] \\ W \arrow[r, "\overline{T_g}"'] & W \end{tikzcd} .$$

Lo cual sugiere lo siguiente:

Definici 9. *Dos representaciones $T\colon G \to GL(V)$ y $\overline{T}\colon G \to GL(W)$ de un grupo G sobre el mismo campo K se dicen que son* ***equivalentes*** *si existe un isomorfismo $\phi\colon V \to W$ tal que $\overline{T_g} = \phi T_g \phi^{-1}$ para cualquier $g \in G$.*

Definici 10. *Dos representaciones matriciales $A\colon G \to GL(n, K)$ y $B\colon G \to GL(n, K)$ de un grupo G sobre un campo K se dicen equivalentes si existe una matriz invertible $U \in GL(n, K)$ tal que $A(g) = UB(g)U^{-1}$ para cualquier $g \in G$.*

Ejemplo 13. *Sea G un grupo cico de orden m y K un campo que contiene a $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\}$, el conjunto de todas las ras distintas de la unidad de orden m. Entonces, si se consideran las representaciones B y Γ dadas en el ejemplo 10 con*

$$\mathsf{U} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_1^2 & \cdots & \xi_1^m \\ \xi_2 & \xi_2^2 & \cdots & \xi_2^m \\ & & \cdots & \\ \xi_m & \xi_m^2 & \cdots & \xi_m^m \end{pmatrix}, \quad \mathsf{U} \in GL(n, K)^8$$

[8] Esto es evidente, ya que U es una matriz de Vandermonde con $det(\mathsf{U}) = \prod_{1 \le i < j \le m}(\xi_i - \xi_j) \neq 0$.

entonces, calculando por un lado se tiene

$$\mathsf{B(a)U} = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \xi_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_1^2 & \cdots & \xi_1^m \\ \xi_2 & \xi_2^2 & \cdots & \xi_2^m \\ & & \cdots & \\ \xi_m & \xi_m^2 & \cdots & \xi_m^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1^2 & \xi_1^3 & \cdots & \xi_1 \\ \xi_2^2 & \xi_2^3 & \cdots & \xi_2 \\ & & \cdots & \\ \xi_m^2 & \xi_m^2 & \cdots & \xi_m \end{pmatrix}$$

similarmente

$$\mathsf{U\Gamma(a)} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_1^2 & \cdots & \xi_1^m \\ \xi_2 & \xi_2^2 & \cdots & \xi_2^m \\ & & \cdots & \\ \xi_m & \xi_m^2 & \cdots & \xi_m^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1^2 & \xi_1^3 & \cdots & \xi_1 \\ \xi_2^2 & \xi_2^3 & \cdots & \xi_2 \\ & & \cdots & \\ \xi_m^2 & \xi_m^2 & \cdots & \xi_m \end{pmatrix}$$

con lo que se ha demostrado que $\mathsf{A(g)} = \mathsf{UB(g)U}^{-1}$*, para cualquier* $g \in G$ *y concluye que* B *y* $\mathsf{\Gamma}$ *son equivalentes.*

Considse $T\colon G \to GL(V)$ una representaci un grupo G sobre el campo K, con espacio de representaci$yasmaseque$V$contieneunsubespacio$W$queesinvariablebajo$T$, estoes, unsubesp$
W, para cualquier $g \in G$. Entonces se puede considerar el homomorfismo de grupos que asigna a cada elemento $g \in G$ la restricci T_g al subespacio W. Por ser T_g la restricci tiene entonces es claro que el homomorfismo anterior es una representaci G sobre K, con espacio de representaci.

Con el afe dar una representacitricial de este hecho, considse una base $\{w_1, w_2, \ldots, w_t\}$ de W y extiase a una base $\{w_1, \cdots, w_t, v_{t+1}, \cdots, v_n\}$ de V. Entonces la matriz asociada a cada funci$_g$, $g \in G$ con respecto a esa base es de la forma

$$\begin{pmatrix} \mathsf{A(g)} & \mathsf{B(g)} \\ 0 & \mathsf{C(g)} \end{pmatrix}$$

donde $\mathsf{A(g)} \in GL(t, K), C(g) \in GL(n-t, K)$ y $\mathsf{B(g)}$ es una matriz de $t \times (n-t)$. Estas consideraciones sugieren lo siguiente

Definici 11. *Una representaci* $: G \to GL(V)$ *de un grupo* G *sobre un campo* K *es llamada irreducible si los nicos subespacios propios de* V *que son invariantes bajo* T *son los triviales, es decir,* V *y* $\{0\}$

La representaci llamada **reducible** si V contiene subespacios no triviales que son invariantes bajo T.

Definici 12. *Una representacitricial* $M\colon G \to GL(n,K)$ *es llamada reducible si existe una matriz* $\mathsf{U} \in GL(n,K)$ *tal que para cualquier* $g \in G$*, se tiene que la matriz* $\mathsf{U}M(g)U^{-1}$ *es de la forma*

$$\mathsf{UM(g)U^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathsf{A(g)} & \mathsf{B(g)} \\ 0 & C(g) \end{pmatrix}$$

El ejemplo 13 muestra que la representacigular de un grupo cico de orden m, sobre un campo K que contiene ras de la unidad de orden m es reducible. De hecho, cualquier representacigular de un grupo finito $G \neq \{1\}$ sobre cualquier campo es reducible. En efecto, ne que si en el espacio de representaciG$setomaelelemento =$ $\sum_{g\in G} g$ entonces $T_g(\hat{G}) = \hat{G}$ por lo tanto el subespacio generado por $\hat{G}$ es invariante bajo T y $(\hat{G}) \neq RG$.

Definici 13. *Una representaci* $: G \to GL(V)$ *de un grupo* G *sobre un campo* K *es llamado completamente irreducible si para todo subespacio* W *que es invariante bajo* T *existe un subespacio invariante* W' *tal que* $V = W \oplus W'$.

Para entender de mejor manera esta definici dara interpretaci tinos de matrices.

Sea $\{w_1, w_2, \ldots, w_t\}$ y $\{w_{t+1}, \ldots, w_n\}$ bases dadas para W y W' respectivamente, entonces $\{w_1, w_t, w_{t+1}, \ldots, w_n\}$ es una base de V y para cualquier $g \in G$ la matriz de T_g con respecto a esta base es de la forma

$$\begin{pmatrix} \mathsf{A(g)} & 0 \\ 0 & \mathsf{B(g)} \end{pmatrix}$$

donde $\mathsf{A(g)}$ y $\mathsf{B(g)}$ son las matrices de representaci T_g en W y W' con respecto a las bases dadas.

Definici 14. *Una representacitricial* $M\colon G \to GL(n,K)$ *es llamada completamente reducible si cualquier representacitricial* M *de la forma*

$$\begin{pmatrix} \mathsf{A(g)} & \mathsf{B(g)} \\ 0 & \mathsf{C(g)} \end{pmatrix}$$

es equivalente a una representacitricial de la forma

$$\begin{pmatrix} \mathsf{A}(\mathsf{g}) & 0 \\ 0 & \mathsf{D}(\mathsf{g}) \end{pmatrix}$$

.

3.2. Representacios.

En este secci estudiar conexie hay entre mos y representaciones. Dicha conexi establece usando el concepto de grupo-anillo.

Proposici 8. *Sea G un grupo y R un anillo conmutativo con unidad. Entonces, existe una biyeccitre representaciones de G sobre R y RG-mos libres y de rango finito.*

CONCLUSIONES

1. Conclusiones (c_y_r.tex)

RECOMENDACIONES

1. Recomendaciones (c_y_r.tex)

BIBLIOGRAFÍA

[1] Ahlfors, Lars V. **Complex Analysis (An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable)** 3ª ed. (International Series in Pure and Applied Mathematics)

[2] Apellido, Nombre. **Titulo** n-sima ed. (Editorial)