Lògica en la Informàtica.
Definició de Lògica Proposicional

José Miguel Rivero Robert Nieuwenhuis

Dept. Ciències de la Computació
Facultat de Informàtica
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Primavera 2023

Definició de Lògica Proposicional

Exercicis del capítol 2 dels apunts: ☞ `p2.pdf`

- Exercici 5 [demostració en LProp]
- Exercici 7 [demostració en LProp]
- Exercici 8 [demostració en LProp]
- Exercici 16 [demostració en LProp]
- Exercici 21 [equivalència lògica]
- Exercici 18 [equivalències entre fòrmules]
- Exercici 23 [lema de Substitució]

5. (dificultat 1) Siguin F i G dues fórmules qualssevol. És cert que $F \vee G$ és tautologia si i només si alguna de les dues fórmules F o G ho és?. Demostra-ho fent servir només la definició de la LProp.

No, no és cert. Donarem un **contraexemple** de fórmules F i G per a les quals la propietat és falsa, és a dir, on $F \vee G$ és tautologia, però ni F ni G són tautologies.

Sigui F la fórmula p, on p és un símbol de predicat.
Sigui G la fórmula $\neg p$.

Definició de Lògica Proposicional

5. (dificultat 1) Siguin F i G dues fórmules qualssevol. És cert que $F \vee G$ és tautologia si i només si alguna de les dues fórmules F o G ho és?. Demostra-ho fent servir només la definició de la LProp.

a) Tenim que $p \vee \neg p$ és tautologia perquè:

$p \vee \neg p$ és tautologia	ssi	[per definició de tautologia]
tota I és model de $p \vee \neg p$	ssi	[per definició de model]
$\forall I,\ I \models p \vee \neg p$	ssi	[per definició de $\models$]
$\forall I,\ eval_I(p \vee \neg p) = 1$	ssi	[per definició de $eval_I(\ldots \vee \ldots)$]
$\forall I,\ max(eval_I(p), eval_I(\neg p)) = 1$	ssi	[per definició de $eval_I(\neg \ldots)$]
$\forall I,\ max(eval_I(p), 1 - eval_I(p)) = 1$	ssi	[donat que $eval_I(p)$ sempre és 0 o 1, i per definició de max]

$$max(0, 1 - 0) = max(1, 1 - 1) = 1$$

5. (dificultat 1) Siguin F i G dues fórmules qualssevol. És cert que $F \vee G$ és tautologia si i només si alguna de les dues fórmules F o G ho és?. Demostra-ho fent servir només la definició de la LProp.

a) Tenim que $p \vee \neg p$ és tautologia perquè:

$p \vee \neg p$ és tautologia	ssi	[per definició de tautologia]
tota I és model de $p \vee \neg p$	ssi	[per definició de model]
$\forall I,\ I \models p \vee \neg p$	ssi	[per definició de $\models$]
$\forall I,\ eval_I(p \vee \neg p) = 1$	ssi	[per definició de $eval_I(\ldots \vee \ldots)$]
$\forall I,\ max(eval_I(p), eval_I(\neg p)) = 1$	ssi	[per definició de $eval_I(\neg \ldots)$]
$\forall I,\ max(eval_I(p), 1 - eval_I(p)) = 1$	ssi	[donat que $eval_I(p)$ sempre és 0 o 1, i per definició de max]
$1 = 1$	ssi	[perquè $1 = 1$ és *cert*]
cert		

Definició de Lògica Proposicional

5. (dificultat 1) Siguin F i G dues fórmules qualssevol. És cert que $F \vee G$ és tautologia si i només si alguna de les dues fórmules F o G ho és?. Demostra-ho fent servir només la definició de la LProp.

b) Però tenim que ni F ni G són tautologies:

F no és tautologia	ssi	[com F és p]
p no és tautologia	ssi	[per definició de tautologia]
$\exists I$, tq I no és model de p	ssi	[per definició de model]
$\exists I,\ I \not\models p$	ssi	[per definició de $\models$]
$\exists I,\ eval_I(p) = 0$	ssi	[per definició de $eval_I(p)$]
$\exists I,\ I(p) = 0$	ssi	cert

5. (dificultat 1) Siguin F i G dues fórmules qualssevol. És cert que $F \vee G$ és tautologia si i només si alguna de les dues fórmules F o G ho és?. Demostra-ho fent servir només la definició de la LProp.

b) Però tenim que ni F ni G són tautologies:

G no és tautologia	ssi	[com G és $\neg p$]
$\neg p$ no és tautologia	ssi	[per definició de tautologia]
$\exists I$, tq I no és model de $\neg p$	ssi	[per definició de model]
$\exists I,\ I \not\models \neg p$	ssi	[per definició de $\models$]
$\exists I,\ eval_I(\neg p) = 0$	ssi	[per definició de $eval_I(\neg \ldots)$]
$\exists I,\ 1 - eval_I(p) = 0$	ssi	[per definició de $eval_I(p)$]
$\exists I,\ 1 - I(p) = 0$	ssi	[per aritmètica]
$\exists I,\ I(p) = 1$	ssi	cert

7. (dificultat 2) Siguin F i G dues fórmules qualssevol. Demostra, fent servir tan sols la definició de la LProp, que F és conseqüència lògica de G, és a dir, $G \models F$ si i només si $G \wedge \neg F$ és insatisfactible.

F és conseqüència lògica de G	ssi	[per def. de conseqüència lògica]
tot model de G satisfà F	ssi	[per def. de model]
$\forall I$, si $I \models G$, llavors $I \models F$	ssi	[pel significat de si... llavors...]
$\forall I,\ I \not\models G$ o bé $I \models F$	ssi	[per def. de $\models$]
$\forall I,\ eval_I(G) = 0$ o bé $eval_I(F) = 1$	ssi	[per aritmètica]
$\forall I,\ eval_I(G) = 0$ o bé $1 - eval_I(F) = 0$	ssi	[per def. de *min*]
$\forall I,\ min(eval_I(G), 1 - eval_I(F)) = 0$	ssi	[per def. de $eval_I(\neg \ldots)$]
$\forall I,\ min(eval_I(G), eval_I(\neg F)) = 0$	ssi	[per def. de $eval_I(\ldots \wedge \ldots)$]
$\forall I,\ eval_I(G \wedge \neg F) = 0$	ssi	[per def. de $\models$]
$\forall I,\ I \not\models (G \wedge \neg F)$	ssi	[per def. de model]
$G \wedge \neg F$ no té models	ssi	[per def. de insatisfactible]
$G \wedge \neg F$ és insatisfactible		

8. (dificultat 2) Siguin F i G dues fórmules qualssevol. Demostra, fent servir tan sols la definició de la LProp, que F és lògicament equivalent a G ssi $(G \wedge \neg F) \vee (F \wedge \neg G)$ és insatisfactible ssi $F \leftrightarrow G$ és tautologia.

Fem primer el primer ssi:

$(G \wedge \neg F) \vee (F \wedge \neg G)$ és insatisfactible
ssi [per definició de insatisfactible]
$\forall I,\ I \not\models (G \wedge \neg F) \vee (F \wedge \neg G)$
ssi [per definició de $\models$]
$\forall I,\ eval_I((G \wedge \neg F) \vee (F \wedge \neg G)) = 0$
ssi [per definició de $eval$ $\vee$]
$\forall I,\ max(eval_I(G \wedge \neg F), eval_I(F \wedge \neg G)) = 0$
ssi [per definició de $eval$ $\wedge$]
$\forall I,\ max(min(eval_I(G), eval_I(\neg F)), min(eval_I(F), eval_I(\neg G))) = 0$

Definició de Lògica Proposicional

8. (dificultat 2) Siguin F i G dues fórmules qualssevol. Demostra, fent servir tan sols la definició de la LProp, que F és lògicament equivalent a G ssi $(G \wedge \neg F) \vee (F \wedge \neg G)$ és insatisfactible ssi $F \leftrightarrow G$ és tautologia.

Fem primer el primer ssi (cont.):

$\forall I,\ max(min(eval_I(G), eval_I(\neg F)), min(eval_I(F), eval_I(\neg G))) = 0$
ssi [per definició de $eval$ $\neg$]
$\forall I,\ max(min(eval_I(G), 1 - eval_I(F)), min(eval_I(F), 1 - eval_I(G))) = 0$
ssi [per definició de min i max,
i perquè $eval$ sempre dona 0 o 1]
$\forall I,\ eval_I(F) = eval_I(G)$
ssi [perquè $eval$ sempre dona 0 o 1]
$\forall I,\ (eval_I(F) = 1$ ssi $eval_I(G) = 1)$
ssi [per definició de $\models$]
$\forall I,\ (I \models F$ ssi $I \models G)$

8. (dificultat 2) Siguin F i G dues fórmules qualssevol. Demostra, fent servir tan sols la definició de la LProp, que F és lògicament equivalent a G ssi $(G \wedge \neg F) \vee (F \wedge \neg G)$ és insatisfactible ssi $F \leftrightarrow G$ és tautologia.

Fem primer el primer ssi (cont.):

$\forall I$, ($I \models F$ ssi $I \models G$)
ssi [per definició de model]
$\forall I$, (I és model de F ssi I és model de G)
ssi [per definició de equivalència de models]
F i G tenen els mateixos models
ssi [per definició de equivalència lògica]
F és lógicamente equivalente a G.

Definició de Lògica Proposicional

8. (dificultat 2) Siguin F i G dues fórmules qualssevol. Demostra, fent servir tan sols la definició de la LProp, que F és lògicament equivalent a G ssi $(G \wedge \neg F) \vee (F \wedge \neg G)$ és insatisfactible ssi $F \leftrightarrow G$ és tautologia.

Per al segon ssi:

$F \leftrightarrow G$ és tautologia
ssi [per def. $\leftrightarrow$]
$(F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$ és tautologia
ssi [per def. $\rightarrow$]
$(\neg F \vee G) \wedge (\neg G \vee F)$ és tautologia
ssi [per def. de tautologia]
$\forall I$ és model de $(\neg F \vee G) \wedge (\neg G \vee F)$
ssi [per def. de model]
$\forall I$, $I \models (\neg F \vee G) \wedge (\neg G \vee F)$
ssi [per def. de $\models$]
$\forall I$, $eval_I((\neg F \vee G) \wedge (\neg G \vee F)) = 1$

Definició de Lògica Proposicional

8. (dificultat 2) Siguin F i G dues fórmules qualssevol. Demostra, fent servir tan sols la definició de la LProp, que F és lògicament equivalent a G ssi $(G \wedge \neg F) \vee (F \wedge \neg G)$ és insatisfactible ssi $F \leftrightarrow G$ és tautologia.

Per al segon ssi (cont.):

$\forall I,\ eval_I(\ (\neg F \vee G) \wedge (\neg G \vee F)\ ) = 1$
ssi [per def. de $eval_I(\ \wedge\ )$]
$\forall I,\ min(eval_I(\neg F \vee G), eval_I(\neg G \vee F)) = 1$
ssi [per def. de $eval_I(\ \vee\ )$]
$\forall I,\ min(max(eval_I(\neg F), eval_I(G)), max(eval_I(\neg G), eval_I(F))) = 1$
ssi [per def. de $eval_I(\ \neg\ )$]
$\forall I,\ min(max(1 - eval_I(F), eval_I(G)), max(1 - eval_I(G), eval_I(F))) = 1$
ssi [per definició de *min* i *max*, i perquè $eval_I$ sempre dona 0 o 1]
$\forall I,\ eval_I(F) = eval_I(G)$
i seguim igual que en la demostració anterior.

Definició de Lògica Proposicional

16.(dificultat 2) Siguin F i G dues fórmules qualssevol. Si $F \rightarrow G$ és satisfactible i F és satisfactible, llavors G és satisfactible? Demostra-ho fent servir tan sols la definició de la LProp.

Farem un *intent de demostració*:

$F \rightarrow G$ és satisfactible	ssi	[per def. de $\rightarrow$]
$\neg F \vee G$ és satisfactible	ssi	[per def. de satisfactible]
$\neg F \vee G$ té algun model	ssi	[per def. de model]
$\exists I,\ I \models \neg F \vee G$	ssi	[per def. de $\models$]
$\exists I,\ eval_I(\neg F \vee G) = 1$	ssi	[per def. de $eval_I(\ \vee\ )$]
$\exists I,\ max(eval_I(\neg F), eval_I(G)) = 1$	ssi	[per def. de $eval_I(\ \neg\ )$]
$\exists I,\ max(1 - eval_I(F), eval_I(G)) = 1$	ssi	[per def. de *max*]
$\exists I,\ 1 - eval_I(F) = 1$ o bé $eval_I(G) = 1$	ssi	[per aritmètica]
$\exists I,\ eval_I(F) = 0$ o bé $eval_I(G) = 1$		

NO puc escriure $\exists I,\ eval_I(F) = 0 \vee eval_I(G) = 1$
NO té cap sentit, perquè $\vee$ és una connectiva que només té sentit dintre de fórmules, i $eval_I(F) = 0$ NO és una fórmula. Aquí estem raonant/explicant en català.

16.(dificultat 2) Siguin F i G dues fórmules qualssevol. Si $F \rightarrow G$ és satisfactible i F és satisfactible, llavors G és satisfactible? Demostra-ho fent servir tan sols la definició de la LProp.

Farem un *intent de demostració (cont)*:

F és satisfactible	ssi	[per def. de satisfactible]
F té algun model	ssi	[per def. de model]
$\exists\, I', I' \models F$	ssi	[per def. de $\models$]
$\exists\, I', eval_{I'}(F) = 1$		

D'aquest intent de demostració, veiem que si existeix una I que no és model de F i un altre I' que sí és model de F, llavors ja és compleixen les dues condicions de que $F \rightarrow G$ és satisfactible i F és satisfactible, i això no implica res sobre la G!

16.(dificultat 2) Siguin F i G dues fórmules qualssevol. Si $F \rightarrow G$ és satisfactible i F és satisfactible, llavors G és satisfactible? Demostra-ho fent servir tan sols la definició de la LProp.

D'aquest intent de demostració, veiem que si existeix una I que no és model de F i un altre I' que sí és model de F, llavors ja és compleixen les dues condicions de que $F \rightarrow G$ és satisfactible i F és satisfactible, i això no implica res sobre la G!

Això ens inspira per a adonar-nos que la propietat és falsa, i per a donar aquest contraexemple:

Sigui F la fórmula p

Sigui G la fórmula $p \wedge \neg p$.

Llavors $F \rightarrow G$ és satisfactible i F és satisfactible, però G no ho és!

Definició de Lògica Proposicional

16.(dificultat 2) Siguin F i G dues fórmules qualssevol. Si $F \to G$ és satisfactible i F és satisfactible, llavors G és satisfactible? Demostra-ho fent servir tan sols la definició de la LProp.

$F \to G$ és satisfactible	ssi	[per def. de F i G]
$p \to (p \wedge \neg p)$ és satisfactible	ssi	[per def. de $\to$]
$\neg p \vee (p \wedge \neg p)$ és satisfactible	ssi	[per def. de satisfactible]
$\neg p \vee (p \wedge \neg p)$ té algun model	ssi	[per def. de model]
$\exists I,\ I \models \neg p \vee (p \wedge \neg p)$	ssi	[per def. de $\models$]
$\exists I,\ eval_I(\neg p \vee (p \wedge \neg p)) = 1$	ssi	[per def. de $eval_I(\vee)$]
$\exists I,\ max(eval_I(\neg p), eval_I(p \wedge \neg p)) = 1$	ssi	[per def. de $eval_I(\neg)$]
$\exists I,\ max(1 - eval_I(p), eval_I(p \wedge \neg p)) = 1$	ssi	[per def. de max]
$\exists I,\ 1 - eval_I(p) = 1$ o $eval_I(p \wedge \neg p) = 1$	ssi	[per aritmètica]
$\exists I,\ eval_I(p) = 0$ o $eval_I(p \wedge \neg p) = 1$	ssi	[agafem la I tal que $I(p) = 0$]
cert		

Definició de Lògica Proposicional

16.(dificultat 2) Siguin F i G dues fórmules qualssevol. Si $F \to G$ és satisfactible i F és satisfactible, llavors G és satisfactible? Demostra-ho fent servir tan sols la definició de la LProp.

F és satisfactible	ssi	[per def. de F]
p és satisfactible	ssi	[per def. de satisfactible]
p té algun model	ssi	[per def. de model]
$\exists I',\ I' \models p$	ssi	[per def. de $\models$]
$\exists I',\ eval_{I'}(p) = 1$	ssi	[agafem la I' tal que $I'(p) = 1$]
cert		

G és insatisfactible (☞ veure exercici 2).

21. (dificultat 2) Demostra que l'equivalència lògica és realment una relació d'**equivalència**.

Una relacion binària R sobre un conjunt S és un subconjunt del producte cartesià $S \times S$. És a dir R ens diu quines parelles estan relacionades, quines parelles (e, e') estan en R (on e i e' són elements de S).

R és **reflexiva** si (e, e) està en R		per a tot e	de S.
R és **simètrica** si (e, e') en R	implica (e', e) en R	per a tot e,e'	de S.
R és **transitiva** si (e, e') en R i (e', e'') en R	implica (e, e'') en R	per a tot e,e',e''	de S.

I si R compleix les tres propietats llavors R és una relació d'**equivalència**.

Definició de Lògica Proposicional

21. (dificultat 2) Demostra que l'equivalència lògica és realment una relació d'**equivalència**.

Una relacion binària R sobre un conjunt S és un subconjunt del producte cartesià $S \times S$. És a dir R ens diu quines parelles estan relacionades, quines parelles (e, e') estan en R (on e i e' són elements de S).

Altres notacions:

- com un predicat binari:

R és **reflexiva** si $R(e, e)$		per a tot e
R és **simètrica** si $R(e, e')$	implica $R(e', e)$	per a tot e,e'
R és **transitiva** si $R(e, e')$ i $R(e', e'')$	implica $R(e, e'')$	per a tot e,e',e''

21. (dificultat 2) Demostra que l'equivalència lògica és realment una relació d'**equivalència**.

Una relacion binària R sobre un conjunt S és un subconjunt del producte cartesià $S \times S$. És a dir R ens diu quines parelles estan relacionades, quines parelles (e, e') estan en R (on e i e' són elements de S).

Altres notacions:

- com un predicat infix:

R és **reflexiva** si eRe		per a tot e	de S.
R és **simètrica** si eRe'	implica $e'Re$	per a tot e,e'	de S.
R és **transitiva** si eRe' i $e'Re''$	implica eRe''	per a tot e,e',e''	de S.

Per exemple si R és $>$, la notació infixa és molt més habitual: escribim $e > e'$, etc.

Definició de Lògica Proposicional

18. (dificultat 2) Demostra les següents equivalèncias entre fórmules:

$F \wedge F$	$\equiv$	F	idempotència de $\wedge$
$F \vee F$	$\equiv$	F	idempotència de $\vee$
$F \wedge G$	$\equiv$	$G \wedge F$	conmutativitat de $\wedge$
$F \vee G$	$\equiv$	$G \vee F$	conmutativitat de $\vee$
$(F \wedge G) \wedge H$	$\equiv$	$F \wedge (G \wedge H)$	associativitat de $\wedge$
$(F \vee G) \vee H$	$\equiv$	$F \vee (G \vee H)$	associativitat de $\vee$

Aquestes tres propietats (idempotència, commutativitat, asociatividad de $\wedge$ i de $\vee$) ens indiquen que a vegades podem escriure les fórmules de manera més "relaxada", ometent alguns parèntesis. I també, que podem veure una CNF com un CONJUNT (and) de clàusules, i podem veure una clàusula com un CONJUNT (un or) de literals.

18. (dificultat 2) Demostra les següents equivalències entre fórmules:

$\neg\neg F$	$\equiv$	F	doble negació
$\neg(F \wedge G)$	$\equiv$	$\neg F \vee \neg G$	llei de De Morgan 1
$\neg(F \vee G)$	$\equiv$	$\neg F \wedge \neg G$	llei de De Morgan 2

Aquestes tres propietats ens serveixen per a transformar fórmules "movent les negacions cap a dins", fins que només hi hagi negacions aplicades a símbols de predicat.

Definició de Lògica Proposicional

18. (dificultat 2) Demostra les següents equivalències entre fórmules:

$(F \wedge G) \vee H$	$\equiv$	$(F \vee H) \wedge (G \vee H)$	distributivitat 1
$(F \vee G) \wedge H$	$\equiv$	$(F \wedge H) \vee (G \wedge H)$	distributivitat 2

Una vegada les negacions estan aplicades als símbols de predicat, aplicant distributivitat 1 $(F \wedge G) \vee H \Longrightarrow (F \vee H) \wedge (G \vee H)$ d'esquerra a dreta obtenim una CNF.

Hi ha un detall: Demostra que $p \wedge (q \vee q) \equiv p \wedge q$.
Podem "aplicar" alegrement la idempotència del $\vee$ sobre la subfórmula $q \vee q$?
No! Cal demostrar primer el següent Lema de Substitució:

Definició de Lògica Proposicional

23. (dificultat 3) Lema de Substitució.

Siguin F, G, G' fórmules qualssevol, amb $G \equiv G'$.
Si en F substituïm una aparició de una subfórmula G per G' obtenim una nova fórmula F' amb $F \equiv F'$.

En el exemple anterior:

$$\begin{array}{ll} F \text{ és} & p \wedge (q \vee q) \\ G \text{ és} & \quad\;\, (q \vee q) \\ G' \text{ és} & \qquad\; q \\ F' \text{ és} & p \wedge q\ . \end{array}$$

Definició de Lògica Proposicional

Per al proper dia de classe:

☞ Capítol 2 dels apunts:
exercicis 26, 27, 28, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37.