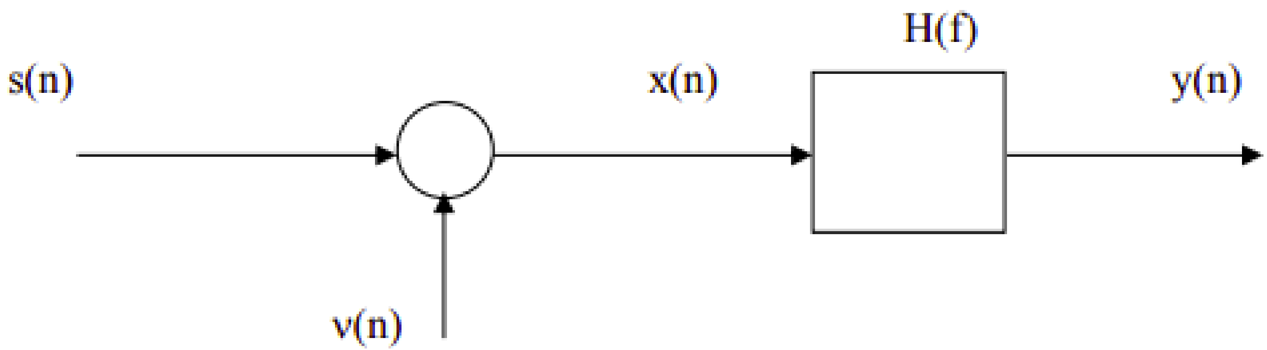
Avaliação Remota

Hugo Barreiro
RA 118876

Questão 01

Na figura abaixo temos $s(n) = A_c \cos(2\pi f_c n)$, onde $f_c = \frac{1}{N}$, N sendo o período da cossenoide. Soma-se a $s(n)$ um ruído $\nu(n)$, branco, gaussiano e de densidade espectral de potência igual a $\frac{N_0}{2}$. O sinal resultante $x(n)$ é filtrado por $H(f)$, um filtro passa-faixas ideal, de ganho unitário nos intervalos $[-f_c - \frac{W}{2}, -f_c + \frac{W}{2}]$ e $[f_c - \frac{W}{2}, f_c + \frac{W2}{]}$. Na saída do filtro temos o sinal $y(n)$.



Obtenha então e esboce:

a: A densidade espectral de potência $S_y(f)$. A densidade espectral de potência do sinal após o filtro é dada por $S_y(f) = (S_x(f) + S_\nu(f))|H(f)|^2$, já que os sinais x e ν são independentes. Como $x(n)$ é uma cossenoide, e $\nu(n)$ um ruído branco gaussiano, temos:

$$S_y(f) = \begin{cases} \frac{A_c^2}{4} + \frac{N_0}{2} & |f| = f_c \\ \frac{N_0}{2} & fc - \frac{W}{2} \leq |f| \leq f_c + \frac{W}{2} \text{ e } |f| \neq f_c \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

b: A função de autocorrelação $R_y(m)$. Podemos reescrever a densidade espectral de potência como:

$$S_y(f) = \frac{N_0}{2}\text{rect}(\frac{f - f_c}{W}) + \frac{N_0}{2}\text{rect}(\frac{f + f_c}{W}) + \frac{A_c^2}{4}\delta(f - f_c) + \frac{A_c^2}{4}\delta(f + f_c)$$

Como sabemos que a função de autocorrelação é a Transformada de Fourier inversa da Densidade Espectral de Potência,

$$R_y(m) = \mathcal{F}^{-1}\{S_y(f)\} = (\frac{A_c}{2} + N_0\text{sinc}(Wm))\cos(2\pi f_c m)$$

c: A função densidade de probabilidade da variável aleatória $y(n = N)$.

Como $x(n)$ é um processo estocástico gaussiano, $y(n)$ também o é, com média $\mu_y(n) = \mu_x(n)H(0) = 0$ e variância $\sigma_y^2(n) = R_y(0) = \frac{A_c}{2} + N_0$. Logo, $y(n = N) \sim N(0, \frac{A_c}{2} + N_0)$.

Questão 02

Considere os sinais

$$x_{AR}(n) = -0.8987x(n-1) – 0.9018x(n-2) + \nu(n)$$
$$x_{ARMA}(n) = 1.9368x(n-1) – 0.9519x(n-2) + \nu(n) – 1.8894\nu(n-1) + \nu(n-2)$$

a: Obtenha e trace a densidade espectral de potência de ambos os sinais.

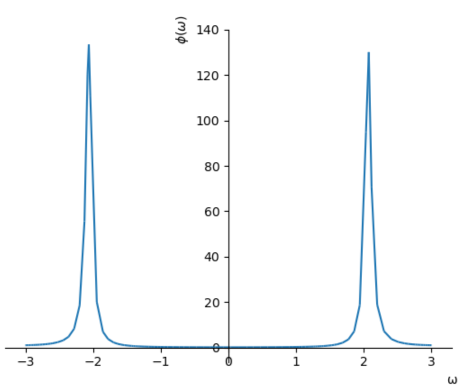
Para cada item, podemos transformar as equações a diferenças em suas respectivas funções de transferência:

$$X_{AR}(z) = \frac{A_{AR}(z)}{B_{AR}(z)} = \frac{1}{1 + 0.8987z^{-1} + 0.9018z^{-2}} N(z)$$
$$X_{ARMA}(z) = \frac{A_{ARMA}(z)}{B_{ARMA}(z)} = \frac{1 - 1.8894z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1.9368z^{-1} + 0.9519z^{-2}} N(z)$$

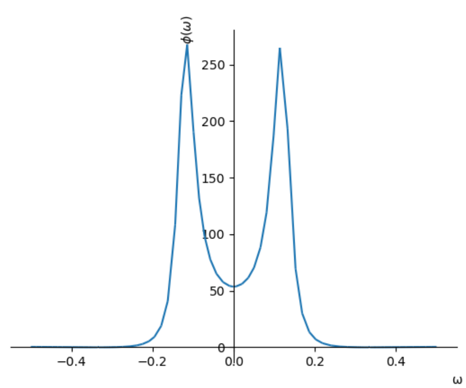
Como sabemos a relação entre a densidade espectral de potência e as expressões $A(z)$ e $B(z)$, temos, supondo que o ruído tem variância unitária:

$$\phi_{AR}(z) = \frac{A_{AR}(z)A^*_{AR}(\frac{1}{z^*})}{B_{AR}(z)B^*_{AR}(\frac{1}{z^*})} = \frac{1}{\left(1.0 + \frac{0.899}{z} + \frac{0.902}{z^2}\right)\left(0.902z^2 + 0.899z + 1.0\right)}$$
$$\phi_{ARMA}(z) = \frac{A_{ARMA}(z)A^*_{ARMA}(\frac{1}{z^*})}{B_{ARMA}(z)B^*_{ARMA}(\frac{1}{z^*})} = \frac{\left(1.0 - \frac{1.89}{z} + \frac{1}{z^2}\right)\left(z^2 - 1.89z + 1.0\right)}{\left(1.0 - \frac{1.94}{z} + \frac{0.952}{z^2}\right)\left(0.952z^2 - 1.94z + 1.0\right)}$$

Lembrando que podemos fazer a substituição $z = e^{i\omega}$, podemos plotar as funções $\phi(\omega)$:



(a) Modelo AR

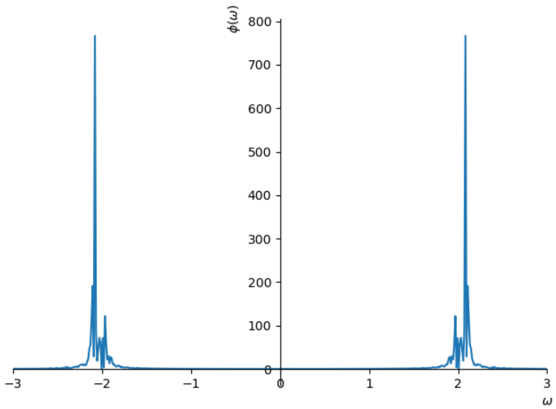


(b) Modelo ARMA

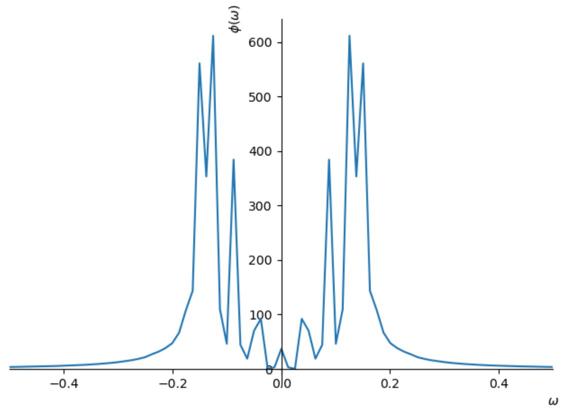
b: Considere, para cada um deles, uma realização com um número suficiente de dados, e forneça a densidade espectral de potência a partir da transformada de Fourier de uma estimação temporal da autocorrelação.

Podemos simular estes experimentos amostrando um número suficientemente grande de ruído, independente, gaussiano, de média nula e variância unitária e submetendo-o ás funções de transferência acima. A partir do cálculo do vetor de autocorrelação podemos estimar a densidade espectral de potência com sua Transformada de Fourier. Para ambos os casos foram amostrados 1000 pontos e calculado o vetor de autocorrelação até um lag de 500 unidades.

Podemos observar que os gráficos obtidos se aproximam muito bem dos teóricos, apresentados anteriormente.



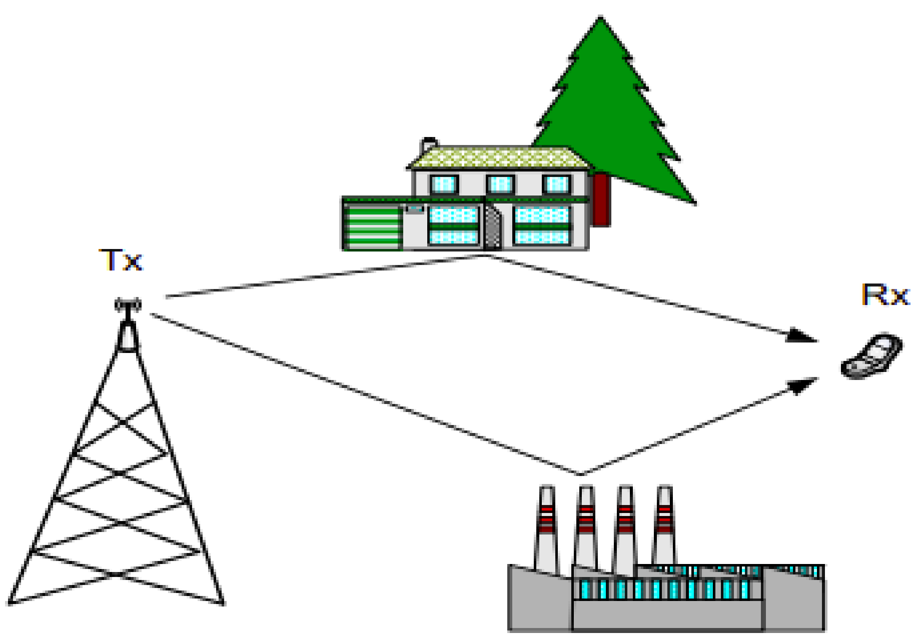
(a) Modelo AR



(b) Modelo ARMA

Questão 03

Para modelar um canal de comunicações digitais via rádio usa-se, comumente, o chamado "modelo de dois raios", ilustrado na figura a seguir. Neste modelo, o sinal $x(n)$ recebido em $\mathrm{R_X}$ é modelado como o resultante da soma de duas versões do sinal $s(n)$ transmitido por $\mathrm{T_X}$, cada versão multiplicada por certo ganho e atrasada de certo número de amostras. Evidentemente, a soma dessas versões defasadas provoca uma distorção no sinal transmitido. Para compensá-la necessita-se de incorporar um filtro ao receptor que funcione como sistema inverso ao canal. É o chamado processo de desconvolução. Para efeito de simplificação, costuma-se atribuir atraso zero e ganho unitário ao primeiro raio. Se temos então atraso N_0 e ganho a para o segundo raio, o modelo do canal é dado por $H(z) = 1 + az^{-N_0}$. Queremos calcular o filtro de desconvolução $W(z)$, com M coeficientes, por dois métodos: o método de Wiener, largamente discutido na aula; e o método de Robinson, que remonta à aplicação de predição linear na desconvolução sísmica.



i: Indique a formulação de Wiener para a solução do problema, isto é, a equação matricial que fornece os coeficientes ótimos $\mathbf{w} = [w_0, w_1, \ldots, w_{M-1}]^\mathsf{T}$, do filtro de desconvolução, explicitando claramente as grandezas envolvidas.

Pelo canal proposto, o sinal recebido em $\mathrm{R_X}$ é $x(n) = s(n) + as(n - N_0)$. Os termos da matriz de autocorrelação de $\mathbf{x}$, para M termos, são:

$$\begin{aligned} r(k) &= E[x(n)x(n-k)] \\ &= E[(s(n) + as(n - N_0))(s(n-k) + as(n-k-N_0)] \\ &= E[s(n)s(n-k)] + aE[s(n-N_0)s(n-k)] + aE[s(n)s(n-(k+N_0))] + a^2E[s(n-N_0)s(n-(k+N_0))] \end{aligned}$$

Cada um dos termos se refere à correlação entre amostras do sinal $s(n)$. Essa correlação é nula, para amostras diferentes. Então:

$$\begin{aligned} E[s(n)s(n-k)] &= \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\ E[s(n-N_0)s(n-k)] &= \begin{cases} 1 & k = N_0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\ E[s(n)s(n-(k+N_0))] &= 0 \\ E[s(n-N_0)s(n-(k+N_0))] &= \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, os termos são:

$$\begin{aligned} r(0) &= 1 + a^2 \\ r(N_0) &= a \\ r(k) &= 0 \qquad \forall k \neq 0 \text{ e } k \neq N_0 \end{aligned}$$

Por exemplo, para $M = 3$ e $N_0 = 2$, a matriz resultante é

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1+a^2 & 0 & a \\ 0 & 1+a^2 & 0 \\ a & 0 & 1+a^2 \end{bmatrix}$$

Falta encontrarmos o vetor de correlação cruzada entre o sinal recebido, $x(n)$ e o sinal desejado, $d(n)$. É uma escolha natural desejarmos obter o sinal original, logo $d(n) = s(n)$.

$$\begin{aligned} p(k) &= E[d(n)x(n-k)] \\ &= E[s(n)x(n-k)] \\ &= E[s(n)s(n-k)] + aE[s(n)s(n-(k+N_0))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[s(n)s(n-k)] &= \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\ E[s(n)s(n-(k+N_0))] &= 0 \end{aligned}$$

Dessa forma, seguindo o mesmo exemplo, $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Podemos, então, fornecer a solução de Wiener para o problema da desconvolução: $\mathbf{w_{opt}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}$.

ii: Indique a formulação de Robinson para a solução do problema, isto é, a equação matricial que fornece os coeficientes ótimos de predição $\mathbf{w_f} = [w_{1f}, w_{2f}, \ldots, w_{(M-1)f}]^\mathsf{T}$, do filtro de desconvolução, explicitando claramente as grandezas envolvidas.

Já para a formulação de Robinson, uma desconvolução não-supervisionada, não temos, teoricamente, acesso ao sinal desejado $s(n)$ para obtermos o filtro de Wiener ótimo. Definimos, então, o erro de predição:

$$e_f(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{K} w_{kf}x(n-k)$$

Queremos que o erro de predição seja o menor possível: min $E[|e_f(n)|^2]$. A solução trivial, $w_{kf} = 0 \quad \forall k$ pode ser evitada introduzindo algumas restrições. Tais restrições podem ser obtidas impondo que o erro é descorrelacionado de amostras anteriores: $E[e_f(n)x(n-l)] = 0 \quad l \geq 1$.

$$E[e_f(n)x(n-l)] = 0$$
$$\sum_{k=1}^{K} E[x(n-k)x(n-l)]a_k = E[x(n)x(n-l)] \quad l = 1, 2, \ldots, K$$

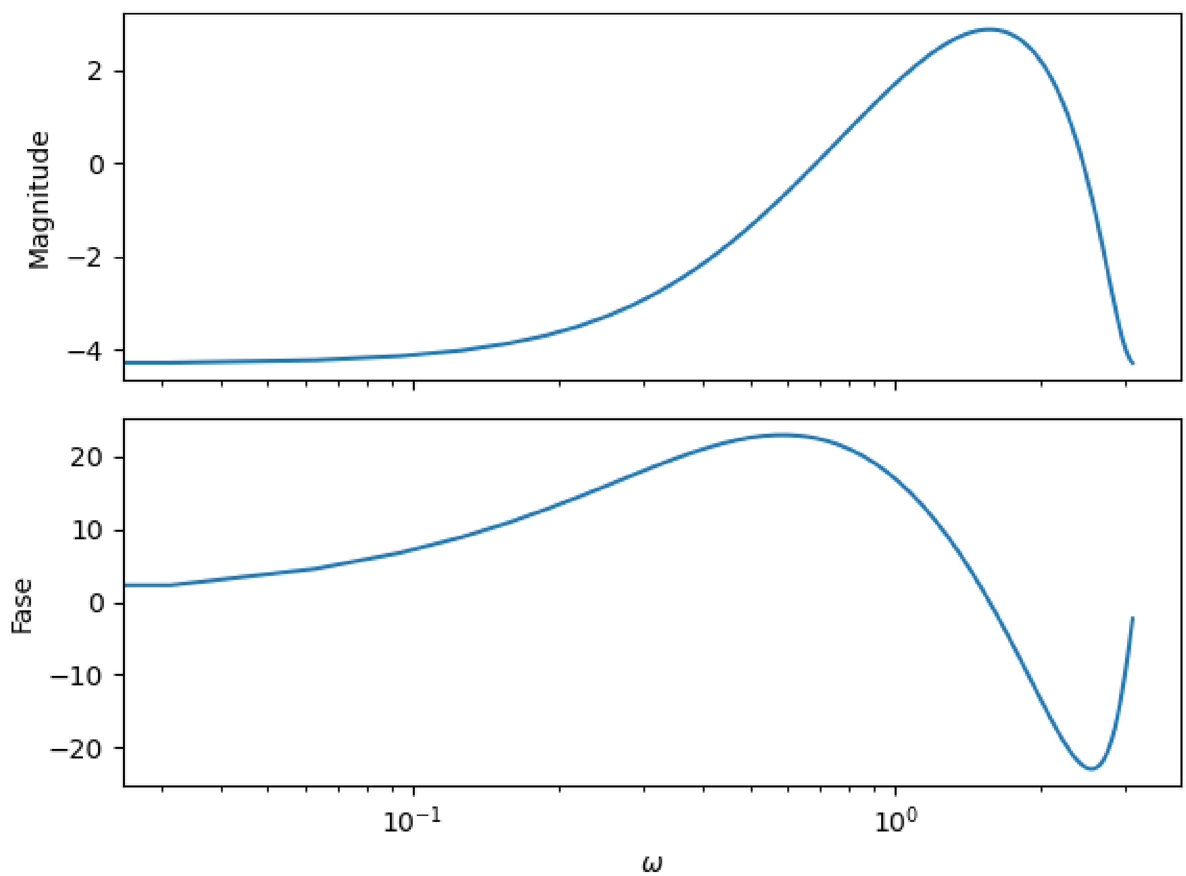
Suponha agora o caso bem simples de $a = 0.625$ e $N_0 = 1$.

iii: Obtenha a solução de Wiener para $M = 9$ Em seguida, trace a resposta em frequência, módulo e fase, do sistema combinado $H(z)W(z)$.

Para a solução de Wiener, obtemos o seguinte conjunto de coeficientes:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ -0.625 \\ 0.39 \\ -0.243 \\ 0.151 \\ -0.0932 \\ 0.0561 \\ -0.0316 \\ 0.0142 \end{bmatrix}$$

E a resposta do sistema $H(z)W(z)$:



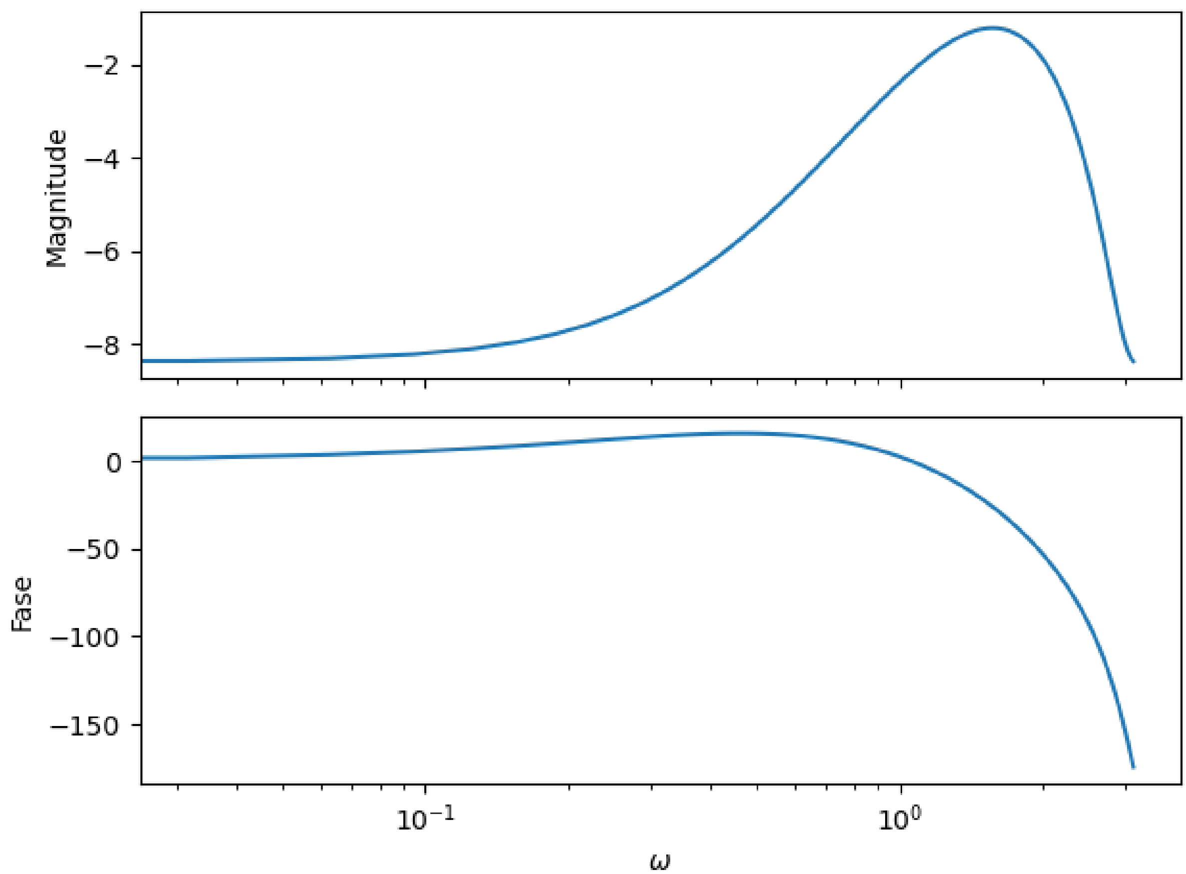
iv: Obtenha também a solução via predição linear para $M = 9$. Em seguida, trace a resposta em frequência, módulo e fase do sistema combinado $H(z)Wf(z)$. Compare com a do item anterior.

v: Repita os itens anteriores para $a = 1.6$. Faça uma análise de seus resultados.

Para o filtro de Wiener, com $a = 1.6$ obtemos um outro conjunto de coeficientes:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0.391 \\ -0.244 \\ 0.152 \\ -0.095 \\ 0.0591 \\ -0.0364 \\ 0.0219 \\ -0.0123 \\ 0.00554 \end{bmatrix}$$

E a resposta do sistema $H(z)W(z)$:



Observe que, para altas frequências, a fase da resposta ultrapassa os 180 graus, o que leva a erros de decodificação. Foi observada uma taxa de erro em torno de 25% para este canal. Algumas simulações a mais foram feitas e chegou-se à conclusão de que se $a < 1$, a taxa de erro é nula, ou seja, o receptor consegue recuperar completamente o sinal original transmitido.