Algoritmos exatos para problemas de spanner em grafos [1]

Hugo Braga

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
Orientadora: Prof. Yoshiko Wakabayashi

Defesa de Doutorado
14 de Dezembro de 2018

[1] Projeto financiado pela FAPESP (Proc. 2013/22875-9)

Agenda

Definição

- $G = (V, E)$ grafo conexo $w : E \to \mathbb{R}^+$ pesos associados às arestas de G
  $t \geq 1$, número real
- Dado (G, w, t)
- Um *t-spanner* de G é um subgrafo gerador H de G t.q.

$$\mathrm{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \mathrm{dist}_G(u, v), \quad \forall\, u, v \in V,$$

- t - *fator de dilatação*
- Exemplo (com peso unitário):

Definição

- $G = (V, E)$ grafo conexo $w : E \to \mathbb{R}^+$ pesos associados às arestas de G
  $t \geq 1$, número real
- Dado (G, w, t)
- Um *t-spanner* de G é um subgrafo gerador H de G t.q.

$$\mathrm{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \mathrm{dist}_G(u, v), \quad \forall\, u, v \in V,$$

- t - *fator de dilatação*
- Exemplo (com peso unitário):

Definição

- $G = (V, E)$ grafo conexo $w : E \to \mathbb{R}^+$ pesos associados às arestas de G
  $t \geq 1$, número real
- Dado (G, w, t)
- Um *t-spanner* de G é um subgrafo gerador H de G t.q.

$$\text{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \text{dist}_G(u, v), \quad \forall\, u, v \in V,$$

- t - *fator de dilatação*
- Exemplo (com peso unitário):

Definição

- $G = (V, E)$ grafo conexo $w : E \to \mathbb{R}^+$ pesos associados às arestas de G
  $t \geq 1$, número real
- Dado (G, w, t)
- Um *t-spanner* de G é um subgrafo gerador H de G t.q.

$$\text{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \text{dist}_G(u, v), \quad \forall\, u, v \in V,$$

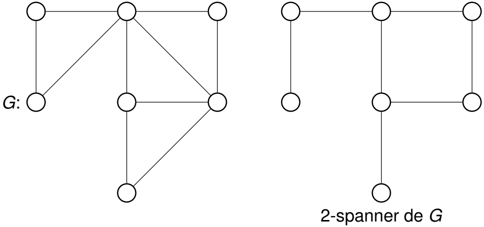
- t - *fator de dilatação*
- Exemplo (com peso unitário):

Definição

- $G = (V, E)$ grafo conexo $w : E \to \mathbb{R}^+$ pesos associados às arestas de G
  $t \geq 1$, número real
- Dado (G, w, t)
- Um *t-spanner* de G é um subgrafo gerador H de G t.q.

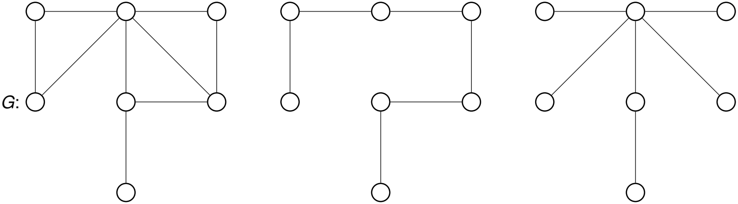
$$\mathrm{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \mathrm{dist}_G(u, v), \quad \forall\, u, v \in V,$$

- t - *fator de dilatação*
- Exemplo (com peso unitário):



Árvore *t*-spanner

- H é uma árvore $\rightarrow$ H é uma *árvore t-spanner* de G



Árvore 3-spanner de G

Árvore 2-spanner de G

Problemas centrais

- Árvore t-spanner de peso mínimo:
  dado (G, w, t)
  encontrar uma árvore t-spanner em G de peso mínimo
- t-spanner de peso mínimo:
  dado (G, w, t)
  encontrar um t-spanner em G de peso mínimo

Problemas centrais

- **Árvore t-spanner de peso mínimo**:
  dado (G, w, t)
  encontrar uma árvore t-spanner em G de peso mínimo
- **t-spanner de peso mínimo**:
  dado (G, w, t)
  encontrar um t-spanner em G de peso mínimo

Aplicações

- Necessidade de economia de recursos ou computação rápida
- Computação distribuída

Aplicações

- Necessidade de economia de recursos ou computação rápida
- Computação distribuída

Histórico

- Peleg & Ullman, 1987: noção de spanner
- Peleg & Schäffer, 1989: spanner esparsa

Histórico

- Peleg & Ullman, 1987: noção de spanner
- Peleg & Schäffer, 1989: spanner esparsa

Complexidade

- Árvore spanner de peso mínimo (versão de decisão):
  - peso unitário: $t \geq 4$ (fixo): NP-completo
    $t = 3$: aberto
    $t = 2$: P
  - peso arbitrário: $t > 1$: NP-completo

  Cai & Corneil, 1995

Complexidade

- Árvore spanner de peso mínimo (versão de decisão):
  - peso unitário: $t \geq 4$ (fixo): NP-completo
    $t = 3$: aberto
    $t = 2$: P
  - peso arbitrário: $t > 1$: NP-completo

  Cai & Corneil, 1995

Complexidade

- t-spanner de peso mínimo (versão de decisão):
  - peso unitário: $t \geq 2$ (fixo): NP-completo

    Cai, 1994

Definição equivalente de spanner

- São equivalentes:
  (a) $\text{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \text{dist}_G(u, v) \; \forall\, u, v \in V$

  (b) $\text{dist}_H(u, v) \leq t \cdot w_{uv} \; \forall\, uv \in E$

  Cai & Corneil, 1995

Definição equivalente de spanner

- São equivalentes:
  (a) $\mathrm{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \mathrm{dist}_G(u, v) \; \forall \, u, v \in V$

  (b) $\mathrm{dist}_H(u, v) \leq t \cdot w_{uv} \; \forall \, uv \in E$

  Cai & Corneil, 1995

Formulações

Árvore *t*-spanner de peso mínimo

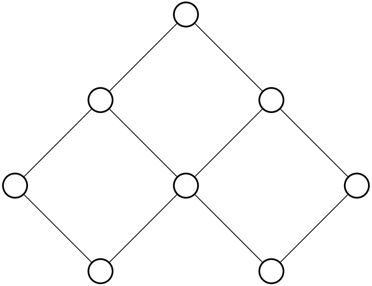
Poliedro das árvores *t*-spanner

$F \subseteq E$: $G[F]$: subgrafo de G induzido por F

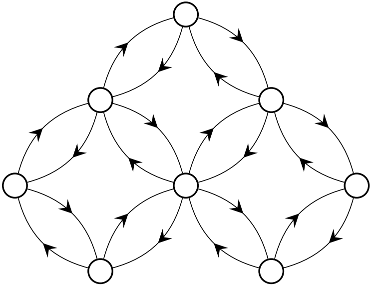
$$P_{tree}(G,t) := \text{conv}\{\mathcal{X}^F \in \mathbb{R}^{|E|} \mid G[F] \text{ é uma árvore } t\text{-spanner}\}$$

Grafo G e correspondente digrafo D

G:



D:



Subgrafo enraizado em r

- $G = (V, E)$, $D = (V, A)$
- Fixe $r \in V$
  $z^r = (z^r_{ij})_{ij \in A}$

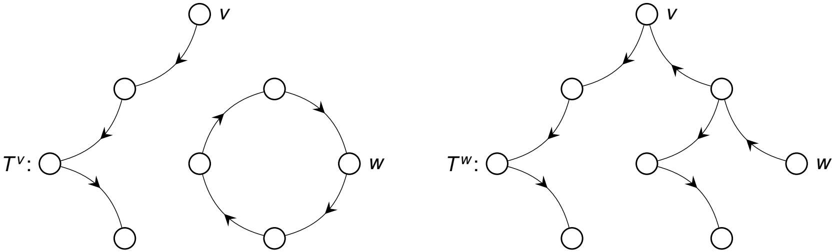
$$\sum_{i \in \delta^-(j)} z^r_{ij} = 1 \qquad \forall j \in V \setminus \{r\} \tag{1}$$

$$\sum_{i \in \delta^-(r)} z^r_{ir} = 0 \tag{2}$$

$$z^r_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall ij \in A \tag{3}$$

Subgrafos T^v e T^w

- Seja $\tilde{z}^r$ ponto satisfaz sistema anterior
- $T^r \subseteq D$ t.q. $A(T^r) = \{ij \in A : \tilde{z}^r_{ij} = 1\}$

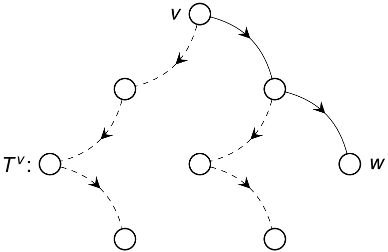


Relacionando os subgrafos T^r

- $x \in \{0,1\}^{|E|}$
  Para cada $e \in E$, $x(e) = 1$ sse e faz parte da solução

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i \in \delta^-(j)} z^r_{ij} = 1 && \forall r \in V, \forall j \in V \setminus \{r\} \\
&\sum_{i \in \delta^-(r)} z^r_{ir} = 0 && \forall r \in V \\
&x_e = z^r_{ij} + z^r_{ji} && \forall r \in V, \forall e = \{i,j\} \in E && (4) \\
&x_e \in \{0,1\} && \forall e \in E && (5) \\
&z^r_{ij} \in \{0,1\} && \forall r \in V, ij \in A
\end{aligned}
$$

Arborescências T^v e T^w se sobrepondo



Representando os caminhos t-spanner

- Seja $(\tilde{z}, \tilde{x})$ um ponto que satisfaz o sistema anterior
- Seja $r \in V$
- $T \subseteq G$ o grafo subjacente a T^r t.q. $E(T) = \{\{i, j\} \in E : ij \in T^r \text{ ou } ji \in T^r\}$
- $\forall u, v \in V$, seja $T_{u,v}$ o caminho entre u e v em T
- $y \in \mathbb{R}^{|E| \times |E|}$: $\forall f = uv, e \in E, y_e^{uv} = 1 \Leftrightarrow f \in T_{u,v}$

Representando os caminhos *t*-spanner

- Seja $(\tilde{z}, \tilde{x})$ um ponto que satisfaz o sistema anterior
- Seja $r \in V$
- $T \subseteq G$ o grafo subjacente a T^r t.q. $E(T) = \{\{i, j\} \in E : ij \in T^r \text{ ou } ji \in T^r\}$
- $\forall u, v \in V$, seja $T_{u,v}$ o caminho entre u e v em T
- $y \in \mathbb{R}^{|E| \times |E|}$: $\forall f = uv, e \in E, y_e^{uv} = 1 \Leftrightarrow f \in T_{u,v}$

Representando os caminhos t-spanner

- Seja $(\tilde{z}, \tilde{x})$ um ponto que satisfaz o sistema anterior
- Seja $r \in V$
- $T \subseteq G$ o grafo subjacente a T^r t.q.
  $E(T) = \{\{i, j\} \in E : ij \in T^r \text{ ou } ji \in T^r\}$
- $\forall u, v \in V$, seja $T_{u,v}$ o caminho entre u e v em T
- $y \in \mathbb{R}^{|E| \times |E|}$: $\forall f = uv, e \in E, y_e^{uv} = 1 \Leftrightarrow f \in T_{u,v}$

Representando os caminhos *t*-spanner

- Seja $(\tilde{z}, \tilde{x})$ um ponto que satisfaz o sistema anterior
- Seja $r \in V$
- $T \subseteq G$ o grafo subjacente a T^r t.q.
  $E(T) = \{\{i, j\} \in E : ij \in T^r \text{ ou } ji \in T^r\}$
- $\forall u, v \in V$, seja $T_{u,v}$ o caminho entre u e v em T
- $y \in \mathbb{R}^{|E| \times |E|}$: $\forall f = uv, e \in E$, $y_e^{uv} = 1 \Leftrightarrow f \in T_{u,v}$

Formulação 1: sem rótulos para distâncias

$$\min \sum_{e \in E} w_e x_e$$

s.t.

$$\sum_{i \in \delta^-(j)} z_{ij}^r = 1 \qquad \forall r \in V,\ \forall j \in V \setminus \{r\} \tag{6}$$

$$\sum_{i \in \delta^-(r)} z_{ir}^r = 0 \qquad \forall r \in V \tag{7}$$

$$\sum_{e \in E} x_e = |V| - 1 \tag{8}$$

$$x_e = z_{ij}^r + z_{ji}^r \qquad \forall r \in V,\ \forall e = \{i,j\} \in E \tag{9}$$

$$z_{ij}^u - z_{ij}^v \leq y_e^{uv} \leq z_{ij}^u + z_{ij}^v \qquad \forall uv \in E,\ \forall e = \{i,j\} \in E \tag{10}$$

$$z_{ji}^u - z_{ji}^v \leq y_e^{uv} \leq z_{ji}^u + z_{ji}^v \qquad \forall uv \in E,\ \forall e = \{i,j\} \in E \tag{11}$$

$$\sum_{e \in E} w_e\, y_e^{uv} \leq t \cdot w_{uv} \qquad \forall uv \in E \tag{12}$$

$$x_e \in \{0,1\},\ y_e^f \in \{0,1\},\ z_{ij}^v \in \{0,1\} \qquad \forall e \in E,\ \forall f \in E,\ \forall v \in V,\ \forall ij \in A \tag{13}$$

Formulação 2

- Os seguintes elementos são definidos da mesma forma como na Formulação 1:
  - $G = (V, E)$, $D = (V, A)$
  - Variáveis:
    $x_e \in \{0, 1\} \qquad \forall e \in E$
    $z_{ij}^v \in \{0, 1\} \qquad \forall v \in V, \forall ij \in A$
  - $T^v \qquad \forall v \in V$

Formulação 2

- Os seguintes elementos são definidos da mesma forma como na Formulação 1:
  - $G = (V, E)$, $D = (V, A)$
  - Variáveis:
    $x_e \in \{0, 1\} \qquad \forall e \in E$
    $z_{ij}^v \in \{0, 1\} \qquad \forall v \in V, \forall ij \in A$
  - $T^v \qquad \forall v \in V$

Formulação 2

- Os seguintes elementos são definidos da mesma forma como na Formulação 1:
  - $G = (V, E)$, $D = (V, A)$
  - Variáveis:
    $x_e \in \{0, 1\} \qquad \forall e \in E$
    $z_{ij}^{v} \in \{0, 1\} \qquad \forall v \in V, \forall ij \in A$
  - $T^v \qquad \forall v \in V$

Formulação 2

- Os seguintes elementos são definidos da mesma forma como na Formulação 1:
  - $G = (V, E)$, $D = (V, A)$
  - Variáveis:
    $x_e \in \{0, 1\} \qquad \forall e \in E$
    $z_{ij}^v \in \{0, 1\} \qquad \forall v \in V, \forall ij \in A$
  - $T^v \qquad \forall v \in V$

Variável que representa distância

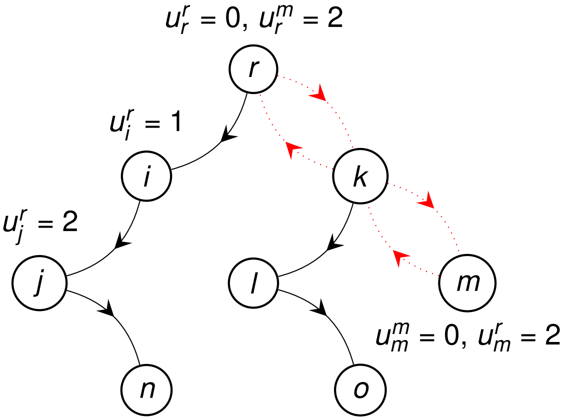
- Para cada $r \in V$, $u^r \in \mathbb{R}^{|V|}$
- Para cada $i \in V$:
  u_i^r : distância entre r e i em T^r
  M_{ij}^r : limite superior para $u_i^r - u_j^r$

Variável que representa distância

- Para cada $r \in V$, $u^r \in \mathbb{R}^{|V|}$
- Para cada $i \in V$:
  u_i^r: distância entre r e i em T^r
  M_{ij}^r : limite superior para $u_i^r - u_j^r$

Variável que representa distância

Exemplo (peso unitário):



Formulação 2: com rótulos para distâncias

$$\min \sum_{e \in E} w_e x_e$$

s.t.

$$\sum_{i \in \delta^-(j)} z_{ij}^r = 1 \qquad \forall r \in V,\ \forall j \in V \setminus \{r\}$$

$$\sum_{i \in \delta^-(r)} z_{ir}^r = 0 \qquad \forall r \in V$$

$$\sum_{e \in E} x_e = |V| - 1$$

$$x_e = z_{ij}^r + z_{ji}^r \qquad \forall r \in V,\ \forall e = \{i, j\} \in E$$

$$u_i^r - u_j^r + (M_{ij} + w_{ij}) z_{ij}^r + (M_{ij} - w_{ij}) z_{ji}^r \leq M_{ij} \qquad \forall r \in V, \forall ij \in A, j \neq r$$

$$u_i^r + (M_{ir} - w_{ir}) z_{ri}^r \leq M_{ir} \qquad \forall r \in V, \forall ri \in A$$

$$u_r^r = 0 \qquad \forall r \in V$$

$$u_i^j = u_j^i \leq t \cdot w_{ij} \qquad \forall ij \in E$$

$$x \in \{0, 1\}^{|E|}, z^r \in \{0, 1\}^{|E| \times |E|}, u^r \in \mathbb{R}^{|V|} \qquad \forall r \in V$$

Formulação

t-spanner de peso mínimo

Poliedro dos grafos *t*-spanner

$$P_{span}(G, t) := \text{conv}\{\mathcal{X}^F \in \mathbb{R}^{|E|} \mid G[F] \text{ é um } t\text{-spanner de } G\}$$

Variáveis de decisão

- Interessados em $F \subseteq E$ tais que $\mathcal{X}^F \in P_{span}(G, t)$
- Para $u, v \in V$: $\mathcal{P}^t_{u,v}(G[F])$ - conjunto de caminhos t-spanner entre u e v em $G[F]$
- Variáveis de decisão:
  - $x \in \mathbb{R}^{|E|}$: $\forall e \in E, x(e) = 1$ sse $e \in F$
  - $Y \in \mathbb{R}^{|E| \times |E|}$: $\forall e = uv \in E$ deve existir $P \in \mathcal{P}^t_{u,v}(G[F])$ t.q. $Y(e, f) = 1, \forall f \in E(P)$
    - Para $J \subseteq E$, seja $Y(e, J) := \sum_{f \in J} Y(e, f)$

Variáveis de decisão

- Interessados em $F \subseteq E$ tais que $\mathcal{X}^F \in P_{span}(G, t)$
- Para $u, v \in V$: $\mathcal{P}^t_{u,v}(G[F])$ - conjunto de caminhos t-spanner entre u e v em $G[F]$
- Variáveis de decisão:
  - $x \in \mathbb{R}^{|E|}$: $\forall e \in E, x(e) = 1$ sse $e \in F$
  - $Y \in \mathbb{R}^{|E| \times |E|}$: $\forall e = uv \in E$ deve existir $P \in \mathcal{P}^t_{u,v}(G[F])$ t.q. $Y(e, f) = 1, \forall f \in E(P)$

Variáveis de decisão

- Interessados em $F \subseteq E$ tais que $\mathcal{X}^F \in P_{span}(G, t)$
- Para $u, v \in V$: $\mathcal{P}^t_{u,v}(G[F])$ - conjunto de caminhos t-spanner entre u e v em $G[F]$
- Variáveis de decisão:
  - $x \in \mathbb{R}^{|E|}$: $\forall e \in E, x(e) = 1$ sse $e \in F$
  - $Y \in \mathbb{R}^{|E| \times |E|}$: $\forall e = uv \in E$ deve existir $P \in \mathcal{P}^t_{u,v}(G[F])$ t.q. $Y(e, f) = 1, \forall f \in E(P)$
    - Para $J \subseteq E$, seja $Y(e, J) := \sum_{f \in J} Y(e, f)$

Variáveis de decisão

- Interessados em $F \subseteq E$ tais que $\mathcal{X}^F \in P_{span}(G, t)$
- Para $u, v \in V$: $\mathcal{P}^t_{u,v}(G[F])$ - conjunto de caminhos t-spanner entre u e v em $G[F]$
- Variáveis de decisão:
  - $x \in \mathbb{R}^{|E|}$: $\forall e \in E, x(e) = 1$ sse $e \in F$
  - $Y \in \mathbb{R}^{|E|\times|E|}$: $\forall e = uv \in E$ deve existir $P \in \mathcal{P}^t_{u,v}(G[F])$ t.q. $Y(e, f) = 1, \forall f \in E(P)$
    - Para $J \subseteq E$, seja $Y(e, J) := \sum_{f \in J} Y(e, f)$

Variáveis de decisão

- Interessados em $F \subseteq E$ tais que $\mathcal{X}^F \in P_{span}(G, t)$
- Para $u, v \in V$: $\mathcal{P}^t_{u,v}(G[F])$ - conjunto de caminhos t-spanner entre u e v em $G[F]$
- Variáveis de decisão:
  - $x \in \mathbb{R}^{|E|}$: $\forall e \in E, x(e) = 1$ sse $e \in F$
  - $Y \in \mathbb{R}^{|E| \times |E|}$: $\forall e = uv \in E$ deve existir $P \in \mathcal{P}^t_{u,v}(G[F])$ t.q. $Y(e, f) = 1, \forall f \in E(P)$
    - Para $J \subseteq E$, seja $Y(e, J) := \sum_{f \in J} Y(e, f)$

Formulação

$$
\begin{aligned}
& Y(e,\delta(W)) \geq 1 && \forall e \in E, \forall\, W \subset V \text{ com } e \in \delta(W) && (14)\\
& Y(e,f) \leq x(f) && \forall e,f \in E && (15)\\
& \sum_{f \in E} w_f Y(e,f) \leq t \cdot w_e && \forall e \in E && (16)\\
& 0 \leq x(e) \leq 1 && \forall e \in E && (17)\\
& 0 \leq Y(e,f) \leq 1 && \forall e,f \in E && (18)
\end{aligned}
$$

$P(G,t) = \{(x,Y) : x \in \mathbb{R}^{|E|}, Y \in \mathbb{R}^{|E|\times|E|} \mid (x,Y) \text{ satisfaz } (14) - (18)\}$

Correspondência entre $P_{span}(G, t)$ e $P(G, t)$

Seja $P_x(G, t) = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid \exists Y \in \mathbb{R}^{|E| \times |E|}$ t.q. $(x, Y) \in P(G, t)\}$

Proposição 1

$(P_x(G, t))_I = P_{span}(G, t)$.

Separação das inequações de corte

- Inequações (14): número exponencial
- Inequações (14) podem ser separadas em tempo polinomial

Separação das inequações de corte

- Inequações (14): número exponencial
- Inequações (14) podem ser separadas em tempo polinomial

Geração de colunas

Algoritmo de *branch-and-price*

Formulação linear para o *t*-spanner

$$
\begin{aligned}
(1) \quad & \min \sum_{e \in E} w_e x_e \\
& \text{s.t.} \\
& \sum_{p \in \mathcal{P}^t_{u,v}} \delta^e_p y_p \le x_e && \forall e \in E, \forall uv \in E && (19) \\
& \sum_{p \in \mathcal{P}^t_{u,v}} y_p \ge 1 && \forall uv \in E && (20) \\
& x_e \in \{0,1\} && \forall e \in E && (21) \\
& y_p \in \{0,1\} && \forall p \in \mathcal{P} && (22)
\end{aligned}
$$

Sigurd e Zachariasen, 2004

Pricing

- $\forall uv, e \in E$, sejam $\pi_e^{u,v}$ e $\sigma_{u,v}$ variáveis duais de (19) e (20).
- Custo reduzido:

$$c_p^{\pi,\sigma} = \sum_{e \in E} \delta_p^e \pi_e^{u,v} - \sigma_{u,v}, \ \forall uv \in E, \forall p \in \mathcal{P}_{u,v}^t.$$

- *Pricing*:

$$\min_{p \in \mathcal{P}_{u,v}^t} \sum_{e \in E} \delta_p^e \pi_e^{u,v} - \sigma_{u,v}$$

- Problema do caminho mínimo restrito (CSPP)

Pricing

- $\forall uv, e \in E$, sejam $\pi_e^{u,v}$ e $\sigma_{u,v}$ variáveis duais de (19) e (20).
- Custo reduzido:

$$c_p^{\pi,\sigma} = \sum_{e \in E} \delta_p^e \pi_e^{u,v} - \sigma_{u,v}, \ \ \forall uv \in E, \ \forall p \in \mathcal{P}_{u,v}^t.$$

- *Pricing*:

$$\min_{p \in \mathcal{P}_{u,v}^t} \sum_{e \in E} \delta_p^e \pi_e^{u,v} - \sigma_{u,v}$$

- Problema do caminho mínimo restrito (CSPP)

Pricing

- $\forall uv, e \in E$, sejam $\pi_e^{u,v}$ e $\sigma_{u,v}$ variáveis duais de (19) e (20).
- Custo reduzido:

$$c_p^{\pi,\sigma} = \sum_{e \in E} \delta_p^e \pi_e^{u,v} - \sigma_{u,v}, \quad \forall uv \in E,\ \forall p \in \mathcal{P}_{u,v}^t.$$

- *Pricing*:

$$\min_{p \in \mathcal{P}_{u,v}^t} \sum_{e \in E} \delta_p^e \pi_e^{u,v} - \sigma_{u,v}$$

  - Problema do caminho mínimo restrito (CSPP)

Heurística primal

- Algoritmo Guloso de Althöfer et al., 1993
  - Ordena arestas por peso de maneira não-decrescente
  - Aresta é adicionada se $\nexists$ caminho *t*-spanner entre extremos

Heurística primal

- Algoritmo Guloso de Althöfer et al., 1993
  - Ordena arestas por peso de maneira não-decrescente
  - Aresta é adicionada se $\nexists$ caminho t-spanner entre extremos

Heurística primal

- Algoritmo Guloso de Althöfer et al., 1993
  - Ordena arestas por peso de maneira não-decrescente
  - Aresta é adicionada se $\nexists$ caminho t-spanner entre extremos

Estratégias

- Variável fracionária: variável cujo valor está mais próximo de 0,50
- Próximo nó da árvore de B&B: nó que possui menor limitante inferior

Estratégias

- Variável fracionária: variável cujo valor está mais próximo de $0{,}50$
- Próximo nó da árvore de B&B: nó que possui menor limitante inferior

Experimentos

Resultados computacionais

Objetivos

- Comparação das formulações exatas propostas para o problema de árvore *t*-spanner
- Análise do desempenho do algoritmo de *branch-and-price* para o problema de *t*-spanner

Objetivos

- Comparação das formulações exatas propostas para o problema de árvore *t*-spanner
- Análise do desempenho do algoritmo de *branch-and-price* para o problema de *t*-spanner

Parâmetros

- Ordem
- Densidade
- Tipo do grafo (peso unitário, distância euclidiana, peso aleatório)
  - Peso aleatório:
    - mais espaçado: $\{1, 2, 4, 8, 16\}$
    - menos espaçado: $\{1, 2, 3\}$
- Fator de dilatação
- Grau médio
- Tempo limite

Parâmetros

- Ordem
- Densidade
- Tipo do grafo (peso unitário, distância euclidiana, peso aleatório)
  - Peso aleatório:
    - mais espaçado: $\{1, 2, 4, 8, 16\}$
    - menos espaçado: $\{1, 2, 3\}$
- Fator de dilatação
- Grau médio
- Tempo limite

Parâmetros

- Ordem
- Densidade
- Tipo do grafo (peso unitário, distância euclidiana, peso aleatório)
  - Peso aleatório:
    - mais espaçado: $\{1, 2, 4, 8, 16\}$
    - menos espaçado: $\{1, 2, 3\}$
- Fator de dilatação
- Grau médio
- Tempo limite

Parâmetros

- Ordem
- Densidade
- Tipo do grafo (peso unitário, distância euclidiana, peso aleatório)
  - Peso aleatório:
    - mais espaçado: $\{1, 2, 4, 8, 16\}$
    - menos espaçado: $\{1, 2, 3\}$
- Fator de dilatação
- Grau médio
- Tempo limite

Parâmetros

- Ordem
- Densidade
- Tipo do grafo (peso unitário, distância euclidiana, peso aleatório)
  - Peso aleatório:
    - mais espaçado: $\{1, 2, 4, 8, 16\}$
    - menos espaçado: $\{1, 2, 3\}$
- Fator de dilatação
- Grau médio
- Tempo limite

Parâmetros

- Ordem
- Densidade
- Tipo do grafo (peso unitário, distância euclidiana, peso aleatório)
  - Peso aleatório:
    - mais espaçado: $\{1, 2, 4, 8, 16\}$
    - menos espaçado: $\{1, 2, 3\}$
- Fator de dilatação
- Grau médio
- Tempo limite

Parâmetros

- Ordem
- Densidade
- Tipo do grafo (peso unitário, distância euclidiana, peso aleatório)
    - Peso aleatório:
        - mais espaçado: $\{1, 2, 4, 8, 16\}$
        - menos espaçado: $\{1, 2, 3\}$
- Fator de dilatação
- Grau médio
- Tempo limite

Parâmetros

- Ordem
- Densidade
- Tipo do grafo (peso unitário, distância euclidiana, peso aleatório)
    - Peso aleatório:
        - mais espaçado: $\{1, 2, 4, 8, 16\}$
        - menos espaçado: $\{1, 2, 3\}$
- Fator de dilatação
- Grau médio
- Tempo limite

Parte I

Árvore t-spanner de peso mínimo

Quantidade de instâncias resolvidas

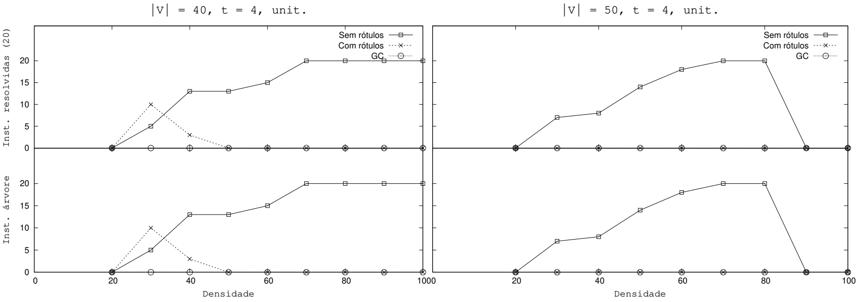


Figura 1

- Comportamento semelhante para $t = 3$

Quantidade de instâncias resolvidas

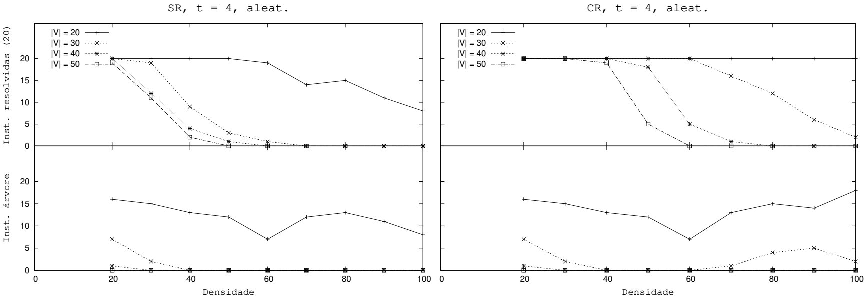


Figura 2

- Comportamento é semelhante para pesos aleatórios menos espaçados

Maior tempo e ordem e menor t

- Maior tempo limite de execução
  - peso aleat. menos espaçado: CR e SR se comportam da mesma forma
- Valores maiores de ordem
  - peso aleat. menos espaçado: CR e SR se comportam da mesma forma
- Menor t
  - CR: todas as instâncias resolvidas em menos de 3s
  - SR: tempo de execução bem maior

Maior tempo e ordem e menor t

- Maior tempo limite de execução
  - peso aleat. menos espaçado: CR e SR se comportam da mesma forma
- Valores maiores de ordem
  - peso aleat. menos espaçado: CR e SR se comportam da mesma forma
- Menor t
  - CR: todas as instâncias resolvidas em menos de 3s
  - SR: tempo de execução bem maior

Maior tempo e ordem e menor *t*

- Maior tempo limite de execução
  - peso aleat. menos espaçado: CR e SR se comportam da mesma forma
- Valores maiores de ordem
  - peso aleat. menos espaçado: CR e SR se comportam da mesma forma
- Menor *t*
  - CR: todas as instâncias resolvidas em menos de 3*s*
  - SR: tempo de execução bem maior

Recomendação de uso das formulações SR e CR

		t baixo		*t* alto	
		P. unit.	P. aleat.	P. unit.	P. aleat.
Dens. alta	Ord. grande	SR	CR	SR	=
	Ord. peq.	SR (CR)	CR	CR	CR
Dens. baixa	Ord. grande	CR	CR	SR	CR (SR)
	Ord. peq.	CR	CR	CR (SR)	CR

Parte II

t-spanner de peso mínimo

Variando grau

Grau	4						8					
Ordem	16	32	64	80	90	100	16	32	64	80	90	100
$t = 1,1$	(10)	(10)	(10)	-	-	-	(10)	(10)	(10)	-	-	-
$t = 2$	(10)	(10)	(10)	-	-	-	(10)	(10)	6,41(10)	-	-	-
$t = 3$	(10)	(10)	10,19(10)	7,82(10)	7,74(10)	202,48(10)	(10)	289,66(10)	133,77 (7)	591,47 (8)	371,99 (6)	1146,85 (5)
$t = 4$	(10)	(10)	99,77(10)	-	-	-	22,66(10)	709,67 (6)	1157,00 (1)	-	-	-

Tabela 1: Peso aleatório

Grau	4						8					
Ordem	16	32	64	80	90	100	16	32	64	80	90	100
$t = 1,1$	(10)	(10)	(10)	-	-	-	(10)	(10)	(10)	-	-	-
$t = 2$	(10)	(10)	(10)	-	-	-	(10)	(10)	5,39(10)	-	-	-
$t = 3$	(10)	(10)	(10)	5,29(10)	(10)	7,76(10)	(10)	49,22(10)	675,01 (9)	744,80 (9)	596,49(10)	667,04 (8)
$t = 4$	(10)	6,12(10)	312,17(10)	-	-	-	163,91(10)	1708,26 (7)	0	-	-	-

Tabela 2: Distância euclidiana

Resultados

- Variando grau:
  - Com peso:
    $t = 2$: GC é melhor com distância euclidiana
    $t = 3$: GC é melhor com distância euclidiana
    $t = 4$: GC é melhor com pesos aleatórios
- Variando densidade:
  - Sem peso:
    $t = 2$: GC é melhor com distância euclidiana
    $t = 3$: GC é melhor com pesos aleatórios
    $t = 4$: GC é melhor com pesos aleatórios

Resultados

- Variando grau:
  - Com peso:
    $t = 2$: GC é melhor com distância euclidiana
    $t = 3$: GC é melhor com distância euclidiana
    $t = 4$: GC é melhor com pesos aleatórios
- Variando densidade:
  - Sem peso:
    $t = 2$: GC é melhor com distância euclidiana
    $t = 3$: GC é melhor com pesos aleatórios
    $t = 4$: GC é melhor com pesos aleatórios

Obrigado

Histórico

- 1992 - 1995: resultados clássicos de complexidade.
- 1993 - 2001: classes específicas de grafos.
- 2001 - 2008: (in)aproximabilidade para classes gerais.
- 2009 - 2014: algoritmos de aproximação baseados em PL.
- 2015 - 2018: spanners distribuídos, oráculos de distância e spanners esparsos.

Histórico

- 1992 - 1995: resultados clássicos de complexidade.
- 1993 - 2001: classes específicas de grafos.
- 2001 - 2008: (in)aproximabilidade para classes gerais.
- 2009 - 2014: algoritmos de aproximação baseados em PL.
- 2015 - 2018: spanners distribuídos, oráculos de distância e spanners esparsos.

Histórico

- 1992 - 1995: resultados clássicos de complexidade.
- 1993 - 2001: classes específicas de grafos.
- 2001 - 2008: (in)aproximabilidade para classes gerais.
- 2009 - 2014: algoritmos de aproximação baseados em PL.
- 2015 - 2018: spanners distribuídos, oráculos de distância e spanners esparsos.

Histórico

- 1992 - 1995: resultados clássicos de complexidade.
- 1993 - 2001: classes específicas de grafos.
- 2001 - 2008: (in)aproximabilidade para classes gerais.
- 2009 - 2014: algoritmos de aproximação baseados em PL.
- 2015 - 2018: spanners distribuídos, oráculos de distância e spanners esparsos.

Histórico

- 1992 - 1995: resultados clássicos de complexidade.
- 1993 - 2001: classes específicas de grafos.
- 2001 - 2008: (in)aproximabilidade para classes gerais.
- 2009 - 2014: algoritmos de aproximação baseados em PL.
- 2015 - 2018: spanners distribuídos, oráculos de distância e spanners esparsos.

Definições equivalentes de spanner ▸ ←

- Afirmações equivalentes:
  (a) H é um t-spanner de G, isto é, H satisfaz (3);
  (b) $\mathrm{dist}_H(u,v) \le t \cdot \mathrm{dist}_G(u,v)\ \forall\, uv \in E$;
  (b') $\mathrm{dist}_H(u,v) \le t \cdot \mathrm{dist}_G(u,v)\ \forall\, uv \in E \setminus E(H)$;
  (c) $\mathrm{dist}_H(u,v) \le t \cdot w_{uv}\ \forall\, uv \in E$.
  (c') $\mathrm{dist}_H(u,v) \le t \cdot w_{uv}\ \forall\, uv \in E \setminus E(H)$.

Significado da variável y

- $\forall u, v \in V$, seja $T_{u,v}$ o caminho entre u e v em T.
- $\forall uv, ij \in E$:

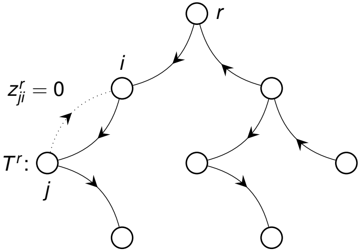
$$d_{ij}^{uv} := z_{ij}^{u} - z_{ij}^{v}$$
$$s_{ij}^{uv} := z_{ij}^{u} + z_{ij}^{v}$$

d_{ij}^{uv}	s_{ij}^{uv}	z_{ij}^{u}	z_{ij}^{v}	z_{ji}^{u}	z_{ji}^{v}	d_{ji}^{uv}	s_{ji}^{uv}
1	1	1	0	0	1	−1	1
−1	1	0	1	1	0	1	1
0	2	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	2
0	0	0	0	0	0	0	0

$$d_{ij}^{uv} \leq y_e^{uv} \leq s_{ij}^{uv} \qquad \forall uv \in E, \forall e = \{i,j\} \in E \tag{23}$$
$$d_{ji}^{uv} \leq y_e^{uv} \leq s_{ji}^{uv} \qquad \forall uv \in E, \forall e = \{i,j\} \in E \tag{24}$$

$$y_e^{uv} = 1 \Leftrightarrow e \in T_{u,v}. \tag{25}$$

Significado da variável u^r



- Ineq. **??** com relação ao arco ij :

$$u^r_i - u^r_j + (M^r_{ij} + w_{ij}) \cdot 1 + (M^r_{ij} - w_{ij}) \cdot 0 \leq M^r_{ij} \Rightarrow u^r_j \geq u^r_i + w_{ij}.$$

- Ineq. **??** com relação ao arco ji :

$$u^r_j - u^r_i + (M^r_{ji} + w_{ij}) \cdot 0 + (M^r_{ji} - w_{ij}) \cdot 1 \leq M^r_{ji} \Rightarrow u^r_j \leq u^r_i + w_{ij}.$$

$$u^r_j = u^r_i + w_{ij}.$$

Heurística primal ▸ ←

Algoritmo 5.1: Partição básica

Input : $G = (V, E)$, onde $|V| = n$, e um inteiro positivo k
Output: partição $\mathcal{T}$ de V

$\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$;
Seja $G' = (V', E')$ um grafo isomorfo a G;
while $V' \neq \emptyset$ **do**
    Selecione um vértice arbitrário $v' \in V'$;
    $S' \leftarrow \{v'\}$;
    while $|\Gamma^{ver}(S')| < n^{1/k}|S'|$ **do**
        $S' \leftarrow \Gamma^{ver}(S')$;
    end
    Seja $S = \{v \in V \mid \exists\, v' \in$
    S' t.q. v' é o vértice correspondente a v no isomorfismo$\}$;

    $\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{T} \cup \{S\}$;
    $V' \leftarrow V' \setminus S'$;
end

Heurística primal ▸ ←

Algoritmo 5.2: Spanner baseado em partição em clusters

Input : $G = (V, E)$, inteiro positivo k

Output: Um grafo $G' = (V, E')$ que é um $(2k-1)$-spanner de G com no máximo $O(n^{1+1/k})$ arestas

```
Construir uma partição 𝒯 de V usando o Algoritmo 5.1
  (Partição básica);
foreach S_i ∈ 𝒯 do
    T_i ← uma árvore de caminhos mínimos de G[S_i]
      enraizada em algum vértice;
E' ← ⋃_{S_i ∈ 𝒯} E(T_i);
Ĕ ← ∅;
foreach S_i ∈ 𝒯 do
    foreach v ∈ Γ^ver(S_i) \ S_i do
        Seja u ∈ S_i t.q. uv ∈ E;
        Ĕ ← Ĕ ∪ uv;
E' ← E' ∪ Ĕ;
```

Spanner baseado em partição de clusters

Teorema 1

O Algoritmo 5.2 aplicado a um grafo G de ordem n, e um inteiro positivo k, constrói um $(2k-1)$-spanner de G com no máximo $O(n^{1+1/k})$ arestas.

Outra heurística primal

Algoritmo 5.3: Algoritmo Guloso de Althöfer et al.

Input : $G = (V, E)$ com pesos não-negativos nas arestas, real $t \geq 1$

Output: t-spanner G' de G com peso pequeno

Ordene as arestas de E em ordem não-decrescente de seus pesos;
$G' \leftarrow (V, E')$, onde $E' = \emptyset$;
foreach $e = uv \in E$ **do**
  if $t \cdot w(e) < \mathrm{dist}_{G'}(u, v)$ **then** $E' \leftarrow E' \cup e$;
end

Algoritmo 5.4: MST baseada nas arestas fixadas pelo B&B

Input : $G = (V, E)$, $E_0 \subset E$, $E_1 \subset E$, $w : E \to \mathbb{R}^+$
Output: : limitante dual para a tripla (G, E_0, E_1)
/* E_0: conjunto das arestas fixadas em 0; E_1: conjunto das arestas fixadas em 1. */

$LD \leftarrow \sum_{e \in E_1} w(e)$;
Seja $G_1 = (V, E_1)$, e $\mathcal{C}$ o conjunto dos componentes de G_1;
Seja $G_1^c = (V_1^c, E_1^c)$ o grafo assim definido:
$V_1^c = \{C_i | \ C_i \in \mathcal{C}\}$;
$E_1^c = \{C_iC_j \mid C_i, C_j \in \mathcal{C}, i \neq j,$ e $\exists x, y \in V(G)$ t.q. $x \in V(C_i), y \in V(C_j), xy \in E(G), xy \notin E_0\}$;
$T \leftarrow \mathrm{MST}(G_1^c)$;
$LD \leftarrow LD + \sum_{e \in E(T)} w(e)$;
return LD.

Custo reduzido ←

Teorema 2

Considerede x uma solução viável básica associada a uma matrix base B, e seja $\tilde{c}$ o vetor custo reduzido correspondente. Se $\tilde{c} \geq 0$, então x é ótima.

CSPP

Algoritmo 5.5: CSPP

Input : $G = (V, E)$, $w : E \to \mathbb{Z}^+$, $c : E \to \mathbb{Z}^+$, real B, real M, $s \in V$, $d \in V$

Output: caminho p_f entre s e d de menor custo satisfazendo a restrição de peso máximo B e de custo máximo M

$p_f \leftarrow null$;
Calcula as árvores de caminhos de peso e custo mínimos T^w e T^c;
$H \leftarrow \{(\{\}, s, 0, 0)\}$;
while $H \neq \emptyset$ **do**
  Escolha o rótulo (p, n, w, c) mais barato (em termos de custo) no conjunto H;
  if $n = d$ **then**
    $p_f \leftarrow p$;
    return p_f.
  end
  foreach $n_i \in \mathrm{Neigh}_G(n)$ **do**
    Seja $e_i = nn_i$. Crie o novo rótulo $(p \cup \{e_i\}, n_i, w + w_{e_i}, c + c_{e_i})$;
    Descarte todos os novos rótulos tal que $w + w_{e_i} + T^w(n_i) > B$ ou $c + c_{e_i} + T^c(n_i) > M$. Para os demais, armazene em H;
    Descarte (de H) rótulos dominados;
  end
  return p_f.
end

Solução viável sem suporte minimal

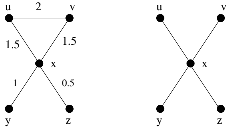


Figura 3: Um grafo G com seu respectivo 2-spanner (H) de peso mínimo

- Para cada $e = pq, f \in E$, defina:

$$x^*(e) = \mathcal{X}_e^H,$$

$$Y^*(e,f) = \begin{cases} 1 & \text{se } f \in E(H_{p,q}), \\ 1 & \text{se } e = xy, f = xz, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (x^*, Y^*) é uma sol. ótima t.q. Y^* não tem sup. minimal.

Prova

Demonstração.

- Seja y uma sol. viável qualquer e defina $d = y - x$.
- x e y são viáveis $\Rightarrow Ax = Ay = b$ e $Ad = 0$.
- $Ad = Bd_B + \sum_{i \in N} A_i d_i = 0$.
- B é inversível $\Rightarrow d_B = -\sum_{i \in N} B^{-1} A_i d_i$.
- $cd = c_B d_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N}(c_i - c_B B^{-1} A_i) d_i = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$.
- $x_i = 0$ (x é sol. bás. viável) e $y_i \geq 0$ (y é viável) $\forall i \in N$.
- Então $d_i = y_i - x_i \geq 0, \forall i \in N$.
- $\tilde{c}_i \geq 0$ (por hipót.) $\forall i \in N \Rightarrow \tilde{c}_i d_i \geq 0 \forall i \in N$.
- $c(y - x) = cd = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$.
- Como o problema é de min e y é viável qualquer, o teorema segue.

$\square$

Prova

Demonstração.

- Seja y uma sol. viável qualquer e defina $d = y - x$.
- x e y são viáveis $\Rightarrow Ax = Ay = b$ e $Ad = 0$.
- $Ad = Bd_B + \sum_{i \in N} A_i d_i = 0$.
- B é inversível $\Rightarrow d_B = -\sum_{i \in N} B^{-1} A_i d_i$.
- $cd = c_B d_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N} (c_i - c_B B^{-1} A_i) d_i = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$.
- $x_i = 0$ (x é sol. bás. viável) e $y_i \geq 0$ (y é viável) $\forall i \in N$.
- Então $d_i = y_i - x_i \geq 0, \forall i \in N$.
- $\tilde{c}_i \geq 0$ (por hipót.) $\forall i \in N \Rightarrow \tilde{c}_i d_i \geq 0 \forall i \in N$.
- $c(y - x) = cd = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$.
- Como o problema é de min e y é viável qualquer, o teorema segue.

□

Prova

Demonstração.

- Seja y uma sol. viável qualquer e defina $d = y - x$.
- x e y são viáveis $\Rightarrow Ax = Ay = b$ e $Ad = 0$.
- $Ad = Bd_B + \sum_{i \in N} A_i d_i = 0$.
- B é inversível $\Rightarrow d_B = -\sum_{i \in N} B^{-1} A_i d_i$.
- $cd = c_B d_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N} (c_i - c_B B^{-1} A_i) d_i = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$.
- $x_i = 0$ (x é sol. bás. viável) e $y_i \geq 0$ (y é viável) $\forall i \in N$.
- Então $d_i = y_i - x_i \geq 0, \forall i \in N$.
- $\tilde{c}_i \geq 0$ (por hipót.) $\forall i \in N \Rightarrow \tilde{c}_i d_i \geq 0 \forall i \in N$.
- $c(y - x) = cd = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$.
- Como o problema é de min e y é viável qualquer, o teorema segue.

$\square$

Prova

Demonstração.

- Seja y uma sol. viável qualquer e defina $d = y - x$.
- x e y são viáveis $\Rightarrow Ax = Ay = b$ e $Ad = 0$.
- $Ad = Bd_B + \sum_{i \in N} A_i d_i = 0$.
- B é inversível $\Rightarrow d_B = -\sum_{i \in N} B^{-1} A_i d_i$.
- $cd = c_B d_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N}(c_i - c_B B^{-1} A_i) d_i = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$.
- $x_i = 0$ (x é sol. bás. viável) e $y_i \geq 0$ (y é viável) $\forall i \in N$.
- Então $d_i = y_i - x_i \geq 0, \forall i \in N$.
- $\tilde{c}_i \geq 0$ (por hipót.) $\forall i \in N \Rightarrow \tilde{c}_i d_i \geq 0 \forall i \in N$.
- $c(y - x) = cd = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$.
- Como o problema é de min e y é viável qualquer, o teorema segue.

$\square$

Prova

Demonstração.

- Seja y uma sol. viável qualquer e defina $d = y - x$.
- x e y são viáveis $\Rightarrow Ax = Ay = b$ e $Ad = 0$.
- $Ad = Bd_B + \sum_{i \in N} A_i d_i = 0$.
- B é inversível $\Rightarrow d_B = -\sum_{i \in N} B^{-1} A_i d_i$.
- $cd = c_B d_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N}(c_i - c_B B^{-1} A_i) d_i = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$.
- $x_i = 0$ (x é sol. bás. viável) e $y_i \geq 0$ (y é viável) $\forall i \in N$.
- Então $d_i = y_i - x_i \geq 0, \forall i \in N$.
- $\tilde{c}_i \geq 0$ (por hipót.) $\forall i \in N \Rightarrow \tilde{c}_i d_i \geq 0 \forall i \in N$.
- $c(y - x) = cd = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$.
- Como o problema é de min e y é viável qualquer, o teorema segue.

□

Prova

Demonstração.

- Seja y uma sol. viável qualquer e defina $d = y - x$.
- x e y são viáveis $\Rightarrow Ax = Ay = b$ e $Ad = 0$.
- $Ad = Bd_B + \sum_{i \in N} A_i d_i = 0$.
- B é inversível $\Rightarrow d_B = -\sum_{i \in N} B^{-1} A_i d_i$.
- $cd = c_B d_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N} (c_i - c_B B^{-1} A_i) d_i = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$.
- $x_i = 0$ (x é sol. bás. viável) e $y_i \geq 0$ (y é viável) $\forall i \in N$.
- Então $d_i = y_i - x_i \geq 0, \forall i \in N$.
- $\tilde{c}_i \geq 0$ (por hipót.) $\forall i \in N \Rightarrow \tilde{c}_i d_i \geq 0 \forall i \in N$.
- $c(y - x) = cd = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$.
- Como o problema é de min e y é viável qualquer, o teorema segue.

$\square$

Prova

Demonstração.

- Seja y uma sol. viável qualquer e defina $d = y - x$.
- x e y são viáveis $\Rightarrow Ax = Ay = b$ e $Ad = 0$.
- $Ad = Bd_B + \sum_{i \in N} A_i d_i = 0$.
- B é inversível $\Rightarrow d_B = -\sum_{i \in N} B^{-1} A_i d_i$.
- $cd = c_B d_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N} (c_i - c_B B^{-1} A_i) d_i = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$.
- $x_i = 0$ (x é sol. bás. viável) e $y_i \geq 0$ (y é viável) $\forall i \in N$.
- Então $d_i = y_i - x_i \geq 0, \forall i \in N$.
- $\tilde{c}_i \geq 0$ (por hipót.) $\forall i \in N \Rightarrow \tilde{c}_i d_i \geq 0 \forall i \in N$.
- $c(y - x) = cd = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$.
- Como o problema é de min e y é viável qualquer, o teorema segue.

$\square$

Prova

Demonstração.

- Seja y uma sol. viável qualquer e defina $d = y - x$.
- x e y são viáveis $\Rightarrow Ax = Ay = b$ e $Ad = 0$.
- $Ad = Bd_B + \sum_{i \in N} A_i d_i = 0$.
- B é inversível $\Rightarrow d_B = -\sum_{i \in N} B^{-1} A_i d_i$.
- $cd = c_B d_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N}(c_i - c_B B^{-1} A_i) d_i = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$.
- $x_i = 0$ (x é sol. bás. viável) e $y_i \geq 0$ (y é viável) $\forall i \in N$.
- Então $d_i = y_i - x_i \geq 0, \forall i \in N$.
- $\tilde{c}_i \geq 0$ (por hipót.) $\forall i \in N \Rightarrow \tilde{c}_i d_i \geq 0 \forall i \in N$.
- $c(y - x) = cd = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$.
- Como o problema é de min e y é viável qualquer, o teorema segue.

$\square$

Prova

Demonstração.

- Seja y uma sol. viável qualquer e defina $d = y - x$.
- x e y são viáveis $\Rightarrow Ax = Ay = b$ e $Ad = 0$.
- $Ad = Bd_B + \sum_{i \in N} A_i d_i = 0$.
- B é inversível $\Rightarrow d_B = -\sum_{i \in N} B^{-1} A_i d_i$.
- $cd = c_B d_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N}(c_i - c_B B^{-1} A_i) d_i = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$.
- $x_i = 0$ (x é sol. bás. viável) e $y_i \geq 0$ (y é viável) $\forall i \in N$.
- Então $d_i = y_i - x_i \geq 0, \forall i \in N$.
- $\tilde{c}_i \geq 0$ (por hipót.) $\forall i \in N \Rightarrow \tilde{c}_i d_i \geq 0 \forall i \in N$.
- $c(y - x) = cd = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$.
- Como o problema é de min e y é viável qualquer, o teorema segue.

$\square$

Prova

Demonstração.

- Seja y uma sol. viável qualquer e defina $d = y - x$.
- x e y são viáveis $\Rightarrow Ax = Ay = b$ e $Ad = 0$.
- $Ad = Bd_B + \sum_{i \in N} A_i d_i = 0$.
- B é inversível $\Rightarrow d_B = -\sum_{i \in N} B^{-1} A_i d_i$.
- $cd = c_B d_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N} (c_i - c_B B^{-1} A_i) d_i = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$.
- $x_i = 0$ (x é sol. bás. viável) e $y_i \geq 0$ (y é viável) $\forall i \in N$.
- Então $d_i = y_i - x_i \geq 0, \forall i \in N$.
- $\tilde{c}_i \geq 0$ (por hipót.) $\forall i \in N \Rightarrow \tilde{c}_i d_i \geq 0 \forall i \in N$.
- $c(y - x) = cd = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$.
- Como o problema é de min e y é viável qualquer, o teorema segue.

$\square$