Algorithms for the Directed k-Spanner with Minimum Degree Steiner Tree Problem

Hugo Braga

Programa de Pós-Graduação em Mecatrônica
Universidadde Federal da Bahia
Defesa de Mestrado
Orientador: Dr. Flávio Assis

22 de Outubro de 2012

Estrutura da apresentação I

Problema clássico de árvore Steiner

- O objetivo é encontrar uma árvore que cubra os terminais e que possua custo mínimo.
- Aplicada tipicamente na operação de *multicasting*.
- Restrições são adicionadas ao problema de *multicasting*:
  - Requisitos de Qualide de Serviço (QoS).
    - Pode ser modelado através de atraso máximo.
    - Modelado alternativamente através da propriedade de *spanner*.
  - Limitação no número de vizinhos da comunicação.
    - Restrição de conexões, esforço de replicação de dados, custo de manutenção da topologia em redes móveis.
    - Pode ser generalizado pela propriedade de limitação do grau máximo.

Outras aplicações

- Aplicações de *Spanners*:
  - Roteamento eficiente.
    - Abondanar o requisito de encaminhar mensagens por caminhos de custo mínimo.
  - Spanners geométricas são utilizadas para diminuir o gasto energético de Redes de Sensores Sem Fio (RSSF).
  - Utilizadas para aproximar distâncias de custo mínimo.
  - Utilizadas por oráculos de distância.
- Restrições de grau em árvores *Steiner* também existem em cenários onde há a necessidade de balancear a carga na operação de *multicasting*.

Objetivo

- Buscando modelar o problema de árvore *Steiner* com as restrições de grau máximo e que possua a propriedade de *spanner*, nós procuramos tratar no mestrado um novo problema, denominado *Árvore Steiner com Grau Mínimo e fator de dilatação k em Grafos Direcionados* (*Directed k-Spanner with Minimum Degree Steiner Tree Problem* - DSMDStP).

Abordagens anteriores dos problemas de Steiner/Spanner/Grau

- Muitos trabalhos assumem espaço euclideano.
- Outros trabalhos consideram grafos não-direcionados.
- Trabalhos que consideram grafos direcionados:
  - Geram árvores geradoras (*Spanning trees*) ou grafos que não necessariamente são árvores.
  - Tem como objetivo de minização o custo da árvore.
  - Consideram apenas o requisito de minização do grau.

Trabalhos próximos

- [Elkin and Solomon 2009, Elkin and Solomon 2011]:
  - Geram *narrow-shallow-low-light trees*.
  - Resultado final é uma árvore geradora.
  - Assumem espaço euclideano.
- [Elkin and Kortsarz 2006, Khandekar et al. 2011]:
  - Problema consistem em gerar árvore *Steiner* que possui grau máximo de saída minimizado em grafos direcionados.
  - O problema em [Khandekar et al. 2011] generaliza o problema abordado em [Elkin and Kortsarz 2006], visto que não impõe a restrição de cobrir todo o conjunto de terminais.
  - Não consideram a propriedade de *spanner*.
    - O mais próximo que consideram é limitar a altura da árvore.
  - A solução para o problema de *Multiple Set-Cover* (MSC) definido pelos autores de [Elkin and Kortsarz 2006] é base para a nossa solução.

Definição de DSMDStP

- Entrada:
  - Um grafo direcionado $G = (V, E)$, onde o peso de cada aresta é definido por uma função $C : E \rightarrow \mathbb{R}^+$.
  - Um nó de origem s.
  - Um fator de dilatação k ($k \in \mathbb{R}^+$, $k \geq 1$).
  - Um conjunto de terminais $T \subseteq V \setminus \{s\}$.
- Saída: Encontrar uma arborescência $A = (V_A, E_A)$, com nó origem em s e que cobre T, tal que:
  - $dist(s, t, A) \leq k \cdot dist(s, t, G), \forall t \in T$;
  - o grau máximo de saída dos nós em A, denotado por $D_{max}(A) = max_{v \in V_A}\{odeg(v, A)\}$, é minimizado.

Impossibilidade de aproximação sublogarítmica: *Background*

- SvMDST é o acrônimo (em inglês) para a versão *Steiner* do problema de Árvore Geradora com Grau Mínimo em Grafos Direcionados [Fraigniaud 2001].
  - $T \subseteq V$; $s \in T$.
- A prova da impossibilidade é baseada na redução do DSMDStP para o SvMDST.

Teorema 1

[Fraigniaud 2001] A menos que NP $\subset$ DTIME$(n^{\log \log n})$, a solução ótima para o SvMDST não possui aproximação polinomial por $(1-\varepsilon)\log_e|T|$, para qualquer $\varepsilon > 0$.

▸ DTIME

Impossibilidade de aproximação sublogarítmica

Afirmação 1

DSMDStP não admite aproximação polinomial por um fator de $(1-\varepsilon)\log_e |T|$, para qualquer $\varepsilon > 0$, a menos que $NP \subset DTIME(n^{\log\log n})$.

Prova

Algoritmo de aproximação: preliminares

- Nosso algoritmo é baseado no algoritmo apresentado em [Elkin and Kortsarz 2006]. Este foi adaptado para considerar a propriedade de spanner.
- Possui duas fases:
  - fase 1: cômputo da $\sqrt{l}$-partition.
  - fase 2: utilização do problema do *Multiple Set-Cover* (MSC) para cobrir os demais terminais.
- $V = C \dot\cup U$. Seja $UT = U \cap T$ e $CT = C \cap T$.
- Seja $l = |T|$ e d^* o grau máximo de uma solução ótima para uma instância de DSMDStP ($d^* \leq l$).
- Seja $G(S)$ o grafo induzido por um conjunto de nós S.
- Para um nó $u \in U$, Δ-neigh$(u) = \{t : t \in UT \wedge dist(s,u,G) + dist(u,t,G(U)) \leq k \cdot dist(s,t,G)\}$.

Algoritmo de aproximação: preliminares

- Nosso algoritmo é baseado no algoritmo apresentado em [Elkin and Kortsarz 2006]. Este foi adaptado para considerar a propriedade de spanner.
- Possui duas fases:
  - fase 1: cômputo da $\sqrt{l}$-partition.
  - fase 2: utilização do problema do *Multiple Set-Cover* (MSC) para cobrir os demais terminais.
- $V = C \dot{\cup} U$. Seja $UT = U \cap T$ e $CT = C \cap T$.
- Seja $l = |T|$ e d^* o grau máximo de uma solução ótima para uma instância de DSMDStP ($d^* \leq l$).
- Seja $G(S)$ o grafo induzido por um conjunto de nós S.
- Para um nó $u \in U$, Δ-neigh$(u) = \{t : t \in UT \wedge dist(s, u, G) + dist(u, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G)\}$.

Algoritmo de aproximação: preliminares

- Nosso algoritmo é baseado no algoritmo apresentado em [Elkin and Kortsarz 2006]. Este foi adaptado para considerar a propriedade de spanner.
- Possui duas fases:
  - fase 1: cômputo da $\sqrt{l}$-partition.
  - fase 2: utilização do problema do *Multiple Set-Cover* (MSC) para cobrir os demais terminais.
- $V = C \dot{\cup} U$. Seja $UT = U \cap T$ e $CT = C \cap T$.
- Seja $l = |T|$ e d^* o grau máximo de uma solução ótima para uma instância de DSMDStP ($d^* \leq l$).
- Seja $G(S)$ o grafo induzido por um conjunto de nós S.
- Para um nó $u \in U$, Δ-neigh$(u) = \{t : t \in UT \wedge dist(s, u, G) + dist(u, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G)\}$.

Algoritmo de aproximação: preliminares

- Nosso algoritmo é baseado no algoritmo apresentado em [Elkin and Kortsarz 2006]. Este foi adaptado para considerar a propriedade de spanner.
- Possui duas fases:
  - fase 1: cômputo da $\sqrt{l}$-partition.
  - fase 2: utilização do problema do *Multiple Set-Cover* (MSC) para cobrir os demais terminais.
- $V = C \dot\cup U$. Seja $UT = U \cap T$ e $CT = C \cap T$.
- Seja $l = |T|$ e d^* o grau máximo de uma solução ótima para uma instância de DSMDStP ($d^* \leq l$).
- Seja $G(S)$ o grafo induzido por um conjunto de nós S.
- Para um nó $u \in U$, Δ-neigh$(u) = \{t : t \in UT \wedge dist(s, u, G) + dist(u, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G)\}$.

Algoritmo de aproximação: preliminares

- Nosso algoritmo é baseado no algoritmo apresentado em [Elkin and Kortsarz 2006]. Este foi adaptado para considerar a propriedade de spanner.
- Possui duas fases:
  - fase 1: cômputo da $\sqrt{l}$-partition.
  - fase 2: utilização do problema do *Multiple Set-Cover* (MSC) para cobrir os demais terminais.
- $V = C \dot{\cup} U$. Seja $UT = U \cap T$ e $CT = C \cap T$.
- Seja $l = |T|$ e d^* o grau máximo de uma solução ótima para uma instância de DSMDStP ($d^* \leq l$).
- Seja $G(S)$ o grafo induzido por um conjunto de nós S.
- Para um nó $u \in U$, Δ-neigh$(u) = \{t : t \in UT \wedge dist(s,u,G) + dist(u,t,G(U)) \leq k \cdot dist(s,t,G)\}$.

Algoritmo de aproximação: preliminares

- Nosso algoritmo é baseado no algoritmo apresentado em [Elkin and Kortsarz 2006]. Este foi adaptado para considerar a propriedade de spanner.
- Possui duas fases:
  - fase 1: cômputo da $\sqrt{l}$-partition.
  - fase 2: utilização do problema do *Multiple Set-Cover* (MSC) para cobrir os demais terminais.
- $V = C \dot\cup U$. Seja $UT = U \cap T$ e $CT = C \cap T$.
- Seja $l = |T|$ e d^* o grau máximo de uma solução ótima para uma instância de DSMDStP ($d^* \leq l$).
- Seja $G(S)$ o grafo induzido por um conjunto de nós S.
- Para um nó $u \in U$, Δ-neigh$(u) = \{t : t \in UT \wedge dist(s, u, G) + dist(u, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G)\}$.

Algoritmo de aproximação: preliminares

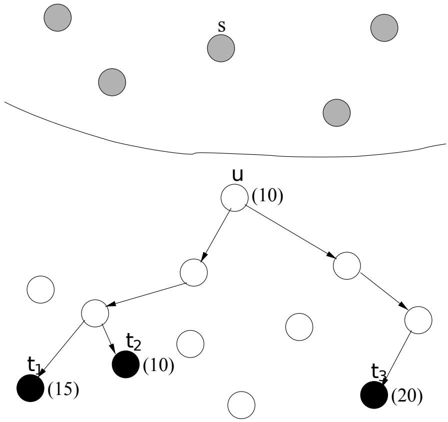
- Nosso algoritmo é baseado no algoritmo apresentado em [Elkin and Kortsarz 2006]. Este foi adaptado para considerar a propriedade de spanner.
- Possui duas fases:
  - fase 1: cômputo da $\sqrt{l}$-partition.
  - fase 2: utilização do problema do *Multiple Set-Cover* (MSC) para cobrir os demais terminais.
- $V = C \dot{\cup} U$. Seja $UT = U \cap T$ e $CT = C \cap T$.
- Seja $l = |T|$ e d^* o grau máximo de uma solução ótima para uma instância de DSMDStP ($d^* \leq l$).
- Seja $G(S)$ o grafo induzido por um conjunto de nós S.
- Para um nó $u \in U$, Δ-neigh$(u) = \{t : t \in UT \wedge dist(s, u, G) + dist(u, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G)\}$.

Algoritmo de aproximação: preliminares

- Nosso algoritmo é baseado no algoritmo apresentado em [Elkin and Kortsarz 2006]. Este foi adaptado para considerar a propriedade de spanner.
- Possui duas fases:
  - fase 1: cômputo da $\sqrt{l}$-partition.
  - fase 2: utilização do problema do *Multiple Set-Cover* (MSC) para cobrir os demais terminais.
- $V = C \dot{\cup} U$. Seja $UT = U \cap T$ e $CT = C \cap T$.
- Seja $l = |T|$ e d^* o grau máximo de uma solução ótima para uma instância de DSMDStP ($d^* \leq l$).
- Seja $G(S)$ o grafo induzido por um conjunto de nós S.
- Para um nó $u \in U$, Δ-neigh$(u) = \{t : t \in UT \wedge dist(s, u, G) + dist(u, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G)\}$.

Δ-neighbourhood

- $t = 2$



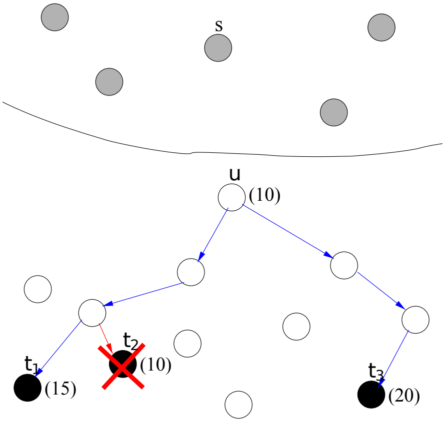
$d(u, t_1, G(U)) = 15$ $\quad d(s, u, G) + d(u, t_1, G(U)) = 10 + 15 \leq 2 \cdot 15$

$d(u, t_2, G(U)) = 12 \Rightarrow$ $\quad d(s, u, G) + d(u, t_1, G(U)) = 10 + 12 > 2 \cdot 10$

$d(u, t_3, G(U)) = 25$ $\quad d(s, u, G) + d(u, t_1, G(U)) = 10 + 25 \leq 2 \cdot 20$

Δ-neighbourhood

- $t = 2$



$d(u, t_1, G(U)) = 15$ $\quad d(s, u, G) + d(u, t_1, G(U)) = 10 + 15 \leq 2 \cdot 15$

$d(u, t_2, G(U)) = 12 \Rightarrow$ $\quad d(s, u, G) + d(u, t_1, G(U)) = 10 + 12 > 2 \cdot 10 \Rightarrow \Delta - neigh(u) = \{t_1, t_3\}$

$d(u, t_3, G(U)) = 25$ $\quad d(s, u, G) + d(u, t_1, G(U)) = 10 + 25 \leq 2 \cdot 20$

Cômputo da $\sqrt{l}$-partition (Fase 1)

- A $\sqrt{l}$-partition divide V em dois conjuntos disjuntos: C e U.
- Δ-neigh(u) ($\forall u \in U$) deve conter no máximo $\sqrt{l}$ terminais.
- Partição computada através da eliminação dos $\sqrt{l}$*-bad nodes*.
- Um nó u é um $\sqrt{l}$-bad node se possui mais de $\sqrt{l}$ terminais em Δ-neigh(u).

Procedimento para cômputo da $\sqrt{l}$-partition (Fase 1)

Algorithm 1: CompPar(G=(V, E), s, k)

$C \leftarrow \{s\}$, $U \leftarrow V \setminus \{s\}$, $Roots \leftarrow \emptyset$

while $G(U)$ *contains a* $\sqrt{l}$*-bad node* v **do**

  Let $Cl(v)$ be the $\lfloor \sqrt{l} \rfloor$ uncovered terminals closest to v in $G(U)$

  Let T_v be a shortest path arborescence leading from v to $Cl(v)$ in $G(U)$

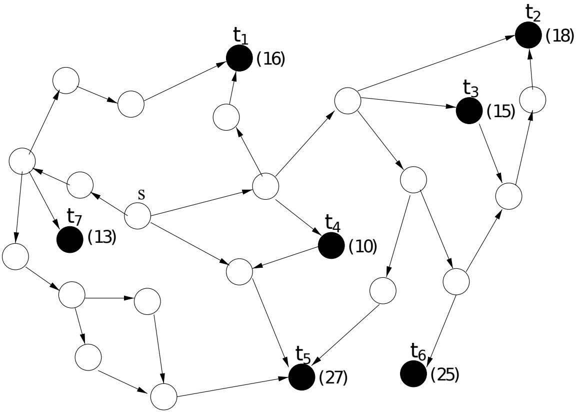
  $C \leftarrow C \cup V(T_v)$, $U \leftarrow U \setminus V(T_v)$, $Roots \leftarrow Roots \cup \{v\}$

Let $H(V_H, E_H)$ be the forest formed by the union of T_v, $\forall v \in Roots$

Output $(C, U, Roots, H)$

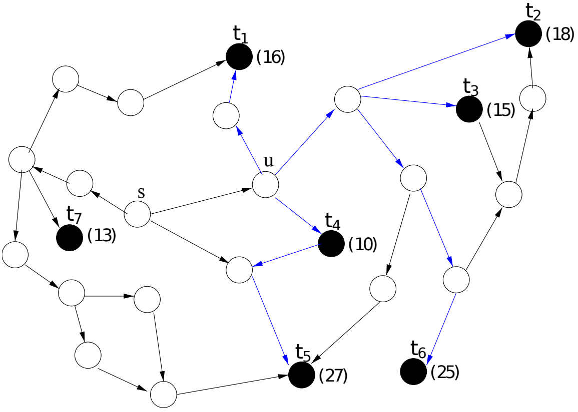
CompPar - Grafo de entrada

- $t = 2$



CompPar - $\sqrt{k}$-bad node

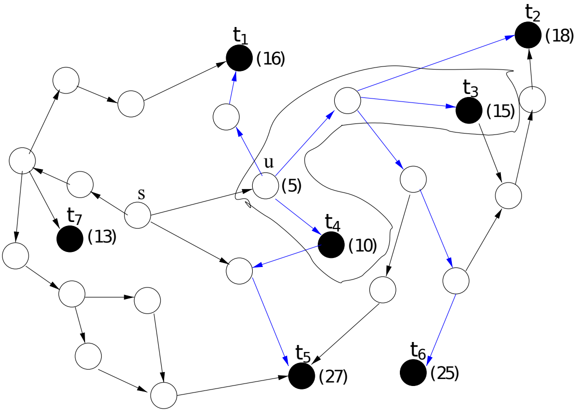
- $t = 2$



- u é $\sqrt{k}$-bad node.
- $d(s, u, G) = 5$; $d(u, t_4, G(u)) = 5$, $d(u, t_3, G(u)) = 10$, $d(u, t_1, G(u)) = 11$, $d(u, t_2, G(u)) = 13$, $d(u, t_6, G(u)) = 20$, $d(u, t_5, G(u)) = 22$.

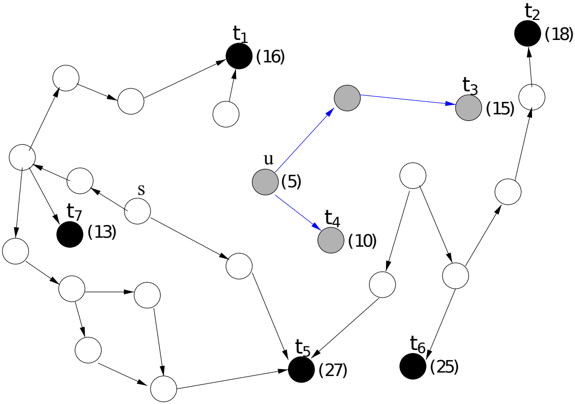
CompPar - $\lfloor\sqrt{l}\rfloor$ terminais mais próximos em UT

- $t = 2$



CompPar - Eliminando os nós cobertos

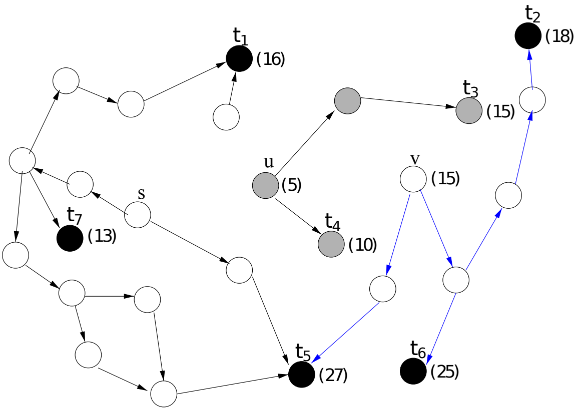
- $t = 2$



- $Root = \{u\}$.

CompPar - $\sqrt{k}$-bad node

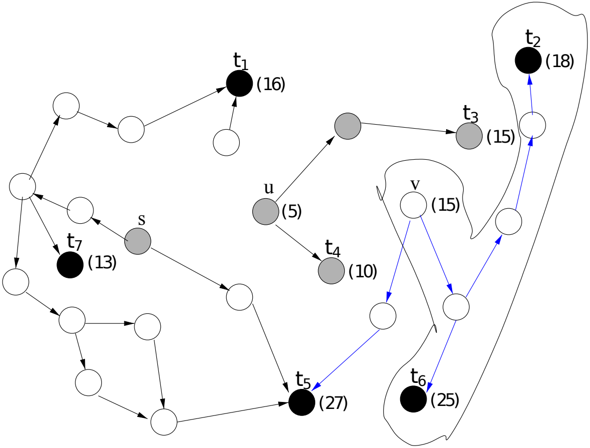
- $t = 2$



- v é $\sqrt{k}$-bad node.
- $d(v, t_6, G(u)) = 10$, $d(v, t_2, G(u)) = 20$, $d(v, t_5, G(u)) = 24$.

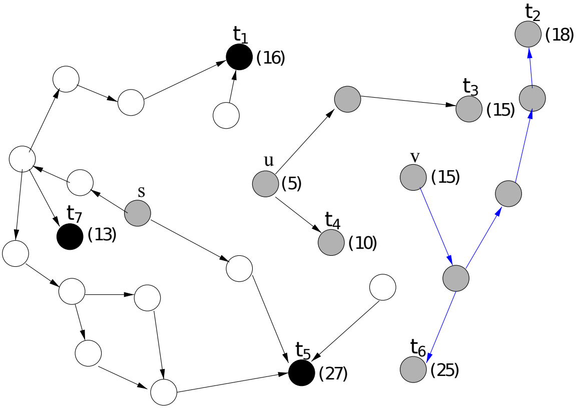
CompPar - $\lfloor\sqrt{l}\rfloor$ terminais mais próximos em UT

- $t = 2$



CompPar - Eliminando os nós cobertos

- $t = 2$



- $Root = \{u, v\}$.

Algoritmo 1: lemas

Lema 1

[Elkin and Kortsarz 2006] O par (C, U) gerado pelo Algoritmo 1 é uma $\sqrt{l}$-partition.

Lema 2

[Elkin and Kortsarz 2006] $|Roots| \leq \sqrt{l} + 2$.

Construção de caminhos para $t \in CT$

- Algoritmo 2 descreve o procedimento para construção de um grafo que contém caminhos de s para $t \in CT$ e que satisfaz $k \cdot dist(s, t, G)$.

Algorithm 2: CompGraphFirstPh(G, s, Roots, H)

$A_{Roots} \leftarrow SPT(s, Roots, G)$

$G_{\sqrt{l}-Par} \leftarrow A_{Roots} \cup H(V_H, E_H)$

$C \leftarrow V(G_{\sqrt{l}-Par}),\ U \leftarrow V \setminus C$

Output $(C, U, G_{\sqrt{l}-Par})$

- Terminais em $G_{\sqrt{l}-Par}$ respeitam a restrição de spanner.

Limite no grau máximo de $G_{\sqrt{l}-Par}$ (Algoritmo 2)

Lema 3

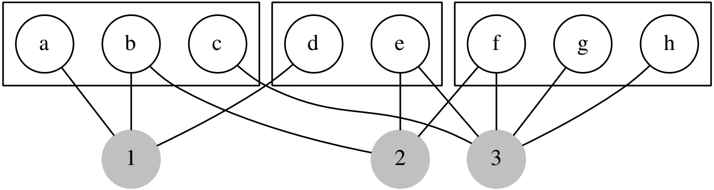
O grau máximo dos nós em $G_{\sqrt{l}-Par}$ *é* $\leq 2\sqrt{l} + 2$

▸ Prova

Problema do *Multiple Set-Cover* (MSC)

- Seja $\beta(V_1, V_2, E)$ um grafo bipartite. Um conjunto $S \subseteq V_1$ é denominado um *set-cover* de V_2 se $N(S, \beta) = V_2$.
- Definição formal do MSC:
  - Entrada: Um grafo bipartite $\beta(V_1, V_2, E)$ com $|V_1| + |V_2| = n$. $V_1 = \dot{\bigcup}_{j=1}^{d} A_j$.
  - Saída: Um *set-cover* $S \subset V_1$ de V_2 que minimiza $val(S)$, onde $val(S) = max\{|S \cap A_i|\}_{i=1}^{d}$.

Exemplo do MSC



- $V_1 = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $V_2 = \{1, 2, 3\}$.
- Os set-covers $S_1 = \{a, e\}$, $S_2 = \{c, d, f\}$ e $S_3 = \{b, f\}$ são soluções ótimas, pois $val(S_1) = val(S_2) = val(S_3) = 1$.

Solução de aproximação para o MSC

Teorema 2

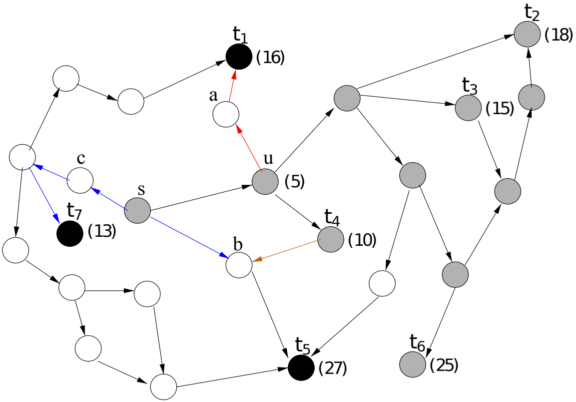
[Chekuri and Kumar 2004]. Existe uma algoritmo guloso com fator de aproximação de $(\log |V_2| + 1)$ *para o problema do MSC.*

Cobrindo nós em *UT* através do MSC (Fase 2)

- Utilização de uma instância do MSC para constuir caminhos para os nós em *UT* ao passo que o grau é limitado (similar a [Elkin and Kortsarz 2006]).
- Fase dividida em duas partes: utilização do MSC para encontrar um subconjunto de nós cobertos; em sequência caminhos para os terminais em *UT* a partir destes nós são definidos.
- Definição da instância $\beta = (V_1, V_2, \varepsilon)$ do MSC:
  - V_1 é formado por *pseudo nós*. $V_1 = \{x_{u,v} : u \in C, v \in U, (u, v) \in E\}$.
  - $V_2 = UT$.
  - Existe uma aresta em ε entre $x_{u,v}$ e $t \in V_2$ sse $dist(s, u, G) + C(u, v) + dist(v, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G)$.
  - Seja $A_u = \{x_{u,v} : v \in N(u, G(U))\}$. $V_1 = \dot{\bigcup}_{u \in C} A_u$.

Instância do MSC

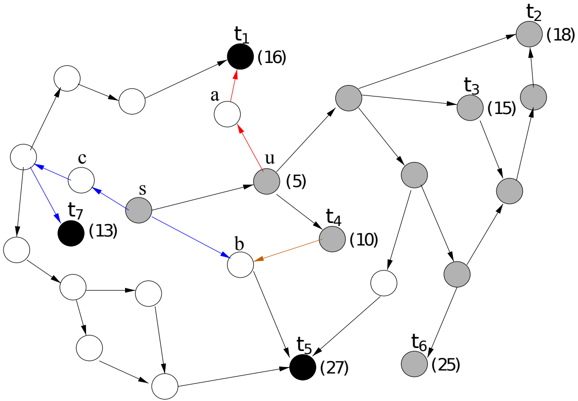
- $t = 2$
- Caminhos coloridos satisfazem a relação $dist(s, u, G) + C(u, v) + dist(v, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G)$.



- $V_1 = \{X_{u,a}, X_{t_4,b}, X_{s,b}, X_{s,c}\}$, partição de $V_1 = \{\{X_{u,a}\}, \{X_{t_4,b}\}, \{X_{s,b}, X_{s,c}\}\}$.
- $V_2 = \{t_1, t_5, t_7\}$.
- $\varepsilon = \{(X_{u,a}, t_1), (X_{t_4,b}, t_5), (X_{s,b}, t_5), (X_{s,c}, t_7)\}$.

Instância do MSC

- $t = 2$
- Caminhos coloridos satisfazem a relação $dist(s, u, G) + C(u, v) + dist(v, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G)$.



- $V_1 = \{X_{u,a}, X_{t_4,b}, X_{s,b}, X_{s,c}\}$, partição de $V_1 = \{\{X_{u,a}\}, \{X_{t_4,b}\}, \{X_{s,b}, X_{s,c}\}\}$.
- $V_2 = \{t_1, t_5, t_7\}$.
- $\varepsilon = \{(X_{u,a}, t_1), (X_{t_4,b}, t_5), (X_{s,b}, t_5), (X_{s,c}, t_7)\}$.

Limite superior para a solução da instância do MSC

Lema 4

A instância $\beta = (V_1, V_2, \varepsilon)$ do MSC admite uma solução $S^* \subseteq V_1$ t.q. $val(S^*) \leq d^*$.

Prova

Limite da interseção entre a solução do MSC e cada partição de V_1

Lema 5

Seja D uma solução para $\beta = (V_1, V_2, \varepsilon)$ com $V_1 = \dot{\bigcup}_{v \in C} A_v$ usando o algoritmo apresentado em [Chekuri and Kumar 2004]. Então $max_{v \in C} |D \cap A_v| = O(\log l) \cdot d^*$.

Prova

Algoritmo de Aproximação

Algorithm 3: Algoritmo de Aproximação para o DSMDStP

Input: $G = (V, E)$, $s \in V$, $T \subset V$, k
Output: $\mathcal{A}_f = (V_{\mathcal{A}_f}, E_{\mathcal{A}_f})$

$(C, U, Roots, H) \leftarrow CompPar(G, s, k)$
$(C, U, G_{\sqrt{l}-Par}) \leftarrow CompGraphFirstPh(G, s, Roots, H)$
Build the MSC instance $\beta = (V_1, V_2, \varepsilon)$
$D \leftarrow$ Apply approximation algorithm [Chekuri and Kumar 2004] on β
$\Gamma(V_\Gamma, E_\Gamma)$, $V_\Gamma \leftarrow \emptyset$, $E_\Gamma \leftarrow \emptyset$
foreach $t \in V_2$ **do**
  Choose $x_{u,v} \in D : (x_{u,v}, t) \in \varepsilon$ and $C(u, v) + dist(v, t, G(U))$ is minimum
  $s \leftarrow sp(v, t, G(U))$
  $V_\Gamma \leftarrow V_\Gamma \cup \{u\} \cup V(s)$
  $E_\Gamma \leftarrow E_\Gamma \cup \{(u, v)\} \cup E(s)$
$G_f \leftarrow G_{\sqrt{l}-Par} \cup \Gamma(V_\Gamma, E_\Gamma)$
$\mathcal{A}_f \leftarrow SPT(s, T, G_f)$

Grau máximo de G_f

Lema 6

O grau máximo dos nós em G_f é $\leq 2\sqrt{l} + 2 + O(\log l) \cdot d^*$.

▸ Prova

Custo máximo dos caminhos para os terminais

Lema 7

$\forall t \in T, dist(s, t, G_f) \leq k \cdot (dist(s, t, G) + dist(s, t_{max}, G))$, *where* $t_{max} \in \{t' | (t' \in T) \land (\forall t'' \in T : dist(s, t'', G) \leq dist(s, t', G))\}$.

Prova

Teorema Principal

Teorema 3

Algoritmo 3 gera uma arborescência $\mathcal{A}_f$ com grau máximo $2\sqrt{k} + 2 + O(\log l) \cdot d^*$ e que possui caminhos entre s e cada terminal $t \in T$ com custo $\leq k \cdot (dist(s, t, G) + dist(s, t_{max}, G))$.

Prova

Complexidade

- $O((\log|T|)(|V|^3|T|^2)$.

Detalhe

Resumo da heurística

- SIM: acrônimo para *Sliced and Iterative Msc*.
  - Aplicação iterativa do algoritmo para o MSC.
  - O conjunto de terminais é 'fatiado' e o MSC é aplicado é um conjunto menor se comparado ao algoritmo de aproximação.
- Em cada iteração, os próximos $\lfloor\sqrt{l}\rfloor$ terminais (não cobertos) são cobertos $\rightarrow$ $Next_{ter}^{\sqrt{l}}$.

SIM

Algorithm 4: SIM - Sliced and Iterative MSC

Input: $G = (V, E)$, $s \in V$, $T \subset V$, k
Output: $\mathcal{A}_f = (V_{\mathcal{A}_f}, E_{\mathcal{A}_f})$

$C \leftarrow \{s\}$, $U \leftarrow V \setminus \{s\}$, $Marked \leftarrow \emptyset$, $l \leftarrow |T|$
while $UT \neq \emptyset$ **do**
  Set V_1, V_2 and ε using the current values of C, U, $Marked$ and $Next_{ter}^{\sqrt{l}}$
  foreach $t : t \in V_2$ *and* $\nexists$ *edge* $(x, t) \in \varepsilon$ *for any* x **do**
    Let $x_{u,v}$ be a pseudo node such that:
      $u \in Marked$,
      u has the smallest out-degree and
      $C(u, v) + dist(v, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G)$
    $V_1 \leftarrow V_1 \cup \{x_{u,v}\}$, $\varepsilon \leftarrow \varepsilon \cup \{(x_{u,v}, t)\}$
  $D \leftarrow$ Apply approximation algorithm [Chekuri and Kumar 2004] on $\beta(V_1, V_2, \varepsilon)$
  $\Gamma(V_\Gamma, E_\Gamma) \leftarrow \emptyset$
  foreach $t \in V_2$ **do**
    Choose a node $x_{u,v} \in D : (x_{u,v}, t) \in \varepsilon$ and
      $C(u, v) + dist(v, t, G(U))$ is minimum
    $Marked \leftarrow Marked \cup \{u\}$ {for which $x_{(u,v)}$ was chosen in the last line}
    $s \leftarrow sp(v, t, G(U))$
    $V_\Gamma \leftarrow V_\Gamma \cup \{u\} \cup V(s)$
    $E_\Gamma \leftarrow E_\Gamma \cup \{(u, v)\} \cup E(s)$
  $C \leftarrow C \cup V_\Gamma$, $U \leftarrow U \setminus V_\Gamma$
  $\mathcal{A}_f \leftarrow \mathcal{A}_f \cup \Gamma(V_\Gamma, E_\Gamma)$

Existência de um caminho para todo terminal em $\mathcal{A}_f$

Lema 8

Seja $\mathcal{A}_f$ a arborescência gerada por SIM. $\forall t \in T$, existe um caminho entre s e t em $\mathcal{A}_f$.

Prova

Número de iterações do SIM

Lema 9

O número de iterações do SIM é limitado por $\lfloor \sqrt{I} \rfloor + 2$.

Prova

Grafo gerado por SIM é uma arborescência

Lema 10

Seja $\mathcal{A}_f$ o grafo gerado por SIM. $\mathcal{A}_f$ é uma arborescência.

▸ Prova

Custo máximo dos caminhos gerados por SIM

Teorema 4

Seja $\mathcal{A}_f$ a arborescência gerada por SIM.
$\forall t \in T, dist(s, t, \mathcal{A}_f) \leq (\lfloor \sqrt{l} \rfloor + 2) \cdot k \cdot dist(s, t, G).$

▸ Prova

Complexidade

- $O((\log \sqrt{|T|})(|V|^3|T|\sqrt{|T|}))$.

Detalhe

Parâmetros e detalhes da implementação

- Algoritmos implementados em Java.
- Nós espalhados em uma área de 500x500 no espaço Euclideano.
- Alcance de cada nó é de 125 unidades de medida.
- Faixas de valores:
  - Rede: 60 .. 300.
  - Terminais: 10 .. 50.
  - Fator de dilatação: 1 .. 2.
- 30 simulações para cada cenário.

Algoritmos e Métricas

- Algoritmos:
  - DSMDStP é um problema novo.
  - Comparamos com o SPT.
    - Satisfaz as restrições do problema.
    - Algoritmo simples e eficiente*.
    - Similaridades com os algoritmos propostos (principalmente APPROX).
- 4 métricas:
  - Grau máximo.
  - Razão de violação do custo (CVR): $\frac{\sum_{\forall t \in T_{vio}} \frac{dist(s,t,A_f)}{k \cdot dist(s,t,G)}}{|T_{vio}|}$.
    - Pior caso da razão de violação (MAX_CVR).
  - Percentagem de terminais que violam restrições (PVT): $\frac{|T_{vio}|}{|T|} \cdot 100\%$.
  - Percentagem de cenários violados (PVR).

Algoritmos e Métricas

- Algoritmos:
  - DSMDStP é um problema novo.
  - Comparamos com o SPT.
    - Satisfaz as restrições do problema.
    - Algoritmo simples e eficiente*.
    - Similaridades com os algoritmos propostos (principalmente APPROX).
- 4 métricas:
  - Grau máximo.
  - Razão de violação do custo (CVR): $\frac{\sum_{\forall t \in T_{vio}} \frac{dist(s,t,A_t)}{k \cdot dist(s,t,G)}}{|T_{vio}|}$.
    - Pior caso da razão de violação (MAX_CVR).
  - Percentagem de terminais que violam restrições (PVT): $\frac{|T_{vio}|}{|T|} \cdot 100\%$.
  - Percentagem de cenários violados (PVR).

Algoritmos e Métricas

- Algoritmos:
  - DSMDStP é um problema novo.
  - Comparamos com o SPT.
    - Satisfaz as restrições do problema.
    - Algoritmo simples e eficiente*.
    - Similaridades com os algoritmos propostos (principalmente APPROX).
- 4 métricas:
  - Grau máximo.
  - Razão de violação do custo (CVR): $\frac{\sum_{\forall t \in T_{vio}} \frac{dist(s,t,\mathcal{A}_f)}{k \cdot dist(s,t,G)}}{|T_{vio}|}$.
    - Pior caso da razão de violação (MAX_CVR).
  - Percentagem de terminais que violam restrições (PVT): $\frac{|T_{vio}|}{|T|} \cdot 100\%$.
  - Percentagem de cenários violados (PVR).

Algoritmos e Métricas

- Algoritmos:
  - DSMDStP é um problema novo.
  - Comparamos com o SPT.
    - Satisfaz as restrições do problema.
    - Algoritmo simples e eficiente*.
    - Similaridades com os algoritmos propostos (principalmente APPROX).
- 4 métricas:
  - Grau máximo.
  - Razão de violação do custo (CVR): $\frac{\sum_{\forall t \in T_{vio}} \frac{dist(s,t,\mathcal{A}_f)}{k \cdot dist(s,t,G)}}{|T_{vio}|}$.
    - Pior caso da razão de violação (MAX_CVR).
  - Percentagem de terminais que violam restrições (PVT): $\frac{|T_{vio}|}{|T|} \cdot 100\%$.
  - Percentagem de cenários violados (PVR).

Algoritmos e Métricas

- Algoritmos:
  - DSMDStP é um problema novo.
  - Comparamos com o SPT.
    - Satisfaz as restrições do problema.
    - Algoritmo simples e eficiente*.
    - Similaridades com os algoritmos propostos (principalmente APPROX).
- 4 métricas:
  - Grau máximo.
  - Razão de violação do custo (CVR): $\frac{\sum_{\forall t \in T_{vio}} \frac{dist(s,t,\mathcal{A}_f)}{k \cdot dist(s,t,G)}}{|T_{vio}|}$.
    - Pior caso da razão de violação (MAX_CVR).
  - Percentagem de terminais que violam restrições (PVT): $\frac{|T_{vio}|}{|T|} \cdot 100\%$.
  - Percentagem de cenários violados (PVR).

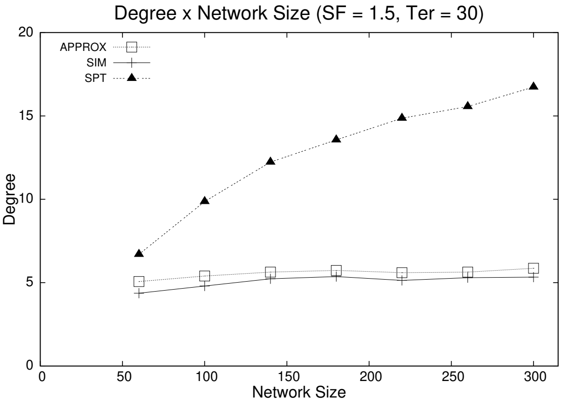
Algoritmos e Métricas

- Algoritmos:
  - DSMDStP é um problema novo.
  - Comparamos com o SPT.
    - Satisfaz as restrições do problema.
    - Algoritmo simples e eficiente*.
    - Similaridades com os algoritmos propostos (principalmente APPROX).
- 4 métricas:
  - Grau máximo.
  - Razão de violação do custo (CVR): $\frac{\sum_{\forall t \in T_{vio}} \frac{dist(s,t,\mathcal{A}_f)}{k \cdot dist(s,t,G)}}{|T_{vio}|}$.
    - Pior caso da razão de violação (MAX_CVR).
  - Percentagem de terminais que violam restrições (PVT): $\frac{|T_{vio}|}{|T|} \cdot 100\%$.
  - Percentagem de cenários violados (PVR).

Algoritmos e Métricas

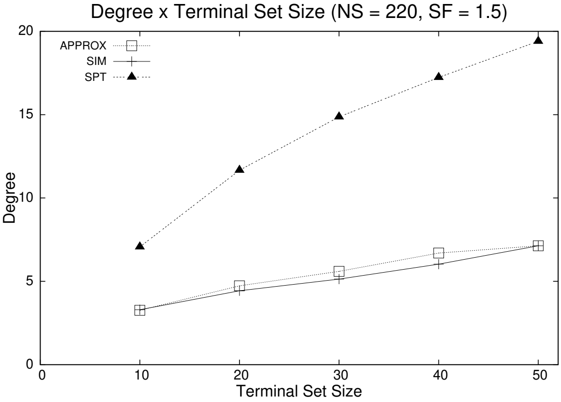
- Algoritmos:
  - DSMDStP é um problema novo.
  - Comparamos com o SPT.
    - Satisfaz as restrições do problema.
    - Algoritmo simples e eficiente*.
    - Similaridades com os algoritmos propostos (principalmente APPROX).
- 4 métricas:
  - Grau máximo.
  - Razão de violação do custo (CVR): $\frac{\sum_{\forall t \in T_{vio}} \frac{dist(s,t,\mathcal{A}_f)}{k \cdot dist(s,t,G)}}{|T_{vio}|}$.
    - Pior caso da razão de violação (MAX_CVR).
  - Percentagem de terminais que violam restrições (PVT): $\frac{|T_{vio}|}{|T|} \cdot 100\%$.
  - Percentagem de cenários violados (PVR).

Grau x Rede



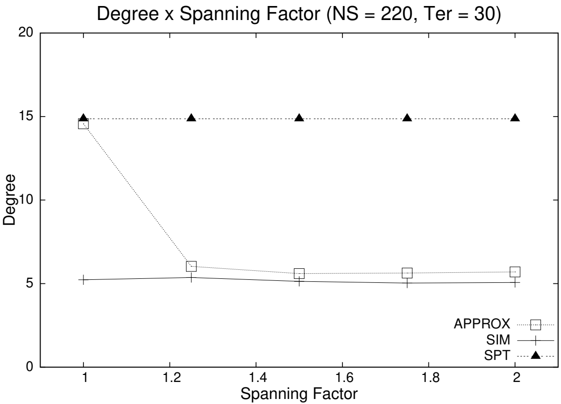
- APPROX e SIM escalam bem.
- SPT possui grau 3x maior do que os outros algoritmos em redes densas.

Grau x Terminais



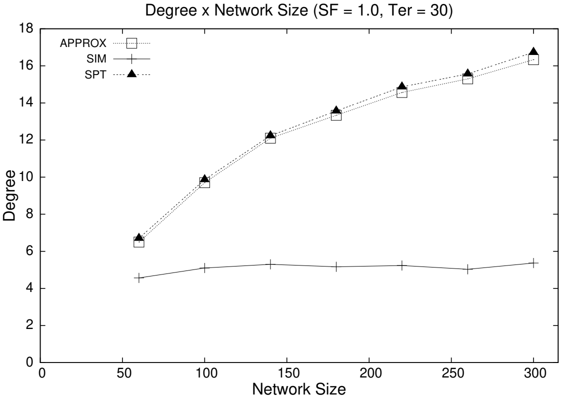
- Crescrimento do grau para APPROX e SIM já era esperado.
  - Em cada fase, o grau máximo do(s) algoritmo(s) é afetado pela quantidade de terminais.
- Taxa de crescimento bem maior para SPT.

Grau x Fator de Dilatação



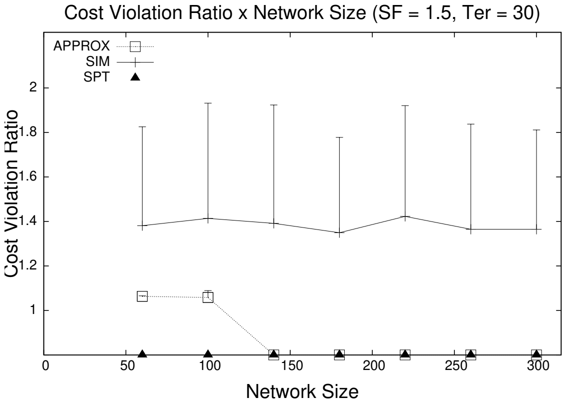
- Comportamento de SIM é estável.
- APPROX escala bem, exceto para o caso restritivo do fator de dilatação.

Grau x Rede, SF = 1



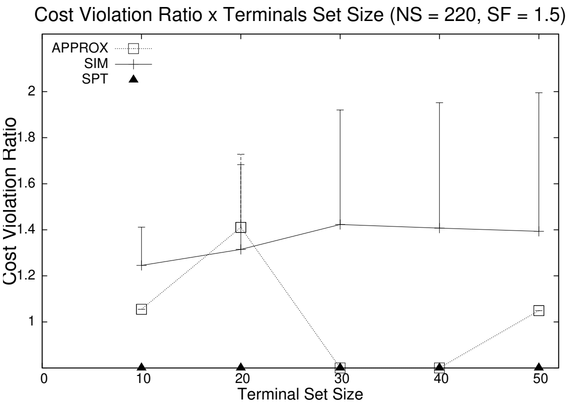
- Curva do APPROX assemelha-se à curva do SPT.
  - $<$ sf $\Leftrightarrow$ menos opções de caminhos para os terminais não-cobertos.
  - Basicamente os caminhos que sobram fazem parte da árvore de custo mínimo (SPT).

CVR x Rede



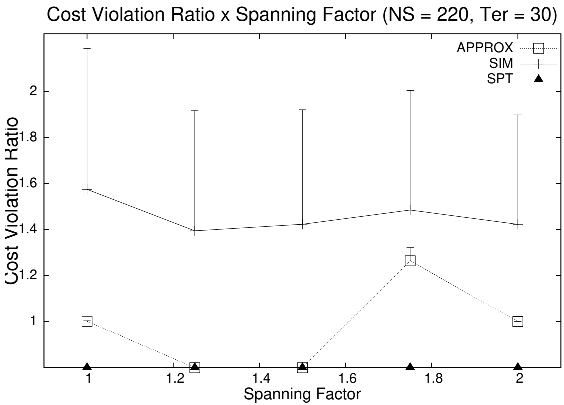
- Valores de APROX próximos de 1, ou não há violação.
- SIM apresenta valores uniformes e baixos.
- MAX_CVR abaixo de 2 para o SIM e próximo do CVR para APPROX.

CVR x Terminais



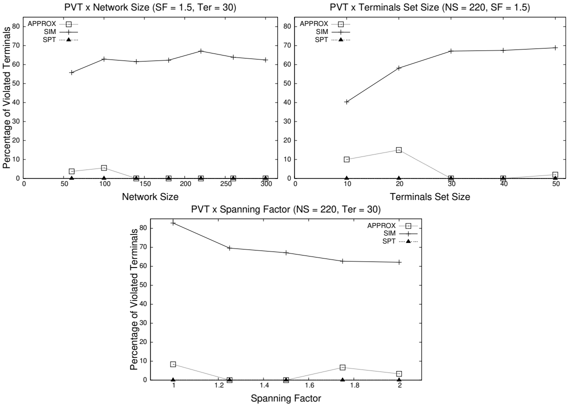
- Comportamente semelhante ao gráfico anterior.

CVR x Fator de dilatação



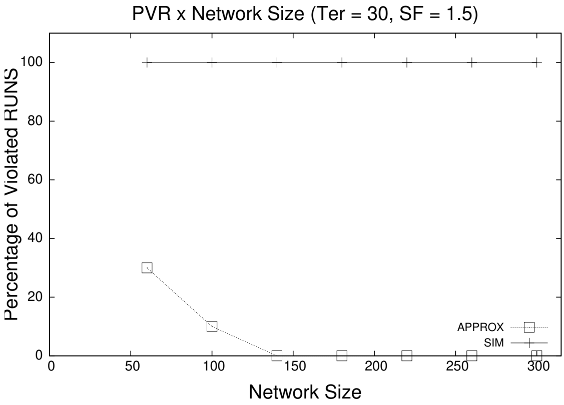
- Comportamente semelhante ao gráfico anterior.

PVT



- Percentagem pequena dos terminais que violam para o APPROX (10%).

PVR x Rede



- APPROX causa violação em uma percentagem relativamente baixa de cenários.
  - Apenas um terminal é suficiente para considerar que ocorreu violação no cenário.

Experimentos - Resultado

- Grau baixo para os algoritmos propostos.
  - Exceto para APPROX no pior cenário com relação ao FD.
  - Neste cenário, APPROX equivale ao SPT com relação ao grau.
- SIM possui melhor grau e escala bem.
- APPROX é melhor que SIM nas métricas que concerne a propriedade de spanner.
- Com APPROX, em metade das situações não ocorreu violação; na outra metade, a violação foi por um fator (CVR) baixo.
- Com relação ao spanner, SIM apresenta bons resultados para a principal métrica (CVR), a métrica qualitativa.
  - CVR: 1.4.
  - MAX_CVR: 2.

Experimentos - Resultado

- Grau baixo para os algoritmos propostos.
  - Exceto para APPROX no pior cenário com relação ao FD.
  - Neste cenário, APPROX equivale ao SPT com relação ao grau.
- SIM possui melhor grau e escala bem.
- APPROX é melhor que SIM nas métricas que concerne a propriedade de spanner.
- Com APPROX, em metade das situações não ocorreu violação; na outra metade, a violação foi por um fator (CVR) baixo.
- Com relação ao spanner, SIM apresenta bons resultados para a principal métrica (CVR), a métrica qualitativa.
  - CVR: 1.4.
  - MAX_CVR: 2.

Experimentos - Resultado

- Grau baixo para os algoritmos propostos.
  - Exceto para APPROX no pior cenário com relação ao FD.
  - Neste cenário, APPROX equivale ao SPT com relação ao grau.
- SIM possui melhor grau e escala bem.
- APPROX é melhor que SIM nas métricas que concerne a propriedade de spanner.
- Com APPROX, em metade das situações não ocorreu violação; na outra metade, a violação foi por um fator (CVR) baixo.
- Com relação ao spanner, SIM apresenta bons resultados para a principal métrica (CVR), a métrica qualitativa.
  - CVR: 1.4.
  - MAX_CVR: 2.

Experimentos - Resultado

- Grau baixo para os algoritmos propostos.
  - Exceto para APPROX no pior cenário com relação ao FD.
  - Neste cenário, APPROX equivale ao SPT com relação ao grau.
- SIM possui melhor grau e escala bem.
- APPROX é melhor que SIM nas métricas que concerne a propriedade de spanner.
- Com APPROX, em metade das situações não ocorreu violação; na outra metade, a violação foi por um fator (CVR) baixo.
- Com relação ao spanner, SIM apresenta bons resultados para a principal métrica (CVR), a métrica qualitativa.
  - CVR: 1.4.
  - MAX_CVR: 2.

Experimentos - Resultado

- Grau baixo para os algoritmos propostos.
  - Exceto para APPROX no pior cenário com relação ao FD.
  - Neste cenário, APPROX equivale ao SPT com relação ao grau.
- SIM possui melhor grau e escala bem.
- APPROX é melhor que SIM nas métricas que concerne a propriedade de spanner.
- Com APPROX, em metade das situações não ocorreu violação; na outra metade, a violação foi por um fator (CVR) baixo.
- Com relação ao spanner, SIM apresenta bons resultados para a principal métrica (CVR), a métrica qualitativa.
  - CVR: 1.4.
  - MAX_CVR: 2.

Experimentos - Resultado

- Grau baixo para os algoritmos propostos.
  - Exceto para APPROX no pior cenário com relação ao FD.
  - Neste cenário, APPROX equivale ao SPT com relação ao grau.
- SIM possui melhor grau e escala bem.
- APPROX é melhor que SIM nas métricas que concerne a propriedade de spanner.
- Com APPROX, em metade das situações não ocorreu violação; na outra metade, a violação foi por um fator (CVR) baixo.
- Com relação ao spanner, SIM apresenta bons resultados para a principal métrica (CVR), a métrica qualitativa.
  - CVR: 1.4.
  - MAX_CVR: 2.

Funções submodulares e Matroids

- MCG pode ser modelado através dos conceitos de *funções submodulares* e *matroids* ([Călinescu et al. 2011]).

▸ Formalismo

Maximização de função submodular

- O problema abordado em [Călinescu et al. 2011] foi o da maximização de função submodular sob restrição de uma matroid (SUB-M).
- Este problema já tinha sido abordado em outros trabalhos [Nemhauser et al. 1978, Fisher et al. 1978].
- Os autores em [Călinescu et al. 2011] conseguem generalizar o resultado para qualquer tipo de matroid (incluindo matroid de partição), mantendo a garantia de aproximação $((e/(e-1)))$.
  - O resultado dos autores é probabilístico:

Maximização de função submodular

- O problema abordado em [Călinescu et al. 2011] foi o da maximização de função submodular sob restrição de uma matroid (SUB-M).
- Este problema já tinha sido abordado em outros trabalhos [Nemhauser et al. 1978, Fisher et al. 1978].
- Os autores em [Călinescu et al. 2011] conseguem generalizar o resultado para qualquer tipo de matroid (incluindo matroid de partição), mantendo a garantia de aproximação $((e/(e-1)))$.
  - O resultado dos autores é probabilístico:
    - Garantia do grau passaria a ser probabilística.
    - Para o MSC, o limite no número de iterações para cobrir todos os terminais seria probabilístico.

Maximização de função submodular

- O problema abordado em [Călinescu et al. 2011] foi o da maximização de função submodular sob restrição de uma matroid (SUB-M).
- Este problema já tinha sido abordado em outros trabalhos [Nemhauser et al. 1978, Fisher et al. 1978].
- Os autores em [Călinescu et al. 2011] conseguem generalizar o resultado para qualquer tipo de matroid (incluindo matroid de partição), mantendo a garantia de aproximação $((e/(e-1)))$.
  - O resultado dos autores é probabilístico:
    - Garantia do grau passaria a ser probabilística.
    - Para o MSC, o limite no número de iterações para cobrir todos os terminais seria probabilístico.

Maximização de função submodular

- O problema abordado em [Călinescu et al. 2011] foi o da maximização de função submodular sob restrição de uma matroid (SUB-M).
- Este problema já tinha sido abordado em outros trabalhos [Nemhauser et al. 1978, Fisher et al. 1978].
- Os autores em [Călinescu et al. 2011] conseguem generalizar o resultado para qualquer tipo de matroid (incluindo matroid de partição), mantendo a garantia de aproximação $((e/(e-1)))$.
  - O resultado dos autores é probabilístico:
    - Garantia do grau passaria a ser probabilística.
    - Para o MSC, o limite no número de iterações para cobrir todos os terminais seria probabilístico.

Maximização de função submodular

- O problema abordado em [Călinescu et al. 2011] foi o da maximização de função submodular sob restrição de uma matroid (SUB-M).
- Este problema já tinha sido abordado em outros trabalhos [Nemhauser et al. 1978, Fisher et al. 1978].
- Os autores em [Călinescu et al. 2011] conseguem generalizar o resultado para qualquer tipo de matroid (incluindo matroid de partição), mantendo a garantia de aproximação $((e/(e-1)))$.
  - O resultado dos autores é probabilístico:
    - Garantia do grau passaria a ser probabilística.
    - Para o MSC, o limite no número de iterações para cobrir todos os terminais seria probabilístico.

Maximização de função submodular

- O problema abordado em [Călinescu et al. 2011] foi o da maximização de função submodular sob restrição de uma matroid (SUB-M).
- Este problema já tinha sido abordado em outros trabalhos [Nemhauser et al. 1978, Fisher et al. 1978].
- Os autores em [Călinescu et al. 2011] conseguem generalizar o resultado para qualquer tipo de matroid (incluindo matroid de partição), mantendo a garantia de aproximação $((e/(e-1)))$.
  - O resultado dos autores é probabilístico:
    - Garantia do grau passaria a ser probabilística.
    - Para o MSC, o limite no número de iterações para cobrir todos os terminais seria probabilístico.

Conclusão I

- Propomos um novo problema, denominado *Árvore Steiner com Grau Mínimo e fator de dilatação k em Grafos Direcionados* (DSMDStP).
- Provamos que este problema não é aproximável sublogaritimicamente.
- Propomos duas soluções: um algoritmo de aproximação e uma heurística.
- Provamos as propriedades e garantias de ambos os algoritmos.
- Algoritmo de aproximação:
  - Garantia do grau: $2\sqrt{|T|} + 2 + O(\log|T|) \cdot d^*$.
  - Custo máximo: $\leq k \cdot (dist(s, t, G) + dist(s, t_{max}, G))$.
- SIM:
  - Custo máximo: $(|T| + 2) \cdot k \cdot dist(s, t, G)$.
- Extensa simulação foi apresentada.
  - Ambos os algoritmos apresentam grau muito baixo.

Conclusão II

- SIM possui grau uniforme e apresentou melhores resultados que APPROX e SPT.
- A qualidade da violação apresentada é baixa (1.4 na média).
- APPROX apresentou resultados muito bons para a propriedade spanner:
  - Em metade das situações não ocorreu violação.
  - Na outra metade, a violação muito baixa qualitativamente (em média 1 - praticamente sem violação) e quantitativamente.

Trabalhos Futuros

- Tentar garantir as restrições de spanner.
- Solução distribuída.
- Modelar a solução através de função submodular e matroids.

Trabalhos Futuros

- Tentar garantir as restrições de spanner.
- Solução distribuída.
- Modelar a solução através de função submodular e matroids.

Trabalhos Futuros

- Tentar garantir as restrições de spanner.
- Solução distribuída.
- Modelar a solução através de função submodular e matroids.

Trabalhos Futuros

- Tentar garantir as restrições de spanner.
- Solução distribuída.
- Modelar a solução através de função submodular e matroids.

Definições preliminares

- Algoritmo de aproximação por um fator α [Williamson and Shmoys 2011]: consistem em um algoritmo polinomial tal que para todas as instâncias do problema de otimização, produz uma solução cujo valor se aproxima do valor ótimo por um fator α.
- Classe de complexidade *DTIME* [Arora and Barak 2009]: Seja $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Uma linguagem $L \in \mathbf{DTIME}(T(n))$ sse existe uma máquina de Turing que decide L em um tempo de execução de $c \cdot T(n)$, para uma constante $c > 0$. Back

Funções submodulares e Matroids

Voltar

- $f : 2^X \to \mathbb{R}^+$ é submodular sse $f(A \cup B) + f(A \cap B) \leq f(A) + f(B)$.
- Matroid:
  - Conjunto base X.
  - Família de elementos independentes $I \subseteq 2^X$.
  - Matroid é um par $M = (X, I)$ tal que:
    - $\forall B \in I, A \subset B \Rightarrow A \in I$.
    - $\forall A, B \in I; |A| < |B| \Rightarrow \exists x \in B \setminus A; A \cup x \in I$.

Impossibilidade de aproximação sublogarítmica ▸ Voltar

Demonstração.

- Seja $\mathcal{S}$ uma instância de SvMDST ($G = (V, E)$, $T \subseteq V$ e $s \in T$). Seja $\Delta^*_{\mathcal{S}}$ uma solução ótima para $\mathcal{S}$.
- Instância $\mathcal{D}$ de DSMDStP: $G = (V, E)$, $s \in T$, $T_{\mathcal{D}} = T \setminus \{s\}$ e $k = \infty$ ($\frac{\sum_{e \in E} C(e)}{min_{v \in V}\{dist(s,t,G)\}}$).
- Seja $\Delta^*_{\mathcal{D}}$ uma solução ótima para $\mathcal{D}$.
- Para $k = \infty$, qualquer que seja a solução para $\mathcal{S}$, ela satisfaz a restrição de spanner $\Longrightarrow \Delta^*_{\mathcal{S}} = \Delta^*_{\mathcal{D}}$.
- Seja $\mathcal{A}$ uma algoritmo de aproximação por um fator α para o DSMDStP. Seja Δ^* o grau resultante.
- $\Delta^* \leq \alpha \cdot \Delta^*_{\mathcal{D}} \Longrightarrow \frac{\Delta^*}{\Delta^*_{\mathcal{S}}} \leq \alpha$.
- Então nós podemos aproximar $\Delta^*_{\mathcal{S}}$ por um fator α.
- O fator de aproximação de $\Delta^*_{\mathcal{S}}$ é $> (1 - \varepsilon) \log_e |T|$ (Afirm. 1). Então $(1 - \varepsilon) \log_e |T| < \frac{\Delta^*}{\Delta^*_{\mathcal{S}}} \leq \alpha \Longrightarrow \alpha > (1 - \varepsilon) \log_e |T|$.

□

Impossibilidade de aproximação sublogarítmica

▸ Voltar

Demonstração.

- Seja $\mathcal{S}$ uma instância de SvMDST ($G = (V, E)$, $T \subseteq V$ e $s \in T$). Seja $\Delta^*_{\mathcal{S}}$ uma solução ótima para $\mathcal{S}$.
- Instância $\mathcal{D}$ de DSMDStP: $G = (V, E)$, $s \in T$, $T_{\mathcal{D}} = T \setminus \{s\}$ e $k = \infty$ ($\frac{\sum_{e \in E} C(e)}{min_{v \in V}\{dist(s,t,G)\}}$).
- Seja $\Delta^*_{\mathcal{D}}$ uma solução ótima para $\mathcal{D}$.
- Para $k = \infty$, qualquer que seja a solução para $\mathcal{S}$, ela satisfaz a restrição de spanner $\Longrightarrow \Delta^*_{\mathcal{S}} = \Delta^*_{\mathcal{D}}$.
- Seja $\mathcal{A}$ uma algoritmo de aproximação por um fator α para o DSMDStP. Seja Δ^* o grau resultante.
- $\Delta^* \leq \alpha \cdot \Delta^*_{\mathcal{D}} \Longrightarrow \frac{\Delta^*}{\Delta^*_{\mathcal{S}}} \leq \alpha$.
- Então nós podemos aproximar $\Delta^*_{\mathcal{S}}$ por um fator α.
- O fator de aproximação de $\Delta^*_{\mathcal{S}}$ é $> (1-\varepsilon)\log_e |T|$ (Afirm. 1). Então $(1-\varepsilon)\log_e |T| < \frac{\Delta^*}{\Delta^*_{\mathcal{S}}} \leq \alpha \Longrightarrow \alpha > (1-\varepsilon)\log_e |T|$.

□

Impossibilidade de aproximação sublogarítmica

Voltar

Demonstração.

- Seja $\mathcal{S}$ uma instância de SvMDST ($G = (V, E)$, $T \subseteq V$ e $s \in T$). Seja $\Delta^*_{\mathcal{S}}$ uma solução ótima para $\mathcal{S}$.
- Instância $\mathcal{D}$ de DSMDStP: $G = (V, E)$, $s \in T$, $T_{\mathcal{D}} = T \setminus \{s\}$ e $k = \infty$ ($\frac{\sum_{e \in E} C(e)}{min_{v \in V}\{dist(s,t,G)\}}$).
- Seja $\Delta^*_{\mathcal{D}}$ uma solução ótima para $\mathcal{D}$.
- Para $k = \infty$, qualquer que seja a solução para $\mathcal{S}$, ela satisfaz a restrição de spanner $\implies \Delta^*_{\mathcal{S}} = \Delta^*_{\mathcal{D}}$.
- Seja $\mathcal{A}$ uma algoritmo de aproximação por um fator α para o DSMDStP. Seja Δ^* o grau resultante.
- $\Delta^* \leq \alpha \cdot \Delta^*_{\mathcal{D}} \implies \frac{\Delta^*}{\Delta^*_{\mathcal{S}}} \leq \alpha$.
- Então nós podemos aproximar $\Delta^*_{\mathcal{S}}$ por um fator α.
- O fator de aproximação de $\Delta^*_{\mathcal{S}}$ é $> (1 - \varepsilon)\log_e |T|$ (Afirm. 1). Então $(1 - \varepsilon)\log_e |T| < \frac{\Delta^*}{\Delta^*_{\mathcal{S}}} \leq \alpha \implies \alpha > (1 - \varepsilon)\log_e |T|$.

$\square$

Impossibilidade de aproximação sublogarítmica

Voltar

Demonstração.

- Seja $\mathcal{S}$ uma instância de SvMDST ($G = (V, E)$, $T \subseteq V$ e $s \in T$). Seja $\Delta^*_{\mathcal{S}}$ uma solução ótima para $\mathcal{S}$.
- Instância $\mathcal{D}$ de DSMDStP: $G = (V, E)$, $s \in T$, $T_{\mathcal{D}} = T \setminus \{s\}$ e $k = \infty$ $\left(\frac{\sum_{e \in E} C(e)}{min_{v \in V}\{dist(s,t,G)\}}\right)$.
- Seja $\Delta^*_{\mathcal{D}}$ uma solução ótima para $\mathcal{D}$.
- Para $k = \infty$, qualquer que seja a solução para $\mathcal{S}$, ela satisfaz a restrição de spanner $\Longrightarrow \Delta^*_{\mathcal{S}} = \Delta^*_{\mathcal{D}}$.
- Seja $\mathcal{A}$ uma algoritmo de aproximação por um fator α para o DSMDStP. Seja Δ^* o grau resultante.
- $\Delta^* \leq \alpha \cdot \Delta^*_{\mathcal{D}} \Longrightarrow \frac{\Delta^*}{\Delta^*_{\mathcal{S}}} \leq \alpha$.
- Então nós podemos aproximar $\Delta^*_{\mathcal{S}}$ por um fator α.
- O fator de aproximação de $\Delta^*_{\mathcal{S}}$ é $> (1 - \varepsilon) \log_e |T|$ (Afirm. 1). Então $(1 - \varepsilon) \log_e |T| < \frac{\Delta^*}{\Delta^*_{\mathcal{S}}} \leq \alpha \Longrightarrow \alpha > (1 - \varepsilon) \log_e |T|$.

$\square$

Impossibilidade de aproximação sublogarítmica

Voltar

Demonstração.

- Seja $\mathcal{S}$ uma instância de SvMDST ($G = (V, E)$, $T \subseteq V$ e $s \in T$). Seja $\Delta^*_{\mathcal{S}}$ uma solução ótima para $\mathcal{S}$.
- Instância $\mathcal{D}$ de DSMDStP: $G = (V, E)$, $s \in T$, $T_{\mathcal{D}} = T \setminus \{s\}$ e $k = \infty$ $\left(\frac{\sum_{e \in E} C(e)}{min_{v \in V}\{dist(s,t,G)\}}\right)$.
- Seja $\Delta^*_{\mathcal{D}}$ uma solução ótima para $\mathcal{D}$.
- Para $k = \infty$, qualquer que seja a solução para $\mathcal{S}$, ela satisfaz a restrição de spanner $\Longrightarrow \Delta^*_{\mathcal{S}} = \Delta^*_{\mathcal{D}}$.
- Seja $\mathcal{A}$ uma algoritmo de aproximação por um fator α para o DSMDStP. Seja Δ^* o grau resultante.
- $\Delta^* \leq \alpha \cdot \Delta^*_{\mathcal{D}} \Longrightarrow \frac{\Delta^*}{\Delta^*_{\mathcal{S}}} \leq \alpha$.
- Então nós podemos aproximar $\Delta^*_{\mathcal{S}}$ por um fator α.
- O fator de aproximação de $\Delta^*_{\mathcal{S}}$ é $> (1 - \varepsilon)\log_e |T|$ (Afirm. 1). Então $(1 - \varepsilon)\log_e |T| < \frac{\Delta^*}{\Delta^*_{\mathcal{S}}} \leq \alpha \Longrightarrow \alpha > (1 - \varepsilon)\log_e |T|$.

$\square$

Impossibilidade de aproximação sublogarítmica

Voltar

Demonstração.

- Seja $\mathcal{S}$ uma instância de SvMDST ($G = (V, E)$, $T \subseteq V$ e $s \in T$). Seja $\Delta^*_{\mathcal{S}}$ uma solução ótima para $\mathcal{S}$.
- Instância $\mathcal{D}$ de DSMDStP: $G = (V, E)$, $s \in T$, $T_{\mathcal{D}} = T \setminus \{s\}$ e $k = \infty$ ($\frac{\sum_{e \in E} C(e)}{min_{v \in V}\{dist(s,t,G)\}}$).
- Seja $\Delta^*_{\mathcal{D}}$ uma solução ótima para $\mathcal{D}$.
- Para $k = \infty$, qualquer que seja a solução para $\mathcal{S}$, ela satisfaz a restrição de spanner $\implies \Delta^*_{\mathcal{S}} = \Delta^*_{\mathcal{D}}$.
- Seja $\mathcal{A}$ uma algoritmo de aproximação por um fator α para o DSMDStP. Seja Δ^* o grau resultante.
- $\Delta^* \leq \alpha \cdot \Delta^*_{\mathcal{D}} \implies \frac{\Delta^*}{\Delta^*_{\mathcal{S}}} \leq \alpha$.
- Então nós podemos aproximar $\Delta^*_{\mathcal{S}}$ por um fator α.
- O fator de aproximação de $\Delta^*_{\mathcal{S}}$ é $> (1 - \varepsilon) \log_e |T|$ (Afirm. 1). Então $(1 - \varepsilon) \log_e |T| < \frac{\Delta^*}{\Delta^*_{\mathcal{S}}} \leq \alpha \implies \alpha > (1 - \varepsilon) \log_e |T|$.

$\square$

Impossibilidade de aproximação sublogarítmica

Voltar

Demonstração.

- Seja $\mathcal{S}$ uma instância de SvMDST ($G = (V, E)$, $T \subseteq V$ e $s \in T$). Seja $\Delta^*_{\mathcal{S}}$ uma solução ótima para $\mathcal{S}$.
- Instância $\mathcal{D}$ de DSMDStP: $G = (V, E)$, $s \in T$, $T_{\mathcal{D}} = T \setminus \{s\}$ e $k = \infty$ ($\frac{\sum_{e \in E} C(e)}{min_{v \in V}\{dist(s,t,G)\}}$).
- Seja $\Delta^*_{\mathcal{D}}$ uma solução ótima para $\mathcal{D}$.
- Para $k = \infty$, qualquer que seja a solução para $\mathcal{S}$, ela satisfaz a restrição de spanner $\Longrightarrow \Delta^*_{\mathcal{S}} = \Delta^*_{\mathcal{D}}$.
- Seja $\mathcal{A}$ uma algoritmo de aproximação por um fator α para o DSMDStP. Seja Δ^* o grau resultante.
- $\Delta^* \leq \alpha \cdot \Delta^*_{\mathcal{D}} \Longrightarrow \frac{\Delta^*}{\Delta^*_{\mathcal{S}}} \leq \alpha$.
- Então nós podemos aproximar $\Delta^*_{\mathcal{S}}$ por um fator α.
- O fator de aproximação de $\Delta^*_{\mathcal{S}}$ é $> (1 - \varepsilon)\log_e |T|$ (Afirm. 1). Então $(1 - \varepsilon)\log_e |T| < \frac{\Delta^*}{\Delta^*_{\mathcal{S}}} \leq \alpha \Longrightarrow \alpha > (1 - \varepsilon)\log_e |T|$.

$\square$

Impossibilidade de aproximação sublogarítmica

Voltar

Demonstração.

- Seja $\mathcal{S}$ uma instância de SvMDST ($G = (V, E)$, $T \subseteq V$ e $s \in T$). Seja $\Delta^*_{\mathcal{S}}$ uma solução ótima para $\mathcal{S}$.
- Instância $\mathcal{D}$ de DSMDStP: $G = (V, E)$, $s \in T$, $T_{\mathcal{D}} = T \setminus \{s\}$ e $k = \infty$ ($\frac{\sum_{e \in E} C(e)}{min_{v \in V}\{dist(s,t,G)\}}$).
- Seja $\Delta^*_{\mathcal{D}}$ uma solução ótima para $\mathcal{D}$.
- Para $k = \infty$, qualquer que seja a solução para $\mathcal{S}$, ela satisfaz a restrição de spanner $\Longrightarrow \Delta^*_{\mathcal{S}} = \Delta^*_{\mathcal{D}}$.
- Seja $\mathcal{A}$ uma algoritmo de aproximação por um fator α para o DSMDStP. Seja Δ^* o grau resultante.
- $\Delta^* \leq \alpha \cdot \Delta^*_{\mathcal{D}} \Longrightarrow \frac{\Delta^*}{\Delta^*_{\mathcal{S}}} \leq \alpha$.
- Então nós podemos aproximar $\Delta^*_{\mathcal{S}}$ por um fator α.
- O fator de aproximação de $\Delta^*_{\mathcal{S}}$ é $> (1 - \varepsilon) \log_e |T|$ (Afirm. 1). Então $(1 - \varepsilon) \log_e |T| < \frac{\Delta^*}{\Delta^*_{\mathcal{S}}} \leq \alpha \Longrightarrow \alpha > (1 - \varepsilon) \log_e |T|$.

$\square$

Limite no grau máximo de $G_{\sqrt{l}-Par}$ (Algoritmo 2) Voltar

Demonstração.

- As árvores T_v computadas na linha 5 de Algoritmo 1 são disjuntas.
- Cada nó em T_v possui grau máximo de $\sqrt{l}$.
- A_{Roots} é uma SPT de s para todos os nós em $Roots$ e a cardinalidade máxima de $Roots$ é de $\sqrt{l}+2$ (Lema 2) $\Rightarrow$ grau máximo de A_{Roots} é $\sqrt{l}+2$.
- $G_{\sqrt{l}-Par}$ corresponde à união de todas estas árvores (A_{Roots} e T_v) $\Longrightarrow$ grau máximo de qualquer nó é de $\sqrt{l}+\sqrt{l}+2=2\sqrt{l}+2$.

$\square$

Limite no grau máximo de $G_{\sqrt{l}-Par}$ (Algoritmo 2)

Voltar

Demonstração.

- As árvores T_v computadas na linha 5 de Algoritmo 1 são disjuntas.
- Cada nó em T_v possui grau máximo de $\sqrt{l}$.
- A_{Roots} é uma SPT de s para todos os nós em $Roots$ e a cardinalidade máxima de $Roots$ é de $\sqrt{l}+2$ (Lema 2) $\Rightarrow$ grau máximo de A_{Roots} é $\sqrt{l}+2$.
- $G_{\sqrt{l}-Par}$ corresponde à união de todas estas árvores (A_{Roots} e T_v) $\Longrightarrow$ grau máximo de qualquer nó é de $\sqrt{l}+\sqrt{l}+2=2\sqrt{l}+2$.

$\square$

Limite no grau máximo de $G_{\sqrt{l}-Par}$ (Algoritmo 2)

Voltar

Demonstração.

- As árvores T_v computadas na linha 5 de Algoritmo 1 são disjuntas.
- Cada nó em T_v possui grau máximo de $\sqrt{l}$.
- A_{Roots} é uma SPT de s para todos os nós em *Roots* e a cardinalidade máxima de *Roots* é de $\sqrt{l}+2$ (Lema 2) $\Rightarrow$ grau máximo de A_{Roots} é $\sqrt{l}+2$.
- $G_{\sqrt{l}-Par}$ corresponde à união de todas estas árvores (A_{Roots} e T_v) $\Longrightarrow$ grau máximo de qualquer nó é de $\sqrt{l}+\sqrt{l}+2=2\sqrt{l}+2$.

$\square$

Limite no grau máximo de $G_{\sqrt{l}-Par}$ (Algoritmo 2) Voltar

Demonstração.

- As árvores T_v computadas na linha 5 de Algoritmo 1 são disjuntas.
- Cada nó em T_v possui grau máximo de $\sqrt{l}$.
- A_{Roots} é uma SPT de s para todos os nós em $Roots$ e a cardinalidade máxima de $Roots$ é de $\sqrt{l}+2$ (Lema 2) $\Rightarrow$ grau máximo de A_{Roots} é $\sqrt{l}+2$.
- $G_{\sqrt{l}-Par}$ corresponde à união de todas estas árvores (A_{Roots} e T_v) $\Longrightarrow$ grau máximo de qualquer nó é de $\sqrt{l}+\sqrt{l}+2 = 2\sqrt{l}+2$.

$\square$

Limite superior para a solução da instância do MSC

Voltar

Demonstração.

- Seja T^* uma solução ótima para uma instância do DSMDStP.
- $\forall_{t \in UT}$ existe um caminho entre s e t em T^*. Seja $P_{T^*}(s, t)$ este caminho.
- Seja u o último nó de $P_{T^*}(s, t)$ que pertence a C. Seja v o próximo nó em $P_{T^*}(s, t)$.
- $x_{u,v}$ pertencerá a V_1 e $(x_{u,v}, t)$ pertencerá a ε.
- Todos os nós em UT possuem esta propriedade e T^* possui grau máximo d^*.
  - $\rightarrow$ Existe uma solução S^* t.q. $\forall_u$ existe no máximo d^* pseudo nós $x_{u,v}$ em S^*, visto que $x_{u,v} \in S^*$ sse v é filho de u em T^*.
    - $\Rightarrow max_{c \in C}\{|S^* \cap A_c|\} \leq d^*$.

$\square$

Limite superior para a solução da instância do MSC

Voltar

Demonstração.

- Seja T^* uma solução ótima para uma instância do DSMDStP.
- $\forall_{t \in UT}$ existe um caminho entre s e t em T^*. Seja $P_{T^*}(s,t)$ este caminho.
- Seja u o último nó de $P_{T^*}(s,t)$ que pertence a C. Seja v o próximo nó em $P_{T^*}(s,t)$.
- $x_{u,v}$ pertencerá a V_1 e $(x_{u,v}, t)$ pertencerá a ε.
- Todos os nós em UT possuem esta propriedade e T^* possui grau máximo d^*.
  - $\rightarrow$ Existe uma solução S^* t.q. $\forall_u$ existe no máximo d^* pseudo nós $x_{u,v}$ em S^*, visto que $x_{u,v} \in S^*$ sse v é filho de u em T^*.
    - $\Rightarrow max_{c \in C}\{|S^* \cap A_c|\} \leq d^*$.

$\square$

Limite superior para a solução da instância do MSC

Voltar

Demonstração.

- Seja T^* uma solução ótima para uma instância do DSMDStP.
- $\forall_{t \in UT}$ existe um caminho entre s e t em T^*. Seja $P_{T^*}(s,t)$ este caminho.
- Seja u o último nó de $P_{T^*}(s,t)$ que pertence a C. Seja v o próximo nó em $P_{T^*}(s,t)$.
- $x_{u,v}$ pertencerá a V_1 e $(x_{u,v}, t)$ pertencerá a ε.
- Todos os nós em UT possuem esta propriedade e T^* possui grau máximo d^*.
  - $\rightarrow$ Existe uma solução S^* t.q. $\forall_u$ existe no máximo d^* pseudo nós $x_{u,v}$ em S^*, visto que $x_{u,v} \in S^*$ sse v é filho de u em T^*.
    - $\Rightarrow max_{c \in C}\{|S^* \cap A_c|\} \leq d^*$.

$\square$

Limite superior para a solução da instância do MSC

Voltar

Demonstração.

- Seja T^* uma solução ótima para uma instância do DSMDStP.
- $\forall_{t \in UT}$ existe um caminho entre s e t em T^*. Seja $P_{T^*}(s,t)$ este caminho.
- Seja u o último nó de $P_{T^*}(s,t)$ que pertence a C. Seja v o próximo nó em $P_{T^*}(s,t)$.
- $x_{u,v}$ pertencerá a V_1 e $(x_{u,v}, t)$ pertencerá a ε.
- Todos os nós em UT possuem esta propriedade e T^* possui grau máximo d^*.
  - $\rightarrow$ Existe uma solução S^* t.q. $\forall_u$ existe no máximo d^* pseudo nós $x_{u,v}$ em S^*, visto que $x_{u,v} \in S^*$ sse v é filho de u em T^*.
    - $\Rightarrow max_{c \in C}\{|S^* \cap A_c|\} \leq d^*$.

$\square$

Limite superior para a solução da instância do MSC

Voltar

Demonstração.

- Seja T^* uma solução ótima para uma instância do DSMDStP.
- $\forall_{t \in UT}$ existe um caminho entre s e t em T^*. Seja $P_{T^*}(s,t)$ este caminho.
- Seja u o último nó de $P_{T^*}(s,t)$ que pertence a C. Seja v o próximo nó em $P_{T^*}(s,t)$.
- $x_{u,v}$ pertencerá a V_1 e $(x_{u,v}, t)$ pertencerá a ε.
- Todos os nós em UT possuem esta propriedade e T^* possui grau máximo d^*.
  - $\rightarrow$ Existe uma solução S^* t.q. $\forall_u$ existe no máximo d^* pseudo nós $x_{u,v}$ em S^*, visto que $x_{u,v} \in S^*$ sse v é filho de u em T^*.
    - $\Rightarrow max_{c \in C}\{|S^* \cap A_c|\} \leq d^*$.

$\square$

Limite da interseção entre a solução do MSC e cada partição de V_1 ▸ Voltar

Demonstração.

- $d^* \geq val(S^*)$ para uma solução ótima S^* de β.
- $|V_2| \leq l$.
- O lema é direto.

$\square$

Limite da interseção entre a solução do MSC e cada partição de V_1 Voltar

Demonstração.

- $d^* \geq val(S^*)$ para uma solução ótima S^* de β.
- $|V_2| \leq l$.
- O lema é direto.

$\square$

Limite da interseção entre a solução do MSC e cada partição de V_1

Voltar

Demonstração.

- $d^* \geq val(S^*)$ para uma solução ótima S^* de β.
- $|V_2| \leq l$.
- O lema é direto.

□

Limite da interseção entre a solução do MSC e cada partição de V_1

Voltar

Demonstração.

- $d^* \geq val(S^*)$ para uma solução ótima S^* de β.
- $|V_2| \leq l$.
- O lema é direto.

□

Grau máximo de G_f

Voltar

Demonstração.

- Nós são adicionados nas duas fases.
- G_f tem grau máximo de $2\sqrt{l} + 2$ ao final da primeira fase (Lema 3).
- Novos nós adicionados (fase 2) tem no máximo grau $\sqrt{l}$ (ausência de $\sqrt{l}$-bad nodes).
- Nó u é selecionado apenas se $x_{u,v} \in D$.
- Nó u pode ter seu grau incrementado por no máximo $O(\log l) \cdot d^*$ (Lema 5).
- Provado o limite de $\leq 2\sqrt{l} + 2 + O(\log l) \cdot d^*$.

$\square$

Grau máximo de G_f

Voltar

Demonstração.

- Nós são adicionados nas duas fases.
- G_f tem grau máximo de $2\sqrt{l} + 2$ ao final da primeira fase (Lema 3).
- Novos nós adicionados (fase 2) tem no máximo grau $\sqrt{l}$ (ausência de $\sqrt{l}$-bad nodes).
- Nó u é selecionado apenas se $x_{u,v} \in D$.
- Nó u pode ter seu grau incrementado por no máximo $O(\log l) \cdot d^*$ (Lema 5).
- Provado o limite de $\leq 2\sqrt{l} + 2 + O(\log l) \cdot d^*$.

□

Grau máximo de G_f Voltar

Demonstração.

- Nós são adicionados nas duas fases.
- G_f tem grau máximo de $2\sqrt{l} + 2$ ao final da primeira fase (Lema 3).
- Novos nós adicionados (fase 2) tem no máximo grau $\sqrt{l}$ (ausência de $\sqrt{l}$-bad nodes).
- Nó u é selecionado apenas se $x_{u,v} \in D$.
- Nó u pode ter seu grau incrementado por no máximo $O(\log l) \cdot d^*$ (Lema 5).
- Provado o limite de $\leq 2\sqrt{l} + 2 + O(\log l) \cdot d^*$.

$\square$

Grau máximo de G_f

Voltar

Demonstração.

- Nós são adicionados nas duas fases.
- G_f tem grau máximo de $2\sqrt{l} + 2$ ao final da primeira fase (Lema 3).
- Novos nós adicionados (fase 2) tem no máximo grau $\sqrt{l}$ (ausência de $\sqrt{l}$-bad nodes).
- Nó u é selecionado apenas se $x_{u,v} \in D$.
- Nó u pode ter seu grau incrementado por no máximo $O(\log l) \cdot d^*$ (Lema 5).
- Provado o limite de $\leq 2\sqrt{l} + 2 + O(\log l) \cdot d^*$.

□

Grau máximo de G_f Voltar

Demonstração.

- Nós são adicionados nas duas fases.
- G_f tem grau máximo de $2\sqrt{l} + 2$ ao final da primeira fase (Lema 3).
- Novos nós adicionados (fase 2) tem no máximo grau $\sqrt{l}$ (ausência de $\sqrt{l}$-bad nodes).
- Nó u é selecionado apenas se $x_{u,v} \in D$.
- Nó u pode ter seu grau incrementado por no máximo $O(\log l) \cdot d^*$ (Lema 5).
- Provado o limite de $\leq 2\sqrt{l} + 2 + O(\log l) \cdot d^*$.

$\square$

Grau máximo de G_f Voltar

Demonstração.

- Nós são adicionados nas duas fases.
- G_f tem grau máximo de $2\sqrt{l} + 2$ ao final da primeira fase (Lema 3).
- Novos nós adicionados (fase 2) tem no máximo grau $\sqrt{l}$ (ausência de $\sqrt{l}$-bad nodes).
- Nó u é selecionado apenas se $x_{u,v} \in D$.
- Nó u pode ter seu grau incrementado por no máximo $O(\log l) \cdot d^*$ (Lema 5).
- Provado o limite de $\leq 2\sqrt{l} + 2 + O(\log l) \cdot d^*$.

$\square$

Custo máximo dos caminhos para os terminais ▸ Voltar

Demonstração.

- Se t é coberto na primeira fase, $dist(s, t, G_f) \leq k \cdot dist(s, t, G)$.
- Todos os nós v cobertos na fase 1 fazem parte de um caminho entre s e um t t.q. seu custo é $\leq k \cdot dist(s, t, G) \rightarrow \leq k \cdot dist(s, t_{max}, G)$.
- $\forall_{t \in T}$ cobertos apenas na fase 2, $x_{u,v}$ e $(x_{u,v}, t)$ são inseridas na instância do MSC se $dist(s, u, G) + C(u, v) + dist(v, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G)$.
- Em particular, $C(u, v) + dist(v, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G)$.
- Como $dist(s, u, G) \leq k \cdot dist(s, t_{max}, G) \Rightarrow dist(s, t, G_f) \leq k \cdot (dist(s, t, G) + \cdot dist(s, t_{max}, G))$.

$\square$

Custo máximo dos caminhos para os terminais ▸ Voltar

Demonstração.

- Se t é coberto na primeira fase, $dist(s,t,G_f) \leq k \cdot dist(s,t,G)$.
- Todos os nós v cobertos na fase 1 fazem parte de um caminho entre s e um t t.q. seu custo é $\leq k \cdot dist(s,t,G) \rightarrow \leq k \cdot dist(s,t_{max},G)$.
- $\forall_{t \in T}$ cobertos apenas na fase 2, $x_{u,v}$ e $(x_{u,v},t)$ são inseridas na instância do MSC se $dist(s,u,G) + C(u,v) + dist(v,t,G(U)) \leq k \cdot dist(s,t,G)$.
- Em particular, $C(u,v) + dist(v,t,G(U)) \leq k \cdot dist(s,t,G)$.
- Como $dist(s,u,G) \leq k \cdot dist(s,t_{max},G) \Rightarrow dist(s,t,G_f) \leq k \cdot (dist(s,t,G) + \cdot dist(s,t_{max},G))$.

$\square$

Custo máximo dos caminhos para os terminais

▸ Voltar

Demonstração.

- Se t é coberto na primeira fase, $dist(s, t, G_f) \leq k \cdot dist(s, t, G)$.
- Todos os nós v cobertos na fase 1 fazem parte de um caminho entre s e um t t.q. seu custo é $\leq k \cdot dist(s, t, G) \rightarrow \leq k \cdot dist(s, t_{max}, G)$.
- $\forall_{t \in T}$ cobertos apenas na fase 2, $x_{u,v}$ e $(x_{u,v}, t)$ são inseridas na instância do MSC se $dist(s, u, G) + C(u, v) + dist(v, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G)$.
- Em particular, $C(u, v) + dist(v, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G)$.
- Como $dist(s, u, G) \leq k \cdot dist(s, t_{max}, G) \Rightarrow dist(s, t, G_f) \leq k \cdot (dist(s, t, G) + \cdot dist(s, t_{max}, G))$.

$\square$

Custo máximo dos caminhos para os terminais

Voltar

Demonstração.

- Se t é coberto na primeira fase, $dist(s, t, G_f) \leq k \cdot dist(s, t, G)$.
- Todos os nós v cobertos na fase 1 fazem parte de um caminho entre s e um t t.q. seu custo é $\leq k \cdot dist(s, t, G) \rightarrow \leq k \cdot dist(s, t_{max}, G)$.
- $\forall_{t \in T}$ cobertos apenas na fase 2, $x_{u,v}$ e $(x_{u,v}, t)$ são inseridas na instância do MSC se $dist(s, u, G) + C(u, v) + dist(v, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G)$.
- Em particular, $C(u, v) + dist(v, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G)$.
- Como $dist(s, u, G) \leq k \cdot dist(s, t_{max}, G) \Rightarrow dist(s, t, G_f) \leq k \cdot (dist(s, t, G) + \cdot dist(s, t_{max}, G))$.

$\square$

Custo máximo dos caminhos para os terminais

Voltar

Demonstração.

- Se t é coberto na primeira fase, $dist(s, t, G_f) \leq k \cdot dist(s, t, G)$.
- Todos os nós v cobertos na fase 1 fazem parte de um caminho entre s e um t t.q. seu custo é $\leq k \cdot dist(s, t, G) \rightarrow \leq k \cdot dist(s, t_{max}, G)$.
- $\forall_{t \in T}$ cobertos apenas na fase 2, $x_{u,v}$ e $(x_{u,v}, t)$ são inseridas na instância do MSC se $dist(s, u, G) + C(u, v) + dist(v, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G)$.
- Em particular, $C(u, v) + dist(v, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G)$.
- Como $dist(s, u, G) \leq k \cdot dist(s, t_{max}, G) \Rightarrow dist(s, t, G_f) \leq k \cdot (dist(s, t, G) + \cdot dist(s, t_{max}, G))$.

$\square$

Teorema Principal

Voltar

Demonstração.

- $\mathcal{A}_f$ é gerada computando caminhos de custo mínimo em G_f entre s e $t \in T$.
- O teorema segue do resultado de grau máximo (Lema 6) e do resultado de custo máximo (Lema 7).

$\square$

Teorema Principal

Voltar

Demonstração.

- $\mathcal{A}_f$ é gerada computando caminhos de custo mínimo em G_f entre s e $t \in T$.
- O teorema segue do resultado de grau máximo (Lema 6) e do resultado de custo máximo (Lema 7).

$\square$

Teorema Principal

Voltar

Demonstração.

- $\mathcal{A}_f$ é gerada computando caminhos de custo mínimo em G_f entre s e $t \in T$.
- O teorema segue do resultado de grau máximo (Lema 6) e do resultado de custo máximo (Lema 7).

$\square$

Existência de um caminho para todo terminal em $\mathcal{A}_f$

Voltar

Demonstração.

- Seja T^* uma solução ótima para uma instância de DSMDStP.
- Considere u e v os nós no caminho entre s e t como mencionados na prova do Lema 4.
- Então, existirá um $x_{u,v}$ em V_1 e uma aresta $(x_{u,v}, t)$ em ε (idependente da iteração).
- Após aplicar algoritmo de [Chekuri and Kumar 2004] (linha 8), pelo menos um caminho existirá entre u e t.
  - $\rightarrow$ Pelo menos um caminho será escolhido por SIM para fazer parte de $\mathcal{A}_f$ (linha 11).

$\square$

Existência de um caminho para todo terminal em $\mathcal{A}_f$

Voltar

Demonstração.

- Seja T^* uma solução ótima para uma instância de DSMDStP.
- Considere u e v os nós no caminho entre s e t como mencionados na prova do Lema 4.
- Então, existirá um $x_{u,v}$ em V_1 e uma aresta $(x_{u,v}, t)$ em ε (idependente da iteração).
- Após aplicar algoritmo de [Chekuri and Kumar 2004] (linha 8), pelo menos um caminho existirá entre u e t.
  - $\rightarrow$ Pelo menos um caminho será escolhido por SIM para fazer parte de $\mathcal{A}_f$ (linha 11).

$\square$

Existência de um caminho para todo terminal em $\mathcal{A}_f$

Voltar

Demonstração.

- Seja T^* uma solução ótima para uma instância de DSMDStP.
- Considere u e v os nós no caminho entre s e t como mencionados na prova do Lema 4.
- Então, existirá um $x_{u,v}$ em V_1 e uma aresta $(x_{u,v}, t)$ em ε (idependente da iteração).
- Após aplicar algoritmo de [Chekuri and Kumar 2004] (linha 8), pelo menos um caminho existirá entre u e t.
  - $\rightarrow$ Pelo menos um caminho será escolhido por SIM para fazer parte de $\mathcal{A}_f$ (linha 11).

$\square$

Existência de um caminho para todo terminal em $\mathcal{A}_f$

Voltar

Demonstração.

- Seja T^* uma solução ótima para uma instância de DSMDStP.
- Considere u e v os nós no caminho entre s e t como mencionados na prova do Lema 4.
- Então, existirá um $x_{u,v}$ em V_1 e uma aresta $(x_{u,v}, t)$ em ε (idependente da iteração).
- Após aplicar algoritmo de [Chekuri and Kumar 2004] (linha 8), pelo menos um caminho existirá entre u e t.
  - $\rightarrow$ Pelo menos um caminho será escolhido por SIM para fazer parte de $\mathcal{A}_f$ (linha 11).

$\square$

Existência de um caminho para todo terminal em $\mathcal{A}_f$

Voltar

Demonstração.

- Seja T^* uma solução ótima para uma instância de DSMDStP.
- Considere u e v os nós no caminho entre s e t como mencionados na prova do Lema 4.
- Então, existirá um $x_{u,v}$ em V_1 e uma aresta $(x_{u,v}, t)$ em ε (idependente da iteração).
- Após aplicar algoritmo de [Chekuri and Kumar 2004] (linha 8), pelo menos um caminho existirá entre u e t.
  - $\rightarrow$ Pelo menos um caminho será escolhido por SIM para fazer parte de $\mathcal{A}_f$ (linha 11).

$\square$

Existência de um caminho para todo terminal em $\mathcal{A}_f$

Voltar

Demonstração.

- Seja T^* uma solução ótima para uma instância de DSMDStP.
- Considere u e v os nós no caminho entre s e t como mencionados na prova do Lema 4.
- Então, existirá um $x_{u,v}$ em V_1 e uma aresta $(x_{u,v}, t)$ em ε (idependente da iteração).
- Após aplicar algoritmo de [Chekuri and Kumar 2004] (linha 8), pelo menos um caminho existirá entre u e t.
  - $\rightarrow$ Pelo menos um caminho será escolhido por SIM para fazer parte de $\mathcal{A}_f$ (linha 11).

$\square$

Número de iterações do SIM

Demonstração.

- Considere o número de terminais I.
- Se I é um Quadrado Perfeito (QP), todos os terminais serão cobertos em $\sqrt{I}$ iterações ($\lfloor\sqrt{I}\rfloor = \sqrt{I}$).
- Considere I não sendo um quadrado perfeito.
- Seja $\sqrt{I} = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F} \in]0, 1[$. Então $I = (\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F}) \cdot (\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F})$.
  - $\to I = \lfloor\sqrt{I}\rfloor \cdot \left(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \left[(2 \cdot \mathcal{F}) + \left(\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}\right)\right]\right)$.
- Podemos dividir I em dois números: $\lfloor\sqrt{I}\rfloor$ e $(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + [(2 \cdot \mathcal{F}) + (\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor})])$.
  - $\lfloor\sqrt{I}\rfloor$: coincide com o número de terminais cobertos em cada iteração.
  - Precisamos encontrar um inteiro I_{UB} que representa um limite para o número real $(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + [(2 \cdot \mathcal{F}) + (\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor})])$.

$\square$

Número de iterações do SIM

Demonstração.

- Considere o número de terminais I.
- Se I é um Quadrado Perfeito (QP), todos os terminais serão cobertos em $\sqrt{I}$ iterações ($\lfloor\sqrt{I}\rfloor = \sqrt{I}$).
- Considere I não sendo um quadrado perfeito.
- Seja $\sqrt{I} = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F} \in]0,1[$. Então $I = (\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F}) \cdot (\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F})$.
  - $\rightarrow I = \lfloor\sqrt{I}\rfloor \cdot \left(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \left[(2\cdot\mathcal{F}) + \left(\mathcal{F}\cdot\frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}\right)\right]\right)$.
- Podemos dividir I em dois números: $\lfloor\sqrt{I}\rfloor$ e $(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + [(2\cdot\mathcal{F}) + (\mathcal{F}\cdot\frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor})])$.
  - $\lfloor\sqrt{I}\rfloor$: coincide com o número de terminais cobertos em cada iteração.
  - Precisamos encontrar um inteiro I_{UB} que representa um limite para o número real $(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + [(2\cdot\mathcal{F}) + (\mathcal{F}\cdot\frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor})])$.

Número de iterações do SIM

Demonstração.

- Considere o número de terminais I.
- Se I é um Quadrado Perfeito (QP), todos os terminais serão cobertos em $\sqrt{I}$ iterações ($\lfloor\sqrt{I}\rfloor = \sqrt{I}$).
- Considere I não sendo um quadrado perfeito.
- Seja $\sqrt{I} = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F} \in]0, 1[$. Então $I = (\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F}) \cdot (\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F})$.
  - $\rightarrow I = \lfloor\sqrt{I}\rfloor \cdot \left(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \left[(2\cdot\mathcal{F}) + \left(\mathcal{F}\cdot\frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}\right)\right]\right)$.
- Podemos dividir I em dois números: $\lfloor\sqrt{I}\rfloor$ e $(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + [(2\cdot\mathcal{F}) + (\mathcal{F}\cdot\frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor})])$.
  - $\lfloor\sqrt{I}\rfloor$: coincide com o número de terminais cobertos em cada iteração.
  - Precisamos encontrar um inteiro I_{UB} que representa um limite para o número real $(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + [(2\cdot\mathcal{F}) + (\mathcal{F}\cdot\frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor})])$.

Número de iterações do SIM

Demonstração.

- Considere o número de terminais I.
- Se I é um Quadrado Perfeito (QP), todos os terminais serão cobertos em $\sqrt{I}$ iterações ($\lfloor\sqrt{I}\rfloor = \sqrt{I}$).
- Considere I não sendo um quadrado perfeito.
- Seja $\sqrt{I} = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F} \in]0, 1[$. Então $I = (\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F}) \cdot (\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F})$.
  - $\rightarrow I = \lfloor\sqrt{I}\rfloor \cdot \left(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \left[(2 \cdot \mathcal{F}) + \left(\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}\right)\right]\right)$.
- Podemos dividir I em dois números: $\lfloor\sqrt{I}\rfloor$ e $(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + [(2 \cdot \mathcal{F}) + (\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor})])$.
  - $\lfloor\sqrt{I}\rfloor$: coincide com o número de terminais cobertos em cada iteração.
  - Precisamos encontrar um inteiro I_{UB} que representa um limite para o número real $(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + [(2 \cdot \mathcal{F}) + (\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor})])$.

Número de iterações do SIM

Demonstração.

- Considere o número de terminais I.
- Se I é um Quadrado Perfeito (QP), todos os terminais serão cobertos em $\sqrt{I}$ iterações ($\lfloor\sqrt{I}\rfloor = \sqrt{I}$).
- Considere I não sendo um quadrado perfeito.
- Seja $\sqrt{I} = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F} \in]0, 1[$. Então $I = (\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F}) \cdot (\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F})$.
  - $\rightarrow I = \lfloor\sqrt{I}\rfloor \cdot \left(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \left[(2 \cdot \mathcal{F}) + \left(\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}\right)\right]\right)$.
- Podemos dividir I em dois números: $\lfloor\sqrt{I}\rfloor$ e $(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + [(2 \cdot \mathcal{F}) + (\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor})])$.
  - $\lfloor\sqrt{I}\rfloor$: coincide com o número de terminais cobertos em cada iteração.
  - Precisamos encontrar um inteiro I_{UB} que representa um limite para o número real $(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + [(2 \cdot \mathcal{F}) + (\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor})])$.

Número de iterações do SIM

Demonstração.

- Considere o número de terminais I.
- Se I é um Quadrado Perfeito (QP), todos os terminais serão cobertos em $\sqrt{I}$ iterações ($\lfloor\sqrt{I}\rfloor = \sqrt{I}$).
- Considere I não sendo um quadrado perfeito.
- Seja $\sqrt{I} = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F} \in]0,1[$. Então $I = (\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F}) \cdot (\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F})$.
    - $\rightarrow I = \lfloor\sqrt{I}\rfloor \cdot \left(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \left[(2\cdot\mathcal{F}) + \left(\mathcal{F}\cdot\frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}\right)\right]\right)$.
- Podemos dividir I em dois números: $\lfloor\sqrt{I}\rfloor$ e $(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + [(2\cdot\mathcal{F}) + (\mathcal{F}\cdot\frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor})])$.
    - $\lfloor\sqrt{I}\rfloor$: coincide com o número de terminais cobertos em cada iteração.
    - Precisamos encontrar um inteiro I_{UB} que representa um limite para o número real $(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + [(2\cdot\mathcal{F}) + (\mathcal{F}\cdot\frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor})])$.
        - I_{UB} iterações é suficiente para cobrir I terminais.

Número de iterações do SIM

Demonstração.

- Considere o número de terminais I.
- Se I é um Quadrado Perfeito (QP), todos os terminais serão cobertos em $\sqrt{I}$ iterações ($\lfloor\sqrt{I}\rfloor = \sqrt{I}$).
- Considere I não sendo um quadrado perfeito.
- Seja $\sqrt{I} = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F} \in]0, 1[$. Então $I = (\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F}) \cdot (\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F})$.
  - $\rightarrow I = \lfloor\sqrt{I}\rfloor \cdot \left(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \left[(2 \cdot \mathcal{F}) + \left(\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}\right)\right]\right)$.
- Podemos dividir I em dois números: $\lfloor\sqrt{I}\rfloor$ e $(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + [(2 \cdot \mathcal{F}) + (\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor})])$.
  - $\lfloor\sqrt{I}\rfloor$: coincide com o número de terminais cobertos em cada iteração.
  - Precisamos encontrar um inteiro I_{UB} que representa um limite para o número real $(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + [(2 \cdot \mathcal{F}) + (\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor})])$.
    - I_{UB} iterações é suficiente para cobrir I terminais.

Número de iterações do SIM

Demonstração.

- Considere o número de terminais I.
- Se I é um Quadrado Perfeito (QP), todos os terminais serão cobertos em $\sqrt{I}$ iterações ($\lfloor\sqrt{I}\rfloor = \sqrt{I}$).
- Considere I não sendo um quadrado perfeito.
- Seja $\sqrt{I} = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F} \in]0, 1[$. Então $I = (\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F}) \cdot (\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F})$.
    - $\rightarrow I = \lfloor\sqrt{I}\rfloor \cdot \left(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \left[(2 \cdot \mathcal{F}) + \left(\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}\right)\right]\right)$.
- Podemos dividir I em dois números: $\lfloor\sqrt{I}\rfloor$ e $(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + [(2 \cdot \mathcal{F}) + (\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor})])$.
    - $\lfloor\sqrt{I}\rfloor$: coincide com o número de terminais cobertos em cada iteração.
    - Precisamos encontrar um inteiro I_{UB} que representa um limite para o número real $(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + [(2 \cdot \mathcal{F}) + (\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor})])$.
        - I_{UB} iterações é suficiente para cobrir I terminais.

Número de iterações do SIM

Demonstração.

- Considere o número de terminais I.
- Se I é um Quadrado Perfeito (QP), todos os terminais serão cobertos em $\sqrt{I}$ iterações ($\lfloor\sqrt{I}\rfloor = \sqrt{I}$).
- Considere I não sendo um quadrado perfeito.
- Seja $\sqrt{I} = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F} \in]0, 1[$. Então $I = (\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F}) \cdot (\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \mathcal{F})$.
  - $\rightarrow I = \lfloor\sqrt{I}\rfloor \cdot \left(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + \left[(2 \cdot \mathcal{F}) + \left(\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}\right)\right]\right)$.
- Podemos dividir I em dois números: $\lfloor\sqrt{I}\rfloor$ e $(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + [(2 \cdot \mathcal{F}) + (\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor})])$.
  - $\lfloor\sqrt{I}\rfloor$: coincide com o número de terminais cobertos em cada iteração.
  - Precisamos encontrar um inteiro I_{UB} que representa um limite para o número real $(\lfloor\sqrt{I}\rfloor + [(2 \cdot \mathcal{F}) + (\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor})])$.
    - I_{UB} iterações é suficiente para cobrir I terminais.

Número de iterações do SIM

Voltar

Demonstração.

- $\lfloor\sqrt{I}\rfloor + (2 \cdot \mathcal{F}) + (\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}) = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}$.
- Como $\lfloor\sqrt{I}\rfloor^2$ é o maior quadrado perfeito menor que $I \rightarrow (I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2) \leq 2 \cdot \lfloor\sqrt{I}\rfloor$ (prova adiada).
  - $\rightarrow \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor} \leq \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{2 \cdot \lfloor\sqrt{I}\rfloor}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor} = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + 2$.
- Provar que $(I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2) \leq 2 \cdot \lfloor\sqrt{I}\rfloor$ (quadrados perfeitos).
  - Seja SR_x um quadrado perfeito e R_x sua raiz.
  - Para dois quadrados perfeitos consecutivos SR_i e $SR_j \rightarrow SR_j - SR_i = R_i + R_j$.
  - Em outras palavras: $SR_j - SR_i = 2 \cdot R_i + 1$.
  - Seja X um quadrado não-perfeito e seja GSR_X o maior quadrado perfeito menor que X. Seja R_X a raiz de GSR_X.

$\square$

Número de iterações do SIM

Voltar

Demonstração.

- $\lfloor\sqrt{I}\rfloor + (2 \cdot \mathcal{F}) + (\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}) = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}$.
- Como $\lfloor\sqrt{I}\rfloor^2$ é o maior quadrado perfeito menor que $I \rightarrow (I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2) \leq 2 \cdot \lfloor\sqrt{I}\rfloor$ (prova adiada).
  - $\rightarrow \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor} \leq \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{2 \cdot \lfloor\sqrt{I}\rfloor}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor} = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + 2$.
- Provar que $(I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2) \leq 2 \cdot \lfloor\sqrt{I}\rfloor$ (quadrados perfeitos).
  - Seja SR_x um quadrado perfeito e R_x sua raiz.
  - Para dois quadrados perfeitos consecutivos SR_i e $SR_j \rightarrow SR_j - SR_i = R_i + R_j$.
  - Em outras palavras: $SR_j - SR_i = 2 \cdot R_i + 1$.
  - Seja X um quadrado não-perfeito e seja GSR_X o maior quadrado perfeito menor que X. Seja R_X a raiz de GSR_X.

$\square$

Número de iterações do SIM

Voltar

Demonstração.

- $\lfloor\sqrt{I}\rfloor + (2\cdot\mathcal{F}) + (\mathcal{F}\cdot\frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}) = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{I-\lfloor\sqrt{I}\rfloor^2}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}$.
- Como $\lfloor\sqrt{I}\rfloor^2$ é o maior quadrado perfeito menor que $I \to (I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2) \le 2\cdot\lfloor\sqrt{I}\rfloor$ (prova adiada).
  - $\to \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{I-\lfloor\sqrt{I}\rfloor^2}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor} \le \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{2\cdot\lfloor\sqrt{I}\rfloor}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor} = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + 2$.
- Provar que $(I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2) \le 2\cdot\lfloor\sqrt{I}\rfloor$ (quadrados perfeitos).
  - Seja SR_x um quadrado perfeito e R_x sua raiz.
  - Para dois quadrados perfeitos consecutivos SR_i e $SR_j \to SR_j - SR_i = R_i + R_j$.
  - Em outras palavras: $SR_j - SR_i = 2\cdot R_i + 1$.
  - Seja X um quadrado não-perfeito e seja GSR_X o maior quadrado perfeito menor que X. Seja R_X a raiz de GSR_X.

$\square$

Número de iterações do SIM

Voltar

Demonstração.

- $\lfloor\sqrt{I}\rfloor + (2 \cdot \mathcal{F}) + (\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}) = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}$.
- Como $\lfloor\sqrt{I}\rfloor^2$ é o maior quadrado perfeito menor que $I \rightarrow (I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2) \leq 2 \cdot \lfloor\sqrt{I}\rfloor$ (prova adiada).
  - $\rightarrow \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor} \leq \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{2 \cdot \lfloor\sqrt{I}\rfloor}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor} = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + 2$.
- Provar que $(I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2) \leq 2 \cdot \lfloor\sqrt{I}\rfloor$ (quadrados perfeitos).
  - Seja SR_x um quadrado perfeito e R_x sua raiz.
  - Para dois quadrados perfeitos consecutivos SR_i e $SR_j \rightarrow SR_j - SR_i = R_i + R_j$.
  - Em outras palavras: $SR_j - SR_i = 2 \cdot R_i + 1$.
  - Seja X um quadrado não-perfeito e seja GSR_X o maior quadrado perfeito menor que X. Seja R_X a raiz de GSR_X.
    - $X - GSR_X \leq 2 \cdot R_X$.

Número de iterações do SIM

Voltar

Demonstração.

- $\lfloor\sqrt{I}\rfloor + (2\cdot\mathcal{F}) + (\mathcal{F}\cdot\frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}) = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{I-\lfloor\sqrt{I}\rfloor^2}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}$.
- Como $\lfloor\sqrt{I}\rfloor^2$ é o maior quadrado perfeito menor que $I \rightarrow (I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2) \leq 2\cdot\lfloor\sqrt{I}\rfloor$ (prova adiada).
  - $\rightarrow \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{I-\lfloor\sqrt{I}\rfloor^2}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor} \leq \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{2\cdot\lfloor\sqrt{I}\rfloor}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor} = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + 2$.
- Provar que $(I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2) \leq 2\cdot\lfloor\sqrt{I}\rfloor$ (quadrados perfeitos).
  - Seja SR_x um quadrado perfeito e R_x sua raiz.
  - Para dois quadrados perfeitos consecutivos SR_i e $SR_j \rightarrow SR_j - SR_i = R_i + R_j$.
  - Em outras palavras: $SR_j - SR_i = 2\cdot R_i + 1$.
  - Seja X um quadrado não-perfeito e seja GSR_X o maior quadrado perfeito menor que X. Seja R_X a raiz de GSR_X.
    - $X - GSR_X \leq 2\cdot R_X$.

□

Número de iterações do SIM

Voltar

Demonstração.

- $\lfloor\sqrt{I}\rfloor + (2 \cdot \mathcal{F}) + (\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}) = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}$.
- Como $\lfloor\sqrt{I}\rfloor^2$ é o maior quadrado perfeito menor que $I \rightarrow (I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2) \leq 2 \cdot \lfloor\sqrt{I}\rfloor$ (prova adiada).
  - $\rightarrow \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor} \leq \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{2 \cdot \lfloor\sqrt{I}\rfloor}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor} = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + 2$.
- Provar que $(I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2) \leq 2 \cdot \lfloor\sqrt{I}\rfloor$ (quadrados perfeitos).
  - Seja SR_x um quadrado perfeito e R_x sua raiz.
  - Para dois quadrados perfeitos consecutivos SR_i e $SR_j \rightarrow SR_j - SR_i = R_i + R_j$.
  - Em outras palavras: $SR_j - SR_i = 2 \cdot R_i + 1$.
  - Seja X um quadrado não-perfeito e seja GSR_X o maior quadrado perfeito menor que X. Seja R_X a raiz de GSR_X.
    - $X - GSR_X \leq 2 \cdot R_X$.

□

Número de iterações do SIM

Voltar

Demonstração.

- $\lfloor\sqrt{I}\rfloor + (2 \cdot \mathcal{F}) + (\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}) = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}$.
- Como $\lfloor\sqrt{I}\rfloor^2$ é o maior quadrado perfeito menor que $I \rightarrow (I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2) \leq 2 \cdot \lfloor\sqrt{I}\rfloor$ (prova adiada).
  - $\rightarrow \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor} \leq \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{2 \cdot \lfloor\sqrt{I}\rfloor}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor} = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + 2$.
- Provar que $(I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2) \leq 2 \cdot \lfloor\sqrt{I}\rfloor$ (quadrados perfeitos).
  - Seja SR_x um quadrado perfeito e R_x sua raiz.
  - Para dois quadrados perfeitos consecutivos SR_i e $SR_j \rightarrow SR_j - SR_i = R_i + R_j$.
  - Em outras palavras: $SR_j - SR_i = 2 \cdot R_i + 1$.
  - Seja X um quadrado não-perfeito e seja GSR_X o maior quadrado perfeito menor que X. Seja R_X a raiz de GSR_X.
    - $X - GSR_X \leq 2 \cdot R_X$.

$\square$

Número de iterações do SIM ▸ Voltar

Demonstração.

- $\lfloor\sqrt{I}\rfloor + (2 \cdot \mathcal{F}) + (\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}) = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}$.
- Como $\lfloor\sqrt{I}\rfloor^2$ é o maior quadrado perfeito menor que $I \rightarrow (I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2) \leq 2 \cdot \lfloor\sqrt{I}\rfloor$ (prova adiada).
  - $\rightarrow \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor} \leq \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{2 \cdot \lfloor\sqrt{I}\rfloor}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor} = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + 2$.
- Provar que $(I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2) \leq 2 \cdot \lfloor\sqrt{I}\rfloor$ (quadrados perfeitos).
  - Seja SR_x um quadrado perfeito e R_x sua raiz.
  - Para dois quadrados perfeitos consecutivos SR_i e $SR_j \rightarrow SR_j - SR_i = R_i + R_j$.
  - Em outras palavras: $SR_j - SR_i = 2 \cdot R_i + 1$.
  - Seja X um quadrado não-perfeito e seja GSR_X o maior quadrado perfeito menor que X. Seja R_X a raiz de GSR_X.
    - $X - GSR_X \leq 2 \cdot R_X$.

□

Número de iterações do SIM

Voltar

Demonstração.

- $\lfloor\sqrt{I}\rfloor + (2 \cdot \mathcal{F}) + (\mathcal{F} \cdot \frac{\mathcal{F}}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}) = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor}$.
- Como $\lfloor\sqrt{I}\rfloor^2$ é o maior quadrado perfeito menor que $I \rightarrow (I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2) \leq 2 \cdot \lfloor\sqrt{I}\rfloor$ (prova adiada).
  - $\rightarrow \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor} \leq \lfloor\sqrt{I}\rfloor + \frac{2 \cdot \lfloor\sqrt{I}\rfloor}{\lfloor\sqrt{I}\rfloor} = \lfloor\sqrt{I}\rfloor + 2$.
- Provar que $(I - \lfloor\sqrt{I}\rfloor^2) \leq 2 \cdot \lfloor\sqrt{I}\rfloor$ (quadrados perfeitos).
  - Seja SR_x um quadrado perfeito e R_x sua raiz.
  - Para dois quadrados perfeitos consecutivos SR_i e $SR_j \rightarrow SR_j - SR_i = R_i + R_j$.
  - Em outras palavras: $SR_j - SR_i = 2 \cdot R_i + 1$.
  - Seja X um quadrado não-perfeito e seja GSR_X o maior quadrado perfeito menor que X. Seja R_X a raiz de GSR_X.
    - $X - GSR_X \leq 2 \cdot R_X$.

□

Grafo gerado por SIM é uma arborescência

Voltar

Demonstração.

- No início, C contém apenas s.
- Ao final da primeira iteração, $\mathcal{A}_f$ será uma arborescência, pois apenas caminhos de menor custo a partir de s são adicionados.
- De forma análoga, a partir da segunda iteração, para cada $(x_{u,v})$, apenas caminhos de custo mínimo entre u e t são adicionados a $\mathcal{A}_f$.
  - Estes caminhos são formados por nós apenas de U (exceto para o primeiro nó u) $\rightarrow$ inexistência de ciclos e múltiplos caminhos entre nós.

□

Grafo gerado por SIM é uma arborescência ▸ Voltar

Demonstração.

- No início, C contém apenas s.
- Ao final da primeira iteração, $\mathcal{A}_f$ será uma arborescência, pois apenas caminhos de menor custo a partir de s são adicionados.
- De forma análoga, a partir da segunda iteração, para cada $(x_{u,v})$, apenas caminhos de custo mínimo entre u e t são adicionados a $\mathcal{A}_f$.
  - Estes caminhos são formados por nós apenas de U (exceto para o primeiro nó u) $\rightarrow$ inexistência de ciclos e múltiplos caminhos entre nós.

□

Grafo gerado por SIM é uma arborescência

Voltar

Demonstração.

- No início, C contém apenas s.
- Ao final da primeira iteração, $\mathcal{A}_f$ será uma arborescência, pois apenas caminhos de menor custo a partir de s são adicionados.
- De forma análoga, a partir da segunda iteração, para cada $(x_{u,v})$, apenas caminhos de custo mínimo entre u e t são adicionados a $\mathcal{A}_f$.
    - Estes caminhos são formados por nós apenas de U (exceto para o primeiro nó u) $\rightarrow$ inexistência de ciclos e múltiplos caminhos entre nós.

$\square$

Grafo gerado por SIM é uma arborescência

Voltar

Demonstração.

- No início, C contém apenas s.
- Ao final da primeira iteração, $\mathcal{A}_f$ será uma arborescência, pois apenas caminhos de menor custo a partir de s são adicionados.
- De forma análoga, a partir da segunda iteração, para cada $(x_{u,v})$, apenas caminhos de custo mínimo entre u e t são adicionados a $\mathcal{A}_f$.
  - Estes caminhos são formados por nós apenas de U (exceto para o primeiro nó u) $\rightarrow$ inexistência de ciclos e múltiplos caminhos entre nós.

$\square$

Grafo gerado por SIM é uma arborescência

Voltar

Demonstração.

- No início, C contém apenas s.
- Ao final da primeira iteração, $\mathcal{A}_f$ será uma arborescência, pois apenas caminhos de menor custo a partir de s são adicionados.
- De forma análoga, a partir da segunda iteração, para cada $(x_{u,v})$, apenas caminhos de custo mínimo entre u e t são adicionados a $\mathcal{A}_f$.
  - Estes caminhos são formados por nós apenas de U (exceto para o primeiro nó u) $\rightarrow$ inexistência de ciclos e múltiplos caminhos entre nós.

$\square$

Custo máximo dos caminhos gerados por SIM

Voltar

Demonstração.

- Seja t_h o terminal $u \in Next_{ter}^{\sqrt{l}}$ cujo valor de $dist(s, u, G)$ é máximo.
- Todos os caminhos adicionados a $\mathcal{A}_f$ na iteração i terão custo $\leq k \cdot dist(s, t_h, G)$.
  - $(x_{u,v}, t)$ pertencerá a ε se $C(u, v) + dist(v, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G) \leq k \cdot dist(s, t_h, G)$.
- Haverá no máximo $\lfloor \sqrt{l} \rfloor + 2$ iterations (Lema 9).
- Seja t um terminal adicionado a $\mathcal{A}_f$ na iteração j.
- t pode ser alcançado a partir de s através de uma série de caminhos adicionados a $\mathcal{A}_f$ em $j - 1$ iterações.
- Em cada iteração, os terminais em $Next_{ter}^{\sqrt{l}}$ seguem uma ordem não-decrescente de custo.
- O teorema segue.

□

Custo máximo dos caminhos gerados por SIM

Voltar

Demonstração.

- Seja t_h o terminal $u \in Next_{ter}^{\sqrt{l}}$ cujo valor de $dist(s, u, G)$ é máximo.
- Todos os caminhos adicionados a $\mathcal{A}_f$ na iteração i terão custo $\leq k \cdot dist(s, t_h, G)$.
  - $(x_{u,v}, t)$ pertencerá a ε se $C(u, v) + dist(v, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G) \leq k \cdot dist(s, t_h, G)$.
- Haverá no máximo $\lfloor \sqrt{l} \rfloor + 2$ iterations (Lema 9).
- Seja t um terminal adicionado a $\mathcal{A}_f$ na iteração j.
- t pode ser alcançado a partir de s através de uma série de caminhos adicionados a $\mathcal{A}_f$ em $j - 1$ iterações.
- Em cada iteração, os terminais em $Next_{ter}^{\sqrt{l}}$ seguem uma ordem não-decrescente de custo.
- O teorema segue.

$\square$

Custo máximo dos caminhos gerados por SIM ▸ Voltar

Demonstração.

- Seja t_h o terminal $u \in Next_{ter}^{\sqrt{l}}$ cujo valor de $dist(s, u, G)$ é máximo.
- Todos os caminhos adicionados a $\mathcal{A}_f$ na iteração i terão custo $\leq k \cdot dist(s, t_h, G)$.
    - $(x_{u,v}, t)$ pertencerá a ε se $C(u, v) + dist(v, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G) \leq k \cdot dist(s, t_h, G)$.
- Haverá no máximo $\lfloor \sqrt{l} \rfloor + 2$ iterations (Lema 9).
- Seja t um terminal adicionado a $\mathcal{A}_f$ na iteração j.
- t pode ser alcançado a partir de s através de uma série de caminhos adicionados a $\mathcal{A}_f$ em $j - 1$ iterações.
- Em cada iteração, os terminais em $Next_{ter}^{\sqrt{l}}$ seguem uma ordem não-decrescente de custo.
- O teorema segue.

□

Custo máximo dos caminhos gerados por SIM

Voltar

Demonstração.

- Seja t_h o terminal $u \in Next_{ter}^{\sqrt{l}}$ cujo valor de $dist(s, u, G)$ é máximo.
- Todos os caminhos adicionados a $\mathcal{A}_f$ na iteração i terão custo $\leq k \cdot dist(s, t_h, G)$.
  - $(x_{u,v}, t)$ pertencerá a ε se $C(u, v) + dist(v, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G) \leq k \cdot dist(s, t_h, G)$.
- Haverá no máximo $\lfloor \sqrt{l} \rfloor + 2$ iterations (Lema 9).
- Seja t um terminal adicionado a $\mathcal{A}_f$ na iteração j.
- t pode ser alcançado a partir de s através de uma série de caminhos adicionados a $\mathcal{A}_f$ em $j - 1$ iterações.
- Em cada iteração, os terminais em $Next_{ter}^{\sqrt{l}}$ seguem uma ordem não-decrescente de custo.
- O teorema segue.

□

Custo máximo dos caminhos gerados por SIM ▸ Voltar

Demonstração.

- Seja t_h o terminal $u \in Next_{ter}^{\sqrt{l}}$ cujo valor de $dist(s, u, G)$ é máximo.
- Todos os caminhos adicionados a $\mathcal{A}_f$ na iteração i terão custo $\leq k \cdot dist(s, t_h, G)$.
  - $(x_{u,v}, t)$ pertencerá a ε se $C(u, v) + dist(v, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G) \leq k \cdot dist(s, t_h, G)$.
- Haverá no máximo $\lfloor \sqrt{l} \rfloor + 2$ iterations (Lema 9).
- Seja t um terminal adicionado a $\mathcal{A}_f$ na iteração j.
- t pode ser alcançado a partir de s através de uma série de caminhos adicionados a $\mathcal{A}_f$ em $j - 1$ iterações.
- Em cada iteração, os terminais em $Next_{ter}^{\sqrt{l}}$ seguem uma ordem não-decrescente de custo.
- O teorema segue.

□

Custo máximo dos caminhos gerados por SIM

Voltar

Demonstração.

- Seja t_h o terminal $u \in Next_{ter}^{\sqrt{l}}$ cujo valor de $dist(s, u, G)$ é máximo.
- Todos os caminhos adicionados a $\mathcal{A}_f$ na iteração i terão custo $\leq k \cdot dist(s, t_h, G)$.
  - $(x_{u,v}, t)$ pertencerá a ε se $C(u, v) + dist(v, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G) \leq k \cdot dist(s, t_h, G)$.
- Haverá no máximo $\lfloor \sqrt{l} \rfloor + 2$ iterations (Lema 9).
- Seja t um terminal adicionado a $\mathcal{A}_f$ na iteração j.
- t pode ser alcançado a partir de s através de uma série de caminhos adicionados a $\mathcal{A}_f$ em $j - 1$ iterações.
- Em cada iteração, os terminais em $Next_{ter}^{\sqrt{l}}$ seguem uma ordem não-decrescente de custo.
- O teorema segue.

$\square$

Custo máximo dos caminhos gerados por SIM

Voltar

Demonstração.

- Seja t_h o terminal $u \in Next_{ter}^{\sqrt{l}}$ cujo valor de $dist(s, u, G)$ é máximo.
- Todos os caminhos adicionados a $\mathcal{A}_f$ na iteração i terão custo $\leq k \cdot dist(s, t_h, G)$.
  - $(x_{u,v}, t)$ pertencerá a ε se $C(u, v) + dist(v, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G) \leq k \cdot dist(s, t_h, G)$.
- Haverá no máximo $\lfloor \sqrt{l} \rfloor + 2$ iterations (Lema 9).
- Seja t um terminal adicionado a $\mathcal{A}_f$ na iteração j.
- t pode ser alcançado a partir de s através de uma série de caminhos adicionados a $\mathcal{A}_f$ em $j - 1$ iterações.
- Em cada iteração, os terminais em $Next_{ter}^{\sqrt{l}}$ seguem uma ordem não-decrescente de custo.
- O teorema segue.

$\square$

Custo máximo dos caminhos gerados por SIM

Voltar

Demonstração.

- Seja t_h o terminal $u \in Next_{ter}^{\sqrt{l}}$ cujo valor de $dist(s, u, G)$ é máximo.
- Todos os caminhos adicionados a $\mathcal{A}_f$ na iteração i terão custo $\leq k \cdot dist(s, t_h, G)$.
  - $(x_{u,v}, t)$ pertencerá a ε se $C(u, v) + dist(v, t, G(U)) \leq k \cdot dist(s, t, G) \leq k \cdot dist(s, t_h, G)$.
- Haverá no máximo $\lfloor \sqrt{l} \rfloor + 2$ iterations (Lema 9).
- Seja t um terminal adicionado a $\mathcal{A}_f$ na iteração j.
- t pode ser alcançado a partir de s através de uma série de caminhos adicionados a $\mathcal{A}_f$ em $j - 1$ iterações.
- Em cada iteração, os terminais em $Next_{ter}^{\sqrt{l}}$ seguem uma ordem não-decrescente de custo.
- O teorema segue.

$\square$

Complexidade ▸ Voltar

- Procedimento *CompPar* $\rightarrow (\sqrt{|T|}+2)O(|V|^3)$:
  - $\sqrt{|T|}+2$: número de iterações (Lema 2).
  - $O(|V|^3)$: construção da SPT para os candidatos a $\sqrt{l}$-bad node.
- Procedimento *CompGraphFirstPh*: $O(|V|^2)$ (construção da SPT).
- Construço da instância do MSC:
  - Composição de V_1: $O(|V|^2)$.
  - Composição de ε: $O(|V|^3)$ (executar o algoritmo de APSP).
- Algoritmo guloso de [Chekuri and Kumar 2004]:
  - Depende da execução do algoritmo para o MCG.
    - O algoritmo para o MCG depende da execução de oráculo $\rightarrow O(|V|^2|T|)$ no nosso caso.
    - Complexidade do algoritmo para o MCG: $O(|V|^3|T|^2)$.
  - O algoritmo para o MSC aplica iterativamente o algorito para o MCG $\rightarrow O((\log|T|)(|V|^3|T|^2)$.
- Loop entre as linhas 8 e 12:
  - Linha 10 se beneficia da execução do algoritmo do APSP.
  - Linha 9: $|D|$ é proporcional a $|S_{(u,v)}|$ que é proporcional a $O(|V|)$.
  - Linha 8: $|V_2|=|T|$.
  - Complexidade do loop: $|T|O(|V|)$.
- Complexidade final: $O((\log|T|)(|V|^3|T|^2)$.

Complexidade

Voltar

- Procedimento *CompPar* $\rightarrow (\sqrt{|T|}+2)O(|V|^3)$:
  - $\sqrt{|T|}+2$: número de iterações (Lema 2).
  - $O(|V|^3)$: construção da SPT para os candidatos a $\sqrt{l}$-bad node.
- Procedimento *CompGraphFirstPh*: $O(|V|^2)$ (construção da SPT).
- Construço da instância do MSC:
  - Composição de V_1: $O(|V|^2)$.
  - Composição de ε: $O(|V|^3)$ (executar o algoritmo de APSP).
- Algoritmo guloso de [Chekuri and Kumar 2004]:
  - Depende da execução do algoritmo para o MCG.
    - O algoritmo para o MCG depende da execução de oráculo $\rightarrow O(|V|^2|T|)$ no nosso caso.
    - Complexidade do algoritmo para o MCG: $O(|V|^3|T|^2)$.
  - O algoritmo para o MSC aplica iterativamente o algorito para o MCG $\rightarrow O((\log|T|)(|V|^3|T|^2)$.
- Loop entre as linhas 8 e 12:
  - Linha 10 se beneficia da execução do algoritmo do APSP.
  - Linha 9: $|D|$ é proporcional a $|S_{(u,v)}|$ que é proporcional a $O(|V|)$.
  - Linha 8: $|V_2| = |T|$.
  - Complexidade do loop: $|T|O(|V|)$.
- Complexidade final: $O((\log|T|)(|V|^3|T|^2)$.

Complexidade

Voltar

- Procedimento *CompPar* $\rightarrow (\sqrt{|T|}+2)O(|V|^3)$:
  - $\sqrt{|T|}+2$: número de iterações (Lema 2).
  - $O(|V|^3)$: construção da SPT para os candidatos a $\sqrt{l}$-bad node.
- Procedimento *CompGraphFirstPh*: $O(|V|^2)$ (construção da SPT).
- Construço da instância do MSC:
  - Composição de V_1: $O(|V|^2)$.
  - Composição de ε: $O(|V|^3)$ (executar o algoritmo de APSP).
- Algoritmo guloso de [Chekuri and Kumar 2004]:
  - Depende da execução do algoritmo para o MCG.
    - O algoritmo para o MCG depende da execução de oráculo $\rightarrow O(|V|^2|T|)$ no nosso caso.
    - Complexidade do algoritmo para o MCG: $O(|V|^3|T|^2)$.
  - O algoritmo para o MSC aplica iterativamente o algorito para o MCG $\rightarrow O((\log|T|)(|V|^3|T|^2)$.
- Loop entre as linhas 8 e 12:
  - Linha 10 se beneficia da execução do algoritmo do APSP.
  - Linha 9: $|D|$ é proporcional a $|S_{(u,v)}|$ que é proporcional a $O(|V|)$.
  - Linha 8: $|V_2|=|T|$.
  - Complexidade do loop: $|T|O(|V|)$.
- Complexidade final: $O((\log|T|)(|V|^3|T|^2)$.

Complexidade

Voltar

- Procedimento *CompPar* $\rightarrow (\sqrt{|T|}+2)O(|V|^3)$:
  - $\sqrt{|T|}+2$: número de iterações (Lema 2).
  - $O(|V|^3)$: construção da SPT para os candidatos a $\sqrt{l}$-bad node.
- Procedimento *CompGraphFirstPh*: $O(|V|^2)$ (construção da SPT).
- Construço da instância do MSC:
  - Composição de V_1: $O(|V|^2)$.
  - Composição de ε: $O(|V|^3)$ (executar o algoritmo de APSP).
- Algoritmo guloso de [Chekuri and Kumar 2004]:
  - Depende da execução do algoritmo para o MCG.
    - O algoritmo para o MCG depende da execução de oráculo $\rightarrow O(|V|^2|T|)$ no nosso caso.
    - Complexidade do algoritmo para o MCG: $O(|V|^3|T|^2)$.
  - O algoritmo para o MSC aplica iterativamente o algorito para o MCG $\rightarrow O((\log|T|)(|V|^3|T|^2)$.
- Loop entre as linhas 8 e 12:
  - Linha 10 se beneficia da execução do algoritmo do APSP.
  - Linha 9: $|D|$ é proporcional a $|S_{(u,v)}|$ que é proporcional a $O(|V|)$.
  - Linha 8: $|V_2| = |T|$.
  - Complexidade do loop: $|T|O(|V|)$.
- Complexidade final: $O((\log|T|)(|V|^3|T|^2)$.

Complexidade

Voltar

- Procedimento *CompPar* $\rightarrow (\sqrt{|T|}+2)O(|V|^3)$:
  - $\sqrt{|T|}+2$: número de iterações (Lema 2).
  - $O(|V|^3)$: construção da SPT para os candidatos a $\sqrt{l}$-bad node.
- Procedimento *CompGraphFirstPh*: $O(|V|^2)$ (construção da SPT).
- Construço da instância do MSC:
  - Composição de V_1: $O(|V|^2)$.
  - Composição de ε: $O(|V|^3)$ (executar o algoritmo de APSP).
- Algoritmo guloso de [Chekuri and Kumar 2004]:
  - Depende da execução do algoritmo para o MCG.
    - O algoritmo para o MCG depende da execução de oráculo $\rightarrow O(|V|^2|T|)$ no nosso caso.
    - Complexidade do algoritmo para o MCG: $O(|V|^3|T|^2)$.
  - O algoritmo para o MSC aplica iterativamente o algorito para o MCG $\rightarrow O((\log|T|)(|V|^3|T|^2)$.
- Loop entre as linhas 8 e 12:
  - Linha 10 se beneficia da execução do algoritmo do APSP.
  - Linha 9: $|D|$ é proporcional a $|S_{(u,v)}|$ que é proporcional a $O(|V|)$.
  - Linha 8: $|V_2|=|T|$.
  - Complexidade do loop: $|T|O(|V|)$.
- Complexidade final: $O((\log|T|)(|V|^3|T|^2)$.

Complexidade

Voltar

- Procedimento *CompPar* $\rightarrow (\sqrt{|T|}+2)O(|V|^3)$:
  - $\sqrt{|T|}+2$: número de iterações (Lema 2).
  - $O(|V|^3)$: construção da SPT para os candidatos a $\sqrt{l}$-bad node.
- Procedimento *CompGraphFirstPh*: $O(|V|^2)$ (construção da SPT).
- Construço da instância do MSC:
  - Composição de V_1: $O(|V|^2)$.
  - Composição de ε: $O(|V|^3)$ (executar o algoritmo de APSP).
- Algoritmo guloso de [Chekuri and Kumar 2004]:
  - Depende da execução do algoritmo para o MCG.
    - O algoritmo para o MCG depende da execução de oráculo $\rightarrow O(|V|^2|T|)$ no nosso caso.
    - Complexidade do algoritmo para o MCG: $O(|V|^3|T|^2)$.
  - O algoritmo para o MSC aplica iterativamente o algorito para o MCG $\rightarrow O((\log|T|)(|V|^3|T|^2)$.
- Loop entre as linhas 8 e 12:
  - Linha 10 se beneficia da execução do algoritmo do APSP.
  - Linha 9: $|D|$ é proporcional a $|S_{(u,v)}|$ que é proporcional a $O(|V|)$.
  - Linha 8: $|V_2|=|T|$.
  - Complexidade do loop: $|T|O(|V|)$.
- Complexidade final: $O((\log|T|)(|V|^3|T|^2)$.

Complexidade

Voltar

- Procedimento *CompPar* $\rightarrow (\sqrt{|T|}+2)O(|V|^3)$:
  - $\sqrt{|T|}+2$: número de iterações (Lema 2).
  - $O(|V|^3)$: construção da SPT para os candidatos a $\sqrt{l}$-bad node.
- Procedimento *CompGraphFirstPh*: $O(|V|^2)$ (construção da SPT).
- Construço da instância do MSC:
  - Composição de V_1: $O(|V|^2)$.
  - Composição de ε: $O(|V|^3)$ (executar o algoritmo de APSP).
- Algoritmo guloso de [Chekuri and Kumar 2004]:
  - Depende da execução do algoritmo para o MCG.
    - O algoritmo para o MCG depende da execução de oráculo $\rightarrow O(|V|^2|T|)$ no nosso caso.
    - Complexidade do algoritmo para o MCG: $O(|V|^3|T|^2)$.
  - O algoritmo para o MSC aplica iterativamente o algorito para o MCG $\rightarrow O((\log|T|)(|V|^3|T|^2)$.
- Loop entre as linhas 8 e 12:
  - Linha 10 se beneficia da execução do algoritmo do APSP.
  - Linha 9: $|D|$ é proporcional a $|S_{(u,v)}|$ que é proporcional a $O(|V|)$.
  - Linha 8: $|V_2|=|T|$.
  - Complexidade do loop: $|T|O(|V|)$.
- Complexidade final: $O((\log|T|)(|V|^3|T|^2)$.

Complexidade

Voltar

- Complexidade semelhante em algumas partes. O tamanho de V_2 é $\sqrt{|T|}$ ao invés de $O(|T|)$.
- Linha 4: $O(|V|^3)$ (semelhante ao *APPROX*).
- Loop (5-7):
  - $\lfloor\sqrt{|T|}\rfloor$: múmero máximo de iterações.
  - $O(|T|\sqrt{|T|})$: tamanho máximo de *Marked* na última iteração.
  - As outras instruções se beneficiam dos resultados da APSP e da SPT.
  - Complexidade do loop: $O(|T|^2)$.
- Algoritmo para o MSC (linha 8): $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|))$ (novo tamanho de V_2).
- Loop (10-15):
  - $\sqrt{|T|}+2)$: número máximo de iterações.
  - $O(V)$: tamanho de D.
  - $O(1)$ para as outras instruções (também se beneficial do resultado do APSP e da SPT).
- Complexidade final: $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|\sqrt{|T|}))$.

Complexidade

Voltar

- Complexidade semelhante em algumas partes. O tamanho de V_2 é $\sqrt{|T|}$ ao invés de $O(|T|)$.
- Linha 4: $O(|V|^3)$ (semelhante ao *APPROX*).
- Loop (5-7):
  - $\lfloor\sqrt{|T|}\rfloor$: múmero máximo de iterações.
  - $O(|T|\sqrt{|T|})$: tamanho máximo de *Marked* na última iteração.
  - As outras instruções se beneficiam dos resultados da APSP e da SPT.
  - Complexidade do loop: $O(|T|^2)$.
- Algoritmo para o MSC (linha 8): $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|))$ (novo tamanho de V_2).
- Loop (10-15):
  - $\sqrt{|T|}+2)$: número máximo de iterações.
  - $O(V)$: tamanho de D.
  - $O(1)$ para as outras instruções (também se beneficial do resultado do APSP e da SPT).
- Complexidade final: $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|\sqrt{|T|}))$.

Complexidade

Voltar

- Complexidade semelhante em algumas partes. O tamanho de V_2 é $\sqrt{|T|}$ ao invés de $O(|T|)$.
- Linha 4: $O(|V|^3)$ (semelhante ao *APPROX*).
- Loop (5-7):
  - $\lfloor\sqrt{|T|}\rfloor$: múmero máximo de iterações.
  - $O(|T|\sqrt{|T|})$: tamanho máximo de *Marked* na última iteração.
  - As outras instruções se beneficiam dos resultados da APSP e da SPT.
  - Complexidade do loop: $O(|T|^2)$.
- Algoritmo para o MSC (linha 8): $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|))$ (novo tamanho de V_2).
- Loop (10-15):
  - $\sqrt{|T|}+2)$: número máximo de iterações.
  - $O(V)$: tamanho de D.
  - $O(1)$ para as outras instruções (também se beneficial do resultado do APSP e da SPT).
- Complexidade final: $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|\sqrt{|T|}))$.

Complexidade

Voltar

- Complexidade semelhante em algumas partes. O tamanho de V_2 é $\sqrt{|T|}$ ao invés de $O(|T|)$.
- Linha 4: $O(|V|^3)$ (semelhante ao *APPROX*).
- Loop (5-7):
  - $\lfloor\sqrt{|T|}\rfloor$: múmero máximo de iterações.
  - $O(|T|\sqrt{|T|})$: tamanho máximo de *Marked* na última iteração.
  - As outras instruções se beneficiam dos resultados da APSP e da SPT.
  - Complexidade do loop: $O(|T|^2)$.
- Algoritmo para o MSC (linha 8): $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|))$ (novo tamanho de V_2).
- Loop (10-15):
  - $\sqrt{|T|}+2)$: número máximo de iterações.
  - $O(V)$: tamanho de D.
  - $O(1)$ para as outras instruções (também se beneficial do resultado do APSP e da SPT).
- Complexidade final: $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|\sqrt{|T|}))$.

Complexidade ▸ Voltar

- Complexidade semelhante em algumas partes. O tamanho de V_2 é $\sqrt{|T|}$ ao invés de $O(|T|)$.
- Linha 4: $O(|V|^3)$ (semelhante ao *APPROX*).
- Loop (5-7):
  - $\lfloor\sqrt{|T|}\rfloor$: múmero máximo de iterações.
  - $O(|T|\sqrt{|T|})$: tamanho máximo de *Marked* na última iteração.
  - As outras instruções se beneficiam dos resultados da APSP e da SPT.
  - Complexidade do loop: $O(|T|^2)$.
- Algoritmo para o MSC (linha 8): $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|))$ (novo tamanho de V_2).
- Loop (10-15):
  - $\sqrt{|T|} + 2)$: número máximo de iterações.
  - $O(V)$: tamanho de D.
  - $O(1)$ para as outras instruções (também se beneficial do resultado do APSP e da SPT).
- Complexidade final: $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|\sqrt{|T|}))$.

Complexidade

Voltar

- Complexidade semelhante em algumas partes. O tamanho de V_2 é $\sqrt{|T|}$ ao invés de $O(|T|)$.
- Linha 4: $O(|V|^3)$ (semelhante ao *APPROX*).
- Loop (5-7):
  - $\lfloor\sqrt{|T|}\rfloor$: múmero máximo de iterações.
  - $O(|T|\sqrt{|T|})$: tamanho máximo de *Marked* na última iteração.
  - As outras instruções se beneficiam dos resultados da APSP e da SPT.
  - Complexidade do loop: $O(|T|^2)$.
- Algoritmo para o MSC (linha 8): $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|))$ (novo tamanho de V_2).
- Loop (10-15):
  - $\sqrt{|T|}+2)$: número máximo de iterações.
  - $O(V)$: tamanho de D.
  - $O(1)$ para as outras instruções (também se beneficial do resultado do APSP e da SPT).
- Complexidade final: $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|\sqrt{|T|}))$.

Complexidade

Voltar

- Complexidade semelhante em algumas partes. O tamanho de V_2 é $\sqrt{|T|}$ ao invés de $O(|T|)$.
- Linha 4: $O(|V|^3)$ (semelhante ao *APPROX*).
- Loop (5-7):
  - $\lfloor\sqrt{|T|}\rfloor$: múmero máximo de iterações.
  - $O(|T|\sqrt{|T|})$: tamanho máximo de *Marked* na última iteração.
  - As outras instruções se beneficiam dos resultados da APSP e da SPT.
  - Complexidade do loop: $O(|T|^2)$.
- Algoritmo para o MSC (linha 8): $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|))$ (novo tamanho de V_2).
- Loop (10-15):
  - $\sqrt{|T|}+2$): número máximo de iterações.
  - $O(V)$: tamanho de D.
  - $O(1)$ para as outras instruções (também se beneficial do resultado do APSP e da SPT).
- Complexidade final: $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|\sqrt{|T|}))$.

Complexidade

Voltar

- Complexidade semelhante em algumas partes. O tamanho de V_2 é $\sqrt{|T|}$ ao invés de $O(|T|)$.
- Linha 4: $O(|V|^3)$ (semelhante ao *APPROX*).
- Loop (5-7):
  - $\lfloor\sqrt{|T|}\rfloor$: múmero máximo de iterações.
  - $O(|T|\sqrt{|T|})$: tamanho máximo de *Marked* na última iteração.
  - As outras instruções se beneficiam dos resultados da APSP e da SPT.
  - Complexidade do loop: $O(|T|^2)$.
- Algoritmo para o MSC (linha 8): $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|))$ (novo tamanho de V_2).
- Loop (10-15):
  - $\sqrt{|T|}+2)$: número máximo de iterações.
  - $O(V)$: tamanho de D.
  - $O(1)$ para as outras instruções (também se beneficial do resultado do APSP e da SPT).
- Complexidade final: $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|\sqrt{|T|}))$.

Complexidade

Voltar

- Complexidade semelhante em algumas partes. O tamanho de V_2 é $\sqrt{|T|}$ ao invés de $O(|T|)$.
- Linha 4: $O(|V|^3)$ (semelhante ao *APPROX*).
- Loop (5-7):
  - $\lfloor\sqrt{|T|}\rfloor$: múmero máximo de iterações.
  - $O(|T|\sqrt{|T|})$: tamanho máximo de *Marked* na última iteração.
  - As outras instruções se beneficiam dos resultados da APSP e da SPT.
  - Complexidade do loop: $O(|T|^2)$.
- Algoritmo para o MSC (linha 8): $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|))$ (novo tamanho de V_2).
- Loop (10-15):
  - $\sqrt{|T|}+2)$: número máximo de iterações.
  - $O(V)$: tamanho de D.
  - $O(1)$ para as outras instruções (também se beneficial do resultado do APSP e da SPT).
- Complexidade final: $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|\sqrt{|T|}))$.

Complexidade

Voltar

- Complexidade semelhante em algumas partes. O tamanho de V_2 é $\sqrt{|T|}$ ao invés de $O(|T|)$.
- Linha 4: $O(|V|^3)$ (semelhante ao *APPROX*).
- Loop (5-7):
  - $\lfloor\sqrt{|T|}\rfloor$: múmero máximo de iterações.
  - $O(|T|\sqrt{|T|})$: tamanho máximo de *Marked* na última iteração.
  - As outras instruções se beneficiam dos resultados da APSP e da SPT.
  - Complexidade do loop: $O(|T|^2)$.
- Algoritmo para o MSC (linha 8): $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|))$ (novo tamanho de V_2).
- Loop (10-15):
  - $\sqrt{|T|}+2)$: número máximo de iterações.
  - $O(V)$: tamanho de D.
  - $O(1)$ para as outras instruções (também se beneficial do resultado do APSP e da SPT).
- Complexidade final: $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|\sqrt{|T|}))$.

Complexidade

Voltar

- Complexidade semelhante em algumas partes. O tamanho de V_2 é $\sqrt{|T|}$ ao invés de $O(|T|)$.
- Linha 4: $O(|V|^3)$ (semelhante ao *APPROX*).
- Loop (5-7):
  - $\lfloor\sqrt{|T|}\rfloor$: múmero máximo de iterações.
  - $O(|T|\sqrt{|T|})$: tamanho máximo de *Marked* na última iteração.
  - As outras instruções se beneficiam dos resultados da APSP e da SPT.
  - Complexidade do loop: $O(|T|^2)$.
- Algoritmo para o MSC (linha 8): $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|))$ (novo tamanho de V_2).
- Loop (10-15):
  - $\sqrt{|T|}+2)$: número máximo de iterações.
  - $O(V)$: tamanho de D.
  - $O(1)$ para as outras instruções (também se beneficial do resultado do APSP e da SPT).
- Complexidade final: $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|\sqrt{|T|}))$.

Complexidade

Voltar

- Complexidade semelhante em algumas partes. O tamanho de V_2 é $\sqrt{|T|}$ ao invés de $O(|T|)$.
- Linha 4: $O(|V|^3)$ (semelhante ao *APPROX*).
- Loop (5-7):
  - $\lfloor\sqrt{|T|}\rfloor$: múmero máximo de iterações.
  - $O(|T|\sqrt{|T|})$: tamanho máximo de *Marked* na última iteração.
  - As outras instruções se beneficiam dos resultados da APSP e da SPT.
  - Complexidade do loop: $O(|T|^2)$.
- Algoritmo para o MSC (linha 8): $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|))$ (novo tamanho de V_2).
- Loop (10-15):
  - $\sqrt{|T|}+2)$: número máximo de iterações.
  - $O(V)$: tamanho de D.
  - $O(1)$ para as outras instruções (também se beneficial do resultado do APSP e da SPT).
- Complexidade final: $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|\sqrt{|T|}))$.

Complexidade

Voltar

- Complexidade semelhante em algumas partes. O tamanho de V_2 é $\sqrt{|T|}$ ao invés de $O(|T|)$.
- Linha 4: $O(|V|^3)$ (semelhante ao *APPROX*).
- Loop (5-7):
  - $\lfloor\sqrt{|T|}\rfloor$: múmero máximo de iterações.
  - $O(|T|\sqrt{|T|})$: tamanho máximo de *Marked* na última iteração.
  - As outras instruções se beneficiam dos resultados da APSP e da SPT.
  - Complexidade do loop: $O(|T|^2)$.
- Algoritmo para o MSC (linha 8): $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|))$ (novo tamanho de V_2).
- Loop (10-15):
  - $\sqrt{|T|}+2)$: número máximo de iterações.
  - $O(V)$: tamanho de D.
  - $O(1)$ para as outras instruções (também se beneficial do resultado do APSP e da SPT).
- Complexidade final: $O((\log\sqrt{|T|})(|V|^3|T|\sqrt{|T|}))$.

Arora, S. and Barak, B. (2009).
Computational Complexity: A Modern Approach.
Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1st edition.

Călinescu, G., Chekuri, C., Pál, M., and Vondrák, J. (2011).
Maximizing a monotone submodular function subject to a matroid constraint.
SIAM J. Comput., 40(6):1740–1766.

Chekuri, C. and Kumar, A. (2004).
Maximum coverage problem with group budget constraints and applications.
In *APPROX-RANDOM*, pages 72–83. Springer-Verlag New York, Inc.

Elkin, M. and Kortsarz, G. (2006).
An approximation algorithm for the directed telephone multicast problem.
Algorithmica, 45:569–583.

Elkin, M. and Solomon, S. (2009).
Narrow-shallow-low-light trees with and without steiner points.

In *ESA*, pages 215–226.

Elkin, M. and Solomon, S. (2011).
Narrow-shallow-low-light trees with and without steiner points.
SIAM J. Discret. Math., 25(1):181–210.

Fisher, M. L., Nemhauser, G. L., and Wolsey, L. A. (1978).
An analysis of approximations for maximizing submodular set functions-ii.
In *Polyhedral Combinatorics*, volume 8 of *Mathematical Programming Studies*, pages 73–87. Springer Berlin Heidelberg.

Fraigniaud, P. (2001).
Approximation algorithms for minimum-time broadcast under the vertex-disjoint paths mode.
In *Proceedings of the 9th Annual European Symposium on Algorithms*, ESA '01, pages 440–451, London, UK. Springer-Verlag.

Khandekar, R., Kortsarz, G., and Nutov, Z. (2011).
Network-design with degree constraints.
In Goldberg, L., Jansen, K., Ravi, R., and Rolim, J., editors, *Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization*.

Algorithms and Techniques, volume 6845 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 289–301. Springer Berlin.

Nemhauser, G. L., Wolsey, L. A., and Fisher, M. L. (1978).
An analysis of approximations for maximizing submodular set functions-i.
Mathematical Programming, 14:265–294.

Williamson, D. P. and Shmoys, D. B. (2011).
The Design of Approximation Algorithms.
Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1st edition.