MMST

HUGO BRAGA

1. Introdução

Neste texto, a menos de menção em contrário, os grafos considerados são não-orientados, simples e conexos. Dado um grafo $G = (V, E)$, uma função custo $w : E \to \mathbb{R}^+$ e um real $t \geq 1$, chamado de *fator de dilatação*, um *t-spanner* é um subgrafo gerador H de G tal que:

$$\mathrm{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \mathrm{dist}_G(u, v), \quad \forall\, u, v \in V, \tag{1}$$

onde $\mathrm{dist}_G(u, v)$ denota a distância entre u e v em G. A distância entre u e v em G é calculada através do somatório do custo (definido pela função w) das arestas de um caminho de custo mínimo entre u e v em G. Quando H é uma árvore dizemos que H é uma *árvore t-spanner*. Seja $(\mathcal{X}^H)_{e \in E(G)}$ o vetor de incidência de H. Para $u, v \in V(H)$, seja $H_{u,v}$ o caminho entre u e v na árvore H. Além disso, para um grafo G, considere $V(G)$ o conjunto dos vértices de G e $E(G)$ o conjunto das arestas de G.

Cai e Corneil [1] mostraram que várias definições de t-spanner são equivalentes. Seja Q um subgrafo gerador conexo de G. Dentre as definições que são equivalentes com (1), estão:

$$\mathrm{dist}_Q(u, v) \leq t \cdot \mathrm{dist}_G(u, v), \quad \forall\, uv \in E(G). \tag{2}$$

A prova de que (1) implica em (2) é direta. Vamos provar que (2) implica em (1).

Observação 1. *Seja Q um subgrafo gerador conexo de G. Então*

$$\begin{aligned} &\mathrm{dist}_Q(u, v) \leq t \cdot \mathrm{dist}_G(u, v), \forall\, uv \in E(G) \implies \\ &\qquad \mathrm{dist}_Q(u, v) \leq t \cdot \mathrm{dist}_G(u, v), \forall\, u, v \in V(G). \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $u, v \in V(G)$. Se $uv \in E(G)$, por hipótese, segue a conclusão. Vamos assumir que $uv \notin E(G)$. Seja $P = (u = u_0, u_1, ..., u_{l-1}, u_l = v)$ um caminho de custo mínimo entre u e v em G. Por hipótese, para cada

Date: 2015.

$u_{i-1}u_i \in E(P), \mathrm{dist}_Q(u_{i-1}, u_i) \leq t \cdot \mathrm{dist}_G(u_{i-1}, u_i)$. Então:

$$\begin{aligned}
\mathrm{dist}_Q(u,v) &= \sum_{i=1}^{l} dist_Q(u_{i-1}, u_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{l} t \cdot \mathrm{dist}_G(u_{i-1}, u_i) \\
&= t \cdot \sum_{i=1}^{l} \mathrm{dist}_G(u_{i-1}, u_i) \\
&= t \cdot \mathrm{dist}_G(u,v),
\end{aligned}$$

onde a primeira e última igualdade seguem do fato de que o custo de um caminho mínimo é igual ao somatório do custo das arestas que compoem o caminho mínimo. □

Uma versão de otimização para o problema árvore t-spanner corresponde em minimizar o fator de dilatação. Formalmente, o problema é definido como: dado um grafo $G = (V, E)$ e uma função custo $w : E \to \mathbb{R}^+$, o *problema de árvore spanner mínima* (*Minimum Max-Stretch Spanning Tree* - MMST) tem por objetivo encontrar o menor t (real) tal que G admite uma árvore t-spanner.

2. Formulação

Considere a variável de decisão $x \in \{0,1\}^E$ com o seguinte significado: $x(e), e \in E$, é igual a 1 se e somente se e faz parte da solução e 0 caso contrário. Considere a variável de decisão $Y \in \{0,1\}^{E \times E}$ com o seguinte significado: para $e = uv, f \in E(G)$, se f faz parte do caminho entre u e v na solução então $Y(e,f) = 1$. Se Y possui suporte mínimo, então o lado oposto da implicação também vale.

A seguir, apresentamos uma modelagem para o MMST. Para $e \in E(G)$, considere $\delta(S)$ como sendo o conjunto de arestas que tem exatamente um dos vértices em S.

$$\begin{aligned}
(P) \qquad & \min t \\
& \text{s.t.} \\
& Y(e, \delta(S)) \geq 1 && \forall e \in E, \forall S \subset V, |S \cap e| = 1 && (1) \\
& x(E) = |V| - 1 && && (2) \\
& Y(e,f) \leq x(f) && \forall e, f \in E && (3) \\
& \sum_{f \in E} Y(e,f) w(f) \leq t \cdot \mathrm{dist}_G(u,v) && \forall e = uv \in E && (4) \\
& t \geq 1 && && (5) \\
& x(e) \in \{0,1\} && \forall e \in E && (6)
\end{aligned}$$

$$Y(e,f) \in \{0,1\} \qquad \forall e,f \in E \tag{7}$$

$$t \in \mathbb{R}^+ \tag{8}$$

Afirmação 0.1. *Para uma árvore t'-spanner T de um grafo G, existe uma solução viável $Sol = (x', Y', t')$ de (P). Ademais, Y' possui suporte mínimo.*

Demonstração. Para cada $e = uv, f \in E(G)$, podemos construir uma solução viável $Sol = (x', Y', t')$ de (P) a partir de (T, t') da seguinte forma:

$$x'(e) \leftarrow \mathcal{X}_e^T, \tag{9}$$

$$Y'(e,f) \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{se } e \in E(T), f = e, & \text{(10a)} \\ 0 & \text{se } e \in E(T), f \neq e, & \text{(10b)} \\ 1 & \text{se } e \in E(G) \setminus E(T), f \in E(T_{u,v}), & \text{(10c)} \\ 0 & \text{se } e \in E(G) \setminus E(T), f \in E(G) \setminus E(T_{u,v}). & \text{(10d)} \end{cases}$$

Seja $e = uv \in E(G)$ e $f = xy \in E(T)$ tal que $Y'(e,f) = 1$. Note que $f \in E(T_{u,v})$. Seja $T_{u,v} = \{u = u_0, u_1, .., u_i = x, u_{i+1} = y, .., u_{l-1}, u_l = v\}$. Caso $Y'(e,f) \leftarrow 0$, para $S = \{u_0, u_1, .., u_i\}$ e a aresta f, a restrição 1 é violada. Segue que Y' tem suporte mínimo. □

Vamos agora provar o sentido inverso. Vamos mostrar que uma solução viável de (P) corresponde a uma solução viável do MMST. Seja $Sol = (x', Y', t')$ uma solução viável de (P) tal que Y' tem suporte mínimo. Para $e \in E$, seja $F(e) = \{f \in E : Y'(e,f) = 1\}$. Seja $G' = G[\bigcup_{e \in E} F(e)]$. Seja $E_x = \{e \in E : x'(e) = 1\}$. Seja $H = G[E_x]$.

A restrição 1 serve para garantir que G' seja um subgrafo gerador conexo de G. A seguir, provaremos tal propriedade.

Proposição 1. *Para cada $e = uv \in E(G)$, existe um caminho entre u e v em $G[F(e)]$.*

Demonstração. Seja $e = uv \in E(G)$. Suponha (por absurdo) que não existe um caminho entre u e v em $G[F(e)]$. Então u e v estão em componentes distintas em $G[F(e)]$. Seja G_u o grafo induzido pelos vértices do componente de $G[F(e)]$ que contém u. Seja $S = V(G_u)$. Mas então a restrição 1 é violada para S e e, contradizendo a hipótese de que Sol é uma solução viável de (P). □

Proposição 2. *O subgrafo G' é gerador conexo de G.*

Demonstração. Seja $u, v \in V(G)$. Como G é conexo, existe um caminho $P = (u = u_0, u_1, ..., u_{l-1}, u_l = v)$ entre u e v em G. Pela proposição 1 e sabendo que $G[F(e)] \subseteq G'$, para cada $u_{i-i}u_i \in E(P)$, existe um caminho entre u_{i-1} e u_i em G'. Sendo assim, u e v estão conectados em G'. Segue que G' é um subgrafo gerador conexo de G. □

A restrição 2 assim como a restrição 3 é necessária para garantir que a solução seja uma árvore. De maneira mais geral, a restrição 3 diz que para $f \in E(G)$, se $Y(e,f) = 1$ para algum $e \in E(G)$, então f deve fazer parte da solução final. Além disso, se $f \in E(G)$ não faz parte da solução final, não existe $e \in E(G)$ tal que $Y(e,f) = 1$. Em outras palavras, $E(G') \subseteq E(H)$.

Proposição 3. *H é uma árvore geradora de G.*

Demonstração. Em decorrência da proposição 2 e da restrição 3, para cada $u, v \in V(G)$, H contém um caminho entre u e v. Este fato juntamente com a restrição 2 implica que E_x induz uma árvore geradora. □

Proposição 4. *$G' = H$.*

Demonstração. Segue da proposicao 2 juntamente com a proposição 3 e do fato de que $E(G') \subseteq E(H)$ (restrição 3). □

Note que (P) não possui uma variável associada aos caminhos que respeitam a restrição de spanner, como na modelagem tradicional [5, 3]. Para verificar se um caminho a ser encontrado entre um par de vértices $u, v \in V(G)$ respeita esta restrição, $e = uv \in E(G)$, nós definimos uma variável específica $Y(e,f), \forall f \in E$, para o par de vértices u, v. O corolário a seguir é fundamental para entender por quê a restrição 4 modela corretamente a restrição de spanner. Em seguida, provaremos que uma solução de (P) respeita esta restrição.

Corolário 1. *Para cada $e = uv \in E$, $G[F(e)]$ é um caminho entre u e v.*

Demonstração. Seja $e = uv \in E(G)$. Pela proposição 1, existe um caminho P entre u e v em $G[F(e)]$. Suponha (por absurdo) que existe $f = pq \in F(e)$ tal que $Y'(e,f) = 1$ e $f \notin E(P)$. Para cada $g, h \in E(H)$, seja $Y^* \in \{0,1\}^{E \times E}$ definido da seguinte forma:

$$Y^*(g,h) \leftarrow \begin{cases} 0 & \text{se } g = e, h = f, \\ Y'(g,h) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que as restrições 1,3, 4 e 7 continuam sendo satisfeitas. Então, $Sol' = (x', Y^*, t')$ é uma solução viável de (P) tal que Y^* possui um suporte menor do que Y', uma contradição. □

Proposição 5. *Para cada $uv \in E$, $\mathrm{dist}_H(u,v) \leq t \cdot \mathrm{dist}_G(u,v)$.*

Demonstração. Seja $e = uv \in E$. Como vale o corolário 1, então $\mathrm{dist}_{G[F(e)]}(u,v) = \sum_{f \in E} Y'(e,f)\, w(f)$. Como $G[F(e)] \subseteq G'$ e G' é uma árvore (proposição 4), então $\mathrm{dist}_{G'}(u,v) = \mathrm{dist}_{G[F(e)]}(u,v)$. Como $H = G'$ (proposição 4) e Sol respeita a restrição 4, segue que $\mathrm{dist}_H(u,v) = \mathrm{dist}_{G'}(u,v) = \mathrm{dist}_{G[F(e)]}(u,v) = \sum_{f \in E} Y'(e,f)\; w(f) \leq t \cdot \sum_{f \in E} Y'(e,f)\; w(f)$. □

Corolário 2. *Para todo $u, v \in V$, $\mathrm{dist}_H(u,v) \leq t \cdot \mathrm{dist}_G(u,v)$.*

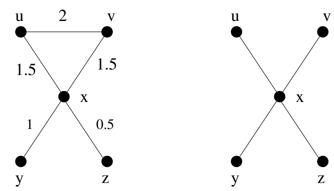

FIGURA 1. Um grafo com sua respectiva árvore t-spanner ótima

Demonstração. Segue da proposição 5 e da observação 1. □

No corolário 1, para $e = uv \in E(G)$, para mostrar que $G[F(e)]$ é um caminho entre u e v, nós assumimos como hipótese que Y' possui suporte mínimo. Esta hipótese não é condição necessária para que uma solução seja ótima. Considere a figura 1. Seja G o grafo do lado esquerdo da figura. Observe que a árvore spanner ótima de G corresponde à árvore no lado direito, cujo fator de dilatação t^* é 1.5. Seja T esta árvore. Vamos construir uma solução viável $Sol^* = (x^*, Y^*, t^*)$ de (P) aplicando a construção apresentada na afirmação 0.1, definida pelas atribuições 9 e 10, substituindo a atribuição 10b pela seguinte atribuição:

$$Y^*(e,f) \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{se } e = xy, f = xz, e \in E(T), f \neq e, \\ 0 & \text{se } e \neq xy \text{ ou } f \neq xz, e \in E(T), f \neq e. \end{cases}$$

É fácil verificar que Sol^* é uma solução viável de (P) tal que Y^* não tem suporte mínimo.

Afirmação 0.2. *Uma solução viável de (P) corresponde a uma solução viável do MMST.*

Demonstração. Segue do fato da solução do PL ser uma árvore (proposição 3), além do fato dos caminhos respeitarem a restrição de spanner (corolário 2). □

3. SEPARAÇÃO

Na relaxação da formulação (P), o número de restrições do tipo 1, as quais denominaremos de *inequações de corte*, é exponencial no tamanho de $V(G)$. Para tratar as restrições de tamanho exponencial, precisamos resolver o problema da separação. No problema da separação, dado um conjunto de restrições e uma (possível) solução, nós queremos saber se existe uma restrição que viola a solução. Em outras palavras, desejamos saber se a solução é viável ou obter um certificado que corresponda a uma restrição violada.

A separação das inequações de corte na relaxação de (P) pode ser feita em tempo polinomial. Seja (x^*, Y^*, t^*) uma solução da relaxação de (P). Para cada $e = uv \in E(G)$, seja $G_e = (V, E')$, onde $E' = E(G)$ e $\forall_{f \in E'} w(f) \leftarrow Y^*(e,f)$. A capacidade de um (u,v)-corte mínimo em G_e deve ser maior ou igual a 1. Caso exista um $e = uv \in E(G)$ tal que um (u, v)-corte mínimo $\delta(W)$ em G_e tenha valor menor do que 1, então o par (e, W) é um certificado de que a restrição 1 é violada. Em decorrência do fato de que o valor de um (u, v)-fluxo máximo é igual à capacidade de um (u, v)-corte mínimo [2], existe um algoritmo de separação para as inequações de corte cuja complexidade computacional é $O(|E(G)|^2 \cdot |V(G)|^2)$ (teorema 8.30 em [4]).

Referências

1. Leizhen Cai and Derek G. Corneil, *Tree spanners*, SIAM J. Discret. Math. **8** (1995), no. 3, 359–387.
2. G.B. Dantzig and D.R Fulkerson, *On the max-flow min-cut theorem of networks*, Linear Inequalities and Related Systems (H. W. Kuhn and A. W. Tucker, eds.), Princeton University Press, 1956, pp. 215–221.
3. Michael Dinitz and Robert Krauthgamer, *Directed spanners via flow-based linear programs*, Proceedings of the Forty-third Annual ACM Symposium on Theory of Computing (New York, NY, USA), STOC '11, ACM, 2011, pp. 323–332.
4. Bernhard Korte and Jens Vygen, *Combinatorial optimization: Theory and algorithms*, 5th ed., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
5. Mikkel Sigurd and Martin Zachariasen, *Construction of minimum-weight spanners*, Algorithms – ESA 2004 (Susanne Albers and Tomasz Radzik, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 3221, Springer Berlin Heidelberg, 2004, pp. 797–808.