MMST

HUGO BRAGA

1. Introdução

Neste texto, a menos de menção em contrário, os grafos considerados são não-orientados, simples e conexos. Dado um grafo $G = (V, E)$, uma função custo $w : E \to \mathbb{R}^+$ e um natural $t \geq 1$, chamado de *fator de dilatação*, um t*-spanner* é um subgrafo gerador H de G tal que:

$$\text{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \text{dist}_G(u, v), \quad \forall\, u, v \in V, \tag{1}$$

onde $\text{dist}_G(u, v)$ denota a distância entre u e $v \in V$. A distância entre u e v em G é calculada através do somatório do custo (definido pela função w) das arestas de um caminho de custo mínimo entre u e v em G. Seja $(\mathcal{X}^H)_{e \in E(G)}$ o vetor de incidência de H. Quando H é uma árvore dizemos que H é uma *árvore* t*-spanner*. Para $u, v \in V(H)$, seja $H_{u,v}$ o caminho entre u e v na árvore H. Além disso, para um grafo G, considere $V(G)$ o conjunto dos vértices de G e $E(G)$ o conjunto das arestas de G. Um caminho $P_{u,v} \subseteq G$ é um caminho t-spanner com relação a G entre os vértices $u, v \in V(G)$ se $dist_{P_{u,v}}(u, v) \leq t \cdot dist_G(u, v)$.

Cai e Corneil [2] mostraram que várias definições de t-spanner são equivalentes. Seja Q um subgrafo gerador conexo de G. Dentre as definições que são equivalentes com (1), estão:

$$\text{dist}_Q(u, v) \leq t \cdot \text{dist}_G(u, v), \quad \forall\, uv \in E(G). \tag{2}$$

A prova de que (1) implica em (2) é direta. Vamos provar que (2) implica em (1).

Observação 1. *Seja Q um subgrafo gerador conexo de G. Então*

$$\begin{aligned} &\text{dist}_Q(u, v) \leq t \cdot \text{dist}_G(u, v), \forall\, uv \in E(G) \implies \\ &\quad \text{dist}_Q(u, v) \leq t \cdot \text{dist}_G(u, v), \forall\, u, v \in V(G). \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $u, v \in V(G)$. Se $uv \in E(G)$, por hipótese, segue a conclusão. Vamos assumir que $uv \notin E(G)$. Seja $P = (u = u_0, u_1, ..., u_{l-1}, u_l = v)$ um caminho de custo mínimo entre u e v em G. Por hipótese, para cada

Date: 2015.

$u_{i-1}u_i \in E(P), \mathrm{dist}_Q(u_{i-1}, u_i) \leq t \cdot \mathrm{dist}_G(u_{i-1}, u_i)$. Então:

$$\begin{aligned}
\mathrm{dist}_Q(u,v) &= \sum_{i=1}^{l} dist_Q(u_{i-1}, u_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{l} t \cdot \mathrm{dist}_G(u_{i-1}, u_i) \\
&= t \cdot \sum_{i=1}^{l} \mathrm{dist}_G(u_{i-1}, u_i) \\
&= t \cdot \mathrm{dist}_G(u,v),
\end{aligned}$$

onde a primeira e última igualdade seguem do fato de que o custo de um caminho de custo mínimo é igual ao somatório do custo das arestas que compoem o caminho. □

Uma versão de otimização para o problema de árvore t-spanner corresponde em minimizar o fator de dilatação. Formalmente, o problema é definido como: dado um grafo $G = (V, E)$ e uma função custo $w : E \to \mathbb{R}^+$, o *problema de árvore spanner mínima* (*Minimum Max-Stretch Spanning Tree* - MMST) tem por objetivo encontrar o menor t (natural) tal que G admite uma árvore t-spanner.

2. Poliedro dos Grafos t-spanner

Para um grafo G e um natural $t \geq 1$, o poliedro do problema de grafos (não necessariamente árvores) t-spanner é definido como

$$P_{span}(G,t) \leftarrow \mathrm{conv}\{\mathcal{X}^F \in \mathbb{R}^{|E(G)|} \mid G[F] \text{ é um grafo } t\text{-spanner}\}.$$

Observe que $\forall t" \geq t', P_{span}(G,t') \subseteq P_{span}(G,t")$.

Seja $\mathrm{maxDist}_G(u,v)$ o custo de um caminho de custo máximo entre $u, v \in V(G)$. Seja $\mathcal{T}' = max_{u,v \in V(G)} \frac{\mathrm{maxDist}_G(u,v)}{\mathrm{dist}_G(u,v)}$. Seja $\mathcal{T} = \lceil \mathcal{T}' \rceil$. Então, $\forall t" \geq \mathcal{T}, P_{span}(G, \mathcal{T}) = P_{span}(G, t")$.

2.1. **Solução do MMST.**

Uma solução H para o MMST pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
H = arg_min_t\{F \subseteq E(G) \mid \exists \mathcal{X}^F \in P_{span}(G,t) \text{ tal que} \\
G[F] \text{ é uma árvore geradora de } G, 1 \leq t \leq \mathcal{T}\}.
\end{aligned}$$

Em outras palavras, eu quero descobrir o menor poliedro $P_{span}(G,t)$ (literalmente, pois $P_{span}(G,t') \subseteq P_{span}(G,t"), \forall t" \geq t'$) o qual possui como solução uma árvore.

2.2. **Dimensão do poliedro.**

Seja G' um t-spanner de G. Seja $\mathcal{P}^t_{u,v}(G')$ a coleção de caminhos t-spanner com relação a G entre os vértices $u, v \in V(G)$, e que estão contidos em G'.

Uma aresta $f \in E(G')$ é chamada de *ponte t-spanner* de G' se e somente se $G' - f$ não é t-spanner de G. Mais especificadamente, $f \in E(G')$ é ponte t-spanner de G' para $u, v \in V(G)$ se e somente se $\mathcal{P}^t_{u,v}(G' - f) = \emptyset$. Seja $\mathcal{B}^t_{u,v}(G')$ o conjunto destas pontes. Seja $\mathcal{B}^t(G') = \bigcup_{u,v\in V(G)} \mathcal{B}^t_{u,v}(G')$. Seja $\mathcal{B}^t_2(G') \subseteq 2^{V(G)}$ tal que $\mathcal{B}^t_{u,v}(G') \neq \emptyset, \forall (u,v) \in \mathcal{B}^t_2(G')$. Quando $G' = G$, utilizaremos as notações $\mathcal{P}^t, \mathcal{B}^t_{u,v}, \mathcal{B}^t, \mathcal{B}^t_2$.

No lema a seguir, provamos a dimensão do poliedro.

Lemma 1. $dim(P_{span}(G,t)) = |E(G)| - |\mathcal{B}^t|$.

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{B}^t$. Então, para cada $\mathcal{X}^F \in P_{span}(G,t)$, segue que $f \in F$. Sendo assim, $P_{span}(G,t) \subseteq \{x(f) = 1\}$. Logo, $dim(P_{span}(G,t)) \leq |E(G)| - |\mathcal{B}^t|$.

Como G é t-spanner, $\mathcal{X}^{E(G)} \in P_{span}(G,t)$ e $\mathcal{X}^{E(G)-f} \in P_{span}(G,t), \forall f \in E(G) \setminus \mathcal{B}^t$. Então $dim(P_{span}(G,t)) \geq |E(G)| - |\mathcal{B}^t|$, concluindo a prova. □

Vamos agora mostrar que $P_{span}(G,t)$ não tem dimensão plena. Antes disso, precisamos de um lema auxiliar.

Lemma 2. *Para cada caminho em $\mathcal{P}^t_{u,v}$, as arestas de $\mathcal{B}^t_{u,v}$ aparecem na mesma ordem.*

Demonstração. Seja $P = (u_0, u_1, ..., u_i, u_{i+1} = v_i, u_{i+2}, .., u_j, u_{j+1} = v_j, .., v)$ um caminho de custo mínimo entre u e v em G. Observe que $P \in \mathcal{P}^t_{u,v}$. Seja $u_iv_i, u_jv_j \in \mathcal{B}^t_{u,v}$. Suponha (por absurdo) que existe um caminho $P' \in \mathcal{P}^t_{u,v}$ tal que u_jv_j apareça antes de u_iv_i em P'. Temos que considerar dois casos:

- u_j antecede v_j em P': podemos assumir que $\text{dist}_P(u_j,v) > \text{dist}_{P'}(u_j,v)$. Caso contrário, seja $P'(u,u_j)$ o subcaminho de P' entre u e u_j. De maneira semelhante, defina $P(u_j,v)$. Então a concatenação entre $P'(u,u_j)$ e $P(u_j,v)$ contém um caminho $P_{u,v} \in \mathcal{P}^t_{u,v}$ que não contém u_iv_i, contradizendo o fato de $u_iv_i \in \mathcal{B}^t_{u,v}$.

  Como sabemos que $u_j \in V(P)$, a relação $\text{dist}_{P'}(u_j,v) < \text{dist}_P(u_j,v)$ contradiz o fato de P ser um caminho de custo mínimo entre u e v em G, pois a concatenação de $P(u,u_j)$ com $P'(u_j,v)$ contém um caminho entre u e v cujo custo é menor do que o de P.
- v_j antecede u_j em P': a prova é semelhante ao caso anterior, substituindo u_j por v_j na argumentação.

□

Sem perda de generalidade, vamos assumir que para $\mathcal{B}^t_{u,v} = \{u_1v_1, u_2v_2, .., u_pv_p\}$, onde u_iv_i aparece antes de $u_{i+1}v_{i+1}$ em cada caminho em $\mathcal{P}^t_{u,v}$, para cada $u_iv_i, u_{i+1}v_{i+1} \in \mathcal{B}^t_{u,v}$ (lema 2).

Proposição 1. *Seja $G' \leftarrow G \setminus \mathcal{B}^t$. Então, para $Q \subseteq G'$, $Q \cup \mathcal{B}^t$ contém um subgrafo t-spanner de G se e somente se para cada $(u,v) \in \mathcal{B}^t_2$ e $\mathcal{B}^t_{u,v} = \{u_1v_1, u_2v_2, .., u_pv_p\}$,*

$$\text{dist}_Q(u,u_1) + \text{dist}_Q(v_1,u_2) + ... + \text{dist}_Q(v_p,v) \leq t \cdot \text{dist}_G(u,v) - \sum_{u_iv_i \in \mathcal{B}^t_{u,v}} c(u_iv_i).$$

Demonstração. Seja $Q_{x,y}$ um caminho de custo mínimo em Q entre $x, y \in V(G)$.

($\Rightarrow$) Seja $(u,v) \in \mathcal{B}^t_2$. Suponha (por absurdo) que a inequação acima não seja válida. Como $Q \cup \mathcal{B}^t$ contém um subgrafo t-spanner e vale o lema 2, então

$$Q_{u,u_1} \cdot u_1v_1 \cdot Q_{v_1,u_2} \cdot u_2v_2 \cdot ... \cdot Q_{v_p,v}$$

é um caminho de custo mínimo entre u e v em $Q \cup \mathcal{B}^t$, cujo custo é maior do que $t \cdot dist_G(u,v)$, contradizendo o fato de existir um caminho em $\mathcal{P}^t_{u,v}(Q \cup \mathcal{B}^t)$.

($\Leftarrow$) Seja $(u,v) \in 2^{V(G)} \setminus \mathcal{B}^t_2$. G' possui um caminho em $\mathcal{P}^t_{u,v}(G')$ pois $\mathcal{B}^t_{u,v} = \emptyset$. Seja $(u,v) \in \mathcal{B}^t_2$. Como G é conexo e a inequação da hipótese é válida, então $P = Q_{u,u_1} \cdot u_1v_1 \cdot Q_{v_1,u_2} \cdot u_2v_2 \cdot ... \cdot Q_{v_p,v}$ é um caminho entre u e v em G tal que $dist_P(u,v) \leq t \cdot dist_G(u,v)$, concluindo a prova de que $Q \cup \mathcal{B}^t$ contém um subgrafo t-spanner de G. □

Em decorrência da inequação apresentada na proposição 1, caso o grafo de entrada G possua pontes t-spanner, não podemos dividir o problema em problemas menores sem as pontes t-spanner. Consequentemente, $P_{span}(G,t)$ não tem dimensão plena.

3. Formulação para o Poliedro dos Grafos t-spanner

Seja $\mathcal{X}^F \in P_{span}(G,t)$. Considere a variável de decisão $x \in \mathbb{R}^{|E(G)|}$ com o seguinte significado: $x(e), e \in E(G)$, é igual a 1 se e somente se e faz parte da solução F e 0 caso contrário. Considere a variável de decisão $Y \in \mathbb{R}^{|E(G)| \times |E(G)|}$ com o seguinte significado: para $e = uv \in E(G)$, existe $P \in \mathcal{P}^t_{u,v}(G[F])$ tal que $Y(e,f) = 1, \forall f \in E(P)$.

Para $e \in E(G)$, considere $\delta(W)$ como sendo o conjunto de arestas que tem exatamente um dos vértices de e em W. Considere o seguinte poliedro:

$$
\begin{array}{llll}
(PL) & Y(e,\delta(W)) \geq 1 & \forall e \in E, \forall W \subset V, |W \cap e| = 1 & (1) \\
 & Y(e,f) \leq x(f) & \forall e,f \in E & (2) \\
 & \displaystyle\sum_{f \in E(G)} Y(e,f)w(f) \leq t \cdot \mathrm{dist}_G(u,v) & \forall e = uv \in E & (3) \\
 & 0 \leq x(e) \leq 1 & \forall e \in E & (4) \\
 & 0 \leq Y(e,f) \leq 1 & \forall e,f \in E & (5)
\end{array}
$$

$P(G,t) \leftarrow \{(x \in \mathbb{R}^{|E(G)|}, Y \in \mathbb{R}^{|E(G)| \times |E(G)|}) \mid (x,Y) \in (PL)\}$.

Ao longo desta seção, iremos provar que o fecho inteiro da projeção de $P(G,t)$ em x é igual ao poliedro $P_{span}(G,t)$.

Afirmação 0.1. *Para cada $\mathcal{X}^F \in P_{span}(G,t)$, existe uma solução viável $(x',Y') \in (P(G,t))_I$. Ademais, Y' possui suporte mínimo.*

Demonstração. Para $e = uv \in E(G)$, seja $P_{u,v} \in \mathcal{P}^t_{u,v}(G[F])$. Para cada $e = uv, f \in E(G)$, defina x' e Y' da seguinte forma:

$$
x'(e) \leftarrow \mathcal{X}^F_e,
$$
$$
Y'(e,f) \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{se } f \in E(P_{u,v}), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}
$$

Seja $e = uv \in E(G)$ e $f = xy \in F$ tal que $Y'(e,f) = 1$. Note que $f \in E(P_{u,v})$. Seja $P_{u,v} = \{u = u_0, u_1, ., u_i = x, u_{i+1} = y, .., u_{l-1}, u_l = v\}$. Caso $Y'(e,f) \leftarrow 0$, para $W = \{u_0, u_1, .., u_i\}$ e a aresta f, a restrição 1 é violada, pois $F(e) = \{g \in E : Y'(e, g) = 1 \text{ ou } g = f\}$ induz um caminho. Segue que Y' tem suporte mínimo. □

Seja $(x', Y') \in (P(G, t))_I$ tal que Y' tem suporte mínimo. Para $e \in E(G)$, seja $F(e) = \{f \in E(G) : Y'(e, f) = 1\}$. Seja $G' = G[\bigcup_{e \in E(G)} F(e)]$. Seja $E_x = \{e \in E(G) : x'(e) = 1\}$. Seja $H = G[E_x]$.

A restrição 1 serve para garantir que G' seja um subgrafo gerador conexo de G. A seguir, provaremos tal propriedade.

Proposição 2. *Para cada $e = uv \in E(G)$, existe um caminho entre u e v em $G[F(e)]$.*

Demonstração. Seja $e = uv \in E(G)$. Suponha (por absurdo) que não existe um caminho entre u e v em $G[F(e)]$. Então u e v estão em componentes distintas em $G[F(e)]$. Seja G_u o grafo induzido pelos vértices do componente de $G[F(e)]$ que contém u. Seja $W = V(G_u)$. Mas então a restrição 1 é violada para W e e, contradizendo a hipótese de que $(x', Y') \in P(G, t)$. □

Proposição 3. *O subgrafo G' é gerador conexo de G.*

Demonstração. Seja $u, v \in V(G)$. Como G é conexo, existe um caminho $P = (u = u_0, u_1, ..., u_{l-1}, u_l = v)$ entre u e v em G. Pela proposição 2 e sabendo que $G[F(e)] \subseteq G'$, para cada $u_{i-i}u_i \in E(P)$, existe um caminho entre u_{i-1} e u_i em G'. Sendo assim, u e v estão conectados em G'. Segue que G' é um subgrafo gerador conexo de G. □

A restrição 2 diz que para $f \in E(G)$, se $Y(e, f) = 1$ para algum $e \in E(G)$, então f deve fazer parte da solução final. Além disso, se $f \in E(G)$ não faz parte da solução final, então não existe $e \in E(G)$ tal que $Y(e, f) = 1$. Em outras palavras, $E(G') \subseteq E(H)$.

Note que $P(G, t)$ não possui uma variável associada aos caminhos que respeitam a restrição de spanner, como na modelagem tradicional [6, 4]. Para verificar se um caminho a ser encontrado entre um par de vértices $u, v \in V(G)$, onde $e = uv \in E(G)$, respeita esta restrição, nós definimos uma variável específica $Y(e, f), \forall f \in E$, para o par de vértices u, v. O corolário a seguir é fundamental para entender por quê a restrição 3 modela corretamente a restrição de spanner. Em seguida, provaremos que (x', Y') respeita esta restrição.

Corolário 1. *Para cada $e = uv \in E$, $G[F(e)]$ é um caminho entre u e v.*

Demonstração. Seja $e = uv \in E(G)$. Pela proposição 2, existe um caminho P entre u e v em $G[F(e)]$. Suponha (por absurdo) que existe $f = pq \in F(e)$ tal que $Y'(e, f) = 1$ e $f \notin E(P)$. Para cada $g, h \in E(H)$, seja $Y^* \in \{0, 1\}^{|E(G)| \times |E(G)|}$ definido da seguinte forma:

$$Y^*(g, h) \leftarrow \begin{cases} 0 & \text{se } g = e, h = f, \\ Y'(g, h) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que as restrições 1,2, 3 e 5 continuam sendo satisfeitas. Então, (x', Y^*) é uma solução viável de $P(G, t)$ tal que Y^* possui um suporte menor do que Y', uma contradição. □

Proposição 4. *Para cada* $uv \in E$, $\text{dist}_H(u,v) \leq t \cdot \text{dist}_G(u,v)$.

Demonstração. Seja $e = uv \in E(G)$. Como valem o corolário 1, então $\text{dist}_{G[F(e)]}(u,v) = \sum_{f \in E} Y'(e,f)\, w(f)$. Como vale o corolário 1, a proposição 3 e $G[F(e)] \subseteq G'$, então $\text{dist}_{G'}(u,v) \leq \text{dist}_{G[F(e)]}(u,v)$. Como $G' \subseteq H$ (restrição 2) e (x', Y') respeita a restrição 3, segue que

$$\text{dist}_H(u,v) \leq \text{dist}_{G'}(u,v) \leq \text{dist}_{G[F(e)]}(u,v) = \sum_{f \in E(G)} Y'(e,f)\, w(f) \leq t \cdot \sum_{f \in E(G)} Y'(e,f)\, w(f).$$

□

Corolário 2. *Para todo* $u, v \in V(G)$, $\text{dist}_H(u,v) \leq t' \cdot \text{dist}_G(u,v)$.

Demonstração. Segue da proposição 4 e da observação 1. □

Afirmação 0.2. *Uma solução* $(x', Y') \in (P(G,t))_I$ *tal que* Y' *tem suporte mínimo, corresponde a uma solução* $\mathcal{X}^F$ *de* $P_{span}(G,t)$.

Demonstração. Segue do corolário 2. □

Corolário 3. *Para cada* $(x, Y) \in (P(G,t))_I$, *existe* $(x, Y') \in (P(G,t))_I$ *tal que* Y' *tem suporte mínimo.*

Demonstração. Podemos construir (x, Y') utilizando construção semelhante à apresentada na prova da afirmação 0.1. □

Seja $P_x(G,t) = \{x \in \mathbb{R}^{|E(G)|} \mid \exists Y \in \mathbb{R}^{|E(G)| \times |E(G)|}$ tal que $(x, Y) \in P(G,t)\}$. Ao provar que para $\mathcal{X}^F \in P_{span}(G,t)$ existe uma solução $(x, Y) \in (P(G,t))_I$ (afirmação 0.1), segue que $x \in (P_x(G,t))_I$. Seja $(x, Y) \in (P(G,t))_I$, onde Y tem suporte mínimo. Levando em consideração o corolário 3, ao provar que a partir de $x \in (P_x(G,t))_I$ é possível construir $\mathcal{X}^F \in P_{span}(G,t)$ (pela afirmação 0.2 e levando em consideração a definição de H), concluímos a prova de que $P_{span}(G,t) = (P_x(G,t))_I$.

3.1. **Solução do MMST.** Como abordado na seção 2.1, para encontrar uma solução do MMST, queremos descobrir o menor poliedro $P_x(G,t)$, para $t \geq 1$, o qual possui como solução uma árvore. Encontrar uma árvore em $P_x(G,t)$ pode ser modelado através do seguinte programa linear:

$$
\begin{aligned}
(P) \qquad & \min\ x(E(G)) \\
& \text{s.t.} \\
& (x, Y) \in P(G,t).
\end{aligned}
$$

Observe que uma solução ótima inteira de (P) com $|V(G)| - 1$ arestas é uma solução viável de MMST.

No corolário 1, para $e = uv \in E(G)$, para mostrar que $G[F(e)]$ é um caminho entre u e v, nós assumimos como hipótese que Y' possui suporte mínimo. Esta hipótese não é condição necessária para que uma solução de (P) seja ótima. Considere a figura 1. Seja G o grafo do lado esquerdo da figura. Para $t = 2$, observe que

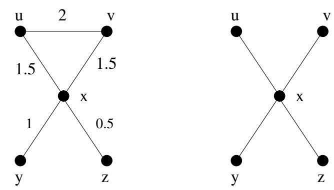

Figura 1. Um grafo com sua respectiva árvore t-spanner ótima

a solução ótima de P corresponde à árvore no lado direito (para $t = 1.5$, a árvore também é t-spanner). Seja H esta árvore. Vamos construir uma solução viável (x^*, Y^*) para (P) diferente de H. Para cada $e = pq, f \in E(G)$, defina x^* e Y^* da seguinte forma:

$$x^*(e) \leftarrow \mathcal{X}_e^H,$$

$$Y^*(e,f) \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{se } f \in E(H_{p,q}), \\ 1 & \text{se } e = xy, f = xz, \\ 0 & \text{se } f \in E(G) \setminus E(H_{p,q}). \end{cases}$$

É fácil verificar que (x^*, Y^*) é uma solução viável (ótima) de (P) tal que Y^* não tem suporte mínimo.

4. Separação das Inequações de Corte

Na formulação (P), o número de inequações correspondentes à restrição (1), as quais são conhecidas como *inequações de corte*, é exponencial no tamanho de $V(G)$. Para tratar as restrições de tamanho exponencial, precisamos resolver o problema da separação. No problema da separação, dado um conjunto de inequações e uma (possível) solução, nós queremos saber se existe uma inequação violada pela solução. Em outras palavras, desejamos saber se a solução é viável ou obter um certificado que corresponda a uma inequação violada.

A separação das inequações de corte de (P) pode ser feita em tempo polinomial. Para um $t \geq 1$, seja (x^*, Y^*) uma (possível) solução de (P). Para cada $e = uv \in E(G)$, seja $G_e = (V, E')$, onde $E' = E(G)$ e $w(f) \leftarrow Y^*(e,f), \forall f \in E'$. A capacidade de um (u,v)-corte mínimo em G_e deve ser maior ou igual a 1. Caso exista um $e = uv \in E(G)$ tal que um (u,v)-corte mínimo $\delta(W)$ em G_e tenha capacidade menor do que 1, então o par (e, W) é um certificado de que a restrição 1 é violada. Em decorrência do valor de um (u,v)-fluxo máximo ser igual à capacidade de um (u,v)-corte mínimo [3], existe um algoritmo de separação para as inequações de corte, cuja complexidade computacional é $O(|E(G)|^2 \cdot |V(G)|^2)$ (teorema 8.30 em [5]).

5. Facetas do Poliedro dos Grafos t-spanner

Seja $E(G) = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$. Seja $x \in \mathbb{R}^{|E(G)|}, Y \in \mathbb{R}^{|E(G)| \times |E(G)|}$, onde $Y = (Y_{e_1}^{|E(G)|}, Y_{e_2}^{|E(G)|}, ..., Y_{e_m}^{|E(G)|})$. Para $(x^{F'}, Y^F) \in P(G,t)$, interpretamos os vetores da seguinte forma: $x^{F'}$ representa o vetor de incidência de $F' \subseteq E(G)$ em x; para

$e = uv \in E(G)$, existe $P \in \mathcal{P}^t_{u,v}(G[F])$ tal que $Y(e,f) = 1, \forall f \in E(P)$. Para $(x^{F'}, (Y^{F_{e_1}}_{e_1}, ..., Y^{F_{e_m}}_{e_m})) \in P(G,t)$, os vetores $x^{F'}$ e $Y^{F_{e_i}}_{e_i}, \forall e_i \in E(G)$, representam os vetores de incidência de $F' \subseteq E(G)$ e $F_{e_i} \subseteq E(G)$ em x e Y_{e_i}, respectivamente.

Lemma 3. *$dim((P(G,t))_I) = |E(G)|(|E(G)|+1) - (|\mathcal{B}^t| + \sum_{uv \in E(G)} |\mathcal{B}^t_{u,v}|)$.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{B}^t$. Seja $(x', Y') \in (P(G,t))_I$. Seja $e' = u'v' \in E(G)$ tal que $\mathcal{B}^t_{u',v'} \neq \emptyset$. Seja $f' \in \mathcal{B}^t_{u',v'}$. Então $Y'(e', f') = 1$ e $x'(f') = 1$. Logo, $dim((P(G,t))_I) \leq |E(G)|(|E(G)|+1) - (|\mathcal{B}^t| + \sum_{uv \in E(G)} |\mathcal{B}^t_{u,v}|)$.

Seja $e_i = uv \in E(G), f \in E(G) \setminus \mathcal{B}^t_{u,v}$. Então $(x^{E(G)}, (Y^{E(G)}_{e_1}, ..., Y^{E(G)-f}_{e_i}, ..., Y^{E(G)}_{e_m})) \in (P(G,t))_I$. Seja $f' \in E(G) \setminus \mathcal{B}^t$. Então $(x^{E(G)-f'}, (Y^{E(G)-f'}_{e_1}, ..., Y^{E(G)-f'}_{e_m})) \in (P(G,t))_I$. Note também que $(x^{E(G)}, (Y^{E(G)}_{e_1}, ..., Y^{E(G)}_{e_m})) \in (P(G,t))_I$. Observe que estes vetores formam um conjunto afim independente. Segue que $dim((P(G,t))_I) \geq |E(G)|(|E(G)|+1) - (|\mathcal{B}^t| + \sum_{uv \in E(G)} |\mathcal{B}^t_{u,v}|)$, concluindo a prova. □

Ao longo desta seção provaremos que algumas inequações de $P(G,t)$ definem e outras não definem facetas. Alguns resultados são baseados no trabalho de Aneja [1].

Lemma 4. *Seja $f \in E(G) \setminus \mathcal{B}^t$. A inequação $x(f) \geq 0$ não define faceta de $(P(G,t))_I$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}_f = \{(x^F, Y^F) \in (P(G,t))_I \mid x(f) = 1\}$. Seja $(x', Y') \in \mathcal{F}_f$. Seja $e' = uv \in E(G)$ tal que $\mathcal{B}^t_{u',v'} \neq \emptyset$. Seja $f' \in \mathcal{B}^t_{u',v'}$. Então $Y'(e', f') = 1$ e $x'(f') = 1$. Ademais, $x'(f) = 0$. Em decorrência da restrição 2 de $P(G,t)$, segue que $Y'(e,f) = 0, \forall e \in E(G)$. Podemos concluir que $dim(\mathcal{F}_f) \leq |E(G)|(|E(G)|+1) - (|B(t,G)| + \sum_{uv \in E(G)} |\mathcal{B}^t_{u,v}|) - 1 - |E(G)|$. □

Lemma 5. *Seja $e = uv \in E(G)$. Seja $f \in E(G) \setminus \mathcal{B}^t$ tal que $\mathcal{B}^t_{u,v}(G-f) = \mathcal{B}^t_{u',v'}(G-f), \forall (u',v') \in \mathcal{B}^t_2(G-f)$. A inequação $Y(e,f) \geq 0$ define faceta de $(P(G,t))_I$ se e somente se $\mathcal{B}^t(G-f) = \mathcal{B}^t$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Seja $\mathcal{F}_f = \{(x^F, Y^F) \in (P(G,t))_I \mid Y(e,f) = 0\}$. Seja $g \in E(G) \setminus \mathcal{B}^t, g \neq f$. Seja $e = e_i$. Considere estes três conjuntos de vetores pertencentes a $(P(G,t))_I$:

- $(x^{E(G)}, (Y^{E(G)}_{e_1}, ..., Y^{E(G)-f-g}_{e_i}, ..., Y^{E(G)}_{e_m})) \in (P(G,t))_I$, visto que $f \in E(G) \setminus \mathcal{B}^t$ e $\mathcal{B}^t(G-f) = \mathcal{B}^t$;
- $(x^{E(G)}, (Y^{E(G)}_{e_1}, ..., Y^{E(G)-g}_{e_j}, ..., Y^{E(G)-f}_{e_i}, ..., Y^{E(G)}_{e_m})) \in (P(G,t))_I$, $\forall e_j \in E(G), e_j \neq e_i$, visto que $g \in E(G) \setminus \mathcal{B}^t$;
- $(x^{E(G)-g}, (Y^{E(G)-g}_{e_1}, ..., Y^{E(G)-f-g}_{e_i}, ..., Y^{E(G)-g}_{e_m})) \in (P(G,t))_I$, visto que $f \in E(G) \setminus \mathcal{B}^t$ e $\mathcal{B}^t(G-f) = \mathcal{B}^t$.

Ademais, a coleção acima de vetores pertence a $\mathcal{F}_f$. Além disso, estes vetores são afim independentes.

($\Rightarrow$) Suponha (por absurdo) que $\exists g \in E(G) \setminus \mathcal{B}^t$ tal que $g \in \mathcal{B}^t(G-f)$. Como $\mathcal{B}^t_{u,v}(G-f) = \mathcal{B}^t_{u',v'}(G-f), \forall (u',v') \in \mathcal{B}^t_2(G-f)$, então a inequação $Y(e,f) + Y(e,g) \geq$

1 é válida para $P(G,t)$ pois $g \in \mathcal{B}^t_{u,v}(G-f)$. Além disso, sabemos que a inequação $-Y(e,g) \geq -1$ é válida para $P(G,t)$. Mas então, a inequação $Y(e,f) \geq 0$ pode ser obtida através da soma destas duas inequações anteriores, contradizendo o fato de que $Y(e,f) \geq 0$ define faceta. □

Lemma 6. *Seja $f \in E(G) \setminus \mathcal{B}^t$. A inequação $x(f) \leq 1$ define faceta de $(P(G,t))_I$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}_f = \{(x^F, Y^F) \in (P(G,t))_I \mid x(f) = 1\}$. Considere estes dois conjuntos de vetores pertencentes a $(P(G,t))_I$:

- $(x^{E(G)}, (Y^{E(G)}_{e_1}, ..., Y^{E(G)-g'}_{e_i}, ..., Y^{E(G)}_{e_m})) \in (P(G,t))_I$, $\forall e_i \in E(G), \forall g' \in E(G) \setminus \mathcal{B}^t$;
- $(x^{E(G)-g}, Y^{E(G)-g}) \in (P(G,t))_I$, $\forall g \in E(G) \setminus \mathcal{B}^t, g \neq f$.

Ademais, a coleção acima de vetores pertence a $\mathcal{F}_f$. Além disso, estes vetores são afim independentes. □

Lemma 7. *Seja $e \in E(G), f \in E(G) \setminus \mathcal{B}^t$. A inequação $Y(e,f) \leq 1$ não define faceta de $(P(G,t))_I$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}_f = \{(x^F, Y^F) \in (P(G,t))_I \mid Y(e,f) = 1\}$. Seja $(x', Y') \in \mathcal{F}_f$. Seja $e' = u'v' \in E(G)$ tal que $\mathcal{B}^t_{u',v'} \neq \emptyset$. Seja $f' \in \mathcal{B}^t_{u',v'}$. Então $Y'(e', f') = 1$ e $x'(f') = 1$. Ademais, $Y'(e,f) = 1$. Em decorrência da restrição 2 de $P(G,t)$, segue que $x'(f) = 1$. Podemos concluir que
$dim(\mathcal{F}_f) \leq |E(G)|(|E(G)|+1) - (|\mathcal{B}^t| + \sum_{uv \in E(G)} |\mathcal{B}^t_{u,v}|) - 2$. □

Lemma 8. *Seja $e \in E(G), f \in E(G) \setminus \mathcal{B}^t$. A inequação $Y(e,f) \leq x(f)$ não define faceta de $(P(G,t))_I$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}_f = \{(x^F, Y^F) \in (P(G,t))_I \mid Y(e,f) = x(f)\}$. Para $x(f) = 0$, segue do lema 4. Para $Y(e,f) = 1$, segue do lema 7. Para $Y(e,f) = 0$ e $x(f) = 1$, segue que $dim(\mathcal{F}_f) \leq |E(G)|(|E(G)|+1) - (|\mathcal{B}^t| + \sum_{uv \in E(G)} |\mathcal{B}^t_{u,v}|) - 2$, concluindo a prova. □

Teorema 1. *Seja $e = uv \in E(G)$. Seja $\delta(W)$ um (u,v)-corte, onde $\overline{W} = V(G) \setminus W$, com as seguintes propriedades:*

(1) *Para cada $p, q \in W$, existe um caminho em $\mathcal{P}^t_{p,q}(G[W])$ (a propriedade vale substituindo W por $\overline{W}$);*
(2) *Para cada $p, q \in W$ e para cada $g \in E(W) \cup E(\overline{W})$, existe um caminho em $\mathcal{P}^t_{p,q}(G[W]-g)$ (a propriedade vale substituindo W por $\overline{W}$).*

A inequação

$$Y(e, \delta(W)) \geq 1$$

define uma faceta de $(P(G,t))_I$ se e somente se:

(1) *Para cada $p \in W, q \in \overline{W}$ e para cada $f \in \delta(W)$, existe um caminho em $\mathcal{P}^t_{p,q}(G[E(W) \cup E(\overline{W}) + f])$ (a condição vale substituindo W por $\overline{W}$).*
(2) *Para cada $p \in W, q \in \overline{W}$, para cada $f \in \delta(W)$ e para cada $g \in E(W)$, existe um caminho em $\mathcal{P}^t_{p,q}(G[E(W) \cup E(\overline{W}) + f - g])$ (a condição vale substituindo $g \in E(W)$ por $g \in E(\overline{W})$).*

Demonstração. Seja

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_W = \{(x^F, Y^F) \in P(G,t) \mid Y(e, \delta(W)) = 1\} \subseteq \\ \{(x^F, Y^F) \in P(G,t) \mid \alpha \cdot (\sum_{f \in E(G)} Y(e,f)) + \\ \beta \cdot (\sum_{e' \in E(G)-e, f \in E(G)} Y(e',f)) + \\ \gamma \cdot (\sum_{e" \in E(G)} x(e")) = \theta\} = \mathcal{F}.\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Vamos provar a suficiência mostrando que qualquer outra inequação válida $\alpha \cdot (\sum_{f \in E(G)} Y(e,f)) + \beta \cdot (\sum_{e' \in E(G)-e, f \in E(G)} Y(e',f)) + \gamma \cdot (\sum_{e" \in E(G)} x(e")) \geq \theta$ tal que a inclusão acima valha, é múltiplo não negativo de $Y(e, \delta(W)) \geq 1$. Seja $f \in \delta(W)$. Seja $B \leftarrow E(W) \cup E(\overline{W})$. Como valem a propriedade (1) e a hipótese (1), então $(x^{B+f}, Y^{B+f}) \in \mathcal{F}_W$.

Seja $g \in E(W) \cup E(\overline{W})$. Como valem a propriedade (2) e a hipótese (2), segue que $(x^{B+f-g}, Y^{B+f-g}) \in \mathcal{F}_W$.

Como $(x^{B+f}, Y^{B+f}), (x^{B+f-g}, Y^{B+f-g}) \in \mathcal{F}$, então

$$\begin{aligned}&\alpha \cdot ((\sum_{h \in B} Y(e,h)) + Y(e,f)) + \\ &\beta \cdot ((\sum_{e' \in E(G)-e, h \in B} Y(e',h)) + \sum_{e' \in E(G)-e} Y(e',f)) + \\ &\gamma \cdot ((\sum_{e" \in B} x(e")) + x(f)) = \theta = \\ &\alpha \cdot ((\sum_{h \in B-g} Y(e,h)) + Y(e,f)) + \\ &\beta \cdot ((\sum_{e' \in E(G)-e, h \in B-g} Y(e',h)) + \sum_{e' \in E(G)-e} Y(e',f)) + \\ &\gamma \cdot ((\sum_{e" \in B-g} x(e")) + x(f)).\end{aligned}$$

Isto implica que

$$\alpha_g = 0, \forall g \in E(W) \cup E(\overline{W}); \tag{1}$$

$$\beta_{e',g} = 0, \forall e' \in E(G) - e, \forall g \in E(W) \cup E(\overline{W}); \tag{2}$$

$$\gamma_g = 0, \forall g \in E(W) \cup E(\overline{W}). \tag{3}$$

Note que α_g tem que ser igual a $0, \forall g \in E(W) \cup E(\overline{W})$, pois nada impede que para $(x^{B+f-g}, Y^{B+f-g}), Y(e,g) = 1$. De maneira análoga, $\beta_{e',g}$ tem que ser igual a $0, \forall e' \in E(G) - e, \forall g \in E(W) \cup E(\overline{W})$.

Seja $f, g \in \delta(W), f \neq g$. Como valem a propriedade (1) e a hipótese (1), então $(x^{B+f}, Y^{B+f}), (x^{B+g}, Y^{B+g}) \in \mathcal{F}_W$. Vamos assumir que tanto para (x^{B+f}, Y^{B+f})

como para (x^{B+g}, Y^{B+g}), Y tem suporte mínimo (podemos assumir isso em decorrência do corolário 3). Observe que $(x^{B+f}, Y^{B+f}), (^{B+g}, Y^{B+g}) \in \mathcal{F}$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}
&\alpha \cdot ((\sum_{h \in B} Y(e,h)) + Y(e,f))+\\
&\beta \cdot ((\sum_{e' \in E(G)-e, h \in B} Y(e',h)) + \sum_{e' \in E(G)-e} Y(e',f))+\\
&\gamma \cdot ((\sum_{e" \in B} x(e")) + x(f)) = \theta =\\
&\alpha \cdot ((\sum_{h \in B} Y(e,h)) + Y(e,g))+\\
&\beta \cdot ((\sum_{e' \in E(G)-e, h \in B} Y(e',h)) + \sum_{e' \in E(G)-e} Y(e',g))+\\
&\gamma \cdot ((\sum_{e" \in B} x(e")) + x(g)).
\end{aligned}$$

Então, em decorrência de (1), (2) e (3), temos que

$$\begin{aligned}
&\alpha \cdot Y(e,f)+\\
&\beta \cdot ((\sum_{e' \in \delta(W)-e} Y(e',f)) + \beta \cdot (\sum_{e' \in E(W) \cup E(\overline{W})} Y(e',f))+\\
&\gamma \cdot x(f) = \theta =\\
&\alpha \cdot Y(e,g)+\\
&\beta \cdot ((\sum_{e' \in \delta(W)-e} Y(e',g)) + \beta \cdot (\sum_{e' \in E(W) \cup E(\overline{W})} Y(e',g))+\\
&\gamma \cdot x(g).
\end{aligned}$$

Isto implica que

$$\begin{aligned}
\alpha_f &= \alpha_g, \forall f, g \in \delta(W);\\
\beta_{e',f} &= \beta_{e',g}, \forall e' \in E(G) - e, \forall f, g \in \delta(W);\\
\gamma_f &= \gamma_g, \forall f, g \in \delta(W).
\end{aligned}$$

Observe que para (x^{B+f}, Y^{B+f}) temos que $x(f) = 1$, pois $Y(e,f) = 1$ e vale a restrição 2 de $P(G,t)$. Ou seja, $\forall (x^F, Y^F) \in \mathcal{F}_W$ tal que $f \in F$, segue $x(f) = 1$. Sendo assim, o coeficiente de $x(f)$ na equação que defina $\mathcal{F}_W$ é 0. De maneira análoga, para (x^{B+g}, Y^{B+g}) temos que $x(g) = 1$ e seu coeficiente na equação que define $\mathcal{F}_W$ é 0.

Observe também que para (x^{B+f}, Y^{B+f}) temos que $Y(e',f) = 1, \forall e' \in \delta(W) - e$, pois $x(f) = 1$ e $|F \cap \delta(W)| = 1, \forall (x^F, Y^F) \in \mathcal{F}_W$, além da restrição 1 ser respeitada. Ou seja, $\forall (x^F, Y^F) \in \mathcal{F}_W$ tal que $f \in F$, segue que $Y(e',f) = 1, \forall e' \in \delta(W) - e$. De maneira análoga, para (x^{B+g}, Y^{B+g}) temos que $Y(e',g) = 1, \forall e' \in \delta(W) - e$. Como argumentamos anteriormente, os respectivos coeficientes na equação que define $\mathcal{F}_W$ possuem valor 0.

Para (x^{B+f}, Y^{B+f}) temos que Y tem suporte mínimo. Além disso, $|F \cap \delta(W)| = 1, \forall (x^F, Y^F) \in \mathcal{F}_W$, e vale a restrição 1. Então, segue que $Y(e', f) = 0, \forall e' \in E(W) \cup E(\overline{W})$. De maneira análoga, para (x^{B+g}, Y^{B+g}) temos que $Y(e', g) = 0, \forall e' \in E(W) \cup E(\overline{W})$. Isto significa que $\beta_{e',f}$ e $\beta_{e',g}$ podem ter qualquer valor (0, por exemplo). De qualquer forma, os termos $Y(e', f)$ e $Y(e', g)$ são nulos em $\mathcal{F}$.

Logo,

$$\alpha_i \leftarrow \begin{cases} \theta, & \text{se } i \in \delta(W), \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$
$$\beta_{i,j} \leftarrow 0, \forall i \in E(G) - e, j \in E(G),$$
$$\gamma_i \leftarrow 0, \forall i \in E(G),$$

provando que $Y(e, \delta(W)) \geq 1$ define uma faceta de $(P(G,t))_I$ quando as propriedades no enunciado são satisfeitas.

Vamos agora provar a necessidade. Por hipótese, vamos assumir que $Y(e, \delta(W)) \geq 1$ define faceta (quando as propriedades 1 e 2 são satisfeitas), ou seja, $\mathcal{F}_W \neq \emptyset$.

(1) $\Rightarrow$ Suponha (por absurdo) que $\exists p \in W, q \in \overline{W}$ tal que $\exists f \in \delta(W)$ tal que $\nexists$ um caminho em $\mathcal{P}^t_{p,q}(G[E(W) \cup E(\overline{W}) + f])$. Seja $g = xy \in \delta(W)$ tal que $(x^F, Y^F) \in \mathcal{F}_W$ e $g \in F$. Observe que $g \neq f$. Sem perda de generalidade, assuma que $|W| \geq 2$ (caso contrário, se $|W| = |\overline{W}| = 1$, então $f = g$). Como $G[F]$ é conexo pois $G[F]$ é t-spanner, então $|E(W)| \geq 1$. Como podemos assumir que vale a propriedade 2, então $|E(W)| \geq 2$. Logo, $|W| \geq 3$. Seja $W" = \{u, x\}$, se $u \neq x$, ou $W" = \{u\}$, caso contrário. Seja $W = W' \cup W"$ e $W' \cap W" = \emptyset$. Observe que $Y(e, \delta(W' \cup \overline{W})) \geq 1$ é válida, pois $\delta(W' \cup \overline{W})$ é um (u,v)-corte e $g \in \delta(W' \cup \overline{W})$. Observe também que $Y(e, E(W', \overline{W})) \geq 0$ é válida. Somando estas duas inequações nós obtemos $Y(e, \delta(W)) \geq 1$, contradizendo o fato desta última inequação definir faceta.

(2) $\Rightarrow$ Suponha (por absurdo) que $\exists p \in W, q \in \overline{W}$ tal que $\exists f \in \delta(W)$ tal que $\exists g \in E(W)$ tal que $\nexists$ um caminho em $\mathcal{P}^t_{p,q}(G[E(W) \cup E(\overline{W}) + f - g])$. Nós vamos mostrar que toda solução pertencente a $\mathcal{F}_W$ e que contenha f também contém g. Se a inequação $x(g) \geq 1$ é válida para $\mathcal{F}_f(G,t) = \{(x^F, Y^F) \in P(G,t) \mid f \in F\}$ e $\mathcal{F}_f(G,t) \subseteq \{(x^F, Y^F) \in \mathcal{F}_f(G,t) \mid x(g) = 1\}$, mas $x(g) \geq 1$ não é múltiplo de $Y(e, \delta(W)) \geq 1$, então $Y(e, \delta(W))$ não define faceta de $(P(G,t))_I$.

Sabemos que $\exists (x^F, Y^F) \in \mathcal{F}_W$ tal que $f \in F$ (hipótese 1). Suponha que $\exists (x^F, Y^F) \in \mathcal{F}_W$ tal que $f \in F$ e $g \notin F$. Mas isto contradiz a nossa hipótese inicial, concluindo a prova. $\square$

Referências

1. Y. P. Aneja, *An integer linear programming approach to the steiner problem in graphs*, Networks **10** (1980), no. 2, 167–178.
2. Leizhen Cai and Derek G. Corneil, *Tree spanners*, SIAM J. Discret. Math. **8** (1995), no. 3, 359–387.
3. G.B. Dantzig and D.R Fulkerson, *On the max-flow min-cut theorem of networks*, Linear Inequalities and Related Systems (H. W. Kuhn and A. W. Tucker, eds.), Princeton University Press, 1956, pp. 215–221.

4. Michael Dinitz and Robert Krauthgamer, *Directed spanners via flow-based linear programs*, Proceedings of the Forty-third Annual ACM Symposium on Theory of Computing (New York, NY, USA), STOC '11, ACM, 2011, pp. 323–332.
5. Bernhard Korte and Jens Vygen, *Combinatorial optimization: Theory and algorithms*, 5th ed., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
6. Mikkel Sigurd and Martin Zachariasen, *Construction of minimum-weight spanners*, Algorithms – ESA 2004 (Susanne Albers and Tomasz Radzik, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 3221, Springer Berlin Heidelberg, 2004, pp. 797–808.