

# Algoritmos exatos para problemas de spanner em grafos <sup>1</sup>

Hugo Braga

Instituto de Matemática e Estatística  
Universidade de São Paulo  
Orientadora: Prof. Yoshiko Wakabayashi

Defesa de Doutorado  
14 de Dezembro de 2018

---

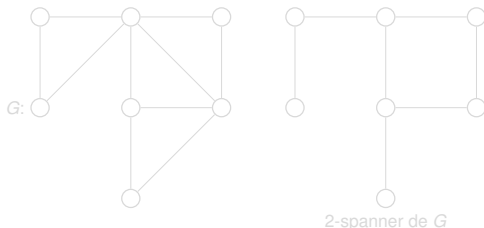
<sup>1</sup>Projeto financiado pela FAPESP (Proc. 2013/22875-9)

# Agenda

- 1 Introdução
- 2 Histórico
- 3 Árvore  $t$ -spanner
- 4  $t$ -spanner
- 5 Experimentos

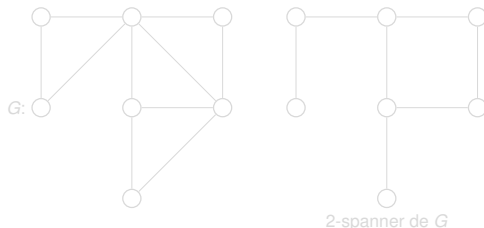
# Definição

- $G = (V, E)$  grafo conexo  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  pesos associados às arestas de  $G$   
 $t \geq 1$ , número real
- Dado  $(G, w, t)$
- Um  $t$ -spanner de  $G$  é um subgrafo gerador  $H$  de  $G$  t.q.  
$$\text{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \text{dist}_G(u, v), \quad \forall u, v \in V,$$
- $t$  - fator de dilatação
- Exemplo (com peso unitário):



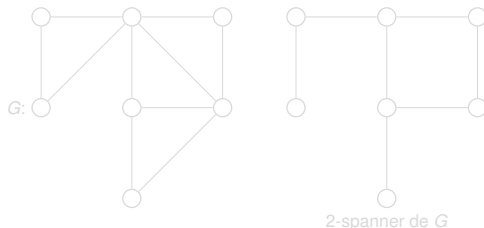
# Definição

- $G = (V, E)$  grafo conexo  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  pesos associados às arestas de  $G$   
 $t \geq 1$ , número real
- Dado  $(G, w, t)$
- Um  $t$ -spanner de  $G$  é um subgrafo gerador  $H$  de  $G$  t.q.  
$$\text{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \text{dist}_G(u, v), \quad \forall u, v \in V,$$
- $t$  - fator de dilatação
- Exemplo (com peso unitário):



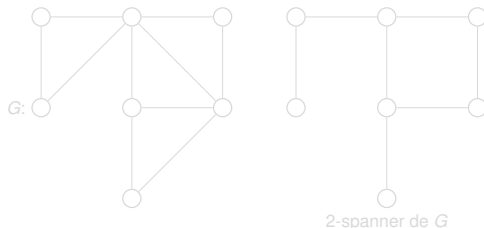
# Definição

- $G = (V, E)$  grafo conexo  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  pesos associados às arestas de  $G$   
 $t \geq 1$ , número real
- Dado  $(G, w, t)$
- Um  **$t$ -spanner** de  $G$  é um subgrafo gerador  $H$  de  $G$  t.q.  
$$\text{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \text{dist}_G(u, v), \quad \forall u, v \in V,$$
- $t$  - *fator de dilatação*
- Exemplo (com peso unitário):



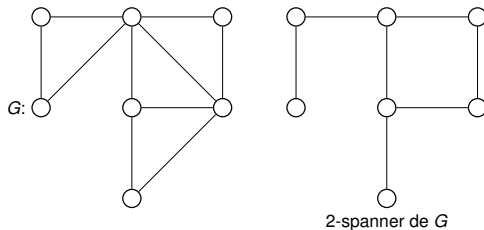
# Definição

- $G = (V, E)$  grafo conexo  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  pesos associados às arestas de  $G$   
 $t \geq 1$ , número real
- Dado  $(G, w, t)$
- Um  **$t$ -spanner** de  $G$  é um subgrafo gerador  $H$  de  $G$  t.q.  
$$\text{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \text{dist}_G(u, v), \quad \forall u, v \in V,$$
- $t$  - **fator de dilatação**
- Exemplo (com peso unitário):



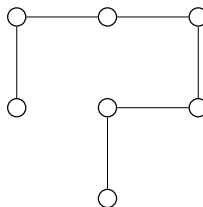
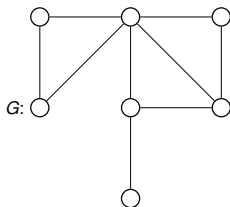
# Definição

- $G = (V, E)$  grafo conexo  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  pesos associados às arestas de  $G$   
 $t \geq 1$ , número real
- Dado  $(G, w, t)$
- Um  **$t$ -spanner** de  $G$  é um subgrafo gerador  $H$  de  $G$  t.q.  
$$\text{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \text{dist}_G(u, v), \quad \forall u, v \in V,$$
- $t$  - **fator de dilatação**
- Exemplo (com peso unitário):

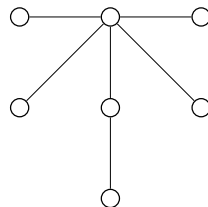


# Árvore $t$ -spanner

- $H$  é uma árvore  $\rightarrow H$  é uma **árvore  $t$ -spanner** de  $G$



Árvore 3-spanner de  $G$



Árvore 2-spanner de  $G$



# Problemas centrais

- **Árvore  $t$ -spanner de peso mínimo:**  
dado  $(G, w, t)$   
encontrar uma árvore  $t$ -spanner em  $G$  de peso mínimo
- **$t$ -spanner de peso mínimo:**  
dado  $(G, w, t)$   
encontrar um  $t$ -spanner em  $G$  de peso mínimo

# Problemas centrais

- **Árvore  $t$ -spanner de peso mínimo:**  
dado  $(G, w, t)$   
encontrar uma árvore  $t$ -spanner em  $G$  de peso mínimo
- **$t$ -spanner de peso mínimo:**  
dado  $(G, w, t)$   
encontrar um  $t$ -spanner em  $G$  de peso mínimo

# Aplicações

- Necessidade de economia de recursos ou computação rápida
- Computação distribuída

# Aplicações

- Necessidade de economia de recursos ou computação rápida
- Computação distribuída

# Histórico

- Peleg & Ullman, 1987: noção de spanner
- Peleg & Schäffer, 1989: spanner esparsa

# Histórico

- Peleg & Ullman, 1987: noção de spanner
- Peleg & Schäffer, 1989: spanner esparsa

# Complexidade

- **Árvore spanner de peso mínimo** (versão de decisão):
  - peso unitário:  $t \geq 4$  (fixo): **NP-completo**  
 $t = 3$ : **aberto**  
 $t = 2$ : **P**
  - peso arbitrário:  $t > 1$ : **NP-completo**

Cai & Corneil, 1995

# Complexidade

- **Árvore spanner de peso mínimo** (versão de decisão):
  - peso unitário:  $t \geq 4$  (fixo): **NP-completo**  
 $t = 3$ : **aberto**  
 $t = 2$ : **P**
  - peso arbitrário:  $t > 1$ : **NP-completo**

Cai & Corneil, 1995



# Complexidade

- $t$ -spanner de peso mínimo (versão de decisão):
  - peso unitário:  $t \geq 2$  (fixo): **NP-completo**

Cai, 1994

# Definição equivalente de spanner

- São equivalentes:
  - (a)  $\text{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \text{dist}_G(u, v) \quad \forall u, v \in V$
  - (b)  $\text{dist}_H(u, v) \leq t \cdot w_{uv} \quad \forall uv \in E$

Cai & Corneil, 1995

# Definição equivalente de spanner

- São equivalentes:
  - (a)  $\text{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \text{dist}_G(u, v) \quad \forall u, v \in V$
  - (b)  $\text{dist}_H(u, v) \leq t \cdot w_{uv} \quad \forall uv \in E$

Cai & Corneil, 1995

# Formulações

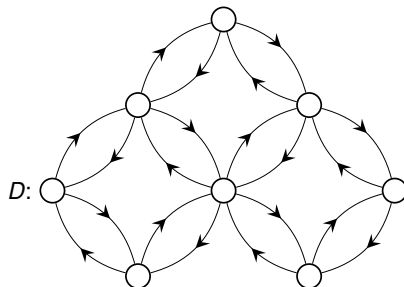
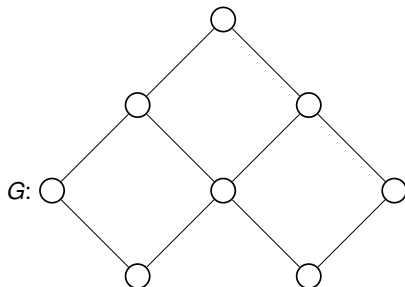
Árvore  $t$ -spanner de peso mínimo

# Poliedro das árvores $t$ -spanner

$F \subseteq E : G[F] : \text{subgrafo de } G \text{ induzido por } F$

$$P_{tree}(G, t) := \text{conv}\{\mathcal{X}^F \in \mathbb{R}^{|E|} \mid G[F] \text{ é uma árvore } t\text{-spanner}\}$$

# Grafo $G$ e correspondente digrafo $D$



# Subgrafo enraizado em $r$

- $G = (V, E)$ ,  $D = (V, A)$
- Fixe  $r \in V$   
 $z^r = (z_{ij}^r)_{ij \in A}$

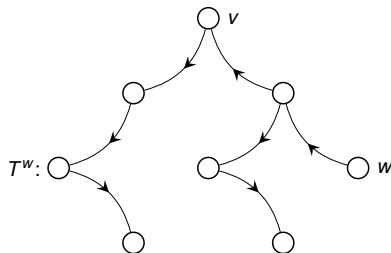
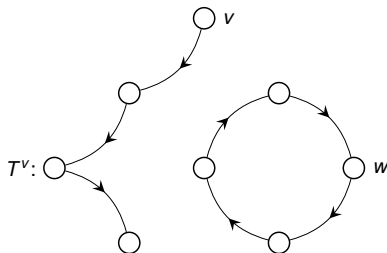
$$\sum_{i \in \delta^-(j)} z_{ij}^r = 1 \quad \forall j \in V \setminus \{r\} \quad (1)$$

$$\sum_{i \in \delta^-(r)} z_{ir}^r = 0 \quad (2)$$

$$z_{ij}^r \in \{0, 1\} \quad \forall ij \in A \quad (3)$$

# Subgrafos $T^v$ e $T^w$

- Seja  $\tilde{z}^r$  ponto satisfaz sistema anterior
- $T^r \subseteq D$  t.q.  $A(T^r) = \{ij \in A : \tilde{z}_{ij}^r = 1\}$





# Relacionando os subgrafos $T^r$

- $x \in \{0, 1\}^{|E|}$

Para cada  $e \in E$ ,  $x(e) = 1$  sse  $e$  faz parte da solução

$$\sum_{i \in \delta^-(j)} z_{ij}^r = 1 \quad \forall r \in V, \forall j \in V \setminus \{r\}$$

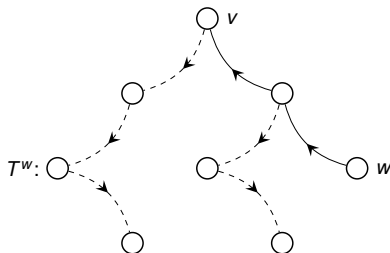
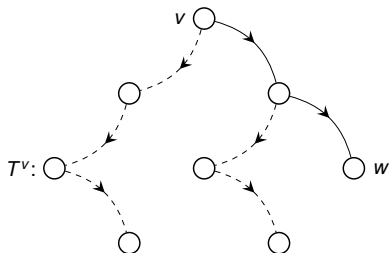
$$\sum_{i \in \delta^-(r)} z_{ir}^r = 0 \quad \forall r \in V$$

$$x_e = z_{ij}^r + z_{ji}^r \quad \forall r \in V, \forall e = \{i, j\} \in E \quad (4)$$

$$x_e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E \quad (5)$$

$$z_{ij}^r \in \{0, 1\} \quad \forall r \in V, ij \in A$$

# Arborescências $T^v$ e $T^w$ se sobrepondo



# Representando os caminhos $t$ -spanner

- Seja  $(\tilde{z}, \tilde{x})$  um ponto que satisfaz o sistema anterior
- Seja  $r \in V$
- $T \subseteq G$  o **grafo subjacente** a  $T^r$  t.q.  
 $E(T) = \{\{i, j\} \in E : ij \in T^r \text{ ou } ji \in T^r\}$
- $\forall u, v \in V$ , seja  $T_{u,v}$  o caminho entre  $u$  e  $v$  em  $T$
- $y \in \mathbb{R}^{|E| \times |E|} : \forall f = uv, e \in E, y_e^{uv} = 1 \Leftrightarrow f \in T_{u,v}$

# Representando os caminhos $t$ -spanner

- Seja  $(\tilde{z}, \tilde{x})$  um ponto que satisfaz o sistema anterior
- Seja  $r \in V$
- $T \subseteq G$  o **grafo subjacente** a  $T^r$  t.q.  
 $E(T) = \{\{i, j\} \in E : ij \in T^r \text{ ou } ji \in T^r\}$
- $\forall u, v \in V$ , seja  $T_{u,v}$  o caminho entre  $u$  e  $v$  em  $T$
- $y \in \mathbb{R}^{|E| \times |E|} : \forall f = uv, e \in E, y_e^{uv} = 1 \Leftrightarrow f \in T_{u,v}$

# Representando os caminhos $t$ -spanner

- Seja  $(\tilde{z}, \tilde{x})$  um ponto que satisfaz o sistema anterior
- Seja  $r \in V$
- $T \subseteq G$  o **grafo subjacente** a  $T^r$  t.q.  
 $E(T) = \{\{i, j\} \in E : ij \in T^r \text{ ou } ji \in T^r\}$
- $\forall u, v \in V$ , seja  $T_{u,v}$  o caminho entre  $u$  e  $v$  em  $T$
- $y \in \mathbb{R}^{|E| \times |E|}$ :  $\forall f = uv, e \in E, y_e^{uv} = 1 \Leftrightarrow f \in T_{u,v}$

# Representando os caminhos $t$ -spanner

- Seja  $(\tilde{z}, \tilde{x})$  um ponto que satisfaz o sistema anterior
- Seja  $r \in V$
- $T \subseteq G$  o **grafo subjacente** a  $T^r$  t.q.  
 $E(T) = \{\{i, j\} \in E : ij \in T^r \text{ ou } ji \in T^r\}$
- $\forall u, v \in V$ , seja  $T_{u,v}$  o caminho entre  $u$  e  $v$  em  $T$
- $y \in \mathbb{R}^{|E| \times |E|}$ :  $\forall f = uv, e \in E, y_e^{uv} = 1 \Leftrightarrow f \in T_{u,v}$

# Formulação 1: sem rótulos para distâncias

$$\min \sum_{e \in E} w_e x_e$$

s.t.

$$\sum_{i \in \delta^-(j)} z_{ij}^f = 1 \quad \forall r \in V, \forall j \in V \setminus \{r\} \quad (6)$$

$$\sum_{i \in \delta^-(r)} z_{ir}^f = 0 \quad \forall r \in V \quad (7)$$

$$\sum_{e \in E} x_e = |V| - 1 \quad (8)$$

$$x_e = z_{ij}^f + z_{ji}^f \quad \forall r \in V, \forall e = \{i, j\} \in E \quad (9)$$

$$z_{ij}^u - z_{ij}^v \leq y_e^{uv} \leq z_{ij}^u + z_{ij}^v \quad \forall uv \in E, \forall e = \{i, j\} \in E \quad (10)$$

$$z_{ji}^u - z_{ji}^v \leq y_e^{uv} \leq z_{ji}^u + z_{ji}^v \quad \forall uv \in E, \forall e = \{i, j\} \in E \quad (11)$$

$$\sum_{e \in E} w_e y_e^{uv} \leq t \cdot w_{uv} \quad \forall uv \in E \quad (12)$$

$$x_e \in \{0, 1\}, y_e^f \in \{0, 1\}, z_{ij}^v \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E, \forall f \in E, \forall v \in V, \forall ij \in A \quad (13)$$

## Formulação 2

- Os seguintes elementos são definidos da mesma forma como na Formulação 1:
  - $G = (V, E), D = (V, A)$
  - Variáveis:
    - $x_e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E$
    - $z_{ij}^v \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V, \forall ij \in A$
    - $T^v \quad \forall v \in V$



## Formulação 2

- Os seguintes elementos são definidos da mesma forma como na Formulação 1:
  - $G = (V, E)$ ,  $D = (V, A)$
  - Variáveis:
    - $x_e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E$
    - $z_{ij}^v \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V, \forall ij \in A$
    - $T^v \quad \forall v \in V$

## Formulação 2

- Os seguintes elementos são definidos da mesma forma como na Formulação 1:
  - $G = (V, E)$ ,  $D = (V, A)$
  - Variáveis:
    - $x_e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E$
    - $z_{ij}^v \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V, \forall ij \in A$
    - $T^v \quad \forall v \in V$

## Formulação 2

- Os seguintes elementos são definidos da mesma forma como na Formulação 1:
  - $G = (V, E)$ ,  $D = (V, A)$
  - Variáveis:
    - $x_e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E$
    - $z_{ij}^v \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V, \forall ij \in A$
    - $T^v \quad \forall v \in V$

# Variável que representa distância

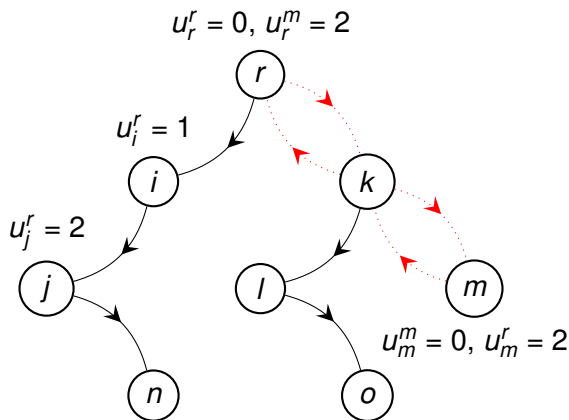
- Para cada  $r \in V$ ,  $u^r \in \mathbb{R}^{|V|}$
- Para cada  $i \in V$  :
  - $u_i^r$ : distância entre  $r$  e  $i$  em  $T^r$
  - $M_{ij}^r$ : limite superior para  $u_i^r - u_j^r$

# Variável que representa distância

- Para cada  $r \in V$ ,  $u^r \in \mathbb{R}^{|V|}$
- Para cada  $i \in V$  :
  - $u_i^r$ : distância entre  $r$  e  $i$  em  $T^r$
  - $M_{ij}^r$ : limite superior para  $u_i^r - u_j^r$

# Variável que representa distância

Exemplo (peso unitário):



# Formulação 2: com rótulos para distâncias

$$\min \sum_{e \in E} w_e x_e$$

s.t.

$$\sum_{i \in \delta^-(j)} z_{ij}^r = 1$$

$$\forall r \in V, \forall j \in V \setminus \{r\}$$

$$\sum_{i \in \delta^-(r)} z_{ir}^r = 0$$

$$\forall r \in V$$

$$\sum_{e \in E} x_e = |V| - 1$$

$$x_e = z_{ij}^r + z_{ji}^r$$

$$\forall r \in V, \forall e = \{i, j\} \in E$$

$$u_i^r - u_j^r + (M_{ij} + w_{ij})z_{ij}^r + (M_{ij} - w_{ij})z_{ji}^r \leq M_{ij}$$

$$\forall r \in V, \forall ij \in A, j \neq r$$

$$u_i^r + (M_{ir} - w_{ir})z_{ri}^r \leq M_{ir}$$

$$\forall r \in V, \forall ri \in A$$

$$u_r^r = 0$$

$$\forall r \in V$$

$$u_i^j = u_j^i \leq t \cdot w_{ij}$$

$$\forall ij \in E$$

$$x \in \{0, 1\}^{|E|}, z^r \in \{0, 1\}^{|E| \times |E|}, u^r \in \mathbb{R}^{|V|}$$

$$\forall r \in V$$

# Formulação

$t$ -spanner de peso mínimo



# Poliedro dos grafos $t$ -spanner

$$P_{span}(G, t) := \text{conv}\{\mathcal{X}^F \in \mathbb{R}^{|E|} \mid G[F] \text{ é um } t\text{-spanner de } G\}$$

# Variáveis de decisão

- Interessados em  $F \subseteq E$  tais que  $\mathcal{X}^F \in P_{span}(G, t)$
- Para  $u, v \in V$ :  $\mathcal{P}_{u,v}^t(G[F])$  - conjunto de caminhos  $t$ -spanner entre  $u$  e  $v$  em  $G[F]$
- Variáveis de decisão:
  - $x \in \mathbb{R}^{|E|}$ :  $\forall e \in E, x(e) = 1$  sse  $e \in F$
  - $Y \in \mathbb{R}^{|E| \times |E|}$ :  $\forall e = uv \in E$  deve existir  $P \in \mathcal{P}_{u,v}^t(G[F])$  t.q.  
 $Y(e, f) = 1, \forall f \in E(P)$
  - $\forall e = uv \in E, \forall f \in E, Y(e, f) \in \Sigma_{u,v}(Y(e, e))$

# Variáveis de decisão

- Interessados em  $F \subseteq E$  tais que  $\mathcal{X}^F \in P_{span}(G, t)$
- Para  $u, v \in V$ :  $\mathcal{P}_{u,v}^t(G[F])$  - conjunto de caminhos  $t$ -spanner entre  $u$  e  $v$  em  $G[F]$
- Variáveis de decisão:
  - $x \in \mathbb{R}^{|E|}$ :  $\forall e \in E, x(e) = 1$  sse  $e \in F$
  - $Y \in \mathbb{R}^{|E| \times |E|}$ :  $\forall e = uv \in E$  deve existir  $P \in \mathcal{P}_{u,v}^t(G[F])$  t.q.  
 $Y(e, f) = 1, \forall f \in E(P)$
  - $\forall e = uv \in E, \forall f \in E, Y(e, f) = \sum_{P \in \mathcal{P}_{u,v}^t(G[F])} Y(P, f)$

# Variáveis de decisão

- Interessados em  $F \subseteq E$  tais que  $\mathcal{X}^F \in P_{span}(G, t)$
- Para  $u, v \in V$ :  $\mathcal{P}_{u,v}^t(G[F])$  - conjunto de caminhos  $t$ -spanner entre  $u$  e  $v$  em  $G[F]$
- Variáveis de decisão:
  - $x \in \mathbb{R}^{|E|}$ :  $\forall e \in E, x(e) = 1$  sse  $e \in F$
  - $Y \in \mathbb{R}^{|E| \times |E|}$ :  $\forall e = uv \in E$  deve existir  $P \in \mathcal{P}_{u,v}^t(G[F])$  t.q.  
 $Y(e, f) = 1, \forall f \in E(P)$ 
    - Para  $J \subseteq E$ , seja  $Y(e, J) := \sum_{f \in J} Y(e, f)$

# Variáveis de decisão

- Interessados em  $F \subseteq E$  tais que  $\mathcal{X}^F \in P_{span}(G, t)$
- Para  $u, v \in V$ :  $\mathcal{P}_{u,v}^t(G[F])$  - conjunto de caminhos  $t$ -spanner entre  $u$  e  $v$  em  $G[F]$
- Variáveis de decisão:
  - $x \in \mathbb{R}^{|E|}$ :  $\forall e \in E, x(e) = 1$  sse  $e \in F$
  - $Y \in \mathbb{R}^{|E| \times |E|}$ :  $\forall e = uv \in E$  deve existir  $P \in \mathcal{P}_{u,v}^t(G[F])$  t.q.  
 $Y(e, f) = 1, \forall f \in E(P)$ 
    - Para  $J \subseteq E$ , seja  $Y(e, J) := \sum_{f \in J} Y(e, f)$

# Variáveis de decisão

- Interessados em  $F \subseteq E$  tais que  $\mathcal{X}^F \in P_{span}(G, t)$
- Para  $u, v \in V$ :  $\mathcal{P}_{u,v}^t(G[F])$  - conjunto de caminhos  $t$ -spanner entre  $u$  e  $v$  em  $G[F]$
- Variáveis de decisão:
  - $x \in \mathbb{R}^{|E|}$ :  $\forall e \in E, x(e) = 1$  sse  $e \in F$
  - $Y \in \mathbb{R}^{|E| \times |E|}$ :  $\forall e = uv \in E$  deve existir  $P \in \mathcal{P}_{u,v}^t(G[F])$  t.q.  
 $Y(e, f) = 1, \forall f \in E(P)$ 
    - Para  $J \subseteq E$ , seja  $Y(e, J) := \sum_{f \in J} Y(e, f)$

# Formulação

$$Y(e, \delta(W)) \geq 1 \quad \forall e \in E, \forall W \subset V \text{ com } e \in \delta(W) \quad (14)$$

$$Y(e, f) \leq x(f) \quad \forall e, f \in E \quad (15)$$

$$\sum_{f \in E} w_f Y(e, f) \leq t \cdot w_e \quad \forall e \in E \quad (16)$$

$$0 \leq x(e) \leq 1 \quad \forall e \in E \quad (17)$$

$$0 \leq Y(e, f) \leq 1 \quad \forall e, f \in E \quad (18)$$

$$P(G, t) = \{(x, Y) : x \in \mathbb{R}^{|E|}, Y \in \mathbb{R}^{|E| \times |E|} \mid (x, Y) \text{ satisfaz (14) - (18)}\}$$

# Correspondência entre $P_{span}(G, t)$ e $P(G, t)$

Seja  $P_x(G, t) = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid \exists Y \in \mathbb{R}^{|E| \times |E|} \text{ t.q. } (x, Y) \in P(G, t)\}$

## Proposição 1

$$(P_x(G, t))_I = P_{span}(G, t).$$



# Separação das inequações de corte

- Inequações (14): número exponencial
- Inequações (14) podem ser separadas em tempo polinomial

# Separação das inequações de corte

- Inequações (14): número exponencial
- Inequações (14) podem ser separadas em tempo polinomial

## Geração de colunas

Algoritmo de *branch-and-price*

# Formulação linear para o $t$ -spanner

$$(1) \quad \min \sum_{e \in E} w_e x_e$$

s.t.

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_{u,v}^t} \delta_p^e y_p \leq x_e \quad \forall e \in E, \forall uv \in E \quad (19)$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_{u,v}^t} y_p \geq 1 \quad \forall uv \in E \quad (20)$$

$$x_e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E \quad (21)$$

$$y_p \in \{0, 1\} \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (22)$$

Sigurd e Zachariasen, 2004

# Pricing

- $\forall uv, e \in E$ , sejam  $\pi_e^{u,v}$  e  $\sigma_{u,v}$  variáveis duais de (19) e (20).
- Custo reduzido:

$$c_p^{\pi, \sigma} = \sum_{e \in E} \delta_p^e \pi_e^{u,v} - \sigma_{u,v}, \quad \forall uv \in E, \forall p \in \mathcal{P}_{u,v}^t.$$

- Pricing:

$$\min_{p \in \mathcal{P}_{u,v}^t} \sum_{e \in E} \delta_p^e \pi_e^{u,v} - \sigma_{u,v}$$

- Problema do caminho mínimo restrito (CSPP)

# Pricing

- $\forall uv, e \in E$ , sejam  $\pi_e^{u,v}$  e  $\sigma_{u,v}$  variáveis duais de (19) e (20).
- Custo reduzido:

$$c_p^{\pi, \sigma} = \sum_{e \in E} \delta_p^e \pi_e^{u,v} - \sigma_{u,v}, \quad \forall uv \in E, \forall p \in \mathcal{P}_{u,v}^t.$$

- Pricing:

$$\min_{p \in \mathcal{P}_{u,v}^t} \sum_{e \in E} \delta_p^e \pi_e^{u,v} - \sigma_{u,v}$$

- Problema do caminho mínimo restrito (CSPP)

# Pricing

- $\forall uv, e \in E$ , sejam  $\pi_e^{u,v}$  e  $\sigma_{u,v}$  variáveis duais de (19) e (20).
- Custo reduzido:

$$c_p^{\pi, \sigma} = \sum_{e \in E} \delta_p^e \pi_e^{u,v} - \sigma_{u,v}, \quad \forall uv \in E, \forall p \in \mathcal{P}_{u,v}^t.$$

- Pricing:

$$\min_{p \in \mathcal{P}_{u,v}^t} \sum_{e \in E} \delta_p^e \pi_e^{u,v} - \sigma_{u,v}$$

- Problema do caminho mínimo restrito (CSPP)

# Heurística primal

- Algoritmo Guloso de Althöfer et al., 1993
  - Ordena arestas por peso de maneira não-decrescente
  - Aresta é adicionada se  $\nexists$  caminho  $t$ -spanner entre extremos



# Heurística primal

- Algoritmo Guloso de Althöfer et al., 1993
  - Ordena arestas por peso de maneira não-decrescente
  - Aresta é adicionada se  $\nexists$  caminho  $t$ -spanner entre extremos

# Heurística primal

- Algoritmo Guloso de Althöfer et al., 1993
  - Ordena arestas por peso de maneira não-decrescente
  - Aresta é adicionada se  $\nexists$  caminho  $t$ -spanner entre extremos

# Estratégias

- Variável fracionária: variável cujo valor está mais próximo de 0,50
- Próximo nó da árvore de B&B: nó que possui menor limitante inferior

# Estratégias

- Variável fracionária: variável cujo valor está mais próximo de 0,50
- Próximo nó da árvore de B&B: nó que possui menor limitante inferior

# Experimentos

Resultados computacionais

# Objetivos

- Comparação das formulações exatas propostas para o problema de árvore  $t$ -spanner
- Análise do desempenho do algoritmo de *branch-and-price* para o problema de  $t$ -spanner

# Objetivos

- Comparação das formulações exatas propostas para o problema de árvore  $t$ -spanner
- Análise do desempenho do algoritmo de *branch-and-price* para o problema de  $t$ -spanner

# Parâmetros

- **Ordem**
- Densidade
- Tipo do grafo (peso unitário, distância euclidiana, peso aleatório)
  - Peso aleatório:
    - mais dispersos:  $\{1, 2, 4, 8, 16\}$
    - menos dispersos:  $\{1, 2, 3\}$
- Fator de dilatação
- Grau médio
- Tempo limite



# Parâmetros

- Ordem
- Densidade
- Tipo do grafo (peso unitário, distância euclidiana, peso aleatório)
  - Peso aleatório:
    - peso exponencial:  $\{1, 2, 4, 8, 16\}$
    - pesos negativos:  $\{1, 2, 3\}$
- Fator de dilatação
- Grau médio
- Tempo limite

# Parâmetros

- Ordem
- Densidade
- Tipo do grafo (peso unitário, distância euclidiana, peso aleatório)
  - Peso aleatório:
    - mais espaçado:  $\{1, 2, 4, 8, 16\}$
    - menos espaçado:  $\{1, 2, 3\}$
- Fator de dilatação
- Grau médio
- Tempo limite

# Parâmetros

- Ordem
- Densidade
- Tipo do grafo (peso unitário, distância euclidiana, peso aleatório)
  - Peso aleatório:
    - mais espaçado:  $\{1, 2, 4, 8, 16\}$
    - menos espaçado:  $\{1, 2, 3\}$
- Fator de dilatação
- Grau médio
- Tempo limite

# Parâmetros

- Ordem
- Densidade
- Tipo do grafo (peso unitário, distância euclidiana, peso aleatório)
  - Peso aleatório:
    - mais espaçado:  $\{1, 2, 4, 8, 16\}$
    - menos espaçado:  $\{1, 2, 3\}$
- Fator de dilatação
- Grau médio
- Tempo limite

# Parâmetros

- Ordem
- Densidade
- Tipo do grafo (peso unitário, distância euclidiana, peso aleatório)
  - Peso aleatório:
    - mais espaçado:  $\{1, 2, 4, 8, 16\}$
    - menos espaçado:  $\{1, 2, 3\}$
- Fator de dilatação
- Grau médio
- Tempo limite

# Parâmetros

- Ordem
- Densidade
- Tipo do grafo (peso unitário, distância euclidiana, peso aleatório)
  - Peso aleatório:
    - mais espaçado:  $\{1, 2, 4, 8, 16\}$
    - menos espaçado:  $\{1, 2, 3\}$
- Fator de dilatação
- Grau médio
- Tempo limite

# Parâmetros

- Ordem
- Densidade
- Tipo do grafo (peso unitário, distância euclidiana, peso aleatório)
  - Peso aleatório:
    - mais espaçado:  $\{1, 2, 4, 8, 16\}$
    - menos espaçado:  $\{1, 2, 3\}$
- Fator de dilatação
- Grau médio
- Tempo limite

# Parte I

Árvore  $t$ -spanner de peso mínimo



# Quantidade de instâncias resolvidas

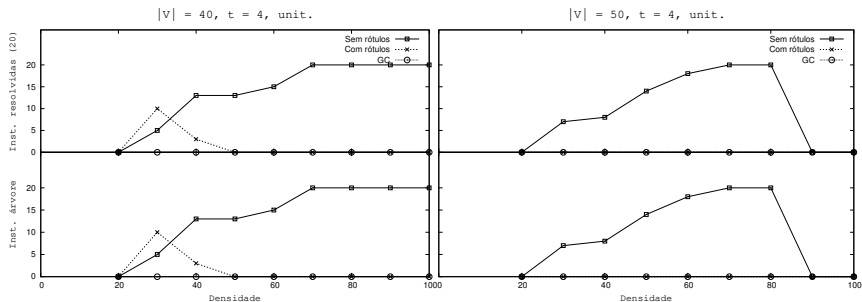


Figura 1

- Comportamento semelhante para  $t = 3$

# Quantidade de instâncias resolvidas

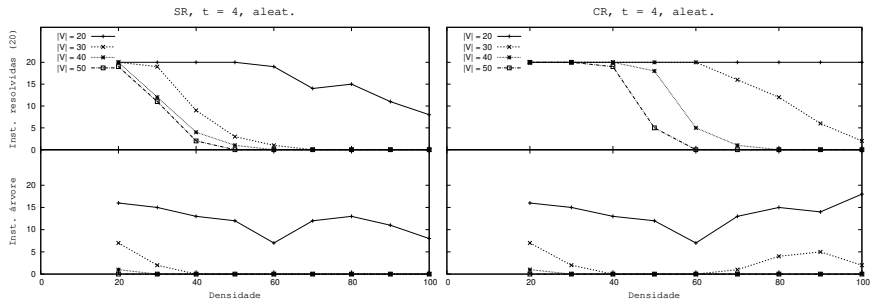


Figura 2

- Comportamento é semelhante para pesos aleatórios menos espaçados

# Maior tempo e ordem e menor $t$

- Maior tempo limite de execução
  - peso aleat. menos espaçado: CR e SR se comportam da mesma forma
- Valores maiores de ordem
  - peso aleat. menos espaçado: CR e SR se comportam da mesma forma
- Menor  $t$ 
  - CR: todas as instâncias resolvidas em menos de 3s
  - SR: tempo de execução bem maior

# Maior tempo e ordem e menor $t$

- Maior tempo limite de execução
  - peso aleat. menos espaçado: CR e SR se comportam da mesma forma
- Valores maiores de ordem
  - peso aleat. menos espaçado: CR e SR se comportam da mesma forma
- Menor  $t$ 
  - CR: todas as instâncias resolvidas em menos de 3s
  - SR: tempo de execução bem maior

# Maior tempo e ordem e menor $t$

- Maior tempo limite de execução
  - peso aleat. menos espaçado: CR e SR se comportam da mesma forma
- Valores maiores de ordem
  - peso aleat. menos espaçado: CR e SR se comportam da mesma forma
- Menor  $t$ 
  - CR: todas as instâncias resolvidas em menos de 3s
  - SR: tempo de execução bem maior

# Recomendação de uso das formulações SR e CR

		$t$ baixo		$t$ alto	
		P. unit.	P. aleat.	P. unit.	P. aleat.
Dens. alta	Ord. grande	SR	CR	SR	=
	Ord. peq.	SR (CR)	CR	CR	CR
Dens. baixa	Ord. grande	CR	CR	SR	CR (SR)
	Ord. peq.	CR	CR	CR (SR)	CR

## Parte II

$t$ -spanner de peso mínimo

# Variando grau

Grau Ordem	4						8					
	16	32	64	80	90	100	16	32	64	80	90	100
$t = 1, 1$	(10)	(10)	(10)	-	-	-	(10)	(10)	(10)	-	-	-
$t = 2$	(10)	(10)	(10)	-	-	-	(10)	(10)	6,41(10)	-	-	-
$t = 3$	(10)	(10)	10,19(10)	7,82(10)	7,74(10)	202,48(10)	(10)	289,66(10)	133,77 (7)	591,47 (8)	371,99 (6)	1146,85 (5)
$t = 4$	(10)	(10)	99,77(10)	-	-	-	22,66(10)	709,67 (6)	1157,00 (1)	-	-	-

Tabela 1: Peso aleatório

Grau Ordem	4						8					
	16	32	64	80	90	100	16	32	64	80	90	100
$t = 1, 1$	(10)	(10)	(10)	-	-	-	(10)	(10)	(10)	-	-	-
$t = 2$	(10)	(10)	(10)	-	-	-	(10)	(10)	5,39(10)	-	-	-
$t = 3$	(10)	(10)	(10)	5,29(10)	(10)	7,76(10)	(10)	49,22(10)	675,01 (9)	744,80 (9)	596,49(10)	667,04 (8)
$t = 4$	(10)	6,12(10)	312,17(10)	-	-	-	163,91(10)	1708,26 (7)	0	-	-	-

Tabela 2: Distância euclidiana



# Resultados

- Variando grau:
  - Com peso:
    - $t = 2$ : GC é melhor com distância euclidiana
    - $t = 3$ : GC é melhor com distância euclidiana
    - $t = 4$ : GC é melhor com pesos aleatórios
- Variando densidade:
  - Sem peso:
    - $t = 2$ : GC é melhor com distância euclidiana
    - $t = 3$ : GC é melhor com pesos aleatórios
    - $t = 4$ : GC é melhor com pesos aleatórios

# Resultados

- Variando grau:
  - Com peso:
    - $t = 2$ : GC é melhor com distância euclidiana
    - $t = 3$ : GC é melhor com distância euclidiana
    - $t = 4$ : GC é melhor com pesos aleatórios
- Variando densidade:
  - Sem peso:
    - $t = 2$ : GC é melhor com distância euclidiana
    - $t = 3$ : GC é melhor com pesos aleatórios
    - $t = 4$ : GC é melhor com pesos aleatórios

Obrigado

# Histórico

- 1992 - 1995: resultados clássicos de complexidade.
- 1993 - 2001: classes específicas de grafos.
- 2001 - 2008: (in)aproximabilidade para classes gerais.
- 2009 - 2014: algoritmos de aproximação baseados em PL.
- 2015 - 2018: spanners distribuídos, oráculos de distância e spanners esparsos.

# Histórico

- 1992 - 1995: resultados clássicos de complexidade.
- 1993 - 2001: classes específicas de grafos.
- 2001 - 2008: (in)aproximabilidade para classes gerais.
- 2009 - 2014: algoritmos de aproximação baseados em PL.
- 2015 - 2018: spanners distribuídos, oráculos de distância e spanners esparsos.

# Histórico

- 1992 - 1995: resultados clássicos de complexidade.
- 1993 - 2001: classes específicas de grafos.
- 2001 - 2008: (in)aproximabilidade para classes gerais.
- 2009 - 2014: algoritmos de aproximação baseados em PL.
- 2015 - 2018: spanners distribuídos, oráculos de distância e spanners esparsos.

# Histórico

- 1992 - 1995: resultados clássicos de complexidade.
- 1993 - 2001: classes específicas de grafos.
- 2001 - 2008: (in)aproximabilidade para classes gerais.
- 2009 - 2014: algoritmos de aproximação baseados em PL.
- 2015 - 2018: spanners distribuídos, oráculos de distância e spanners esparsos.

# Histórico

- 1992 - 1995: resultados clássicos de complexidade.
- 1993 - 2001: classes específicas de grafos.
- 2001 - 2008: (in)aproximabilidade para classes gerais.
- 2009 - 2014: algoritmos de aproximação baseados em PL.
- 2015 - 2018: spanners distribuídos, oráculos de distância e spanners esparsos.



# Definições equivalentes de spanner

- Afirmações equivalentes:
  - (a)  $H$  é um  $t$ -spanner de  $G$ , isto é,  $H$  satisfaz (3);
  - (b)  $\text{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \text{dist}_G(u, v) \forall uv \in E$ ;
  - (b')  $\text{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \text{dist}_G(u, v) \forall uv \in E \setminus E(H)$ ;
  - (c)  $\text{dist}_H(u, v) \leq t \cdot w_{uv} \forall uv \in E$ .
  - (c')  $\text{dist}_H(u, v) \leq t \cdot w_{uv} \forall uv \in E \setminus E(H)$ .

# Significado da variável $y$

- $\forall u, v \in V$ , seja  $T_{u,v}$  o caminho entre  $u$  e  $v$  em  $T$ .
- $\forall uv, ij \in E$ :

$$d_{ij}^{uv} := z_{ij}^u - z_{ij}^v$$

$$s_{ij}^{uv} := z_{ij}^u + z_{ij}^v$$

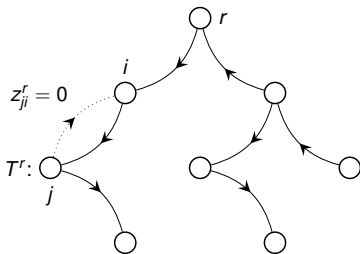
$d_{ij}^{uv}$	$s_{ij}^{uv}$	$z_{ij}^u$	$z_{ij}^v$	$z_{ji}^u$	$z_{ji}^v$	$d_{ji}^{uv}$	$s_{ji}^{uv}$
1	1	1	0	0	1	-1	1
-1	1	0	1	1	0	1	1
0	2	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	2
0	0	0	0	0	0	0	0

$$d_{ij}^{uv} \leq y_e^{uv} \leq s_{ij}^{uv} \quad \forall uv \in E, \forall e = \{i, j\} \in E \quad (23)$$

$$d_{ji}^{uv} \leq y_e^{uv} \leq s_{ji}^{uv} \quad \forall uv \in E, \forall e = \{i, j\} \in E \quad (24)$$

$$y_e^{uv} = 1 \Leftrightarrow e \in T_{u,v}. \quad (25)$$

# Significado da variável $u^r$



- Ineq. ?? com relação ao arco  $ij$  :

$$u_i^r - u_j^r + (M_{ij}^r + w_{ij}) \cdot 1 + (M_{ij}^r - w_{ij}) \cdot 0 \leq M_{ij}^r \Rightarrow u_j^r \geq u_i^r + w_{ij}.$$

- Ineq. ?? com relação ao arco  $ji$  :

$$u_j^r - u_i^r + (M_{ji}^r + w_{ij}) \cdot 0 + (M_{ji}^r - w_{ij}) \cdot 1 \leq M_{ji}^r \Rightarrow u_j^r \leq u_i^r + w_{ij}.$$

$$u_j^r = u_i^r + w_{ij}.$$

# Heurística primal

---

## Algoritmo 5.1: Partição básica

---

**Input** :  $G = (V, E)$ , onde  $|V| = n$ , e um inteiro positivo  $k$

**Output**: partição  $\mathcal{T}$  de  $V$

$\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$ ;

Seja  $G' = (V', E')$  um grafo isomorfo a  $G$ ;

**while**  $V' \neq \emptyset$  **do**

    Selecione um vértice arbitrário  $v' \in V'$ ;

$S' \leftarrow \{v'\}$ ;

**while**  $|\Gamma^{ver}(S')| < n^{1/k}|S'|$  **do**

$S' \leftarrow \Gamma^{ver}(S')$ ;

**end**

    Seja  $S = \{v \in V \mid \exists v' \in$

$S' \text{ t.q. } v' \text{ é o vértice correspondente a } v \text{ no isomorfismo}\}$ ;

$\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{T} \cup \{S\}$ ;

$V' \leftarrow V' \setminus S'$ ;

**end**

---

# Heurística primal

---

## Algoritmo 5.2: Spanner baseado em partição em clusters

---

**Input** :  $G = (V, E)$ , inteiro positivo  $k$

**Output**: Um grafo  $G' = (V, E')$  que é um  $(2k - 1)$ -spanner de  $G$  com no máximo  $O(n^{1+1/k})$  arestas

---

- 1 Construir uma partição  $\mathcal{T}$  de  $V$  usando o Algoritmo 5.1 (Partição básica);
  - 2 **foreach**  $S_i \in \mathcal{T}$  **do**
  - 3      $T_i \leftarrow$  uma árvore de caminhos mínimos de  $G[S_i]$  enraizada em algum vértice;
  - 4  $E' \leftarrow \bigcup_{S_i \in \mathcal{T}} E(T_i)$ ;
  - 5  $\check{E} \leftarrow \emptyset$ ;
  - 6 **foreach**  $S_i \in \mathcal{T}$  **do**
  - 7     **foreach**  $v \in \Gamma^{ver}(S_i) \setminus S_i$  **do**
  - 8         Seja  $u \in S_i$  t.q.  $uv \in E$ ;
  - 9          $\check{E} \leftarrow \check{E} \cup uv$ ;
  - 10  $E' \leftarrow E' \cup \check{E}$ ;
-

# Spanner baseado em partição de clusters

## Teorema 1

*O Algoritmo 5.2 aplicado a um grafo  $G$  de ordem  $n$ , e um inteiro positivo  $k$ , constrói um  $(2k - 1)$ -spanner de  $G$  com no máximo  $O(n^{1+1/k})$  arestas.*

## Outra heurística primal

---

**Algoritmo 5.3:** Algoritmo Guloso de Althöfer et al.

---

**Input** :  $G = (V, E)$  com pesos não-negativos nas arestas,  
real  $t \geq 1$

**Output:**  $t$ -spanner  $G'$  de  $G$  com peso pequeno

Ordene as arestas de  $E$  em ordem não-decrescente de  
seus pesos;

$G' \leftarrow (V, E')$ , onde  $E' = \emptyset$ ;

**foreach**  $e = uv \in E$  **do**

**if**  $t \cdot w(e) < \text{dist}_{G'}(u, v)$  **then**  $E' \leftarrow E' \cup e$ ;

**end**

---

# Heurística dual

---

**Algoritmo 5.4:** MST baseada nas arestas fixadas pelo B&B

---

**Input** :  $G = (V, E)$ ,  $E_0 \subset E$ ,  $E_1 \subset E$ ,  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$

**Output** : limitante dual para a tripla  $(G, E_0, E_1)$

/\*  $E_0$ : conjunto das arestas fixadas em 0;  $E_1$ : conjunto das arestas fixadas em 1. \*/

$LD \leftarrow \sum_{e \in E_1} w(e);$

Seja  $G_1 = (V, E_1)$ , e  $\mathcal{C}$  o conjunto dos componentes de  $G_1$ ;

Seja  $G_1^c = (V_1^c, E_1^c)$  o grafo assim definido:

$V_1^c = \{C_i \mid C_i \in \mathcal{C}\};$

$E_1^c = \{C_i C_j \mid C_i, C_j \in \mathcal{C}, i \neq j, \text{ e } \exists x, y \in V(G) \text{ t.q. } x \in$

$V(C_i), y \in V(C_j), xy \in E(G), xy \notin E_0\};$

$T \leftarrow \text{MST}(G_1^c);$

$LD \leftarrow LD + \sum_{e \in E(T)} w(e);$

**return**  $LD$ .

---



## Custo reduzido

### Teorema 2

*Considere  $x$  uma solução viável básica associada a uma matrix base  $B$ , e seja  $\tilde{c}$  o vetor custo reduzido correspondente. Se  $\tilde{c} \geq 0$ , então  $x$  é ótima.*

**Algoritmo 5.5:** CSPP

**Input** :  $G = (V, E)$ ,  $w : E \rightarrow \mathbb{Z}^+$ ,  $c : E \rightarrow \mathbb{Z}^+$ , real  $B$ , real  $M$ ,  $s \in V$ ,  $d \in V$

**Output:** caminho  $p_f$  entre  $s$  e  $d$  de menor custo satisfazendo a restrição de peso máximo  $B$  e de custo máximo  $M$

$p_f \leftarrow null$ ;

Calcula as árvores de caminhos de peso e custo mínimos  $T^w$  e  $T^c$ ;

$H \leftarrow \{(\{s\}, s, 0, 0)\}$ ;

**while**  $H \neq \emptyset$  **do**

Escolha o rótulo  $(p, n, w, c)$  mais barato (em termos de custo) no conjunto  $H$ ;

**if**  $n = d$  **then**

$p_f \leftarrow p$ ;

**return**  $p_f$ .

**end**

**foreach**  $n_i \in \text{Neigh}_G(n)$  **do**

    Seja  $e_i = nn_i$ . Crie o novo rótulo

$(p \cup \{e_i\}, n_i, w + w_{e_i}, c + c_{e_i})$ ;

    Descarte todos os novos rótulos tal que

$w + w_{e_i} + T^w(n_i) > B$  ou  $c + c_{e_i} + T^c(n_i) > M$ . Para os demais, armazene em  $H$ ;

    Descarte (de  $H$ ) rótulos dominados;

**end**

**return**  $p_f$ .

**end**

# Solução viável sem suporte minimal

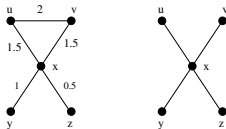


Figura 3: Um grafo  $G$  com seu respectivo 2-spanner ( $H$ ) de peso mínimo

- Para cada  $e = pq, f \in E$ , defina:

$$x^*(e) = \chi_e^H,$$

$$Y^*(e, f) = \begin{cases} 1 & \text{se } f \in E(H_{p,q}), \\ 1 & \text{se } e = xy, f = xz, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- $(x^*, Y^*)$  é uma sol. ótima t.q.  $Y^*$  não tem sup. minimal.

# Prova

## Demonstração.

- Seja  $y$  uma sol. viável qualquer e defina  $d = y - x$ .
- $x$  e  $y$  são viáveis  $\Rightarrow Ax = Ay = b$  e  $Ad = 0$ .
- $Ad = Bd_B + \sum_{i \in N} A_i d_i = 0$ .
- $B$  é inversível  $\Rightarrow d_B = -\sum_{i \in N} B^{-1} A_i d_i$ .
- $cd = c_B d_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N} (c_i - c_B B^{-1} A_i) d_i = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$ .
- $x_i = 0$  ( $x$  é sol. bás. viável) e  $y_i \geq 0$  ( $y$  é viável)  $\forall i \in N$ .
- Então  $d_i = y_i - x_i \geq 0, \forall i \in N$ .
- $\tilde{c}_i \geq 0$  (por hipót.)  $\forall i \in N \Rightarrow \tilde{c}_i d_i \geq 0 \forall i \in N$ .
- $c(y - x) = cd = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$ .
- Como o problema é de min e  $y$  é viável qualquer, o teorema segue.



# Prova ◀

## Demonstração.

- Seja  $y$  uma sol. viável qualquer e defina  $d = y - x$ .
- $x$  e  $y$  são viáveis  $\Rightarrow Ax = Ay = b$  e  $Ad = 0$ .
- $Ad = Bd_B + \sum_{i \in N} A_i d_i = 0$ .
- $B$  é inversível  $\Rightarrow d_B = -\sum_{i \in N} B^{-1} A_i d_i$ .
- $cd = c_B d_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N} (c_i - c_B B^{-1} A_i) d_i = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$ .
- $x_i = 0$  ( $x$  é sol. bás. viável) e  $y_i \geq 0$  ( $y$  é viável)  $\forall i \in N$ .
- Então  $d_i = y_i - x_i \geq 0, \forall i \in N$ .
- $\tilde{c}_i \geq 0$  (por hipót.)  $\forall i \in N \Rightarrow \tilde{c}_i d_i \geq 0 \forall i \in N$ .
- $c(y - x) = cd = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$ .
- Como o problema é de min e  $y$  é viável qualquer, o teorema segue.



# Prova

## Demonstração.

- Seja  $y$  uma sol. viável qualquer e defina  $d = y - x$ .
- $x$  e  $y$  são viáveis  $\Rightarrow Ax = Ay = b$  e  $Ad = 0$ .
- $Ad = Bd_B + \sum_{i \in N} A_i d_i = 0$ .
- $B$  é inversível  $\Rightarrow d_B = -\sum_{i \in N} B^{-1} A_i d_i$ .
- $cd = c_B d_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N} (c_i - c_B B^{-1} A_i) d_i = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$ .
- $x_i = 0$  ( $x$  é sol. bás. viável) e  $y_i \geq 0$  ( $y$  é viável)  $\forall i \in N$ .
- Então  $d_i = y_i - x_i \geq 0, \forall i \in N$ .
- $\tilde{c}_i \geq 0$  (por hipót.)  $\forall i \in N \Rightarrow \tilde{c}_i d_i \geq 0 \forall i \in N$ .
- $c(y - x) = cd = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$ .
- Como o problema é de min e  $y$  é viável qualquer, o teorema segue.



# Prova ▶ ←

## Demonstração.

- Seja  $y$  uma sol. viável qualquer e defina  $d = y - x$ .
- $x$  e  $y$  são viáveis  $\Rightarrow Ax = Ay = b$  e  $Ad = 0$ .
- $Ad = Bd_B + \sum_{i \in N} A_i d_i = 0$ .
- $B$  é inversível  $\Rightarrow d_B = -\sum_{i \in N} B^{-1} A_i d_i$ .
- $cd = c_B d_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N} (c_i - c_B B^{-1} A_i) d_i = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$ .
- $x_i = 0$  ( $x$  é sol. bás. viável) e  $y_i \geq 0$  ( $y$  é viável)  $\forall i \in N$ .
- Então  $d_i = y_i - x_i \geq 0, \forall i \in N$ .
- $\tilde{c}_i \geq 0$  (por hipót.)  $\forall i \in N \Rightarrow \tilde{c}_i d_i \geq 0 \forall i \in N$ .
- $c(y - x) = cd = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$ .
- Como o problema é de min e  $y$  é viável qualquer, o teorema segue.



# Prova ▶ ←

## Demonstração.

- Seja  $y$  uma sol. viável qualquer e defina  $d = y - x$ .
- $x$  e  $y$  são viáveis  $\Rightarrow Ax = Ay = b$  e  $Ad = 0$ .
- $Ad = Bd_B + \sum_{i \in N} A_i d_i = 0$ .
- $B$  é inversível  $\Rightarrow d_B = -\sum_{i \in N} B^{-1} A_i d_i$ .
- $cd = c_B d_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N} (c_i - c_B B^{-1} A_i) d_i = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$ .
- $x_i = 0$  ( $x$  é sol. bás. viável) e  $y_i \geq 0$  ( $y$  é viável)  $\forall i \in N$ .
- Então  $d_i = y_i - x_i \geq 0, \forall i \in N$ .
- $\tilde{c}_i \geq 0$  (por hipót.)  $\forall i \in N \Rightarrow \tilde{c}_i d_i \geq 0 \forall i \in N$ .
- $c(y - x) = cd = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$ .
- Como o problema é de min e  $y$  é viável qualquer, o teorema segue.





# Prova ▶ ←

## Demonstração.

- Seja  $y$  uma sol. viável qualquer e defina  $d = y - x$ .
- $x$  e  $y$  são viáveis  $\Rightarrow Ax = Ay = b$  e  $Ad = 0$ .
- $Ad = Bd_B + \sum_{i \in N} A_i d_i = 0$ .
- $B$  é inversível  $\Rightarrow d_B = -\sum_{i \in N} B^{-1} A_i d_i$ .
- $cd = c_B d_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N} (c_i - c_B B^{-1} A_i) d_i = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$ .
- $x_i = 0$  ( $x$  é sol. bás. viável) e  $y_i \geq 0$  ( $y$  é viável)  $\forall i \in N$ .
- Então  $d_i = y_i - x_i \geq 0, \forall i \in N$ .
- $\tilde{c}_i \geq 0$  (por hipót.)  $\forall i \in N \Rightarrow \tilde{c}_i d_i \geq 0 \forall i \in N$ .
- $c(y - x) = cd = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$ .
- Como o problema é de min e  $y$  é viável qualquer, o teorema segue.



# Prova ▶ ←

## Demonstração.

- Seja  $y$  uma sol. viável qualquer e defina  $d = y - x$ .
- $x$  e  $y$  são viáveis  $\Rightarrow Ax = Ay = b$  e  $Ad = 0$ .
- $Ad = Bd_B + \sum_{i \in N} A_i d_i = 0$ .
- $B$  é inversível  $\Rightarrow d_B = -\sum_{i \in N} B^{-1} A_i d_i$ .
- $cd = c_B d_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N} (c_i - c_B B^{-1} A_i) d_i = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$ .
- $x_i = 0$  ( $x$  é sol. bás. viável) e  $y_i \geq 0$  ( $y$  é viável)  $\forall i \in N$ .
- Então  $d_i = y_i - x_i \geq 0, \forall i \in N$ .
- $\tilde{c}_i \geq 0$  (por hipót.)  $\forall i \in N \Rightarrow \tilde{c}_i d_i \geq 0 \forall i \in N$ .
- $c(y - x) = cd = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$ .
- Como o problema é de min e  $y$  é viável qualquer, o teorema segue.



# Prova

## Demonstração.

- Seja  $y$  uma sol. viável qualquer e defina  $d = y - x$ .
- $x$  e  $y$  são viáveis  $\Rightarrow Ax = Ay = b$  e  $Ad = 0$ .
- $Ad = Bd_B + \sum_{i \in N} A_i d_i = 0$ .
- $B$  é inversível  $\Rightarrow d_B = -\sum_{i \in N} B^{-1} A_i d_i$ .
- $cd = c_B d_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N} (c_i - c_B B^{-1} A_i) d_i = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$ .
- $x_i = 0$  ( $x$  é sol. bás. viável) e  $y_i \geq 0$  ( $y$  é viável)  $\forall i \in N$ .
- Então  $d_i = y_i - x_i \geq 0, \forall i \in N$ .
- $\tilde{c}_i \geq 0$  (por hipót.)  $\forall i \in N \Rightarrow \tilde{c}_i d_i \geq 0 \forall i \in N$ .
- $c(y - x) = cd = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$ .
- Como o problema é de min e  $y$  é viável qualquer, o teorema segue.



# Prova ▶ ←

## Demonstração.

- Seja  $y$  uma sol. viável qualquer e defina  $d = y - x$ .
- $x$  e  $y$  são viáveis  $\Rightarrow Ax = Ay = b$  e  $Ad = 0$ .
- $Ad = Bd_B + \sum_{i \in N} A_i d_i = 0$ .
- $B$  é inversível  $\Rightarrow d_B = -\sum_{i \in N} B^{-1} A_i d_i$ .
- $cd = c_B d_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N} (c_i - c_B B^{-1} A_i) d_i = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$ .
- $x_i = 0$  ( $x$  é sol. bás. viável) e  $y_i \geq 0$  ( $y$  é viável)  $\forall i \in N$ .
- Então  $d_i = y_i - x_i \geq 0, \forall i \in N$ .
- $\tilde{c}_i \geq 0$  (por hipót.)  $\forall i \in N \Rightarrow \tilde{c}_i d_i \geq 0 \forall i \in N$ .
- $c(y - x) = cd = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$ .
- Como o problema é de min e  $y$  é viável qualquer, o teorema segue.



# Prova

## Demonstração.

- Seja  $y$  uma sol. viável qualquer e defina  $d = y - x$ .
- $x$  e  $y$  são viáveis  $\Rightarrow Ax = Ay = b$  e  $Ad = 0$ .
- $Ad = Bd_B + \sum_{i \in N} A_i d_i = 0$ .
- $B$  é inversível  $\Rightarrow d_B = -\sum_{i \in N} B^{-1} A_i d_i$ .
- $cd = c_B d_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N} (c_i - c_B B^{-1} A_i) d_i = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$ .
- $x_i = 0$  ( $x$  é sol. bás. viável) e  $y_i \geq 0$  ( $y$  é viável)  $\forall i \in N$ .
- Então  $d_i = y_i - x_i \geq 0, \forall i \in N$ .
- $\tilde{c}_i \geq 0$  (por hipót.)  $\forall i \in N \Rightarrow \tilde{c}_i d_i \geq 0 \forall i \in N$ .
- $c(y - x) = cd = \sum_{i \in N} \tilde{c}_i d_i$ .
- Como o problema é de min e  $y$  é viável qualquer, o teorema segue.

