Modélisation et Simulation

Systèmes à temps continu

G. Bontempi,
Département d'Informatique
Boulevard de Triomphe - CP 212
http://www.ulb.ac.be/di

October 5, 2023

Ensembles infinis

- Les automates sont des systèmes dynamiques où le temps est discret et les ensembles U,X et Y sont finis.
- Ici nous allons considérer le cas où le temps est continu et les ensembles U,X et Y sont infinis mais avec une dimension finie.
- Espaces vectoriels: chaque composant est un vecteur et chaque vecteur peut être représenté comme une combinaison linéaire d'un nombre **fini** de vecteurs de base.
- Par exemple l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel unidimensionnel.

Dimension d'un espace vectoriel

- Un espace vectoriel est un ensemble d'éléments (appelés vecteurs) pour lesquels les opérations de somme et de produit par un scalaire sont définies.
- La dimension d'un espace vectoriel V est le cardinal (c.-à-d. le nombre de vecteurs) d'une base de V.
- La base d'un espace vectoriel est un ensemble de vecteurs tel que
  1. tout vecteur de l'espace peut être représenté comme combinaison linéaire des vecteurs de la base
  2. aucun élément de la base ne peut être représenté comme combinaison linéaire des autres.

Systèmes réguliers

Definition

Un système continu est dit régulier si

- les ensembles U, Ω, X, Y et Γ sont des espaces vectoriels avec norme (c.-à-d. il est possible de définir une distance entre deux éléments),
- la fonction de transition est continue par rapport à tous ses arguments
- la dérivée $\frac{d}{dt}\varphi(t, t_0, x, u(\cdot))$ existe et elle est continue par rapport à t pour toutes les valeurs où u est continu.
- la transformation h est continue par rapport à tous ses arguments

Équation différentielle ordinaire

- Formalisme privilégié pour modéliser la continuité du temps
- EDO décrit le taux de changement d'une variable (par exemple variable d'état x) comme une fonction f d'autres variables (potentiellement incluant la variable même et le temps).
- Exemple

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x(t), t, u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \in X$$

- Solution EDO: **fonction du temps**, c.-à-d. une fonction $x(t)$ qui satisfait l'équation et la condition initiale.

Équation différentielle vectorielle

- Une équation différentielle ordinaire vectorielle

$$\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \qquad x(t_0) = x^0$$

  est un système de n équations différentielles ordinaires du premier ordre

$$\left\{ \dot{x}_i = \frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x(t), u(t), t), \qquad i = 1, \ldots, n \right.$$

  également appelé *flot*.
- La seule variable indépendante est le temps t.

Système régulier et EDOs

Theorem

Le mouvement $x(\cdot) = \varphi(\cdot, t_0, x^0, u(\cdot))$ *d'un système régulier à dimensions finies est la solution d'une équation différentielle vectorielle du type*

$$\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \qquad x(t_0) = x^0$$

Système régulier stationnaire

Definition

Un système régulier est dit *autonome* ou stationnaire si sa dynamique est décrite par une équation différentielle autonome

$$\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$$

c.-à-d. une équation où f ne dépend pas explicitement du temps t.

- Les équations différentielles modelisent un système dynamique en corrélant les valeurs des variables d'entrée et d'état (et des leurs dérivées) à l'instant t.
- La trajectoire du système peut ainsi être obtenue en intégrant (analytiquement ou numériquement) l'équation différentielle vectorielle.
- La **fonction de transition** φ est représentée d'une manière **implicite** par l'équation $\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t)$, où f est dénotée la *fonction génératrice* du système.
- La théorie des systèmes étudie les relations entre les propriétés de la fonction génératrice et les propriétés de la fonction de transition.
- Il n'est pas possible de calculer analytiquement la solution explicite d'une équation différentielle d'ordre plus grand que deux, à part quelque cas particulier. La raison principale est la non-linéarité des fonctions $f(\cdot)$.

Etats d'équilibre

- Considérons un système $\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t))$. Pour une fonction d'entrée $\bar{u}(t)$ donnée, les états d'équilibre, s'ils existent, sont les racines du système d'équations

$$f(x, \bar{u}(t), t) = 0$$

- Par exemple, pour le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) = x_2 + u \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) = x_1(1 - x_1^2) + x_2 + u^3 \end{cases}$$

les états d'équilibre associés à l'entrée $\bar{u}(t) = 0$ sont $\bar{x}^{(1)} = [0, 0]$, $\bar{x}^{(2)} = [1, 0]$, $\bar{x}^{(3)} = [-1, 0]$

Espace et portrait de phase

- Considérons le système dynamique $\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$ où $x \in X$.
- L'espace X de dimension n est appelé *espace des phases*.
- L'état $x(t)$ du système à un instant t est représenté par un point P dans l'espace des phases ayant coordonnées $[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$.
- Une trajectoire du système est représentée par une séquence de points dans l'espace. L'ensemble de trajectoires est représenté par un flot dans l'espace.
- La connaissance du flot de trajectoires nous renvoie de l'information sur le comportement qualitatif du système dynamique (*portrait de phases*).

Espace et diagramme des phases (II)

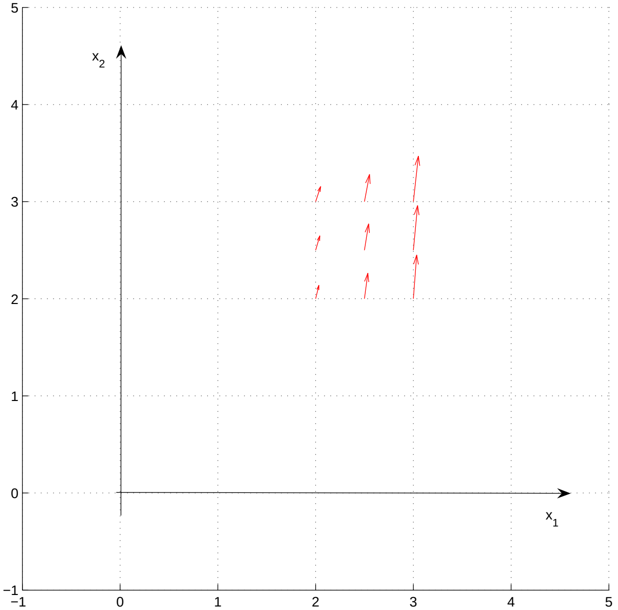
- Le portrait de phase est une manière de compresser l'information sur l'évolution du système.
- L'information sur la variable t est absente.
- Les flèches indiquent la direction de l'évolution sans spécifier la valeur de t.
- La tangente à une trajectoire dans l'espace des phases représente la direction de la vitesse v.
- Les composantes du vecteur v selon les axes x_i, $i = 1, \dots, n$ sont données par $f_i(x(t))$, $i = 1, \dots, n$.

Exemple

Considérons le système où $u = 0$

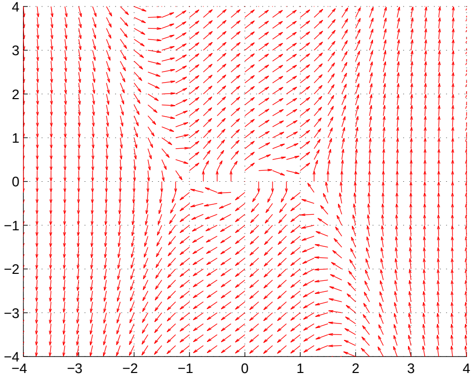
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) = x_2 + u \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) = -x_1(1 - x_1^2) + x_2 + u^3 \end{cases}$$

- dans le point $x_1 = 2, x_2 = 2$ les dérivées prennent les valeurs $\dot{x}_1 = 2, \dot{x}_2 = 8$
- dans le point $x_1 = 3, x_2 = 3$ les dérivées prennent les valeurs $\dot{x}_1 = 3, \dot{x}_2 = 27$


x2
x1
5
4
3
2
1
0
−1
−1
0
1
2
3
4
5

Exemple

Ceci est le portrait de phase où tous les vecteurs ont été normalisés.



Script Octave `portrait.m`

Exemples de systèmes dynamiques à temps continu

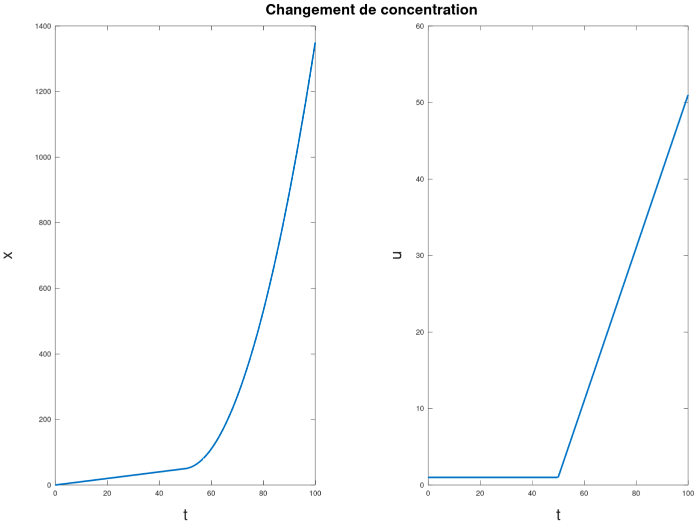
- Changement de concentration
- Croissance et décroissance
- Croissance avec saturation
- Modèle d'un pendule
- Modèle Lotka Volterra

Changement de concentration

- Evolution d'une quantité en fonction d'une entrée.
- Exemples pratiques: quantité de marchandise d'un entrepôt, volume d'un réservoir sur la base d'un débit en entrée, changement de concentration d'un milieu, position en fonction de la vitesse.
- Hypothèses, assomptions et connaissance au préalable:
  - aucun feedback de l'état sur le taux de changement n'est présent.
  - changement d'état est complètement déterminée par le flux en entrée.
  - taux de changement peut être aussi positif que négatif.
  - état est observable.
- Équations:

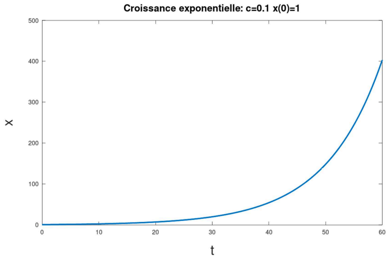
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = cu(t), \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

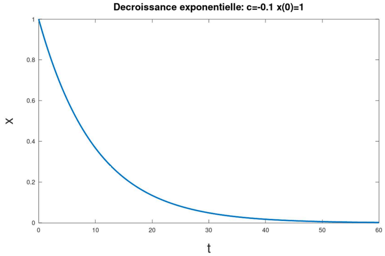
- Script Octave `demo_conc.m`


Changement de concentration
x
t
u
t
0
20
40
60
80
100
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
0
10
20
30
40
50
60

Croissance et décroissance exponentielle

- Feedback: l'état détermine le taux de changement de l'état même.
- Dynamique exponentielle indépendamment de la présence d'une entrée.
- Applications pratiques: évolution d'une population (par exemple des lapins) en absence de prédateurs, évolution du montant d'un compte en banque suite à l'intérêt, croissance économique, désintégration radioactive (decay).
- Hypothèses, assomptions et connaissance au préalable:
  - le changement d'état est complètement déterminé par l'état même.
  - aucune entrée exogène.
- $$\begin{cases} \dot{x}(t) = cx(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$
- la solution est $x(t) = x(0)\exp^{ct}$ (script `demo_croissance.m`)


Croissance exponentielle: c=0.1 x(0)=1
x
t


Decroissance exponentielle: c=-0.1 x(0)=1
x
t

Croissance et décroissance exponentielle: estimation

- Comment estimer la constante c dans un cas pratique?
- Supposons que r soit le pourcentage de croissance par unité de temps, c.-à-d. que pour $t = 1$

$$x(1) = x(0) + \frac{r}{100}x(0) = x(0)\left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

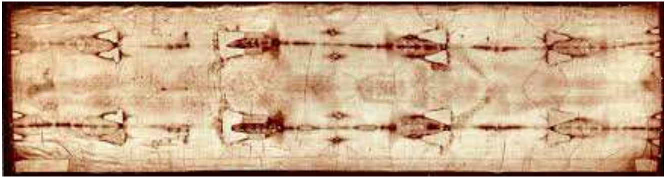
- Pour que la solution $x(t) = x(0)\exp^{ct}$ satisfasse cette condition

$$x(1) = x(0)\exp^{c} \Rightarrow c = \ln\frac{x(1)}{x(0)} = \ln\left(1 + \frac{r}{100}\right) \Rightarrow$$

$$x(t) = x(0)\exp^{\ln\left(1+\frac{r}{100}\right)t} = x(0)\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{t}$$

- Donc, si la population double chaque année alors $r = 100$ et le temps est mesuré en années

$$c = \ln 2$$



La datation du Saint Suaire par le carbone 14

La désintégration radioactive du ^{14}C suit une loi de décroissance exponentielle $\dot{x} = -cx$ dont la solution est

$$x(t) = x(t_0) \exp^{-c(t-t_0)}$$

Supposons de connaitre la constant c et pouvoir mesurer le nombre d'atomes à l'instant t (ou le pourcentage p par rapport à l'instant initial t_0) . Il sera donc possible de reconstruire l'instant initial t_0:

$$x(t) = px(t_0) = x(t_0) \exp^{-c(t-t_0)} \Rightarrow$$
$$p = \exp^{-c(t-t_0)} \Rightarrow \ln p = -c(t - t_0)$$
$$\Rightarrow t_0 = t + \frac{\ln p}{c}$$

En $t = 1988$ trois groupes de scientifiques indépendants ont daté l'origine du Saint Suaire en mesurant $p = 0.92$

$$t_0 = 1988 + \frac{\ln 0.92}{0.0001216} \approx 1302$$

Croissance logistique

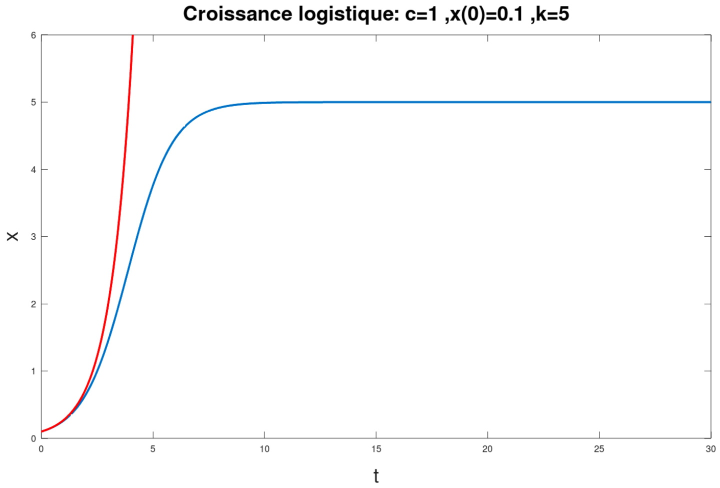
- Modèle $\dot{x} = cx$ pour $c > 0$ est représentation simpliste d'une population croissante. En réalité aucune croissance ne peut continuer à l'infini.
- Croissance logistique a été proposé par Pierre François Verhulst en 1838.
- Système non linéaire.
- Applications: dynamique des populations, systèmes près de la saturation.
- Validité testée en laboratoire où des colonies de bactéries, levure ou d'autres organismes simples ont été fait développer dans des conditions de climat constant, présence de nourriture et absence de prédateurs.
- Très bonne correspondance entre le modèle mathématique et la réalité expérimentale. Par contre la validation est moins convaincante pour organismes plus complexes.

Croissance logistique

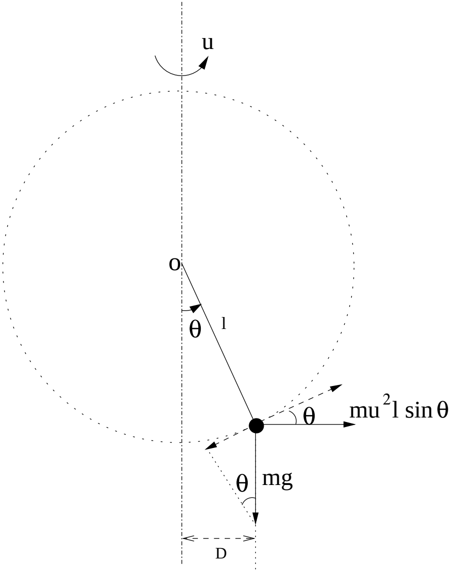
- Hypothèses, assomptions et connaissance au préalable: le modèle logistique s'appuie sur deux hypothèses:
  1. si la population est petite, le taux de croissance est presque directement proportionnel à la taille de la population.
  2. si la population est trop grande, le taux de croissance devient négatif.
- $$\begin{cases} \dot{x}(t) = cx(t)(1 - \frac{x(t)}{k}) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

  Notons que si x est petit l'équation revient à $\dot{x}(t) = cx(t)$ et si $x > k$ alors $\dot{x} < 0$.

Script Octave `demo_logi.m`


Croissance logistique: c=1 ,x(0)=0.1 ,k=5
x
t
0
1
2
3
4
5
6
0
5
10
15
20
25
30

Système pendule



- Masse ponctuelle, c.-à-d. concentrée dans un point fixe et tige de masse négligeable.
- Masse m soumise à la **force de gravité** mg décomposée en deux termes: le premier est dirigé comme la tige et il est compensé par la tension de la tige, le deuxième est dirigé de manière perpendiculaire à la tige et a un module $mg\sin(\theta)$.
- **Force de friction** proportionnelle à la vitesse

$$\frac{ds}{dt} = \frac{l\sin d\theta}{dt} \approx l\frac{d\theta}{dt} = l\dot{\theta}$$

  du pendule selon une constante k.
- Action externe est une rotation autour de l'axe vertical de vitesse angulaire $u = \omega$. Ceci revient à appliquer sur la masse m une **force centrifuge** horizontale de module

$$m\omega^2 D = mu^2 l \sin\theta$$

  où $D = l\sin\theta$ est la distance de l'axe de rotation.

Dérivation du modèle

En utilisant la deuxième loi de la dynamique, suite aux directions des forces et du déplacement θ, nous obtenons

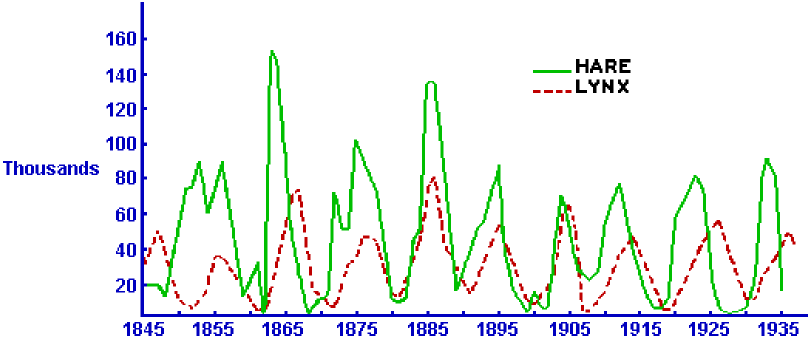
$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) - kl\dot{\theta} + mu^2 l\sin(\theta)\cos(\theta) \tag{1}$$

En posant $\theta = x_1$, $\dot{\theta} = x_2$, nous pouvons écrire le système sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2 + u^2\sin(x_1)\cos(x_1) \end{cases}$$

Système Lotka Volterra

- Les équations de Lotka-Volterra, que l'on désigne aussi sous le terme de "modèle proie-prédateur".
- Proposées indépendamment par le biologiste A.J. Lotka (1925) et par le mathématicien V. Volterra (1926).
- Volterra modélisait l'évolution de la quantité de poisson pêché (sardines) dans la mer Adriatique dans la période suivante la première guerre mondiale. Il a été le premier à utiliser la notion d'interaction.
- Validation expérimentale: dynamique du lynx et du lièvre des neiges, pour lequel de nombreuses données de terrain ont été collectées par la Compagnie de la Baie d'Hudson au XIXe siècle.
- Point de départ d'une série d'effort de modélisation d'entités interagissantes dans la biologie, l'écologie et l'économie.


HARE
LYNX
Thousands
160
140
120
100
80
60
40
20
1845
1855
1865
1875
1885
1895
1905
1915
1925
1935

Ces équations modélisent les taux de croissance $\dot{x}_1$ et $\dot{x}_2$ de deux populations qui interagissent dans un **écosystème clos**, où x_1 est l'effectif d'une population de proies et x_2 est l'effectif d'une population de prédateurs.
Assomptions:

1. l'espèce 1 (proie) possède une quantité illimitée de nourriture et de ressources et que ses individus ne soient pas en compétition entre eux.
2. l'espèce 2 (prédatrice) se nourrit exclusivement des individus de l'espèce 1, qui sont en nombre limité et ceci cause donc une compétition entre les individus de l'espèce 2
3. l'espèce 1 croit exponentiellement en absence des prédateurs
4. l'espèce 2 décroît exponentiellement en absence des proies

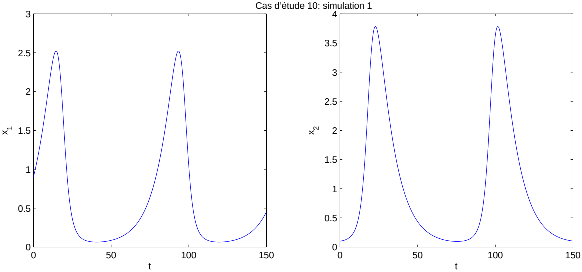
Les équations s'écrivent

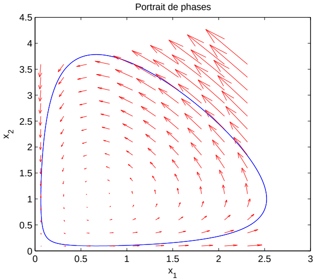
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 - a_{12}x_1x_2 & \text{(proie)} \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1x_2 - a_{22}x_2 & \text{(prédateur)} \end{cases}$$

où tous les coefficients sont positifs et ont la signification suivante:

- a_{11} est le taux de natalité des proies
- a_{12} est le taux de mortalité des proies suite à prédation
- a_{21} est le taux de reproduction des prédateurs: nombre de prédateurs nés par proie capturée
- a_{22} est le taux de mortalité des prédateurs

Système Lotka Volterra





Système St. Valentin

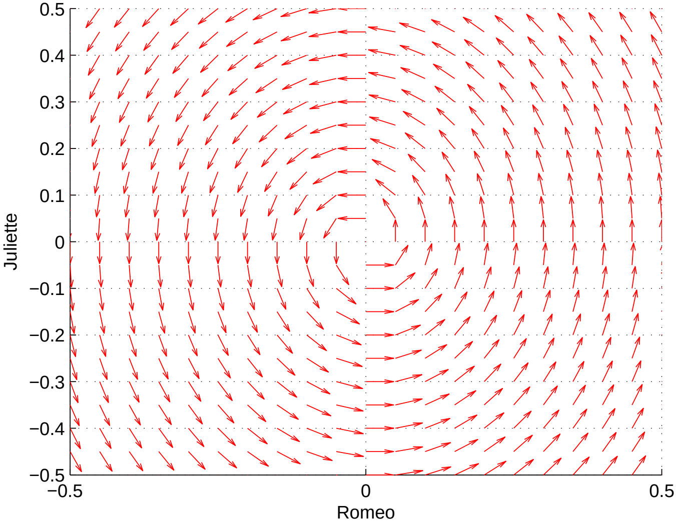
- Un système dynamique très intéressant mais très compliqué est le système des relations humaines comme, par exemple, le système des relations dans un couple.
- Il suffit penser à l'évolution temporelle des sentiments entre deux individus.
- On retrouve facilement des comportements stables, des changements imprévus et brusques, des collapsus.
- Comment modéliser la relation amoureuse entre deux individus?
- Strogatz dans son article *Love affairs and differential equations* (1988) a proposé un modèle pour modéliser la relation amoureuse entre Roméo et Juliette.

- 2 variables d'état: r et j
- $r(t)$: si positive (négative) elle représente l'amour (haine) de Roméo pour Juliette
- $j(t)$: si positive (négative) elle représente l'amour (haine) de Juliette pour Roméo.
- Roméo est un amoureux qui a le goût de la conquête mais qui déteste les liens trop étouffants: Roméo est d'autant plus froid que l'amour de Juliette augmente mais qu'il retrouve soudainement l'intérêt pour elle alors qu'elle tend à s'éloigner.
- Juliette, de son côté, est plus rationnelle et tend à reproduire le comportement de Roméo.
- Comment va évoluer leur relation?

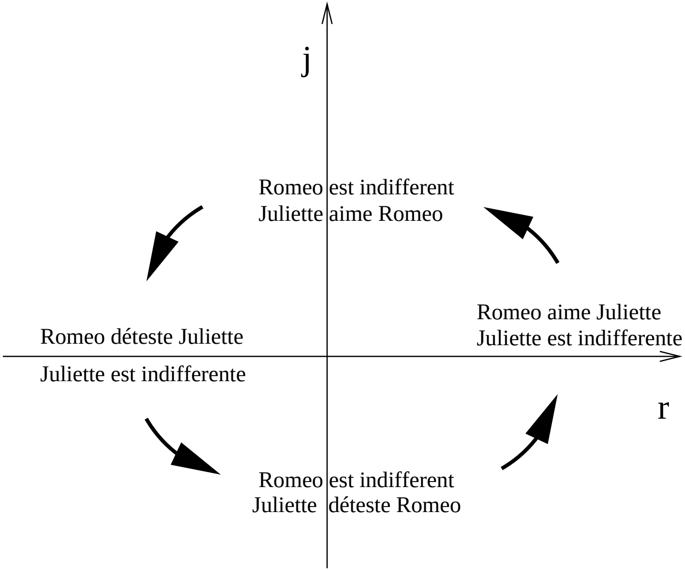
$$\begin{cases} \dot{r}(t) = -aj(t) \\ \dot{j}(t) = br(t) \end{cases}, \qquad \text{où } a > 0, b > 0$$

- Est-ce qu'il y a des états d'équilibre? Comment leur histoire va évoluer?

Fuis-moi je te suis, suis-moi je te fuis



Fuis-moi je te suis, suis-moi je te fuis



On peut aussi supposer que chaque amant soit aussi sensible à ses propres sentiments et/ou qu'il y ait une évolution avec le temps

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = a_{11}(t)r(t) + a_{12}(t)j(t) \\ \dot{j}(t) = a_{21}(t)r(t) + a_{22}(t)j(t) \end{cases}$$

Essayez maintenant de modéliser

- d'autres dynamiques (amour durable, épanouissement lent, coup de foudre)
- d'autres attitudes par rapport à l'autre (insensible, fidèle, réaliste, optimiste, goût de la conquête, compatissant),
- le fait que l'amour d'un de deux ne soit pas visible à l'autre (timidité)
- le fait que la dynamique dépende conjointement de deux niveaux (estime mutuelle).
- un triangle amoureux

Stabilité

- Cette notion fait référence à une propriété d'insensibilité d'une certaine entité à des perturbations ou à des changements dans les conditions environnementales.
- Analyse de stabilité d'un système dynamique: ceci consiste à examiner si le comportement nominal d'un système est semblable au comportement d'un système perturbé pour des perturbations suffisamment petites.
- Par *mouvement nominal* nous entendons le mouvement $\varphi(\cdot, \bar{t}, \bar{x}, \bar{u}(\cdot))$ pour une fonction d'entrée $\bar{u}$, un état initial $\bar{x}$ et un instant initial $\bar{t}$. Par *mouvement perturbé* nous entendons le mouvement obtenu à la suite d'une perturbation de l'état initial $\bar{x}$.

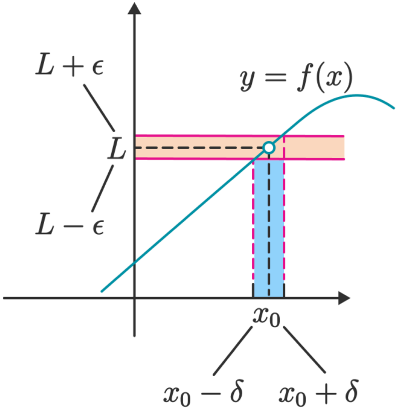
Stabilité

- La notion de stabilité dépend d'une notion de similarité qui est quantifiée par l'utilisation d'une norme.
- Une condition nécessaire est donc qu'on puisse définir une norme dans l'espace d'état X (système régulier).

Définition ϵ, δ de limite d'une fonction

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \epsilon$$



Stabilité du mouvement

Nous allons donc considérer la distance entre la suite des états du mouvement nominal et du mouvement perturbé et vérifier si cette distance reste bornée ou pas dans le temps.

Definition

Un mouvement $\varphi(\cdot, \bar{t}, \bar{x}, \bar{u}(\cdot))$ est dit stable si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ telle que pour tous les $\hat{x}$ qui satisfont

$$\|\hat{x} - \bar{x}\| \leq \delta$$

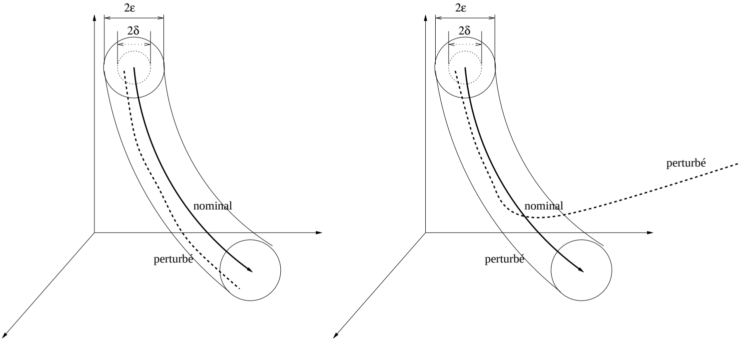
nous avons

$$\|\varphi(t, \bar{t}, \hat{x}, \bar{u}) - \varphi(t, \bar{t}, \bar{x}, \bar{u})\| \leq \epsilon$$

pour tous les $t \geq \bar{t}$.

Definition

Un mouvement $\varphi(\cdot, \bar{t}, \bar{x}, \bar{u}(\cdot))$ est dit instable s'il n'est pas stable.



- Mouvement stable: **pour tout voisinage** $\mathcal{V}_\epsilon$ (même très petit) de ce mouvement il est possible de trouver une condition initiale proche de $\bar{x}$ telle que le mouvement perturbé correspondant reste indéfiniment dans $\mathcal{V}_\epsilon$
- Mouvement instable: **il existe un voisinage** $\mathcal{V}_\epsilon$ tel qu'aucune perturbation (même minime) de la condition initiale $\bar{x}$ ne permette au mouvement perturbé d'y rester pour tout t.

Exemple

Système d'ordre 1 qui décrit l'évolution de la tension x aux bornes d'un condensateur C traversé par un courant u:

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{C} u$$

Soit le mouvement nominal déterminé par $\bar{t} = 0$, $x(0) = \bar{x}^0 = 0$ et $u(\cdot) = \bar{u}$. Nous obtenons

$$\bar{x}(t) = \varphi(t, \bar{t}, \bar{x}^0, \bar{u}) = \frac{\bar{u}}{C} t$$

Si nous posons $x(0) = \hat{x}^0$ le mouvement sera perturbé

$$\hat{x}(t) = \varphi(t, \bar{t}, \hat{x}^0, \bar{u}) = \frac{\bar{u}}{C} t + \hat{x}^0$$

Si nous posons $\delta = \epsilon$ il s'ensuit que

$$\|\hat{x}^0 - \bar{x}^0\| = \|\hat{x}^0\| \leq \delta \Rightarrow$$

$$\|\varphi(t, \bar{t}, \hat{x}^0, \bar{u}) - \varphi(t, \bar{t}, \bar{x}^0, \bar{u})\| = \|\hat{x}^0\| \leq \delta = \epsilon$$

Le mouvement est donc stable.

Exemple (II)

Étudier la stabilité du mouvement du système à temps discret

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= x_2(t) \\ x_2(t+1) &= x_1(t) + x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

pour les conditions nominales $\bar{t} = 0$, $x(0) = \bar{x}^0 = [1, 1]^T$, $\bar{u} = 0$
Le mouvement nominal est donné par la séquence

$$x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x(2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x(3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Qu'est-ce qu'on obtient si la condition initiale est
$x(0) = \hat{x}^0 = \bar{x}^0 + [\delta, 0]^T$?

$$x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2+\delta \end{bmatrix}, x(2) = \begin{bmatrix} 2+\delta \\ 3+\delta \end{bmatrix}, x(3) = \begin{bmatrix} 3+\delta \\ 5+2\delta \end{bmatrix}, x(4) = \begin{bmatrix} 5+2\delta \\ 8+3\delta \end{bmatrix}$$

Exercice

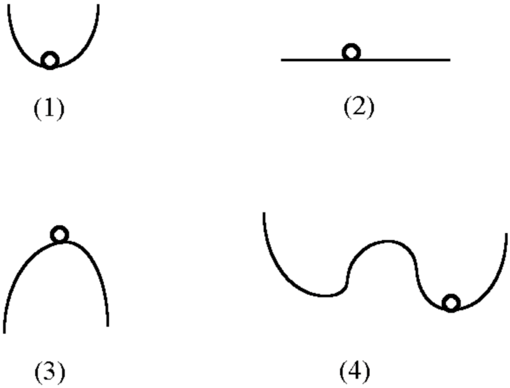
Étudier la stabilité du mouvement du système à temps continu

$$\dot{x} = Kx, \qquad x(0) = \bar{x}^0$$

pour $K = 1$ et $K = -1$.

Stabilité de l'état d'équilibre

Un état d'équilibre est un cas particulier de mouvement. Nous pouvons donc étendre la définition de stabilité à un état d'équilibre.



Definition

Un état d'équilibre $\bar{x}$ correspondant à une entrée $\bar{u}(\cdot)$ et à un instant initial $\bar{t}$ est dit stable si pour chaque $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que pour tous les $\hat{x}$ qui satisfont la relation

$$\|\hat{x} - \bar{x}\| \leq \delta$$

nous avons

$$\|\varphi(t, \bar{t}, \hat{x}, \bar{u}) - \bar{x}\| \leq \epsilon$$

pour tous les $t \geq \bar{t}$

L'équilibre $\bar{x}$ est stable si pour tout voisinage circulaire $\mathcal{V}_\epsilon$ de $\bar{x}$ il est possible de définir une région de conditions initiales perturbées $\mathcal{V}_\delta$ telle que les mouvements correspondants ne sortiront jamais de $\mathcal{V}_\epsilon$.

Stabilité asymptotique

Une notion plus forte de la notion de stabilité est celle de *stabilité asymptotique* qui pose des conditions sur le comportement asymptotique du mouvement perturbé.

Definition

Un état d' équilibre $\bar{x}$ est asymptotiquement stable si pour chaque $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que pour tous les $\hat{x}$ qui satisfont $\|\hat{x} - \bar{x}\| \leq \delta$ nous obtenons

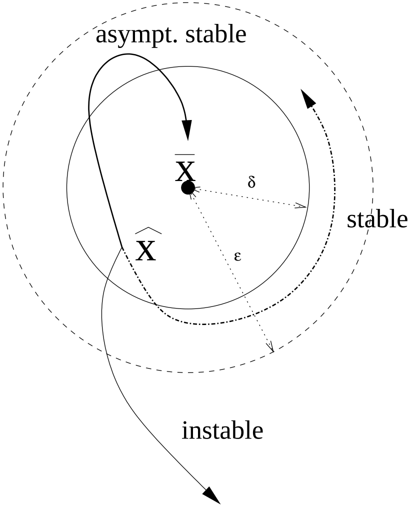
$$\|\varphi(t, \bar{t}, \hat{x}, \bar{u}(\cdot)) - \bar{x}\| \leq \epsilon \qquad \forall t \geq \bar{t}$$

et

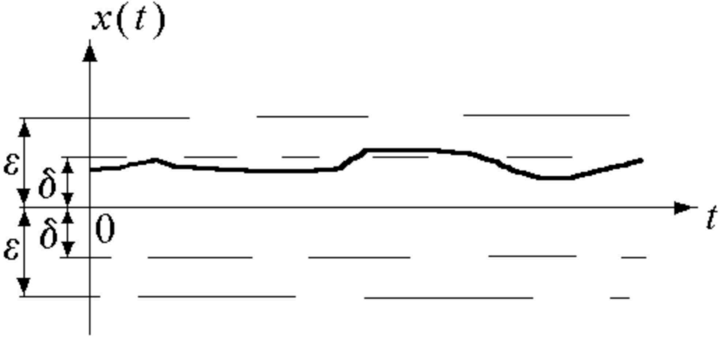
$$\lim_{t \to \infty} \|\varphi(t, \bar{t}, \hat{x}, \bar{u}(\cdot)) - \bar{x}\| = 0$$

La stabilité asymptotique est donc un type de stabilité accrue qui requiert aussi la convergence pour $t \to \infty$ de chaque mouvement perturbé au mouvement nominal.

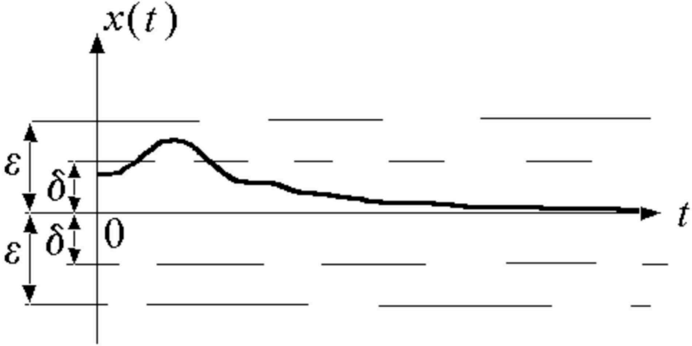
Stabilité de l'état d'équilibre



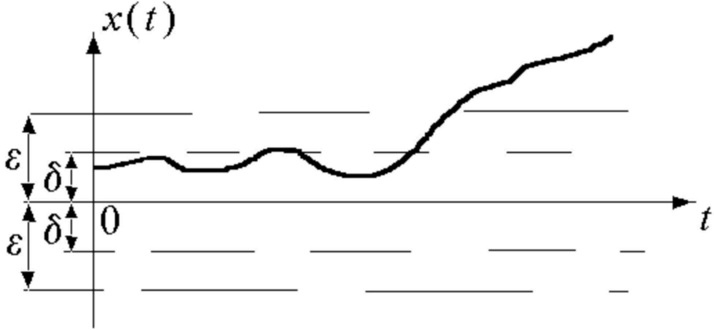
Système ordre 1: équilibre simplement stable



Système ordre 1: équilibre asymptotiquement stable



Système ordre 1: équilibre instable



Exemple

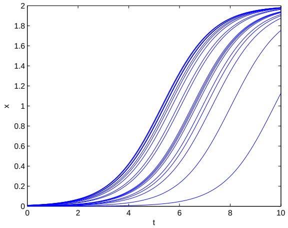
Considérons le système dynamique à temps continu

$$\dot{x} = ax\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

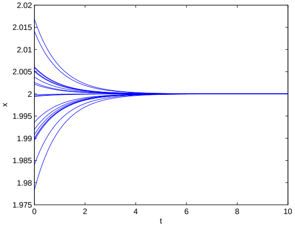
avec $a > 0$.
Le système a deux états d'équilibre: $\bar{x}^{(1)} = 0$, $\bar{x}^{(2)} = 2$.

- L'état $\bar{x}^{(1)}$ est instable puisque chaque condition initiale $x(0) > \bar{x}^{(1)}$, même si petite, diverge vers $x = 2$ pour $t \to \infty$.
- L'état $\bar{x}^{(2)}$ est asymptotiquement stable puisque chaque perturbation de l'état $x(0) = \bar{x}^{(2)}$ est réduite pour $t \to \infty$.

Exemple



2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
x
0
2
4
6
8
10
t



2.02
2.015
2.01
2.005
2
1.995
1.99
1.985
1.98
1.975
x
0
2
4
6
8
10
t

Analyse de stabilité

- Les propriétés de stabilité et stabilité asymptotique dépendent du mouvement donc de la solution d'un système dynamique.
- Or, puisque la solution d'un système continu générique est difficile à déterminer d'une manière analytique, les propriétés de stabilité sont difficiles à prouver.
- Ils existent quelques critères, comme les critères de Liapounov, qui permettent d'analyser le problème de la stabilité **sans résoudre** les équations différentielles qui décrivent le système.

Liapounov et la physique

- Les critères de stabilité de Liapounov sont inspirés à une observation fondamentale des systèmes physiques.
- La stabilité d'un système peut être étudiée en relation à la dynamique de son énergie totale.
- Si l'énergie totale d'un système (mécanique ou électrique) continue à être dissipée, le système aboutit finalement à un état d'équilibre.

Fonction (semi)définie positive

Afin de formuler les critères de stabilité de Liapounov, nous devons d'abord introduire les notions de fonctions définies et semi-définies positives.

Definition

Une fonction $V(\cdot)$ est dite définie positive en $\bar{x}$ s'il existe un voisinage circulaire de $\bar{x}$ où

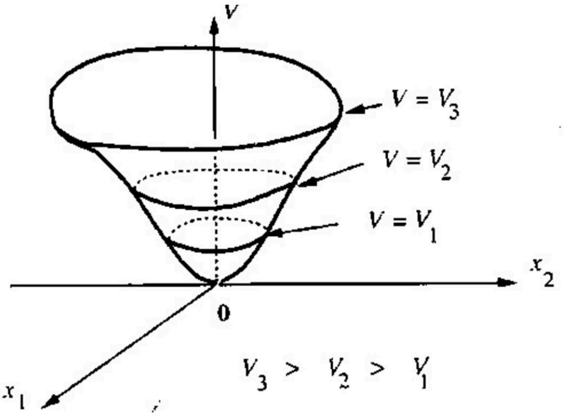
$$V(\bar{x}) = 0 \quad \text{et} \quad V(x) > 0 \quad \text{pour } x \neq \bar{x}$$

Definition

Une fonction $V(\cdot)$ est dite semidéfinie positive en $\bar{x}$ s'il existe un voisinage circulaire de $\bar{x}$ où

$$V(\bar{x}) = 0 \quad \text{et} \quad V(x) \geq 0 \quad \text{pour } x \neq \bar{x}$$

Fonction définie positive



Fonctions quadratiques

Une classe importante de fonctions V est la classe des fonctions quadratiques

$$V(x) = x^T A x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Par exemple pour $n = 2$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow V(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x^T A x = x_1^2 + x_2^2$$

Matrice (semi)définie positive

Definition

Une matrice A carrée et symétrique est définie (semidéfinie) positive si et seulement si la fonction $V(x) = x^T Ax$ est définie (semidéfinie) positive.

- Toutes les valeurs propres d'une matrice définie positive sont réelles et strictement positives.
- Une matrice symétrique réelle est dite définie négative si son opposée (symétrique elle aussi) est définie positive.

Theorem (Test de Sylvester)

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}$$

carrée et symétrique d'ordre n soit définie positive est que tous les mineurs principaux soient positifs.

Matrice (semi)définie positive (II)

Notons que par mineurs principaux de A nous entendons les quantités:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \det \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} \\
D_2 &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \\
D_j &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1j} & a_{2j} & \cdot & a_{jj} \end{bmatrix}, \qquad j \leq n
\end{aligned}
$$

Condition nécessaire pour que A soit définie positive est que $\det A > 0$, c.-à-d. que la matrice soit non singulière.

Critères de Liapounov

Considérons le système à temps continu

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

où le vecteur $f(\cdot, \cdot)$ est continu ainsi que ses dérivées partielles et $\bar{x}$ l' état d'équilibre pour l'entrée constante $\bar{u}$: $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$.

Theorem (Critère de stabilité de Liapounov)

S'il existe une fonction $V(\cdot)$, continue ainsi que ses dérivées partielles, qui soit définie positive en $\bar{x}$ et telle que la fonction

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x(t))}{dt} = \nabla V(x) f(x(t), \bar{u})$$

où

$$\nabla V(x) = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right]$$

soit semi-définie négative en $\bar{x}$ alors $\bar{x}$ est un état d'équilibre (simplement) stable.

Critères de Liapounov

Theorem (Critère de stabilité asymptotique de Liapounov)

S'il existe une fonction $V(\cdot)$, continue ainsi que ses dérivées partielles, qui soit définie positive en $\bar{x}$ et telle que la fonction

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x(t))}{dt} = \nabla V(x) f(x, \bar{u})$$

soit définie négative en $\bar{x}$ alors $\bar{x}$ est un état d'équilibre asymptotiquement stable.

Critères de Liapounov

- Une fonction V définie positive telle que $\dot{V}(\cdot)$ soit définie négative est appelée une fonction de Liapounov.
- Notons que les deux critères énoncent seulement des **conditions suffisantes mais pas nécessaires**. Ceci signifie que l'impossibilité de déterminer une fonction de Liapounov ne nous autorise pas à en déduire l'instabilité de l'état d'équilibre $\bar{x}$.
- Il est possible d'interpréter la fonction de Liapounov comme une expression d'une notion d'*énergie associée à un système dynamique*.
- Pour un système stable à grande dimension il peut être très difficile de trouver une fonction de Liapounov.

Rappel

Soit V une fonction composée

$$V(x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

où

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots & \\ \dot{x}_n & = f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} = \\ \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \nabla V(x(t)) f(x(t)) \end{aligned}$$

Exemple

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = -ax_1 - bx_2 + u \end{cases}$$

avec $a > 0$ et $u = \bar{u} = 0$. Etudions l'impact du signe de b sur la stabilité. Le système a l'état d'équilibre $\bar{x} = [0, 0]$. Définissons la fonction

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(kx_1^2 + x_2^2), \qquad k > 0$$

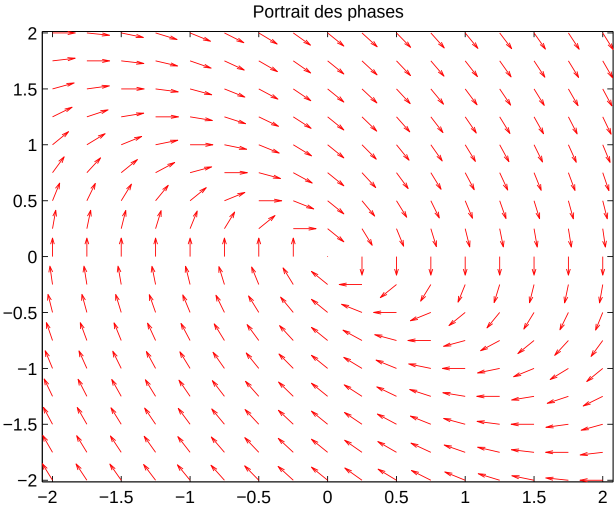
qui est définie positive en $[0, 0]$. Sa dérivée est

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = kx_1x_2 - ax_1x_2 - bx_2^2$$

Si $k = a > 0$ alors $\dot{V} = -bx_2^2$. Si $b > 0$, il existe donc une fonction V définie positive dont la dérivée est définie négative. L'état d'équilibre $[0, 0]$ est donc asymptotiquement stable.

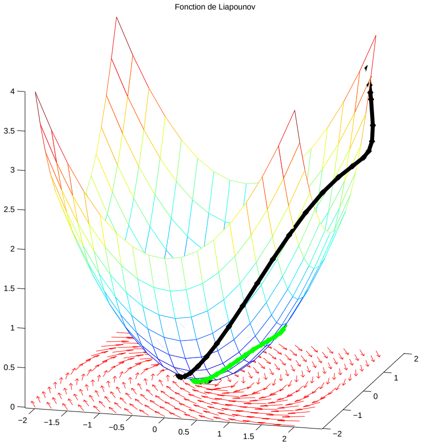
Exemple

Voici le portrait de phase du système ($a = b = 1$)



Exemple

Voici la fonction $V(x_1, x_2)$ et l'évolution de la valeur $V(x_1(t), x_2(t))$ le long de deux solutions du système ($x^0 = [1.9, 1.9]$ et $x^0 = [.9, .9]$)



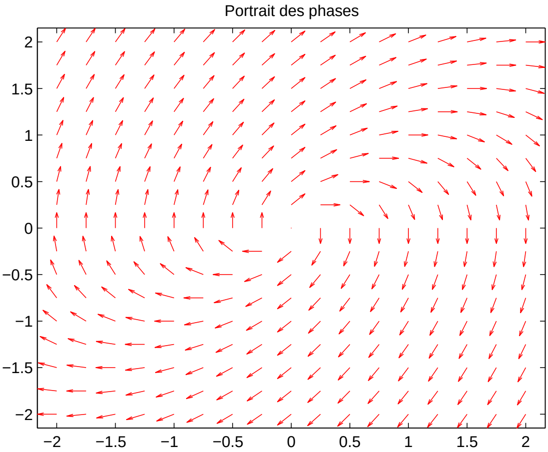
Critères d'instabilité de Liapounov

Theorem (Critère d'instabilité de Liapounov)

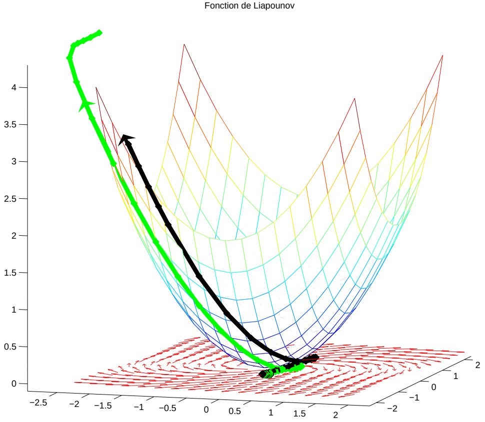
Soit $V(\cdot)$ *une fonction continue ainsi que ses dérivées partielles dans un voisinage de* $\bar{x}$*. Soit* $V(\bar{x}) = 0$ *et positive dans des points arbitrairement proches à* $\bar{x}$*. Si la fonction* $\dot{V}(\cdot) = \nabla V(x) f$ *est définie positive en* $\bar{x}$*, alors l'état d'équilibre* $\bar{x}$ *est instable.*

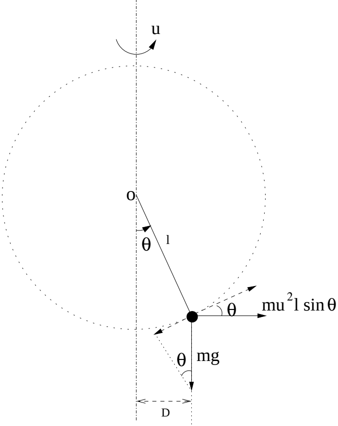
Exemple

Si $b = -1 < 0$ dans l'exemple précédent voici le portrait de phase du système



Voici la fonction $V(x_1, x_2)$ et l'évolution de la valeur $V(x_1(t), x_2(t))$ le long de deux solutions du système ($x^0 = [0.01, 0.01]$ et $x^0 = [0.01, -0.01]$)





$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2 + u^2\sin(x_1)\cos(x_1) \end{cases}$$

où $\theta = x_1$, $\dot{\theta} = x_2$

Système pendule

Considérons le système régi par

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - kl\dot{\theta}$$

où de manière équivalente par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2 \end{cases}$$

où $\theta = x_1$, $\dot{\theta} = x_2$.
Nous pouvons définir la fonction

$$V(x_1, x_2) = mgl(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}ml^2x_2^2$$

qui équivaut à l'énergie mécanique du système, c.-à-d. la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique. Cette fonction est une fonction continue autant que ses dérivées partielles. Aussi elle est définie positive puisqu'elle est positive partout mis à part $x_1 = 0, x_2 = 0$.

Notons aussi que

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = mgl \sin x_1 f_1 + ml^2 x_2 f_2 =$$
$$= mgl \sin(x_1) x_2 - ml^2 x_2 \left(\frac{g}{l} \sin(x_1) + \frac{k}{m} x_2 \right) = -kl^2 x_2^2 \leq 0$$

Il s'ensuit que si $k > 0$ $x = [0, 0]$ est un équilibre asymptotiquement stable.
Si $k = 0$, l'équilibre est simplement stable.

Exercice

Analysez la stabilité du point d'équilibre de ce système en utilisant les fonctions de Lyapunov

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

Systèmes autonomes

- L'étude des systèmes dans la forme $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ est donc essentielle afin d'étudier les propriétés de n'importe quel système dynamique.
- Selon les arguments de la fonction f nous pouvons faire la distinction entre deux cas:
  - **Systèmes autonomes:** où la variable t n'apparaît pas explicitement dans f. Par exemple

$$\dot{x} = ax$$

  - **Systèmes non autonomes:** où la variable t apparaît explicitement dans f. Par exemple

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -cx_2 - \sin x_1 + \rho \sin t \end{cases}$$

Systèmes autonomes (II)

- Notons que la dynamique d'un système autonome est beaucoup plus simple. Si le système passe à travers une certaine configuration l'évolution qui va suivre sera toujours la même. La connaissance de la configuration à un instant t permet de définir de manière univoque l'évolution du système
- Toutefois la distinction est en quelque sens artificielle, puisque chaque système non autonome peut être mis sous forme autonome à condition d'ajouter une nouvelle variable $x_t = t$. Le système précédent devient donc

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -cx_2 - \sin x_1 + \rho \sin x_t \\ \dot{x}_t = 1 \end{cases}$$

- En traitant le cas autonome, nous pouvons donc avoir un aperçu complet des systèmes dynamiques.