# Modélisation et Simulation

## Systèmes linéaires

G. Bontempi,
Département d'Informatique
Boulevard de Triomphe - CP 212

October 10, 2023

# Fonctions linéaires

Les fonctions linéaires $f(x)$ sont parmi les fonctions les plus simples qu'on puisse rencontrer.
Elles ont la forme d'un produit scalaire

$$f(x) = a^T x, \qquad x \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n$$

Elles ont deux importantes propriétés

- $f(x^{(1)} + x^{(2)}) = f(x^{(1)}) + f(x^{(2)})$
- $f(kx) = kf(x), \qquad k \in \mathbb{R}$

qui impliquent

$$f(k_1 x^{(1)} + k_2 x^{(2)}) = k_1 f(x^{(1)}) + k_2 f(x^{(2)})$$

# Mouvements libre et forcé

Soit donné un système dynamique avec fonction de transition $\varphi(\cdot)$. Considérons les deux mouvements particuliers:

- **Mouvement libre:** le mouvement obtenu quand la fonction d'entrée $u(\cdot) = 0$ est nulle

$$\varphi_l(\cdot, t_0, x^0) = \varphi(\cdot, t_0, x^0, 0)$$

- **Mouvement forcé:** le mouvement obtenu quand l'état initial $x(t_0) = x^0 = 0$ est nul

$$\varphi_f(\cdot, t_0, u(\cdot)) = \varphi(\cdot, t_0, 0, u(\cdot))$$

# Système dynamique linéaire

Un système dynamique **linéaire** jouit des propriétés suivantes.

- Chaque mouvement est la **somme** des mouvements libres et forcés correspondants, c.-à-d.

$$\varphi(\cdot, t_0, x^0, u(\cdot)) = \varphi_l(\cdot, t_0, x^0) + \varphi_f(\cdot, t_0, u(\cdot))$$

- la transformation $\varphi_l$ est une transformation linéaire,

$$\varphi_l(t, t_0, ax^{01} + bx^{02}) = a\varphi_l(t, t_0, x^{01}) + b\varphi_l(t, t_0, x^{02})$$

  si l'état initial est une combinaison linéaire de $x^{01}$ et $x^{02}$ alors le mouvement libre correspondant est la même combinaison linéaire des deux mouvements libres associés à $x^{01}$ et $x^{02}$

- la transformation $\varphi_f$ est une transformation linéaire,

$$\varphi_f(t, t_0, au_1(\cdot) + bu_2(\cdot)) = a\varphi_f(t, t_0, u_1(\cdot)) + b\varphi_f(t, t_0, u_2(\cdot))$$

  si l'entrée est une combinaison linéaire de $u_1(\cdot)$ et $u_2(\cdot)$ alors le mouvement forcé correspondant est la même combinaison linéaire des deux mouvements forcés associés à $u_1(\cdot)$ et $u_2(\cdot)$

- la transformation de sortie est linéaire.

# Exemple

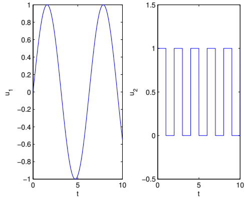
Considérons le système linéaire

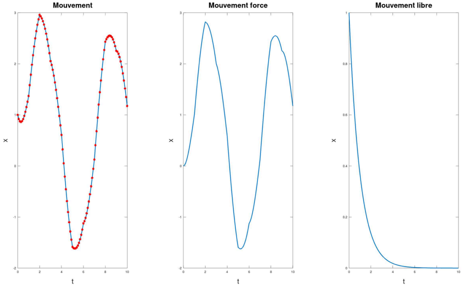
$$\dot{x} = -x(t) + u(t)$$

où $x(0) = 1$.

Nous allons montrer par le biais d'une simulation que le mouvement peut être décomposé dans la **somme d'un mouvement libre et d'un mouvement forcé** et que ces mouvements sont linéaires dans l'état initial $x^0$ et la fonction d'entrée.

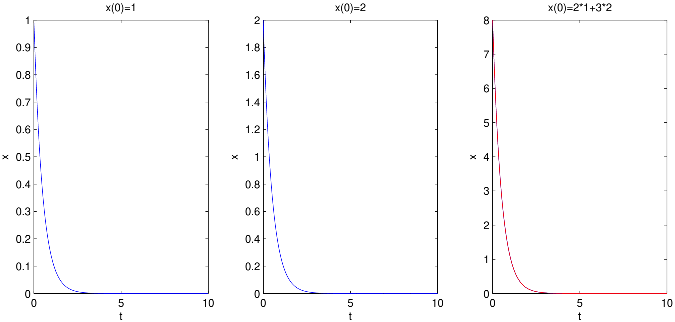
Mouvement ($x(0) = 1$, $u = 3u_1(t) + u_2(t)$)= mouvement forcé ($x(0) = 0$) + libre ($u = 0$)



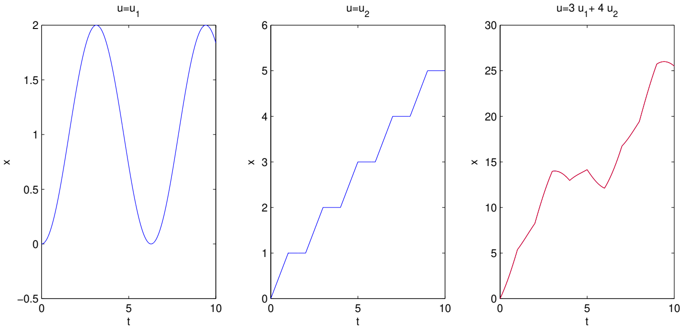

Code Octave `demo_lin_sup.m`

# Exemple: superposition mouvement libre




Superposition des conditions initiales dans le mouvement libre ($u(\cdot) = 0$)).

# Exemple: superposition mouvement forcé




Superposition des entrées dans le mouvement forcé ($x(0) = 0$).

# Propriétés des systèmes linéaires

### Theorem

*Chaque système à dimensions finies, linéaire et régulier peut être décrit par des équations du genre*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t)$$

*où $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ et $C(\cdot)$ sont matrices continues sur $T$.*

Notons que si $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$, alors $A(\cdot)$ est une matrice d'ordre $[n, n]$, $B(\cdot)$ est une matrice d'ordre $[n, m]$ et $C(\cdot)$ est une matrice d'ordre $[p, n]$.

# Propriétés des systèmes linéaires (II)

Le théorème inverse est aussi valable.

### Theorem

*Soient données les trois matrices $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ continues en $T = \mathbb{R}$ et les équations,*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned}$$

*alors il existe un et un seul système linéaire, régulier et à dimensions finies qui les satisfait.*

Définir un système linéaire revient à définir un triple de matrices $(A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot))$ où les deux premières décrivent la dépendance entrée-état et la troisième la dépendance état-sortie.

# Notation matricielle

La notation

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned}$$

est une manière compacte pour écrire l'ensemble d'équations suivantes

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_{11}(t)u_1(t) + \cdots + b_{1m}(t)u_(t) \\ \vdots & \\ \dot{x}_n(t) & = a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_{n1}(t)u_1(t) + \cdots + b_{nm}(t)u_(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(t) & = c_{11}(t)x_1(t) + \cdots + c_{1n}(t)x_n(t) \\ \vdots & \\ y_p(t) & = c_{p1}(t)x_1(t) + \cdots + c_{pn}(t)x_n(t) \end{cases}$$

# Systèmes linéaires invariants

Une sous-classe remarquable des systèmes linéaires est la classe des systèmes invariants, caractérisés par le fait que les matrices $(A(\cdot) = A, B(\cdot) = B, C(\cdot) = C)$ sont constantes et ne dépendent donc pas du temps.

# Stabilité mouvement/équilibre

Nous pouvons exprimer le problème de la stabilité d'un mouvement d'un système linéaire sous forme d'un problème de stabilité de l'état d'origine d'un nouveau système.

Soit $\bar{x}(\cdot) = \varphi(\cdot, \bar{t}, \bar{x}(\bar{t}), \bar{u}(\cdot))$ le mouvement **nominal** qui satisfait la relation

$$\dot{\bar{x}}(t) = A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t), \qquad t \geq \bar{t}$$

Soit $\hat{x}(\cdot) = \varphi(\cdot, \bar{t}, \hat{x}(\bar{t}), \bar{u}(\cdot))$ le mouvement **perturbé** qui satisfait la relation

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)\bar{u}(t), \qquad t \geq \bar{t}$$

Nous définissons le mouvement $z(\cdot)$ comme la différence entre le mouvement perturbé et le mouvement nominal

$$z(t) = \hat{x}(t) - \bar{x}(t)$$

- La dynamique de la **perturbation** $z(t)$ est

$$\dot{z}(t) = \dot{\hat{x}}(t) - \dot{\bar{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)\bar{u}(t) - A(t)\bar{x}(t) - B(t)\bar{u}(t) = \\ = A(t)z(t)$$

- Dans un système linéaire, la stabilité (instabilité) d'un mouvement implique la stabilité (instabilité) de **tous** les mouvements et en particulier aussi celui de **l'origine** de l'espace d'état (qui est un état d'équilibre en correspondance de $\bar{u} = 0$)
- La stabilité d'un système linéaire dépend seulement des propriétés de la **matrice** $A(\cdot)$. La stabilité d'un système linéaire peut être étudiée en analysant la stabilité de l'origine du système libre
$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

# Stabilité: cas linéaire

Il est possible donc de formuler des définitions de stabilité pour le mouvement libre dans le cas linéaire.

### Definition

Un système dynamique linéaire est dit *simplement stable* si son mouvement libre est limité pour chaque valeur de la condition initiale.

### Definition

Un système dynamique linéaire est dit *asymptotiquement stable* si le mouvement libre tend vers l'origine pour $t \to \infty$ pour chaque valeur de la condition initiale.

### Definition

Un système dynamique linéaire est dit *instable* s'il existe au moins une condition initiale telle que le mouvement libre qui en suit soit non limité.

# Stabilité et valeurs propres

## Definition (Polynôme caractéristique)

Le polynôme caractéristique $\Delta_A$ d'une matrice $A$ est le polynôme

$$\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n$$

L'équation $\Delta_A(\cdot) = 0$ s'appelle *équation caractéristique* et ses racines $\lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$ les valeurs propres (complexes) de la matrice $A$.

Puisque

$$\det(\lambda I - A) = \det((-1) * (A - \lambda I)) = (-1)^n \det(A - \lambda I)$$

pour $n = 2$

$$\det(\lambda I - A) = \det(A - \lambda I)$$

# Stabilité et valeurs propres (II)

L'étude de stabilité d'un système linéaire peut être ramenée au calcul du **signe de la partie réelle des valeurs propres** de la matrice $A$.

**Theorem**

$\dot{x}(t) = Ax(t)$ *est asymptotiquement stable ssi* **toutes** *les valeurs propres de la matrice* $A$ *ont une* **partie réelle négative**.

**Theorem**

$\dot{x}(t) = Ax(t)$ *est simplement stable ssi toutes les valeurs propres de la matrice* $A$ *ont une partie réelle non positive et celles avec partie réelle nulle (par exemple valeurs imaginaires) ont une multiplicité* $1$.

**Theorem**

$\dot{x}(t) = Ax(t)$ *est instable ssi il existe soit* **au moins une valeur propre avec une partie réelle positive** *soit au moins une valeur propre avec une partie réelle nulle et multiplicité supérieure à* $1$.

# Condition nécessaire

### Theorem

*Condition nécessaire pour la stabilité asymptotique de $A$ est que tous les coefficients $a_i$ du polynôme caractéristique soient positifs.*

- Il s'ensuit qu'une matrice $A$ dont le polynôme caractéristique ait quelque coefficient négatif ou nul correspond à un système qui n'est pas asymptotiquement stable.

# Stabilité et connexion

Considérons la stabilité d'un système résultant de l'interconnexion de plusieurs sous-systèmes.

**Theorem**

*Un système linéaire* $(A, B, C)$ *composé par la cascade (ou le parallèle) de deux sous-systèmes linéaires* $(A_1, B_1, C_1)$ *et* $(A_2, B_2, C_2)$ *est asymptotiquement stable si et seulement si les deux sous-systèmes sont asymptotiquement stables.*

Notons aussi que le polynôme caractéristique $\Delta_A(\cdot)$ d'un système composé par la **cascade** de deux sous-systèmes linéaires $(A_1, B_1, C_1)$ et $(A_2, B_2, C_2)$ est le **produit** des deux polynômes caractéristiques $\Delta_{A_1}(\cdot)$ et $\Delta_{A_2}(\cdot)$.

# Systèmes linéaire du premier ordre

- Ils sont caractérisés par une seule variable d'état $x$ et dans la version autonome ils ont la forme

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x^0, \qquad A \in \mathbb{R}, A \neq 0$$

- Ce modèle exprime une dynamique où le taux de (de)croissance de $x$ est proportionnel à sa taille.
- L'équation différentielle a la solution

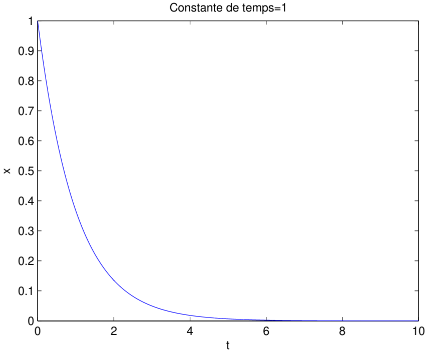
$$x(t) = ce^{At} \quad \text{où} \quad c = x(0).$$

- Puisque la valeur propre $\lambda_1 = A$, l'état d'équilibre $x = 0$ est un état asymptotiquement stable pour $A < 0$ et instable pour $A > 0$.

# Constante de temps

- Si $A < 0$ alors la quantité $\tau = -1/A$ est dénotée la *constante de temps*. Elle mesure le temps de réponse d'un système de premier ordre.
- Les systèmes avec petite $\tau$ répondent vite aux entrées, ceux avec une grande $\tau$ répondent lentement.
- On considère qu'un système autonome est très proche à son état stable après qu'un intervalle de temps égale à 4 **fois la constante de temps** s'est écoulé ($\exp^{-4} \approx 0.02$).

# Constant de temps



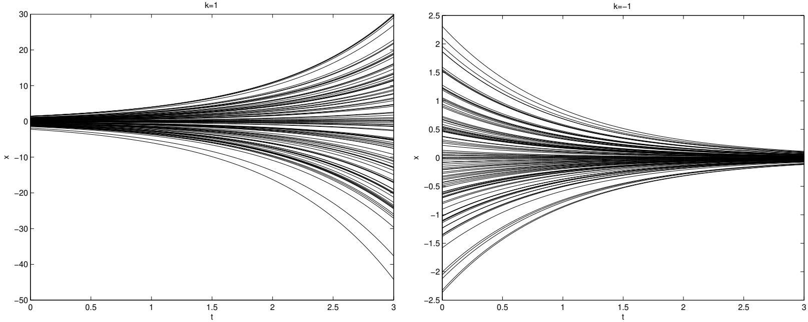

Évolution d'un système linéaire autonome d'ordre 1 avec $A = k = -1$, $x(0) = 1$ et une constante de temps $\tau = 1$.

Script Octave `demo_lin1.m`

# Exemple

- Considérons un exemple issu de la finance: soit $x$ un capitale qui est investi à un taux d'intérêt constant $k$. Supposons que la croissance du capital ait lieu de manière continue.
- L'évolution du capital peut être décrite par une équation du type
$$\dot{x}(t) = kx(t)$$
où le scalaire $k$ est le seul élément de la matrice $A$.
- Cette modélisation est très simplifiée puisqu'elle se base sur plusieurs assomptions: par exemple le taux d'intérêt est constant dans le temps et indépendant du montant.

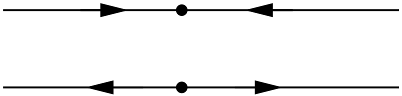
# Simulations




L'ensemble de trajectoires est obtenu en variant la condition initiale $x^0$.

# Portrait des phases

- Puisque le nombre de variables d'état est $n = 1$ l'espace des phases est unidimensionnel.
- Notons qu'il n'y a que deux configurations possibles: soit les trajectoires convergent sur le point fixe ($k < 0$), soit elles s'éloignent du point fixe ($k > 0$).



# Systèmes autonomes du second ordre

- Espace d'état est bidimensionnel.
- Les trajectoires sont des courbes dans le plan.
- Si autonome (c.-à-d. libre et invariant)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \dot{x} = Ax$$

- Le système est dit *non simple* si $\det A = 0$. Dans ce cas le système a un nombre infini de points d'équilibre (incluant l'origine).
- Le système est dit *simple* si $\det A \neq 0$. Dans ce cas l'état $(0, 0)$ est le seul état d'équilibre du système autonome.

# Exemple

- Soient $x_1$ et $x_2$ le nombre des membres de la population 1 et 2, respectivement.
- Ceci équivaut à supposer que les taux de changement de $x_1$ et $x_2$ sont une combinaison linéaire des tailles des populations 1 et 2.
- Le coefficient $a_{ij}$, $i \neq j$, représente la contribution que la population $j$ donne au développement de la population $i$. Cette action peut être constructive $a_{ij} > 0$ ou destructive $a_{ij} < 0$.
- Par exemple $a_{12} > 0$ représente une contribution positive au taux de croissance de $x_1$ de la part de $x_2$: la taille $x_1$ de la population 1 va croître autant plus rapidement que $x_2$ est grand.
- En d'autres termes $a_{12} > 0, a_{21} > 0$ modélisent une situation de **coopération** alors que $a_{12} < 0, a_{21} < 0$ dénotent une situation de **compétitivité**. Le **parasitisme** de 2 sur 1 peut être représenté par $a_{12} < 0, a_{21} > 0$

- Les coefficients $a_{ii}$ représentent l'effet des individus d'une population sur la croissance de la population à laquelle ils appartiennent.
- Une valeur $a_{ii} > 0$ signifie que la croissance de $i$ est auto-soutenue, par exemple par l'activité reproductive.
- Une valeur $a_{ii} < 0$ signifie que la compétition entre individus de l'espèce $i$ porte à une réduction du taux de croissance au fur et à mesure que la taille $x_i$ augmente.
- Notons qu'un modèle linéaire implique que si une population disparaît ($\bar{x}_1 = 0, \dot{\bar{x}}_1 = 0$), le même sort est réservé à l'autre population.

# Équation caractéristique du second ordre

$$\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

dont les racines complexes sont

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2}$$

- Notons que

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}A &= a_{11} + a_{22} = \mathrm{Re}(\lambda_1) + \mathrm{Re}(\lambda_2) \\ \det A &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \lambda_1 \lambda_2 \\ \Delta &= (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \\ &= (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

- Comportement autour de l'origine est déterminé par les valeurs propres de l'équation caractéristique.

**Theorem**

*Soient $x^{(1)}(t)$ et $x^{(2)}(t)$ deux solutions linéairement indépendantes du système $\dot{x} = Ax, x \in \mathbb{R}^2$. Si $\{c_1, c_2\}$ est un ensemble de 2 constants alors la solution générale peut être écrite de la manière*

$$x(t) = c_1 x^{(1)}(t) + c_2 x^{(2)}(t)$$

*où $c_1$ et $c_2$ dépendent de la condition initiale.*

Theorem

*Soient* $x^{(1)}(t)$ *et* $x^{(2)}(t)$ *deux solutions linéairement indépendantes du système* $\dot{x} = Ax, x \in \mathbb{R}^2$ *qui ont les vecteurs* $x^{(1)}(0)$ *et* $x^{(2)}(0)$ *comme conditions initiales. Si*

$$x(0) = c_1 x^{(1)}(0) + c_2 x^{(2)}(0)$$

*alors la seule solution qui a* $x(0)$ *comme condition initiale est*

$$x(t) = c_1 x^{(1)}(t) + c_2 x^{(2)}(t)$$

# Rappel

- Deux vecteurs $a$ et $b$ sont linéairement indépendants si toute combinaison linéaire finie nulle de ces vecteurs a nécessairement tous ses coefficients nuls.
- Toute écriture d'un vecteur comme combinaison linéaire de $a$ et $b$ est unique.
- Condition nécessaire et suffisante pour que $n$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ soient linéairement indépendants est que le déterminant de la matrice où les colonnes sont les vecteurs mêmes soit non nul.

# Valeurs propres réelles et distincts

- Soient $\lambda_1$ et $\lambda_2$ deux racines réelles et distinctes de l'équation caractéristique .
- Considérons un état vectoriel $x(t)$ à l'instant $t$ tel que $\dot{x}(t)$ ait la même direction que $x(t)$, c.-à-d.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) = \lambda x(t)$$

- Ceci signifie que le vecteur $x$ continuera à avoir la même direction tout au long de l'évolution du système. Un tel état doit satisfaire la relation $Ax = \lambda x$ et il est donc un **vecteur propre** de la matrice $A$.
- Chaque état sur un vecteur propre évolue le long de ce vecteur (trajectoire rectiligne).

- Notons que si le vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ est une solution du système $Ax = \lambda x$ alors aussi $kv$, $k \in \mathbb{R}$, sera un vecteur propre.
- On peut montrer que

$$(a_{11} - \lambda_1)x_1 + a_{12}x_2 = 0$$

est l'équation de la droite qui corresponde au vecteur propre $v_1 = [v_{11}, v_{12}]$ associée à $\lambda_1$ et que

$$a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_2)x_2 = 0$$

est l'équation de la droite qui corresponde au vecteur propre $v_2 = [v_{21}, v_{22}]$ associé à $\lambda_2$.
- On peut montrer que si $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont réelles et distinctes

$$x^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t} v_1, \qquad x^{(2)}(t) = e^{\lambda_2 t} v_2$$

sont **deux solutions linéairement indépendantes** du système.

- Si $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont réelles et distinctes la solution générale du système est

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_{11} + c_2 e^{\lambda_2 t} v_{21} \\ x_2(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_{12} + c_2 e^{\lambda_2 t} v_{22} \end{cases}$$

  où $c_1$ et $c_2$ sont deux paramètres qui doivent satisfaire la condition initiale $x(t_0) = x^0$
- Le mouvement du système est composé par deux composants exponentiels par rapport au temps et indépendants. La première est en direction du vecteur propre $v_1$ et la deuxième en direction du vecteur propre $v_2$.
- Si les deux valeurs propres sont réelles et négatives, les deux composantes du mouvement évoluent de manière exponentiellement négative en direction de l 'origine, où la vitesse de convergence est dictée par la valeur propre.

- Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ alors, pour $t \to \infty$, $e^{\lambda_1 t}$ converge vers zéro plus rapidement que $e^{\lambda_2 t}$, donc

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_2(t)}{x_1(t)} = \frac{c_2 e^{\lambda_2 t} v_{22}}{c_2 e^{\lambda_2 t} v_{21}} = \frac{v_{22}}{v_{21}}$$

  c.-à-d. la trajectoire s'aligne avec le vecteur propre $v_2$ qui correspond à la trajectoire la plus lente.
- De la même manière si $t \to -\infty$ la trajectoire s'aligne avec le vecteur propre $v_1$ qui correspond à la trajectoire la plus rapide.
- Si $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ alors pour $t \to \infty$ la trajectoire s'aligne avec le vecteur propre $v_1$ qui correspond à la trajectoire la plus rapide.
- Script Octave `demo_lin2.m`.

# Exemple

Soit

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x, \qquad x(0) = [0.5, 0].$$

Puisque le polynôme caractéristique est

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0,$$

les valeurs propres sont $\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$

- Notons qu'il y a une infinité de vecteurs propres colinéaires.
- Le vecteur propre associé à $\lambda_1 = 4$ est $v_1 = (v_{11}, v_{12})$. Nous avons:

$$A \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1 \Rightarrow \begin{cases} v_{11} + 3v_{12} = 4v_{11} \\ 3v_{11} + v_{12} = 4v_{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3v_{12} = 3v_{11} \\ 3v_{11} = 3v_{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{11} = v_{12}$$

et donc $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- Le même calcul pour $\lambda_2$ donne $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

La forme générale de la solution $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$ est donc

$$x(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-2t} + c_2 e^{4t} \\ -c_1 e^{-2t} + c_2 e^{4t} \end{bmatrix}$$

donc

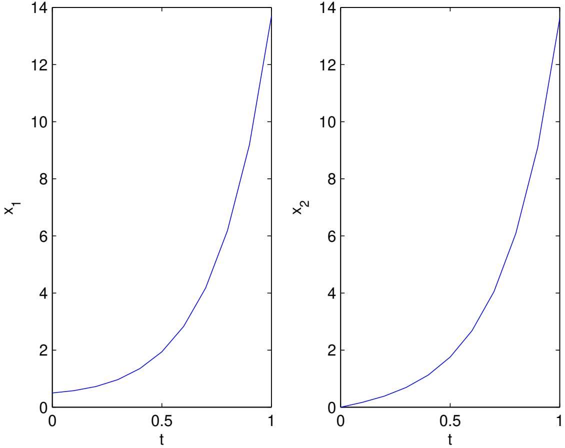
$$\begin{cases} x_1(t) = & c_1 e^{-2t} + c_2 e^{4t} \\ x_2(t) = & -c_1 e^{-2t} + c_2 e^{4t} \end{cases}$$

Puisque $x(0) = [0.5, 0]$ la condition initiale il faut fixer les paramètres constants $c_1$ et $c_2$ de manière à satisfaire $x(0) = [0.5, 0]$.

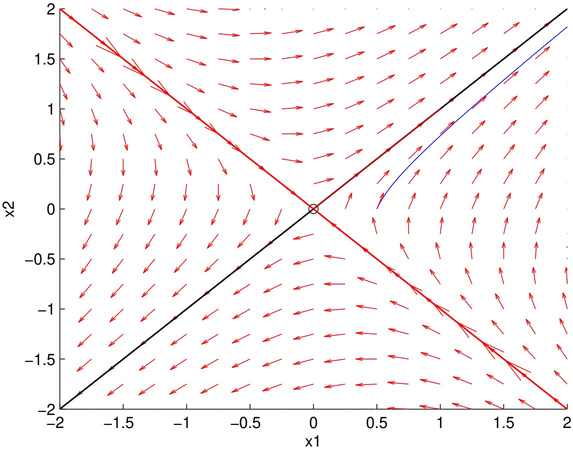
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0.5 \\ -c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \iff c_1 = c_2 = 0.25$$

$$\begin{cases} x_1(t) = & 0.25 e^{-2t} + 0.25 e^{4t} \\ x_2(t) = & -0.25 e^{-2t} + 0.25 e^{4t} \end{cases}$$

L'évolution temporelle des deux composantes de la solution $x(t)$ est



L'évolution temporelle de la solution $x(t)$ dans l'espace des phases est



# Outil de visualization portrait de phase et trajectoires

Disponible sur `https://gbonte.shinyapps.io/shine/`

Attention à la notation

$$A[1,1], A[2,1], A[1,2], A[2,2] \Rightarrow A = \begin{bmatrix} A[1,1] & A[2,1] \\ A[1,2] & A[2,2] \end{bmatrix}$$

$$[0,1,2,3] \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

# Valeurs propres réelles et distinctes

$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0, \forall i$: si les deux valeurs propres sont réelles et négatives l'état d'équilibre est asymptotiquement stable et il est appelé un *noeud stable*.

$\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0, \forall i$ : si les deux valeurs propres sont réelles et positives l'état d'équilibre est instable et il est appelé un *noeud instable*.

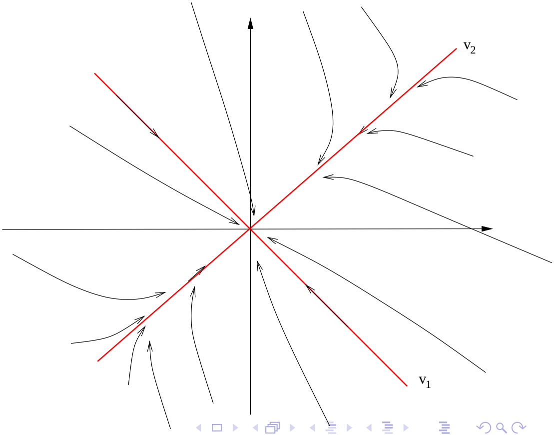
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ : Si l'une des valeurs propres est réelle et négative alors que l'autre est réelle et positive, la trajectoire du système converge sur le vecteur propre associé à la valeur propre positive et procède vers l'infini le long de cette direction. Dans ce cas l'état d'équilibre est instable et il est appelé un *col* ou une *selle*.

# Noeud stable

Soit $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

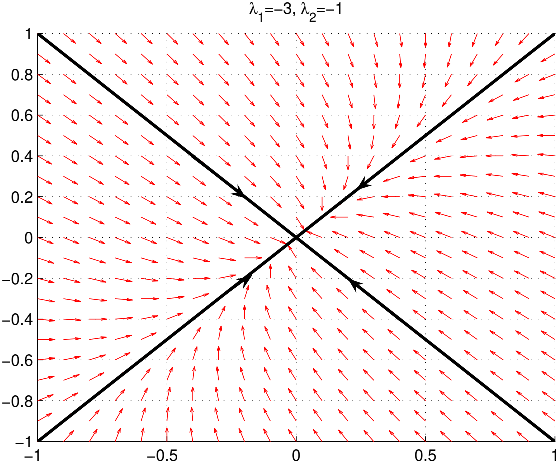
Deux trajectoires sont orientées comme le vecteur propre $v_1$ et deux comme le vecteur propre $v_2$.

Les autres trajectoires sont orientées comme $v_1$ pour $t \to -\infty$ et comme $v_2$ pour $t \to \infty$.



# Noeud stable

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_2 = -3, v_2 = [1, -1]^T \qquad \lambda_1 = -1, v_1 = [1, 1]^T$$

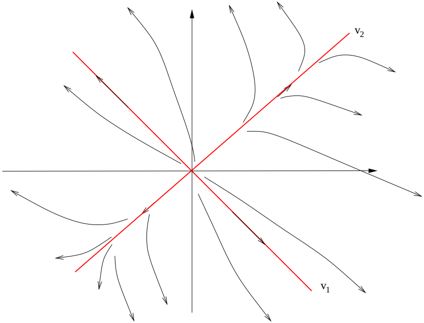


# Noeud instable

Soit $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$.

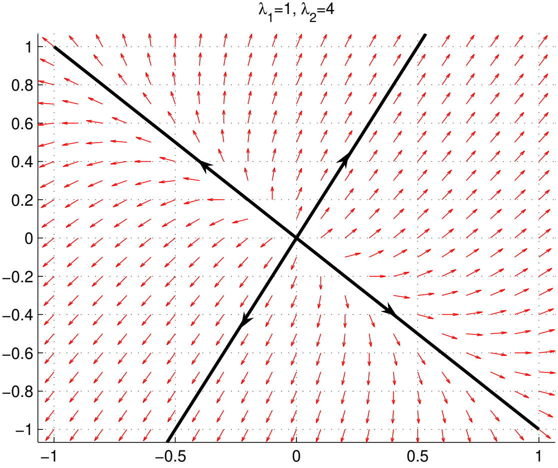
Deux trajectoires sont orientées comme le vecteur propre $v_1$ et deux comme le vecteur propre $v_2$. La vitesse le long de ces trajectoires dépend de la valeur absolue de $\lambda_i, i = 1, 2$, donc $v_1$ est plus rapide que $v_2$

Les autres trajectoires sont orientées comme $v_1$ pour $t \to \infty$ et comme $v_2$ pour $t \to -\infty$



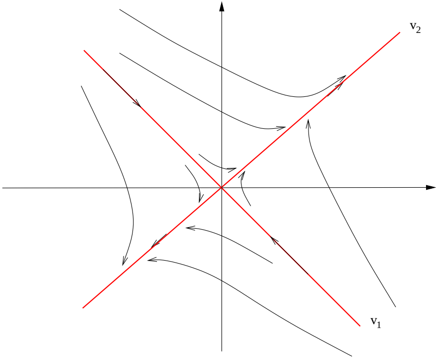
# Noeud instable

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1, v_1 = [-1, 1]^T, \qquad \lambda_2 = 4, v_2 = [1, 2]^T$$

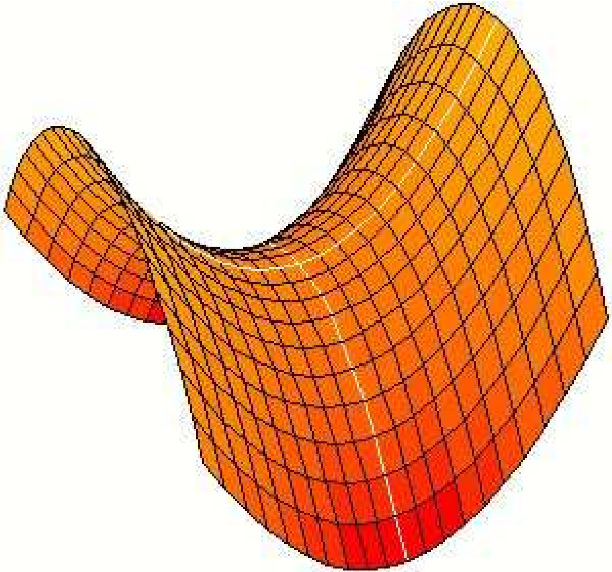


# Selle

Soit $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.
Deux trajectoires sont orientées comme le vecteur propre $v_1$ et deux comme le vecteur propre $v_2$.
Les autres trajectoires sont orientées comme le vecteur propre $v_1$ pour $t \to -\infty$ et comme $v_2$ pour $t \to \infty$

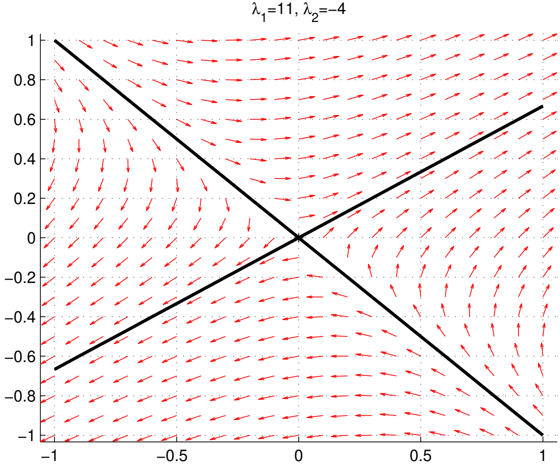


# Selle



# Selle

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 11, v_1 = [3/2, 1]^T, \qquad \lambda_2 = -4, v_2 = [-1, 1]^T$$



# Système non simple

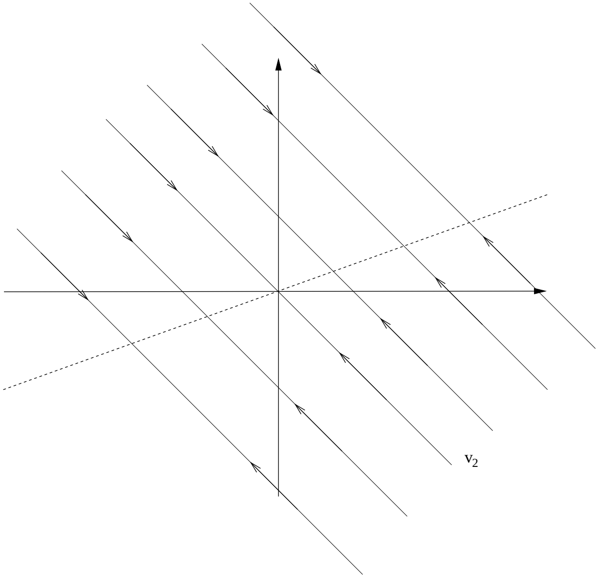
Considérons le cas où $\det A = \lambda_1 \lambda_2 = 0$ et la valeur propre $\lambda_2 \neq 0$.

- $\lambda_1 = 0$: tous les états qui appartiennent à la droite

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0$$

  sont des états d'équilibre. Aussi, toutes les trajectoires sont des droites parallèles à la droite $v_2$. Deux configurations sont possibles
  - $\lambda_2 < \lambda_1 = 0$: ceci implique que tous les états d'équilibre sont (simplement) stables.
  - $0 = \lambda_1 < \lambda_2$: ceci implique que tous les états d'équilibre sont instables.

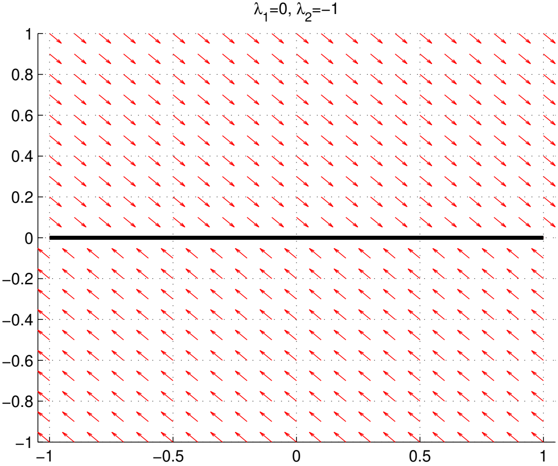
# Système non simple: $\lambda_2 < \lambda_1 = 0$



# Système non simple: $\lambda_2 < \lambda_1 = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0, , \qquad \lambda_2 = -1, v_2 = [-1, 1]^T$$

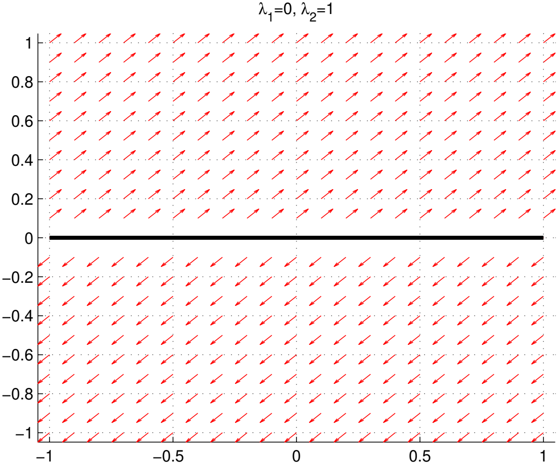
La droite des points d'équilibre stable est $x_2 = 0$.



# Système non simple: $0 = \lambda_1 < \lambda_2$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 1, v_2 = [1, 1]^T$$

La droite des points d'équilibre instable est $x_2 = 0$.



# Valeurs propres réelles et non distinctes

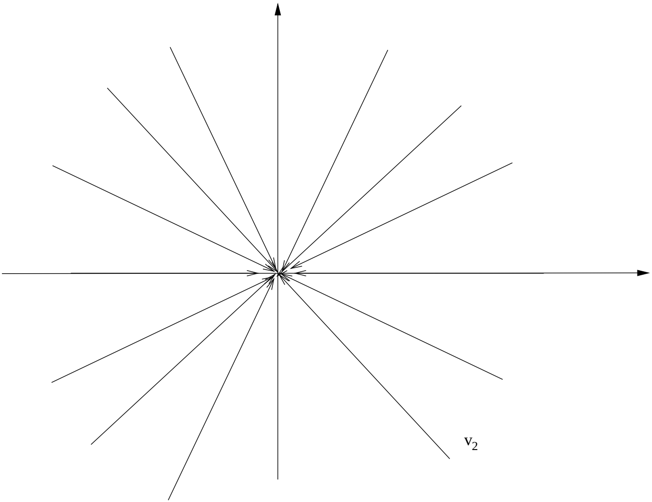
Considérons le cas $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$. Deux configurations peuvent avoir lieu:

- Matrice $A$ **diagonalisable** (diagonale ou semblable à une matrice diagonale): ceci a lieu si **tous les vecteurs sont des vecteurs propres**. Chaque droite qui passe par l'origine est une trajectoire. Si $\lambda < 0 (> 0)$ nous avons la (in)stabilité asymptotique. L'origine est dénommée *noeud singulier*.
- Matrice $A$ **non diagonalisable**: il existe **un seul vecteur propre** et donc seul une droite qui contient une trajectoire. L'origine est dénommée *noeud dégénéré*.

Notons que si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ le système est non simple, il y a une infinité de points d'équilibres instables (multiplicité plus grande que 1) et toutes les trajectoires se trouvent sur des droites parallèles.

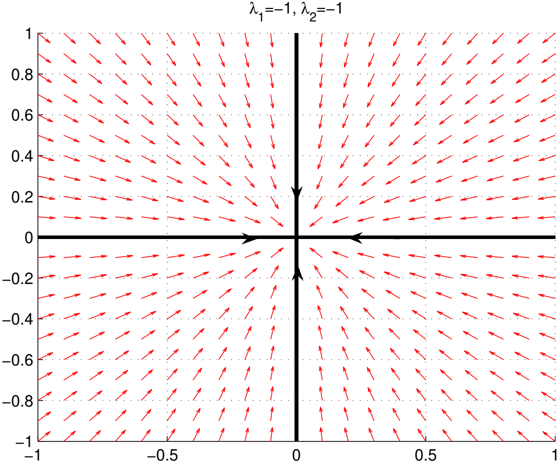
# Noeud singulier

Chaque droite qui passe par l'origine est une trajectoire.



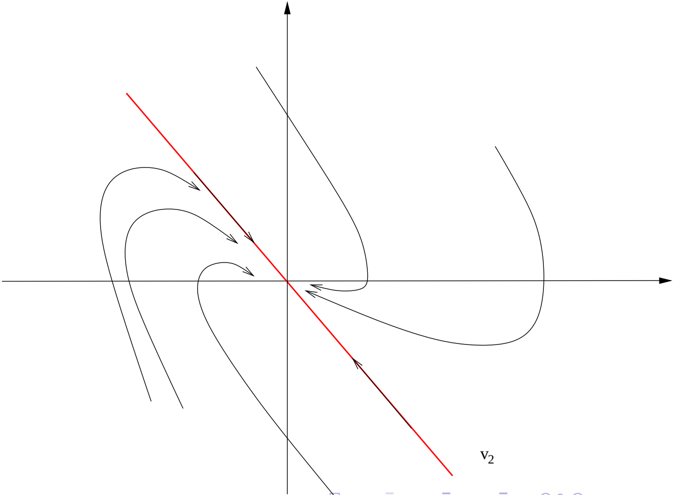
# Noeud singulier

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1, \qquad Av = \lambda v \text{ pour tout } v$$



$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

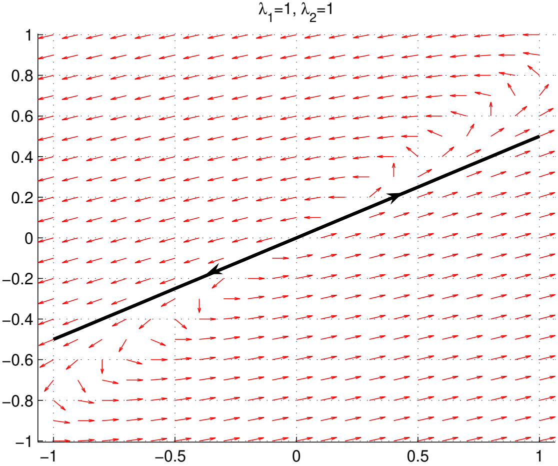
Il existe un seul vecteur propre et donc une seule droite qui contient une trajectoire rectiligne.



# Noeud dégénéré

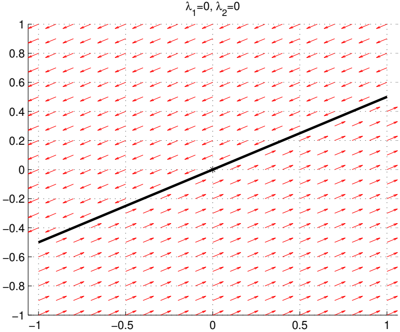
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1, \qquad v_1 = v_2 = [2, 1]^T$$

La matrice $A$ n'est pas diagonalisable.



# $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0, \qquad v_1 = v_2 = [2, 1]^T$$



# Valeurs propres complexes

Considérons le cas $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib$.
La solution générale est

$$\begin{cases} x_1(t) & = c_1 e^{at}\cos(bt) + c_2 e^{at}\sin(bt) \\ x_2(t) & = -c_1 e^{at}\sin(bt) + c_2 e^{at}\cos(bt) \end{cases}$$

# Valeurs propres complexes

Considérons le cas $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib$.

$a = 0$: les trajectoires sont des ellipses fermées avec période $T = \frac{2\pi}{b}$. L'origine est dite un *centre*.

$a < 0$: le système est asymptotiquement stable et les trajectoires convergent vers l'origine en suivant des spirales. L'origine est dite un *foyer stable*.

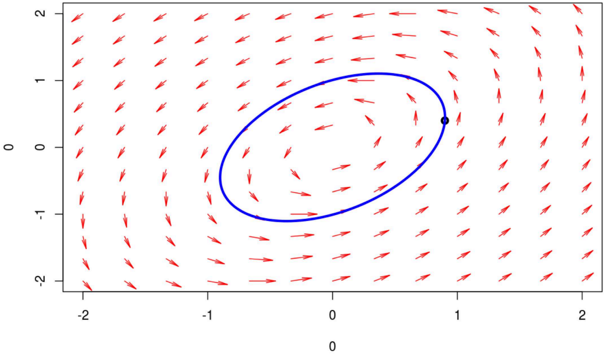
$a > 0$: le système est instable et les trajectoires s'éloignent de l'origine en suivant des spirales. L'origine est dite un *foyer instable*.

Les trajectoires peuvent spiraler autour de l'origine dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens anti-horaire.

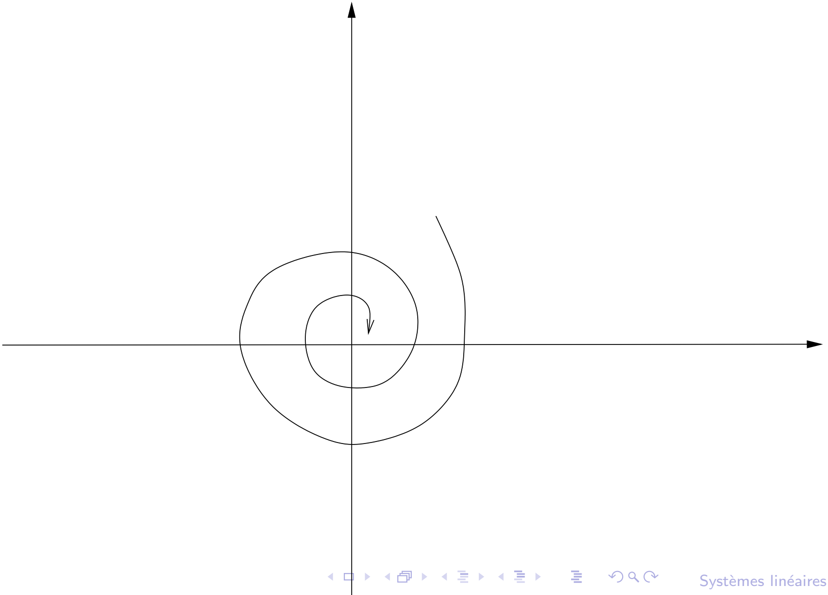
Notons que la possibilité d'avoir des oscillations pour une fonction d'entrée nulle ($u = 0$) est typique des systèmes linéaires.

# Centre

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{5}i,$$

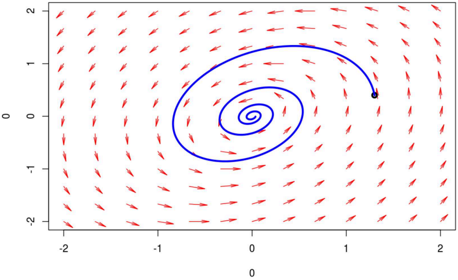


# Foyer stable



# Foyer stable

$$A = \begin{bmatrix} 1/3 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1/3 \pm 5/3\sqrt{2},$$

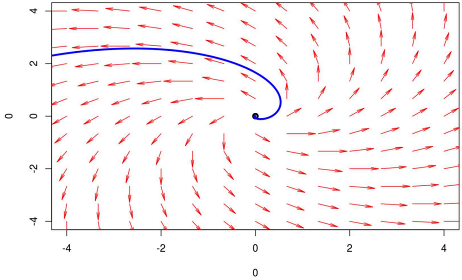


# Foyer stable: interprétation

- Cette situation diffère de la configuration centre analysée précédemment puisque $a_{11}$ a été réduit à $1/3$.
- Il s'ensuit que l'effet compétition interne de la population 2 devient plus important que l'effet d'auto-entretènement de la population 1
- Les deux populations s'éteignent après une oscillation amortie avec amplitude décroissante.

# Foyer instable

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm 2i,$$



# Résumé systèmes autonomes 2eme ordre

La classification des points d'équilibre peut être résumée de manière compacte en utilisant la trace et le déterminant de la matrice $A$. Puisque

$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2, \qquad \det(A) = \lambda_1 \lambda_2$$

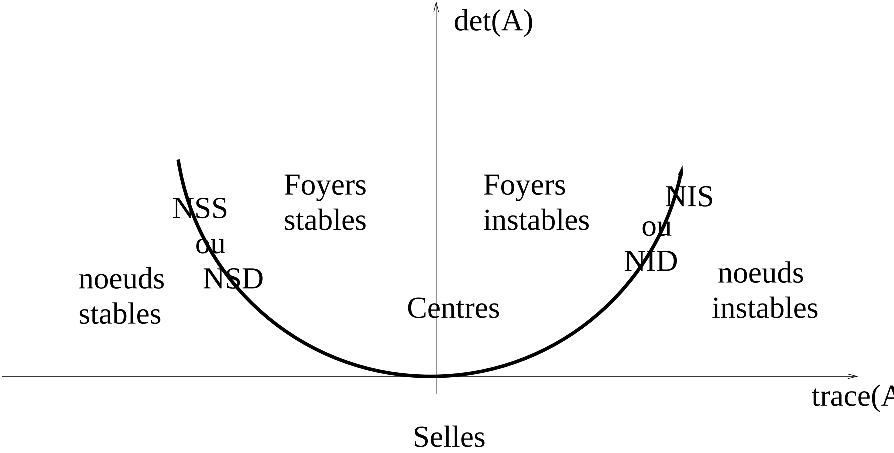
et l'équation caractéristique peut prendre la forme

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = \lambda^2-(\lambda_1+\lambda_2)\lambda+\lambda_1\lambda_2 = \lambda^2-\mathrm{tr}(A)\lambda+\det(A) = 0$$

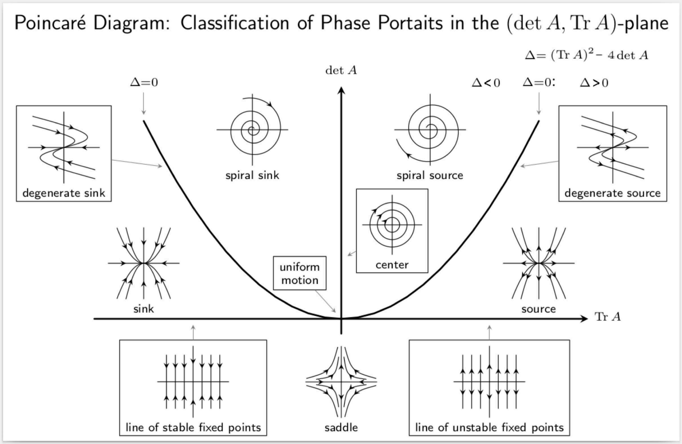
il en suit que

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mathrm{tr}(A) \pm \sqrt{(\mathrm{tr}(A))^2 - 4\det A}}{2}$$

L'ensemble de cas de figure peut donc être résumé par le graphique suivant dans le domaine $\mathrm{tr}(A), \det A$ où la parabole a équation $-4\det A + \mathrm{tr}(A)^2 = 0 \Rightarrow \det A = \mathrm{tr}(A)^2/4 \Rightarrow y = x^2/4$.




NSS: noeuds stables singuliers
NSD: noeuds stables degenerés
NIS: noeuds instables singuliers
NID: noeuds instables degenerés


Poincaré Diagram: Classification of Phase Portaits in the $(\det A, \operatorname{Tr} A)$-plane
$\Delta = (\operatorname{Tr} A)^2 - 4 \det A$
$\det A$
$\Delta=0$
$\Delta<0$
$\Delta=0$:
$\Delta>0$
degenerate sink
spiral sink
spiral source
degenerate source
center
uniform motion
sink
source
$\operatorname{Tr} A$
line of stable fixed points
saddle
line of unstable fixed points

# Dessin qualitatif de l'espace des phases

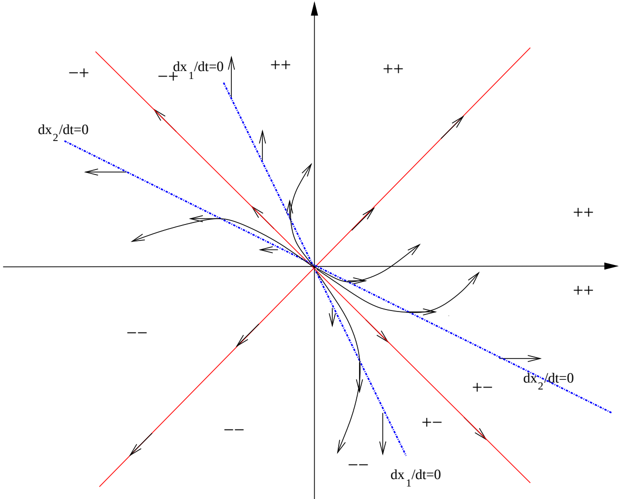
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

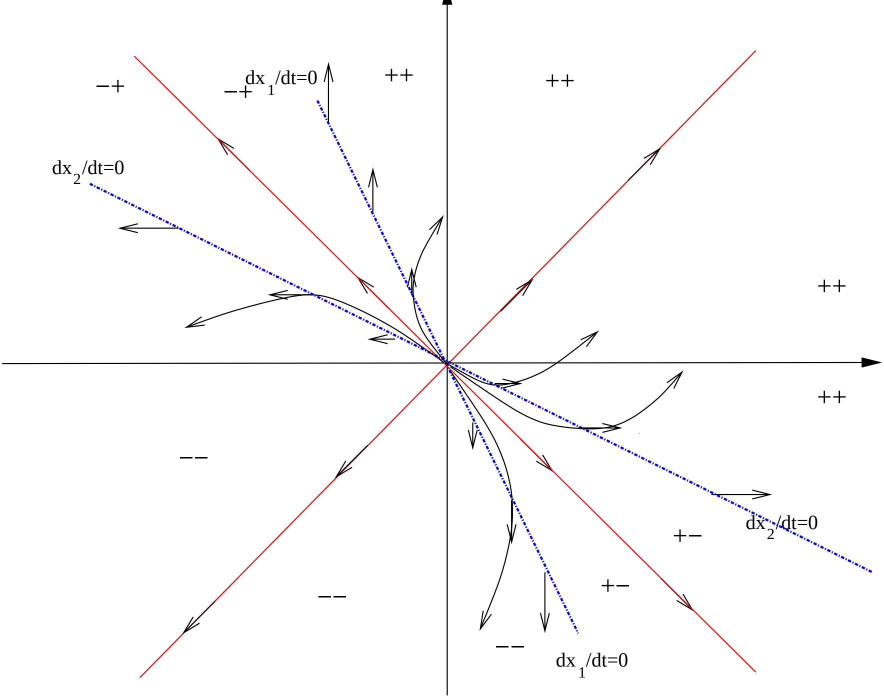
et supposons vouloir tracer l'espace des phases de manière qualitative, sans avoir recours à l'ordinateur. Etapes à suivre:

1. Calculer le(s) points d'équilibre
2. Étudier la nature de l'équilibre: puisque $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$ l'équilibre est un noeud instable.
3. Calculer les invariants: les deux vecteurs propres sont $v_1 = [1; -1]^T$ et $v_2 = [1; 1]^T$. Les deux invariants ont pour équations $x_2 = x_1$ et $x_2 = -x_1$.
4. Calculer les *isoclines*, c.-à-d. les courbes (dans ce cas les droites) sur lesquelles une des deux dérivées est nulle:

$$2x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -2x_1$$
$$x_1 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -x_1/2$$

La direction des trajectoires est donc horizontale ($\dot{x}_2 = 0$) sur la droite $x_2 = -x_1/2$ et verticale ($\dot{x}_1 = 0$) sur la droite $x_2 = -2x_1$ Les isoclines partagent la plan en quatre quadrants: pour chacun d'entre eux nous pouvons définir la direction des trajectoires sur la base des signes de $\dot{x}_2$ et $\dot{x}_1$.




−+
−+
dx 1/dt=0
++
++
dx 2/dt=0
++
++
−−
−−
−−
+−
+−
dx 2/dt=0
dx 1/dt=0

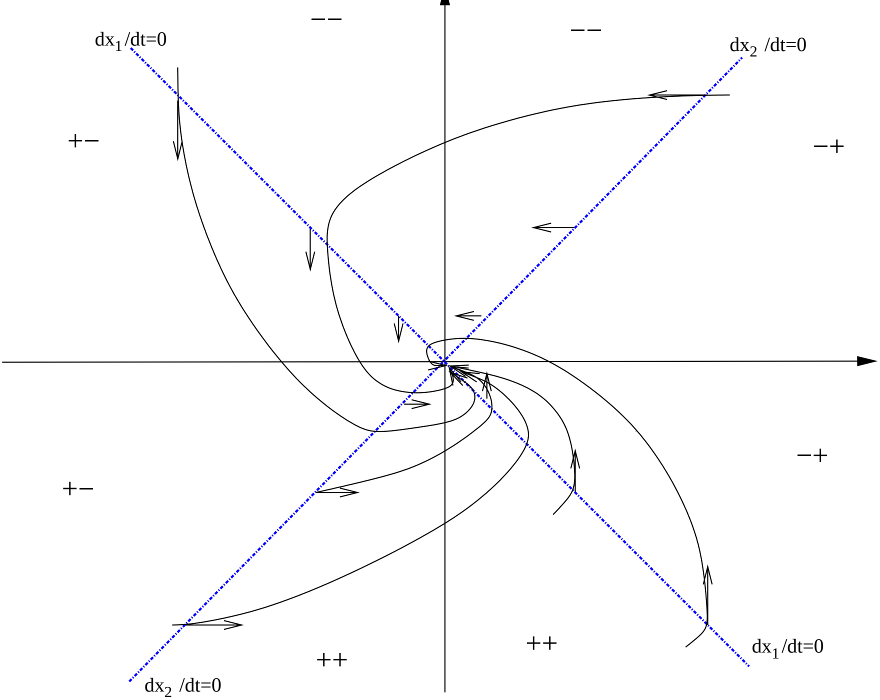
# Dessin qualitatif de l'espace des phases (II)

Considérons un autre système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

qui a comme valeurs propres $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. L'origine est donc un foyer stable et aucun invariant linéaire n'existe. Les deux isoclines ont les équations suivantes

- $x_2 = -x_1$ et sur cette droite $\dot{x}_1 = 0$ et $\dot{x}_2 = 2x_1$.
- $x_2 = x_1$ et sur cette droite $\dot{x}_2 = 0$ et $\dot{x}_1 = -2x_1$.

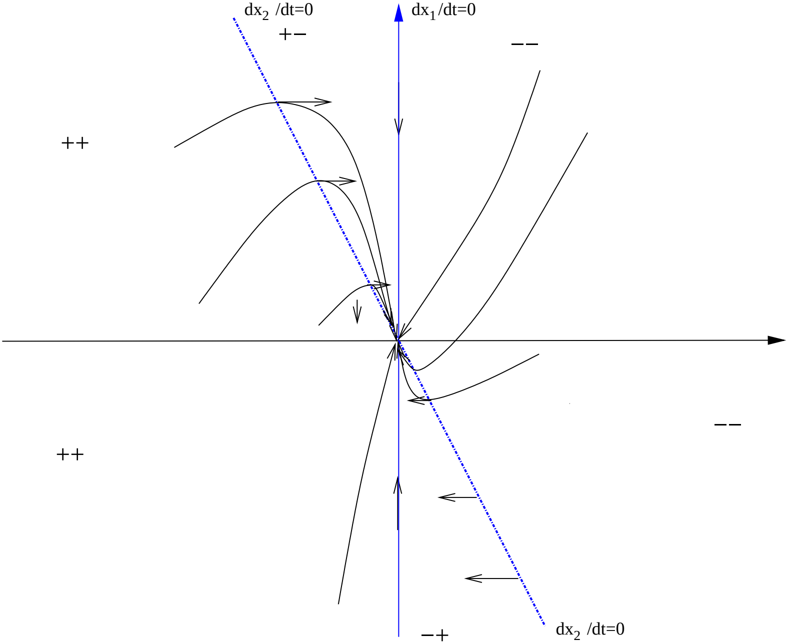

−−
−−
dx1/dt=0
dx2 /dt=0
+−
−+
−+
+−
++
++
dx1/dt=0
dx2 /dt=0

# Dessin qualitatif de l'espace des phases (III)

Considérons le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -2x_1 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - 2x_2 \end{array} \right.$$

L'équation caractéristique a deux solutions identiques $\lambda_{1,2} = -2$ auxquelles correspond le vecteur propre $[0, 1]^T$. L'origine est un noeud stable dégénéré.
L'invariant est donc l'axe $x_2$ qui est aussi une des deux isoclines ($\dot{x}_1 = 0$). La deuxième isocline est la droite $x_2 = -2x_1$.


dx2 /dt=0
dx1/dt=0
+−
−−
++
−−
++
−+
dx2 /dt=0