Modélisation et Simulation

Systèmes dynamiques

G. Bontempi
Département d'Informatique
Boulevard de Triomphe - CP 212
http://www.ulb.ac.be/di

September 28, 2022

Systèmes à temps continu et discret

Definition

Un système est *à temps continu* si l'ensemble T est l'ensemble des nombres réels.

Definition

Un système est *à temps discret* si l'ensemble T est un ensemble discret. Les systèmes à temps discrets peuvent être

- *synchrones* si les variables du système prennent leurs valeurs selon une fréquence préétablie (par exemple T est l'ensemble des nombres entiers),
- *asynchrones* si les instants de temps suivent une distribution aléatoire. Ces systèmes sont aussi appelés systèmes *à évènements discrets*.

Examples

- Système à temps continu: un système qui décrit le niveau d'un fleuve. Le système change d'une manière continue le long du temps.
- Système à temps discret synchrone est un système qui décrit l'évolution annuelle du Produit Intérieur Brut (PIB) d'une nation. Le temps s'écoule par à-coups.
- Système à évènements discrets: un système qui décrit le nombre de clients dans une banque. L'état change seulement quand un client entre ou sort de la banque.

- La modélisation d'un système comme système dynamique demande la définition de
  1. une échelle de temps
  2. une variable d'entrée u et une variable de sortie y.
- Comment définir l'entrée et la sortie d'un système?
  1. Entrées: variables qui peuvent être **contrôlées** ou modifiées
  2. Sorties: variables qui peuvent être **mesurées**.
- Supposons de vouloir étudier la réaction d'un patient avec de la température à l'administration d'un médicament. Quelles pourraient être les variables d'entrée et de sortie?
- Supposons de vouloir étudier l'efficacité d'une politique de réduction du trafic sur la pollution du centre-ville de Bruxelles. Quelles pourraient être les variables d'entrée et de sortie?

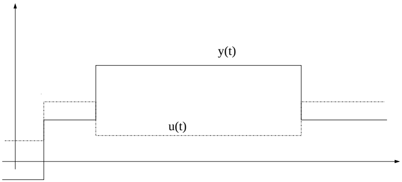
Système statique et dynamique

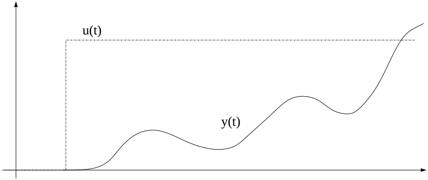
- Fixons l'évolution de la variable u dans un intervalle de temps $[t_0, t_f]$.
- Est-ce que dans un système dynamique quelconque la connaissance de u détermine de manière univoque le comportement de y? Dans le cas général, NON.
- Toutefois il existe un **cas très particulier** de système dynamique où la connaissance de u détermine de manière univoque le comportement de y: les systèmes *statiques*.

Système statique

- Un système est statique si la sortie change seulement en fonction de l'entrée, c.-à-d. aucun changement de la sortie n'a lieu si l'entrée est constante.
- Un système statique est un système sans mémoire (*memoryless*): un exemple est la résistance d'un circuit électrique (à l'instant t la sortie $V(t) = RI(t)$ dépend de l'entrée $I(t)$ au même instant).

Système statique et dynamique





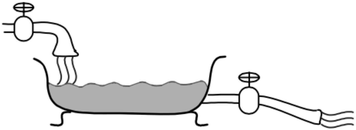
Dans les systèmes dynamiques, la connaissance de l'entrée n'est pas suffisante pour déterminer de manière univoque la sortie. La sortie $y(t)$ dépend non seulement de l'entrée présente $u(t)$ mais aussi des entrées passées.

Système dynamique

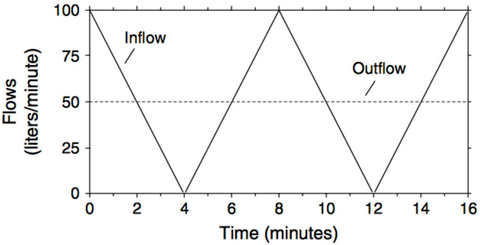
- Dans un système dynamique nous pouvons appliquer la même fonction d'entrée pendant le même intervalle mais avec des valeurs de sortie différentes.
- Exemple: u est la position de la pédale de l'accélérateur et y est la vitesse de la voiture.

Test du MIT

Des étudiants du MIT ont été demandés de prédire l'évolution de la quantité d'eau (sortie) dans une baignoire

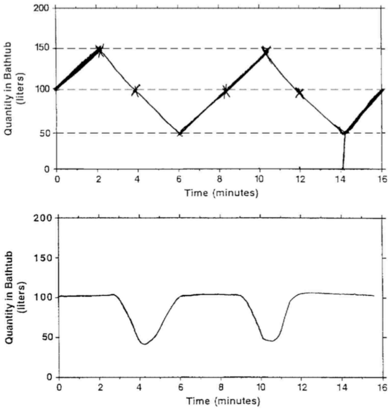


en connaissant le débit en entrée et débit en sortie (entrées) et la quantité d'eau initiale (100 litres)



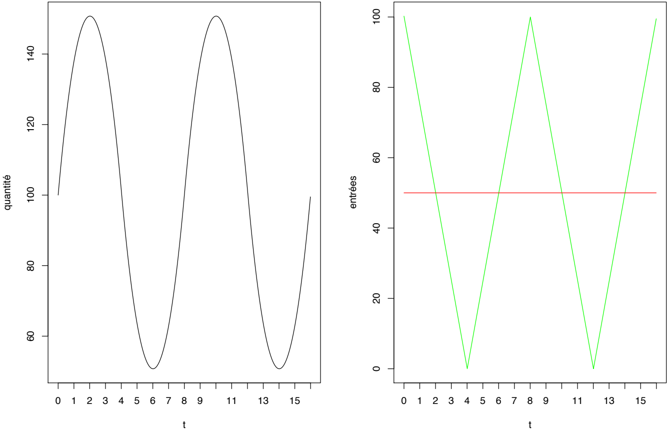
Test du MIT

La plupart (64%) des réponses furent erronées et firent l'assomption simpliste d'une corrélation entre la quantité d'eau et le débit en entrée (approche "pattern matching").



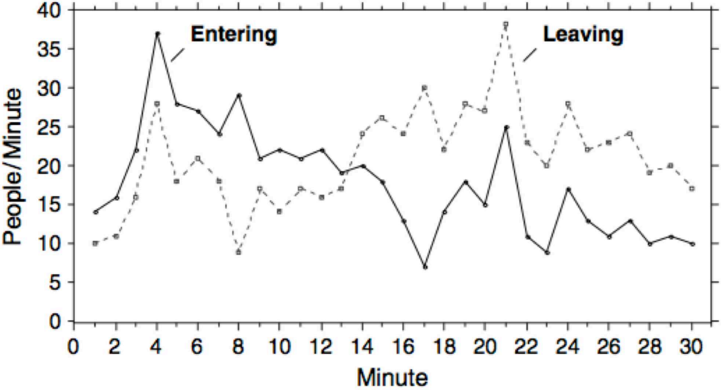
Essayez vous même

Entrées (contrôlables): débit "in" et "out"
Sortie (observable, quantité à contrôler) : quantité d'eau



Regardez $t = 2$ et $t = 6$: entrées identiques mais...

Foule dans un magasin



Questions:

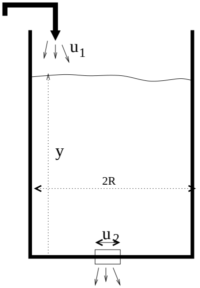
1. à quel moment le flux "in" ("out") est-il le plus important?
2. à quel moment y-a-t-il a plus (moins) de monde dans le magasin?

Variables d'état

- Les exemples précédents montrent la nécessité d' ajouter un ensemble de variables internes (ou *variables d'état*) pour réfléchir sur le comportement d'un système dynamique et le décrire d'une manière univoque.
- Un système statique est un système sans mémoire (*memoryless*)
- Un système dynamique est un système avec mémoire.

Exemple: réservoir

- Réservoir d'eau cylindrique de rayon R sur lequel nous pouvons effectuer des mesures ainsi que des actions de contrôle à intervalles réguliers de période Δ.
- Nous mesurons le niveau d'eau dans le réservoir et contrôlons le débit (volume de fluide écoulé par unité de temps) d'eau en entrée ainsi que la section d'un trou circulaire au fond.
- Comment le niveau d'eau est-il influencé par le débit en entrée et la taille du trou?



Exemple: réservoir (II)

Nous désignons donc le niveau d'eau comme sortie du système y, le débit en entrée comme entrée u_1 et la section du trou comme entrée u_2.
Soient:

- $y(t)$: le niveau d'eau à l'instant t.
- $u_1(t)$: le débit volumique (en m^3s^{-1}) en entrée à l'instant t.
- $u_2(t)$: la section du trou (en m^2) au fond du réservoir à l'instant t.

et $x(t)$ la variable (en m^3) qui dénote le volume d'eau dans le réservoir à l'instant t.

Exemple: réservoir (III)

Utilisons:

- la relation
$$d_{out}(t) = u_2(t)v(t)$$
entre débit volumique d_{out} (en m^3/s) en sortie, section de passage u_2 (en m^2) et vitesse v d'écoulement du fluide.
- la formule de Bernoulli
$$v(t) = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g\frac{x(t)}{\pi R^2}}$$
où h est le niveau de l'eau et g est l'accélération de gravité.

Système à temps discret

- entrées:

$$d_{out}(t) = u_2(t)\sqrt{2g\frac{x(t)}{\pi R^2}} \text{ : débit en sortie}$$
$$d(t) = u_1(t) - d_{out}(t)$$

- transition d'état:

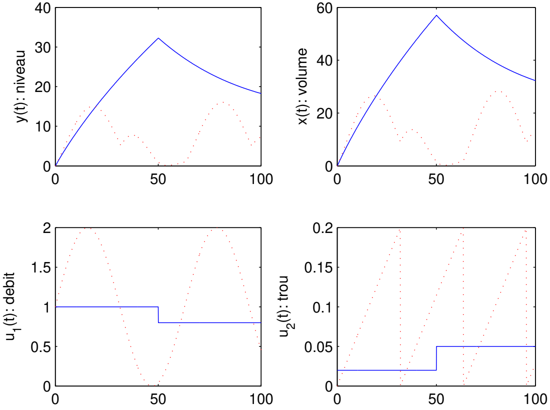
$$x(t) = \max\left(0, x(t-\Delta) + d(t-\Delta)\Delta\right) =$$
$$\max\left(0, x(t-\Delta) + \left(u_1(t-\Delta) - u_2(t-\Delta)\sqrt{2g\frac{x(t-\Delta)}{\pi R^2}}\right)\Delta\right)$$

- transformation de sortie $y(t) = \frac{x(t)}{\pi R^2}$

- Nous supposons que le débit reste constant pendant l'intervalle $[t - \Delta, t]$ où $\Delta > 0$ est le pas de discrétisation temporelle.
- Il s'ensuit que $d(t - \Delta)\Delta$ est le changement de volume d'eau dans l'intervalle $[t - \Delta, t]$.
- Le lien entre u et y n'est pas statique.

Exemple: réservoir (IV)

Supposons que $x(0) = 0$. Voici deux évolutions du système pour deux paires $\{u_1(\cdot), u_2(\cdot)\}$ de fonctions d'entrée différentes: une paire composée par des fonctions constantes par morceaux (en bleu) et une paire composée par des fonctions périodiques (en rouge).



La notion d'état d'un système

- Dans le réservoir la valeur de la **sortie n'est pas déterminée complètement par la valeur de l'entrée au même instant mais elle est l'effet de la totalité de l'histoire passée du système**.
- Il est nécessaire donc d'introduire, **suite à un exercice d'abstraction**, une troisième grandeur, appelée *état*, qui
  1. résume l'ensemble de l'information sur le passé et le présent du système (*mémoire*)
  2. dont la connaissance à l'instant t_1, conjointement avec la connaissance de l'entrée pendant l'intervalle $[t_1, t_2]$, est indispensable pour prédire la valeur de $y(t_2)$.

La notion d'état d'un système (II)

- On supposera que
  1. la connaissance de valeur $x(t)$ doit être suffisante pour déterminer la valeur de la sortie au même instant,
  2. la connaissance conjointe de $x(t_1)$, c.-à-d. de l'état à l'instant t_1 et de $u_{[t_1,t_2)}(\cdot)$, c.-à-d. de la valeur de l'entrée dans l'intervalle $[t_1, t_2)$ doit permettre le calcul de l'état (et donc de la sortie) à l'instant t_2.
- Le choix des variables d'état n'est pas univoque. Le même système peut être décrit par des ensembles de variables d'état différents.

Notions de temps, entrée et sortie

- L'ensemble T est l'*ensemble des temps*, tel que pour chaque $t \in T$, $u(t) \in U$ et $y(t) \in Y$.
- Selon la nature de T nous distinguons entre systèmes à *temps continu* et systèmes à *temps discret*.
- Les ensembles de fonctions d'entrée et sortie sont notés par Ω et Γ.
- $u(\cdot) \in \Omega$ ($y(\cdot) \in \Gamma$) est la fonction d'entrée (sortie) et $u(t) \in U$ ($y(t) \in Y$) la valeur prise par telle fonction à l'instant t.
- Exemple: Ω pourrait être l'ensemble des fonctions continues par morceaux et Γ l'ensemble des fonctions continues.

Définition axiomatique d'un système

Un système dynamique est une entité définie par les quantités suivantes:

1. un ensemble ordonné T des temps, un ensemble U d'entrée, un ensemble Ω des fonctions d'entrée admissibles, un ensemble X d'état, un ensemble Y de sortie et un ensemble Γ de fonctions de sortie.
2. la fonction de *transition d'état* $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ telle que

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x^0, u(\cdot))$$

   est la valeur de l'état à l'instant $t \in T$ obtenu en mettant le système dans l'état x^0 à l'instant t_0 et en appliquant la fonction d'entrée $u(\cdot) \in \Omega$ dans l'intervalle $[t_0, t)$.
3. la fonction $h(\cdot,\cdot)$, dite de *transformation de sortie*, telle que $y(t) = h(t, x(t))$ est la sortie à l'instant t.

Un système dynamique peut donc être résumé par le t-uple suivant: $S = (T, U, \Omega, X, Y, \Gamma, \varphi, h)$.

Mouvement et trajectoire

Considérons un temps t_0, un état initial $x(t_0)$ et une fonction d'entrée $u(\cdot)$.

Definition (Mouvement)

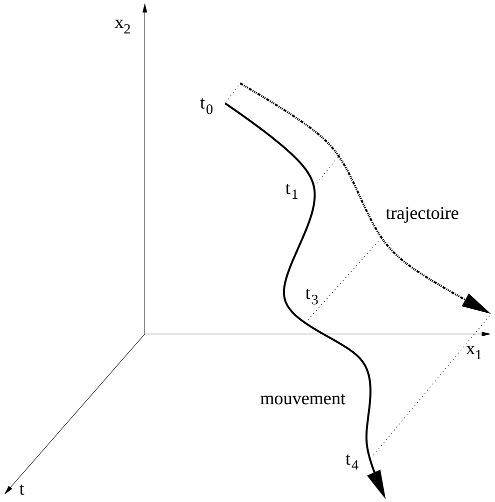
Soit $x(t) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$ la valeur de l'état à l'instant t. Le *mouvement* d'un système est l'ensemble des couples $(t, x(t))$ pour $t \geq t_0$.

Definition (Trajectoire)

La *trajectoire* d'un système est l'ensemble des valeurs $\{x(t)\}$ pour $t \geq t_0$.

Le mouvement est défini dans l'espace $T \times X$ alors que la trajectoire est définie comme la projection du mouvement dans l'espace X.

Mouvement et trajectoire



L'espace d'état est bidimensionnel.

État et sortie d'équilibre

Un état $\bar{x}$ est un *état d'équilibre* si on peut agir sur le système avec une fonction $u(\cdot)$ de façon que, en partant de l'état initial $\bar{x}$ le système reste *indéfiniment* dans le même état $\bar{x}$.

Definition

Un état $\bar{x} \in X$ est dit d'équilibre en temps infini si pour chaque instant initial $t_0 \in T$ il existe une fonction d'entrée $u(\cdot) \in \Omega$ telle que

$$\varphi(t, t_0, \bar{x}, u(\cdot)) = \bar{x}, \qquad \forall t > t_0$$

Definition

Une sortie $\bar{y} \in Y$ est dite d'équilibre en temps infini si pour chaque instant initial $t_0 \in T$ ils existent un état x et une fonction d'entrée $u(\cdot) \in \Omega$ telle que

$$h\left(t, \varphi(t, t_0, x, u(\cdot))\right) = \bar{y}, \qquad \forall t > t_0$$

États et sorties d'équilibre

- Si $\bar{x}$ est un état d'équilibre, est-ce que la sortie associée $h(t, \bar{x})$ est forcement d'équilibre?
- Si $\bar{y}$ est une sortie d'équilibre, est-ce qu'elle corresponde à un état d'équilibre?

Notions utiles:

- Une fonction $f : T \times X \to Y$ associe un nombre unique $f(t, x)$ aux valeurs t et x en entrée.
- Une fonction f est dite *injective* si tout élément de Y est associé au plus à un élément du domaine.

État d'équilibre (exemple)

Dans le système réservoir,

- l'état $x(t) = 0$ est un état d'équilibre pour toutes les fonctions d'entrée $u_1(\cdot), u_2(\cdot)$ où $d_{out} >= d_{in}$.
- un état quelconque $x(t)$ est un état d'équilibre pour toutes les fonctions d'entrée $u_1(\cdot), u_2(\cdot)$ où $d_{out} = d_{in}$.

Système invariant ou stationnaire

- Un système dynamique **invariant (ou stationnaire)** est un système où un mouvement obtenu à partir d'un état x^0 à l'instant t_0 suite à la fonction d'entrée $u_{[t_0,t)}(\cdot)$ est égal au mouvement obtenu en partant toujours de l'état x^0 à un instant de temps $t_0 + \delta$ et en appliquant une fonction d'entrée $u^{(\delta)}(t + \delta) = u(t)$ obtenue par translation de $u(\cdot)$.
- Caractéristiques du système ne changent pas avec le temps ou plutôt que *les expériences peuvent être reproduites de manière identique*.
- Les systèmes dynamiques non invariants sont tous les systèmes caractérisés par des changements périodiques ou qui subissent des phénomènes de vieillissement.

Definition

Un système est dit *invariant* si

1. l'ensemble T est un groupe additif (pour chaque $t_1 \in T$ si $t_2 \in T$ alors $t_1 + t_2 \in T$.)
2. pour chaque $u(\cdot) \in \Omega$ et pour chaque $\delta \in T$, la fonction $u^{(\delta)}(\cdot)$ obtenue de $u(\cdot)$ par translation , c.-à-d.

$$u(t) = u^{(\delta)}(t + \delta)$$

   appartient aussi à Ω.
3. la fonction de transition d'état satisfait la propriété

$$\varphi(t, t_0, x^0, u(\cdot)) = \varphi(t + \delta, t_0 + \delta, x^0, u^{(\delta)}(\cdot)), \qquad \forall \delta \in T$$

4. la transformation de sortie est indépendante de t

$$y(t) = h(x(t))$$

États accessibles

La notion d'accessibilité concerne un couple $(x^{(1)}, x^{(2)})$ d'états.

Definition

Un état $x^{(2)}$ est *accessible* à l'instant t_2 à partir d'un état $x^{(1)}$ s'il existe un instant $t_1 < t_2$ et une fonction d'entrée $u(\cdot) \in \Omega$ telle que

$$\varphi(t_2, t_1, x^{(1)}, u(\cdot)) = x^{(2)}$$

Système connexe

Parfois il est intéressant de considérer des systèmes où chaque état $x^{(2)}$ à l'instant t est accessible à partir de quelconque état $x^{(1)}$.

Definition

Un système est dit *connexe à l'instant t* si chaque état $x^{(2)}$ est accessible à l'instant t à partir de tous les états $x^{(1)} \in X$. Si cette condition est satisfaite pour tous les instants t, alors le système est dit *connexe*.

Notons que dans un système connexe:

- deux états $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ peuvent être liés par une trajectoire qui va de $x^{(1)}$ à $x^{(2)}$ aussi bien que par une trajectoire qui va de $x^{(2)}$ à $x^{(1)}$.
- si le système est aussi invariant, il existe au moins une trajectoire fermée (c.-à-d. un cycle) passant par chaque couple d'états.

États équivalents

Deux états équivalents sont deux états qui ne peuvent pas être distingués quellle que soit la fonction d'entrée utilisée.

Definition

Deux états $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ sont *équivalents* à l'instant t si pour toutes les fonctions d'entrée $u(\cdot) \in \Omega$

$$h(\cdot, \varphi(\cdot, t, x^{(1)}, u(\cdot))) = h(\cdot, \varphi(\cdot, t, x^{(2)}, u(\cdot)))$$

Notons que si $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ sont équivalents, alors aussi les états $x^{(1')}$ et $x^{(2')}$ obtenus en appliquant la même fonction d'entrée à $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ seront également équivalents.

Forme réduite

Definition

Un système est dit *en forme réduite à l'instant t* s'il n'existe pas un couple d'états équivalents $(x^{(1)}, x^{(2)})$ avec $x^{(1)} \neq x^{(2)}$.
Si cette condition est vérifiée pour tous les instants t alors le système est en *forme réduite*

Systèmes complexes

- Un sous-système est un système dynamique qui fait partie d'un système plus complexe.
- Notons que ce n'est pas toujours vrai qu'en connectant N systèmes dynamiques d'une manière quelconque on obtient encore un système dynamique. Ceci n'est valable que pour un sous-ensemble de systèmes (par exemple les systèmes linéaires).

Connexion en cascade

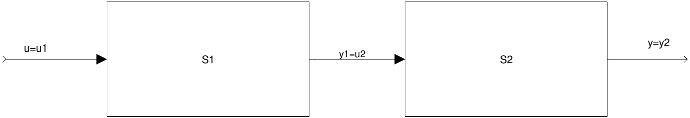
Definition

Deux systèmes S_1 et S_2 sont dits connectés *en cascade* quand $y_1 = u_2$, c.-à-d. quand la sortie du premier système coïncide avec l'entrée du deuxième.

Pour qu'il soit possible de connecter deux systèmes en cascades il est nécessaire que les conditions suivantes soient satisfaites:

$$T_1 = T_2, \qquad Y_1 \subset U_2, \qquad \Gamma_1 \subset \Omega_2$$

Connexion en cascade



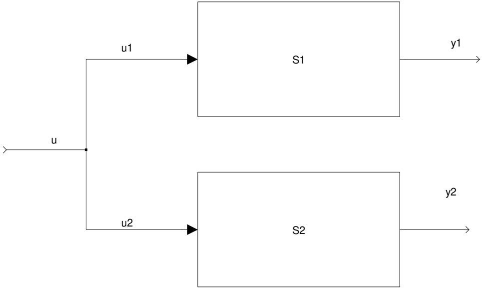
Connexion en parallèle

Definition

Deux systèmes S_1 et S_2 sont dits en parallèle quand $u_1 = u_2$, c.-à-d. quand ils ont la même entrée.

L'entrée du système est l'entrée commune aux deux sous-systèmes et la sortie est le couple (y_1, y_2) des sorties de chacun des sous-systèmes.
L'état du système résultant est le couple (x_1, x_2), où $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ et $x \in X_1 \times X_2$.

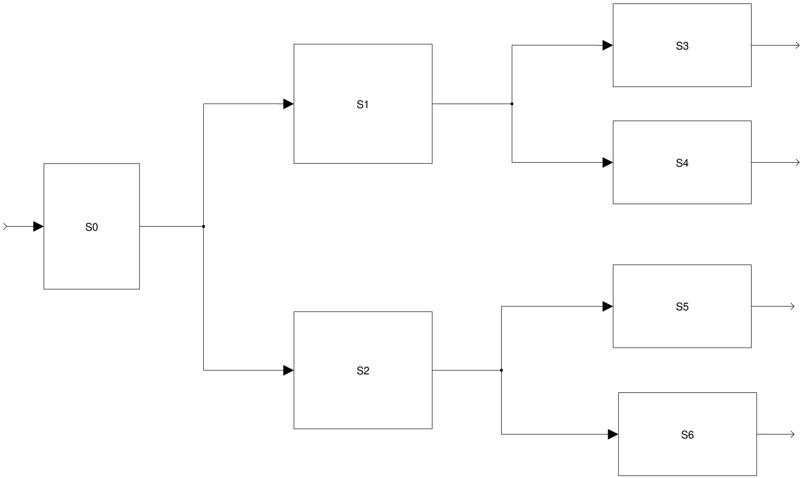
Connexion en parallèle



Systèmes hiérarchiques

- La combinaison de multiples sous-systèmes en cascade et en parallèle peut générer des systèmes de structure complexe.
- Un exemple est la structure hiérarchique. Dans cette organisation un sous-système à un certain niveau influence seulement les sous-systèmes à plus bas niveau et il est influencé exclusivement par des systèmes de niveau supérieur.
- Notons que dans cette structure, aucun cycle n'est présent.

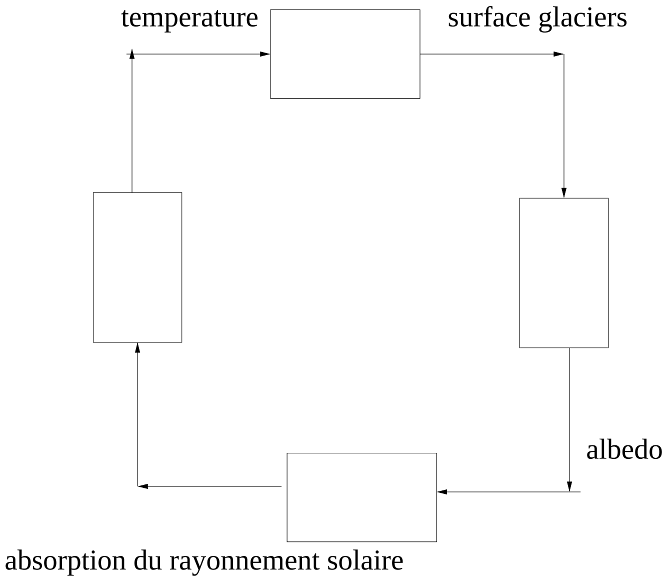
Systèmes hiérarchiques



Rétroaction

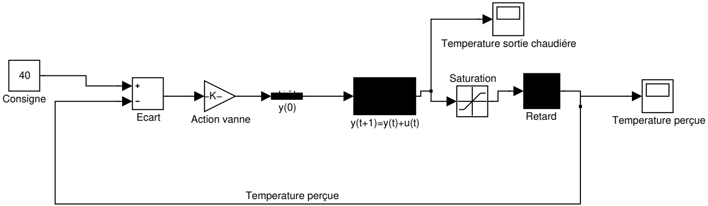
- Ce genre de connexion est la plus simple connexion qui contient une boucle
- Nous sommes en présence d'une **boucle de rétroaction** quand la sortie y_1 d'un système S_1 agit comme entrée u_2 sur un système S_2 dont la sortie va agir de nouveau sur S_1.
- La rétroaction est appelée *négative* si un changement de y_1 entraîne un changement de y_2 (et donc de u_1) qui s'oppose au changement de y_1.
- La rétroaction est appelée *positive* si un changement de y_1 entraîne un changement de y_2 (et donc de u_1) qui amplifie le changement de y_1.
- La notion de rétroaction est une des notions les plus fameuses et utiles de la théorie des systèmes. Il nous suffit de penser à l'ensemble des systèmes automatiques et de contrôle.

Rétroaction et climat



Exemple: régulation manuelle

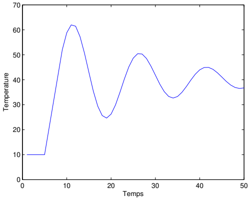
Régulation manuelle de la température d'une douche (consigne égale à 40 C).



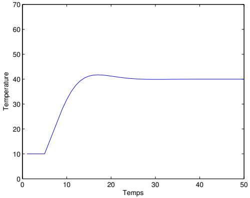
Notons l'existence d'un retard entre l'action entreprise par l'opérateur sur la vanne mélangeuse pour modifier la température $y(t)$ et l'effet résultant (température au bout du tuyau).

Exemple: régulation manuelle (II)

Voici l'évolution de la température perçue par deux types d'opérateurs: un opérateur *pressé* qui réagit de manière importante à l'écart entre la température perçue et celle désirée



et un opérateur *modéré* qui a des réactions plus mitigées



Automate

Definition

Un *automate* est un système dynamique invariant à temps discret et avec un espace d'état discret, où les ensembles d'entrée et de sortie sont finis.

Definition

Un *automate fini* est un automate avec un espace d'état fini.

Nous nous considérerons que des automates finis. Si les espaces d'état, entrée et sortie sont finis, les fonctions de transition et la transformation de sortie peuvent être représentées par des tableaux et/ou par des graphes.

Tableaux

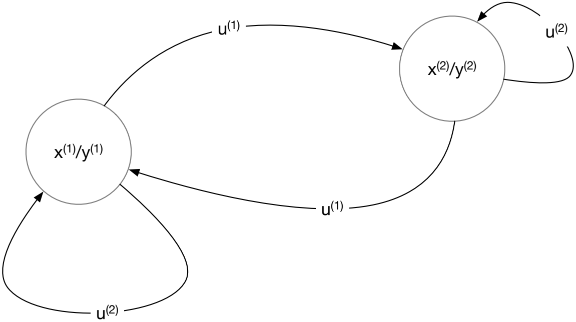
Considérons un automate où $X = \{x^{(1)}, x^{(2)}\}, U = \{u^{(1)}, u^{(2)}\}$ et $Y = \{y^{(1)}, y^{(2)}\}$ sont composés par deux éléments chacun.
Soit la fonction de transition et la transformation de sortie données par les tableaux suivants

$\varphi(t+1, t, \cdot, \cdot)$	$u^{(1)}$	$u^{(2)}$
$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(1)}$
$x^{(2)}$	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$

$x(t)$	$y(t) = h(x(t))$
$x^{(1)}$	$y^{(1)}$
$x^{(2)}$	$y^{(2)}$

c.-à-d. $x^{(2)} = \varphi(t+1, t, x^{(1)}, u^{(1)})$ et $y^{(1)} = h(x^{(1)})$

Graphe de transition



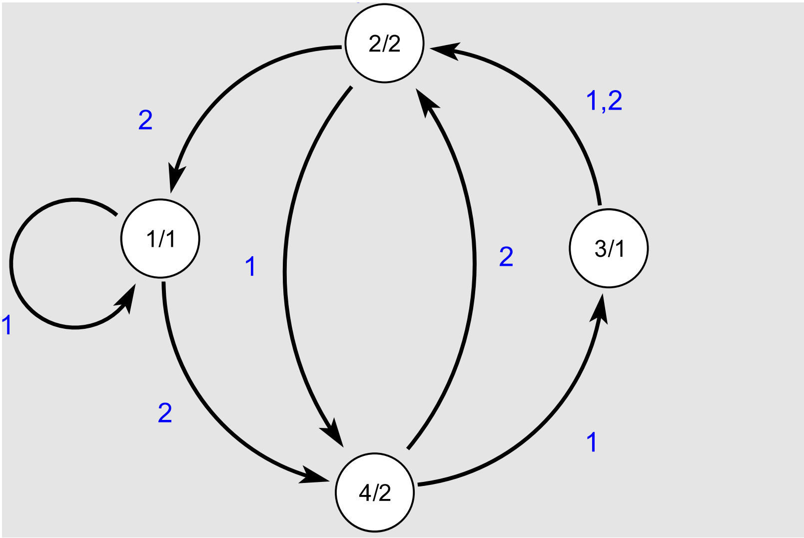
Graphe de transition

Notons que

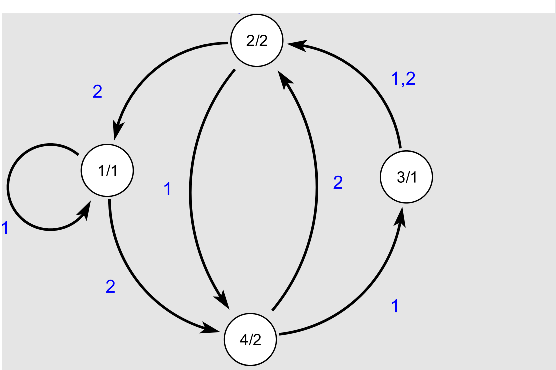
- le symbole sur chaque arc qui connecte $x^{(i)}$ à $x^{(j)}$ représente la valeur de l'entrée qui cause la transition $x^{(i)} \rightarrow x^{(j)}$.
- la notation $x^{(i)}/y^{(i)}$ signifie que la valeur $y^{(i)} \in Y$ est émise par l'automate pendant que l'automate est dans l'état $x^{(i)} \in X$.
- le nombre d'états est égal au nombre de composants de X.
- le nombre d'arcs qui sortent d'un noeud est égal au nombre de composants de U.
- il est admis que deux entrées différentes u' et u'' peuvent déclencher la même transition à partir d'un état x. Dans ce cas, les deux valeurs u' et u'' sont notées sur le même arc.

États d'équilibre

- Un état $\bar{x}$ est dit d'équilibre si et seulement s'il existe dans le graphe la boucle $\bar{x} \to \bar{x}$.
- Une sortie $\bar{y}$ est d'équilibre si et seulement s'il existe dans le graphe une boucle qui traverse des noeuds ayant tous la sortie $\bar{y}$.


2/2
2
1,2
1/1
1
2
3/1
1
2
1
4/2

États d'équilibre



Notons que $x = 1$ est un état d'équilibre, $y = 1$ est une sortie d'équilibre (boucle $(1, 1)$) et aussi $y = 2$ est une sortie d'équilibre (boucle $(2, 4, 2)$)

Accessibilité

Pour un automate donné,

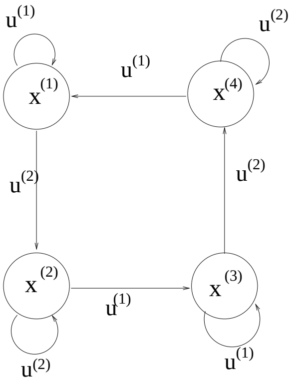
- un état x'' est accessible à partir d'un état x' s'il existe dans le graphe un chemin $x' \to x''$.
- un automate est connexe ssi le graphe est fortement connexe (c.-à-d. si chaque sommet est accessible à partir de n'importe quel autre).

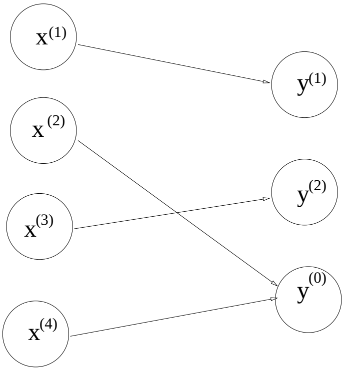
Exemple

Considérons un système d'éclairage avec deux lampes L_1 et L_2 où

- le système est contrôlé par un interrupteur u qui peut prendre deux positions $U = \{u^{(1)}, u^{(2)}\}$.
- Ω peut être quelconque séquence de valeurs $u^{(1)}$ et $u^{(2)}$: en particulier les séquences constantes $\dots, u^{(1)}, u^{(1)}, \dots$ et $\dots, u^{(2)}, u^{(2)}, \dots$ sont admises.
- le système est à temps discret et synchrone, par exemple l'interrupteur peut être commuté chaque seconde.
- le système a quatre configurations internes: $X = \{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}\}$.
- trois configurations d'éclairage: $y^{(0)}$ (obscurité), $y^{(1)}$ (seule lampe L_1 allumée), $y^{(2)}$ (seule lampe L_2 allumée).
- Soit $x(t) \in X$ la configuration à l'instant t:
  - la configuration suivante dépend de $x(t)$ et de la valeur $u(t)$ selon le graphe à gauche.
  - la sortie $y(t)$ dépend de $x(t)$ selon le graphe à droite.

Exemple

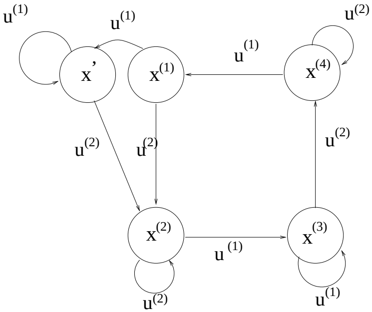


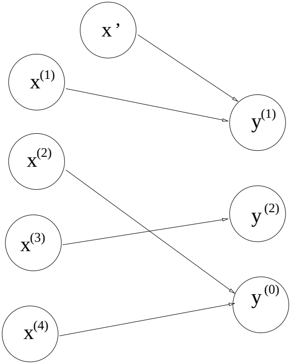


Exemple

- Le graphe de transition d'état représente la fonction de transition φ.
- Etant donné l' état initial $x(t_0) = x^{(1)}$ à l'instant t_0 et la fonction d'entrée $\hat{u}(\cdot)$ telle que $\hat{u}(t_0) = u^{(1)}, \hat{u}(t_0 + 1) = u^{(2)}, \hat{u}(t_0 + 2) = u^{(2)}$ on obtient $x(t_0 + 3) = \varphi(t_0 + 3, t_0, x^0, \hat{u}(\cdot)) = x^{(2)}$.
- Le système est stationnaire et déterministe: fixé la condition initiale et la loi d'entrée, l'état final est unique.
- Tous les états et les sorties sont d'équilibre.
- Le système est connexe et en forme réduite.
- Aucun couple d'états équivalents.
- Cette représentation d'état n'est pas la seule qui garantit cette relation entrée-sortie. On pourrait obtenir la même relation entrée-sortie en ajoutant des états équivalents redondants.

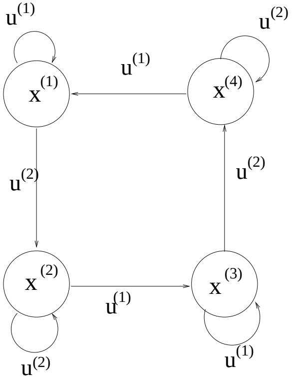
Exemple

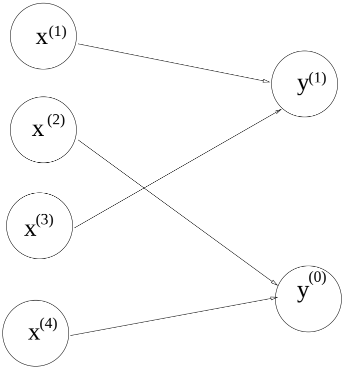




Exemple

Considérons maintenant l'automate suivant:





Existent-ils des états équivalents? Est le système en forme réduite?

Automates cellulaires

- Le formalisme des automates cellulaires a été inventé per J. Von Neumann et S. Ulam en 1940 pour étudier le phénomène de la reproduction.
- Von Neuman était intéressé à l'essence du phénomène indépendamment de l'implémentation du mécanisme.
- Pour cette raison il fit abstraction de tous les détails et proposa le plus simple modèle mathématique capable de retenir les aspects qu'il considérait essentiels.

Automates cellulaires

- Un automate cellulaire est un système dynamique à temps discret synchrone caractérisé par un grand (toutefois fini) nombre de variables d'état x_{ij} (ou *cellules*) disposées sur une grille où i et j représentent la position sur la grille.
- Chaque cellule x_{ij} prend sa valeur dans un ensemble fini X.
- La valeur à l'instant $t+1$ de la cellule x_{ij} est fonction de l'état au temps t d'un nombre fini de cellules appelé son *voisinage*.
- Aucune entrée n'est présente.
- À chaque nouvelle unité de temps, les mêmes règles sont appliquées pour toutes les cellules de la grille, produisant une nouvelle *génération* de cellules dépendant entièrement de la génération précédente.

Automate cellulaire unidimensionnel

- L'automate cellulaire non trivial le plus simple que l'on puisse concevoir consiste en une grille unidimensionnelle de n cellules x_i ne pouvant prendre que deux états (0 ou 1), avec un voisinage constitué, pour chaque cellule, d'elle-même et des deux cellules qui lui sont adjacentes.
- Chacune des cellules pouvant prendre deux états, il existe $2^3 = 8$ configurations (ou motifs) possibles d'un tel voisinage. Pour que l'automate cellulaire fonctionne, il faut définir quel doit être l'état, à la génération suivante, d'une cellule pour chacun de ces motifs.

Automate cellulaire unidimensionnel

Considérons l'automate cellulaire défini par $n = 22$ états binaires ($X = \{0,1\}^{22}$) où

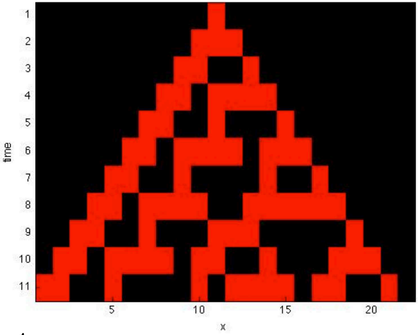
$$x_i(0) = \begin{cases} 0 & i \neq 11 \\ 1 & i = 11 \end{cases}, \qquad i = 1, \ldots, 22$$

et où la règle d'évolution est donnée par

$x_{i-1}(t)$	$x_i(t)$	$x_{i+1}(t)$	$x_i(t+1)$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Automate cellulaire unidimensionnel (II)

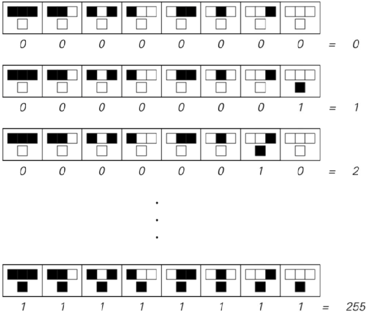
L'état à l'instant j est représenté par la $j$ème ligne. L'évolution temporelle avance du haut vers le bas.



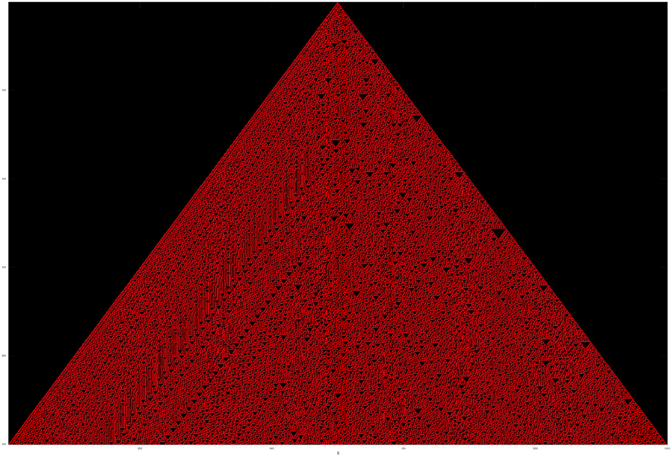
Script Octave `ca1.m`

256 automates possible (Wolfram 2012)

The sequence of 256 possible cellular automaton rules of the kind shown above. As indicated, the rules can conveniently be numbered from 0 to 255. The number assigned is such that when written in base 2, it gives a sequence of 0's and 1's that correspond to the sequence of new colors chosen for each of the eight possible cases covered by the rule.

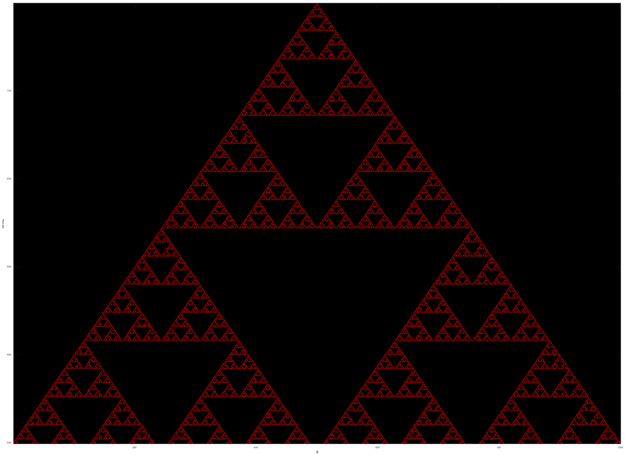


CA1 30



Script Octave ca1_30.m

CA1 90



Script Octave `ca1_90.m`

Jeu de la vie (Conway, 1970)

- Le *jeu de la vie* est un automate cellulaire bidimensionnel où chaque cellule peut prendre deux valeurs (0 et 1, qui dénotent la vie et la mort, respectivement) et où son état futur est déterminé par son état actuel et par le nombre de cellules vivantes parmi les huit qui l'entourent.
- Une règle simple de transition est
  1. Si la cellule est vivante et entourée par deux ou trois cellules vivantes, elle reste en vie à la génération suivante, sinon elle meurt.
  2. Si la cellule est morte et entourée par exactement trois cellules vivantes, elle naît à la génération suivante.

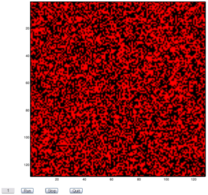
Jeu de la vie (Conway, 1970)

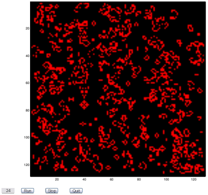
- Il est intéressant de remarquer que ces deux règles, même fort simples, font émerger une dynamique inattendue à partir d'une condition initiale aléatoire.
- Interpretation:
  - une naissance nécessite un certain rassemblement de population (3),
  - les cellules ne peuvent survivre à un trop grand isolement (moins de 2 voisines)
  - une trop forte concentration (plus de 3 voisines) les étouffe.

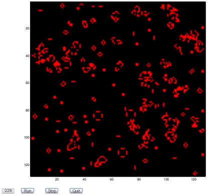
Propriétés

1. parallélisme: un système est dit parallèle si ses constituants évoluent simultanément et de manière indépendante.
2. proximité (locality): le nouvel état d'une cellule ne dépend que de son état actuel et de l'état du voisinage immédiat.
3. homogénéité : les lois sont universelles, c.-à-d. communes à l'entièreté de l'espace de l'automate.

Jeu de la vie (II)







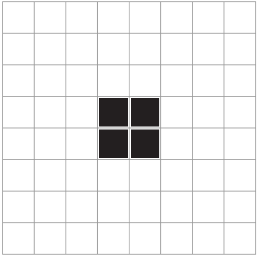
Etats intéressants

Quelques configurations de l'état du jeu de la vie peuvent avoir des comportements complexes et inattendus vu la simplicité des règles du jeu de la vie :

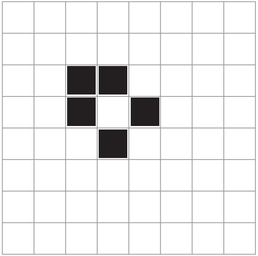
- états d'équilibre (*still life*): configurations de cellules qui se figent lorsqu'elles rentrent dans cet état. Elles resteront, si rien ne vient perturber leur environnement, figées pour toutes les générations suivantes. On distingue par exemple le *Block* ou le *Boat*.

- oscillantes: celles-ci vont cycler entre plusieurs configurations tant qu'on ne vient pas les déranger. Les oscillateurs les plus fréquents ont une période d'oscillation de 2 mais on distingue des oscillateurs plus rares qui ont 3,4,8 ou 15 états différents par cycle.
- *vaisseaux spatiaux*: ils se déplacent dans la grille du jeu de la vie et continuent à se mouvoir dans une direction tant qu'ils ne rencontrent pas d'obstacles.
- configurations plus complexes telles que le *Glider Gun* qui est un générateur de *gliders* ou encore *Acorn* qui prend 5206 générations pour se stabiliser et générer au moins 25 *gliders* et beaucoup d'oscillateurs.

Configurations de vie fixes



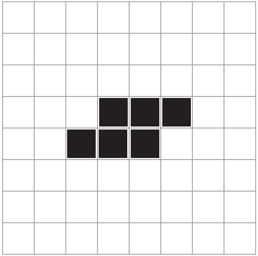
Block



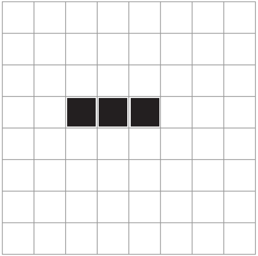
Boat

Notons que la cellule centrale dans le *Boat* reste *off* car elle est entourée par 4 (et donc pas exactement 3) cellules vivantes.

Configurations de vie oscillantes



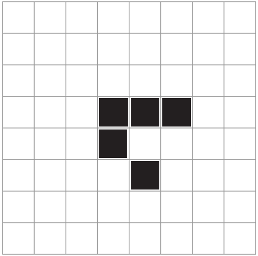
Toad



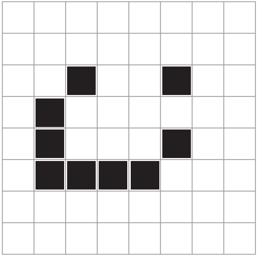
Blinker

Oscillateurs de période 2.

Configurations de vie en mouvement



Glider

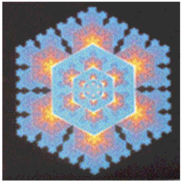


LWSS

Applications des automates cellulaires

En littérature les automates cellulaires ont été utilisées pour modéliser et simuler les phénomènes spatio-temporels suivants:

- comportement d'un gaz (cellule=molécule)
- étude des matériaux magnétiques selon le modèle d'Ising
- processus de percolation (le passage d'un fluide à travers un milieu plus ou moins perméable)
- développement urbain,
- processus de cristallisation,
- propagation des feux de forêt,
- reproduction de formes est textures naturelles
- vie artificielle, structures autoréplicatives (boucles de Langton: 2D, 8 valeurs d'état différentes)



D'après S. Levy, Artificial Life, Penguin, 1992.
Le flocon de neige de Norman Packard

Langton ed., Artificial Life an overview, MIT press, 1997.
La texture d'un vrai coquillage et son équivalent généré par un automate cellulaire

Complexité et simplicité

- Assomptions science classique
  - règles simples ne peuvent générer que des phénomènes simples et vice-versa phénomènes complexes ne peuvent avoir été générés que par des règles/causes complexes.
  - équations sont le meilleur modèle pour comprendre la réalité.
- La science des systèmes dynamiques complexes a réfuté ces assomptions.
  - **Emergence**: qualité ou propriété d'un système qui présente un caractère de nouveauté par rapport aux qualités ou propriétés des composants considérés isolément,
  - Phénomènes complexes peuvent être générés (ou émerger) par des règles très **simples**, une fois que nous avons un très grand nombre d'éléments qui interagissent.
  - **simulations** sont, dans certaines situations, la seule manière de comprendre et visualiser la complexité des phénomènes réels.