Excercices INFO-F-311, Intelligence Artificielle

Axel Abels, Tom Lenaerts et Yannick Molinghen

Années académiques 2022–2024

- Ce fichier contient les exercices pour le cours INFOF311 Intelligence Artificielle organisé en 3ème année du Bachelor en Informatique à l'Université Libre de Bruxelles (Faculté des Sciences).
- Ces exercices seront abordés en classe juste après chaque séance théorique.
- Le but est de vous former à la matière abordée pendant les session théoriques et fournir aux étudiants la capacité de résoudre une diversité de problèmes liés à l'IA.. Il donne également un aperçu du type d'exercices qui seront demandés à l'examen à côté les questions théoriques.
- Les questions des examens de l'année académique précédente sont insérées entre les autres exercices.
- Ces exercices sont extraits des exercices fournis avec le livre [1] ou les exercices/homework associés au cours CS188 sur ai.berkeley.edu, et des exercices construit par les auteurs.
- Une copie contenant toutes les solutions sera fournie avant les examens.

Contents

1 Introduction IA

Ex. 1

Définissez ...

1. L'intelligence (artificielle)
2. L'agent
3. La rationalité
4. Le raisonnement

Ex. 2

Dans quelle mesure les systèmes informatiques suivants sont-ils des instances d'intelligence artificielle :

1. Scanners de codes-barres de supermarché.
2. Moteurs de recherche web.
3. Fonctions de correction orthographique et grammaticale dans Word.

Ex. 3

"Certes, les ordinateurs ne peuvent pas être intelligents, ils ne peuvent faire que ce que leur disent leurs programmeurs." Cette dernière affirmation est-elle vraie et implique-t-elle la première ?

Ex. 4

Pour chacun des agents suivants, précisez les capteurs (sensors), les actionneurs (actuators) et l'environnement :

1. four à micro-ondes,
2. programme d'échecs,
3. avion de livraison de ravitaillement autonome.

Ex. 5

Examinons la rationalité des différentes fonctions de l'agent aspirateur (Figure 1).

1. Montrer que la fonction d'agent aspirateur simple est bien rationnelle (Maximise-t-elle son utilité espérée) ?
2. Décrivez une fonction d'agent rationnel pour le cas où chaque mouvement coûte un point. Le programme d'agent correspondant nécessite-t-il un état interne ?
3. Discutez les conceptions d'agents possibles pour les cas dans lesquels des carrés propres peuvent devenir sales et la géographie de l'environnement est inconnue. Est-il logique que l'agent apprenne de son expérience dans ces cas ? Si oui, que doit-il apprendre ? Si non, pourquoi pas ?

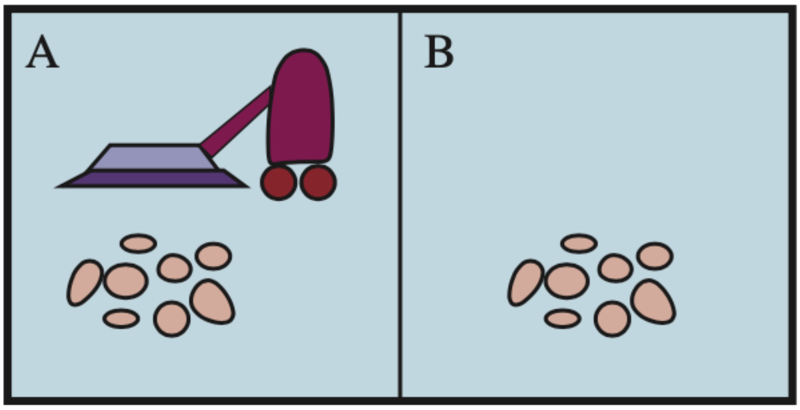


Figure 1: Un monde d'aspirateurs avec seulement deux emplacements. Chaque emplacement peut être propre ou sale, et l'agent peut se déplacer à gauche ou à droite et peut nettoyer la case qu'il occupe. Différentes versions du monde d'aspirateurs imposent différentes règles sur ce que l'agent peut percevoir, si ses actions réussissent toujours, etc. Image de [1].

Ex. 6

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquez si elle est vraie ou fausse et étayez votre réponse par des exemples ou des contre-exemples, le cas échéant.

1. Un agent qui ne détecte que des informations partielles sur l'état ne peut pas être parfaitement rationnel.
2. Il existe des environnements de tâches dans lesquels aucun agent réflexe pur ne peut se comporter rationnellement.
3. Il existe un environnement de tâche dans lequel chaque agent est rationnel.
4. L'entrée d'un programme d'agent est la même que l'entrée de la fonction d'agent.
5. Chaque fonction d'agent peut être mise en œuvre par une combinaison programme/machine.

Ex. 7

Donner une description PEAS pour:

1. Acheter des livres d'IA d'occasion sur Internet
2. Pratiquer le tennis contre un mur
3. Enchérir pour un article à une vente aux enchères

Caractérisez-les en fonction des propriétés sur la diapositive 41.

Ex. 8

Lisez l'article d'Alan Turing (regardez sur UV).

Quelles objections a-t-il formulées pour la recherche en IA et pour son test ? Il a prédit qu'un ordinateur aurait 30 % de chances de réussir un test de Turing de 5 minutes. Quelle chance aurait un ordinateur aujourd'hui ? Dans 25 ans ?

Ex. 9

Trouvez au moins trois ensembles de principes proposés pour la gouvernance de l'IA. Que proposent-ils et pensez-vous qu'ils sont réalistes ?

Ex. 10

L'apprentissage automatique peut produire des classificateurs avec des préjugés raciaux, sexistes et autres. Trouvez un exemple sur le Web et expliquez quel est le problème de biais dans cette application.

2 Algorithmes de recherche simples

Ex. 1

Donnez une formulation complète du problème pour chacun des problèmes suivants (Session 2 slide 8). Choisir une formulation suffisamment précise pour être mise en œuvre.

1. Il y a six boîtes en verre alignées, chacune avec une serrure. Chacune des cinq premières boîtes contient une clé déverrouillant la boîte qui la suit; la dernière boîte contient une banane. Vous avez la clé de la première boîte et vous voulez la banane.

2. Vous commencez par la séquence ABABAECCEC, ou en général toute séquence composée de A, B, C et E. Vous pouvez transformer cette séquence en utilisant les égalités suivantes : $\mathsf{AC} = \mathsf{E}$, $\mathsf{AB} = \mathsf{BC}$, $\mathsf{BB} = \mathsf{E}$ et $\mathsf{E}x = x$ pour tout x. Par exemple, ABBC peut être transformé en AEC, puis AC, puis E. Votre objectif est de produire la séquence E.

Ex. 2

Vous avez une grille de 9×9 carrés, chacun pouvant être coloré en rouge ou en bleu. La grille est initialement colorée en bleu, mais vous pouvez changer la couleur de n'importe quel carré autant de fois que vous le souhaitez. En imaginant la grille divisée en neuf sous-carrés 3×3, vous voulez que chaque sous-carré soit d'une seule couleur, mais que les sous-carrés voisins soient de couleurs différentes.

1. Formulez ce problème de manière directe. Calculer la taille de l'espace d'état.

2. Vous n'avez besoin de colorer un carré qu'une seule fois. Reformulez et calculez la taille de l'espace d'état. La recherche de graphes en largeur serait-elle plus rapide sur ce problème que sur celui de (1) ? Que diriez-vous d'une recherche arborescente itérative approfondie ?

3. Compte tenu de l'objectif, il nous suffit de ne considérer que les colorations où chaque sous-carré est uniformément coloré. Reformuler le problème et calculer la taille de l'espace d'état.

4. Combien de solutions ce problème a-t-il ?

5. Les parties (2) et (3) ont successivement résumé le problème original (1). Pouvez-vous donner une traduction des solutions du problème (3) en solutions du problème (2) et des solutions du problème (2) en solutions du problème (1) ?

2.1 Examen 2022-2023

Le problème du monde des blocs tel qu'illustré à la Figure 2 demande d'organiser un certain nombre de blocs dans un ordre spécifique. Les blocs peuvent être posés sur la table ou les uns sur les autres. A chaque étape, vous ne pouvez déplacer qu'un seul bloc à la fois. Notez aussi que déplacer le bloc S vers un

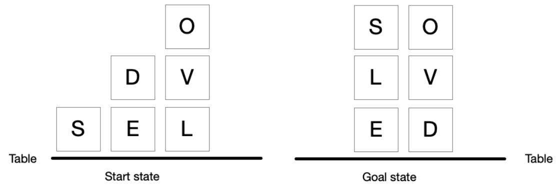


Figure 2: Dans ce problème de blocs, un bras mécanique doit déplacer des blocs pour atteindre l'état cible. Les blocs peuvent être posés sur la table ou les uns sur les autres.

autre emplacement sur la table n'est pas un mouvement valide. Il y a également suffisamment d'espace sur la table pour placer chaque bloc indépendamment

1. Donnez la description du problème de recherche visualisé dans la Figure 1. (2 points)
2. Quel est le facteur de branchement à la première étape du processus de recherche ? Décrivez les mouvements possibles. (1 point)
3. Est-ce que le depth-first graph search donne la garantie de renvoyer une solution en un minimum d'étapes, donc une solution optimale ? Expliquez votre réponse. (1 point)

Ex. 3

Le problème des *missionnaires et cannibales* est généralement énoncé comme suit. Trois missionnaires et trois cannibales sont d'un côté d'une rivière, avec un bateau qui peut contenir une ou deux personnes. Trouvez un moyen d'amener tout le monde de l'autre côté sans jamais laisser un groupe de missionnaires à un endroit dans lequel ils seraient dépassés en nombre par les cannibales. Ce problème est célèbre en IA parce qu'il a fait l'objet du premier article qui a abordé la formulation du problème d'un point de vue analytique (voyez l'article d'Amarel 1968 sur UV).

1. Formuler précisément le problème, en ne faisant que les distinctions nécessaires pour assurer une solution valable. Dessinez un diagramme de l'espace d'état complet.
2. Implémenter et résoudre le problème de manière optimale en utilisant un algorithme de recherche approprié. Est-ce une bonne idée de vérifier les états répétés ?
3. Pourquoi pensez-vous que les gens ont du mal à résoudre ce casse-tête, étant donné que l'espace d'état est si simple ?

3 Algorithmes de recherche informés

Ex. 1

Définissez dans vos propres mots les termes suivants :

1. état,
2. espace d'états,
3. arbre de recherche,
4. nœud de recherche,
5. objectif,
6. action,
7. modèle de transition
8. facteur de branchement.

Ex.2

Tracez l'opération de recherche A^* appliquée au problème de se rendre à Bucarest depuis Lugoj en utilisant l'heuristique de distance en ligne droite (slide 3). Autrement dit, montrez la séquence de nœuds que l'algorithme prendra en compte et les scores f, g et h pour chaque nœud.

Ex. 3

Considérons le problème du déplacement de k chevaliers à partir de k cases de départ $s_1, \cdots, s_k$ à k carrés $g_1, \cdots, g_k$, sur un échiquier illimité, sous réserve de la règle selon laquelle deux cavaliers ne peuvent pas atterrir sur la même case en même temps.

Chaque action consiste à déplacer jusqu'à k chevaliers simultanément. Nous aimerions terminer la manœuvre dans le plus petit nombre d'actions.

1. Quel est le facteur de branchement maximal dans cet espace d'états, exprimé en fonction de k ?
2. Supposons que h_i soit une heuristique admissible pour le problème du déplacement du cavalier i vers le but g_i par lui-même. Parmi les heuristiques suivantes, lesquelles sont admissibles pour le problème k-knight ? De ceux-là, quel est le meilleur?
   (a) $\min\{h1, \cdots, h_k\}$
   (b) $\max\{h1, \cdots, h_k\}$
   (c) $\sum_{i=1}^{k} h_i$
3. Répétez (2) pour le cas où vous n'êtes autorisé à déplacer qu'un seul cavalier à la fois.

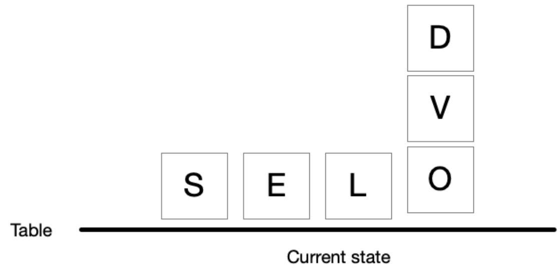


Figure 3: L'état de départ pour la question 2 ici.

3.1 Examen 2022-2023

Considérons l'utilisation de la recherche A* sur le problème visualisé dans la Figure 2. Dans ce contexte, nous utiliserions une fonction heuristique $h(n)$ pour estimer la qualité d'un état par rapport à l'état cible. Imaginez l'heuristique suivante : l'heuristique $h(n)$ attribue à chaque bloc mal placé un score de $(-1 * d)$, d étant égal à la distance de la position finale, et les blocs correctement positionnés obtiennent une note de (+1). Ainsi, l'état de départ de la Figure 2 a $h(n) = -1$ (+1 pour E, V et O; -1 pour D et L; -2 pour S) et le score de l'état de final est $h(n) = 6$ (+1 pour chaque block).

1. Quand est-ce qu'une heuristique est admissible et est-ce le cas pour l'heuristique proposée ? Expliquez. Si elle n'est pas admissible, proposez une alternative. (2 points)

2. Tracez deux étapes de l'opération de A* au problème du monde de blocs en utilisant l'heuristique. Soyez clair dans votre description et utilisation de l'espace d'états et des fonctions $f(n)$, $h(n)$ et $g(n)$. Partez d'un état avec les blocs S, E et L seuls sur la table et les blocs O, V et D empilés les uns sur les autres, avec O en bas (Figure 3). Le coût jusqu'à cet état est $g(n) = 5$. (3 points)

3. Quand est-ce qu'une heuristique est cohérente et est-ce vrai pour l'heuristique qu'on a proposée ici ? (1 points)

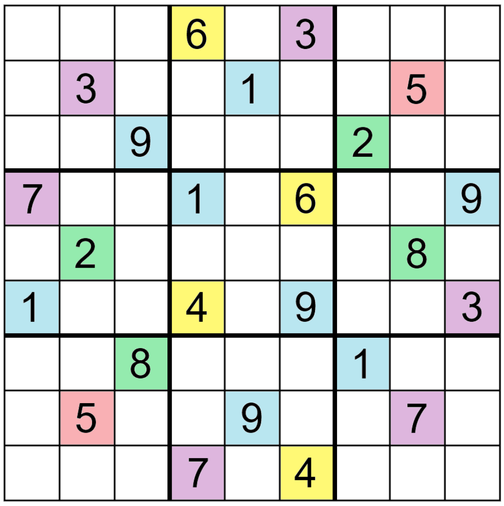


Figure 4: Image de Wikipedia.

4 Recherche locale

Ex. 1

Donnez le nom de l'algorithme qui résulte de chacun des cas particuliers suivants :

1. Local beam search avec $k = 1$.
2. Local beam search avec un état initial et aucune limite sur le nombre d'états retenus.
3. Simulated annealing avec $T = 0$ à tout moment (et en omettant le test de terminaison).
4. Simulated annealing avec $T = \infty$ à tout moment.
5. Algorithme génétique avec taille de population $N = 1$.

Ex. 2

Définir les éléments (but, états, actions, fonction de valeur heuristique) du problème Sudoku (Figure 4) afin qu'il puisse être résolu par:

1. Hill climbing
2. Un algorithme génétique

Pourquoi l'algorithme génétique est-il meilleur pour ce problème

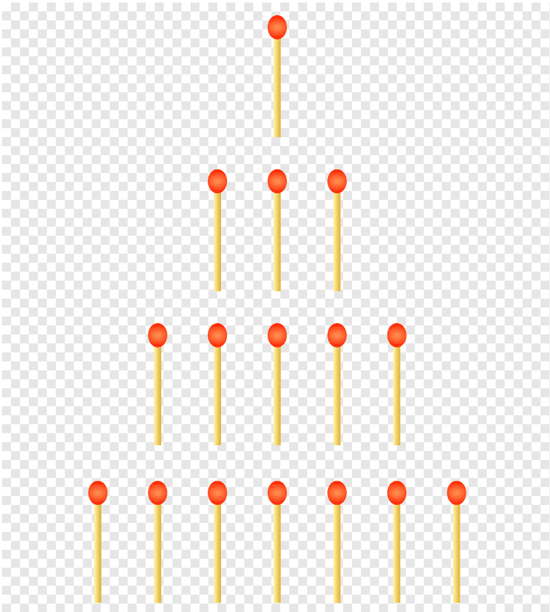


Figure 5: Image de pngwing.com.

5 Jeux et recherche d'adversaire

Ex. 1

Nim est un jeu à deux joueurs joué avec plusieurs tas de pierres. Vous pouvez utiliser autant de tas et autant de pierres dans chaque tas que vous le souhaitez. Les deux joueurs retirent à tour de rôle les pierres du jeu. À chaque tour, le joueur qui enlève des pierres ne peut prendre que des pierres d'un tas, mais il peut retirer autant de pierres de ce tas qu'il le souhaite. S'ils le souhaitent, ils peuvent même retirer tout le tas du jeu! Le gagnant est le joueur qui enlève la dernière pierre

1. Définissez le jeu en utilisant la formulation du jeu sur la slide 6 (états, joueurs, actions, modèle de transition ...)
2. Est-ce un jeu à somme nulle ou un jeu à somme générale ?
3. Imaginez une configuration de 3 tas, avec une pierre dans le premièr tas, 2 dans le second et 1 dans le troisième tas. Dessinez l'arbre de jeu et montrez avec une analyse minimax quelles sont les meilleures options pour le premier joueur.
4. Peut-on appliquer $\alpha - \beta$ *pruning* ? Comment cela fonctionnerait-il ?
5. Quelque chose changera-t-il dans l'analyse précédente si nous jouons NIM sous une forme misère (le joueur qui prend le dernier objet perd)
6. Imaginez qu'on a dix tas dont le 1er contient 3, le 2ème 4, le 3ème 5 objets, etc. Le nombre d'actions possibles augmente rapidement et nous ne pourrons peut-être pas calculer comme avant les feuilles de l'arbre de recherche.

Quelle pourrait être une fonction d'évaluation utile pour permettre une anticipation limitée ?

7. Comment MCTS (*Monte-Carlo Tree search*) pourrait-il aider à résoudre ce jeu ?

5.1 Examen 2022-2023

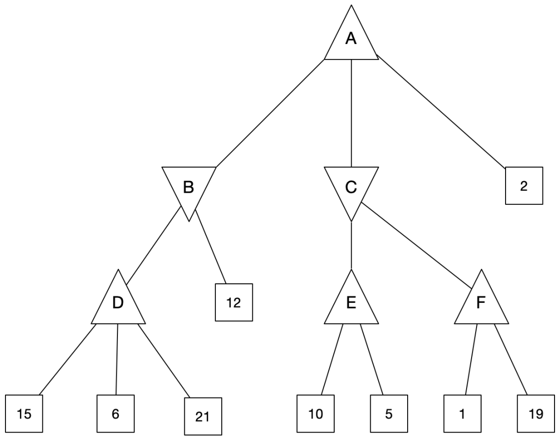


Figure 6

Considérez l'arbre *minimax* de la Figure 6, répondez aux questions suivantes:

1. Quelle est la valeur *minimax* du nœud A dans l'arbre ? expliquez votre réponse. (2 points)

2. Enlevez les nœuds qui sont élagués par l'*alpha-beta pruning*. Supposons le parcours standard de gauche à droite de l'arbre. Si un état non terminal (A, B, C, D, E ou F) est élagué, enlevez tout le sous-arbre. (2 points)

5.2 Examen 2022-2023

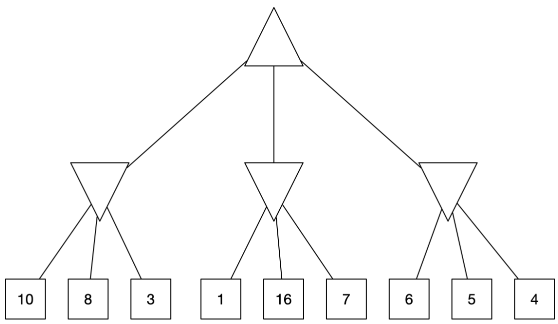


Figure 7

1. Considérez l'arbre de jeu à somme nulle dans la Figure 7. Les triangles qui pointent vers le haut, comme au nœud supérieur (racine), représentent

des choix pour le joueur qui maximise ; les triangles qui pointent vers le bas représentent des choix pour le joueur qui minimise. En supposant que les deux joueurs agissent de manière optimale, remplissez la valeur *minimax* de chaque nœud. Y a-t-il des nœuds qui seront supprimés par $\alpha - \beta$ *pruning* ? Expliquez votre réponse. (2 points)

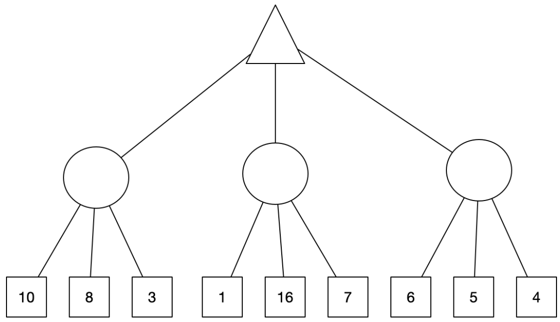


Figure 8

2. Considérons le même arbre de jeu (Figure 8) à somme nulle, sauf que maintenant, au lieu d'un joueur minimisant, nous avons un nœud aléatoire qui sélectionnera une valeur uniformément au hasard. Remplissez la valeur *expectimax* de chaque nœud. Y a-t-il des nœuds qui seront supprimés par $\alpha - \beta$ *pruning*? Expliquez votre réponse. (2 points)

	toothache		*¬toothache*	
	catch	*¬catch*	*catch*	*¬catch*
cavity	0.108	0.012	0.072	0.008
¬cavity	0.016	0.064	0.144	0.576

Figure 9: Image de [1].

A	$P(A)$
t	0.8
f	0.2

A	B	$P(B\|A)$
t	t	0.9
t	f	0.1
f	t	0.6
f	f	0.4

B	C	$P(C\|B)$
t	t	0.8
t	f	0.2
f	t	0.8
f	f	0.2

C	D	$P(D\|C)$
t	t	0.25
t	f	0.75
f	t	0.5
f	f	0.5

Figure 10: Image de [1].

6 Les bases de la théorie des probabilités

Ex. 1

Compte tenu de la distribution conjointe complète illustrée dans la Figure 9, calculez:

1. $P(\mathsf{toothache})$
2. $P(\mathsf{Cavity})$
3. $P(\mathsf{Toothache}|\mathsf{cavity})$
4. $P(\mathsf{Cavity}|\mathsf{toothache}, \mathsf{catch})$

Ex. 2

Considérez les distributions de probabilité de la Figure 10.

Étant donné uniquement ces tableaux et aucune hypothèse d'indépendance, calculez les probabilités suivantes, en montrant votre travail. S'il est impossible de calculer sans plus d'hypothèses d'indépendance, spécifiez plutôt un ensemble minimal d'hypothèses d'indépendance qui vous permettrait de répondre à la question.

1. $P(+a, -b)$
2. $P(+b)$
3. $P(-a, -b, +c)$
4. Supposons maintenant que C est indépendant de A étant donné B et D est indépendant de A et B étant donné C. Calculez $P(+a, -b, +c, +d)$

7 Réseaux Bayésiens

Ex. 1

Rappelons que chaque graphe orienté acyclique G a une famille de distributions de probabilités associée, qui se compose de toutes les distributions de probabilité qui peuvent être représentées par un réseau de Bayes avec la structure G. Considérez les six graphiques acycliques orientés de la Figure 11.

1. Supposons que tout ce que nous savons de la distribution conjointe $P(A, B, C)$ est qu'elle peut être représentée par le produit $P(A|BC)P(B|C)P(A)$. Parmi les six graphes, lesquels sont garantis capables de représenter $P(A, B, C)$?

2. Supposons maintenant que tout ce que nous savons de la distribution conjointe $P(A, B, C)$ est qu'elle peut être représentée par le produit $P(C|B)P(C|A)P(A)$. Parmi les six graphes, lesquels sont garantis capables de représenter $P(A, B, C)$?

Ex. 2

Considérons un réseau de Bayes sur les variables aléatoires A, B, C, D et E avec la structure montrée dans la Figure 12, avec une distribution conjointe complète $P(A, B, C, D, E)$.

1. Considérons la distribution marginale $P(A, B, D, E) = \sum_c P(A, B, c, D, E)$ où C a été éliminé. Dessinez le réseau de Bayes minimal qui est garanti pour pouvoir représenter cette distribution.

2. Supposons qu'on nous donne une observation : $A = a$. Dessinez le réseau de Bayes minimal qui est garanti pouvoir représenter la distribution $P'(B, C, D, E) = P(B, C, D, E|A = a)$.

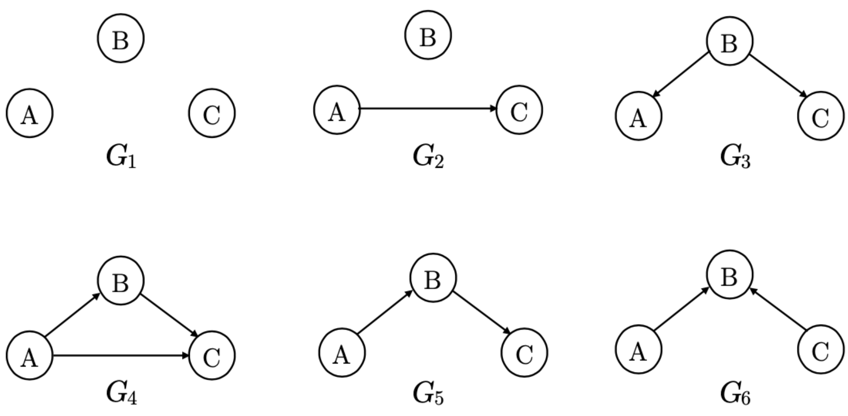


Figure 11: Image de [1].

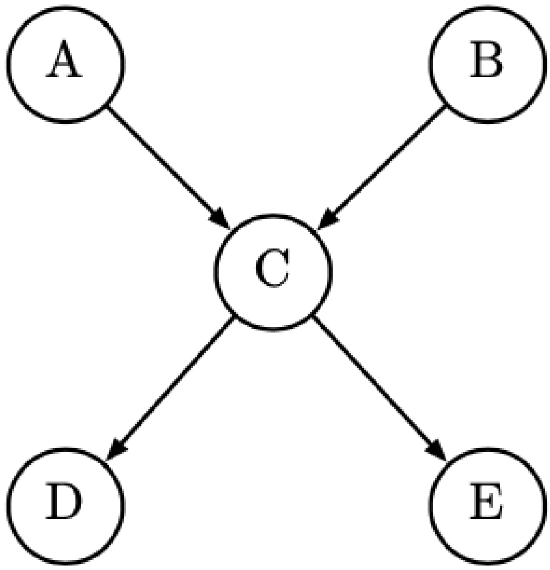


Figure 12: Image de [1].

Ex. 3

Nous avons un sac de trois pièces biaisées a, b et c avec des probabilités de sortir face de 30 %, 60 % et 75 %, respectivement. Une pièce est tirée au hasard du sac (avec une probabilité égale de tirer chacune des trois pièces), puis la pièce est lancée trois fois pour générer les résultats X_1, X_2 et X_3.

1. Dessinez le réseau bayésien correspondant à cette configuration et définissez les tables de probabilités conditionnelles nécessaires.

2. Calculez quelle pièce a été la plus susceptible d'avoir été tirée du sac si les *flips* observés sortent face deux fois et pile une fois.

Ex. 4

Considérez le réseau Bayésien dans la Figure 13.

1. Si aucune preuve n'est observée, le Burglary et le EarthQuake sont-ils indépendants ? Démontrez ceci à partir de la sémantique numérique et de la sémantique topologique.

2. Si nous observons Alarm = true , Burglary et EarthQuake sont-ils indépendants ? Justifiez votre réponse en calculant si les probabilités en jeu satisfont à la définition de l'indépendance conditionnelle

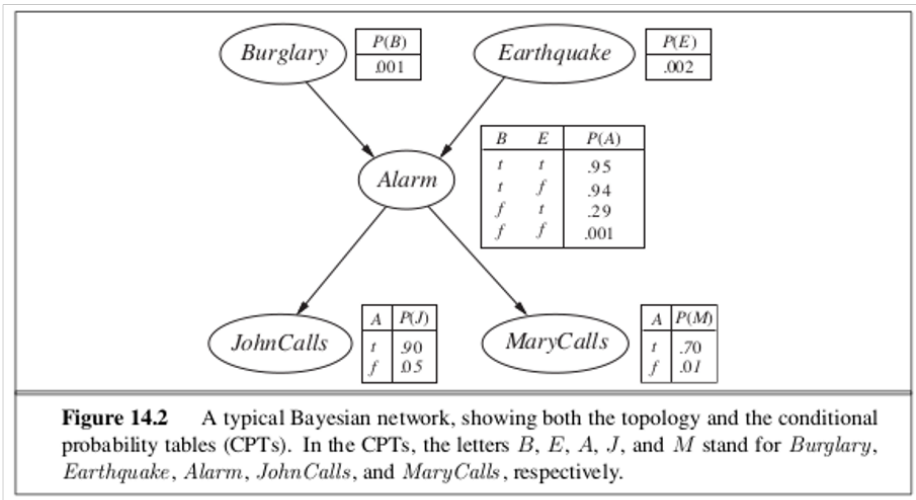


Figure 13: Image de [1].

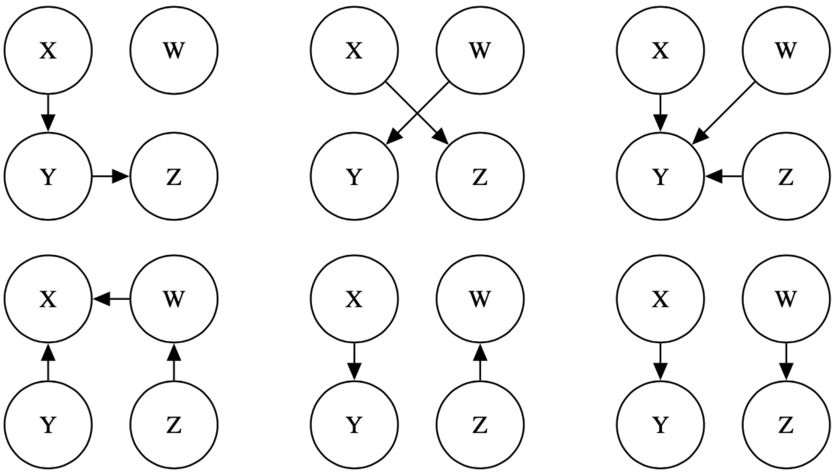


Figure 14: Image de [1].

X	$P(X)$
0	0.75
1	0.25

X	W	$P(W\|X)$
0	0	0.4
0	1	0.6
1	0	0.4
1	1	0.6

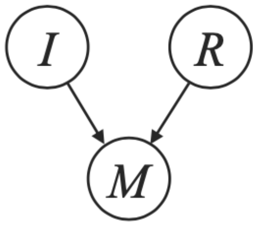
X	Y	$P(Y\|X)$
0	0	0.3
0	1	0.7
1	0	0.1
1	1	0.9

Z	W	$P(W\|Z)$
0	0	0.2
0	1	0.8
1	0	0.8
1	1	0.2

Figure 15: Image de [1].

I	$P(I)$
$+i$	0.8
$-i$	0.2

R	$P(R)$
$+r$	0.4
$-r$	0.6



I	R	M	$P(M\|I,R)$
$+i$	$+r$	$+m$	0
$+i$	$+r$	$-m$	1.0
$+i$	$-r$	$+m$	0
$+i$	$-r$	$-m$	1.0
$-i$	$+r$	$+m$	0.7
$-i$	$+r$	$-m$	0.3
$-i$	$-r$	$+m$	0.2
$-i$	$-r$	$-m$	0.8

Figure 16: Image de [1].

I	R	M	$P(I,R,M)$
$+i$	$+r$	$+m$	0
$+i$	$+r$	$-m$	
$+i$	$-r$	$+m$	0
$+i$	$-r$	$-m$	
$-i$	$+r$	$+m$	0.056
$-i$	$+r$	$-m$	0.024
$-i$	$-r$	$+m$	0.024
$-i$	$-r$	$-m$	0.096

Figure 17: Image de [1].

Ex. 5

On vous donne les distributions conditionnelles qui relient les variables binaires dans la Figure 15.

Lequel des réseaux bayésiens de la Figure 14 peut représenter une distribution conjointe cohérente avec ces distributions conditionnelles ? Parmi ceux-ci, lesquels sont minimes, dans le sens où aucun arc ne peut être supprimé tout en conservant la propriété ?

Ex. 6

Il y a eu une épidémie d'oreillons dans votre collège. Vous vous sentez bien, mais vous êtes inquiets que vous puissiez déjà être infecté. Vous décidez d'utiliser des reseaux Bayésiens pour analyser la probabilité que vous ayez contracté les oreillons. Pensez d'abord aux deux facteurs suivants :

1. Vous pensez être immunisé contre les oreillons ($+i$) car vous avez été

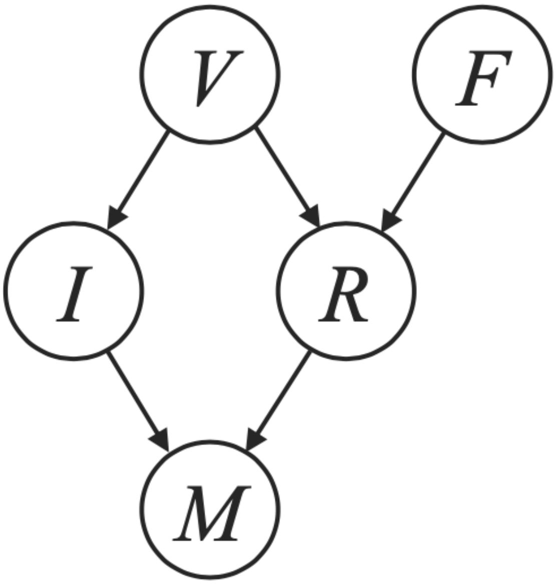


Figure 18: Image de [1].

vacciné récemment, mais le vaccin n'est pas totalement efficace, vous n'êtes donc peut-être pas immunisé ($-i$).

2. Votre colocataire ne se sentait pas bien hier, et bien que vous n'en soyez pas encore sûr, vous soupçonnez qu'il pourrait avoir les oreillons ($+r$).

Notons ces variables aléatoires par I et R. Soit la variable aléatoire M prendra la valeur $+m$ si vous avez les oreillons, et $-m$ si vous ne les avez pas. Le réseau Bayésien est décrit par la Figure 16. Elle vous donne la possibilité de décrire vos chances d'être malade :

1. Remplissez le tableau dans la Figure 17 avec la distribution conjointe sur I, M et R: $P(I, M, R)$.

2. Quelle est la probabilité marginale $P(+m)$ que vous ayez les oreillons ?

3. En supposant que vous ayez les oreillons, vous craignez que votre colocataire soit également atteint par la maladie. Quelle est la probabilité $P(+r| + m)$ que votre colocataire ait les oreillons sachant que vous avez les oreillons ? Notez que vous ne savez toujours pas si oui ou non vous avez l'immunité.

Vous n'êtes toujours pas sûr d'avoir suffisamment d'informations sur vos chances d'avoir les oreillons, alors vous décidez d'inclure deux nouvelles variables dans le réseau Bayésien. Votre colocataire est allé à une fête ce week-end, et il y a des chances qu'une autre personne à la fête ait eu les oreillons ($+f$). De plus, vous et votre colocataire avez été vaccinés dans une clinique qui a signalé une confusion de vaccins. Que vous ayez reçu ou non le bon vaccin ($+v$ ou $-v$) a des ramifications à la fois sur votre immunité (I) et sur la probabilité que votre colocataire ait depuis contracté la maladie (R). En tenant compte de ceci, vous dessinez le réseau de Bayes modifié illustré dans la nouvelle Figure 18.

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont garanties vraies pour ce réseau bayésien?

1. $V \perp\!\!\!\perp M|I, R$
2. $V \perp\!\!\!\perp M|R$
3. $M \perp\!\!\!\perp F|R$
4. $V \perp\!\!\!\perp F$
5. $V \perp\!\!\!\perp F|M$
6. $V \perp\!\!\!\perp F|I$

7.1 Examen 2022-2023

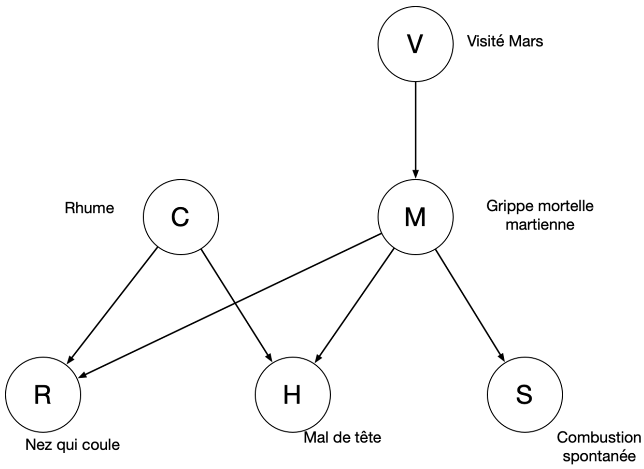


Figure 19: Réseau Bayésien composé de 5 nœuds, c'est-à-dire que vous ayez visité Mars ou non (V), que vous ayez ou non un rhume (C), que vous ayez la grippe martienne mortelle (M), que vous ayez le nez qui coule (R), mal de tête (H) ou que vous ayez pris feu spontanément (S) à un moment donné. Les arcs modélisent les dépendances conditionnelles entre les variables (V, M, C, R, H et S).

Le réseau Bayésien dans la Figure 19 peut être utilisé pour diagnostiquer si un patient souffre d'un simple rhume (C) et/ou de la plus dangereuse grippe martienne (M), sur la base des symptômes du patient - que le patient ait ou non le nez qui coule (R), que le patient ait mal à la tête ou non (H), et que le patient s'enflamme spontanément ou non (S) – ainsi que des informations contextuelles pertinentes, à savoir s'il a déjà visité Mars ou non (V). Toutes les variables (V, M, C, R, H, S) sont binaires et sont associées aux tables de probabilités conditionnelles dans le Figure 20.

Résolvez maintenant les questions suivantes. Montrez chaque fois les formules que vous avez utilisées pour faire le calcul.

V	P(V)
+v	0.9999
-v	0.0001

C	P(C)
+c	0.95
-c	0.05

V	M	P(M|V)
+v	+m	0.001
-v	+m	0.0
+v	-m	0.999
-v	-m	1.0

M	S	P(S|M)
+m	+s	0.8
-m	+s	0.0
+m	-s	0.2
-m	-s	1.0

C	M	R	P(R|M,C)
+c	+m	+r	0.98
+c	+m	-r	0.02
+c	-m	+r	0.9
+c	-m	-r	0.1
-c	+m	+r	0.5
-c	+m	-r	0.5
-c	-m	+r	0.05
-c	-m	-r	0.95

C	M	H	P(H|M,C)
+c	+m	+h	0.99
+c	+m	-h	0.01
+c	-m	+h	0.6
+c	-m	-h	0.4
-c	+m	+h	0.98
-c	+m	-h	0.02
-c	-m	+h	0.07
-c	-m	-h	0.93

Figure 20

1. Calculez l'entrée suivante à partir de la distribution jointe : $P(+r, +h, -s, -c, +m, +v)$. (1 point)

2. Calculez l'entrée suivante à partir de la distribution jointe : $P(-r, +h, -s, +c, +m, +v)$. (1 point)

3. Quelle est la probabilité qu'une personne n'ayant pas de rhume(-c) et ayant visité Mars (+v) ait mal à la tête (+h)? (3 points)

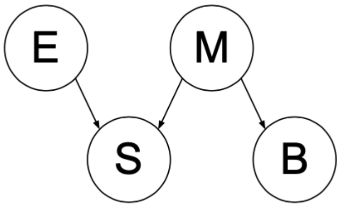
4. Quelle est la probabilité qu'une personne ayant visité Mars ($+v$) ait mal à la tête ($+h$) ? (3 points)

8 Inférence dans les réseaux Bayésiens et *d-separation*

Ex. 1

$P(E)$	
$+e$	0.4
$-e$	0.6

$P(S \mid E, M)$			
$+e$	$+m$	$+s$	1.0
$+e$	$+m$	$-s$	0.0
$+e$	$-m$	$+s$	0.8
$+e$	$-m$	$-s$	0.2
$-e$	$+m$	$+s$	0.3
$-e$	$+m$	$-s$	0.7
$-e$	$-m$	$+s$	0.1
$-e$	$-m$	$-s$	0.9



$P(M)$	
$+m$	0.1
$-m$	0.9

$P(B \mid M)$		
$+m$	$+b$	1.0
$+m$	$-b$	0.0
$-m$	$+b$	0.1
$-m$	$-b$	0.9

Figure 21: Image de [1].

Une odeur de soufre (S) peut être causée par des œufs pourris (E), ou être un signe de malheur apporté par l'apocalypse Maya (M). L'apocalypse Maya fait également bouillir les océans (B). Le réseau Bayésien et les tables de probabilités conditionnelles correspondantes pour cette situation sont présentés dans la Figure 21.

1. Calculez la probabilité jointe $P(-e, -s, -m, -b)$.
2. Quelle est la probabilité que les océans bouillonnent ?
3. Quelle est la probabilité que l'apocalypse Maya se produise, étant donné que les océans sont en ébullition ?
4. Quelle est la probabilité que l'apocalypse Maya se produise, étant donné qu'il y a une odeur de soufre, que les océans sont en ébullition et qu'il y a des œufs pourris ?
5. Quelle est la probabilité que des œufs pourris soient présents, étant donné que l'apocalypse Maya se produit ?

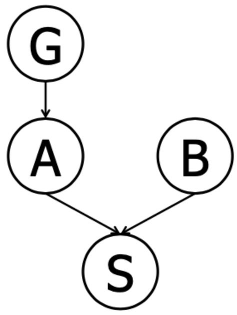
Ex. 2

Supposons qu'un patient puisse avoir un symptôme (S) pouvant être causé par deux maladies différentes (A et B). On sait que la variation du gène G joue un rôle important dans l'apparition de la maladie A. Le réseau de Bayes et les tables de probabilités conditionnelles correspondantes pour cette situation sont dans la Figure 22.

1. Calculer la probabilité conjointe $P(+g, +a, +b, +s)$

$\mathbf{P}(G)$	
$+g$	0.1
$-g$	0.9

$\mathbf{P}(A \mid G)$		
$+g$	$+a$	1.0
$+g$	$-a$	0.0
$-g$	$+a$	0.1
$-g$	$-a$	0.9



$\mathbf{P}(B)$	
$+b$	0.4
$-b$	0.6

$\mathbf{P}(S \mid A, B)$			
$+a$	$+b$	$+s$	1.0
$+a$	$+b$	$-s$	0.0
$+a$	$-b$	$+s$	0.9
$+a$	$-b$	$-s$	0.1
$-a$	$+b$	$+s$	0.8
$-a$	$+b$	$-s$	0.2
$-a$	$-b$	$+s$	0.1
$-a$	$-b$	$-s$	0.9

Figure 22: Image de [1].

2. Quelle est la probabilité qu'un patient ait la maladie A?

3. Quelle est la probabilité qu'un patient ait la maladie A sachant qu'il a la maladie B ?

4. Quelle est la probabilité qu'un patient ait la maladie A sachant qu'il a le symptôme S et la maladie B ?

5. Quelle est la probabilité qu'un patient ait la variation du gène porteur de la maladie G étant donné qu'il a la maladie A ?

6. Quelle est la probabilité qu'un patient ait la variation du gène porteur de la maladie G étant donné qu'il a la maladie B ?

8.1 Examen 2022-2023

1. Parmi les déclarations d'indépendance conditionnelles suivantes, lesquelles sont garanties vraies par la structure du réseau Bayésien dans la Figure 23 ? (3 points)

   (a) $A \perp\!\!\!\perp D|C$

   (b) $A \perp\!\!\!\perp D|B$

   (c) $A \perp\!\!\!\perp I$

   (d) $E \perp\!\!\!\perp I|H$

   (e) $D \perp\!\!\!\perp E|G$

2. Quelles sont les couvertures de Markov (*Markov Blanket*) des variables E et H ? (2 points)

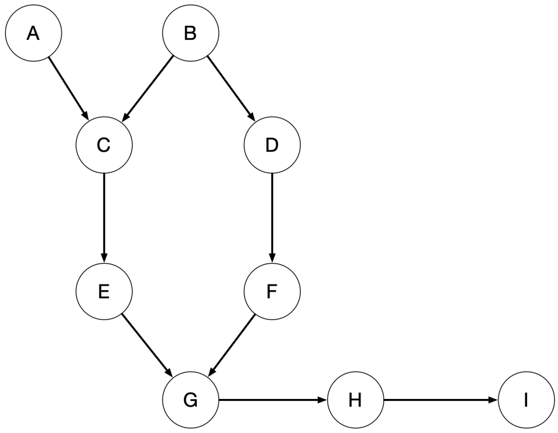


Figure 23: Réseaux bayésien composé de 9 nœuds. Les arcs modélisent les dépendances conditionnelles entre les variables.

Ex. 3

PacLabs vient de créer un nouveau type de mini-pastille de puissance suffisamment petite pour que Pacman puisse l'emporter avec lui lorsqu'il parcourt des labyrinthes. Malheureusement, ces mini-pastilles ne garantissent pas que Pacman gagnera tous ses combats avec des fantômes, et ils ressemblent aux points réguliers que Pacman transporte pour grignoter.

Pacman vient de manger une collation (P), qui était soit une mini-pastille ($+p$), soit un point normal ($-p$), et est sur le point de se battre (W). Il peut resortir de son combat gagnant ($+w$) ou perdant ($-w$). Ces deux variables sont inconnues, mais heureusement, Pacman est un maître des probabilités. Il sait que son sac de collations contient 5 mini-pastilles et 15 pastilles régulières. Il sait aussi que s'il a mangé une mini-pastille, il a 70% de chance de gagner, mais s'il a mangé une pastille régulière, il n'a que 20% de chance.

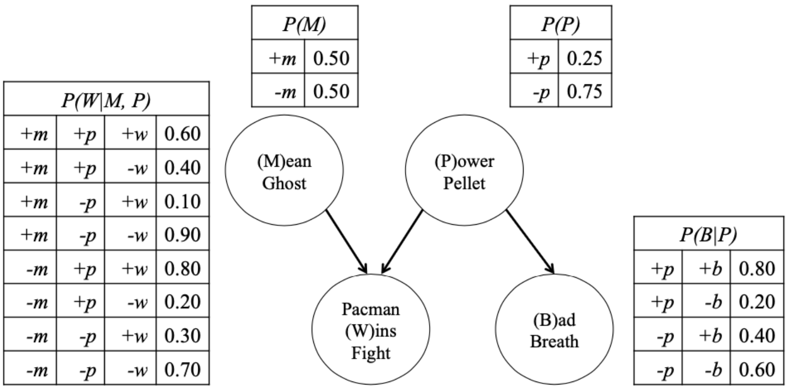
1. Quelle est $P(+w)$, la probabilité marginale que Pacman gagne ?

2. Pacman a gagné ! Hourra ! Quelle est la probabilité conditionnelle $P(+p|+w)$ que l'aliment qu'il a mangé soit une mini-pastille, étant donné qu'il a gagné ?

Pacman peut faire de meilleures estimations de probabilité s'il prend en compte plus d'informations. Premièrement, l'haleine de Pacman, B, peut être mauvaise ($+b$) ou fraîche ($-b$). Deuxièmement, il existe deux types de fantôme (M) : moyen ($+m$) et gentil ($-m$). Pacman a encodé ses connaissances sur la situation dans le réseau de Bayes dans la Figure 24.

3. Quelle est la probabilité de l'événement atomique $P(-m, +p, +w, -b)$, où Pacman mange une mini-pastille et a une haleine fraîche avant de gagner un combat contre un gentil fantôme ?

4. Parmi les déclarations d'indépendance conditionnelle suivantes, lesquelles sont garanties vraies par la structure du réseau de Bayes ?



P(M)	
+m	0.50
-m	0.50

P(P)	
+p	0.25
-p	0.75

P(W|M, P)			
+m	+p	+w	0.60
+m	+p	-w	0.40
+m	-p	+w	0.10
+m	-p	-w	0.90
-m	+p	+w	0.80
-m	+p	-w	0.20
-m	-p	+w	0.30
-m	-p	-w	0.70

P(B|P)		
+p	+b	0.80
+p	-b	0.20
-p	+b	0.40
-p	-b	0.60

Figure 24: Image de [1].

(a) $W \perp\!\!\!\perp B$
(b) $W \perp\!\!\!\perp B|P$
(c) $M \perp\!\!\!\perp P$
(d) $M \perp\!\!\!\perp P|W$
(e) $M \perp\!\!\!\perp B$
(f) $M \perp\!\!\!\perp B|P$
(g) $M \perp\!\!\!\perp B|W$

Pour le reste de cette question, utilisez la moitié de la table de probabilité conjointe qui a été calculée pour vous dans la Figure 25.

5. Quelle est la probabilité marginale, $P(+m, +b)$ que Pacman rencontre un fantôme méchant et ait mauvaise haleine ?

6. Pacman constate qu'il a mauvaise haleine et que le fantôme auquel il est confronté est méchant. Quelle est la probabilité conditionnelle, $P(+w|+m, +b)$, qu'il gagne le combat, compte tenu de son observation ?

7. L'utilité de Pacman est de $+10$ pour un combat gagné, -5 pour un combat perdu et -1 s'il court loin d'un combat. Pacman veut maximiser son utilité espérée. Étant donné qu'il a mauvaise haleine et qu'il fait face à un méchant fantôme, doit-il rester et se battre, ou s'enfuir ? Justifiez votre réponse numériquement !

$P(M, P, W, B)$				
$+m$	$+p$	$+w$	$+b$	0.0800
$+m$	$+p$	$+w$	$-b$	0.0150
$+m$	$+p$	$-w$	$+b$	0.0400
$+m$	$+p$	$-w$	$-b$	0.0100
$+m$	$-p$	$+w$	$+b$	0.0150
$+m$	$-p$	$+w$	$-b$	0.0225
$+m$	$-p$	$-w$	$+b$	0.1350
$+m$	$-p$	$-w$	$-b$	0.2025

Figure 25: Image de [1].

9 Échantillonnage et réseaux bayésiens

Ex. 1

Identifier la couverture de Markov (*Markov Blanket*) de chaque variable dans la Figure 26. La couverture de Markov sont les parents, les enfants et les parents des enfants d'une variable.

Ex. 2

Supposons le réseau Bayésien et les distributions correspondantes sur les variables du réseau de la Figure 27.

1. Votre tâche consiste maintenant à estimer $P(+y| + x, +z)$ en utilisant le *rejection sampling*. Vous trouverez ci-dessous quelques échantillons qui ont été produits par *prior sampling* (c'est-à-dire que l'étape de rejet dans l'échantillonnage n'a pas encore eu lieu). Lequel des échantillons suivants serait rejeté par le *rejection sampling*?

   (a) $+x$, $+y$, $+z$

   (b) $-x$, $+y$, $+z$

   (c) $-x$, $-y$, $+z$

   (d) $+x$, $-y$, $-z$

   (e) $+x$, $-y$, $+z$

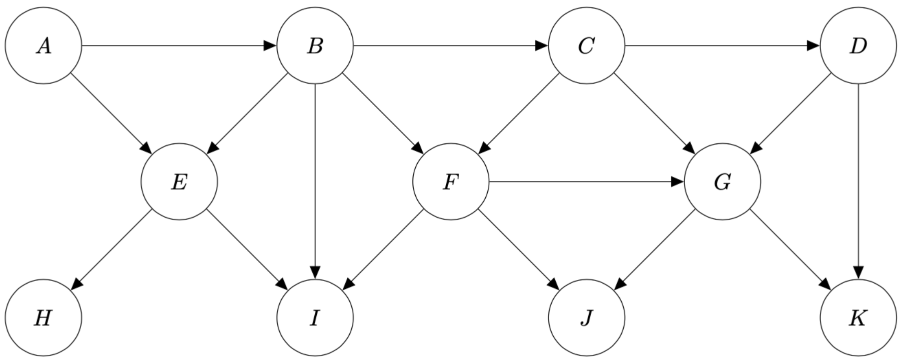
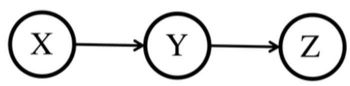


Figure 26: Image de [1].

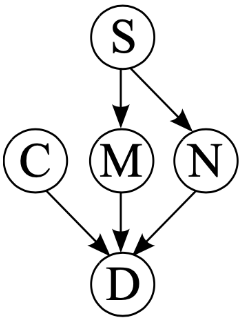


X	$\mathbf{P}(X)$
$+x$	$2/5$
$-x$	$3/5$

Y	X	$\mathbf{P}(Y \mid X)$
$+y$	$+x$	2/3
$-y$	$+x$	1/3
$+y$	$-x$	3/4
$-y$	$-x$	1/4

Z	Y	$\mathbf{P}(Z \mid Y)$
$+z$	$+y$	1/3
$-z$	$+y$	2/3
$+z$	$-y$	1/5
$-z$	$-y$	4/5

Figure 27: Image de [1].



S	C	M	N	D
$-s$	$+c$	$+m$	$-n$	$+d$
$+s$	$+c$	$-m$	$-n$	$-d$
$+s$	$-c$	$-m$	$+n$	$-d$
$+s$	$+c$	$+m$	$-n$	$+d$
$+s$	$+c$	$-m$	$+n$	$+d$
$+s$	$-c$	$-m$	$+n$	$-d$
$+s$	$-c$	$-m$	$-n$	$-d$
$+s$	$+c$	$+m$	$+n$	$+d$
$+s$	$+c$	$-m$	$+n$	$-d$
$-s$	$-c$	$-m$	$-n$	$-d$

S	C	M	N	D	weight
$-s$	$+c$	$+m$	$+n$	$-d$	
$-s$	$+c$	$-m$	$-n$	$-d$	
$-s$	$-c$	$-m$	$+n$	$-d$	
$-s$	$+c$	$+m$	$+n$	$-d$	

Figure 28: Image de [1].

2. À l'aide d'un *rejection sampling*, donnez une estimation de $P(+y|+x,+z)$ à partir des cinq échantillons précédents, ou indiquez pourquoi il ne peut pas être calculé.

3. En utilisant les échantillons suivants (qui ont été générés en utilisant le *Likelihood weighting*), estimez $P(+y|+x,+z)$ en utilisant le *likelihood weighting*, ou indiquez pourquoi il ne peut pas être calculé.

   (a) $+x$, $+y$, $+z$
   (b) $+x$, $+y$, $+z$
   (c) $+x$, $+y$, $+z$

Ex. 3

Vous êtes un exobiologiste, étudiant le large éventail de la vie dans l'univers. Vous êtes également un danseur passionné et avez un excellent modèle de la façon dont les espèces inventent la danse. Les variables clés sont :

- Détection du son (S) : si une espèce a ou non la capacité de détecter le son
- Climat froid (C) : si la planète natale de l'espèce connaît ou non un climat froid
- Musique (M) : Si oui ou non l'espèce a inventé la musique
- Communication non verbale (N) : si l'espèce a ou non une forme quelconque de communication non verbale.

Vous modélisez les relations entre ces variables et la danse (D) à l'aide du réseau bayésien spécifié dans la Figure 28.

Vous voulez savoir quelle est la probabilité qu'une espèce dansante et sensible au son de la musique, selon le réseau Bayésien dans la Figure 28. Vous décidez de faire de l'inférence par échantillonnage. Vous utilisez "prior sampling" pour tirer les échantillons (voir le tableau dans la Figure 28).

1. Sur base du *rejection sampling* utilisant les échantillons ci-dessus, quelle est la réponse à votre question $P(+m|+d,+s)$?

C	M	N	D	P(D | C , M , N)
$+c$	$+m$	$+n$	$+d$	0.9
$+c$	$+m$	$+n$	$-d$	0.1
$+c$	$+m$	$-n$	$+d$	0.8
$+c$	$+m$	$-n$	$-d$	0.2
$+c$	$-m$	$+n$	$+d$	0.8
$+c$	$-m$	$+n$	$-d$	0.2
$+c$	$-m$	$-n$	$+d$	0.2
$+c$	$-m$	$-n$	$-d$	0.8
$-c$	$+m$	$+n$	$+d$	0.8
$-c$	$+m$	$+n$	$-d$	0.2
$-c$	$+m$	$-n$	$+d$	0.5
$-c$	$+m$	$-n$	$-d$	0.5
$-c$	$-m$	$+n$	$+d$	0.6
$-c$	$-m$	$+n$	$-d$	0.4
$-c$	$-m$	$-n$	$+d$	0.1
$-c$	$-m$	$-n$	$-d$	0.9

S	M	P(M | S)
$+s$	$+m$	0.8
$+s$	$-m$	0.2
$-s$	$+m$	0.1
$-s$	$-m$	0.9

S	P(S)
$+s$	0.9
$-s$	0.1

S	N	P(N | S)
$+s$	$+n$	0.7
$+s$	$-n$	0.3
$-s$	$+n$	0.9
$-s$	$-n$	0.1

C	P(C)
$+c$	0.5
$-c$	0.5

Figure 29: Image de [1].

Bien que votre méthode d'échantillonnage ait assez bien fonctionné dans de nombreux cas, dans de rares cas (comme les espèces qui ne peuvent pas détecter le son), vos résultats sont moins précis car le *rejection sampling* rejette presque toutes les données. Vous décidez d'utiliser *Likelihood weighting* à la place. Les probabilités conditionnelles du réseau de Bayes sont répertoriées dans le tableau dans la Figure 29.

Vous souhaitez maintenant calculer la probabilité qu'une espèce qui n'a pas de détection sonore ($-s$) ou de danse ($-d$) ait néanmoins de la musique ($+m$), en utilisant cette information. C'est-à-dire que vous voulez calculer $P(+m|-s,-d)$.

2. Vous tirez les échantillons du tableau, en utilisant le *likelihood weighting*. Pour chacun de ces échantillons, indiquez son poids

3. Calculez la réponse à votre requête, $P(+m|-s,-d)$, en utilisant la pondération de vraisemblance avec ces échantillons.

9.1 Examen 2022-2023

Nous aimerions analyser la consommation de crème glacée les jours ensoleillés et pluvieux. Supposons que nous considérions la météo, ainsi que la consommation de glace d'une personne, sur une période de deux jours. Nous aurons quatre variables aléatoires : W_1 et W_2 représentent le temps qu'il fait les jours 1 et 2, qui peuvent être pluvieux R ou ensoleillés S, et les variables I_1 et I_2représentent si la personne a mangé ou non de la glace les jours 1 et 2, et prennent les valeurs T (si elle a mangé de la crème glacée) ou F. Nous pouvons modéliser cela comme le réseau Bayésien de la Figure 30. Les variables sont associées aux probabilités suivantes :

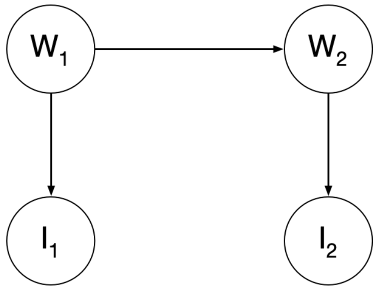


Figure 30: Réseaux Bayésien composé de 4 nœuds. Les arêtes modélisent les dépendances conditionnelles entre les variables.

W_1	$P(W_1)$
S	0.6
R	0.4

W_1	W_2	$P(W_2\|W_1)$
S	S	0.7
S	R	0.3
R	S	0.5
R	R	0.5

W	I	$P(I\|W)$
S	T	0.9
S	F	0.1
R	T	0.2
R	F	0.8

1. Supposons que nous produisions les échantillons suivants de (W_1, I_1, W_2, I_2) à partir du modèle de crème glacée : $(R, F, R, F), (R, F, R, F), (S, F, S, T), (S, T, S, T), (S, T, R, F)$.
   (a) En utilisant ces échantillons, quelle est l'estimation de $P(W_2 = R)$? (1 point)
   (b) Quels échantillons ci-dessus sont rejetés par *rejection sampling* si nous essayons d'estimer $P(W_2|I_1 = T, I_2 = F)$? (1 point)
2. Le *rejection sampling* semble peu efficace, nous décidons donc de passer au *likelihood weighting*. Supposons qu'on génère les six échantillons suivants pour (W_1, W_2, I_1, I_2), étant donné la preuve $I_1 = T$ et $I_2 = F$: $(S, T, R, F), (R, T, R, F), (S, T, R, F), (S, T, S, F), (S, T, S, F), (R, T, S, F)$
   (a) Calculez le poids de chaque échantillon. (2 points)
   (b) Estimez $P(W_2|I_1 = T, I_2 = F)$ en utilisant nos poids de vraisemblance (*likelihood weighting*) de la partie précédente. (2 points)

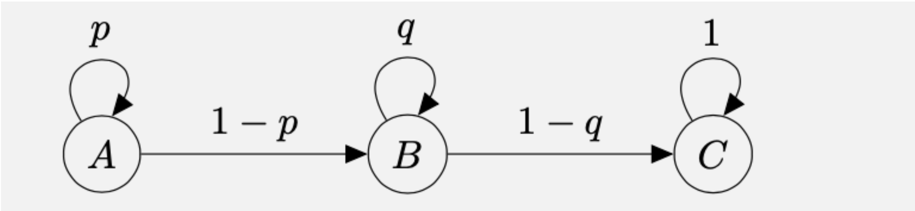


Figure 31: Image de [1].

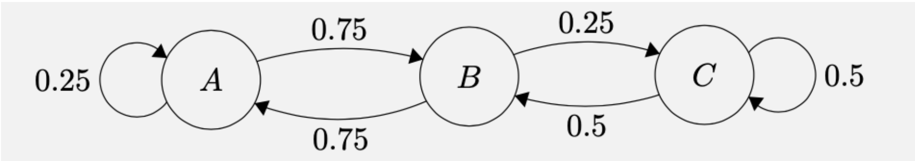


Figure 32: Image de [1].

10 Modèles de Markov

Ex. 1

Supposons qu'un objet se déplace selon le modèle de transition de la Figure 31. Ici, $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$ sont des probabilités arbitraires. Au temps 0, l'on sait que l'objet est dans l'état A.

1. Quelle est la probabilité que l'objet soit dans A au temps $n \geq 0$?
2. Quelle est la probabilité que l'objet atteigne B pour la première fois au temps $n \geq 1$?
3. Quelle est la probabilité que l'objet soit dans B au temps $n \geq 1$?
4. Quelle est la probabilité que l'objet atteigne C pour la première fois au temps $n \geq 2$?
5. Quelle est la probabilité que l'objet soit dans C au temps $n \geq 2$?

Ex. 2

Considérons une chaîne de Markov avec 3 états et probabilités de transition comme dans la Figure 32. Calculer la distribution stationnaire. Autrement dit, calculez $P_\infty(A)$, $P_\infty(B)$ et $P_\infty(C)$.

Ex. 3

Considérons un HMM avec des variables d'état $\{X_i\}$ et des variables d'émission $\{Y_i\}$.

1. (vrai ou faux) X_i est toujours conditionnellement indépendant de Y_{i+1} étant donné X_{i+1}.

2. (vrai ou faux) Il existe un HMM où X_i est conditionnellement indépendant de Y_i étant donné $X_i + 1$.

3. (vrai ou faux) Si $Y_i = X_i$ avec probabilité 1, et que l'espace d'état est de taille k, alors l'algorithme le plus efficace pour calculer $P(X_t|y_1, \cdots, y_t)$ prend $O(k)$ ou moins de temps.

Ex. 4

1. (vrai ou faux) Avec un modèle de transition déterministe et un modèle d'observation stochastique, comme le temps va vers l'infini, lors de l'exécution d'un filtre à particules, nous nous retrouverons avec des particules toutes identiques.

2. (vrai ou faux) Avec un modèle d'observation déterministe, toutes les particules pourraient finir par avoir un poids nul.

3. (vrai ou faux) Il est possible d'utiliser le filtrage à particules lorsque l'espace d'état est continu.

4. (vrai ou faux) Le nombre de particules tendant vers l'infini, le filtrage à particules représentera la même distribution de probabilité que vous obtiendriez en utilisant l'inférence exacte.

5. (vrai ou faux) Le filtrage à particules peut représenter une distribution plate (c'est-à-dire uniforme) avec moins de particules qu'il n'en faudrait pour une distribution plus concentrée (c'est-à-dire gaussienne).

Ex. 5

Pour quels paramètres le filtrage à particules est-il meilleur que l'inférence HMM exacte?

1. Espaces d'états grands ou petits.

2. Priorité à la durée d'exécution par rapport à la précision.

Ex. 6

Considérons un HMM avec T pas de temps, variables d'état cachées $X_1, \cdots, X_T$, et variables observées $E_1, \cdots, E_T$. Soit S le nombre d'états possibles pour chaque variable d'état cachée X.

On veut calculer (avec l'algorithme direct) ou estimer (avec filtrage à particules) $P(X_T|E_1 = e_1, \cdots, E_T = e_T)$

Combien de particules, en termes de S et/ou de T, faudrait-il pour que le filtrage particulaire ait la même complexité temporelle que l'algorithme direct ? Vous pouvez supposer que, dans le filtrage à particules, chaque étape d'échantillonnage peut être effectuée en temps constant pour une seule particule (bien que ce ne soit pas nécessairement le cas dans la réalité).

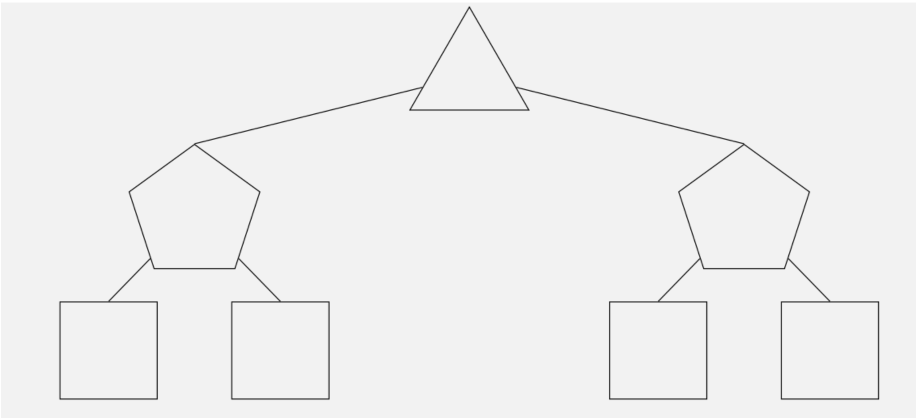


Figure 33: Image de [1].

11 Réseaux de décisions

Ex. 1

Considérez un étudiant qui a le choix d'acheter ou de ne pas acheter un manuel pour un cours.

Modélisez cela comme un problème de décision avec un nœud de décision booléen, B, indiquant si l'agent choisit d'acheter le livre, et deux nœuds de hasard booléens, M, indiquant si l'étudiant a maîtrisé le contenu du livre, et P, indiquant si l'élève réussit le cours. Bien sûr, il existe également un nœud utilitaire, U.

Un certain étudiant, Sam, a une fonction d'utilité additive : 0 si l'achat n'est pas fait et -100\$ si l'achat est fait ; et 2000\$ s'il réussi le cours et 0 s'il ne réussi pas le cours. Les estimations de probabilités conditionnelles de Sam sont les suivantes : $P(+p|+b,+m) = 0.9$; $P(+m|+b) = 0.9$; $P(+p|+b,-m) = 0.5$; $P(m|-b) = 0.7$; $P(+p|-b,+m) = 0.8$; $P(p|-b,-m) = 0.3$ Vous pourriez penser que P serait indépendant de B étant donné M, mais ce cours a un examen à livre ouvert, donc avoir le livre aide.

1. Dessinez le réseau de décision pour ce problème.

2. Calculez l'utilité espérée d'acheter le livre et de ne pas l'acheter.

3. Que doit faire Sam ?

Ex. 2

Valérie vient de trouver un biscuit par terre. Elle craint que le biscuit contienne des raisins secs, ce qu'elle n'aime vraiment pas, mais elle veut quand même manger le biscuit. Si elle mange le biscuit et qu'il contient des raisins secs, elle recevra une utilité de -100 et si le biscuit ne contient pas de raisins secs, elle recevra une utilité de 10. Si elle ne mange pas le biscuit, elle obtiendra 0 utilité. Le biscuit contient des raisins secs avec une probabilité de 0.1.

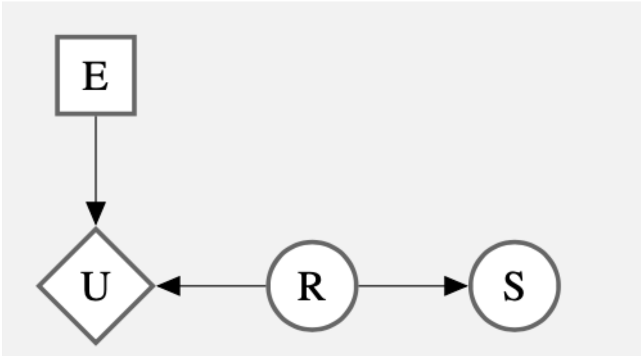


Figure 34: Image de [1].

1. Nous voulons représenter ce réseau de décision comme un arbre de jeu *expectimax*. Remplissez les nœuds de l'arbre donné (Figure 33), le nœud supérieur représentant son choix de maximisation.

2. Valérie devrait-elle manger le biscuit ?

Valérie peut maintenant sentir le biscuit pour juger s'il contient des raisins secs avant de le manger. Cependant, comme elle n'aime pas les raisins secs, elle n'a pas beaucoup d'expérience avec eux et ne peut pas bien reconnaître leur odeur. En conséquence, elle identifiera incorrectement les raisins secs lorsqu'il n'y a pas de raisins secs avec une probabilité de 0.2 et identifiera incorrectement l'absence de raisins secs lorsqu'il y a des raisins secs avec une probabilité de 0.3. Ce réseau de décision peut être représenté par le diagramme en Figure 34 où E est son choix de manger, U est son utilité gagnée, R est la présence de raisins secs dans le biscuit, et S est sa tentative de sentir.

3. Valérie vient de sentir le biscuit et elle pense qu'il n'y a pas de raisins secs. Donnez la probabilité, X, que le biscuit ait des raisins secs étant donné qu'elle n'a pas senti de raisins secs sous la forme la plus simple d'une fraction ou d'un nombre décimal.

4. Quelle est son utilité maximale attendue, Y, étant donné qu'elle n'a pas senti de raisins secs? Vous pouvez répondre en terme de X ou sous la forme la plus simple d'une fraction ou d'un nombre décimal.

5. Quelle est la valeur de l'information parfaite (*Value of Perfect Inforamtion*) de sentir le cookie? Vous pouvez répondre en termes de X et Y ou sous la forme la plus simple d'une fraction ou d'un nombre décimal

11.1 Examen 2022-2023

Pacman erre dans un labyrinthe et rencontre un coffre magique. Il aimerait ouvrir le coffre mais il craint qu'il contienne un fantôme (G). S'il l'ouvre et le fantôme apparaît, il sera tué par le fantôme, ce qui se traduira par un score de -10. Si le coffre contient en revanche une pastille dorée, Pacman obtiendra un score de 50. La probabilité d'obtenir la pastille dorée est de 20%.

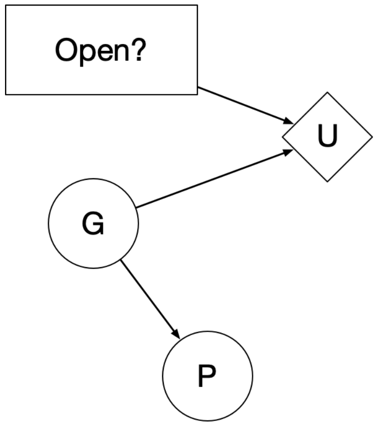


Figure 35: Réseau de décision

- Dessinez le réseau de décision et calculez l'utilité espérée (*expected utility* - EU) de l'ouverture du coffre, c.-à-d. $EU(+open)$? (1 point)
- Pacman peut demander l'aide d'un prêtre (P), qui peut vérifier si le coffre contient un fantôme. Le succès du prêtre ($P = +p$) dépendra du fait que le coffre magique contienne ou non un fantôme. Nous savons que $P(+p|+g) = 0.7$ et $P(+p|-g) = 0.2$. Calculez la probabilité que le prêtre réussisse son évaluation (c.-à-d. $P(+p)$ et $P(-p)$) et la probabilité que le fantôme (ou la pastille dorée) apparaisse du coffre à la suite de chaque résultat de l'évaluation du prêtre (c.-à-d. $P(+g|+p)$ et $P(+g|-p)$). Développez également la conception du réseau de décision de (a) avec cet élément supplémentaire. (2 points)
- Calculez les décisions optimales (c.-à-d. $+open$ ou $-open$) compte tenu du succès ($P = +p$) ou de l'échec ($P = -p$) du prêtre, et leurs utilités attendues). (2 points)
- Calculez la valeur de l'information (parfaite) du test. Pacman doit-il demander au prêtre de faire le test ? (1 point)

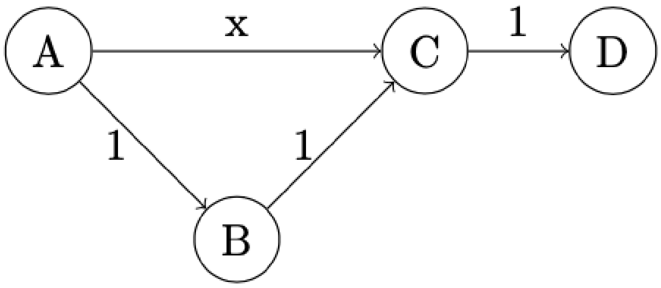


Figure 36: Image de [2].

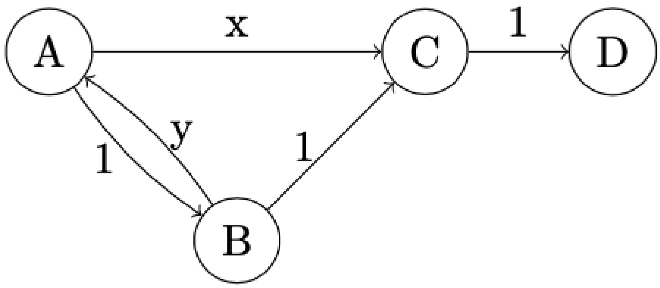


Figure 37: Image de [2].

12 Processus décisionnels de Markov

Ex. 1

Considérons le MDP déterministe dans la Figure 36 avec quatre états A, B, C et D. Les arcs désignent les actions entre les états, les poids sur ces arcs sont les récompenses et le facteur d'actualisation (discount factor) est $\gamma = 1$. Soit k la première itération lors de l'itération de valeur à laquelle la fonction de valeur converge pour certains x pour un état particulier (c'est-à-dire $V^k(s) = V^*(s)$). Pour chaque état A, B, C et D, énumérez toutes les valeurs possibles de k. Dans le cas où une fonction de valeur pour un état particulier ne converge jamais, définissez $k = \infty$ pour cet état.

Ex. 2

Considérons le MDP déterministe dans la Figure 37 avec quatre états A, B, C et D. Les arêtes désignent les actions entre les états, les poids sur ces arêtes sont les récompenses et le facteur d'actualisation est à nouveau $\gamma = 1$. Supposons en outre que $x, y \geq 0$.

Soit k la **première** itération de l'itération de valeur pour certains x et y

non négatifs auxquels la fonction de valeur converge pour un état particulier ($V_k(s) = V^*(s)$). Pour chaque état A, B, C et D énumérez **toutes** les valeurs possibles de k. Dans le cas où une valeur pour un état particulier ne converge jamais, définissez $k = \infty$ pour cet état.

Ex. 3

Considérons que nous effectuons une itération de politique (*policy iteration*) et que k est la **première** itération pour laquelle la politique est optimale pour un état particulier (c'est-à-dire $\pi_k(s) = \pi^*(s)$). En plus de $x, y \geq 0$ supposent également que $x+y < 1$ et que le départage lors de l'amélioration de la politique est alphabétique. Pour chaque état A, B, C et D, trouvez k ; si la politique ne converge jamais, fixez $k = \infty$ pour cet état. La politique initiale est donnée dans le tableau ci-dessous.

État s	Politique $\pi_0(s)$
A	C
B	C
C	D
D	S

12.1 Examen 2022-2023

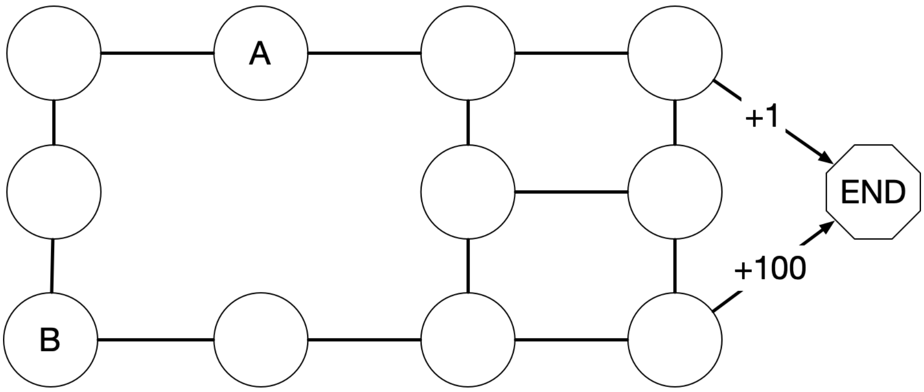


Figure 38: Réseaux MDP. Le réseau est composé de 11 états et un état final avec le label END. Les connections entre les états modélisent les actions autorisées pour un agent. Donc même si un agent peut prendre quatre actions dans chaque état ($\uparrow$, $\downarrow$, $\leftarrow$, $\rightarrow$), certaines des actions n'entraîneront pas de mouvement. Dans les états avec un bord dirigé sortant, les agents ont une cinquième action EXIT qui les amène à l'état final, qui sont récompensés par +1 ou +100 selon l'endroit où l'action de sortie est effectuée.

Le problème décrit dans cette question aura lieu dans une instance d'un réseau MDP visualisé dans la Figure 38. Dans tous les états, l'agent dispose des actions $\uparrow$, $\downarrow$, $\leftarrow$ et $\rightarrow$. L'exécution d'une action non autorisée entraîne le maintien de l'agent dans son état d'origine. Dans deux états avec une arête dirigée sortant de l'état, l'agent a une action supplémentaire EXIT. Dans le cas où l'action EXIT est effectuée, l'agent reçoit la récompense étiquetée et termine le jeu dans l'état terminal END. Sauf indication contraire, toutes les autres transitions ne reçoivent aucune récompense et toutes les transitions sont déterministes. Pour toutes les parties du problème, supposons que l'itération de valeur (*Value Iteration*) commence avec tous les états initialisés à zéro, c'est-à-dire $V_0(s) = 0 \forall s$. Soit le facteur d'actualisation $\gamma = 1/2$ pour toutes les parties suivantes.

1. Quelles sont les valeurs optimales pour A et B ($V^*(A)$ et $V^*(B)$) dans ce problème ? (2 points)
2. Après combien d'itérations k aurons-nous $V_k(s) = V^*(s)$ pour tous les états s ? Si cela ne se produit jamais, écrivez "jamais". (1 point)
3. Supposons que nous voulions reconcevoir la fonction de récompense (*reward function*). Pour laquelle des nouvelles fonctions de récompense suivantes la politique optimale resterait-elle inchangée, soit $R(s, a, s')$ la fonction de récompense original? (2 points)
   (a) $R_1(s, a, s') = 5R(s, a, s') + 17$
   (b) $R_2(s, a, s') = 1 + R(s, a, s')^2$
   (c) $R_3(s, a, s') = -1$

Ex. 4

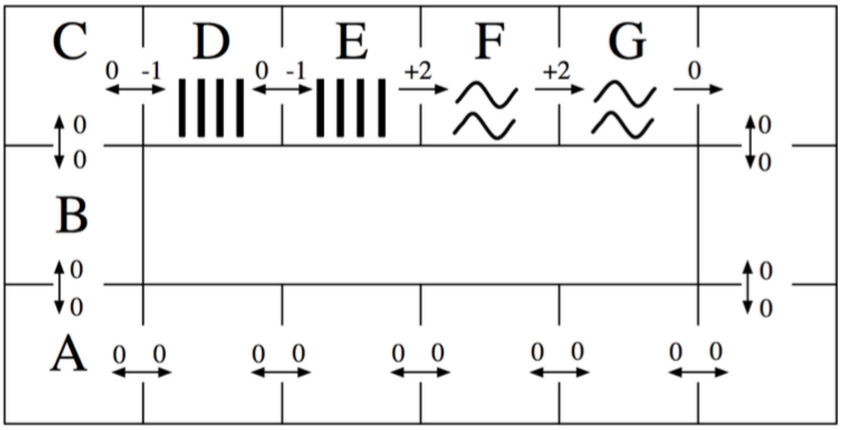


Figure 39: Image de [2].

Considérez le MDP dessiné dans la Figure 39. L'espace d'état se compose de toutes les cases d'un parc aquatique du monde de la grille. Il y a un seul toboggan aquatique composé de deux carrés d'échelle et de deux carrés de toboggan (marqués respectivement de barres verticales et de lignes sinueuses). Un agent de ce parc aquatique peut se déplacer de n'importe quelle case vers n'importe quelle case voisine, sauf si la case en cours est un toboggan auquel cas il doit avancer d'une case le long du toboggan. Les actions sont indiquées par des flèches entre les carrés sur la carte et toutes déplacent l'agent de manière déterministe dans la direction donnée. L'agent ne peut pas rester immobile : il doit se déplacer à chaque pas de temps. Les récompenses sont également indiquées ci-dessous : l'agent ressent un grand plaisir en glissant sur le toboggan aquatique (+2), un certain inconfort en gravissant les échelons de l'échelle (−1), et reçoit des récompenses de 0 dans tout autre cas. L'horizon temporel est infini ; ce MDP dure éternellement.

1. Combien de *policies* (déterministes) π sont possibles pour ce MDP ?

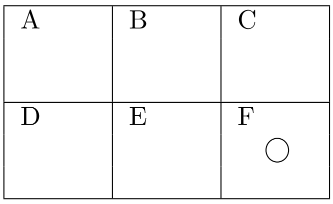
2. Remplissez les cellules vides du tableau ci-dessous avec des valeurs correctes pour la fonction, le facteur d'actualisation et l'état correspondants. Astuce : Vous ne devriez pas avoir besoin de faire des calculs substantiels ici.

	γ	$s = A$	$s = B$
$V_3(s)$	1.0		
$V_{10}(s)$	1.0		
$V_{10}(s)$	0.1		
$Q_1(s, west)$	1.0	$----$	
$Q_{10}(s, west)$	1.0	$----$	
$V^*(s)$	1.0		
$V^*(s)$	0.1		

3. Remplissez les cellules vides du deuxième tableau ci-dessous avec les valeurs Q résultant de l'application de la mise à jour Q pour la transition spécifiée sur chaque ligne. Vous pouvez laisser vides les valeurs Q qui ne sont pas affectées par la mise à jour actuelle. Utilisez le discount $\gamma = 1.0$. Supposez que toutes les valeurs Q sont initialisées à 0. (Remarque : les transitions spécifiées ne résulteraient pas d'un seul épisode.)

	$Q(D, west)$	$Q(D, east)$	$Q(E, west)$	$Q(E, east)$
Initial	0	0	0	0
Transition 1: ($s = D$, $a = east$, $r = -1$, $s' = E$)				
Transition 1: ($s = D$, $a = east$, $r = -1$, $s' = E$)				
Transition 1: ($s = D$, $a = east$, $r = -1$, $s' = E$)				
Transition 1: ($s = D$, $a = east$, $r = -1$, $s' = E$)				

Ex. 5



Pacman utilise les MDP pour maximiser son utilité attendue. Dans chaque environnement :

1. Pacman a les actions standard $\{Nord, Est, Sud, Ouest\}$ à moins qu'il ne soit bloqué par un mur extérieur.
2. Il y a une récompense de 1 point en mangeant le point (par exemple, dans la grille ci-dessus, $R(C, Sud, F) = 1$).
3. Le jeu se termine lorsque le point est mangé.

Considérez la grille ci-dessus où il y a une seule pastille alimentaire dans le coin inférieur droit (F). Le discount factor est 0,5. Il n'y a pas de récompense vivante. Les états sont simplement les emplacements de la grille.

1. Quelle est la politique optimale pour chaque état ?
2. Quelle est la valeur optimale pour l'état d'être dans le coin supérieur gauche (A) ? Rappel: le facteur d'actualisation γ est de 0.5.
3. En utilisant l'itération de valeur avec la valeur de tous les états étant zéro à $k = 0$, pour quelle itération k aura-t-on que $V_k(A) = V^*(A)$?

13 Apprentissage par renforcement

Ex. 1

Pacman est dans un MDP inconnu à trois états $\{A, B, C\}$ et deux actions $\{Stop, Go\}$. On nous donne les exemples suivants générés à partir de la prise d'actions dans le MDP inconnu. Pour les problèmes suivants, supposons $\gamma = 1$ et $\alpha = 0.5$.

Nous exécutons Q-learning sur les exemples suivants :

s	a	s'	r
A	Go	B	2
C	$Stop$	A	0
B	$Stop$	A	-2
B	Go	C	-6
C	Go	A	2
A	Go	A	-2

1. Quelles sont les estimations des valeurs Q obtenues par Q-learning après cette séquence d'actions ? Toutes les valeurs Q sont initialisées à 0.

   (a) $Q(C, Stop) =$

   (b) $Q(C, Go) =$

Pour la prochaine partie, nous allons passer à une représentation basée sur les fonctionnalités (*features*). Nous allons utiliser deux fonctionnalités :

- $f_1(s, a) = 1$
- $f_2(s, a) = 1$ if $a = Go$ and $f_2(s, a) = -1$ if $a = Stop$

En partant de poids initiaux de 0, calculez les poids mis à jour après avoir observé les échantillons ci-dessous.

s	a	s'	r
A	Go	B	4
B	$Stop$	A	0

1. Quels sont les poids après la première mise à jour ? (en utilisant le premier échantillon):

   (a) $w_1 =$

   (b) $w_2 =$

2. Quels sont les poids après la deuxième mise à jour ? (en utilisant le deuxième échantillon):

   (a) $w_1 =$

   (b) $w_2 =$

Ex. 2

Considérons un MDP inconnu à trois états (A, B et C) et deux actions ($\leftarrow$ et $\rightarrow$). Supposons que l'agent choisisse des actions selon une politique π dans le MDP inconnu, en collectant un ensemble de données composé d'échantillons (s,a,s',r) représentant l'action a dans l'état s résultant en une transition vers l'état s' et une récompense de r. Vous pouvez supposer un discount factor de $\gamma = 1$.

s	a	s'	r
A	$\rightarrow$	B	2
C	$\leftarrow$	B	2
B	$\rightarrow$	C	-2
A	$\rightarrow$	B	4

1. Supposons que toutes les valeurs Q soient initialisées à 0 et utilisent un taux d'apprentissage de $\alpha = \frac{1}{2}$. Exécutez Q-learning sur le tableau d'expérience ci-dessus et remplissez les valeurs Q suivantes:
   (a) $Q(A, \rightarrow) =$
   (b) $Q(B, \rightarrow) =$
2. Après avoir exécuté Q-learning et produit les valeurs Q ci-dessus, vous construisez une politique π_Q qui maximise la valeur Q dans un état donné. Quelles sont les actions choisies par la politique dans les états A et B ?
   (a) $\pi_Q(A)$ est égal à i) $\leftarrow$, ii) $\rightarrow$, ou iii) indéfini
   (b) $\pi_Q(B)$ est égal à i) $\leftarrow$, ii) $\rightarrow$, ou iii) indéfini
3. Utilisez la méthode empirique d'apprentissage par renforcement basée sur un modèle de comptage de fréquence décrite dans les cours pour estimer la fonction de transition $\hat{T}(s, a, s')$ et la fonction de récompense $\hat{R}(s, a, s')$. (N'utilisez pas de pseudo-comptes ; si une transition n'est pas observée, elle a un compte de 0.) Notez les quantités suivantes. Vous pouvez écrire N/A pour des quantités indéfinies.

   $\hat{T}(A, \rightarrow, B) =$ $\qquad$ $\hat{R}(A, \rightarrow, B) =$
   $\hat{T}(B, \rightarrow, A) =$ $\qquad$ $\hat{R}(B, \rightarrow, A) =$
   $\hat{T}(B, \leftarrow, A) =$ $\qquad$ $\hat{R}(B, \leftarrow, A) =$

Ex. 3

Cette question examine les propriétés des algorithmes d'apprentissage par renforcement pour les MDP discrets arbitraires ; vous n'avez pas besoin de vous référer au MDP considéré dans les parties précédentes.

Laquelle des méthodes suivantes, à la convergence, fournit suffisamment d'informations pour obtenir une politique optimale ? (En supposant une exploration adéquate.)

1. Apprentissage basé sur un modèle de $T(s, a, s')$ et $R(s, a, s')$.
2. Évaluation directe pour estimer $V(s)$.
3. Apprentissage de la différence temporelle pour estimer $V(s)$.
4. Q-Learning pour estimer $Q(s, a)$.

Ex. 4

Lorsque le nombre de pas tends vers l'infini, sous laquelle des politiques d'exploration suivantes le Q-learning est-il garanti de converger vers les valeurs Q optimales pour tous les états ? (Vous pouvez supposer que le taux d'apprentissage α est choisi de manière appropriée et que le MDP est ergodique : c'est-à-dire que chaque état est accessible à partir de tous les autres états avec une probabilité non nulle.)

1. Une politique fixe prenant des actions uniformément au hasard.
2. Une politique *greedy*.
3. Une politique ϵ-*greedy*.
4. Une politique optimale fixe.

13.1 Examen 2022-2023

Considérons un MDP inconnu à 4 états (CC,CA,AC,AA) et deux actions (C et A, signifiant la coopération et l'abstention). Supposons qu'un agent choisisse des actions selon une politique π dans le MDP inconnu, en collectant un ensemble de données composé d'échantillons (s, a, s', r) représentant l'action a dans l'état s résultant en une transition vers l'état s' et une récompense de r. Nous supposons un facteur d'actualisation (*discount factor*) de $\gamma = 1$.

s	a	s'	r
CC	C	CA	-1
AC	A	AC	4
AC	C	CA	-1
CA	C	CC	2
AA	A	AC	4

Table 1: Les echantillons

- Supposons que toutes les valeurs Q soient initialisées à 0 et utilisent un taux d'apprentissage de $\alpha = 1/2$. Exécutez Q-learning sur le tableau d'expérience ci-dessus et remplissez les valeurs Q finales pour: (2 points)
  1. $Q(CC, C) =$
  2. $Q(AC, A) =$
  3. $Q(CA, C) =$
  4. $Q(AA, C) =$
- Après avoir exécuté Q-learning et produit les valeurs Q ci-dessus, vous construisez une politique π_Q qui maximise la valeur Q dans un état donné. Quelles sont les actions choisies par la politique dans les états AA, AC, CA et CC ? (2 points)

A	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
B	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
Y	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0

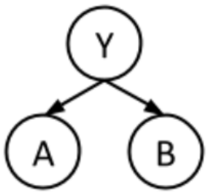


Figure 40: Image de [2].

14 Apprentissage automatique

Ex. 1

Dans cette question, nous allons former un classificateur Naive Bayes pour prédire les étiquettes de classe Y en fonction des caractéristiques d'entrée A et B (Figure 40). Y, A et B sont toutes des variables binaires, avec des domaines 0 et 1. Nous recevons 10 points d'apprentissage à partir desquels nous allons estimer notre distribution.

1. Quelles sont les estimations du maximum de vraisemblance pour les tables $P(Y)$, $P(A|Y)$ et $P(B|Y)$ (Figure 41)?

Y	$P(Y)$
0	
1	

A	Y	$P(A\|Y)$
0	0	
1	0	
0	1	
1	1	

B	Y	$P(B\|Y)$
0	0	
1	0	
0	1	
1	1	

Figure 41: Image de [2].

2. Considérons un nouveau point de données ($A = 1$ et $B = 1$). Quelle étiquette ce classificateur attribuerait-il à cet échantillon ?

3. Utilisons *Laplace smoothing* pour lisser notre distribution. Calculez la nouvelle distribution pour $P(A|Y)$ étant donné le *Laplace smoothing* de $k = 2$ (Figure 42).

A	Y	$P(A\|Y)$
0	0	
1	0	
0	1	
1	1	

Figure 42: Image de [2].

Ex. 2

Vous voulez prédire si les films seront rentables en fonction de leurs scénarios. Vous engagez deux critiques A et B pour lire un scénario que vous avez et le noter sur une échelle de 1 à 4. Les critiques ne sont pas parfaites ; Ci-dessous cinq points de données, y compris les notes des critiques et la performance du film.

#	Movie Name	A	B	Profit?
1	Pellet Power	1	1	-
2	Ghosts!	3	2	+
3	Pac is Bac	2	4	+
4	Not a Pizza	3	4	+
5	Endless Maze	2	3	-

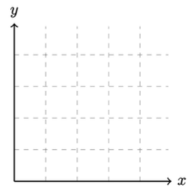


Figure 43: Image de [2].

1. Tout d'abord, vous souhaitez examiner la séparabilité linéaire des données. Tracez les données sur le plan 2D (Figure 43) ; étiquetez les films rentables avec + et les films non rentables avec − et déterminez si les données sont linéairement séparables.

2. Vous décidez maintenant d'utiliser un perceptron pour classer vos données. Supposons que vous utilisiez directement les scores donnés ci-dessus comme caractéristiques, avec une caractéristique de biais. Soit $f_0 = 1$, $f_1 =$ score donné par A et $f_2 =$ score donné par B. Exécutez un passage à travers les données avec l'algorithme perceptron, en remplissant le tableau ci-dessous. Parcourez les points de données dans l'ordre, par ex. en utilisant le point de données #1 à l'étape 1.

Step	Weights	Score	Correct?
1	$[-1, 0, 0]$	$-1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = -1$	yes
2			
3			
4			
5			

3. A-t-on appris des poids qui séparent les données ?

4. Plus généralement, quelles que soient les données d'entraînement, vous souhaitez savoir si vos fonctionnalités sont suffisamment puissantes pour vous permettre de gérer une gamme de scénarios. Encerclez les scénarios pour lesquels un perceptron utilisant les fonctionnalités ci-dessus peut en effet parfaitement classer les films qui sont rentables selon les règles données :

   (a) Vos critiques sont géniaux : si le total de leurs scores est supérieur à 8, alors le film sera certainement rentable, sinon il ne le sera pas.

   (b) Vos évaluateurs sont des critiques d'art. Votre film sera rentable si et seulement si chaque critique donne une note de 2 ou une note de 3.

   (c) Vos critiques ont des goûts bizarres mais différents. Votre film sera rentable si et seulement si les deux critiques sont d'accord.

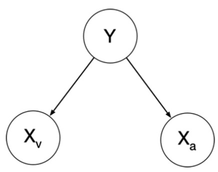
14.1 Examen 2022-2023

Vous voulez former une IA ornithologue, qui utilisera une caméra et l'équipement audio pour déterminer si un oiseau qu'il a repéré est un pinson ou un moineau. Vous obtenez ainsi deux observations : une visuelle et une auditive, désignées par les variables aléatoires X_v et X_a, respectivement. L'observation visuelle vous informe que l'oiseau est soit un pinson ($X_v = 1$) soit un moineau ($X_v = 0$). L'observation auditive X_a est définie de manière analogue. Vos observations sont une mesure bruyante du vrai type de l'individu, qui est noté Y. Après avoir personnellement examiné l'enregistrement visuel et auditif, vous découvrez ce qu'ils sont vraiment : soit un pinson ($Y = 1$), soit un moineau ($Y = 0$). Vous avez enregistré les observations et les vrais types des 20 premières rencontres d'oiseaux :

Oiseau i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Observation visuelle X_v	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
Observation auditive X_a	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
Type oiseau Y	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0

Maintenant, une observation pour un oiseau $i = 21$ est fait et vous voulez prédire le type Y de cet oiseau étant donné que vous avez observé $X_v = 1$ et$X_a = 1$.

Supposons que les types sont indépendants et que les observations sont indépendantes conditionnées par le type. Vous pouvez modéliser cela en utilisant un modèle Naïf Bayes, avec X_v et X_a, comme caractéristiques et Y comme label. Supposons que les distributions de probabilité sont les suivant :



X_v	Y	$P(X_v \mid Y)$
0	0	p_v
0	1	$(1 - p_v)$
1	0	$(1 - p_v)$
1	1	p_v

X_a	Y	$P(X_a \mid Y)$
0	0	p_a
0	1	$(1 - p_a)$
1	0	$(1 - p_a)$
1	1	p_a

Y	$P(Y)$
0	$(1 - q)$
1	q

1. Quelle est l'estimation du maximum de vraisemblance (*Maximum likelihood estimation*) de p_v, p_a et q ? (2 points)
2. Quelle est la probabilité que le prochain oiseau soit un pinson compte tenu de vos observations pour $i = 21$? Exprimez votre réponse en fonction des paramètres p_v, p_a et q (dont vous n'aurez peut-être pas tous besoin). (1 point)
3. À l'aide de le vôtre réponse à la partie (b) ainsi que les valeurs obtenues à la partie (a), calculez la probabilité réelle que le prochain oiseau soit un pinson. (1 point)

Est-il possible de créer un prédicteur en utilisant un perceptron ? Supposons que nous utilisions les observations répertoriées en haut et que les caractéristiques suivantes soient utilisées : $f_0 = 1$, f_1 est l'observation visuelle, et f_2 est l'observation auditive. Prenez les éléments $T = 1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 20$ comme ensemble d'entrainement et le reste comme ensemble d'évaluation ($E = 4, 6, 9, 14, 15$).

1. Exécutez un passage à travers les données d'entrainement avec l'algorithme perceptron. Vous pouvez sauter des étapes si elles n'entraînent pas de changements dans le vecteur de poids. Parcourez les points de données dans l'ordre en supposant que le vecteur de poids initial est $[-1, 0, 0]$. (2 points)

2. Donnez la probabilité que l'instance appartienne à la classe $Y = 1$ et $Y = 0$ et expliquez votre réponse. (2 points)

3. Parmi toutes les observations dans l'ensemble d'entrainement, combien sont prédites correctement et combien sont fausses ? Faites le même calcul pour l'ensemble de validation. Est-ce un bon prédicteur ? Motivez votre réponse. (2 points)

References

[1] Russell, S., Norvig, P. (2021) Artificial Intelligence, A modern approach. 4^{th} edition, global edition. Pearson Education.

[2] Homeworks and exercices available for the course CS188, ai.berkeley.edu.