

Modélisation et Simulation

Systèmes à temps discret

G. Bontempi

Département d'Informatique

Boulevard de Triomphe - CP 212

<http://www.ulb.ac.be/di>

November 8, 2023

Pourquoi étudier des modèles où le temps change de manière discrète?

- ▶ Outil pour résoudre les équations différentielles ainsi que la plupart des problèmes de calcul numérique, optimisation, apprentissage.
- ▶ Plus adaptés dans certains domaines: électronique digitale, économie, finance, étude des populations.
- ▶ Ils peuvent générer des dynamiques chaotiques puisqu'il est plus facile de générer des dynamiques complexes dans le cas temps discret que dans le cas continu.
- ▶ Ils sont plus faciles à simuler par ordinateur: aucun algorithme d'intégration numérique n'est requis.

NOTA BENE: $x(k)$ dénote la valeur de x à l'instant k avec k nombre naturel.

- ▶ Un système à temps discret synchrone à dimensions finies est décrit par des équations vectorielles aux différences

$$\begin{aligned}x(k+1) &= f(x(k), u(k), k) \\ y(k) &= \eta(k, x(k))\end{aligned}$$

où k est un nombre entier qui représente le temps.

- ▶ Un système discret est dit *invariant* quand les fonctions $f(\cdot)$ et $\eta(\cdot)$ ne dépendent pas explicitement du temps.

- ▶ Alors que dans les configurations à temps continu nous avons privilégié la représentation de la dynamique sous forme de système d'équations d'ordre 1...
- ▶ ... dans le cas à temps discret nous privilégierons la représentation des dynamiques sous forme d'**équations aux différences**.
- ▶ Ceci pour deux raisons:
 1. dans le cas discret nous ne pouvons pas tirer avantage de la représentation de trajectoires dans l'espace des phases suite à la nature discontinue des trajectoires,
 2. nous nous limiterons à considérer des systèmes où le vecteur d'état a dimension unitaire, c.-à-d. il est un scalaire.

De l'équation au système d'équations

Dans le cas continu

$$\ddot{x} - \dot{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 + 1 \end{cases}$$

si nous posons $x_1(t) = x(t)$ et $x_2(t) = \dot{x}(t)$

Dans le cas discret

$$x(k+2) - x(k+1) - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + 1 \end{cases}$$

si nous posons $x_1(k) = x(k)$ et $x_2(k) = x(k+1)$

Definition

Soit $x_k = x(k) \in X$ l'état scalaire d'un système dynamique à l'instant $k \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{N} \times X^n \rightarrow X$ une fonction connue.

L'équation récursive

$$x(k+n) = f(k, x(k+n-1), \dots, x(k))$$

est appelé équation aux différences d'ordre n en forme normale.

Une fonction (ou suite) $x(k) = \xi(k)$ qui transforme l'équation dans une identité est une *solution particulière* de l'équation. L'ensemble de toutes les solutions est appelé la *solution générale* de l'équation.

Theorem

L'équation admet une et une solution une fois fixées n valeurs initiales.

Notons qu'aucune autre restriction sur la forme de f n'est posée.

Considérons l'équation d'ordre 1

$$x(k+1) = 2x(k)$$

- ▶ une solution particulière est la fonction (ou suite) $x(k) = 2^k$.
- ▶ la solution générale a la forme $x(k) = C \cdot 2^k$ avec C constante.

Definition

Une équation aux différences est dite *linéaire* d'ordre n , avec $n > 0$, si elle a la forme

$$a_n(k)x(k+n) + a_{n-1}(k)x(k+n-1) + \cdots + a_0(k)x(k) = g(k)$$

où les fonctions $a_i(k)$, $i = 0, \dots, n$ et $g(k)$ sont données.

- ▶ Si les coefficients ne dépendent pas de k l'équation est dite *invariante* (ou *stationnaire*). Si $g(k) = 0$ pour tout k alors l'équation

$$a_n(k)x(k+n) + a_{n-1}(k)x(k+n-1) + \cdots + a_0(k)x(k) = 0$$

est dite *homogène*.

- ▶ La condition initiale d'une équation aux différences linéaire d'ordre n est le vecteur de taille $[n, 1]$

$$x^0 = [x(0), \dots, x(n-1)]$$

Solution équation linéaire non homogène

Theorem

Considérons l'équation linéaire non homogène

$$a_n(k)x(k+n) + a_{n-1}(k)x(k+n-1) + \cdots + a_0(k)x(k) = g(k)$$

et sa solution particulière $x^{(p)}(k)$. Soit $x^{(h)}(k)$ une solution de l'équation homogène associée

$$a_n(k)x(k+n) + a_{n-1}(k)x(k+n-1) + \cdots + a_0(k)x(k) = 0$$

Toutes les solutions $x(k)$ de l'équation linéaire non homogène peuvent être exprimées sous la forme

$$x(k) = x^{(p)}(k) + x^{(h)}(k)$$

Comment résoudre équation linéaire non homogène?

Trois étapes:

1. Trouver une solution générale de l'équation homogène correspondante
2. Trouver une solution particulière de l'équation originale
3. Leur somme est la solution générale de l'équation originale

Exemple

Considérons l'équation non-homogène

$$[k + 1] \cdot x(k + 1) - kx(k) = 1, \quad k \geq 1$$

dont l'équation homogène correspondante est

$$[k + 1] \cdot x(k + 1) - kx(k) = 0.$$

La solution générale de l'équation homogène est

$$x^{(h)}(k) = A/k.$$

Une solution particulière est

$$x^{(p)}(k) = 1$$

La solution générale de l'équation non-homogène a donc la forme

$$x(k) = 1 + A/k$$

Principe de superposition

Le principe de superposition suivant est valable aussi dans les systèmes linéaires à temps discret

Theorem

Si $x^{(1)}(k), x^{(2)}(k), \dots, x^{(m)}(k)$ sont des solutions de l'équation homogène

$$a_n(k)x(k+n) + a_{n-1}(k)x(k+n-1) + \dots + a_0(k)x(k) = 0$$

alors chaque combinaison linéaire

$$c_1x^{(1)}(k) + c_2x^{(2)}(k) + \dots + c_mx^{(m)}(k)$$

où c_1, \dots, c_m sont des constantes arbitraires, est aussi une solution.

Exemple

Considérons l'équation linéaire homogène d'ordre 1

$$x(k+1) - 2x(k) = 0$$

► $x^{(1)}(k) = a \cdot 2^k$

► $x^{(2)}(k) = b \cdot 2^k$

sont solutions de l'équation ainsi que

$$c_1 x^{(1)}(k) + c_2 x^{(2)}(k)$$

Definition (Polynôme caractéristique)

Soit

$$x(k+n) + a_{n-1}x(k+n-1) + \cdots + a_0x(k) = 0$$

une équation linéaire homogène d'ordre n à *coefficients constants*.

Le polynôme

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

est appelé le polynôme caractéristique associé à l'équation homogène à coefficients constants.

Definition (Equation caractéristique)

L'équation

$$P(\lambda) = 0$$

est appelée l'*équation caractéristique* associée à l'équation homogène à coefficients constants.

Cette équation a n solutions complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Theorem

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une solution de multiplicité 1 de l'équation caractéristique, alors

$$x(k) = \lambda^k$$

est une solution de

$$x(k+n) + a_{n-1}x(k+n-1) + \cdots + a_0x(k) = 0$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une solution de multiplicité m de l'équation caractéristique, alors

$$x^{(0)}(k) = \lambda^k, \quad x^{(1)}(k) = k\lambda^k, \dots, x^{(m-1)}(k) = k^{m-1}\lambda^k$$

sont m solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène.

Toutes les solutions de l'équation homogène peuvent être exprimées comme des combinaisons linéaires des solutions mentionnées ci-dessus.

Exemple

Considérons l'équation aux différences:

$$x(k+2) - 2x(k+1) + x(k) = 0$$

qui a une racine caractéristique $\lambda_{1,2} = 1$ de multiplicité $m = 2$.
Selon le théorème précédent,

$$x^{(0)}(k) = 1, \quad x^{(1)}(k) = k$$

sont 2 solutions linéairement indépendantes, en accord avec les 2 solutions fondamentales trouvées auparavant.

Exemple

Considérons l'équation aux différences d'ordre $n = 3$

$$x(k+3) - 4x(k+2) + 5x(k+1) - 2x(k) = 0$$

où $x(0) = 0$, $x(1) = 1$ et $x(2) = 0$. L'équation caractéristique associée est $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$ qui a comme solutions $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_{2,3} = 1$. La solution générale est donc $x(k) = c_1 2^k + c_2 + c_3 k$ où le système d'équations suivantes doit être satisfait

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ 4c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases}$$

Puisque la solution est $c_1 = -2$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$ la solution est

$$x(k) = -2^{k+1} + 3k + 2$$

Vérification par simulation

Nous avons calculé que la solution analytique de

$$x(k+3) = 4x(k+2) - 5x(k+1) + 2x(k), \quad x(0) = 0, x(1) = 1, x(2) = 0$$

est

$$x(k) = -2^{k+1} + 3k + 2$$

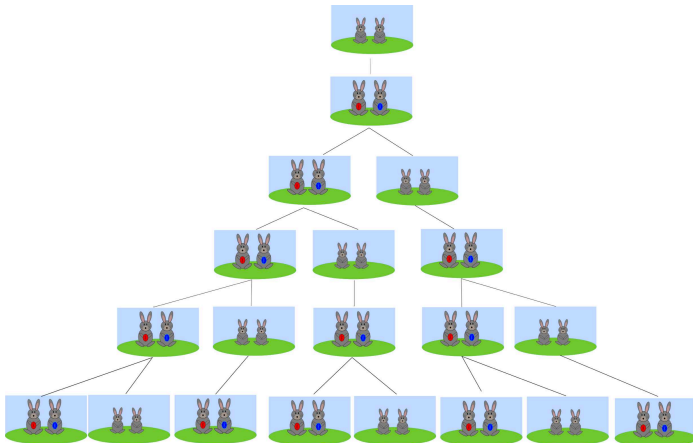
k	analytique	simulation
3	$-2^4 + 3 * 3 + 2 = -5$	$4 * 0 - 5 * 1 + 2 * 0 = -5$
4	$-2^5 + 3 * 4 + 2 = -18$	$4 * (-5) - 5 * 0 + 2 * 1 = -18$
5

Les nombres de Fibonacci (Wikipedia)

Le problème de Fibonacci est à l'origine de la suite dont le k -ième terme correspond au nombre $x(k)$ de paires de lapins au k -ième mois. Dans cette population (idéale), on suppose que :

- ▶ au (début du) premier mois, il y a juste une paire de lapereaux
- ▶ les lapereaux ne procréent qu'à partir du (début du) troisième mois
- ▶ chaque (début de) mois, toute paire susceptible de procréer engendre une nouvelle paire de lapereaux
- ▶ les lapins ne meurent jamais

Les nombres de Fibonacci (Wikipedia)



Les nombres de Fibonacci

Considérons l'équation qui représente les nombres de Fibonacci

$$x(k+1) = x(k) + x(k-1)$$

où $x(0) = 0$ et $x(1) = 1$. L'équation caractéristique $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ a les solutions

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

La solution générale est donc $x(k) = c_1(\lambda_1)^k + c_2(\lambda_2)^k$ et les conditions suivantes

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

nous amènent à la solution (connue comme la formule de Binet)

$$x(k) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k$$

qui corresponde à l'évolution 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,

Le nombre irrationnel

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

est aussi connu comme le **nombre d'or** ou **divine proportion** ou **proportion dorée**.

Livre: M. Livio "Le nombre d'or: les clés du mystère", Odile Jacob.

Le nombre irrationnel

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887...$$

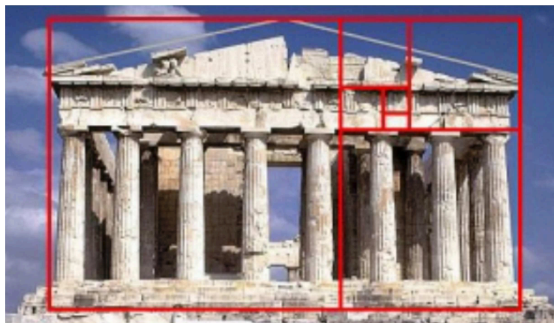
est

- ▶ l'unique solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$
- ▶ le seul rapport a/b qui satisfait la relation $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$, où $a = 1 + \sqrt{5}$ et $b = 2$.

Cette proportion a été souvent associée à des critères esthétiques de beauté qu'on retrouve dans le corps humain (le rapport de la hauteur totale du corps humain à la hauteur du nombril est égal au nombre d'or), dans plusieurs monuments ou œuvres d'art (Parthénon ou la pyramide de Khéops) et actrices (Marylin Monroe ;-)

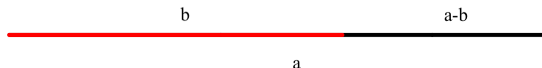
Mais aussi $\Phi = -\sin(666^\circ) - \cos((6 * 6 * 6)^\circ)$

Rectangle d'or



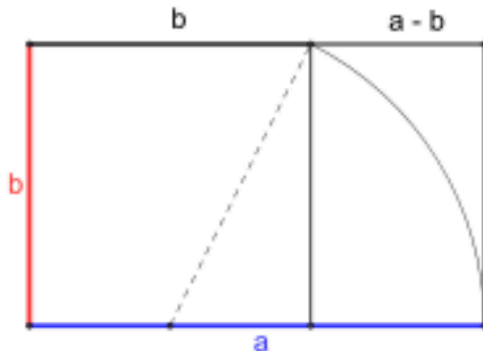
La définition d'Euclide (300 AC)

Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison quand, comme elle est toute entière relativement au plus grand segment, ainsi est le plus grande relativement au plus petit.



Comment construire un rectangle d'or

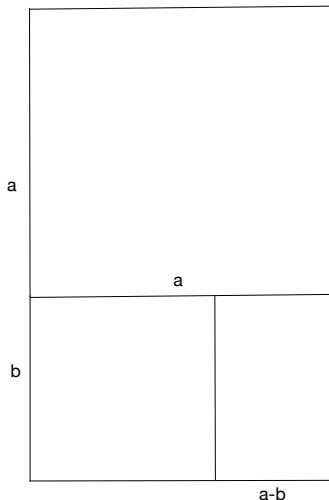
Partons d'un carré de coté b



$$a = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2} = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{5b^2}{4}} = \frac{b}{2}(\sqrt{5} + 1) \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

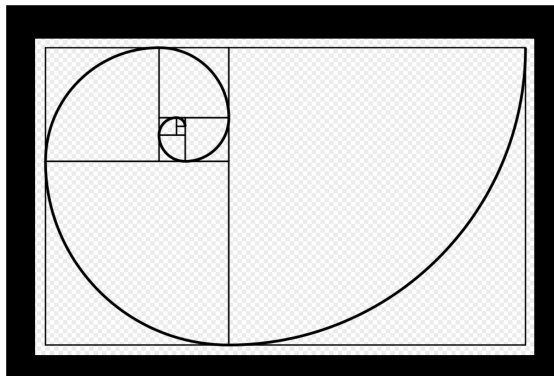
3 rectangles d'or

En inscrivant un carré dans un rectangle d'or, on obtient un rectangle qui est encore d'or.



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

Spirale d'or (ext. Wikipedia)



En inscrivant un carré de côté b dans un rectangle d'or de côtés $a \times b$, il reste un rectangle qui encore d'or. Il est possible de réitérer le processus et inscrire un carré de côté $a - b$ dans le rectangle d'or de côtés $b \times (a - b)$. Cette méthode peut être prolongée indéfiniment et utilisée pour tracer une spirale.

Équation caractéristique et solutions complexes

Si

$$\lambda = a \pm ib$$

sont deux solutions complexes conjuguées de l'équation caractéristique alors

$$w(k) = \rho^k \cos(\theta k), \quad z(k) = \rho^k \sin(\theta k)$$

sont deux solutions linéairement indépendantes où

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Si $\lambda = a \pm ib$ est une solution complexe de multiplicité m alors

$$w^{(0)}(k) = \rho^k \cos(\theta k), w^{(1)}(k) = k \rho^k \cos(\theta k), \dots w^{(m-1)}(k) = k^{m-1} \rho^k \cos(\theta k) \\ z^{(0)}(k) = \rho^k \sin(\theta k), z^{(1)}(k) = k \rho^k \sin(\theta k), \dots z^{(m-1)}(k) = k^{m-1} \rho^k \sin(\theta k)$$

sont $2m$ solutions linéairement indépendantes.

Exemple

- Considérons l'équation aux différences

$$x(k+2) + x(k) = 0$$

où $x(0) = 0$ et $x(1) = 1$.

- L'équation caractéristique $\lambda^2 + 1 = 0$ a deux solutions complexes conjuguées $\lambda_{1,2} = \pm i$. Il s'ensuit que $\rho = \sqrt{0+1} = 1$ et $\theta = \pi/2$.
- La solution générale est

$$x(k) = c_1 \sin(k\pi/2) + c_2 \cos(k\pi/2)$$

- En imposant les conditions initiales nous avons

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

- La solution est donc

$$x(k) = \sin(k\pi/2)$$

Vérification par simulation

Nous avons calculé que la solution analytique de

$$x(k+2) = -x(k), \quad x(0) = 0, x(1) = 1$$

est

$$x(k) = \sin(k\pi/2)$$

k	simulation	analytique
2	0	$\sin(\pi) = 0$
3	-1	$\sin(3\pi/2) = -1$
4

Considérons une équation aux différences à n pas et à coefficients constants

$$x(k+n) + a_{n-1}x(k+n-1) + a_{n-2}x(k+n-2) + \cdots + a_0x(k) = b$$

où $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b$ sont n coefficients connus.

Definition

Un équilibre est un nombre \bar{x} auquel il correspond une solution constante $x(k) = \bar{x}$.

Il est facile de montrer que:

- ▶ si $1 + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_0 \neq 0$, alors il existe un seul équilibre

$$\bar{x} = \frac{b}{1 + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_0}$$

- ▶ autrement, si $1 + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_0 = 0$
 1. si $b = 0$ chaque \bar{x} est un point d'équilibre
 2. si $b \neq 0$ il n'y a aucun point d'équilibre

Exemples avec $n = 1$:

- ▶ $x(k+1) = x(k)/2 + 1$, $a_0 = -1/2$, $b = 1$, $1 + a_0 \neq 0$
- ▶ $x(k+1) = x(k)$, $a_0 = -1$, $b = 0$, $1 + a_0 = 0$
- ▶ $x(k+1) = x(k) + 1$, $a_0 = -1$, $b = 1$, $1 + a_0 = 0$

Definition

Un équilibre \bar{x} est un équilibre stable si $\forall \epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ et un $k_0 > 0$ tels que

$$\sum_{j=0}^{n-1} |x(j) - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |x(k) - \bar{x}| < \epsilon \quad \forall k > k_0$$

c.-à-d. des états initiaux proches de l'équilibre donnent origine à des trajectoires proches de l'équilibre.

Definition

Un équilibre \bar{x} est un équilibre *attractif* (ou *asymptotiquement stable*) s' il est stable et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \bar{x}$$

Theorem

Un équilibre de l'équation linéaire

- 1. est stable ssi chaque solution λ_i , $i = 1, \dots, n$ de l'équation caractéristique satisfait $|\lambda_i| \leq 1$ et les solutions pour lesquelles $|\lambda| = 1$ ont une multiplicité égale à 1.*
- 2. est asymptotiquement stable ssi chaque solution λ_i , $i = 1, \dots, n$ de l'équation caractéristique satisfait $|\lambda_i| < 1$.
Chaque équilibre asymptotiquement stable est aussi stable.*

Calculer l'équilibre et analyser la stabilité pour les systèmes suivants:

1.

$$6x(k+2) - 5x(k+1) + x(k) = 2$$

2.

$$x(k+2) - 2x(k+1) + 2x(k) = 0$$

3.

$$x(k+3) + x(k) = 0$$

Calculer la solution de l'équation

$$x(k+2) - 4x(k+1) + 3x(k) = 2^k$$

et de l'équation

$$x(k+2) - 4x(k+1) + 3x(k) = b^k, \quad b \neq 1, \quad b \neq 3$$

Équations linéaires homogènes à un pas

Definition

Soit $a \in \mathbb{R}$ une constante. L'équation

$$x(k+1) = ax(k) \quad (1)$$

est appelée une équation aux différences, d'ordre 1, linéaire, homogène et à coefficients constants.

- ▶ L'équation caractéristique est $\lambda - a = 0$ qui a la seule racine $\lambda = a$.
- ▶ Les solutions de l'équation homogène ont la forme exponentielle

$$x(k) = Ca^k = C \exp^{\ln(a)k} = C \exp^{-\ln(1/a)k}$$

- ▶ Pour $x(0) = x^0$ l'équation admet la solution

$$x(k) = x^0 a^k, \quad x^0 \in \mathbb{R}$$

- ▶ Thomas Robert Malthus (1766-1834) a proposé le modèle suivant pour décrire l'évolution d'une population x (biologique ou d'autre nature)

$$x(k+1) = x(k) + nx(k) - mx(k) = (1 + n - m)x(k) = rx(k)$$

où la constante n représente le taux de naissance et la constante m le taux de mortalité des individus.

- ▶ Ceci est un exemple d'équation aux différences, d'ordre 1 linéaire, homogène et à coefficients constants qui modélise une croissance exponentielle de la population

Definition

Soient $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$ deux constantes. L'équation

$$x(k+1) = ax(k) + b \quad (2)$$

est appelée équation affine aux différences linéaire, d'ordre 1 et à coefficients constants.

Equation affine d'ordre 1: $a = 1$

Considérons l'équation non homogène à coefficients constants d'ordre $n = 1$

$$x(k+1) = x(k) + b$$

où $a = 1$ et b est connu.

- ▶ La solution particulière a la forme $x^{(p)} = ck$ où c doit satisfaire

$$c(k+1) = ck + b \Rightarrow c = b$$

- ▶ Puisque $\lambda = 1$, la solution générale aurait donc la forme

$$x(k) = C1^k + bk = C + bk$$

- ▶ Si $x(0) = x^0$ alors $C = x^0$ et la solution générale devient

$$x(k) = x^0 + kb$$

Equation affine d'ordre 1: $a \neq 1$

Equation non homogène à coefficients constants d'ordre $n = 1$

$$x(k+1) = ax(k) + b$$

où $a \neq 1$ et $b \neq 0$ sont connus.

- ▶ Une solution particulière de l'équation est $x^{(p)} = c$ où c doit satisfaire

$$c = ac + b \Rightarrow c = \frac{b}{1-a}$$

- ▶ La solution générale a donc la forme $x(k) = Ca^k + \frac{b}{1-a}$
- ▶ Si $x(0) = x^0$ alors

$$C + \frac{b}{1-a} = x^0 \Rightarrow C = x^0 - \frac{b}{1-a}$$

donc

$$x(k) = \left(x^0 - \underbrace{\frac{b}{1-a}}_{\alpha} \right) a^k + \underbrace{\frac{b}{1-a}}_{\alpha} = (x^0 - \alpha) a^k + \alpha$$

Theorem

Pour chaque valeur initiale, x^0 l'équation $x(k+1) = ax(k) + b$ a une solution unique. La forme de la solution dépend de a :

1. Si $a = 1$ alors

$$x(k) = x(0) + kb$$

- 1.1 si $b \neq 0$ il n'existe aucun équilibre et toutes les trajectoires sont divergentes.
- 1.2 si $b = 0$ toutes les valeurs de x sont des valeurs d'équilibre et toutes les trajectoires sont constantes.

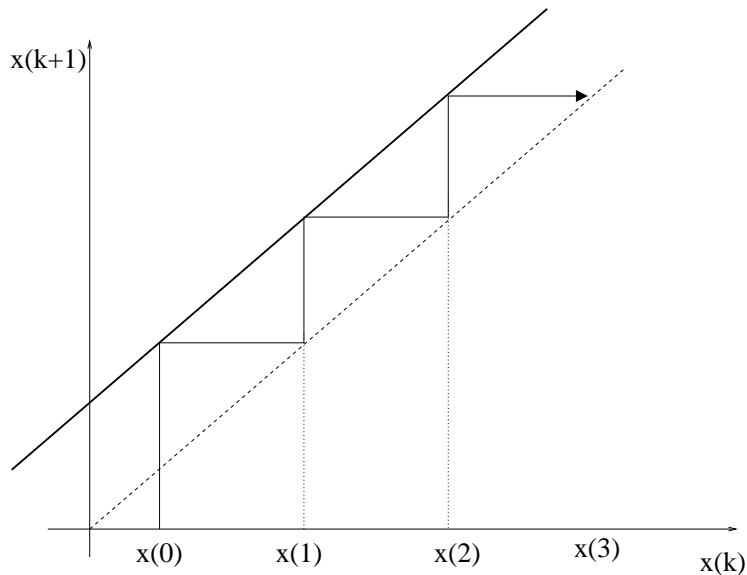
2. Si $a \neq 1$ alors

$$x(k) = (x^0 - \alpha)a^k + \alpha$$

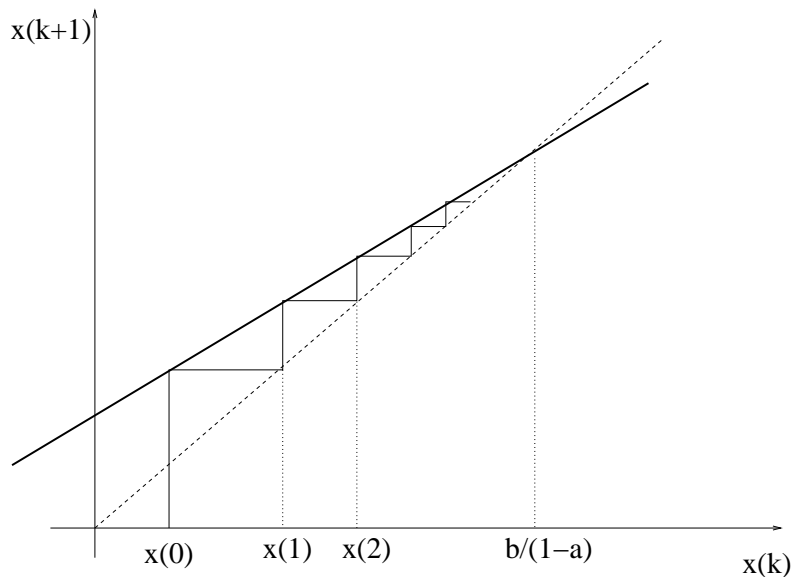
où $\bar{x} = \alpha = b/(1 - a)$ est le seul équilibre. Notons que

- 2.1 si $|a| < 1$ toutes les trajectoires convergent vers α .
- 2.2 si $|a| > 1$ toutes les trajectoires sont divergentes (à part celle constante si $x^0 = \alpha$)
- 2.3 si $a = -1$ alors l'équilibre est $\alpha = b/2$ et les solutions sont oscillantes autour de cet équilibre (à part celle constante $x^0 = \alpha = b/2$).

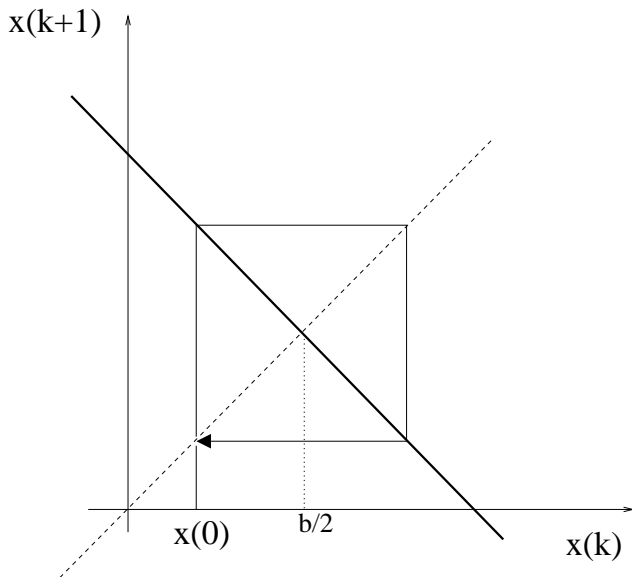
Ordre 1, $a = 1, b > 0$



Ordre 1, $a < 1$, $b > 0$



Ordre 1, $a = -1$, $b > 0$



Calculer la formule analytique de la somme $S(k)$ des premiers k nombres entiers pairs en calculant la solution d'une équation linéaire aux différences. On considère que le premier nombre entier pair est 0.

$$S(k) = S(k-1) + 2(k-1), \quad S(1) = 0 \rightarrow S(k) = k^2 - k$$

- Solution générale de l'homogène $S(k+1) - S(k) = 0$ est $S(k) = C$.
- Solution particulière de $S(k+1) - S(k) = 2k$ de la forme $Ak^2 + Bk$. On obtient $A = 1$ et $B = -1$
- La solution générale est donc $S(k) = C + k^2 - k$
- En imposant $S(1) = 0$ on obtient $C = 0$ et donc $S(k) = k^2 - k = k(k-1)$

k	k th nombre pair	$S(k) = S(k-1) + 2(k-1)$	$k(k-1)$
1	0	$S(1) = 0$	$1 - 1 = 0$
2	2	$S(2) = S(1) + 2 * 1 = 2$	$4 - 2 = 2$
3	4	$S(3) = S(2) + 2 * 2 = 6$	$9 - 3 = 6$
4	6	$S(3) = S(2) + 2 * 3 = 12$	$16 - 4 = 12$

Remboursement d'un prêt hypothécaire

- ▶ Supposons d'emprunter à une banque le montant $s(0)$ et de le rembourser par des primes constantes de valeur p .
- ▶ Soit r le taux d'intérêt appliqué à la dette résiduelle $s(k)$.
- ▶ L'évolution de la somme à rembourser suit la loi

$$s(k+1) = \max(0, s(k) - p + rs(k)) = \max(0, (1+r)s(k) - p)$$

Systèmes discrets non-linéaires d'ordre 1

Considérons un système discret stationnaire d'ordre 1 dont la dynamique est décrite par

$$x(k+1) = f(x(k))$$

où $f \in C^\infty$ et $x(k) \in I \subset \mathbb{R}$. Dénotons ce système par le couple $\{f, I\}$.

Nous dénotons l'orbite de $x(0)$ par

$$x(1) = f(x(0))$$

$$x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0))$$

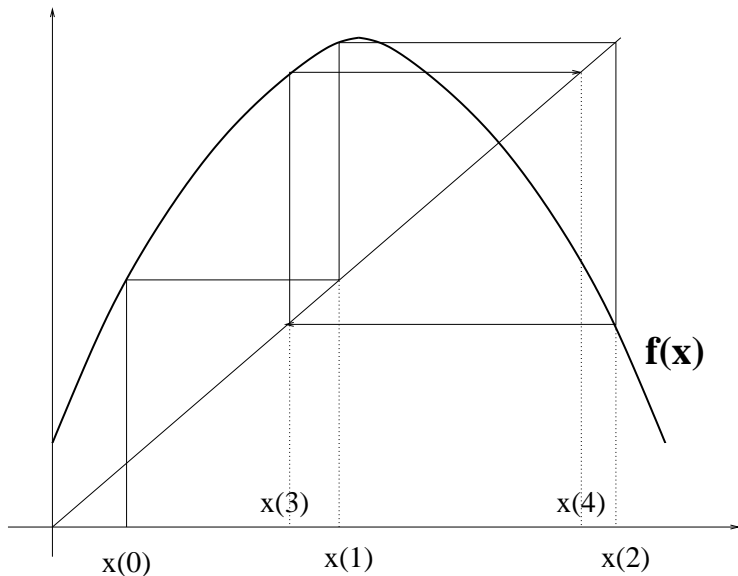
...

$$x(k) = f(x(k-1)) = f(f(\dots(f(x(0))))) = f^k(x(0))$$

N.B.: $f^k(\cdot)$ dénote la valeur de x après la k ème itération. Donc

$$x(k) = f^k(x(0)) \neq (f(x(0)))^k \neq f^{(k)}(x(0))$$

Représentation graphique



Etats d'équilibre

Les points fixes (ou états d'équilibre) jouent un rôle important dans la description de la dynamique

Definition

L'état \bar{x} est un état d'équilibre (ou point fixe) du système $\{f, I\}$ si

$$\bar{x} = f(\bar{x})$$

D'un point de vue géométrique les points d'équilibre sont les intersections sur le plan x, y entre la fonction $y = f(x)$ et la droite $y = x$.

Theorem

Soit $I = [a, b]$ un intervalle clos et borné et $f : I \rightarrow I$ une fonction continue telle que les ensembles de départ et d'arrivée coïncident avec I . Alors il existe toujours un point d'équilibre \bar{x} tel que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Exemple

Le système à temps discret

$$x(k+1) = x(k)^3$$

a les points fixes

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 1, \quad \bar{x}_3 = -1$$

Stabilité de l'équilibre: ordre 1

Definition

L'équilibre est *stable* si pour chaque $\epsilon > 0$ il existe une constante $\delta > 0$ et un $k_0 > 0$ telle que

$$|x(0) - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |x(k) - \bar{x}| < \epsilon$$

Definition

L'équilibre est *globalement asymptotiquement stable* (ou *globalement attractif*) si pour chaque $x(0) \in I$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \bar{x}.$$

Definition

L'équilibre est *localement asymptotiquement stable* (ou *localement attractif*) s'il existe $\eta > 0$ telle que pour chaque $x(0) \in I \cap \{\bar{x} - \eta, \bar{x} + \eta\}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \bar{x}.$$

Definition

Soit donné un système discret $\{f, I\}$. Un cycle (ou orbite périodique) d'ordre s est un ensemble de s valeurs différentes $\{\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{s-1}\}$ telles que

$$\bar{x}_1 = f(\bar{x}_0), \quad \bar{x}_2 = f(\bar{x}_1), \dots, \bar{x}_0 = f(\bar{x}_{s-1})$$

La quantité s est la *période* de l'orbite.

Par exemple le système non linéaire $\{1/x, (0, +\infty)\}$ a un seul équilibre mais un nombre infini de trajectoires de période 2.

Theorem

Considérons le système discret $\{f, I\}$. La paire $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1\}$ est un cycle d'ordre 2 ssi \bar{x}_0 et \bar{x}_1 sont des points d'équilibre de $\{f^2, I\}$ mais pas de $\{f, I\}$.

Exemple

Le système à temps discret

$$x(k+1) = (2 - x(k))(3x(k) + 1)/2$$

a un cycle d'ordre 3 formé par les valeurs

$$\bar{x}_0 = 0, \bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = 2$$

Exemple

Le système à temps discret

$$x(k+1) = x(k)^2 - 1$$

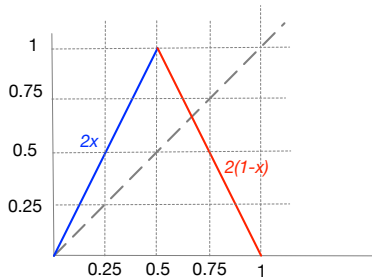
a un cycle $\{\bar{x}_0 = 0, \bar{x}_1 = -1\}$ d'ordre 2.

Ceci peut être facilement démontrable puisque $\bar{x}_0 = 0$ et $\bar{x}_1 = -1$ sont les points d'équilibre de

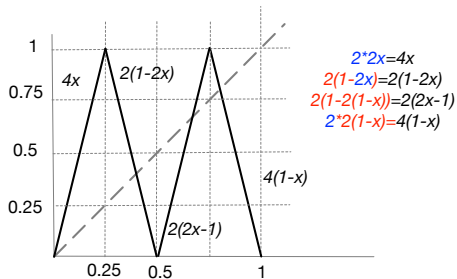
$$f^2 = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$$

mais pas de f .

Fonction tente



$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



$$f^2(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x < 1/4 \\ 2 - 4x, & 1/4 \leq x < 1/2 \\ 4x - 2, & 1/2 \leq x < 3/4 \\ 4 - 4x, & 3/4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Theorem

Si \bar{x} un équilibre du système $\{f, I\}$, où $f \in C^1$ alors

- ▶ $|f'(\bar{x})| < 1 \Rightarrow \bar{x}$ est localement asymptotiquement stable
- ▶ $|f'(\bar{x})| > 1 \Rightarrow \bar{x}$ est instable
- ▶ $|f'(\bar{x})| = 1$ ne renvoie aucune information sur la stabilité de \bar{x}

- ▶ Soit $\bar{x} = f(\bar{x})$ le point fixe de $x(k+1) = f(x(k))$.
- ▶ Afin d'analyser sa stabilité, considérons la trajectoire proche $x(k) = \bar{x} + \delta(k)$ et demandons nous comment cette trajectoire va se comporter autour de \bar{x}

$$\bar{x} + \delta(k+1) = x(k+1) = f(\bar{x} + \delta(k)) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\delta(k) + O(\delta(k)^2)$$

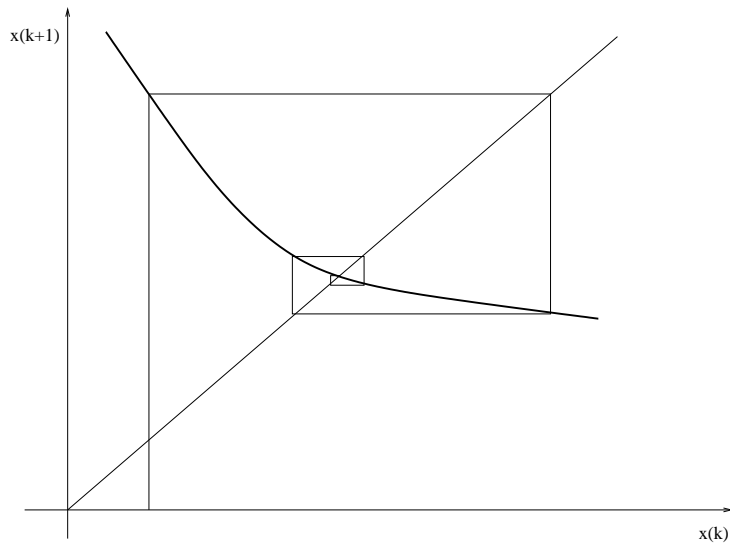
- ▶ Ceci nous amène à la dynamique linéaire

$$\delta(k+1) = f'(\bar{x})\delta(k) + O(\delta(k)^2) \Rightarrow \delta(k+1) \approx a\delta(k)$$

qui décrit comment évolue la perturbation.

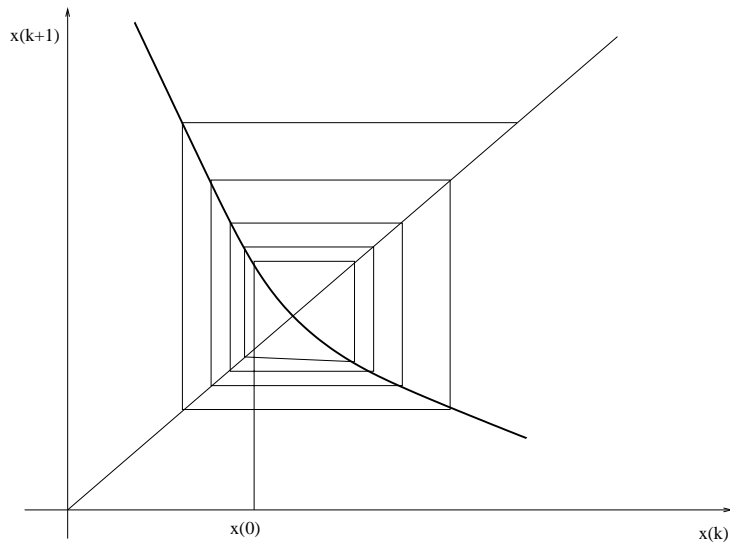
- ▶ Si $|f'(\bar{x})| < 1$, la dynamique de la perturbation est asymptotiquement stable, c.-à-d. $\delta(k) \rightarrow 0$ et $x(k) \rightarrow \bar{x}$ pour $k \rightarrow \infty$.

Localement asymptotiquement stable



$$|f'(\bar{x})| < 1.$$

Equilibre instable



$$|f'(\bar{x})| > 1.$$

Conditions de stabilité pour $f'(\bar{x}) = 1$

Theorem

Si \bar{x} un équilibre du système $\{f, I\}$, où $f \in C^2$ et $f'(\bar{x}) = 1$. Alors

- ▶ $f''(\bar{x}) > 0 \Rightarrow \bar{x}$ est inférieurement asymptotiquement stable et supérieurement instable (ou répulsif)
- ▶ $f''(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \bar{x}$ est supérieurement asymptotiquement stable et inférieurement instable (ou répulsif)

Theorem

Si \bar{x} un équilibre du système $\{f, I\}$, où $f \in C^3$ et $f'(\bar{x}) = 1$ et $f''(\bar{x}) = 0$. Alors

- ▶ $f'''(\bar{x}) > 0 \Rightarrow \bar{x}$ est instable.
- ▶ $f'''(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \bar{x}$ est localement asymptotiquement stable

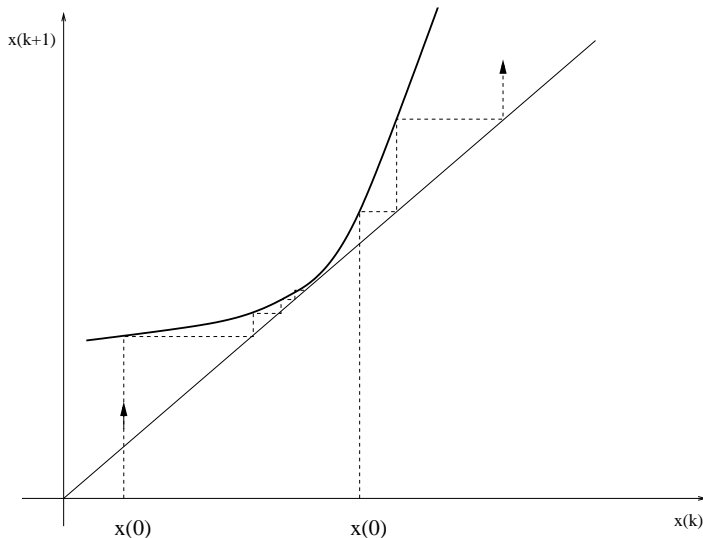
Conditions de stabilité pour $f'(\bar{x}) = -1$

Theorem

Si \bar{x} un équilibre du système $\{f, I\}$, où $f \in C^3$ et $f(\bar{x}) = \bar{x}$ et $f'(\bar{x}) = -1$. Alors

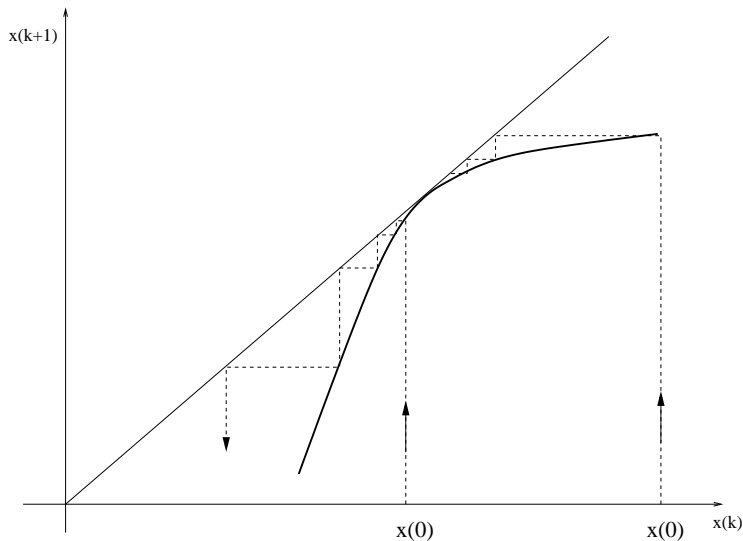
- ▶ $2f'''(\bar{x}) + 3(f''(\bar{x}))^2 > 0 \Rightarrow \bar{x}$ est localement asymptotiquement stable.
- ▶ $2f'''(\bar{x}) + 3(f''(\bar{x}))^2 < 0 \Rightarrow \bar{x}$ est instable.

Inférieurement asympt. stable



$$f'(\bar{x}) = 1 \text{ et } f''(\bar{x}) > 0.$$

Supérieurement asympt. stable



$$f'(\bar{x}) = 1 \text{ et } f''(\bar{x}) < 0.$$

Considérons le système discret $\{f, I\}$ et l'orbite périodique d'ordre s :

$$\{\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{s-1}\}$$

L'orbite périodique est attractive si

$$|f'(\bar{x}_0) \dots f'(\bar{x}_{s-1})| < 1$$

L'orbite périodique est répulsive si

$$|f'(\bar{x}_0) \dots f'(\bar{x}_{s-1})| > 1$$

Definition

Soit $\{f, I\}$ un système discret à un pas. Un ensemble clos $A \subset I$, tel que $f(A) = A$, est appelé *attracteur* si il est le plus petit ensemble pour lequel il existe un $\eta > 0$ tel que,
 $\forall x(0) \in I : \text{dist}(x(0), A) < \eta$ il se produit que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(x(k), A) = 0$$

L'ensemble

$$\{x(0) \in I : \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) \in A\}$$

est appelé le *bassin d'attraction*.

- ▶ Considérons un système discret d'ordre 1 où la fonction f_a est paramétrique avec un paramètre a .
- ▶ Souvent les phénomènes physiques sont caractérisés par une dépendance continue du comportement par rapport aux paramètres qui les caractérisent.
- ▶ Dans certains cas, toutefois, nous pouvons assister à de gros changements suite à de petites variations.
- ▶ L'étude des bifurcations vise à déterminer ces valeurs des paramètres qui entraînent de forts changements qualitatifs.

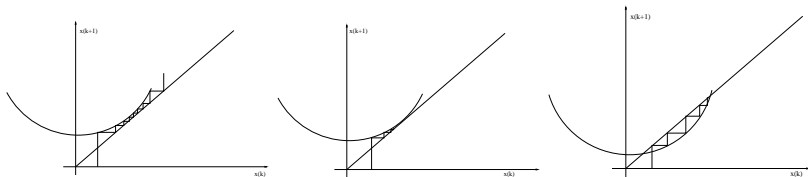
Definition

Soit f_a une fonction de transition paramétrique dans $a \in A$. La valeur $\bar{a} \in A$ est appelée *valeur de bifurcation* pour $\{f_a, I\}$ si pour chaque $\epsilon > 0$ la somme du nombre de points d'équilibre et du nombre de points qui appartiennent à des orbites périodiques n'est pas constante dans $(\bar{a} - \epsilon, \bar{a} + \epsilon)$.

Exemple

Considérons $f_a = x^2 + a$. Le système n'a pas des points fixes pour $a > 1/4$, il a un point fixe $\bar{x} = 1/2$ pour $a = 1/4$ et il a deux points fixes pour $a < 1/4$

$$\bar{x}_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1 - 4a}{2}.$$



Fonction logistique discrète

- ▶ Proposée par le biologiste May en 1976 pour représenter de manière très simplifiée l'évolution annuelle d'une population d'insectes

$$x(k+1) = f_a(x(k)) = ax(k)(1 - x(k)), a \in [0, 4], x \in [0, 1]$$

ou $x(k) \in [0, 1]$ représente le pourcentage de population par rapport à une certaine valeur maximale de référence.

- ▶ Le terme ax représente un feedback positif alors que le terme $(1 - x)$ un feedback négatif.
- ▶ a représente le taux de reproduction. $x = 0$ correspond à l'extinction de la population et $x = 1$ à la surpopulation avec conséquente extinction.
- ▶ Malgré sa simplicité, le système peut afficher des comportements qualitativement très complexes au fur et à mesure que a augmente

- ▶ Le graphique de f_a est une parabole ayant son origine dans le point $(1/2, a/4)$, concave et symétrique par rapport à la droite verticale $x = 1/2$.
- ▶ Deux points fixes sont obtenus en résolvant l'équation

$$ax(1 - x) = x$$

$\bar{x}^{(1)} = 0$ et $\bar{x}^{(2)} = (a - 1)/a$ pour $1 < a \leq 4$.

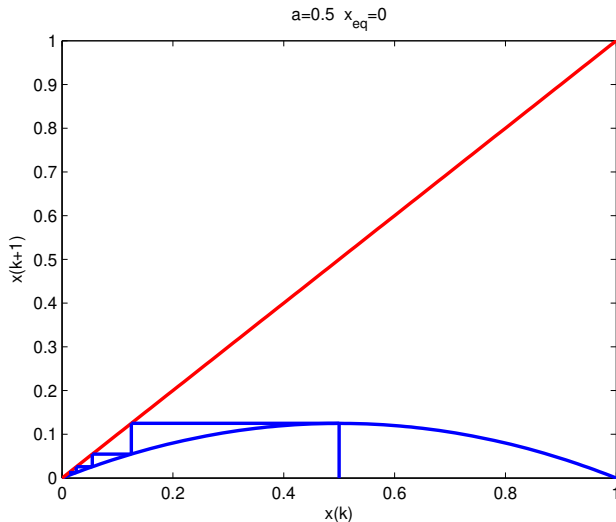
- ▶ Les trajectoires ayant comme conditions initiales $x(0) = 1$ et $x(0) = 1/a$ si $a > 1$ passent à l'instant 1 sur un point d'équilibre et sont donc constantes pour $k \geq 1$.

- ▶ Au fur et à mesure que le paramètre a augmente, le comportement qualitatif du système change fortement.
- ▶ Afin de l'analyser il est important tenir en considération que

$$f(x) = ax(1-x), \quad f'(x) = a-2ax, \quad f''(x) = -2a, \quad f'''(x) = 0$$

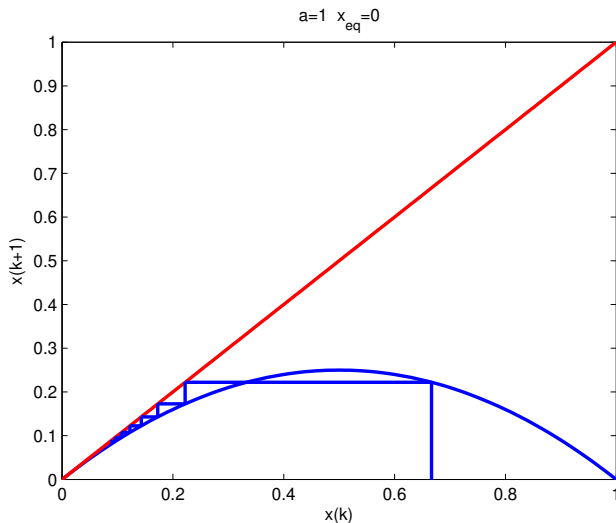
Fonction logistique discrète: $0 \leq a < 1$

Si $a \in [0, 1)$ le point $\bar{x}^{(1)} = 0$ est le seul équilibre. Puisque $|f'(0)| = a < 1$, il est asymptotiquement stable.



$$a = 1$$

Si $a = 1$ puisque $f'(0) = a = 1$ et $f''(0) = -2a < 0$, l'équilibre $\bar{x}^{(1)} = 0$ est supérieurement asymptotiquement stable.



$$a > 1$$

- ▶ Si $1 < a \leq 4$ nous avons deux points fixes: $\bar{x}^{(1)} = 0$ et $\bar{x}^{(2)} = (a - 1)/a$.
- ▶ Puisque $|f'(0)| = a > 1$ le point $\bar{x}^{(1)} = 0$ est instable.
- ▶ Puisque

$$|f'(\bar{x}^{(2)})| = |2 - a|$$

l'équilibre $\bar{x}^{(2)}$ est asymptotiquement stable pour $1 < a < 3$.

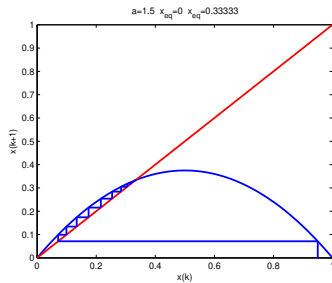
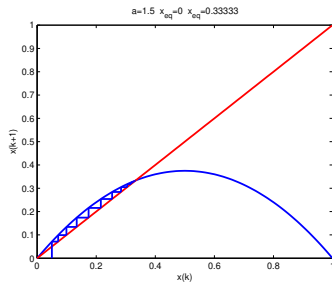
- ▶ Pour $a = 3$, nous avons $f'(\bar{x}^{(2)}) = -1$, $f''(\bar{x}^{(2)}) = -2a = -6$, $f'''(\bar{x}^{(2)}) = 0$. Puisque

$$2f'''(\bar{x}^{(2)}) + 3\left(f''(\bar{x}^{(2)})\right)^2 > 0$$

alors $\bar{x}^{(2)}$ est localement asymptotiquement stable.

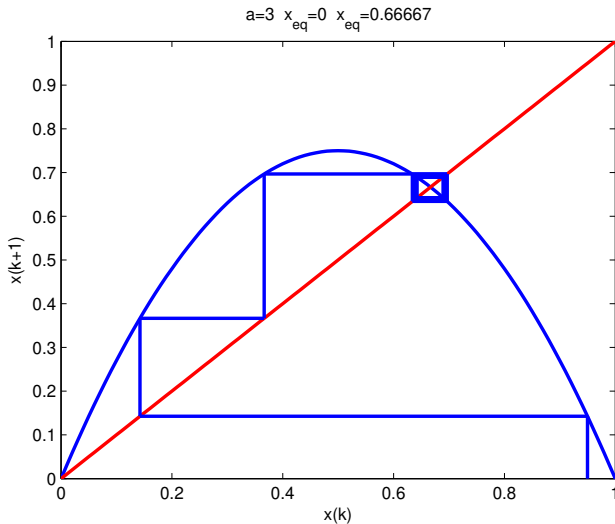
- ▶ L'équilibre $\bar{x}^{(2)}$ devient instable pour $3 < a \leq 4$.

$$a = 1.5$$

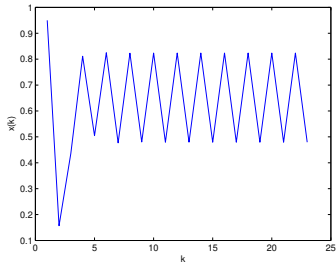
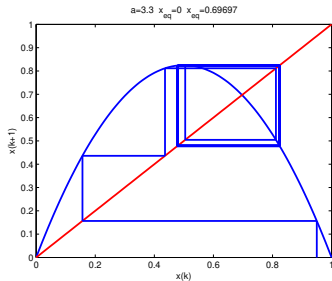


$$a = 3$$

L'équilibre $\bar{x}^{(2)}$ est localement asymptotiquement stable pour $a = 3$.



$$a = 3.3 < 1 + \sqrt{6} = 3.4495$$



Un cycle stable et attracteur d'ordre 2 apparait.

$$3 < a \leq 4$$

- ▶ Si $3 < a \leq 1 + \sqrt{6} = 3.4495$, un cycle de période 2 apparaît. Ceci est vérifié par le fait que

$$f^2 = a^2 x(1-x)(1-ax(1-x)) = x \Leftrightarrow$$

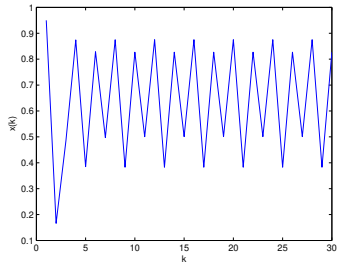
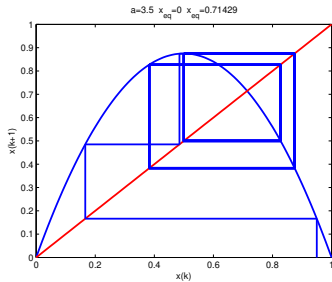
$$x \left(x - \frac{a-1}{a} \right) (-a^3 x^2 + (a^2 + a^3)x - (a^2 + a)) = 0$$

a quatre solutions distinctes: $\bar{x}^{(1)}$, $\bar{x}^{(2)}$ et deux solutions additionnelles

$$\beta = \frac{a+1 + \sqrt{(a-3)(a+1)}}{2a}, \quad \gamma = \frac{a+1 - \sqrt{(a-3)(a+1)}}{2a}$$

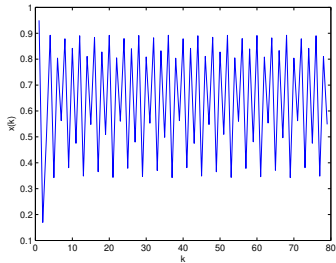
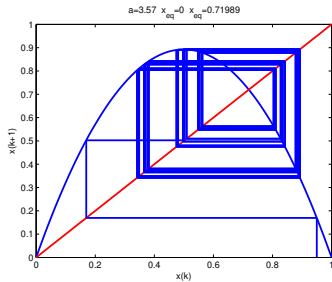
- ▶ Si $3 < a \leq 1 + \sqrt{6}$ le cycle est stable et attractif
- ▶ Si $a > 1 + \sqrt{6} = 3.44949$ le comportement devient plus complexe. Le cycle n'est plus stable et un cycle d'ordre 4 apparaît.
- ▶ Après on assiste à un doublement de l'ordre de la période jusqu'à $a = 3.569945$ quand le système devient chaotique.

$$a = 3.5 > 1 + \sqrt{6}$$



Un cycle stable et attracteur d'ordre 4 apparaît.

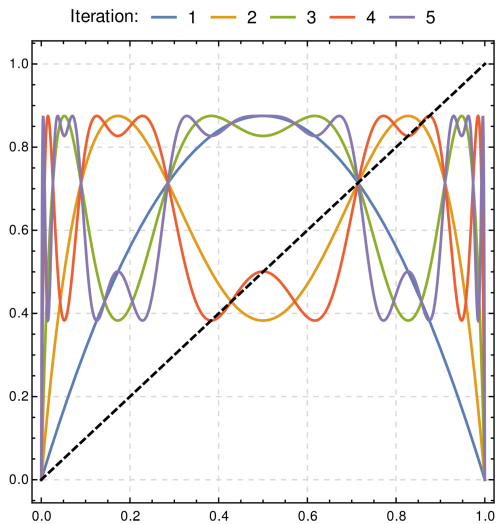
$$a = 3.57 > 3.569945$$



Un mélange de comportements chaotique et périodique apparaît.

*The fact that the simple and deterministic equation can possess dynamical trajectories which **look like some sort of random noise** has disturbing practical implications. It means, for example, that apparently erratic fluctuations in the census data for an animal population need not necessarily betoken either the vagaries of an unpredictable environment or sampling errors: they **may simply derive from a rigidly deterministic population growth relationship** Alternatively, it may be observed that in the chaotic regime arbitrarily close initial conditions can lead to trajectories which, after a sufficiently long time, diverge widely. This means that, even if we have a simple model in which all the parameters are determined exactly, **long-term prediction is nevertheless impossible.***

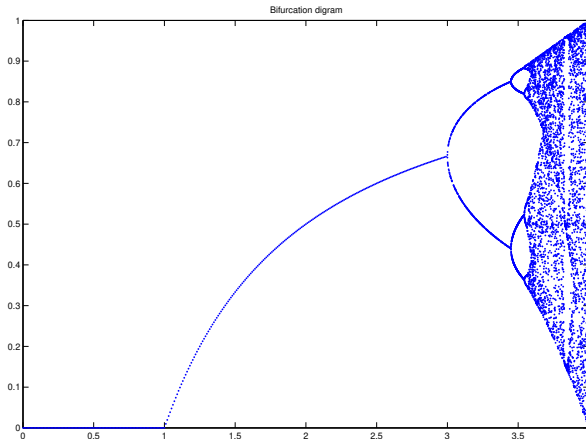
Iterations $f^k(\cdot)$



Doublement de période

- ▶ Le processus de doublement se répète à l'infini.
- ▶ Les valeurs de bifurcation de a se resserrent de plus en plus.
- ▶ Les bifurcations successives sont de plus en plus voisines et finissent par s'accumuler en une valeur a_∞ (3.57 environ)
- ▶ Pour $a < a_\infty$, les valeurs de x se répètent : le régime est prévisible.
- ▶ Si a est supérieur (même un peu supérieur) à a_∞ les valeurs de x se succèdent de façon apériodique et désordonnée comme si elles obéissaient au seul fait du hasard. Le régime est devenu imprévisible.
- ▶ Pour $a > a_\infty$ il y a aussi des *fenêtres périodiques*: par exemple, il y a une fenêtre périodique de période 3 pour $3.8284... \leq a \leq 3.8415$

Diagramme de bifurcation



Une fenêtre d'ordre de comportement périodique (ordre 3) est présente autour de $a = 3.83$.

Notons par

$$a_1 = 3, a_2 = 1 + \sqrt{6} \approx 3.4495, a_3 = 3.544090, a_4 = 3.5644, \dots, a_\infty = 3.569945$$

les valeurs de a telles que le système a une orbite stable de période 2^n si $a_n < a \leq a_{n+1}$.

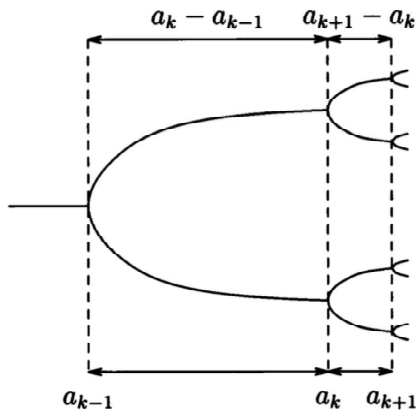
Mitchell Feigenbaum (1979) a montré que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = 4.6692016..$$

est une constante connue comme la *constante de Feigenbaum*.

Il s'agit d'une *grandeur universelle* comme le nombre e ou le nombre π ; en effet, elle possède la propriété d'être valable pour de nombreuses fonctions.

La constante de Feigenbaum

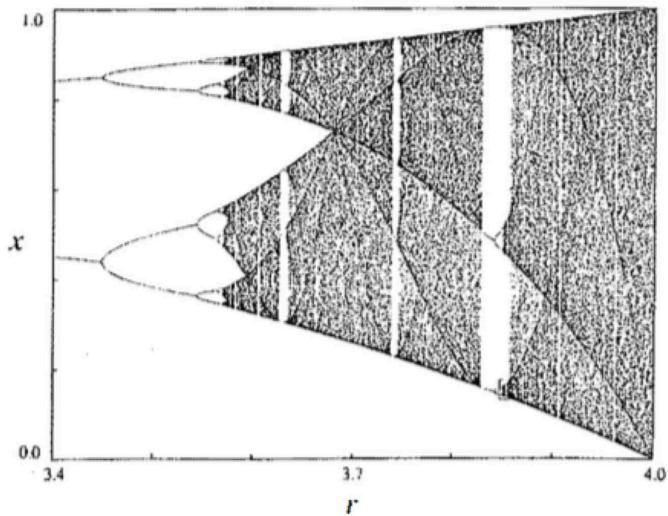


- Il est intéressant remarquer que des phénomènes de cascade de doublement de la période avec le même comportement asymptotique ont été détectés dans d'autres systèmes dynamiques comme

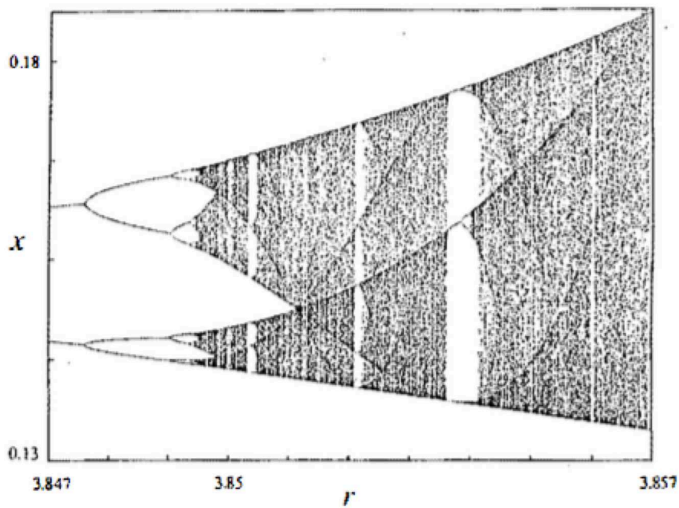
$$x(k+1) = a \sin \pi x(k)$$

- La cascade de doublement de périodes a été observée et la constante mesurée dans des réactions chimiques et des expériences hydrodynamiques.

Autosimilarité

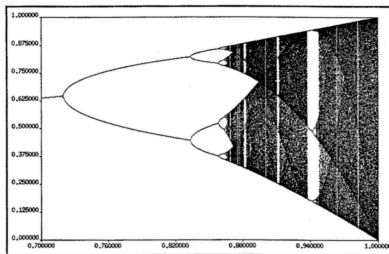


Autosimilarité



Il est remarquable que des diagrammes très semblables d'un point de vue qualitatif soient obtenus pour des itérations très différentes, par exemple

$$x(k+1) = a \sin \pi x(k), a \in [0, 1], x \in [0, 1]$$



On retrouve la même séquence de doublement de période et de transition vers le chaos.

Definition (Système discret chaotique)

Un système discret $\{f, I\}$ est appelé chaotique si

- ▶ chaque intervalle $(a, b) \subset I$ contient au moins un point qui appartient à un cycle
- ▶ pour chaque $x, y \in I$ et pour chaque $\epsilon > 0$ il existe un $z \in I$ et un $k \in \mathbb{N}$ telles que

$$|z - x| < \epsilon, \quad |f^k(z) - y| < \epsilon$$

Ceci signifie qu'une fois définis deux intervalles n'importe comment petits, dans chacun il y a une trajectoire qui passe dans l'autre (ergodicité).

- ▶ le système est sensible aux conditions initiales, c.-à-d. il existe $\delta > 0$ tel que pour chaque $x \in I$ et $\epsilon > 0$, ils existent $z \in I$, $k \in \mathbb{N}$ telles que

$$|z - x| < \epsilon, \quad |f^k(z) - f^k(x)| > \delta$$

Systèmes chaotiques à temps discret

- ▶ Notons qu'à la différence du cas continu, un système à temps discret peut être chaotique aussi pour $n = 1$ ou $n = 2$.
- ▶ La troisième propriété signifie que de petites erreurs dans la mesure de x peuvent entraîner de grandes différences entre la valeur calculée et la vraie valeur

Exposant de Liapounov

Une manière pour quantifier le taux de chaotité d'un système est d'estimer l'exposant de Liapounov.

Soit $x(N) + \delta(N) = f^N(x(0) + \delta(0))$. Après N étapes la perturbation initiale est amplifiée d'un facteur

$$\left| \frac{\delta(N)}{\delta(0)} \right| = \left| \frac{\delta(N)}{\delta(N-1)} \right| \left| \frac{\delta(N-1)}{\delta(N-2)} \right| \cdots \left| \frac{\delta(1)}{\delta(0)} \right|$$

Le logarithme du facteur d'amplification est donc

$$\ln \left| \frac{\delta(N)}{\delta(0)} \right| = \sum_{k=0}^{N-1} \ln \left| \frac{\delta(k+1)}{\delta(k)} \right|$$

L'exposant de Liapounov est défini par

$$L = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \ln \left| \frac{\delta(k+1)}{\delta(k)} \right|$$

et il représente le taux moyen de divergence par itération.

Puisque $\delta(k+1) \approx f'(x(k))\delta(k)$

$$L \approx \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \ln |f'(x(k))|$$

L'exposant dépend de $x(0)$ mais il est peu sensible pour des valeurs $x(0)$ qui appartiennent au bassin d'attraction d'un attracteur.

- ▶ Un système est défini chaotique si son exposant de Liapounov est positif

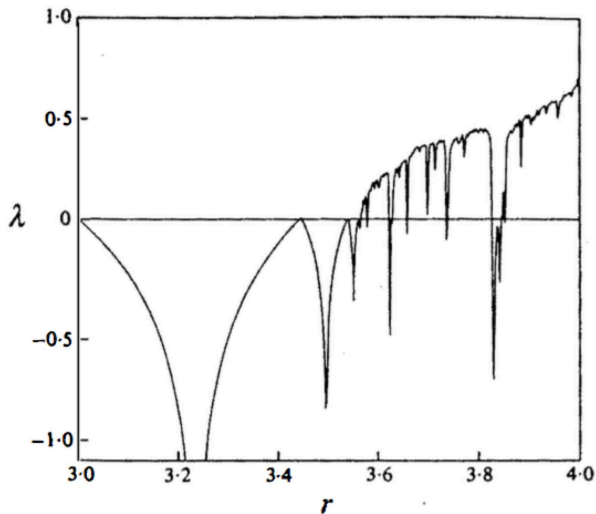
$$L > 0 \Leftrightarrow \left| \frac{\delta(N)}{\delta(0)} \right| > 1$$

- ▶ L'erreur infinitésimale du début ira donc en augmentant. Le système sera dans ce cas sensible aux très petites variations de sa condition initiale.
- ▶ Si au contraire l'exposant de Lyapunov est négatif, l'erreur infinitésimale du début ira en diminuant. L'erreur initiale n'aura dans ce cas aucun effet à long terme.

Voici quelques estimations de l'exposant de Liapounov obtenues de manière numérique pour des valeurs différentes de a dans l'équation logistique:

a	0.5	1	2.1	3	3.5	3.8282	4
\hat{L}	-0.69	-0.0003	-2.3025	-0.0002	-0.8720	0.2632	0.6932

Exposant de Liapounov et éq. logistique



Shadowing Theorem

- ▶ Dilemme: dans un système chaotique est-ce qu'une simulation numérique est encore informative de la vraie dynamique?
- ▶ La réponse est oui grâce au théorème du shadowing
- ▶ Théorème: Bien qu'une trajectoire chaotique calculée à l'ordinateur diverge exponentiellement de la vraie trajectoire avec les mêmes conditions initiales, il existe toujours une véritable trajectoire du système (avec une condition initiale légèrement différente) qui reste proche à la trajectoire numérique.

Shadowing Theorem

