

# INFO-F-302, Cours d'Informatique Fondamentale

Emmanuel Filiot  
Département d'Informatique  
Faculté des Sciences  
Université Libre de Bruxelles

Année académique 2023-2024

# La Déduction Naturelle

### 3 Introduction

- ▶ L'algorithme des tableaux sémantique ne convient pas pour faire des raisonnements “à la main” sur des formules propositionnelles.
- ▶ Quand on fait des preuves en mathématique, on utilise des règles qui nous permettent, pas par pas, de déduire des conclusions à partir de prémisses.
- ▶ La *déduction naturelle* est une formalisation de ce type de raisonnement.
- ▶ La déduction naturelle permet de prouver qu'une formule est valide.

## 4 Introduction

- ▶ Supposons donnée un ensemble de formules  $\phi_1, \dots, \phi_n$  que nous appelons *prémisses* et une formule  $\psi$  que nous appelons *conclusion*.
- ▶ Supposons que l'on désire montrer que  $\psi$  peut être dérivée de  $\phi_1, \dots, \phi_n$ ; on notera cette intention  $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi$ , cette dernière expression est appelée un *séquent*.
- ▶ La notion de dérivation syntaxique est formalisée avec des *règles de déduction*.
- ▶ Les règles de déduction permettent de faire le lien entre la syntaxe et la sémantique, en effet, on aura :

$$\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi \text{ ssi } \phi_1, \dots, \phi_n \models \psi$$

Autrement dit, tout ce qui est démontrable est valide, et tout ce qui est valide est démontrable.

- ▶ On peut vérifier algorithmiquement qu'une règle de déduction est appliquée correctement. On peut donc vérifier algorithmiquement qu'une preuve est correcte (on va le voir avec l'outil disponible à l'adresse [proofs.openlogicproject.org](https://proofs.openlogicproject.org)).

## 5 La conjonction

Règles pour la conjonction :

- Règle d'introduction :

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge_i$$

- Règle d'élimination :

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge_{e1} \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge_{e2}$$

Par exemple, la règle d'introduction se lit : si j'ai une preuve de  $\phi$  et une preuve de  $\psi$ , alors j'ai une preuve de  $\phi \wedge \psi$ .

## 6 La conjonction

Exemples d'utilisation de ces règles pour la conjonction :

►  $x \wedge y, z \vdash? y \wedge z$ .

1	$x \wedge y$	<i>prémisse</i>
2	$z$	<i>prémisse</i>
3	$y$	$\wedge_{e2}, 1$
4	$y \wedge z$	$\wedge_i, 3, 2$

►  $(x \wedge y) \wedge z, t \wedge h \vdash y \wedge t$ ;

►  $x \wedge y \vdash y \wedge x$ ;

►  $(x \wedge y) \wedge z \vdash x \wedge (y \wedge z)$ ;

$$(x \wedge y) \wedge z, t \wedge h \vdash y \wedge t;$$

1. $(x \wedge y) \wedge z$	prem.
2. $t \wedge h$	prem.
3. $t$	$\wedge e, 2$
4. $x \wedge y$	$\wedge e, 1$
5. $y$	$\wedge e, 4$
6. $y \wedge t$	$\wedge i, 5, 3$

$$x \wedge y \vdash y \wedge x;$$

1. $x \wedge y$	prem
2. $x$	$\wedge e, 1$
3. $y$	$\wedge e, 1$
4. $y \wedge x$	$\wedge i, 3, 2$

$$(x \wedge y) \wedge z \vdash x \wedge (y \wedge z);$$

1. $(x \wedge y) \wedge z$	prem.
2. $x \wedge y$	$\wedge e, 1$
3. $x$	$\wedge e, 2$
4. $y$	$\wedge e, 2$
5. $z$	$\wedge e, 1$
6. $y \wedge z$	$\wedge i, 4, 5$
7. $x \wedge (y \wedge z)$	$\wedge i, 3, 6$

## 7 Double négation

Règles pour la (double) négation :

► Introduction :

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi} \neg\neg i$$

► Elimination :

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi} \neg\neg e$$



## 8 Elimination de l'implication : Modus Ponens

Règle pour l'élimination de l'implication (*Modus Ponens*) :

$$\frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow MP$$

### Illustration

1. il pleut ;
2. si il pleut alors la route est mouillée.

alors on peut déduire que la route est mouillée.

## 8 Elimination de l'implication : Modus Ponens

Règle pour l'élimination de l'implication (*Modus Ponens*) :

$$\frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow MP$$

### Illustration

1. il pleut ;
2. si il pleut alors la route est mouillée.

alors on peut déduire que la route est mouillée.

La règle  $\rightarrow MP$  est parfois notée  $\rightarrow_e$  (élimination de l'implication)

## 9 Elimination de l'implication : Modus Ponens

Démontrer les séquents suivants (ainsi qu'en ligne sur [proofs.openlogicproject.org](https://proofs.openlogicproject.org)) :

$x, x \rightarrow y, x \rightarrow (y \rightarrow z) \vdash z$		$p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg\neg q \vdash r$	
1. $x$	prem.	1. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$	prem.
2. $x \rightarrow y$	prem.	2. $p$	prem.
3. $x \rightarrow (y \rightarrow z)$	prem.	3. $\neg\neg q$	prem.
4. $y$	$\rightarrow_{mp, 1, 2}$	4. $q \rightarrow r$	$\rightarrow_{mp, 1, 2}$
5. $y \rightarrow z$	$\rightarrow_{mp, 1, 3}$	5. $q$	$\neg\neg_e, 3$
6. $z$	$\rightarrow_{mp, 4, 5}$	6. $r$	$\rightarrow_{mp, 4, 5}$

## 10 Contraposition ou Modus Tollens

Supposons que  $x \rightarrow y$  et  $\neg y$  soient vraies, si  $x$  est vrai alors par la règle du *modus ponens* on peut dériver  $y$  ce qui est en contradiction avec le fait que  $\neg y$  est vrai, donc on en déduit que  $\neg x$  est vrai. Ce raisonnement est résumé dans la règle suivante, appelée règle de *Modus Tollens* :

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \quad \neg \psi}{\neg \phi} MT$$

### Illustration

1. si il pleut alors la route est mouillée.
2. la route n'est pas mouillée ;

alors on peut déduire qu'il ne pleut pas.

## 11 Contraposition ou Modus Tollens

Prouvons la déduction suivante :

$$x \rightarrow (y \rightarrow z), x, \neg z \vdash \neg y$$

- |                                      |                                 |
|--------------------------------------|---------------------------------|
| 1. $x \rightarrow (y \rightarrow z)$ | prem.                           |
| 2. $x$                               | prem.                           |
| 3. $\neg z$                          | prem.                           |
| 4. $y \rightarrow z$                 | $\rightarrow_{\text{mp}}, 1, 2$ |
| 5. $\neg y$                          | MT, 3, 4                        |

## 12 Contraposition ou Modus Tollens

*MT* nous a permis de montrer :

$$x \rightarrow y, \neg y \vdash \neg x$$

et le séquent

$$x \rightarrow y \vdash \neg y \rightarrow \neg x$$

semble d'une certaine façon dire la même chose. Mais jusqu'à présent, nous n'avons pas de règles pour introduire le connecteur "implication".

## 13 Introduction de l'implication

Règle pour l'introduction de l'implication :

$$\begin{array}{c}
 \phi \text{ hyp.} \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \hline
 \psi \text{ fin hyp.} \quad \rightarrow_i \\
 \phi \rightarrow \psi
 \end{array}$$

## 13 Introduction de l'implication

Règle pour l'introduction de l'implication :

$$\begin{array}{c}
 \phi \text{ hyp.} \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \hline
 \psi \text{ fin hyp.} \\
 \phi \rightarrow \psi \quad \rightarrow_i
 \end{array}$$

**CONVENTION** : Lorsqu'on posera une hypothèse, on indentera l'hypothèse et toutes lignes de la sous-preuve, jusqu'à la fermeture d'hypothèse.



## 14 Illustration par un exemple concret

### Théorème

Soient  $a, b, c \in \mathbb{N}$ . Si  $a$  divise  $b$  et  $c$ , alors  $a$  divise  $b + c$ .

#### Preuve.

1. **Hypothèse** : Supposons que  $a$  divise  $b$  et  $c$
2. **Raisonnement** : Par définition de la relation de division, il existe  $k_1, k_2$  tels que  $k_1 a = b$  et  $k_2 a = c$ . Donc  $b + c = (k_1 + k_2)a$ . De nouveau, par définition de la division, on en déduit :
3. **Fin Hypothèse** :  $a$  divise  $b + c$ .
4. **Conclusion** : Si  $a$  divise  $b$  et  $c$ , alors  $a$  divise  $b + c$ .

## 15 Exemple

On veut démontrer  $t \vdash (t \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow (s \rightarrow p))$  :

1	$t$	prémisse
2	$t \rightarrow p$	hyp.1
3	$q$	hyp.2
4	$s$	hyp.3
5	$p$	$MP, 1, 2, \text{fin hyp.3}$
6	$s \rightarrow p$	$\rightarrow_i, 4 - -5, \text{fin hyp.2}$
7	$q \rightarrow (s \rightarrow p)$	$\rightarrow_i, 3 - -6, \text{fin hyp.1}$
8	$(t \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow (s \rightarrow p))$	$\rightarrow_i, 2 - -7$

## 16 Introduction de l'implication : exercice

Prouvons la déduction suivante :  $\neg y \rightarrow \neg x \vdash x \rightarrow \neg\neg y$  :

## 16 Introduction de l'implication : exercice

Prouvons la déduction suivante :  $\neg y \rightarrow \neg x \vdash x \rightarrow \neg\neg y$  :

1	$\neg y \rightarrow \neg x$	prémisse
2	$x$	hyp.
3	$\neg\neg x$	$\neg\neg_i, 2$
4	$\neg\neg y$	$MT, 1, 3, \text{fin hyp.2}$
5	$x \rightarrow \neg\neg y$	$\rightarrow_i, 2 - 4$

## 17 Introduction de l'implication : exercice en ligne

Démontrer le séquent  $(p \wedge q) \rightarrow \neg\neg r, p \vdash q \rightarrow r$  sur [proofs.openlogicproject.org](https://proofs.openlogicproject.org).

## 18 Introduction de l'implication

Preuves de formules vraies sans prémisse :

1	$p$	hyp.
2	$\neg\neg p$	$\neg\neg_i, 1, \text{fin hyp.1}$
3	$p \rightarrow \neg\neg p$	$\rightarrow_i, 1 - 2$

Donc on a établi  $\vdash p \rightarrow \neg\neg p$

Note : les formules  $\phi$  telles que  $\vdash \phi$  sont appelées *théorèmes*. Comme on le verra dans la suite du cours,  $\vdash \phi$  ssi  $\models \phi$  et donc pour le système de déduction naturelle en logique propositionnelle, les théorèmes coïncident avec les formules valides.

## Preuve valide ?

Est-ce que la preuve suivante est correcte ?

1	$p \rightarrow q$	hyp.1
2	$p$	hyp.2
3	$q$	$\rightarrow_e, 1, 2$ fin hyp.1
4	$(p \rightarrow q) \rightarrow q$	$\rightarrow_i, 1 - 3$

## Règles pour l'ouverture et la fermeture d'hypothèses

- ▶ toute hypothèse introduite doit être fermée



## Règles pour l'ouverture et la fermeture d'hypothèses

- ▶ toute hypothèse introduite doit être fermée
- ▶ on ne peut jamais fermer deux hypothèses en même temps (si on respecte l'indentation, cela ne peut pas arriver)

## Règles pour l'ouverture et la fermeture d'hypothèses

- une fois qu'on a fermé une hypothèse, on ne peut pas utiliser les formules déduites entre l'ouverture et la fermeture de cette hypothèse. Par exemple :

0	$q$	prémisse
1	$q \rightarrow (q \rightarrow p)$	hyp. <sub>1</sub>
2	$q \rightarrow p$	MP, 0, 1
3	$\neg\neg(q \rightarrow p)$	$\neg\neg_i$ , 2, fin hyp. <sub>1</sub>
4	$p$	MP, 0, 2

n'est pas une preuve de  $q \vdash p$  (qui n'est d'ailleurs pas valide).

## 22 Introduction de l'implication

Prouvons :

$$\vdash^? (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg x) \rightarrow (x \rightarrow r))$$

1.  $q \rightarrow r$
2.  $\neg q \rightarrow \neg x$
3.  $x$
4.  $\neg \neg x$
5.  $\neg \neg q$
6.  $q$
7.  $r$
8.  $x \rightarrow r$
9.  $(\neg q \rightarrow \neg x) \rightarrow (x \rightarrow r)$
10.  $(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg x) \rightarrow (x \rightarrow r))$

- $H_1$   
 $H_2$   
 $H_3$   
 $\neg_i, 3$   
 $MT, 2, 4$   
 $\neg_e, 5$   
 $\rightarrow MP, 1, 7$   
 $\rightarrow_i, 3-7$   
 $\rightarrow_i, 2-8$   
 $\rightarrow_i, 1-$

## 23 Introduction de la disjonction

Règle pour introduire la disjonction :

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \vee i_1$$

$$\frac{\psi}{\phi \vee \psi} \vee i_2$$

## 24 Eliminer la disjonction

## 24 Eliminer la disjonction

Prenons la règle suivante :

$$\frac{\phi \vee \psi}{\phi}$$

Est-elle valide ?

## 24 Eliminer la disjonction

Prenons la règle suivante :

$$\frac{\phi \vee \psi}{\phi}$$

Est-elle valide ? NON

“il fait beau” ou “il pleut” n’implique pas nécessairement qu’il fasse beau !

## 25 Comment éliminer la disjonction ?

Imaginons que l'on puisse :

1. établir une formule  $\phi$  sous hypothèse que  $\psi_1$  est vrai,
2. et que l'on puisse également établir  $\phi$  sous hypothèse que  $\psi_2$  est vrai,
3. et qu'il existe une preuve pour  $\psi_1 \vee \psi_2$

alors on devrait pouvoir déduire  $\phi$ .

### Exemple

Supposons que les faits suivant soient vrais :

1. si ma note d'examen est excellente, j'irai boire un verre
2. si ma note d'examen est bonne, j'irai boire un verre
3. ma note sera bonne ou excellente

Je peux donc en déduire que j'irai boire un verre.



Cette stratégie de preuve est formalisée dans la règle suivante :

$$\begin{array}{c}
 \psi_1 \text{hyp.} \quad \psi_2 \text{hyp.} \\
 \cdot \quad \cdot \\
 \cdot \quad \cdot \\
 \cdot \quad \cdot \\
 \hline
 \psi_1 \vee \psi_2 \quad \phi \text{fin hyp.} \quad \phi \text{fin hyp.} \quad \vee_e \\
 \phi
 \end{array}$$

Attention : dans chacun des deux cas, on ne peut pas utiliser l'hypothèse temporaire faite pour l'autre cas, sauf si cette hypothèse a été établie avant.

## 28 Elimination de la disjonction

Prouvons la déduction :

$$x \vee q \vdash q \vee x$$

$$1. \quad x \vee q$$

$$2. \quad \begin{array}{|l} x \end{array}$$

$$3. \quad \begin{array}{|l} q \vee x \end{array}$$

$$4. \quad \begin{array}{|l} q \end{array}$$

$$5. \quad \begin{array}{|l} q \vee x \end{array}$$

$$6. \quad q \vee x$$

prem.

$$\begin{array}{l} H_1 \\ \vdots \\ V_{i_2, 2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} H_2 \\ \vdots \\ V_{i_4, 4} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

$$\vee_e, 1, 2-3, 4-5$$

## Autre exemple (Dov Jarden '53)

On veut démontrer  $\phi =$  "Il existe deux réels irrationnels  $a, b$  tels que  $a^b$  est rationnel".

On sait que  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

## Autre exemple (Dov Jarden '53)

On veut démontrer  $\phi =$  "Il existe deux réels irrationnels  $a, b$  tels que  $a^b$  est rationnel".

On sait que  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

$\chi_1$

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  est rationnel

OU

$\chi_2$

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  est irrationnel

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  est rationnel  
Prendre  $a=b=\sqrt{2}$   
On en déduit  $\phi$

$H_1$

Fin  $H_1$

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  est irrationnel  
Prendre  $a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  et  $b=\sqrt{2}$   
alors  $a^b = 2$   
On en déduit  $\phi$

$H_2$

Fin  $H_2$

On en déduit  $\phi$

## 29 Déduction naturelle

Règle de copie pour conclure un raisonnement sous-hypothèse.

$\frac{\phi}{\phi}$  copie

Considérons :

$$\vdash x \rightarrow (q \rightarrow x)$$

Et la preuve suivante :

1.	x		$H_1$	
2.	q		$H_2$	
3.	x		copie, 1	
4.	q $\rightarrow$ x		$\rightarrow i, 2-3$	
5.	x $\rightarrow$ (q $\rightarrow$ x)		$\rightarrow i, 1-4$	

## 30 Règles pour la négation.

Les *contradictions* sont des formules de la forme :

$$\neg\phi \wedge \phi \text{ ou } \phi \wedge \neg\phi$$

- Notons qu'aucune valuation ne satisfait une contradiction. Donc on a  $\neg\phi \wedge \phi \models \psi$  pour n'importe quel  $\psi$ . Donc si la méthode de déduction est complète, on devrait avoir :  $\neg\phi \wedge \phi \vdash \psi$  pour n'importe quel  $\psi$ .
- intuition : si le faux est vrai, alors tout est vrai.
- Toutes les contradictions sont logiquement équivalentes à la formule  $\perp$ .

## Règles pour la négation.

Le fait que l'on peut tout déduire à partir d'une contradiction est formalisé par la règle suivante :

$$\frac{\perp}{\phi} \perp_e$$

Le fait que  $\perp$  représente une contradiction est formalisé par la règle suivante :

$$\frac{\phi \quad \neg\phi}{\perp} \neg_e$$

Comment introduire une négation ?

Supposons que l'on fasse une hypothèse et que l'on arrive à déduire une contradiction, dans ce cas l'hypothèse est fausse. Ceci est formalisé par la règle de preuve suivante :

$$\begin{array}{c}
 \phi \text{ hyp.} \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \hline
 \perp \text{ fin hyp.}
 \end{array}
 \frac{}{\neg \phi} \neg_i$$



### 33 Exemple avec la négation

On est maintenant en mesure de prouver le raisonnement déductif de l'exemple introductif (taxi-train-invité) :

$$(x \wedge \neg y) \rightarrow z, \neg z, x \vdash y$$

$$1. (x \wedge \neg y) \rightarrow z \quad \text{prem.}$$

$$2. \neg z \quad \text{prem.}$$

$$3. x \quad \text{prem.}$$

4.	$\neg y$	$H_1$
5.	$x \wedge \neg y$	$\wedge_i, 3, 4$
6.	$z$	$\rightarrow MP, 1, 5$
7.	$\perp$	$\neg e, 2, 6$

$$8. \neg y$$

$$9. y$$

$$\neg_i, 4-7$$

$$\neg e, 8$$

## 34 Règles pour l'équivalence

$$\frac{\phi_1 \rightarrow \phi_2 \quad \phi_2 \rightarrow \phi_1}{\phi_1 \leftrightarrow \phi_2} (\leftrightarrow_i)$$

$$\frac{\phi_1 \leftrightarrow \phi_2}{\phi_1 \rightarrow \phi_2} (\leftrightarrow_{e_1})$$

$$\frac{\phi_1 \leftrightarrow \phi_2}{\phi_2 \rightarrow \phi_1} (\leftrightarrow_{e_1})$$

## 35 Règles dérivées (qui peut s'obtenir à partir des autres règles)

Notons que  $MT$ 

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \quad \neg \psi}{\neg \phi} MT$$

est une règle dérivée. En effet, nous pouvons établir la preuve suivante :

$$\phi \rightarrow \psi, \neg \psi \vdash \neg \phi$$

1.  $\phi \rightarrow \psi$

prem.

2.  $\neg \psi$

prem.

3.  $\phi$

 $H_1$ 

4.  $\psi$

 $\rightarrow MP, 1, 3$ 

5.  $\perp$

 $\neg E, 2, 4$ 

6.  $\neg \phi$

 $\neg I, 3-5$

## 36 Règles Dérivées

Autres règles dérivées :

$\neg\phi$  hyp.

.

.

.

$$\frac{\perp \quad \text{fin hyp.}}{\phi} \text{RAA}$$

*RAA* : reductio ad absurdum. Cela s'appelle encore un raisonnement par l'absurde ou par contradiction.

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi} \neg\neg_i$$

$$\frac{}{\phi \vee \neg\phi} \text{LEM}$$

*LEM* : Law of the excluded middle. La loi du tiers exclu.

## 37 Théorèmes

### Théorème (Adéquation)

*Pour tout  $\phi_1, \dots, \phi_n, \phi$ , si  $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi$ , alors  $\phi_1, \dots, \phi_n \models \phi$ .*

### Théorème (Complétude)

*Pour tout  $\phi_1, \dots, \phi_n, \phi$ , si  $\phi_1, \dots, \phi_n \models \phi$ , alors  $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi$ .*

## Idée de la preuve du théorème d'adéquation

Pour démontrer ce théorème, il suffit de démontrer que chaque règle du système de déduction naturelle est valide. En effet, dans ce cas, chaque étape de la déduction est valide, donc la preuve sera valide.

**Remarque** : Cette démonstration ne peut pas être faite en déduction naturelle !

Prouvons par exemple que la règle du Modus Ponens est valide. Il faut démontrer que pour toute formule  $\phi, \psi$ , la formule  $(\phi \wedge (\phi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$  est valide. Je vous laisse vérifier que c'est bien le cas (par exemple avec une table de vérité).

**Autre exemple** : la règle d'élimination de la disjonction  $\vee_e$ . Il faut démontrer que  $((\phi_1 \vee \phi_2) \wedge (\phi_1 \rightarrow \phi) \wedge (\phi_2 \rightarrow \phi)) \rightarrow \phi$  est valide.

# Utilisation des principes de déduction naturelle : comment démontrer une implication ?

Deux méthodes sont possibles si on veut démontrer  $A \rightarrow B$  :

**Méthode 1 : On suppose  $A$  et on en déduit  $B$**

**Théorème** Pour tout entier positif  $n, m \geq 0$ , si  $n < m$ , alors  $-m^2 < -n^2$ .

**Preuve** Supposons que  $n < m$ . Alors  $n^2 < m^2$ , dont on déduit  $-m^2 < -n^2$ .

## Utilisation des principes de déduction naturelle : comment démontrer une implication ?

**Méthode 2 :** On suppose que  $B$  est faux et on en déduit que  $A$  est faux.

**Théorème** Si  $r$  est un réel irrationnel, alors  $\sqrt{r}$  est irrationnel.

**Preuve** Supposons que  $\sqrt{r}$  est rationnel. Donc il existe deux entiers  $p, q$  tels que  $\sqrt{r} = \frac{p}{q}$ . On en déduit que :

$$r = (\sqrt{r})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$$

Comme  $p^2$  et  $q^2$  sont entiers, on obtient que  $r$  est rationnel.



# Utilisation des principes de déduction naturelle : comment démontrer une équivalence ?

Deux méthodes sont possibles si on veut démontrer  $A \leftrightarrow B$  :

**Méthode 1 : On suppose  $A$  et on en déduit  $B$  et réciproquement on suppose que  $B$  et on en déduit  $A$**

La preuve doit donc ressembler à :

**Supposons  $A$**

...

...

**... donc  $B$**

**Réciproquement, supposons  $B$**

...

...

**... donc  $A$**

# Utilisation des principes de déduction naturelle : comment démontrer une équivalence ?

**Méthode 2 : On prouve une chaîne d'équivalences.** Par exemple :  
**Théorème** Une formule  $\phi$  est valide si et seulement si sa négation n'est pas satisfaisable.

**Preuve** Soit  $\phi$  une formule.  $\phi$  est valide  
ssi pour toute interprétation  $V$ , on a  $V \models \phi$   
ssi il n'existe pas d'interprétation  $V$  telle que  $V \not\models \phi$   
ssi il n'existe pas d'interprétation  $V$  telle que  $V \models \neg\phi$   
ssi  $\neg\phi$  n'est pas satisfaisable.

# Utilisation des principes de déduction naturelle : preuve par cas

Ce type de preuve repose sur une généralisation de la règle  $\vee_e$  : si on sait que on est soit dans le cas  $A_1$ , ou le cas  $A_2$ , ..., ou le cas  $A_n$ , et que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on peut démontrer une propriété  $P$ , alors c'est que  $P$  est vraie. Prenons un exemple :

**Théorème** Pour tout naturel  $n$ ,  $n^3 - n$  est divisible par 3.

**Preuve** On remarque que  $n^3 - n = n(n+1)(n-1)$ . On considère 3 cas :

1.  $n \bmod 3 = 0$  : alors  $n = 3k$  pour un certain  $k$ , et

$$n^3 - n = 3k(3k+1)(3k-1) \quad \text{est divisible par 3.}$$

2.  $n \bmod 3 = 1$  : alors  $n = 3k + 1$  pour un certain  $k$ , et

$$n^3 - n = (3k+1)(3k+2)3k \quad \text{est divisible par 3.}$$

3.  $n \bmod 3 = 2$  : alors  $n = 3k + 2$  pour un certain  $k$ , et

$$n^3 - n = (3k+2)(3k+3)(3k+1) = (3k+2)3(k+1)(3k+1) \quad \text{est divisible par 3.}$$

Comme ce sont les seuls cas possibles, on en conclue que  $n^3 - n$  est divisible par 3 pour tout  $n$ .

# Utilisation des principes de déduction naturelle : preuve par l'absurde (appelée aussi par contradiction)

**Principe** : on veut démontrer une propriété  $P$ . On suppose son contraire  $\neg P$  et on en déduit une contradiction. Par exemple :

**Théorème**  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

**Preuve.** On suppose que  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  pour des entiers  $p$  et  $q$  tels que  $\frac{p}{q}$  est irréductible, et on va en déduire une contradiction. Donc,  $2 = \frac{p^2}{q^2}$ . On en déduit  $2q^2 = p^2$ . Donc  $p^2$  est pair.

On va démontrer que  $p$  est pair. On suppose le contraire et on va en déduire une contradiction. On suppose donc que  $p = 2k + 1$  pour un certain  $k$ . Donc  $p^2 = 4k^2 + 2k + 1 = 2(2k^2 + k) + 1$  est impair. Contradiction. Donc  $p$  est pair.

Comme  $p$  est pair, cela implique que  $p^2$  est un multiple de 4, i.e.  $p^2 = 4k'$  pour un certain  $k'$ . Donc  $q^2 = 2k'$  est pair. Par le même raisonnement que pour  $p^2$ , on en déduit que  $q$  est pair.

On a donc démontré que  $p$  et  $q$  sont pairs, donc  $p = 2k_1$  et  $q = 2k_2$  pour des certains  $k_1, k_2$ .

Donc  $\sqrt{2} = \frac{2k_1}{2k_2} = \frac{k_1}{k_2}$ . Cela contredit que  $\frac{p}{q}$  est irréductible.

## 45 Exercices

Démontrer les déductions suivantes en déduction naturelle :

1.  $\vdash x \rightarrow x$
2.  $\vdash \neg(x \wedge \neg x)$
3.  $\vdash x \rightarrow (y \rightarrow x)$
4.  $\vdash x \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y)$
5.  $x \wedge y \vdash x \vee r$
6.  $x \wedge y \vdash z \rightarrow x$
7.  $x \rightarrow y \rightarrow r \vdash (x \wedge y) \rightarrow r$
8.  $x \rightarrow y \rightarrow z \vdash y \rightarrow x \rightarrow z$
9.  $x \rightarrow y \vdash \neg(x \wedge \neg y)$
10.  $x \rightarrow (y \vee z) \vdash \neg z \rightarrow (\neg y \rightarrow \neg x)$
11.  $x \vee y, x \rightarrow r, \neg s \rightarrow \neg y \vdash r \vee s$
12.  $\vdash x \vee \neg x$  (sans utiliser la règle LEM !)

## 46 Exercices en ligne

Pour vous entraîner en ligne :

[proofs.openlogicproject.org/tfl-exs.html](https://proofs.openlogicproject.org/tfl-exs.html)

Par exemple, faire : exercices 1 et 5, chapitre 15, ainsi que l'exercice 1 du chapitre 17.

47  $\vdash x \vee \neg x$ 

- |    |                       |                                    |
|----|-----------------------|------------------------------------|
| 1. | $\neg(x \vee \neg x)$ | $H_1$                              |
| 2. | $x$                   | $H_2$                              |
| 3. | $x \vee \neg x$       | $\vee_{i_1} (2)$                   |
| 4. | $\perp$               | $\neg_e (1, 3), \text{ FIN } H_2,$ |
| 5. | $\neg x$              | $\neg_i (2 - 4)$                   |
| 6. | $x \vee \neg x$       | $\vee_{i_2} (5)$                   |
| 7. | $\perp$               | $\neg_e (1, 6) \text{ FIN } H_1$   |
| 8. | $x \vee \neg x$       | $RAA (1 - 7)$                      |