Solución de ecuaciones diferenciales simbólicas y numéricas
José Luis Hernández González
Instituto Tecnológico de Apizaco. joseluis@itapizaco.edu.mx

Introducción.

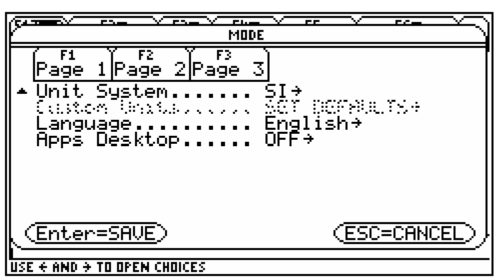
En el salón de clases, la solución de ecuaciones diferenciales se da de forma simbólica, dejando la parte numérica para otros cursos como los de Métodos Numéricos; sin embargo, en los problemas de aplicaciones de ingeniería es irrelevante el método de solución dado que puede ser tanto simbólico como numérico. Actualmente, se cuenta con modelos de calculadoras que ya traen funciones especiales para resolver ecuaciones diferenciales como las TI-89, TI-92 Plus y Voyage 200 de Texas Instruments. (Waits-Demana: 1997:1) Desafortunadamente, aunque una gran parte de alumnos cuenta con tales herramientas no han aprendido a usarlas y aprovechar su potencial, por lo que a continuación se describen algunos problemas y cómo resolverlos con las funciones incorporadas de la calculadora.

En los modelos TI-92 plus y Voyage 200 las pantallas son las mismas, para la TI-89 difiere solo en tamaño y cambia la combinación de teclas a presionar. Las pantallas que aquí se muestran pertenecen a la Voyage 200.

La nueva tecnología llamada CAS (software con matemáticas avanzadas) para los modelos de calculadora mencionados incluyen funciones para resolver cálculo diferencial e integral, álgebra lineal, probabilidad, estadística, ecuaciones diferenciales simbólicas de primer y segundo orden y numéricas de orden n, mediante Euler y Runge-Kutta. (Waits-Demana: 1997:1)

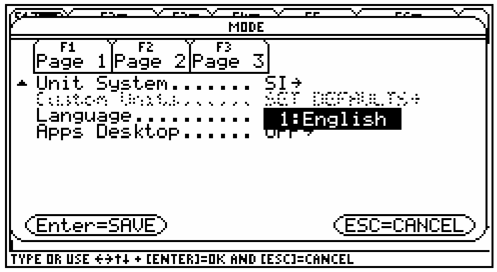
Nota: Para poder resolver los problemas mediante la forma que aquí se describe es necesario tener configurada la calculadora en el idioma inglés, efectuando lo siguiente:

Encender la calculadora presionando las teclas [ON], [MODE], [F3] para obtener la siguiente pantalla



Seleccionamos Language moviendo el cursor con ⊽,⊳ y después la opción English

Fuente: Waits-Demana:The new supercharged TI-92 Plus module with advanced mathematic software for university level mathematics and science:1997:1



La solución de ecuaciones simbólicas es posible mediante las siguientes funciones: (Texas Instruments: Manual de referencia:2003:28)

deSolve()

deSolve(*EDO de primer o segundo orden, Var independiente, Var dependiente***)** ⇒ solución general

deSolve(*EDO de primer orden,* ***and*** *Condición inicial, Var independiente, Var dependiente***)** ⇒ solución particular

deSolve(*EDO de segundo orden,* ***and*** *Condición inicial 1* ***and*** *Condición inicial 2, Var independiente, Var dependiente***)** ⇒ solución particular

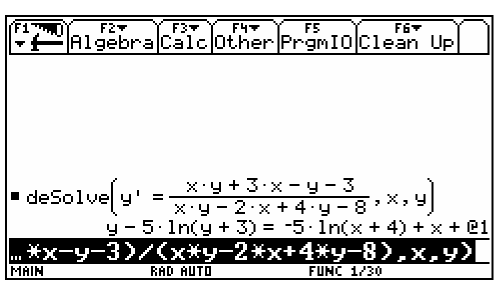
Nota: Para escribir el símbolo (´) en la calculadora escribe [2nd]['] *para una derivada, para dos derivadas escribirlo dos veces ´´.*
DeSolve(*es lo mismo que* **desolve(**.

Solución de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Ejemplo. Resolver la siguiente ecuación diferencial de variables separables. (Zill, Dennis G.:1998:43)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$$

desolve(*y´=(x*y+3x–y–3)/(x*y–2x+4y–8),x,y***)**[ENTER]

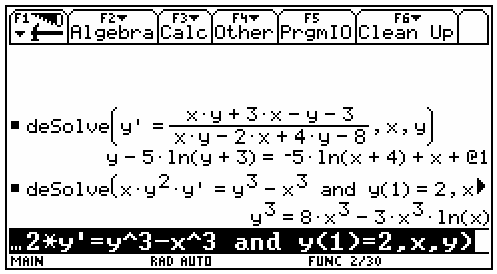


Fuente: Texas Instruments, Manual de referencia, 2003, 28
Zill, Dennis G.:Ecuaciones diferenciales con aplicaciones:1998:43

Ejemplo. Resolver la siguiente ecuación diferencial homogénea con condiciones iniciales. (Zill, Dennis G.:1998:43)

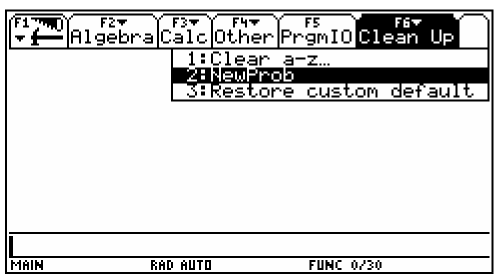
$$xy^2\frac{dy}{dx} = y^3 - x^3,\ y(1) = 2$$

deSolve(*x*y^2*y´=y^3-x^3* **and** *y(1)=2,x,y***)** [ENTER]



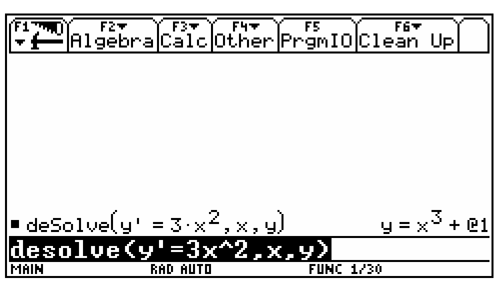
Nota: Las constantes se muestran en orden consecutivo, es decir cada vez que damos enter cambiará de valor a c1, c2, c3, etc, mediante el símbolo @.

Si se desea se puede presionar [F6] Clean Up, 2:NewProb *para iniciar los valores de las constantes a* c1.



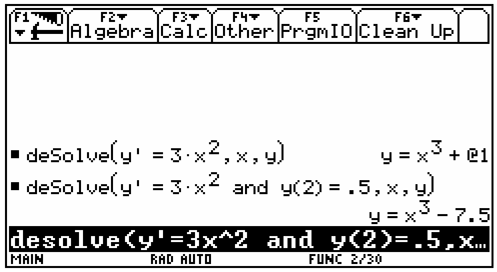
y presionar [ENTER]

Resolver la ecuación y'=3x^2 sujeta a y(2)=0.5

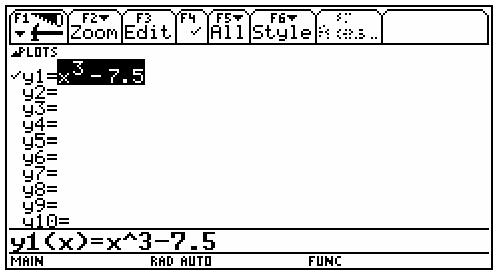


Si aplicamos las condiciones iniciales tenemos:

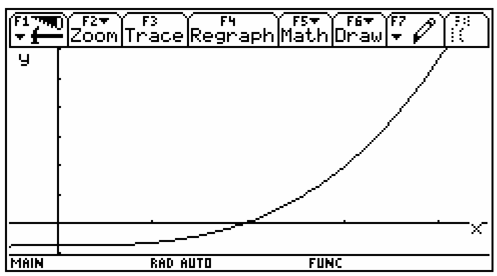
Fuente: Zill, Dennis G.:Ecuaciones diferenciales con aplicaciones:1998:43



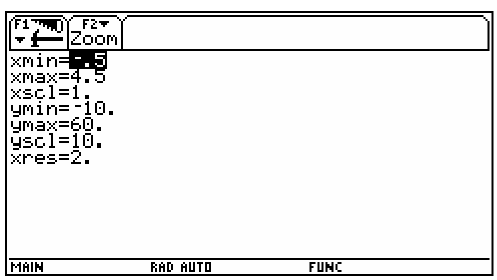
Para graficar la solución escribimos la función en el editor de gráficas presionando [◆][Y=]



La gráfica es:



Antes es necesario ajustar la pantalla de visualización en [◆][WINDOW], los siguientes valores



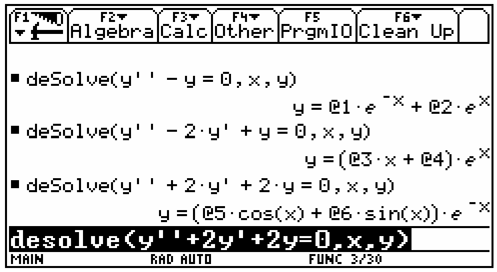
Solución de Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Ejemplo: Resolver las siguientes Ecuaciones diferenciales de segundo orden. (Bronson, Richard: Ecuaciones:1988:70)

a) $y'' - y = 0$
b) $y'' - 2y' + y = 0$
c) $y'' + 2y' + 2y = 0$

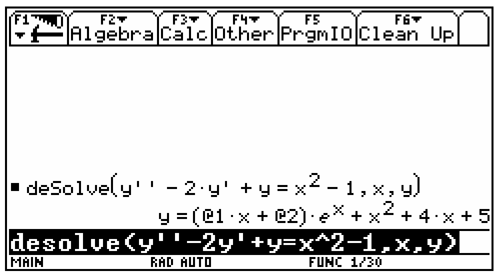
Fuentes: Bronson, Richard: Ecuaciones diferenciales modernas:1988:70

Solución



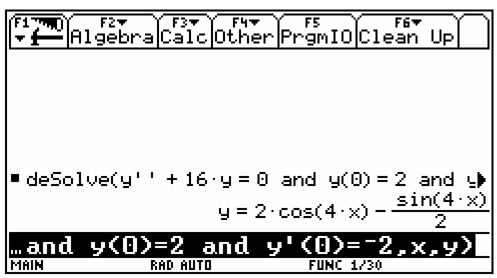
Resolver y” – 2y’ + y = x^2 – 1

Solución

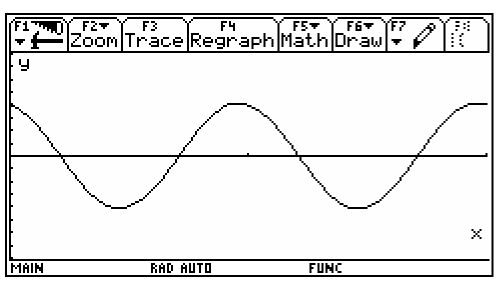


y” + 16y = 0, y(0) = 2, y´(0) = –2

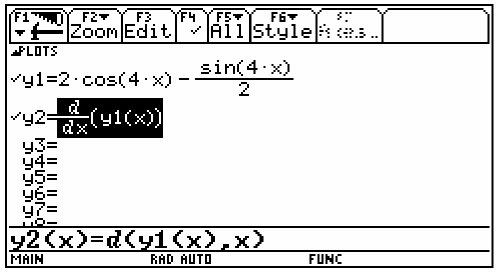
desolve(*y´´+16y=0* **and** *y(0)=2* **and** *y´(0)= –2,x,y***)**



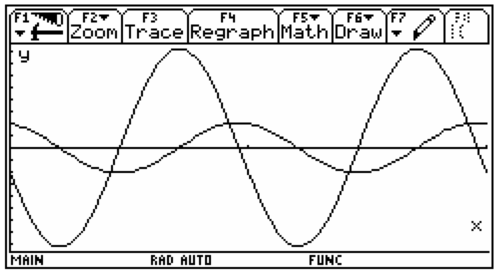
La gráfica de la Ecuación es:



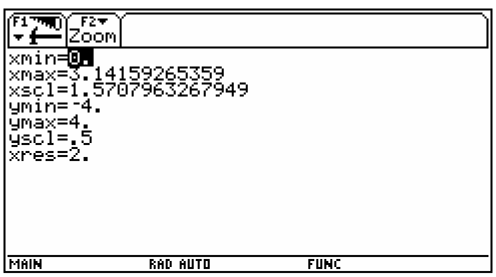
Si se quiere graficar la derivada podemos hacerlo directamente en el editor de Ecuaciones con ***d(***.



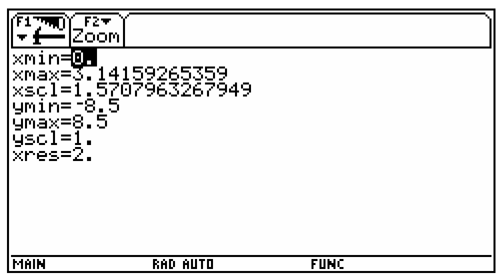
La gráfica de la solución y su derivada es:



Los valores que se utilizaron para la gráfica fueron.



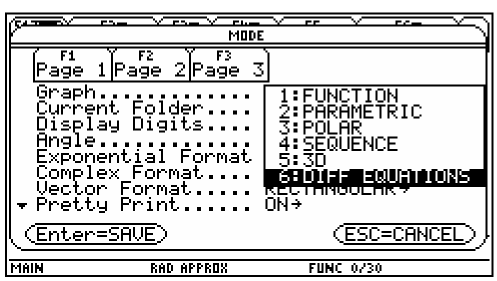
y



SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

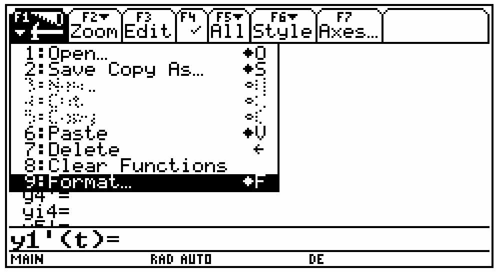
La solución de ecuaciones diferenciales de orden n, se puede efectuar mediante la opción de gráficas.

Seleccione con MODE la opción Graph y cambie a 6:DIFF EQUATION

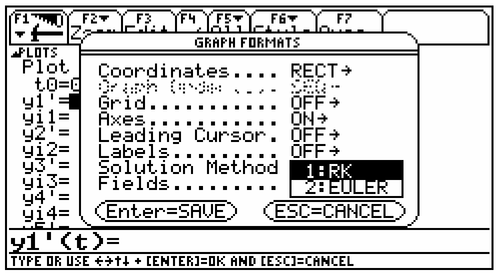


Presione ENTER dos veces.

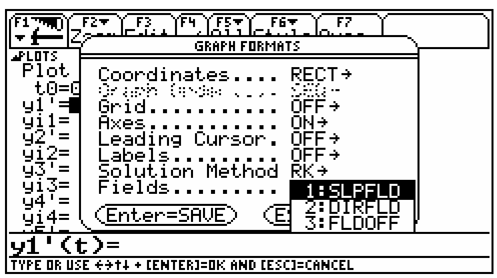
Con F1, 9: Format, se puede seleccionar opciones para visualizar la gráfica.



El método de solución (Runge-Kutta y Euler)



Visualización de la gráfica podemos ver el campo de pendientes, de direcciones o ninguno.



Nota: Fields *Especifica si debe dibujarse un campo para la ecuación diferencial.*

Orden de la ecuación que se representa gráficamente

Orden de la ecuación:	Ajustes de Fields válidos:
Primer orden	SLPFLD or FLDOFF
Segundo orden (sistema de dos ecuaciones de primer orden)	DIRFLD or FLDOFF
Tercer orden o superior (sistema de tres o más ecuaciones de primer orden)	FLDOFF

SLPFLD — Dibuja un campo de pendiente sólo para una ecuación de primer orden, con t en el eje **x** y la solución en el eje y.

DIRFLD — Dibuja un campo de dirección sólo para una ecuación de segundo orden (o sistema de dos ecuaciones de primer orden), cuyos ejes vienen determinados por los ajustes de los ejes personalizados.

FLDOFF — No muestra ningún campo. Es válido para ecuaciones de cualquier orden, pero debe utilizarse para las ecuaciones de tercer orden o de orden superior. Debe introducir el mismo número de condiciones iniciales para todas las ecuaciones de Y= Editor. (Texas Instruments: Manual de referencia:2003:53)

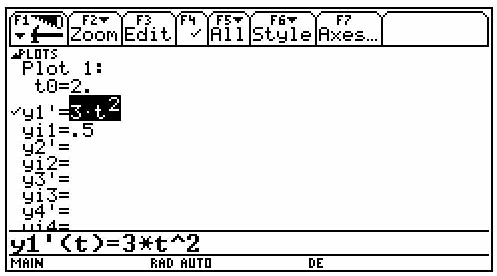
Resolver la ecuación $y'=3x^2$ sujeta a $y(2)=0.5$.

Seleccione el editor de ecuaciones presionando [♦][Y=] y escriba la ecuación en función de y1'(t), es decir

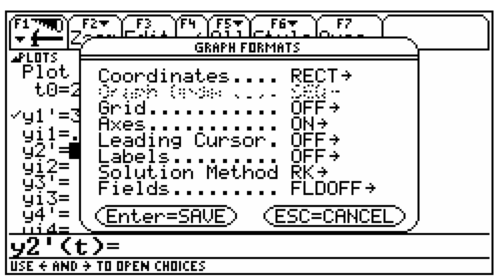
$$y1'(t)=3t^2$$

y las condiciones iniciales son:

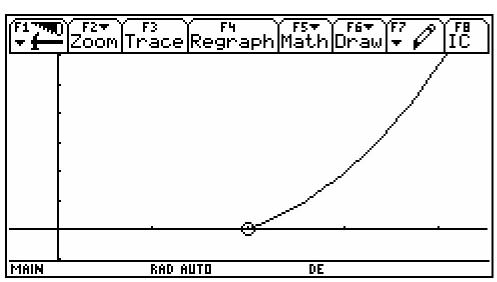
$$t0=2 \text{ y } yi1=.5$$



en [F1], seleccionamos 9: Format, escogemos 1:RK y en Fields escogemos 3:FLDOFF



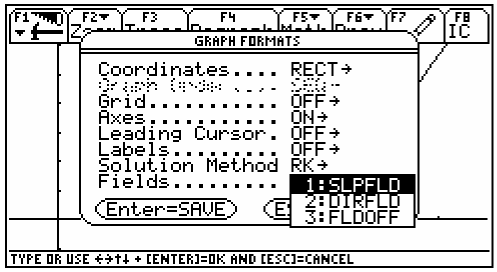
Presionamos [♦][GRAPH]



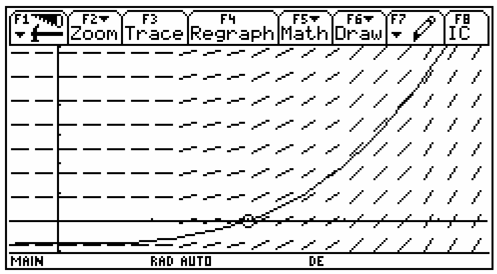
Fuente: Texas Instruments: Manual de referencia, Ecuaciones diferenciales:2003:53

que corresponde a la gráfica de la solución exacta con desolve.

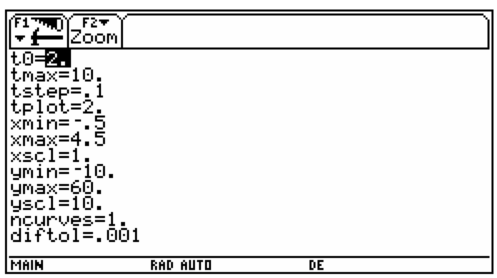
Si graficamos el campo de pendientes cambiamos en F1, seleccionamos 9: Format, en Fields escogemos 1:SLPFLD



Que nos muestra la solución y el campo de pendientes.



La ventana de visualización de gráficas la ajustamos a



Transformación de una ecuación diferencial de orden n a un sistema de n ecuaciones de primer orden.

Una ecuación diferencial de orden n se puede transformar a un sistema de ecuaciones de orden uno introduciendo tantas variables dependientes como sea el orden de la ecuación diferencial. (García, M. Prospero:1988:107)

Sea la ecuación diferencial de orden tres

$$x''' + 2x'' - x' + 3x = 2t$$

si x = y1

Fuente: García, M. Próspero, Ecuaciones diferenciales y en diferencias:1988:107

$$x' = y1'$$

haciendo

$$x' = y2$$

tenemos

$$x' = y1' = y2$$

derivando

$$x' = y2$$

$$y2' = y3$$

entonces

$$x'' = y2' = y3$$

tenemos

$$x''' = y3'$$

Como ya tenemos tres variables nuevas y1, y2, y3 no es necesario hacer

$$x''' = y3' = y4$$

Despejamos de la ecuación diferencial

$$x''' = -3x + x' - 2x'' + 2t$$

Haciendo el cambio de variables

$$y3' = 3y1 + y2 - 2y3 + 2t$$

Con lo que formamos el siguiente sistema de ecuaciones

$$y1' = y2$$
$$y2' = y3$$
$$y'3 = -3y1 + y2 - 2y3 + 2t$$

Ejemplo. Resolver la ecuación diferencial.

$$y'' + 16y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -2$$

transformamos la ecuación a un sistema de 2 ecuaciones de orden 1

$$y=y1$$

$$y'=y1'=y2 \quad (1)$$

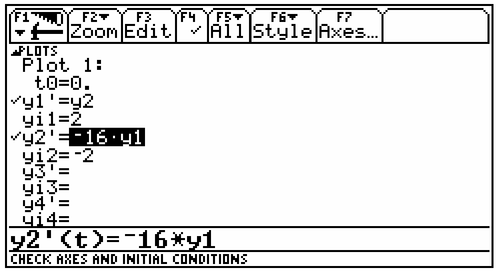
$$y''=y1''=y2'$$

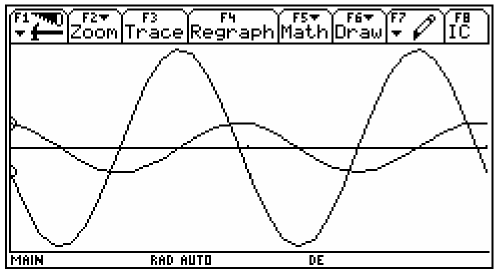
sustituyendo en la ecuación diferencial

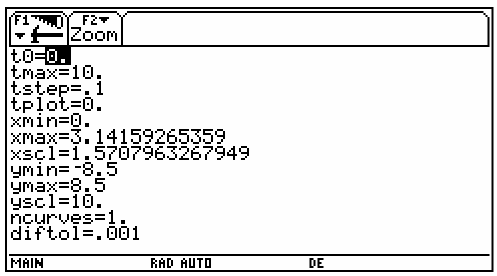
$$y2'+16y1=0$$

despejando y2’

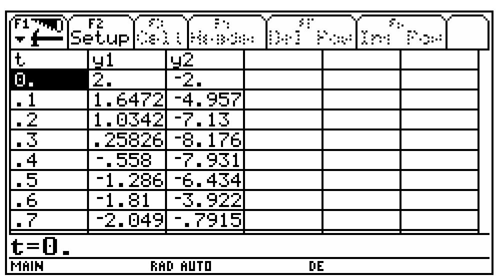
$$y'2=-16y1 \quad (2)$$





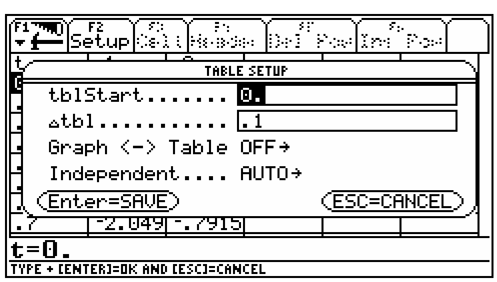


También podemos observar cuales son los valores numéricos de la gráfica [◆][TABLE]



t	y1	y2
0.	2.	-2.
.1	1.6472	-4.957
.2	1.0342	-7.13
.3	.25826	-8.176
.4	-.558	-7.931
.5	-1.286	-6.434
.6	-1.81	-3.922
.7	-2.049	-.7915

Para ajustar los valores de inicio de la tabla presione [◆][TblSet]



Resolver

$$x''+1.2x'+9x=9 \quad x(0)=0 \text{ y } x'(0)=0$$

Transformando la ecuación

$$x=y1$$

$$x'=y1'=y2$$

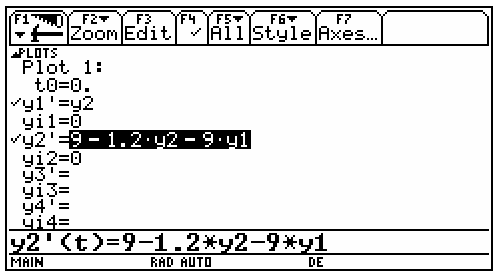
$$x''=y2''=y2'$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial

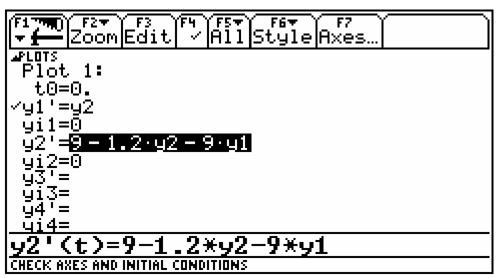
$$y2'+1.2y2+9y1=9$$

despejando y2'

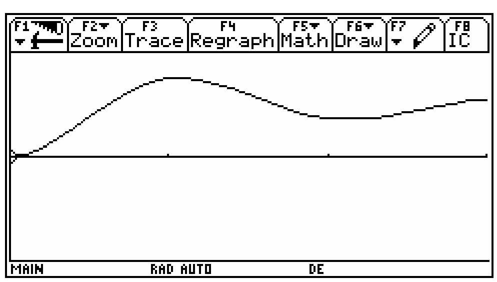
$$y2'=9-1.2y2-9y1$$



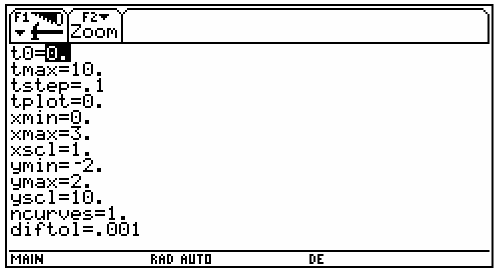
Para ver únicamente la solución de la ecuación desactive la ecuación de la derivada y2' presionando [F4], observe como el símbolo ✓ desaparece.



La gráfica de la solución

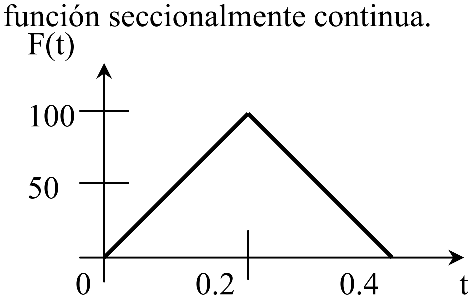


Los valores para la ventana de visualización son:



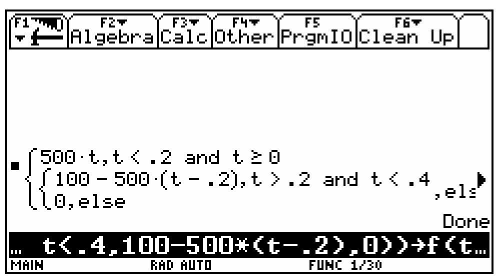
Una de las ventajas que podemos aprovechar es la de trabajar con funciones seccionalmente continuas, las que podemos definir en el editor de ecuaciones, o mediante la elaboración de una función, pero la forma más fácil es mediante la palabra when. (Texas Instruments: Manual de referencia:2003:116)

Ejemplo. La siguiente es una función seccionalmente continua.



Para definir una función podemos hacer lo siguiente.

When(t<.2 and t>=0,500*t,when(t<.4,100-500*(t-.2),0)) $\boxed{\text{STO}\blacktriangleright}$ f(t)



Resolver la ecuación $0.5x''+8\pi^2x=F(t)$. (Thomson, William T.:1981:115)

Transformando la ecuación

$$x=y1$$

$$x'=y1'=y2$$

$$x''=y2''=y2'$$

Fuentes: Texas Instruments: Manual de referencia: 2003:116
Thomson, William T.:Teoría de vibraciones:1981:115

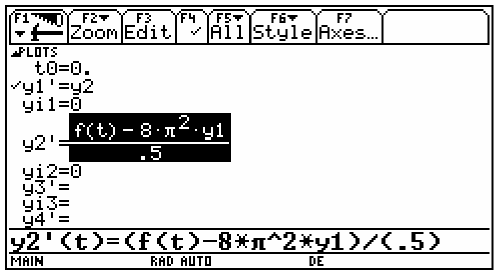
Sustituyendo en la ecuación diferencial

$$0.5y2'+8\pi^2 y1=f(t)$$

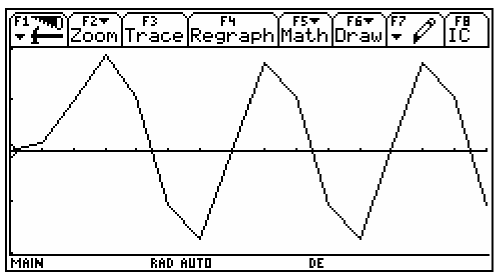
despejando y2’

$$y2'=\frac{f(t)-8\pi^2 y1}{0.5}$$

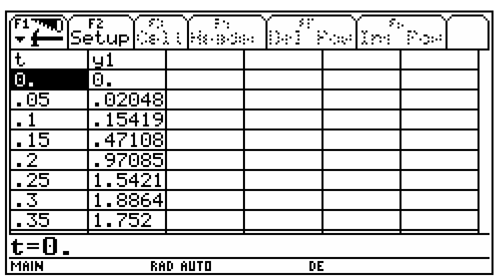
Escribimos en el editor de gráficas.



La solución es



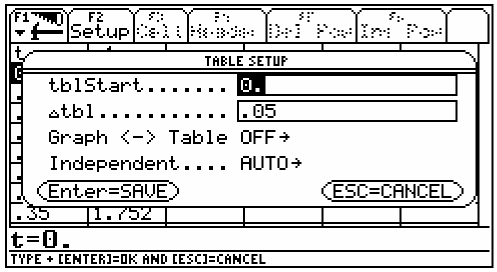
Podemos ver la solución en la tabla



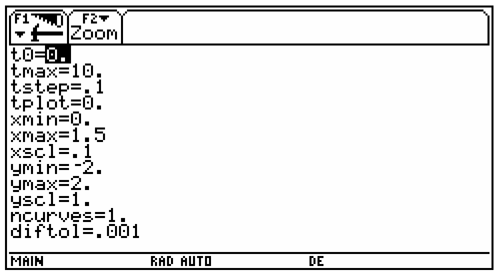
t	y1
0.	0.
.05	.02048
.1	.15419
.15	.47108
.2	.97085
.25	1.5421
.3	1.8864
.35	1.752

t=0.

Ajustamos el incremento de la tabla a 0.05



Los valores de la ventana de visualización son:

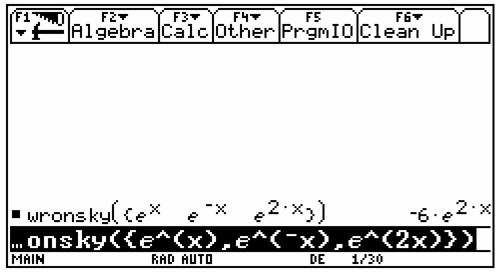


Cálculo del Wronskyano.

Para calcular el Wronskyano de un conjunto de soluciones se requiere crear la siguiente función en el editor de programas

```
Func(y)
Local orden,w,i,j
 dim(y)→orden
 newMat(orden,orden)→w
 For i,1,orden
  y[i]→w[1,i]
 EndFor
 For i,2,orden
  For j,1,orden
   d(y[j],x,i-1)→w[i,j]
  EndFor
 EndFor
 Return det(w)
EndFunc
```

Determinar si las soluciones e^x, e^{-x}, e^{2x} son linealmente independientes.



Nota: Las soluciones se deben introducir como un vector separadas por comas.