DM 1 : A rendre pour le mercredi 26 février

Exercice 1. Résoudre explicitement

$$\begin{cases} b\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + x\,\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) & = & 0 & \text{pour} \quad (t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R} \\ u(0,x) & = & u_0(x) & \text{pour} \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

quand

1. la fonction u_0 est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u_0(x) = e^{-x^2}$;

2. la fonction u_0 est la fonction indicatrice du segment $[0,1]$ de $\mathbb{R}$.

Dessiner les fonctions u_0 et $u(1,\cdot)$ dans ces deux exemples, ainsi que les caractéristiques dans le plan (t,x).

Exercice 2. Étant donnée une fonction u_0 sur $\mathbb{R}$ de classe C^1 on cherche les fonctions $u = u(t,x)$ de classe C^1 sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$ solution de

$$(*)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + u(t,x)\,\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) & = & 0 & \text{pour} \quad (t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R} \\ u(0,x) & = & u_0(x) & \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Soit u une solution du problème. On suppose que u est lipschitzienne en x, uniformément en $t \in [0,T]$ pour tout $T > 0$. Pour $(t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}$ on note $X(\cdot;t,x)$ la caractéristique issue de (t,x) générée par u, c'est-à-dire la solution de

$$\begin{cases} X'(s) & = & u(s,X(s)) & \text{pour} \quad s \geq 0 \\ X(t) & = & x. \end{cases} \qquad (C)$$

1.1. Vérifier que pour tout (t,x) le système (C) a bien une unique solution globale.

1.2. Démontrer que

$$u(s,X(s;t,x)) = u(t,x)$$

pour tous t,x,s puis que pour tous t,x

$$u(t,x+t\,u_0(x)) = u_0(x).$$

2. Soit u_0 une fonction de classe $C^1(\mathbb{R})$.

2.1. On suppose que $u_0' \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, montrer que la relation

$$u(t,x+t\,u_0(x)) = u_0(x) \qquad \text{pour} \quad (t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}$$

définit bien une fonction $u = u(t,x)$ sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$. En admettant que cette fonction u est de classe C^1, démontrer que c'est une solution de (*).

2.2. Et si on suppose que u_0 est à support compact dans $\mathbb{R}$? Montrer qu'on peut tout de même définir la solution $u(t,x)$ sur $[0,t^*[\times\mathbb{R}$ pour un certain t^* que l'on exprimera en fonction de $\inf_{\mathbb{R}} u_0'$.

2.3. Soit x un réel tel que $u_0(x) = 0$. Montrer que $u(t,x) = 0$ pour tout t. En déduire que si u_0 est à support compact dans $\mathbb{R}$, alors pour tout t où la solution est bien définie

$$\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,dx.$$