

## TD : Analyse complexe

### Légende :

- $D(a, r)$  : disque centré en  $a$  de rayon  $r$ .
- $\mathcal{H}(\Omega)$  : fonctions holomorphes sur  $\Omega$ .
- $\mathcal{M}(\Omega)$  : fonctions méromorphes sur  $\Omega$ .
- $\star$  : exercices classiques, importants ou pouvant être adaptés en développement.

## 1 Séries entières

### Exercice 1.

Soit  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une fonction entière telle que  $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ . Montrer que tous les  $a_n$  sont réels.

### Exercice 2 (Un exemple de coupure [4]).

On considère la série entière  $S(z) = \sum_{n \geq 0} z^{2^n}$ .

1. Montrer que  $S$  a pour rayon de convergence  $R = 1$  et que  $S$  n'est pas bornée au voisinage de 1.
2. En remarquant que  $S$  vérifie  $S(z^2) = -z + S(z)$  pour tout  $z \in D(0, 1)$ , montrer que, s'il existe  $a \in \mathbb{C}$ ,  $|a| = 1$  et un voisinage  $V$  de  $a$  tels que  $S$  soit bornée sur  $V \cap D(0, 1)$ , alors il existe également un voisinage  $W$  de  $a^2$  tel que  $S$  soit bornée sur  $W \cap D(0, 1)$ .
3. Montrer que s'il existe  $a \in \mathbb{C}$ ,  $|a| = 1$  et un voisinage  $V$  de  $a$  tels que  $S$  soit bornée sur  $V \cap D(0, 1)$ , alors il existe  $b \in V$  et  $p \in \mathbb{N}$  tels que  $b^{2^p} = 1$  et qu'alors il existe un voisinage  $V_p$  de 1 tel que  $S$  soit bornée sur  $V_p \cap D(0, 1)$ .
4. En déduire que  $S$  n'est bornée au voisinage d'aucun point du cercle unité.

### Exercice 3 ( $\star$ Théorème de la coupure de Steinhaus [2]).

Soit  $f$  une fonction développable en série entière de rayon de convergence 1 et  $|z| = 1$ , on dit que  $z$  est un point régulier s'il existe un voisinage  $V$  de  $z$  dans  $\mathbb{C}$  et une fonction  $g \in \mathcal{H}(V)$  telle que  $f = g$  sur  $V \cap D(0, 1)$ . On dit que  $z$  est un point singulier sinon. On dit que  $\partial D(0, 1)$  est une coupure pour  $f$  si tous ses points sont singuliers. On cherche à montrer le résultat suivant :

**Théorème.** Soit  $(\sum a_n z^n)$  une série entière de rayon de convergence 1 et  $(X_n)_n$  une suite de variable aléatoire i.i.d. de loi uniforme sur  $[0, 1]$  définie sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Alors  $\partial D(0, 1)$  est presque-sûrement une coupure pour la série  $(\sum a_n e^{2i\pi X_n} z^n)$ .

1. Pour  $z \in D(0, 1)$ , justifier que la série  $(\sum a_n e^{2i\pi X_n} z^n)$  définit bien une variable aléatoire, notée  $f(z)$ .
2. Pour  $z \in D(0, 1)$ , justifier que

$$E(z) = \left\{ \omega \in \Omega, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{1 - |z|} \right\}$$

est un événement puis qu'on a

$$\{\Gamma_{reg} \neq \emptyset\} = \bigcup_{r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}} \bigcup_{\theta \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}} E(re^{2i\pi\theta})$$

où  $\Gamma_{reg}$  est l'ensemble des points réguliers pour la série  $(\sum a_n e^{2i\pi X_n} z^n)$ .

3. Montrer que pour tout  $|z| = 1$ ,  $E(z)$  est dans la tribu asymptotique des  $(X_n)_n$ .
4. Montrer que  $\mathbb{P}(E(z))$  ne dépend pas de  $z$ .
5. Conclure que  $\mathbb{P}(E(z)) = 0$  pour tout  $z$  et donc que  $\Gamma_{reg} = \emptyset$  presque-sûrement.

## 2 Formule de Cauchy et résidus

### Exercice 4.

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha| \neq 1$ . En utilisant la fonction  $z \mapsto \frac{1}{(z-\alpha)(z-\alpha^{-1})}$ , calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2}.$$

### Exercice 5.

Pour  $n \geq 2$  entier, calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}.$$

### Exercice 6 (Transformée de Fourier et indicatrice [3]).

On cherche à calculer  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(t)}{t} e^{ixt} dt$ . Soit  $A > 1$  et  $\gamma_A$  le chemin  $[-A, -1] \cup \mathcal{C}_- \cup [1, A]$  où  $\mathcal{C}_-$  est le demi-cercle unité inférieur, parcouru dans le sens trigo.

1. Justifier que

$$\int_{-A}^A \frac{\sin(t)}{t} e^{ixt} dt = \varphi_A(x+1) - \varphi_A(x-1)$$

où

$$\varphi_A(x) = \frac{1}{2i} \int_{\gamma_A} \frac{e^{ixz}}{z} dz.$$

2. En complétant  $\gamma_A$  en un lacet de deux façons différentes, montrer que pour  $x \neq 0$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \varphi_A(x) = \pi \mathbf{1}_{x>0}.$$

3. Conclure.

### Exercice 7 (★ Séries de Laurent [3]).

Pour  $0 < r_1 < r_2$  on note  $A$  l'anneau  $\{z \in \mathbb{C}, r_1 < |z| < r_2\}$ .

1. Soit  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, on définit les lacets paramétrés par  $t \in [0, 2\pi]$

$$\gamma_1(t) = (r_1 + \varepsilon)e^{-it} \quad \text{et} \quad \gamma_2(t) = (r_2 - \varepsilon)e^{it}.$$

Montrer que pour  $f \in \mathcal{H}(A)$ , la formule de Cauchy suivante est valide

$$\forall z \in \mathbb{C}, r_1 + \varepsilon < |z| < r_2 - \varepsilon, f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

2. Montrer que pour toute fonction  $f \in \mathcal{H}(A)$ , il existe des fonctions  $f_1, f_2$  telles que  $f = f_1 + f_2$  où  $f_1$  est holomorphe en dehors de  $\overline{D}(0, r_1)$  et  $f_2$  est holomorphe sur  $D(0, r_2)$ . Justifier que cette décomposition est unique si l'on impose  $|f_1(z)| \rightarrow 0$  pour  $|z| \rightarrow +\infty$ .
3. Montrer qu'à toute fonction  $f \in \mathcal{H}(A)$  on peut associer sa *série de Laurent*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$$

qui converge vers  $f$  dans  $A$ . Montrer qu'une telle série est unique et qu'elle converge uniformément sur les compacts de  $A$ .

4. Si  $f$  est bornée sur  $A$ , montrer que  $f_1$  et  $f_2$  le sont également.
5. On considère la fonction méromorphe

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}.$$

Dans quels domaines peut-on développer  $f$  en série de Laurent ? Donner le développement dans chacun des cas.

**Exercice 8** (Séries de Fourier [3]).

Pour  $a < b$  on considère la bande horizontale  $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, a < \text{Im}(z) < b\}$ . Soit  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ , on suppose que  $f$  est 1-périodique, i.e.  $f(z+1) = f(z)$  pour tout  $z \in \Omega$ .

1. Montrer que  $f$  possède dans  $\Omega$  un développement en série de Fourier

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi n z}$$

où la convergence est uniforme dans toute bande  $\{z \in \mathbb{C}, a + \varepsilon < \text{Im}(z) < b - \varepsilon\}$ ,  $\varepsilon > 0$ .

2. Donner une formule intégrale pour les coefficients  $c_n$ .

**Exercice 9** (Transformée de Laplace).

Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ ,  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$  et  $\|\cdot\|$  une norme d'algèbre unitaire sur  $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ .

1. Montrer que pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Re}(\lambda) > \|A\|$ , la fonction

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \\ t \mapsto e^{-\lambda t} e^{tA} \end{array} \right|$$

est intégrable et calculer son intégrale.

2. Montrer que

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \\ \lambda \mapsto (\lambda I_d - A)^{-1} \end{array} \right|$$

est méromorphe avec pour ensemble de pôles le spectre de  $A$ .

3. Montrer que pour  $|\lambda| > \|A\|$ ,  $(\lambda I_d - A)^{-1}$  se développe en puissances de  $\lambda^{-1}$ .
4. Soit  $r > 0$  et  $\Gamma$  le cercle centré en 0 de rayon  $r$  parcouru dans le sens trigo. Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C}$

$$e^{zA} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} e^{z\lambda} (\lambda I_d - A)^{-1} d\lambda.$$

### 3 Topologie

**Exercice 10** (★ Théorème de Weierstrass).

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $(f_n)_n$  une suite de  $\mathcal{H}(\Omega)$ . On suppose que  $(f_n(z))_n$  converge pour tout  $z \in \Omega$ .

1. Montrer que la convergence est uniforme sur tout compact de  $\Omega$  et que la limite définit une fonction holomorphe sur  $\Omega$ .
2. En déduire que l'espace  $\mathcal{H}(\Omega)$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact est un espace complet.

**Exercice 11** (Théorème de Hurwitz).

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$  et  $(f_n)_n$  une suite de  $\mathcal{H}(\Omega)$  qui converge uniformément sur tout compact de  $\Omega$  vers une fonction  $f$ . On suppose que chacune des fonctions  $f_n$  est injective, montrer que  $f$  est soit injective soit constante.

**Exercice 12.**

Soit  $\Omega \subset D(0, 1)$  un ouvert connexe. On note

$$\mathcal{B}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow D(0, 1), f \in \mathcal{H}(\Omega), f \text{ injective}, f(0) = 0 \text{ et } |f'(0)| \geq 1\}.$$

Montrer que  $\mathcal{B}(\Omega)$  est compact dans  $\mathcal{H}(\Omega)$ .

**Exercice 13** (Partie bornées [4]).

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $E$  une partie de  $\mathcal{H}(\Omega)$ . On dit que  $E$  est une partie bornée si pour tout compact  $K \subset E$

$$\sup_{f \in E} \|f\|_K < +\infty$$

où  $\|\cdot\|_K$  désigne la norme uniforme sur  $K$ .

1. Montrer qu'une partie  $E$  est bornée si et seulement si pour toutes suites  $(f_n)_n \subset E$  et  $(\alpha_n)_n \subset \mathbb{C}$  telle que  $\alpha_n \rightarrow 0$ , on a  $\alpha_n f_n \rightarrow 0$  uniformément sur tout compact de  $\Omega$ .
2. Montrer que toute partie bornée  $E$  de  $\mathcal{H}(\Omega)$  est équicontinue.

**Exercice 14** (★ Théorème de Montel [4]).

On fixe  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ .

1. Montrer que si  $E$  est une partie relativement compacte de  $\mathcal{H}(\Omega)$ , alors  $E$  est bornée.
2. Montrer que si  $E$  est bornée, alors  $E$  est relativement compacte dans  $\mathcal{H}(\Omega)$ .
3. Soit  $(f_n)_n$  une suite de  $\mathcal{H}(D(0,1))$ , bornées par 1. On suppose qu'il existe une suite de complexes distincts  $(\alpha_k)_k \subset D(0,1)$  telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, f_n(\alpha_k) \rightarrow 0.$$

Montrer que  $(f_n)_n$  converge vers 0, uniformément sur tout compact de  $D(0,1)$ .

**Exercice 15.**

On note  $D = D(0,1)$  et  $\overline{D} = \overline{D}(0,1)$ . Soit l'espace

$$A(D) = \{f \in C^0(\overline{D}), f|_D \in \mathcal{H}(D)\}$$

muni de la norme de la convergence uniforme sur  $\overline{D}$ .

1. Montrer que  $A(D)$  est une algèbre de Banach. Montrer que si  $f, g \in A(D)$  vérifient  $fg = 0$  sur  $D$ , alors  $f$  ou  $g$  est identiquement nulle sur  $\overline{D}$ .
2. Montrer que si  $f \in A(D)$  et  $w \in D$ , on a

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-w} dz.$$

3. Montrer que si  $f \in A(D)$  s'annule en tout point du cercle  $\partial D$ ,  $f$  est identiquement nulle sur  $\overline{D}$ .
4. Soit  $f \in A(D)$  et  $W$  un ouvert non vide de  $\partial D$  tel que  $f$  s'annule en tout point de  $W$ . Pour  $z \in \partial D$ , on note  $W_z = \{w, \frac{w}{z} \in W\}$ . Montrer qu'il existe des points  $z_0, \dots, z_m \in \partial D$  tels que

$$\partial D = \bigcup_{p=0}^m W_{z_p}.$$

5. On pose

$$g(w) = \prod_{p=0}^m f(z_p w).$$

Montrer que, pour tout  $w \in \partial D$ , il existe  $p \in \llbracket 0, m \rrbracket$  tel que  $z_p w \in W$ . En déduire que  $g = 0$ . Conclure qu'alors  $f = 0$ .

**Exercice 16** (★ Séries de fonctions méromorphes [4]).

Pour un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  et  $(f_n)_n$  une suite de  $\mathcal{M}(\Omega)$ , on dit que la série  $(\sum_n f_n)$  converge normalement sur tout compact de  $\Omega$  si, pour tout compact  $K$  de  $\Omega$ , il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que les  $(f_n)_{n \geq m}$  n'ont pas de pôles dans  $K$  et la série  $(\sum_{n \geq m} f_n)$  converge normalement sur  $K$ .

1. Montrer que si une série de fonctions méromorphes  $(\sum_n f_n)$  converge normalement sur tout compact de  $\Omega$ , alors la somme  $S$  est une fonction méromorphe sur  $\Omega$  dont les pôles sont parmi ceux des fonctions  $f_n$ . Montrer qu'on a également convergence sur tout compact de la série  $(\sum_n f'_n)$  vers  $S'$ .
2. Montrer que la série  $\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}\right)$  converge normalement sur tout compact de  $\mathbb{C}$  et que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2}$$

## 4 Principe du maximum

**Exercice 17** ( $\star$  Principes du maximum et du minimum [3]).

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$  et  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Soit également  $a \in \Omega$  et  $r > 0$  tels que  $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$ .

1. Montrer que

$$|f(a)| \leq \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(a + re^{i\theta})|.$$

2. Si de plus  $f$  ne s'annule pas dans  $D(a, r)$ , montrer que

$$|f(a)| \geq \min_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(a + re^{i\theta})|.$$

**Exercice 18** (Théorème de d'Alembert Gauss).

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  et  $P(z) = a_0 + \dots + a_n z^n$ . Montrer que  $P$  a exactement  $n$  racines dans  $\mathbb{C}$  (comptées avec multiplicité).

**Exercice 19.**

Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  entière et  $A, B \in \mathbb{R}_+$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $|f(z)| \leq A + B|z|^k$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , montrer que  $f$  est un polynôme.

**Exercice 20** ( $\star$  Théorème d'inversion locale holomorphe [3]).

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$ ,  $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$  et  $z_0 \in \Omega$  tel que  $\varphi'(z_0) \neq 0$ .

1. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $z_0$  tel que si  $z_1, z_2 \in V$  alors

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \geq \frac{1}{2} |\varphi'(z_0)| |z_1 - z_2|.$$

En déduire que  $\varphi$  est injective sur  $V$ .

2. Soient  $a \in \Omega$  et  $r > 0$  tels que  $\overline{D}(a, r) \subset V$ . Montrer qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$|\varphi(a + re^{i\theta}) - \varphi(a)| > c, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

En déduire que  $W = \varphi(V)$  est un ouvert.

3. Montrer que  $\psi : W \rightarrow V$  définie par  $\psi(\varphi(z)) = z$  est holomorphe sur  $W$ .

**Exercice 21** (Théorème des trois cercles de Hadamard [4]).

Soient  $0 < r < R$  et  $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, r < |z| < R\}$ . Pour  $r < t < R$  et  $f \in \mathcal{H}(\Delta)$  non identiquement nulle on note  $M(t) = \sup_{|z|=t} |f(z)|$ .

1. Justifier que  $0 < M(t) < +\infty$  pour tout  $r < t < R$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , montrer que pour tous  $r < t_1 < t < t_2 < R$  on a

$$t^{-\alpha} M(t) \leq \max(t_1^{-\alpha} M(t_1), t_2^{-\alpha} M(t_2)).$$

2. Soit  $0 < \gamma < 1$ , montrer qu'on a

$$M(t_1^\gamma t_2^{1-\gamma}) \leq M(t_1)^\alpha M(t_2)^{1-\gamma}.$$

**Exercice 22** (★ Théorème de Riesz Thorin [1]).

Pour  $a, b, c \in \mathbb{R}$  on pose

$$\Delta_{a,b} = \{r \in \mathbb{C}, a < \operatorname{Re}(z) < b\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_c = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) = c\}$$

1. Donner un exemple de fonction complexe  $f$  non bornée, continue sur  $\overline{\Delta_{0,1}}$ , holomorphe sur  $\Delta_{0,1}$  telle que  $f$  soit bornée sur  $\mathcal{D}_0$  et  $\mathcal{D}_1$ .
2. Montrer le théorème des trois droites : si  $f$  est une fonction complexe continue et bornée sur  $\overline{\Delta_{0,1}}$ , holomorphe sur  $\Delta_{0,1}$ , alors pour tout  $\theta \in [0, 1]$  on a

$$\sup_{\mathcal{D}_\theta} |f| \leq \left( \sup_{\mathcal{D}_0} |f| \right)^{1-\theta} \left( \sup_{\mathcal{D}_1} |f| \right)^\theta.$$

3. Soient  $(E, \mu)$  un espace mesuré  $\sigma$ -fini. Soit  $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, +\infty]$  et une application linéaire

$$T : L^{p_0} + L^{p_1} \rightarrow L^{q_0} + L^{q_1}$$

vérifiant  $T(L^{p_i}) \subset T(L^{q_i})$ ,  $i \in \{0, 1\}$ . Pour  $\theta \in [0, 1]$  on définit également

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

- (a) Rappeler pourquoi  $L^{p_\theta} \subset L^{p_0} + L^{p_1}$ .
- (b) Soit  $g, h$  des fonctions simples mesurables sur  $E$  de support de mesure finie. Montrer qu'il existe une fonction complexe  $f$  continue et bornée sur  $\overline{\Delta_{0,1}}$ , holomorphe sur  $\Delta_{0,1}$ , telle que

$$f(\theta) = \int_E T(g)h \, d\mu$$

et

$$\sup_{\mathcal{D}_0} |f| \leq \|T\|_{L^{p_0} \rightarrow L^{q_0}} \|g\|_{L^{p_0}}^{\frac{p_\theta}{p_0}} \|h\|_{L^{q_\theta}}^{\frac{q'_\theta}{q'_0}} \quad \text{et} \quad \sup_{\mathcal{D}_1} |f| \leq \|T\|_{L^{p_1} \rightarrow L^{q_1}} \|g\|_{L^{p_\theta}}^{\frac{p_\theta}{p_1}} \|h\|_{L^{q'_\theta}}^{\frac{q'_\theta}{q'_1}}$$

où pour  $r \geq 1$ ,  $\frac{1}{r'} + \frac{1}{r} = 1$ .

- (c) En déduire que  $T(L^{p_\theta}) \subset L^{q_\theta}$  et

$$\|T\|_{L^{p_\theta} \rightarrow L^{q_\theta}} \leq (\|T\|_{L^{p_0} \rightarrow L^{q_0}})^{1-\theta} (\|T\|_{L^{p_1} \rightarrow L^{q_1}})^\theta$$

4. Redémontrer les inégalités de Young en utilisant ce résultat.

## Références

- [1] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces*.
- [2] H. Queffélec, C. Zuily, *Analyse pour l'agrégation*.
- [3] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*.
- [4] J. Saint Raymond, *Topologie, calcul différentiel et variable complexe*.