DM 1 : A rendre pour le mercredi 25 février 2026

Exercice 1. Pour $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, on appelle divergence de u en $x \in \mathbb{R}^n$ le nombre

$$\operatorname{div} u(x) = \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} u(x).$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, on note $t \mapsto \Phi_t(x)$ la solution de l'équation différentielle associée à A :

$$y' = Ay\,,\ y(0) = x.$$

On note m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

1. Justifier que l'équation ci-dessus admet bien une unique solution globale. On pose $u : x \mapsto Ax$, calculer $\operatorname{div} u(x)$, $\Phi_t(x)$ et $m(\Phi_t(K))$ où K est un compact de $\mathbb{R}^n$.

2. On fixe $n = 2$ et $K = [1, 2] \times [1, 2]$, dans chacun des cas suivants pour A, expliciter $\operatorname{div} u(x)$, $\Phi_t(x)$ et $m(\Phi_t(K))$ et dessiner $\Phi_t(K)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit a un réel, ε un réel positif et $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et de classe C^1. On considère le problème

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon\, u^2 & = & 0, & t \geq 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) & = & u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{array} \right. \tag{1}$$

portant sur la fonction $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (t, x) \mapsto u(t, x)$.

1. Dans cette question **uniquement** on suppose que $\varepsilon = 0$. Montrer que le problème (1) admet une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et en donner la forme explicite.

On suppose dorénavant que $\varepsilon > 0$.

2. Dans cette question on suppose que $u_0(x) \leq 0$ pour tout réel x. Montrer que le problème (1) admet une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et en donner la forme explicite.

3. Dans cette question on suppose que $u_0(x) \geq 0$ pour tout réel x. Montrer qu'il existe un réel $T > 0$, que l'on estimera, tel que le problème (1) admette une unique solution $u \in C^1([0, T[\times \mathbb{R})$.

4. Reprendre les questions 2 et 3 dans le cas où a n'est plus une constante mais une fonction $a \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, lipschitzienne en x, uniformément en t.