

FEUILLE D'EXERCICE 1

Exercice 1. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. On note $\mathbb{R}^+ = [0, \infty[$. Trouver toutes les solutions dans $u \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + c \partial_x u = u, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

Exercice 2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ que l'on suppose diagonalisable dans la base $(R_i)_{1 \leq i \leq n}$ de valeurs propres $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$. Soit $U_0 \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$. Trouver toutes les solutions dans $U \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t U + A \partial_x U = 0, \\ U(0, x) = U_0(x), \end{cases}$$

en fonction des R_i , des λ_i et de U_0 .

Exercice 3. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + (x^2 - 1) \partial_x u = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times]-1, 1[, \\ u(0, x) = u_0(x) \in C^1(]-1, 1[; \mathbb{R}). \end{cases} \quad (1)$$

1. Calculer l'équation des caractéristiques.
2. Donner explicitement l'unique solution du problème (1) dans $C^1(\mathbb{R}^+ \times]-1, 1[)$.
3. Que se passe-t-il si on ne se restreint pas à $x \in]-1, 1[$?

Exercice 4. Soit $f^0 : (x, v) \mapsto f^0(x, v)$ une fonction de $C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ positive et à support compact. On considère l'équation de transport suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f &= 0 \\ f(0, x, v) &= f^0(x, v) \geq 0 \end{aligned}$$

où $\nabla_x f = (\partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f, \dots, \partial_{x_n} f)^T$.

1. Donner l'unique solution de cette équation de transport dans la classe $C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ en fonction de f^0 .
2. Montrer que $f \geq 0$ et que l'intégrale de f sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est conservée, i.e. :

$$\int \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(t, x, v) dx dv = \int \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f^0(x, v) dx dv, \quad \forall t \geq 0.$$

3. On note $\rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x, v) dv$. Montrer que

$$\forall t > 0, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \rho(t, x) \leq \frac{C_0}{t^n}$$

et que $C_0 = \int_z \sup_w f^0(z, w) dz$ convient.

4. Qu'est-ce que cela signifie qualitativement sur la solution ?

Exercice 5. On considère l'équation des ondes (à vitesse c) :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2)$$

où f et g sont respectivement $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}$. Démontrer que le problème (2) possède une unique solution $u \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ donnée par

$$u(t, x) = U_1(x - ct) + U_2(x + ct),$$

où

$$U_1(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(y) dy, \quad U_2(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(y) dy.$$

Exercice 6. On considère le problème

$$\begin{cases} \partial_t u - 7 \partial_x u = 0, & t \geq 0, x \leq 0, \\ u(0, x) = x + x^3, & x \leq 0, \\ u(t, 0) = 7t, & t \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Trouver une solution $u(t, x)$ de (3) qui est de classe C^1 . Que vaut $u(5, -3)$ et $u(1, -10)$?

Exercice 7. Soit $g \in C^1(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$. Trouver une solution de classe C^1 du problème suivant :

$$\begin{cases} x \partial_y u - y \partial_x u = u, & x \geq 0, y \geq 0, \\ u(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

Exercice 8. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, on note

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}, \quad \partial B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| = r\}.$$

Démontrer que pour $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on a l'égalité

$$\frac{d}{dr} \left(\int_{B(x, r)} f(y) dy \right) = \int_{\partial B(x, r)} f(y) dS(y).$$

Exercice 9. Soit $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Démontrer que

$$u(t, x) = \frac{t}{4\pi} \int_{|y|=1} g(x + ty) dS(y), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3$$

est une solution de

$$(\partial_t^2 - \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2 - \partial_{x_3}^2)u = 0, \quad u(0, x) = 0, \quad \partial_t u(0, x) = g(x).$$

Exercice 10. Soit $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$ et $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Démontrer que

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{4\pi} \int_{|y|=1} f(x + ty) dS(y) \right) + \frac{t}{4\pi} \int_{|y|=1} g(x + ty) dS(y), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3$$

est une solution de

$$(\partial_t^2 - \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2 - \partial_{x_3}^2)u = 0, \quad u(0, x) = f(x), \quad \partial_t u(0, x) = g(x).$$

Démontrer que si f et g sont à support dans $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\}$, $R > 0$ alors $u(t, x)$ est à support dans

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : t - R \leq |x| < t + R\}, \quad t \geq 0.$$

En déduire que si f et g sont à support compact alors pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, il existe t_0 tel que $u(t, x) = 0$ pour $t \geq t_0$.

Exercice 11. Soit $u \in C^2([0, T] \times \mathbb{R}^n)$, $T > 0$ une solution de

$$(\partial_t^2 - \Delta)u = 0, \tag{4}$$

où Δ est l'opérateur de Laplace sur \mathbb{R}^n . Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in]0, T]$. Supposons que

$$u(0, x) = \partial_t u(0, x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } |x - x_0| \leq t_0.$$

Démontrer que $u(t, x) = 0$ pour t, x tels que

$$0 \leq t \leq t_0, \quad |x - x_0| \leq t_0 - t.$$

En déduire que si $u \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ est une solution de (4) telle que $u(0, x)$ et $\partial_t u(0, x)$ sont à support dans $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\}$, $R > 0$ alors $u(t, x)$ est à support dans

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < t + R\}, \quad t \geq 0.$$

Exercice 12. Pour $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ on pose

$$u(t, x) = \frac{t}{4\pi} \int_{|y|=1} g(x + ty) dS(y), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3.$$

Démontrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout g satisfaisant

$$g \in L^1(\mathbb{R}^3), \quad \nabla g \in L^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$$

on a l'inégalité

$$|u(t, x)| \leq \frac{C}{1+t} (\|g\|_{L^1} + \|\nabla g\|_{L^1}), \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Exercice 13. Démontrer que pour tout $R > 0$ il existe $C > 0$ tel que pour tout $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ à support dans $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\}$, on a l'inégalité

$$\left| \frac{t}{4\pi} \int_{|y|=1} g(x + ty) dS(y) \right| \leq \frac{C}{1+t} \sup_{|y| \leq R} |g(y)|, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^3.$$