

TD2 : LOIS DE CONSERVATION SCALAIRE

EXERCICE 1 (*Rankine-Hugoniot*). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ strictement convexe. On s'intéresse au problème :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x (f(u)) &= 0, & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= u^- \mathbf{1}_{x < 0} + u^+ \mathbf{1}_{x > 0}, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (\text{C})$$

où $u^- > u^+ \in \mathbb{R}$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons :

$$\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, U(t, x) = \begin{cases} u^- & \text{si } x < \lambda t \\ u^+ & \text{si } x > \lambda t \end{cases}.$$

Montrer que si U est solution faible de (C), alors on a :

$$\lambda(u^+ - u^-) = f(u^+) - f(u^-). \quad (\text{Rankine-Hugoniot})$$

2. En déduire une solution faible de (C).

EXERCICE 2 (*Non-unicité des solutions faibles*). On considère l'équation de Burgers partant de 0 :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) &= 0, & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (\text{B}_0)$$

Pour $\alpha > 0$ on définit

$$u_\alpha : (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mapsto -2\alpha \mathbf{1}_{\{-\alpha t < x < 0\}} + 2\alpha \mathbf{1}_{\{0 \leq x < \alpha t\}}.$$

Montrer que pour chaque $\alpha > 0$, u_α est une solution faible non-triviale de (B₀).

EXERCICE 3 (*Burgers avec un choc*). On considère l'équation de Burgers suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) &= 0, & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (\text{B})$$

munie de la condition initiale suivante :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{x}{\alpha} & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha \\ 0 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$.

1. Décrire les caractéristiques pour l'équation de Burgers.
2. Déterminer l'unique solution continue et \mathcal{C}^1 par morceaux **locale** de (B). On pourra calculer son temps maximal d'existence T^* en premier lieu.

- Donner une solution faible **globale** qui prolonge la solution donnée ci-dessus.

EXERCICE 4 (*Solutions faibles et limites de solutions classiques*). On reconsidère le système (B). Ici u_0 est la fonction donnée par :

$$u_0(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

- Décrire les caractéristiques pour l'équation de Burgers.
- Quel problème remarque-t-on ? À votre avis, y a-t-il unicité de la solution faible pour la condition initiale u_0 ?
- Montrer que $u(t, x) = u_0(x)$ est une solution faible de (B).
- Pour $\varepsilon > 0$, déterminer la solution classique u^ε de l'équation de Burgers avec la condition initiale :

$$u_0^\varepsilon(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -\varepsilon \\ \frac{x}{\varepsilon} & \text{si } -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \\ 1 & \text{si } x > \varepsilon. \end{cases}$$

- Déterminer $\tilde{u} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u^\varepsilon$.
- Est-ce que \tilde{u} est une solution faible de (B) ?

EXERCICE 5 (Onde de détente). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ strictement convexe. On s'intéresse au problème :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x (f(u)) &= 0, & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= \mathbb{1}_{x>0}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (\text{D})$$

On va chercher une solution faible $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ sous la forme $u(x, t) = v(x/t)$.

- Montrer qu'en dehors des points critiques de v , on a :

$$f'(u(t, x)) = \frac{x}{t}. \quad (1)$$

- En déduire une solution de (D).