Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I - Agrupamento II — 1ª Prova de Avaliação Discreta

4 de novembro de 2015

Duração: **2h**

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

1. Sejam a e b dois parâmetros reais fixos e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} a + bx & se \quad x \leq 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) & se \quad x > 0. \end{cases}$$

[15pts] (a) Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 1$.

[20pts] (b) Determine a e b de forma a que f seja contínua e diferenciável em $x = 0$.

2. Considere a função g definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{x}{1+x^2}$.

[15pts] (a) Estude g quanto à monotonia e determine, se existirem, os extremos locais.

[10pts] (b) Mostre que $g''(x) = \dfrac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

[15pts] (c) Determine os intervalos de concavidade do gráfico de g e identifique, caso existam, os pontos de inflexão.

[13pts] (d) Mostre que existe pelo menos um $c \in]0, 1[$ tal que $g'(c) = \dfrac{\pi - 2}{4}$.

[12pts] (e) Determine, justificando convenientemente, $(g^{-1})'(g(1))$.

3. Considere a função h definida por $h(x) = \ln\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsen} x\right)$.

[10pts] (a) Determine o domínio de h.

[15pts] (b) Caracterize a função inversa de h, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

[15pts] 4. Mostre que a função f definida por $f(x) = \operatorname{sen}^3 x + 4\cos^3 x - \pi$ tem pelo menos um zero no intervalo $]0, \pi[$.

[15pts] 5. Calcule o seguinte limite:

$$\lim_{x \to +\infty} (x+3)^{\frac{1}{x^2}}$$

[12pts] 6. Determine o seguinte integral: $\displaystyle\int \left(\frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x} - \frac{8}{x^3}\right) dx.$

[13pts] 7. Determine a função f tal que $f'(x) = \dfrac{e^{\operatorname{arcsen}(2x)}}{\sqrt{1-4x^2}}$ e $f(0) = 1$.

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Considere a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = f(\cos x) \cdot f(\operatorname{sen} x).$$

[12pts] (a) Determine $h'(x)$ e mostre que, em qualquer ponto $(a, h(a))$ do gráfico de h tal que $\operatorname{tg} a = 1$, a reta tangente a esse gráfico é horizontal.

[08pts] (b) Admitindo que f é duas vezes diferenciável, o que podemos concluir sobre o número de soluções da equação $h''(x) = 0$?
(Sugestão: aplique o Teorema de Rolle ou um dos seus corolários)