Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I - Agrupamento II — 2.º Teste de Avaliação

17 de janeiro de 2017

Duração: **1h 30m**

1. Considere a região do plano cartesiano, $\mathcal{A}$, definida por

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \leq x^2, \ \ y \geq -1, \ \ x \geq 0 \ \text{ e } \ y \leq 2 - x\}.$$

[10pts] (a) Faça um esboço gráfico da região $\mathcal{A}$.

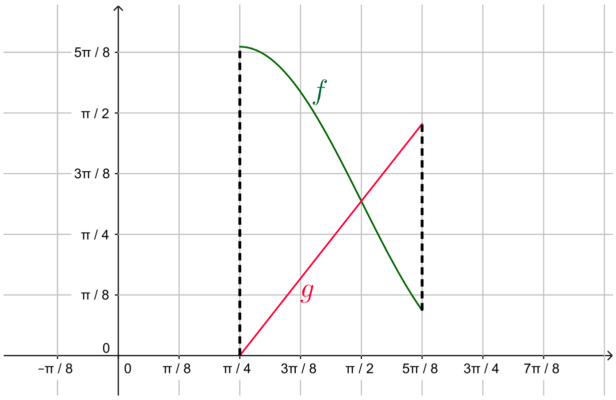
[20pts] (b) Determine a área da região $\mathcal{A}$.

[30pts] 2. Considere a região $\mathcal{B}$ do plano compreendida entre os gráficos de:

$$f(x) = 1 + \sin(2x) \ \text{ e } \ g(x) = \frac{4}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

com $\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{8}$.

Determine a área da região $\mathcal{B}$ (é suficiente indicar uma expressão numérica, que conste apenas de operações elementares, sem efetuar todas as simplificações).



3. Determine a natureza e, em caso de convergência, calcule o valor:

[25pts] (a) do integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^x (4 - x)\, dx$

[25pts] (b) da série de Mengoli $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi}{n+2}\right)$

4. Determine a natureza das seguintes séries. Em caso de convergência, especifique se é absoluta ou simples.

[25pts] (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^n}{n!}\cos n\right)$

[25pts] (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left((-1)^n\right)}{n+1}$ **Sugestão**: Reescreva esta série na forma de uma série alternada.

[25pts] (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n+1} - 1\right)^n$

[15pts] 5. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais positivos.

Sabendo que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n\, a_{n+1}}{a_n} = 1$, mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

"*Só a educação liberta.*"

Epicteto