Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I - Agrupamento II — Exame Final - Época de recurso

2 de fevereiro de 2015

Duração: **2h30m**

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

1. Seja $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ a função definida do seguinte modo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} & se \quad -1 < x < 1 \\ \\ \dfrac{\operatorname{sen}(\ln(x^3))}{x} & se \quad x \geq 1. \end{cases}$$

[15pts] (a) Estude f quanto à continuidade em $x = 1$.

[13pts] (b) Seja g uma função real de variável real diferenciável e tal que $g'(\frac{\pi}{2}) = 2$. Calcule o valor de $(g \circ f)'(0)$.

[12pts] (c) Determine a primitiva F da função f para $x \in]-1, 1[$ e que verifica a condição $F(0) = \pi^2$.

2. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x^2) & se \quad x \leq 0 \\ x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & se \quad x > 0. \end{cases}$

[17pts] (a) Utilizando a definição de derivada, mostre que g é diferenciável em $x = 0$ e indique o valor de $g'(0)$.

[13pts] (b) Mostre que existe $c \in \left]0, \frac{2}{\pi}\right[$ tal que $g'(c) = \frac{2}{\pi}$.

[15pts] (c) Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{0} x g(x)\, dx$.

[15pts] 3. Calcule o valor da área da região do plano delimitada pelo gráfico da função h definida por $h(x) = xe^{x^2+1}$, pelo eixo das abcissas e pelas retas de equações $x = -1$ e $x = 1$.

4. Determine os seguintes integrais (simplificando o mais possível o resultado):

[22pts] (a) $\displaystyle\int \frac{x + 15}{(x+2)(x^2+9)}\, dx$

[23pts] (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-3}}\, dx$ (Sugestão: use a mudança de variável dada por $x = \sqrt{3}\sec t$)

5. Considere a função G definida em $]0, \pi[$ por $G(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\cos^2 x} \frac{-e^t}{\sqrt{1-t}}\, dt.$

[10pts] (a) Mostre, justificando, que $G'(x) = 2e^{\cos^2 x}\cos x$, para todo o $x \in]0, \pi[$.

[10pts] (b) Estude a monotonia de G e determine os seus extremantes locais.

[20pts] 6. Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-x}+1}{(1+x^2)^2}\, dx$ sem recorrer à definição.

[15pts] 7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e par. Considere a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \int_{0}^{2x} f(t)\, dt.$$

Mostre que F é uma função ímpar. (Sugestão: use o método de integração por substituição)