



Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
Cálculo I - Agrupamento II — 2º Teste de Avaliação Discreta
8 de janeiro de 2016
Duração: **2h00m**

- [15pts] 1. Determine a primitiva da função f definida por

$$f(x) = \frac{3 \cos(\ln x)}{x}$$

que toma o valor 2 em $x = 1$.

2. Determine os seguintes integrais (simplificando o mais possível o resultado):

[22pts] (a) $\int \arccos(2x) dx$

[28pts] (b) $\int \frac{4 - 4x}{x^4 + 4x^2} dx$

3. Considere a função g definida por $g(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{9 - x^2}}$.

[25pts] (a) Determine $\int g(x) dx$ (Sugestão: use a mudança de variável dada por $x = 3 \sin t$).

[10pts] (b) Calcule o valor da área da região do plano delimitada pelas retas $x = -1$ e $x = 0$, pelo gráfico da função g e pelo eixo das abcissas.

- [15pts] 4. Mostre, sem calcular os integrais de Riemann, que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\arccos x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx.$$

5. Considere a função F definida em \mathbb{R}^+ por $F(x) = \int_1^{\ln x} \cos(t) \cdot e^{t^2} dt$.

[15pts] (a) Determine, justificando, $F'(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

[10pts] (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow e} \frac{F(x)}{x - e}$.

[20pts] 6. Mostre que o integral impróprio $\int_0^{+\infty} \frac{2 + \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx$ é convergente e o seu valor é $\frac{\pi(8 + \pi)}{8}$.

7. Considere a função h definida em \mathbb{R}_0^+ por $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

[08pts] (a) A função h é integrável no sentido de Riemann em $[0, 1]$? Justifique convenientemente.

[17pts] (b) Usando o Critério de Comparação ou o Critério do Limite, estude a natureza do seguinte integral impróprio:

$$\int_0^1 \frac{2 - \cos x}{x^3} dx.$$

Cálculo I - Agrupamento II — 2º Teste de Avaliação Discreta

- [15pts] 8. Seja $f : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivada contínua. Sabendo que $f(-1) = 2$ e $\int_{-1}^0 f^2(x) dx = -4$, mostre que

$$\int_{-1}^0 x f(x) f'(x) dx = 4.$$