



Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
Cálculo I - Agrupamento II — 1.º Teste de Avaliação
16 de novembro de 2016
Duração: **2h00m**

1. Considere a função real de variável real f definida por $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{2}$.

[15pts] (a) Determine o domínio e o contradomínio de f .

[15pts] (b) Caracteriza a função inversa de f .

[20pts] 2. Seja f uma função real de variável real. Sabendo que $f'(x) = \frac{x^2 e^{\operatorname{arcsen}(x^3)}}{\sqrt{1-x^6}}$ e que $f(0) = 1$, determine a expressão analítica de f .

3. Calcule os seguintes integrais indefinidos:

[15pts] (a) $\int \operatorname{tg}^3(x) \sec^2(x) dx$

[25pts] (b) $\int \frac{1}{(x-2)(x^2+4)} dx$

[25pts] (c) $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2-4}} dx$.

Sugestão: Utilize a mudança de variável $x = 2 \sec t$, justificando, convenientemente, o domínio adequado a esta substituição.

4. Considere a função F definida por $F(x) = \int_1^{x^2} x e^{\sqrt{t}} dt$, em $I = [1, +\infty[$.

[15pts] (a) Justifique a diferenciabilidade de F em I .

[15pts] (b) Determine $F'(x)$ para $x \in I$ e mostre que F é uma função estritamente crescente.

Observação: No cálculo de $F'(x)$ pode aparecer uma expressão que envolva funções integrais.

[15pts] (c) Calcule o limite, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x)}{x-1}$.

[25pts] (d) Calcule $F(2)$.

Sugestão: Caso necessite, considere a substituição $t = s^2$.

[15pts] 5. Seja $m \in \mathbb{R}$ e considere a função real de variável real definida por $f(x) = x^3 - 3x + m$. Mostre que f não pode ter dois zeros no intervalo $[-1, 1]$.

“Esperar pelo melhor e preparar-se para o pior: eis a regra.”

Fernando Pessoa