Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I - Agrupamento II — 1ª Prova de Avaliação Discreta

5 de Novembro de 2014

Duração: **2h**

Classificação: ________ **Valores**

N.° Mec.: ____________ Nome: ____

(Declaro que desisto: ______________________________) N.° folhas suplementares: ____

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

1. Sejam α um parâmetro real fixo e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\alpha x) & se \quad x < 0 \\ \\ xe^{-x} & se \quad x \geq 0. \end{cases}$$

15 ~~Pontos~~ **25** Pontos

(a) Mostre que f é contínua em $x = 0$ independentemente do valor de α.

(b) Averigúe se existe algum valor de α para o qual a função f é diferenciável em $x = 0$.

2. Considere a função g definida por $g(x) = x + 2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

05 ~~Pontos~~ **20** ~~Pontos~~ **17** Pontos **23** Pontos

(a) Indique o domínio da função g.

(b) Estude g quanto à monotonia e existência de extremos locais.

(c) Mostre que existe pelo menos um $c \in]1, \sqrt{3}[$ tal que $g'(c) = 1 - \frac{\pi}{6(\sqrt{3}-1)}$.

(d) Determine, caso existam, as assíntotas do gráfico de g.

3. Considere a função h definida por $h(x) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsen}(e^x - 1)$.

08 ~~Pontos~~ **07** ~~Pontos~~ **10** ~~Pontos~~ **15** Pontos

(a) Indique o domínio de h.

(b) Determine, caso existam, os zeros de h.

(c) Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa $x = 0$.

(d) Caracterize a função inversa de h, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

15 Pontos

4. Calcule o seguinte limite:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\cos(x^2)\right)^{\frac{1}{2x}}$$

12 Pontos

5. Determine a primitiva da função $f(x) = \operatorname{tg} x$ cujo gráfico passa pelo ponto de coordenadas $(\pi, 3)$.

13 Pontos

6. Determine o seguinte integral: $\displaystyle\int \left(x^2 \cos(x^3 + 1) + 4e^{-2x}\right)\, dx.$

15 Pontos

7. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua cujo contradomínio, CD_f, verifica a condição $CD_f \subseteq]0, 1[$. Mostre que existe um $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$.
(Sugestão: aplique o Teorema de Bolzano-Cauchy à função $g(x) = f(x) - x$).