Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I - Agrupamento II — 2º Teste de Avaliação Discreta

15 de janeiro de 2014

Duração: **2h00m**

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

1. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right) & se \quad x<0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & se \quad x=0 \\ \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}-1} & se \quad x>0. \end{cases}$

[15pts] (a) Indique, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte igualdade: $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx = \ln\sqrt{e^2+1}$.

[10pts] (b) A função f é integrável (no sentido de Riemann) no intervalo $[-2,7]$? Justifique convenientemente.

[25pts] (c) Determine a primitiva F da função f no intervalo $]-\infty,0[$ que verifica a condição $F(-1)=\frac{\pi}{4}$.

2. Determine os seguintes integrais (simplificando o mais possível o resultado):

[25pts] (a) $\displaystyle\int \frac{5x^3+8x+4}{x^2(x^2+4)}\,dx$

[20pts] (b) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\ln^2 x - 4}{x(\ln^2 x - 2\ln x)}\,dx$

[25pts] (c) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ (Sugestão: use a mudança de variável dada por $x=\operatorname{tg} t$)

(Nota: $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$ e $\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen} t\cos t$)

3. Considere a região $R \subseteq \mathbb{R}^2$ dada por

$$R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-2 \le y \le x\}.$$

[10pts] (a) Faça um esboço gráfico da região R.

[15pts] (b) Determine a área da região R.

[20pts] 4. Mostre que a função G definida em $\mathbb{R}^+$ por $G(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^0 e^{t^2}\operatorname{sen} t\,dt$ é crescente no intervalo $[\pi^2, 4\pi^2]$.

[20pts] 5. Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{4x^3-\pi}{7x^5+x^3+1}\,dx$ sem recorrer à definição.

[15pts] 6. Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$, $a\in I$ e $f: I\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^2 (isto é, tal que f'' é contínua). Observando que $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)dt$, mostre que

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt, \quad \forall x\in I.$$

(Sugestão: use o método de integração por partes)