Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I - Agrupamento II — Exame da Época de Recurso

2 de fevereiro de 2017

Duração: **2h 30m**

1. Considere a função F definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} \mathrm{e}^{t^2}\, dt$, em $\mathbb{R}$.

[5pts] (a) Justifique a diferenciabilidade de F em $\mathbb{R}$.

[10pts] (b) Determine $F'(x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

[10pts] (c) Calcule, caso exista, o limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^3}$.

2. Considere a função **contínua** f definida por $f(x) = \begin{cases} 2\arccos(ax-1) & \text{se } x < 1, \\ \pi + \ln(2x-1) & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

[5pts] (a) Determine o valor de a.

[15pts] (b) Mostre que existe $c \in]0,1[$ tal que $\pi + f'(c) = 0$.

[20pts] (c) Determine a área da região $\mathcal{R}$ limitada pelo gráfico de f, pelo eixo das abcissas e pelas retas de equações $x = 1$ e $x = 2$.

[15pts] 3. Seja f uma função real de variável real diferenciável com derivada crescente. Mostre que se $a < b$ e $f(a) = f(b)$ então, para todo o $x \in]a,b[$, $f(x) \leq f(a)$.

4. Calcule os seguintes integrais indefinidos.

[15pts] (a) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^{\frac{3}{4}}}{3x}\, dx$

[20pts] (b) $\displaystyle\int \sqrt{4-\sqrt{x}}\, dx$ **Sugestão**: Utilize a mudança de variável $t = 4 - \sqrt{x}$, justificando, convenientemente, o domínio adequado a esta substituição.

[20pts] 5. (a) Determine a natureza do seguinte integral impróprio e, caso seja convergente, calcule o seu valor.

$$\int_2^{+\infty} \frac{2}{x^2(x+1)}\, dx$$

[20pts] (b) Determine a natureza da seguinte série, dizendo, em caso de convergência, se é simples ou absoluta.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n+1)}$$

6. Determine a natureza das seguintes séries numéricas e, em caso de convergência, calcule o seu valor.

[15pts] (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{3n+1}}{3^{2n-1}}$.

[15pts] (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)$.

[15pts] 7. Discuta para que valores de $a \in \mathbb{R}$ a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a^n$ é convergente.