Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
Cálculo I - Agrupamento II — Exame Final - Época normal de exames
8 de janeiro de 2016
Duração: **2h30m**

1. Sejam k um parâmetro real e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x^3}\right) & se \quad x < 0 \\ k & se \quad x = 0 \\ \dfrac{x}{\operatorname{arctg} x} & se \quad x > 0. \end{cases}$$

[18pts] (a) Existe algum valor de k que torne a função f contínua? Justifique convenientemente.

[12pts] (b) Considere $k = 0$. Determine, caso existam, as derivadas laterais de f em $x = 0$.

[15pts] 2. Mostre que a função h definida por $h(x) = \operatorname{sen} x - 2x + 1$ tem um único zero no intervalo $[-\pi, \pi]$.

3. Considere a função g definida por $g(x) = \arccos(e^{x-1}) + 1$.

[22pts] (a) Caracterize a função inversa de g indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

[13pts] (b) Mostre que existe $c \in]0, 1[$ tal que $g'(c) = -\arccos\left(\frac{1}{e}\right)$.

4. Determine os seguintes integrais (simplificando o mais possível o resultado):

[17pts] (a) $\displaystyle\int \arccos(2x)\, dx$

[23pts] (b) $\displaystyle\int \frac{4 - 4x}{x^4 + 4x^2}\, dx$

5. Considere a função g definida por $g(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{9 - x^2}}$.

[22pts] (a) Determine $\displaystyle\int g(x)\, dx$ (Sugestão: use a mudança de variável dada por $x = 3 \operatorname{sen} t$).

[08pts] (b) Calcule o valor da área da região do plano delimitada pelas retas $x = -1$ e $x = 0$, pelo gráfico da função g e pelo eixo das abcissas.

6. Considere a função F definida em $\mathbb{R}^+$ por $F(x) = \displaystyle\int_1^{\ln x} \cos(t) \cdot e^{t^2} dt$.

[12pts] (a) Determine, justificando, $F'(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

[08pts] (b) Calcule $\displaystyle\lim_{x \to e} \frac{F(x)}{x - e}$.

[15pts] 7. Mostre que o integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2 + \operatorname{arctg} x}{1 + x^2}\, dx$ é convergente e o seu valor é $\dfrac{\pi(8 + \pi)}{8}$.

[15pts] 8. Seja $f : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ uma função com derivada contínua. Sabendo que $f(-1) = 2$ e $\displaystyle\int_{-1}^{0} f^2(x)\, dx = -4$, mostre que

$$\int_{-1}^{0} x f(x) f'(x)\, dx = 4.$$