*Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro*

**Cálculo I - Agrupamento II — Exame Final**

***17 de janeiro de 2017***

Duração: **2h 30m**

1. Considere a função $F$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} x^3 \mathrm{e}^{t^2}\, dt$, em $I = [0, +\infty[$.

**[10pts]** (a) Justifique a diferenciabilidade de $F$ em $I$.

**[20pts]** (b) Determine $F'(x)$ para $x \in I$ e mostre que $x = 0$ é um minimizante global de $F$.

**[10pts]** (c) Calcule o limite $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x)}{\operatorname{sen} x}$.

2. Calcule os seguintes integrais indefinidos:

**[25pts]** (a) $\displaystyle\int \frac{x^2 - x}{x^3 + 2x^2 + x}\, dx$

**[25pts]** (b) $\displaystyle\int \frac{1}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx$ **Sugestão**: Utilize a mudança de variável $x = \operatorname{tg} t$, justificando, convenientemente, o domínio adequado a esta substituição.

3. Considere a região do plano cartesiano, $\mathcal{A}$, definida por

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \leq x^2,\ \ y \geq -1,\ \ x \geq 0 \ \text{ e } \ y \leq 2 - x\}.$$

**[5pts]** (a) Faça um esboço gráfico da região $\mathcal{A}$.

**[15pts]** (b) Determine a área da região $\mathcal{A}$.

**[10pts]** 4. (a) Mostre que $2x \ln x > 1 + x$ para $x \geq \mathrm{e}$.

**[15pts]** (b) Determine a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{2 \ln x}{1 + x}\, dx$

5. Determine a natureza e, em caso de convergência, calcule o valor:

**[20pts]** (a) do integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\, \mathrm{e}^{(x^2)}\, dx$

**[20pts]** (b) da série de Mengoli $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n+2} \right)$

**[15pts]** 6. Determine a natureza (especificando, em caso de convergência, se é absoluta ou simples) da série numérica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\mathrm{e}^n}{n!} \cos n \right)$$

**[10pts]** 7. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais positivos.

Sabendo que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n\, a_{n+1}}{a_n} = 1$, mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

"*Só a educação liberta.*"

Epicteto