Ficha avaliação 2013

1)

a) $(x, y, z) = (6, 4, -2) + s(3, 0, -1)$

$(0, 0, 0) = (6, 4, -2) + s(3, 0, -1)$

$\begin{matrix} 0 = 6 + 3s \\ 0 = 4 \\ 0 = -2 - s \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} s = -2 \\ 0 = 4 \text{ P.F} \\ s = 2 \end{cases}$ P.F não é subespaço vetorial

b) $((2-a), 3-b, 2+b)$

$0_V \in S$

$\begin{matrix} 2-a = 0 \\ 3-b = 0 \\ 2+b = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ b = -2 \end{cases}$ P.F S não é

$x(4, -1, 2) + y(-8, 2, -4) = (4x, -x, 2x) + (-8y, 2y, -4y)$

$= (4x - 8y, -x + 2y, 2x - 4y)$

$\begin{cases} 4x - 8y = 0 \\ -x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 8y \\ -x = -2y \\ 2x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = 2y \\ x = 2y \end{cases}$ P.V

fechado relativamente a soma

$x(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ $\qquad x_1 = 2x_2$

$y(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ $\qquad y_1 = 2x_2$

$x_1 + y_1 = 2(x_2 + y_2)$

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$?

2 é l.i.?

a) $\{(2,0,0), (-1,3,0), (-2,7,-4), (0,5,-3)\}$

$\alpha_1(2,0,0) + \alpha_2(-1,3,0) + \alpha_3(-2,7,-4) + \alpha_4(0,5,-3) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_2 + 7\alpha_3 + 5\alpha_4 = 0 \\ -4\alpha_3 - 3\alpha_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\alpha_3 = +3\alpha_4 \end{cases}$$

sistema possível indeterminado
logo não é l.i.

Se gera?

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -2 & 0 & x \\ 0 & 3 & 7 & 5 & y \\ 0 & 0 & -4 & -3 & z \end{array}\right]$$

$\uparrow \uparrow \uparrow$

Sim?

Se é ortogonal?

$x_1 \cdot x_2 = (2,0,0)\cdot(-1,3,0) = -2 \neq 0$ não é ortogonal

$x_1 \cdot x_3$
$x_1 \cdot x_4$
$x_2 \cdot x_3$
$x_2 \cdot x_4$
$x_3 \cdot x_4$

b) é l.i.?

$\alpha_1(3,7,4) + \alpha_2(0,0,0) + \alpha_3(0,4,7) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} 3\alpha_1 = 0 \\ 7\alpha_1 + 4\alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + 7\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = t \end{cases}$$

logo o conjunto não é linearmente independente

gera $\mathbb{R}^3$?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & x \\ 7 & 0 & 4 & y \\ 4 & 0 & 7 & z \end{array}\right] \underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{4}{3}L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{7}{3}L_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 4 & y - \frac{7}{3}x \\ 0 & 0 & 7 & z - \frac{4}{3}x \end{array}\right] \underset{\sim}{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{4}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 4 & y - \frac{7}{3}x \\ 0 & 0 & 0 & z - \frac{4}{3}x - \frac{7}{4}y + \frac{49}{9}x \end{array}\right]$$

~~gerador~~ de $\mathbb{R}^3$

~~...~~ é ~~...~~ ortogonal?

$x_1 \cdot x_2 = (3,1,4) \cdot (0,0,0) = 0$

$x_2 \cdot x_3 = (0,0,0) \cdot (0,4,-7) = 0$

$x_1 \cdot x_3 = (3,7,4) \cdot (0,4,-7) = 0 + 7 \times 4 - 4 \times 7 = 0$

É ortogonal

3)

a) $\dim(\mathcal{N}(A)) = \text{null}(A) = n - \text{car}(A) = 3 - 2 = 1$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) uma base para $\mathcal{L}(A) = \{(3,0,-3), (0,-4,-3)\}$

c) uma base para $\mathcal{C}(A) = \{(3,0,3), (0,-4,4)\}$

4) Base canónica $\mathcal{E} = \underbrace{((1,0),(0,1))}_{\text{Pq é canónica}}$ e a base $\mathcal{J} = ((-3,4),(7,-9))$

$$M_{\mathcal{J} \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{J}} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -9 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$$

$$[X]_{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{J}} \times [X]_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 4 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 + 7 \\ 24 - 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 15 \end{bmatrix}$$

~~$(-11, 15) = \alpha_1 (0,1) + \alpha_2$~~

$X = -11(1,0) + 15(0,1) = (-11, 15)$