*Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro*

**Cálculo I - Agrupamento II — Exame Final - Época normal de exames**

***15 de Janeiro de 2015***

Duração: **2h30m**

**– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –**

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função contínua à direita do ponto $x = 0$ e tal que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(e^x) & se \quad x < 0 \\ \\ \sqrt{x}\,\ln x & se \quad x > 0. \end{cases}$$

**[13pts]** (a) Indique, justificando, o valor de $f(0)$.

**[17pts]** (b) Averigúe se o gráfico de $f$ admite assíntotas não verticais.

**[10pts]** (c) Seja $g$ uma função real de variável real diferenciável e tal que $g(1) = -1$ e $g'(1) = 3$. Calcule o valor de $(f \circ g)'(1)$.

**[20pts]** (d) Calcule a área da região do plano delimitada pelo gráfico de $f$, pelo eixo das abcissas e pelas retas verticais de equações $x = 1$ e $x = e^2$.

2. Considere a função $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 3\arccos(\sqrt{x+4}) - \frac{\pi}{2}$.

**[06pts]** (a) Determine o domínio de $g$, $D_g$.

**[14pts]** (b) Caracterize a função inversa de $g$ indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

3. Considere a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(4+x^2)}{x-1} & se \quad x < 1 \\ \\ \dfrac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 3 & se \quad x \geq 1. \end{cases}$

**[10pts]** (a) A função $h$ é integrável (no sentido de Riemann) no intervalo $[-2, 7]$? Justifique convenientemente.

**[15pts]** (b) Prove que a função $h$ tem um único zero no intervalo $[1, 2]$.

4. Determine os seguintes integrais (simplificando o mais possível o resultado):

**[23pts]** (a) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ (Sugestão: use a mudança de variável dada por $x = \operatorname{tg} t$)

(Nota: $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$ e $\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen} t \cos t$)

**[22pts]** (b) $\displaystyle\int \frac{5x^3 + 8x + 4}{x^2(x^2+4)}\,dx$

**[20pts]** 5. Mostre que a função $G$ definida em $\mathbb{R}^+$ por $G(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{0} e^{t^2} \operatorname{sen} t\,dt$ é crescente no intervalo $[\pi^2, 4\pi^2]$.

**[15pts]** 6. Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{4x^3 - \pi}{7x^5 + x^3 + 1}\,dx$ sem recorrer à definição.

**[15pts]** 7. Sejam $I$ um intervalo de $\mathbb{R}$, $a \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2$ (isto é, tal que $f''$ é contínua). Observando que $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)dt$, mostre que

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt, \quad \forall x \in I.$$

(Sugestão: use o método de integração por partes)