9) Sendo f a função $f(x) = x^3 + ax + b$ derivando:

$$f'(x) = 3x^2 + a$$

Como $a > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $3x^2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, logo $f'(x) > 0$ $\forall x \in]-\infty, +\infty[$ então através do teorema de Lagrange sabemos que f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, assim a função f não pode ter mais que um zero, por sua vez $x^3 + ax + b = 0$ não pode ter mais que uma raiz real, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}$.

10)

Sendo f a função $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$.

$$f'(x) = (4x^3 - 6x^2 + 1)' = 12x^2 - 12x$$

$$f'(x) = 0$$

$$12x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 12(x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

Através do teorema de Bolzano-Cauchy, como f é uma função continua em $\mathbb{R}$, pois f é uma função polinomial continua, logo f é continua em $[0,1]$.

$$f(0) = 4 \times 0^3 - 6 \times 0^2 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1 > 0$$

$$f(1) = 4 \times 1^3 - 6 \times 1^3 + 1 = 4 - 6 + 1 = -1 < 0$$

$$f(0) \times f(1) < 0$$

logo através do corolário de Bolzano-Cauchy $\exists c \in]0,1[: f(c) = 0$.

O corolário do teorema de Rolle diz que entre dois zeros de f' existe no maximo um zero de f.

Assim, provamos que existe um zero da função f em $]0,1[$ através do teorema de Bolzano-Cauchy, garantimos que havia um zero e com o corolário do teorema de Rolle garantimos que só havia um zero.

no intervalo consecutivo $]1,2[$: f é contínua em $[1,2]$

$f(1) = -1 < 0$

$f(2) = 4\times 2^3 - 6\times 2^2 + 1 = 9 > 0$

$f(1) \times f(2) < 0$

logo através do corolário de Bolzano - Cauchy

$\exists c \in]1,2[: f(c) = 0$.

Como em $x \in]1,2[$, $f'(x) > 0$, f é estritamente crescente

assim fica provado que só existe um zero em $]1,2[$.

no intervalo $]-1,0[$:

f é contínua em $x \in [-1,0]$

$f(0) = 1 > 0$

$f(-1) = 4\times(-1)^3 - 6\times(-1)^2 + 1 = -4 - 6 + 1 = -9 < 0$

$f(-1) \times f(0) < 0$

pelo corolário de Bolzano-Cauchy, fica provado que

$\exists c \in]-1,0[: f(c) = 0$.

Como $f'(x) > 0$, $\forall x \in]-1,0[$, logo a função f é estritamente crescente em $x \in]0,1[$ ficando assim provado que fica que só existe um zero em $x \in]-1,0[$

Assim fica demonstrado que a equação $4x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ só tem 3 zeros nos intervalos consecutivos $]-1,0[$; $]0,1[$; $]1,2[$.

11)

Sendo f a função $f(x) = e^x - 1 - x$

$f(0) = e^0 - 1 - 0 = 1 - 1 - 0 = 0$

logo $x = 0$ é raiz da equação $e^x = 1 + x$.

Derivando f:

$f'(x) = (e^x - 1 - x)' = e^x - 1$

$f'(x) = 0$

$e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$

Estudando a monotonia de f

	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
monotonia de f	$\searrow$	mín $f(0)$	$\nearrow$

assim fica demonstrado que $x=0$ é o único zero da função f porque em $]-\infty, 0[$ a função é estritamente decrescente e em $]0, +\infty[$ a função é estritamente crescente.

12) f é contínua em IR e diferenciável em IR, pois a mesma é a soma de duas funções contínuas a função ARCO TANGENTE e a função polinomial.

logo f é contínua em $[2, 3]$ e diferenciável em $]2, 3[$

$f(2) = \text{arctg}(2-2) + 2\times 2 - 5 = \text{arctg}(0) + 4 - 5 = 0 + 4 - 5 = -1 < 0$

$f(3) = \text{arctg}(3-2) + 3\times 2 - 5 = \text{arctg}(1) + 6 - 5 = \frac{\pi}{4} + 6 - 5 =$

$= \frac{\pi + 24}{4} - \frac{25}{4} > 0$, porque $\pi + 24 > 25$ uma vez que $\pi \simeq 3{,}14$

$f(2) \times f(3) < 0$

pelo Corolário de Bolzano - Cauchy garantimos que,

$\exists c \in]2,3[: f(c) = 0$

$f'(x) = (\text{arctg}(x-2) + 2x - 5)' = \frac{1}{1+(x-2)^2} + 2 = \frac{3 + 2(x-2)^2}{1+(x-2)^2} > 0$

Como $f'(x) > 0$, a função f é estritamente crescente em $]2, 3[$ e assim f só tem um único zero.