

MPEI 2019-2020

Resolução de Alguns Exercícios

Simulação de cadeias de Markov

Demonstração em Matlab

Com base no código anexo ao guião PL08

Crawl.m

```
function state = crawl(H, first, last)
% random walk on the graph according to state transition matrix H
% first = initial state, last = terminal or absorbing state
% the sequence of states will be saved in the vector "state"
% initially, the vector contains only the initial state

state = [first];

%% keep moving from page to page
% until page "last" is reached

while (1)
    state(end+1) = nextState(H, state(end));
    if (state(end) == last) break % last reached
end
end
```

nextState

```
function state = nextState(H, currentState)
% given a transition matrix and the current state,
% this function returns the next state
% find the probabilities of reaching all pages starting at the
current one

% get the column corresponding to currentState
probVector = H(:,currentState);

% N is the number of pages, that is, H is N x N
N = length(probVector);

% pick the next page randomly according to those probabilities
state = discrete_rnd(N, probVector);
state = state(1);
```

Exemplo simples

```
T=zeros(4)
```

```
T(2,1)=1;
```

```
T(1,2)=0.5; T(4,2)=0.5;
```

```
T(2,3)=0.6; T(4,3)=0.4;
```

```
T(2,4)=0.6; T(3,4)=0.4;
```

```
T
```

```
from=1
```

```
to=3
```

```
state=crawl(T,from,to)
```

PL08 exercício 6

% Confirmar resultados de tempos de absorção por simulação

t=sum(F) ; % para comparação

Ntry= 1000; to=4;

for from=1:3

 R= zeros(1,Ntry);

 for n= 1:Ntry,

 state = crawl(H, from, to);

 R(n)= length(state);

 end

m=mean(R);

fprintf(1, 'De %d para %d (absorvente):\n\tSIMUL (%d iters) = %.2f Teórico (usando F) = %.2f\n',from, to, Ntry,m, t(from));

end

Resultado (exemplo)

t =

90.0000 85.0000 75.0000

De 1 para 4 (absorvente):

SIMUL (1000 iters) = 89.37 Teórico (usando F) = 90.00

De 2 para 4 (absorvente):

SIMUL (1000 iters) = 83.10 Teórico (usando F) = 85.00

De 3 para 4 (absorvente):

SIMUL (1000 iters) = 75.19 Teórico (usando F) = 75.00

Exercícios de revisão

Cadeias de Markov

Problema 1

- Implemente uma função Matlab chamada `markov_estadoestacionario.m` que utilize o método das potências para calcular as probabilidades em estado estacionário para uma cadeia de Markov com N estados.
- Um dos parâmetros de entrada será a matriz de transição
 - Assumida como irredutível e aperiódica
- Outros parâmetros:
 - Vector estado inicial
 - Limiar para terminar o processo (máximo da diferença entre os vectores em duas iterações deverá ser inferior a esse valor)
- Inicialize o processo com um vector uniforme, isto é $x = \frac{[1,1,1,\dots,1]}{N}$, e limiar=1e-5 caso apenas seja fornecida a matriz de transição

Problema 2

Considere a matriz T seguinte:

$T =$

0	0.5000	0	0
1.0000	0	0.6000	0.6000
0	0	0	0.4000
0	0.5000	0.4000	0

- Use a função que criou no problema 1 para calcular o vector estado estacionário usando o vector inicial $\mathbf{x} = [0.25, 0.25, 0.25, 0.25]$
- Confirme o resultado calculando o vector estacionário por outro método
- Adicione à sua função a capacidade de mostrar num gráfico o valor do segundo elemento de \mathbf{x} em função da iteração (que deverá ser o eixo do xx) e repita o ponto anterior

Problema 3

- Repita o problema anterior para outros vectores iniciais
 - Exemplos: $[1,0,0,0]$ e $[0,1,0,0]$ etc
- Continua a convergir para o mesmo vector ?

Exercícios de mini-testes

Exercício 1 (2015-2016)

- 8.0 **2)** Considere que tem um pequeno conjunto de páginas web identificadas pelas letras A a F com as seguintes ligações entre si no dia 1 de janeiro de 2016: a página A tem links para as páginas B e E; a página B tem links para as páginas B, D e F; pode chegar-se às páginas A e B através da página C; D apenas tem links para E e B; E tem links para A e B; F possui links para todas as outras páginas, excepto para ela própria.

Considerando que se pretende obter o pagerank das páginas e que se inicializa esse valor com um valor igual para todas as páginas e igual a $1/6$:

- 3.0 **2.a)** Qual o valor da estimativa do pagerank de cada página ao fim de três iterações do processo de cálculo?

Resposta: A _____ B _____
B _____ D _____
E _____ F _____

- 2.0** **2.b)** Represente num gráfico a evolução do valor do pagerank de cada uma das páginas em função da iteração? Deve utilizar um número de iterações suficiente para que os valores estabilizem.

Código matlab/octave:

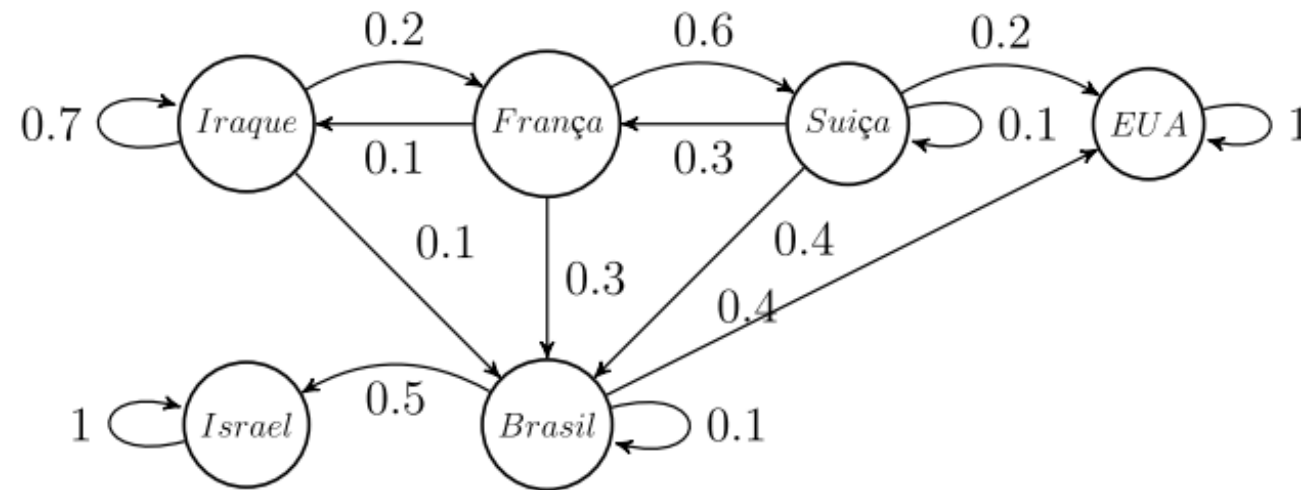
- 3.0** **2.c)** Qual a página com o maior valor do pagerank e qual o seu valor?

Resposta: Página? _____
pagerank? _____

Código matlab/octave:

Exercício de 2018-2019

2) Considere o conjunto de países $C=\{\text{Iraque}, \text{França}, \text{Brasil}, \text{Suiça}, \text{EUA}, \text{Israel}\}$ e a informação da figura seguinte relativa à probabilidade de, ao fim de um mês, um terrorista ter viajado de um país para outro ou ter permanecido nesse país:



2.0 **2.a)** Represente em Matlab a matriz de transição T na sua forma canónica, sendo T_{ji} a probabilidade de viagem de i para j . Considere permanecer num país como equivalente a uma viagem de i para i e que cada transição corresponde a 1 mês. Represente também o vector estado v correspondente à seguinte situação: terrorista está na Europa e com igual probabilidade de estar num dos países possíveis.

Código Matlab:

2.0 **2.b)** Qual a média (valor esperado) do número de meses necessários para um terrorista inicialmente no Iraque vir a terminar os seus dias em Israel ou nos EUA?

Resposta: _____

Código Matlab:

2.0 **2.c)** Qual a probabilidade de um terrorista que esteja inicialmente no Iraque se encontrar no EUA passados 5 meses? Qual a probabilidade de estar em Israel 50 meses depois de se encontrar no Brasil?

Resposta: $P[\text{Iraque} \rightarrow \text{EUA}, \text{em } 5 \text{ meses}] = \underline{\hspace{2cm}}$

$P[\text{Brasil} \rightarrow \text{Israel}, \text{em } 50 \text{ meses}] = \underline{\hspace{2cm}}$

Código Matlab: