

# Filtro Digital IIR utilizando aproximação Elíptica

Danilo Souza, Hugo Santos, Welton Araújo

June 26, 2012

## 1 Introdução

Devido à grande dificuldade para se trabalhar com sinais reais, em função da grande presença de ruído existente universo analógico, a utilização de filtros é de fundamental importância para processamento digital de sinais, atuando na eliminação de ruído indesejado, e preservação do sinal de interesse. Esta operação é feita no domínio da frequência, onde o filtro possui uma resposta em frequência composta por magnitude e fase, uma vez que a saída de um Sistema Linear e Invariante no tempo é dada pela convolução da entrada com a resposta ao impulso do sistema, que, no domínio da frequência, corresponde à multiplicação da Resposta em Frequência pela transformada de Fourier do sinal de entrada. A fase da Resposta em Frequência indica a defasagem do sinal com relação ao sinal de entrada do sistema de filtragem e a resposta em magnitude representa as bandas de passagem, de corte e de transição, sendo esta última um ponto chave no projeto de filtros, uma vez que, dependendo da aplicação, pode ser crucial ter uma banda de transição pequena, enquanto que em outros casos não é necessária uma grande rigidez para essa faixa de frequências do espectro.

Os filtros digitais são divididos em duas categorias, FIR (Resposta ao Impulso Infinita) e IIR (Resposta ao Impulso Infinita), sendo esta última apenas o mapeamento de filtros analógicos amplamente conhecidos e estudados, como Filtro de Chebyshev, Butterworth e Elíptico (Cauer), para o universo digital. Este trabalho tem por objetivo mostrar uma implementação do filtro Elíptico, usando o MatLab, tomando como referência dois filtros, um passa-baixa e outro rejeita-faixa, descritos abaixo:

### 1.1 Filtro I

Trata-se de um filtro passa-baixa. Suas especificações estão inseridas na Tabela 1. Onde  $A_p$  e  $A_r$  são a atenuação máxima e mínima nas frequências de passagem e rejeição, respectivamente. E  $\Omega_p$ ,  $\Omega_r$  e  $\Omega_s$  são as frequências de máxima de passagem, mínima de rejeição e de amostragem, respectivamente.

### 1.2 Filtro II

Trata-se de um filtro rejeita-faixa. Suas especificações estão inseridas na Tabela 2. Onde  $A_{p1}$  e  $A_{r1}$  são a atenuação máxima e mínima nas frequências de passagem e rejeição, respectivamente.  $\Omega_{p1}$  e  $\Omega_{r1}$  são as frequências máxima de passagem e mínima de rejeição, respectivamente, da faixa inicial.  $\Omega_{p2}$ ,  $\Omega_{r2}$  são

$A_p$	1 dB
$A_r$	40 dB
$\Omega_p$	1000 Hz
$\Omega_r$	1290 Hz
$\Omega_s$	3000 Hz

Table 1: Propriedades do filtro I

as frequências mínima de passagem, máxima de rejeição, respectivamente, da faixa final. A frequência de amostragem é representada por  $\Omega_s$ .

$A_p$	0,5 dB
$A_r$	60 dB
$\Omega_{p1}$	40 rad/s
$\Omega_{r1}$	50 rad/s
$\Omega_{p2}$	70 rad/s
$\Omega_{r2}$	80 rad/s
$\Omega_s$	240 rad/s

Table 2: Propriedades do filtro II

Uma das grande vantagem de se trabalhar com filtros IIR é que possuem menor ordem do que os de mesma especificação FIR, por isso precisam realizar menos multiplicações, além do fato de seus equivalentes analógicos já possuírem tabelas e conversões amplamente difundidas na literatura, entretanto por apresentarem resposta ao impulso infinita possuem um problema com a estabilidade, para garantir um filtro estável o projeto deve ser feito de tal forma que os pólos da Função de Transferência sejam internos ao círculo de raio unitário do plano Z. Outro problema dos filtros IIR é que não há controle sobre a fase da Resposta em Frequência, os filtros são projetados levando em consideração somente a magnitude, não sendo portanto, indicados para aplicações que requerem filtros com fase linear (p.e. processamento de imagem).

Uma vantagem em particular do filtro Elíptico quando comparado com outros filtros IIR é que possui o maior declive na banda de transição, o que o torna mais adequado para aplicações que necessitam de uma maior rigidez em relação à banda de transição. Embora possuam a menor ordem dentre os filtros IIR mais utilizados, os filtros elípticos são mais difíceis de projetar.

Existem basicamente duas abordagens para projetar um filtro Elíptico:

### 1.3 Abordagens para construção de Filtros Elípticos

#### 1.3.1 Abordagem I

- Projetar filtro Passa-Baixa analógico.

,Realizar transformação em frequência ( $s \rightarrow s$ ).

- Aplicar transformação do filtro ( $s \rightarrow z$ ).

### 1.3.2 Abordagem II

- Projetar filtro Passa-Baixa analógico.
- Aplicar transformação do filtro ( $s \rightarrow z$ ).
- Realizar transformação em frequência ( $s \rightarrow s$ ).

A transformação do filtro do plano 's' para o plano 'z' pode ser feita usando dois métodos, o primeiro é o método da invariância da resposta ao impulso, outro é a transformação bilinear, sendo esta última, a transformação usada neste trabalho, juntamente com a Abordagem 1.

### 1.4 Método da Transformação Bilinear

Consiste no mapeamento da metade esquerda do plano  $s$  dentro de uma circunferência unitária do plano  $z$  através de uma normalização do espectro analógico da frequência de um intervalo  $-\infty < \Omega < \infty$  para  $-\pi < \omega < \pi$ . Sua diferença do método da invariância ao impulso a resposta na frequência analógica é a indefinição do seu intervalo na frequência dentro da circunferência unitária.

Sua vantagem se deve ao fato de evitar o *aliasing*, portanto mantém as características do módulo da resposta em frequência do filtro analógico para a resposta em frequência do filtro digital.

O método da transformação bilinear baseia-se na seguinte relação:

$$s = \frac{2}{T} \frac{(1 - Z^{-1})}{1 + Z^{-1}} \quad (1)$$

$$z = \frac{(1 + s(T/2))}{(1 - s(T/2))} \quad (2)$$

Resolvendo esta relação para as frequências  $\omega$  (digital) e  $\Omega$  (analógica), obtém-se as seguintes relações:

$$\omega = \frac{2 \arctan(\Omega T)}{2} \quad (3)$$

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (4)$$

Para realizar a transformação bilinear é necessário encontrar primeiramente as frequências pré-distorcidas, pois esta transformação resulta em um erro muito grande para altas frequência, por isso a necessidade de achar as frequências distorcidas para todos os casos, para que então a transformação possa ser feita de fato. Essas frequências são encontradas utilizando (3) e/ou (4)

A equação de diferença gerada por esse filtro é:

$$\begin{aligned} & y[n+5] - 4,546y[n+4] + 8,419y[n+3] - 7,928y[n+2] \\ & - 3,793y[n+1] - 0,7372y[n] = 0,00733x[n+5] - 0,01843x[n+4] \\ & + 0,01149x[n+3] + 0,01149x[n+2] - 0,01843x[n+1] + 0,00733x[n] \end{aligned}$$

A expressão da transformada Z é:

$$\begin{aligned} & 0,00733z^5 - 0,01843z^4 + 0,01149z^3 \\ & + 0,01149z^2 - 0,01843z^1 + 0,00733 \end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned} & z^5 - 4,546z^4 + 8,419z^3 - \\ & 7,928z^2 - 3,793z - 0,7372 \end{aligned}$$

A expressão da transformada de Fourier é:

$$\begin{aligned} & 0,00733e^{jw5} - 0,01843e^{jw4} \\ & + 0,01149e^{jw3} + 0,01149e^{jw2} - 0,01843e^{jw} + 0,00733 \end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned} & e^{jw5} - 4,546e^{jw4} + 8,419e^{jw3} - 7,928e^{jw2} \\ & - 3,793e^{jw} - 0,7372 \end{aligned}$$

## 2 Implementação no MatLab

### 2.1 Filtro I

#### 2.1.1 Achar as digitais para posterior desnormalização $\omega_p d1 e \omega_r d1$

$$\omega_p d1 = \frac{2\pi 1000}{3000} \quad (5)$$

$$\omega_r d1 = \frac{2\pi 1290}{3000} \quad (6)$$

#### 2.1.2 Achando as frequências distorcidas $\omega_p e \omega_r$

$$\omega_p = 6000 \tan \frac{\omega_p d1}{2} \quad (7)$$

$$\omega_r = 6000 \tan \frac{\omega_r d1}{2} \quad (8)$$

### 2.1.3 Definimos algumas constantes par acalualr a ordem do filtro

$$\omega_p n = \sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_r}} \quad (9)$$

$$\omega_r n = \sqrt{\frac{\omega_r}{\omega_p}} \quad (10)$$

$$k = \frac{1}{\omega_r n^2} \quad (11)$$

$$q_0 = \frac{1}{2} \frac{1 - (1 - \sqrt[4]{k^2})}{1 + (1 - \sqrt[4]{k^2})} \quad (12)$$

$$q = q_0 + 2q_0^5 + 15q_0^9 + 150q_0^{13} \quad (13)$$

$$e = \sqrt{\frac{10^{0.1ap} - 1}{10^{0.1ar} - 1}} \quad (14)$$

$$N = \frac{\log 10^{\frac{16}{e^2}}}{\log 10^{\frac{1}{q}}} \quad (15)$$

Para achar a Função de Transferência do filtro, é necessário calcular mais algumas constantes;

$$= \frac{1}{2N} \log \frac{10^{0.05ap} + 1}{10^{0.05ar} - 1} \quad (16)$$

$$h = 2\sqrt[4]{q} \sum_{a=0}^2 (-1)^a (q^{a(a+1)} (\sinh((2(a+1)))) \quad (17)$$

A partir destas equações, encontrou-se a ordem do filtro, N=3. Os gráficos das respostas em frequência em magnitude, magnitude normalizada e fase estão nas Figuras 1 e 2.

A equação de diferença gerada por esse filtro é:

$$\begin{aligned} & y[n+10] - 0,2185y[n+9] + 1,726y[n+8] - 0,3473y[n+7] \\ & + 1,929y[n+6] - 0,2756y[n+5] + 0,9223y[n+4] - 0,1009y[n+3] \\ & + 0,3202y[n+2] - 0,004673y[n+1] + 0,03496y[n] = \\ & 0,1988x[n+10] - 0,06244x[n+9] + 0,9305y[n+8] - 0,2366x[n+7] \\ & + 1,802x[n+6] - 0,3488x[n+5] + 1,802x[n+4] - 0,2366x[n+3] \\ & + 0,9305x[n+2] - 0,06244x[n+1] + 0,1988x[n] \end{aligned}$$

A expressão da transformada Z é:

$$\begin{aligned} & 0,1988z^{10} - 0,06244z^9 + 0,9305z^8 - 0,2366z^7 \\ & + 1,802z^6 - 0,3488z^5 + 1,802z^4 - 0,2366z^3 \\ & + 0,9305z^2 - 0,06244z^1 + 0,1988 \end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned}
& z^{10} - 0,2185z^9 + 1,726z^8 - 0,3473z^7 \\
& + 1,929z^6 - 0,2756z^5 + 0,9223z^4 - 0,1009z^3 \\
& + 0,3202z^2 - 0,004673z - 0,03496
\end{aligned}$$

A expressão da transformada de Fourier é:

$$\begin{aligned}
& 0,1988e^{jw10} - 0,06244e^{jw9} + 0,9305e^{jw8} - 0,2366e^{jw7} \\
& + 1,802e^{jw6} - 0,3488e^{jw5} + 1,802e^{jw4} - 0,2366e^{jw3} \\
& + 0,9305e^{jw2} - 0,06244e^{jw} + 0,1988
\end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
& e^{jw10} - 0,2185e^{jw9} + 1,726e^{jw8} - 0,3473e^{jw7} \\
& + 1,929e^{jw6} - 0,2756e^{jw5} + 0,9223e^{jw4} - 0,1009e^{jw3} \\
& + 0,3202e^{jw2} - 0,004673e^{jw} - 0,03496
\end{aligned}$$

## 2.2 Implementação no MatLab

No caso desse filtro que é um rejeita-faixa, foi calculado as frequências normalizadas de passagem e de rejeição para que fosse possível encontrar a ordem do filtro usando a função "ellipord", após isso foi criado um filtro passa-baixa equivalente com o método "ellip"

Após isso foi usado o método "lp2bs" para fazer a criação do filtro rejeita-faixa equivalente ainda no tempo contínuo. Tendo a função de transferência contínua foi usado novamente o método "bilinear" para que fosse criado o mapeamento no tempo discreto. foi usado novamente a função "tf" para achar a função de transferência e o "fvtool" para achar os gráficos equivalentes.

Os gráficos das respostas em frequência em magnitude e fase estão nas Figuras 5 e 6.

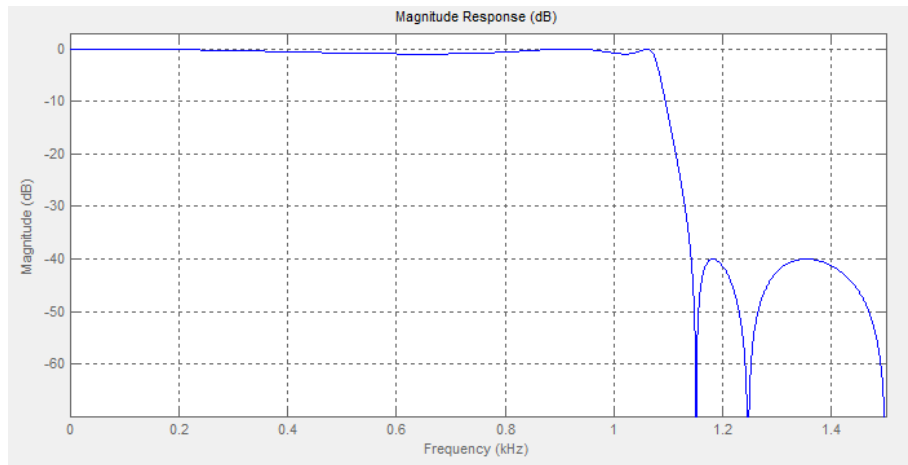


Figure 1: Resposta em frequência em magnitude do filtro I

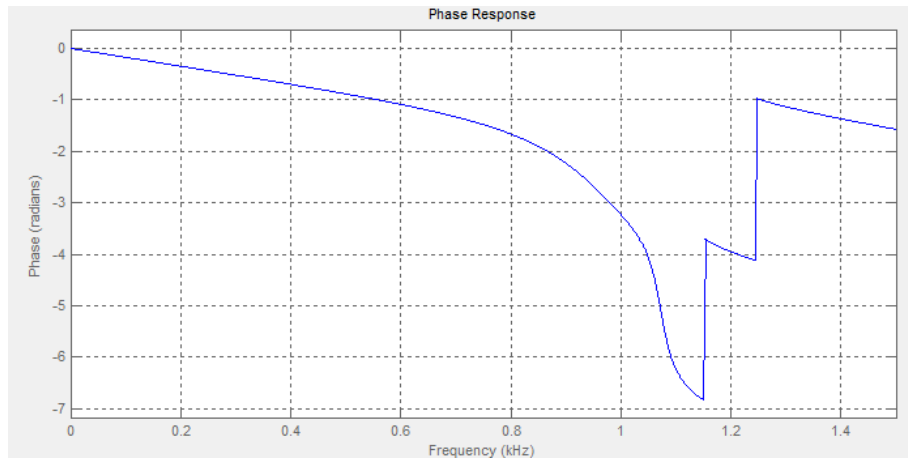


Figure 2: Resposta em frequência em fase do filtro I

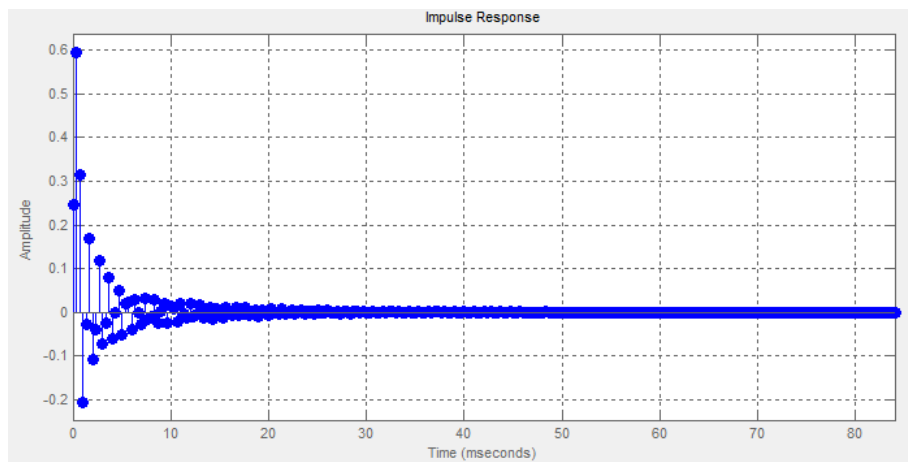


Figure 3: Resposta ao impulso do filtro I

O gráfico da resposta ao impulso e o diagrama de polos e zeros estão nas figuras 3 e 4, respectivamente.

O gráfico da resposta ao impulso e o diagrama de polos e zeros estão nas figuras 7 e 8, respectivamente.

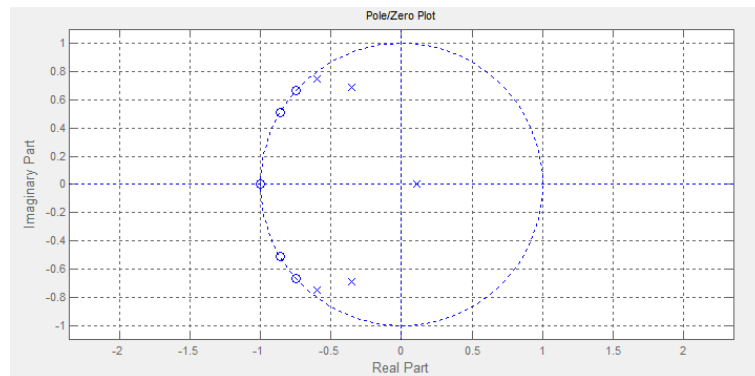


Figure 4: Diagrama de polos e zeros do filtro I

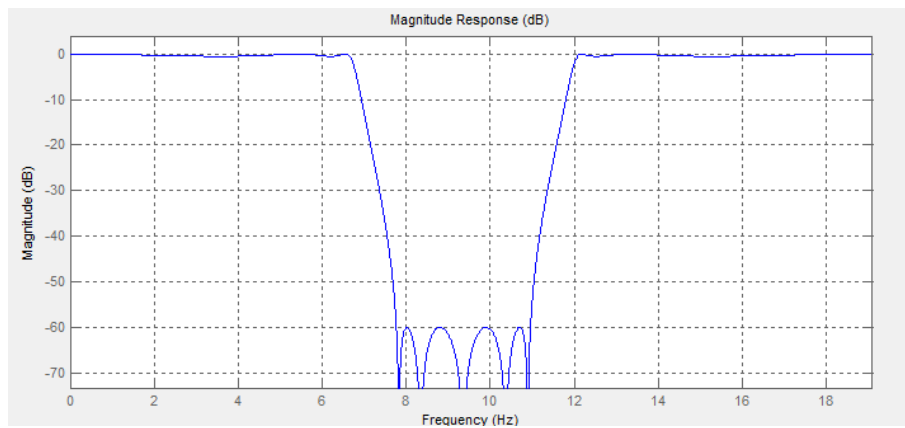


Figure 5: Resposta em frequência em magnitude do filtro II

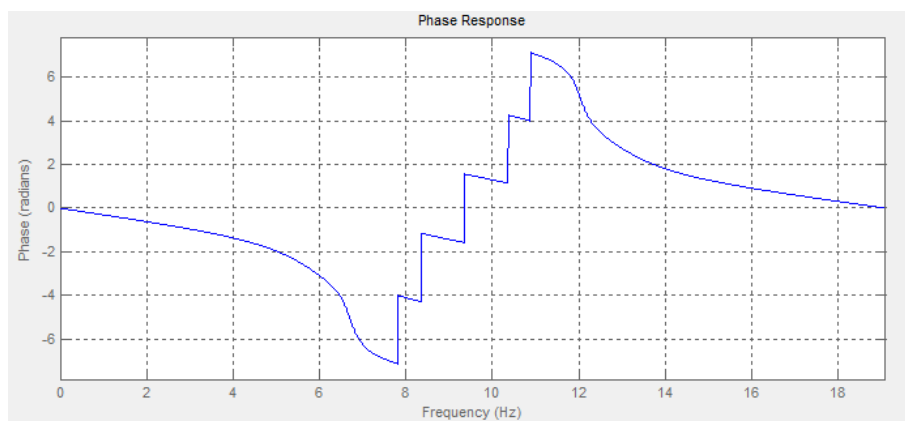


Figure 6: Resposta em frequência em fase do filtro II



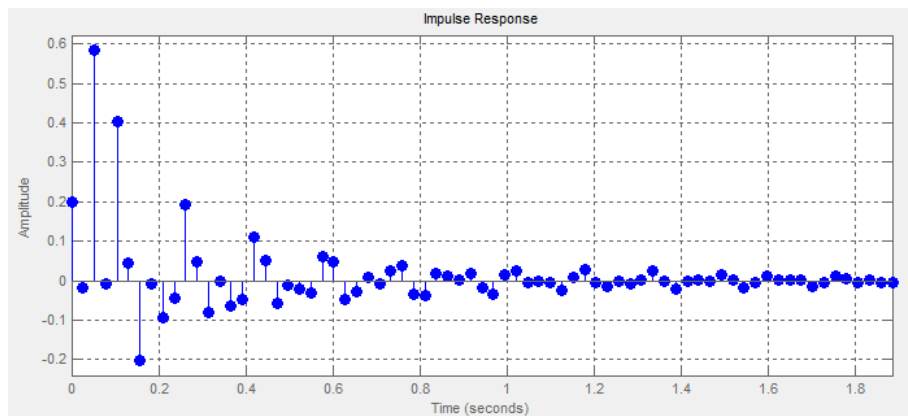


Figure 7: Resposta ao impulso do filtro II

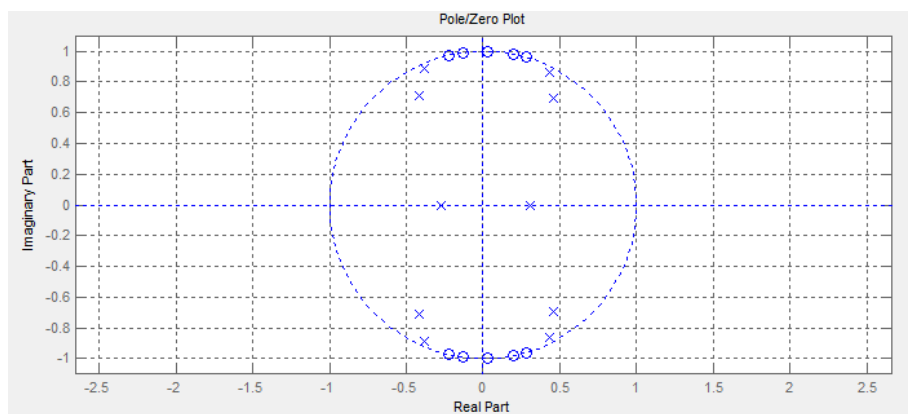


Figure 8: Diagrama de polos e zeros do filtro II