



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
FACULDADE DE ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

Sistemas de Controle

Profa. Adriana Castro (adcastro@ufpa.br)

Capítulo 1

Introdução aos Sistemas de Controle

1.1 Introdução

Sistemas de automação e controle → são de extrema importância para o mundo atual.

Exemplos de sistemas de controle → praticamente todas as atividades humanas.

Sistemas mais notáveis → em processos industriais e de fabricação automatizados.

Ser Humano → mais sofisticado e complexo sistema de controle.

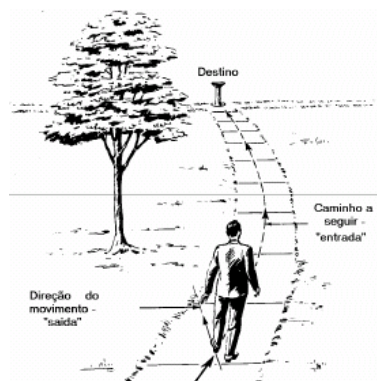


Figura 1 -

Exemplos de Sistemas de Controle:

- **Na indústria aeroespacial:** sistemas de piloto automático, sistema de atrelagem automática.

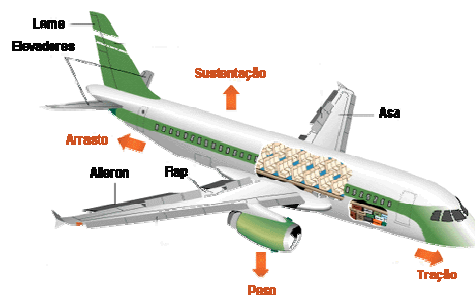


Figura 2 – Sistema de atrelagem automática

- Elevador

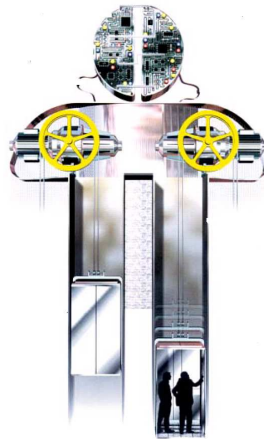


Figura 3 – Elevador Automático

- Sistema de direcionamento de mísseis

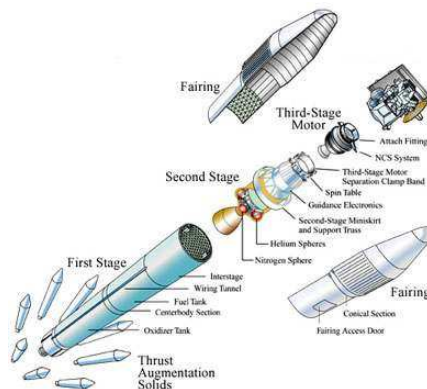


Figura 4 – Míssil

- Máquina de lavar

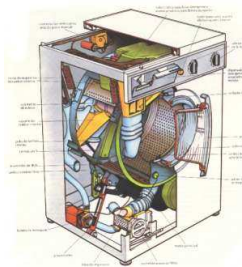


Figura 5 – Máquina de Lavar

- Air- Bag

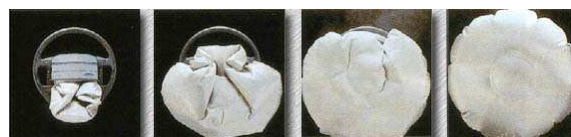


Figura 6 – Air Bag

- Robótica

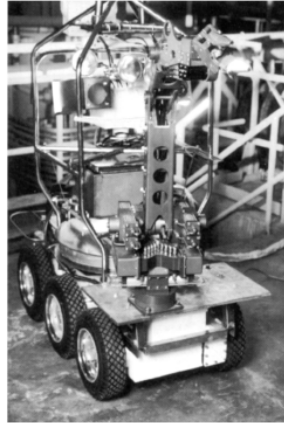


Figura 7 – Robô

- Indústria Automobilística



Figura 8 – Automóvel

- Sistema Fotovoltaico rastreador



Figura 9 - Rastreador

1.2 Breve Histórico da Engenharia de Controle

- As primeiras tentativas de se produzir sistemas de controle mecânicos podem ser encontradas nas antigas civilizações do Egito e Roma. No século I d.C. Hero concebeu uma máquina para abrir as portas dos templos.

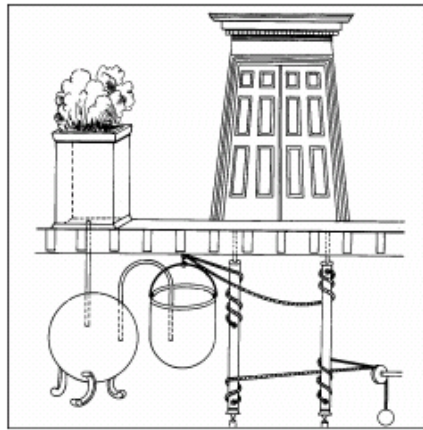


Figura 10 – Sistema de controle para abertura de porta

- **Séculos XVII e XVIII** – dispositivos de controle simples foram criados para resolver problemas práticos.

Cornellis Drebbel - inventou um regulador para manter constante a temperatura de uma câmara – incubadora de frangos e estufa de uso geral.

Willian Henry – inventou um regulador de temperatura que utilizava uma válvula manipulada automaticamente para controlar o gás de combustão e, portanto, a temperatura.

- **Século XVIII** → Revolução Industrial

Destaque: Pêndulo de James Watt como sensor de velocidade.

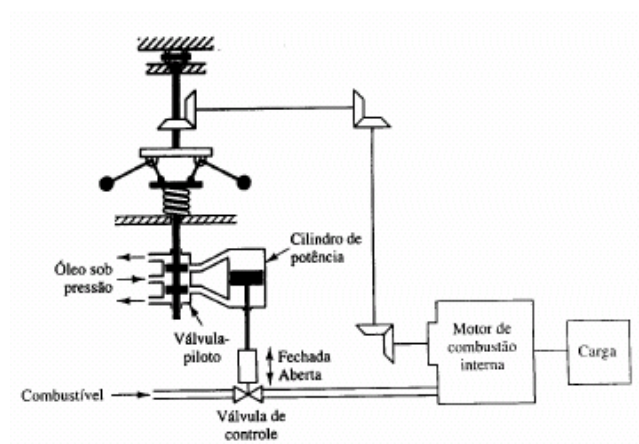


Figura 11 – Pêndulo de Watt

- **Maxwell (1868)** – publicou um artigo analisando o comportamento dinâmico dos sistemas de controle → modelagem dos sistemas através de equações diferenciais → análise da instabilidade (sistemas de terceira ordem) .

- **Routh e Hurwitz** – análise da estabilidade sem a necessidade da solução de equações (sistemas de quinta ordem).
- **Lyapunov (1897)** – permitiu aos pesquisadores soviéticos grandes avanços especialmente na teoria de sistemas não-lineares.
- **Minorsky (1922)** – controle automático para pilotagem de embarcações.
- **Nyquist (1932)** - determinação da estabilidade de sistemas de malha fechada com base na resposta em malha aberta.
- **Nyquist e Bode (Final de 20 e início de 30)** – métodos de resposta em frequência.
- **Hazen (1934)** – servomecanismo (controle de posição).
- **Evans (1947)** – método do lugar das raízes.
 - **Controle clássico** – métodos baseados principalmente na resposta em frequência e lugar geométrico das raízes.
- **Final da década de 50** – atenção focada para projetos de sistemas que fossem ótimos em um aspecto relevante → controle moderno.
 - **Controle Moderno:**
 - Técnicas no domínio do tempo
 - Sistemas multivariáveis
 - R. Kalman – considerado um dos criadores do controle moderno
 - Disponibilidade de computadores
 - 1960 -1980 – controle ótimo de sistemas determinísticos e estocásticos, controle adaptativo.
 - A partir de 1980 – controle robusto.
- **Atualmente:**
 - Teoria de controle é bastante extensa, sendo que a relação entre vários aspectos foi melhor estabelecida.
 - Técnicas no domínio da frequência para sistemas multivariáveis já foram desenvolvidas.
 - Relação entre o domínio do tempo e o domínio da frequência já é melhor compreendida.

- Os termos “controle clássico” e “controle moderno” ainda são usados.
- Trabalhos vêm sendo desenvolvidos utilizando técnicas de inteligência computacional para a modelagem e controle de sistemas.

1.3 . Definições Importantes

- *Planta*: qualquer objeto físico a ser controlado.

Ex.: Um navio, uma caldeira para aquecimento, um carro de fórmula um.

- *Processo*: qualquer operação a ser controlada.

Ex.: Processos químicos, econômicos e biológicos.

- *Sistema*: é uma combinação de componentes que atuam conjuntamente e realizam certo objetivo. É algo mais geral que plantas e processos e não é limitado a algo físico.

Ex.: Sistemas físicos, econômicos, biológicos, etc.

- *Variável de entrada ou de referência* – é a grandeza física que é aplicada à entrada de um sistema.
- *Variável manipulada ou de controle* – é a grandeza física que altera o estado do sistema.
- *Variável controlada ou monitorada, ou saída* – é a grandeza física que é medida e controlada.
- *Unidade dinâmica ou de controle* – é a unidade que reage a um sinal atuador (ou variável de controle) para produzir uma dada saída.
- *Erro ou sinal atuador* – é a diferença entre a entrada de referência e o sinal de saída realimentado e é usado para definir o valor da variável de controle.
- *Realimentação* – é uma intervenção da variável de saída – através do *sinal de realimentação* – na prescrição da variável de controle e usualmente envolve a comparação da saída com a entrada. O resultado da subtração origina o erro ou sinal atuador.
- *Controle* – é o processo de medição do valor da saída do sistema e aplicação de um sinal atuador (erro) ao sistema para corrigir ou limitar o desvio entre o valor medido e a entrada de referência.
- *Perturbação* – é um sinal ou efeito físico que tende a afetar – possivelmente de forma adversa – o valor da saída do sistema. Se uma perturbação é gerada dentro do sistema

ela é dita interna, enquanto que uma perturbação externa é gerada fora do sistema e constitui um dado a mais para o sistema.

- *Sistema de Controle* - É uma interconexão de componentes que formam a configuração de um sistema, a qual proporciona uma resposta desejada para o sistema.

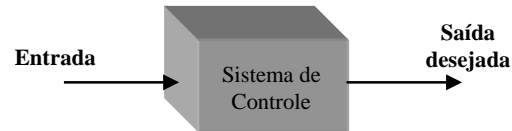


Figura 12 – Sistema de Controle

- *Sistema de Controle de Malha Aberta* - utiliza um controlador conectado em série com o processo a ser controlado, de modo que a entrada do processo deve ser tal que sua saída se comportará como desejado. A característica importante é que a ação de controle independe da saída. Observe-se que um sistema de controle deste tipo fornecerá a saída desejada se não ocorrerem perturbações externas que alterem o valor da saída ou alterações paramétricas internas do sistema. Se alguma destas ocorrer, a saída muda, mas a ação de controle continua exatamente a mesma.

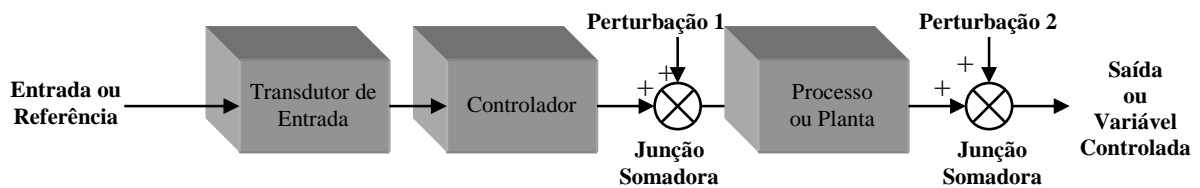


Figura 13 – Sistema de controle de malha aberta

Exemplo : Máquina de lavar

- *Sistema de Controle de Malha Fechada* - É um sistema no qual a saída influencia a variável de controle (com realimentação).

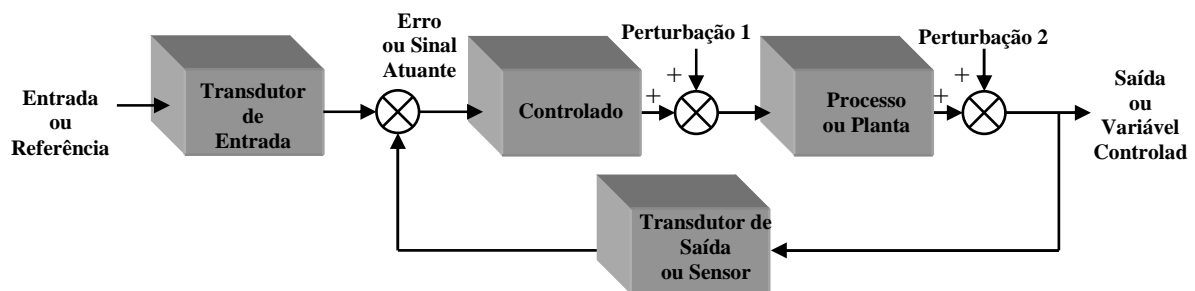


Figura 14 – Sistema de controle de malha fechada

Exemplo:

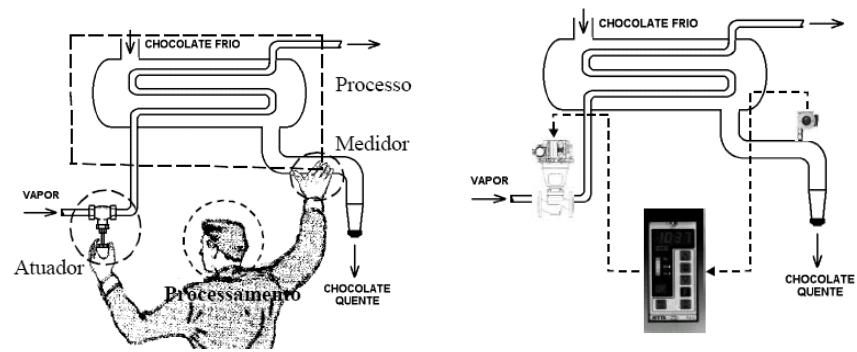


Figura 15 – Sistema de controle de temperatura de chocolate

Capítulo 2

Modelagem e Comportamento Dinâmico de Sistemas

2.1 Modelagem e Representação de Sistemas

Uma grande parte dos sistemas dinâmicos, independentemente de serem de natureza elétrica, mecânica, térmica ou hidráulica, pode ter seu comportamento descrito por equações diferenciais ou de diferenças. A resposta do sistema a uma dada entrada é obtida a partir da solução dessas equações. Estas equações são obtidas a partir das leis físicas que governam um particular sistema, como as leis de Newton para um sistema mecânico, e as leis de Kirchhoff para um sistema elétrico.

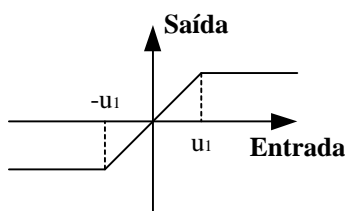
A descrição matemática das características de um sistema é denominada de modelo matemático. A obtenção do modelo é o primeiro e mais importante passo na análise de um sistema, pois é somente quando o modelo representa adequadamente o sistema físico que os resultados são confiáveis.

Durante a modelagem do sistema é necessário estabelecer um compromisso entre a simplicidade do modelo e a precisão dos resultados da análise. Ao optarmos por um modelo simples, necessariamente algumas propriedades presentes no sistema devem ser ignoradas. Fazendo isso, podemos comprometer a boa concordância entre os resultados da análise de um modelo matemático e os resultados do estudo experimental do sistema físico, por exemplo.

Particularmente, se é desejado um modelo matemático linear, então certas não linearidades presentes no sistema físico devem ser ignoradas. Um estudo cuidadoso dos sistemas físicos revela que mesmo os chamados sistemas lineares, são lineares de fato apenas em faixas limitadas de operação. Na prática, quase todos os sistemas eletromecânicos hidráulicos, pneumáticos, etc, envolvem relações não lineares entre suas variáveis.

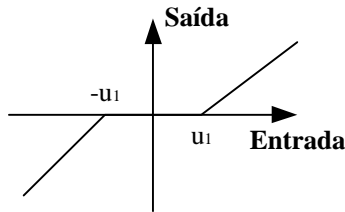
➤ Exemplos de Não-Linearidades Mais Comuns:

- Não-linearidade por saturação: a saída do componente pode saturar para sinais de amplitude elevada na entrada.



Para $-u_1 < u < u_1 \Rightarrow$ SISTEMA LINEAR

- Não-linearidade por zona morta: o sistema não responde a sinais de pequena amplitude.



Para $u > |u_1| \Rightarrow$ SISTEMA LINEAR

Os procedimentos para determinar as soluções de problemas envolvendo sistemas não-lineares são, em geral, extremamente complicados, devido às dificuldades inerentes à modelagem destes sistemas. Normalmente é necessário encontrar sistemas lineares “equivalentes” a estes sistemas, ou seja, o sistema não-linear é aproximado por um sistema linear. Estes sistemas lineares aproximados somente são válidos dentro de uma faixa limitada de operação.

Basicamente, na teoria clássica de controle, as relações entrada-saída de um sistema linear invariante no tempo podem ser representadas através de :

- Funções de Transferência
- Diagrama de Blocos
- Diagrama de Fluxo de Sinal.

2.1.1 Representação através de Função de Transferência:

São comumente utilizadas em engenharia de sistemas de controle para caracterizar relações de entrada e saída de componentes ou de sistemas, que podem ser descritos por equações diferenciais lineares e invariantes no tempo.

A Função de Transferência é definida como a relação entre a Transformada de Laplace da saída do sistema pela Transformada de Laplace da entrada do sistema, admitindo-se todas as condições iniciais nulas.

Filosofia básica da teoria de controle \rightarrow desenvolvimento de técnicas de análise e projeto que evitem soluções exatas de equações diferenciais.

Considerando a equação diferencial que descreve a dinâmica entre a entrada e saída de um determinado sistema:

$$a_0^{(n)} y + a_1^{(n-1)} \dot{y} + \dots + a_{n-1} \dots y + a_n y = b_0^{(m)} x + b_1^{(m-1)} \dot{x} + \dots + b_{m-1} \dots x + b_m x \quad (n \geq m) \quad (1)$$

Sendo:

x – entrada

y – saída

Temos que:

$$\text{Função de Transferência (FT) - } G(s) = \frac{L[\text{saída}]}{L[\text{entrada}]} \Big|_{\text{condições iniciais nulas}} \quad (2)$$

Aplicando a Transformada de Laplace em ambos os lados da equação temos então a função de transferência para o sistema:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0^{(m)} s + b_1^{(m-1)} s + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0^{(n)} s + a_1^{(n-1)} s + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (3)$$

Observações importantes:

1. A FT é inerente ao sistema, não depende nem da entrada e nem da saída do sistema.
2. Sistemas diferentes podem ter funções de transferência iguais.
3. A FT não fornece informação sobre a estrutura física do sistema.
4. Com a FT do sistema, podemos estudar a dinâmica da resposta para vários tipos de entrada.
5. Se a FT não for conhecida (obtida a partir de equações diferenciais) ela pode ser obtida experimentalmente a partir dos valores de entrada e saída do sistema.

Para obtermos a FT de um sistema devemos :

1. Escrever a equação diferencial do sistema
2. Aplicar a Transformada de Laplace supondo condições iniciais nulas.
3. Obter a relação entre a saída e a entrada do sistema.

Exercício : Circuito RLC

Para o circuito da Figura 1 encontrar a função de transferência $\frac{V_c(s)}{V(s)}$

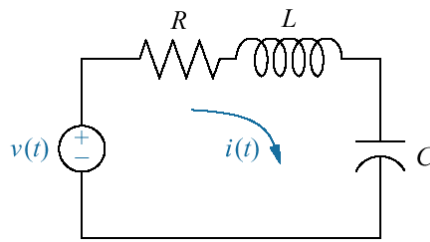


Figura1 – Circuito RLC

2.1.2 Representação através Diagrama de Blocos:

O método do diagrama de blocos para representação de um sistema procura combinar a descrição puramente matemática do sistema através de equações, com a visualização proporcionada por um diagrama.

Um bloco pode representar um único componente ou um grupo de componentes, mas cada bloco é completamente caracterizado por uma função de transferência.

Um Diagrama de Blocos consiste de blocos operacionais interligados que mostram a direção de fluxo e as operações sobre as variáveis do sistema de tal modo que se estabelece uma relação entre entrada e saída quando se percorre um caminho sobre o diagrama.

O diagrama de blocos oferece informações relativas ao comportamento dinâmico do sistema, mas não inclui informações sobre a construção física do mesmo.

Pode acontecer de sistemas diferentes apresentarem diagrama de blocos iguais.

O diagrama de blocos pode ser utilizado simplesmente para representar a composição e interconexão de um sistema, ou ele poder ser usado juntamente com as funções de transferência para representar as relações causa e efeito através do sistema. (Figura 2 e 3)

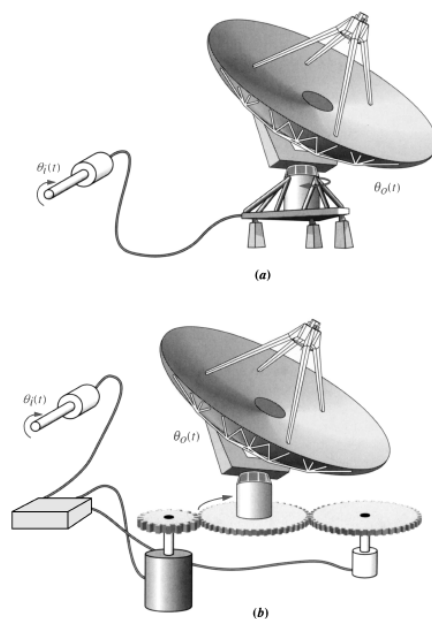


Figura 2 – Sistema de controle de posição de uma antena

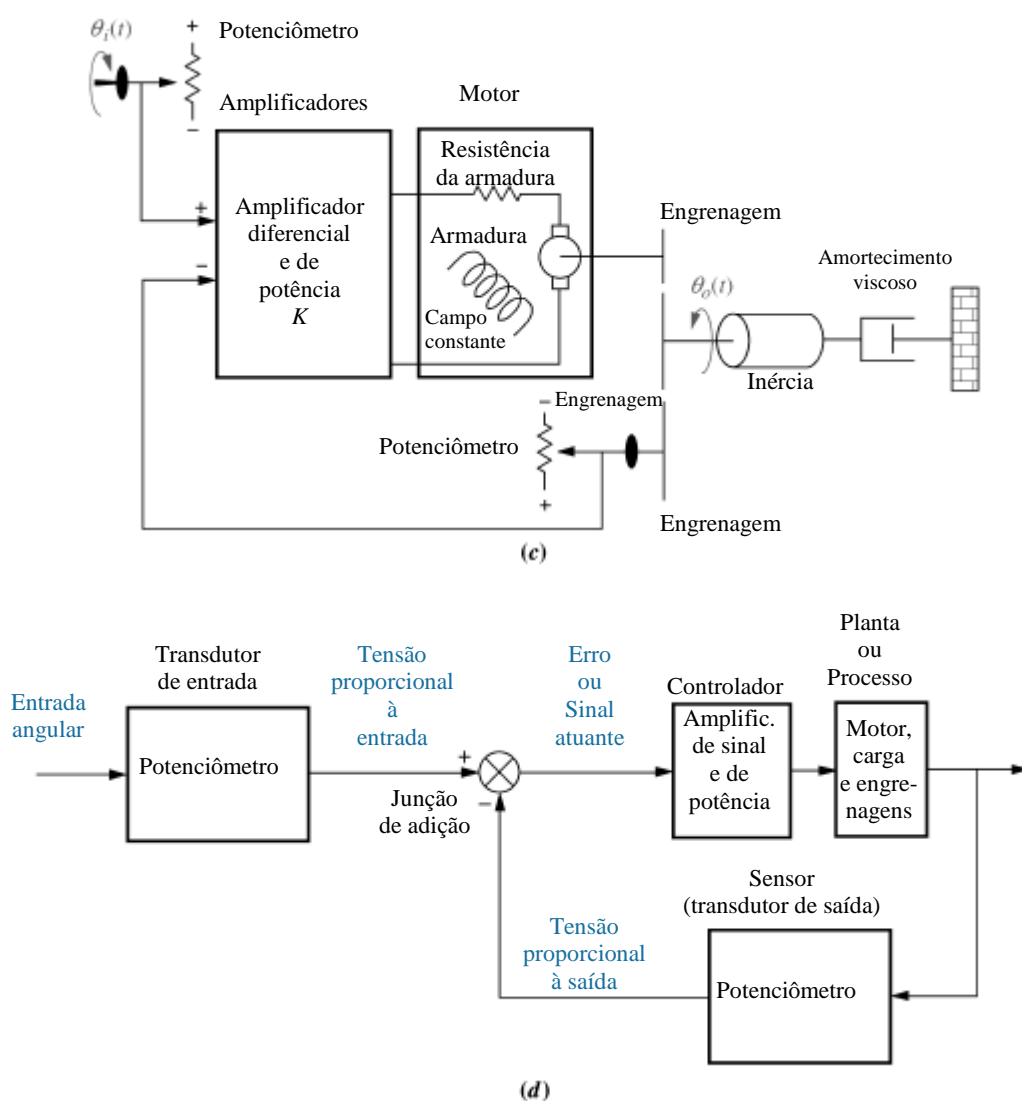


Figura 3 – Esquema do sistema e diagrama de blocos funcional do sistema.

Exemplo 1:

Resistência: A equação é $I(s) = \frac{V(s)}{R}$. Dependendo da entrada escolhida têm-se os diagramas de blocos mostrados na Figura 4.



Figura 4 – Diagramas de blocos.

Exemplo 2:

Indutância: Para a indutância a equação é $V(s) = sLI(s)$. Os diagramas de bloco correspondentes são dados na Figura 5.



Figura 5 – Diagramas de blocos

Elementos básicos de um diagrama de blocos

Blocos funcionais – são associados à operação de multiplicação entre a entrada do bloco e a função de transferência correspondente ao bloco, produzindo a saída.

Somadores ou pontos de soma -Os somadores produzem como saída a soma algébrica dos sinais de entrada, como ilustra a Figura 6.

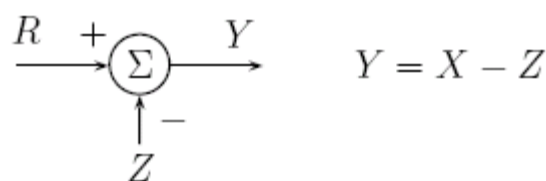


Figura 6 – Somador

Pontos de Ramificação - Nos pontos de ramificação, o mesmo sinal se ramifica é levado a pontos diferentes do diagrama, como mostrado na Figura 7

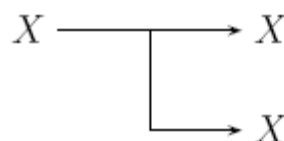


Figura 7 – Ponto de ramificação

Outros componentes

Embora estes componentes básicos sejam suficientes para descrever sistemas lineares, os diagramas de blocos também podem ser usados para descrever sistemas não-lineares. Neste caso blocos podem ser associados a não-linearidades e multiplicadores também podem estar presentes.

Diagrama de blocos de um sistema de malha fechada

Considere o diagrama de blocos da figura 8

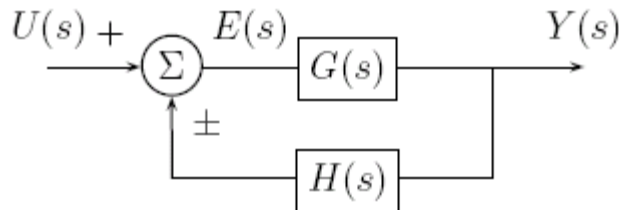


Figura 8 – Diagrama de blocos de um sistema de malha fechada

Terminologia utilizada:

$u(t)$, $U(s)$ - entrada de referência

$y(t)$, $Y(s)$ – sinal de saída (variável controlada)

$b(t)$, $B(s)$ – sinal de realimentação

$e(t)$, $E(s)$ – sinal de erro

Da figura temos que :

$$Y(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = U(s) - B(s) = U(s) - H(s)Y(s)$$

Eliminando $E(s)$ temos:

$$Y(s) = G(s)(U(s) - H(s)Y(s))$$

$$Y(s) + G(s)H(s)Y(s) = G(s)U(s)$$

$$Y(s)[1 + G(s)H(s)] = G(s)U(s)$$

E finalmente obtemos a função de transferência de malha fechada do sistema considerando realimentação positiva ou negativa:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)} \quad (4)$$

Onde a saída do sistema pode ser obtida de:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} U(s) \quad (5)$$

Podemos observar que a saída do sistema depende tanto da FT de malha fechada quanto da natureza do sinal de entrada.

Função de transferência de malha aberta:

$$\frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s) \quad (6)$$

Função de Transferência de ramo direto:

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = G(s) \quad (7)$$

Quando $H(s) = 1 \rightarrow$ FT de malha aberta igual a FT de ramo direto

Procedimento para construção do diagrama de blocos:

1. Escrever as equações que descrevem o comportamento dinâmico de cada componente do sistema.
2. Obter a Transformada de Laplace das equações, admitindo-se nulas as condições iniciais.
3. Representar, individualmente, em forma de bloco a Transformada de Laplace de cada equação.
4. Por fim agrupar os elementos em um diagrama de blocos completo.

Exemplo:

Montar um diagrama de blocos representativo do circuito da Figura 9

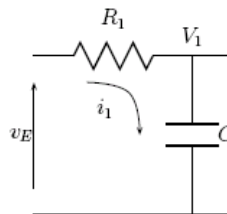


Figura 9 – Circuito RC

Exercício :

Montar um diagrama de blocos representativo do circuito da Figura 10

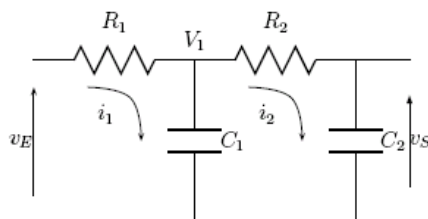


Figura 10 – Circuito elétrico

Álgebra de Diagramas de Blocos

A transformação de diagramas de blocos permite a simplificação de diagramas complexos, podendo se obter um diagrama que relaciona diretamente a variável de entrada e a de saída.

Existem algumas regras que permitem a realização desta transformação, e que são apresentadas a seguir.

a) Combinação de blocos em série ou cascata

Quando blocos estão em cascata, pode-se obter um bloco equivalente simplesmente multiplicando-se as funções de transferência dos blocos. A Figura 11 mostra o caso de dois blocos em cascata,mas

o mesmo se aplica a um número qualquer de blocos.

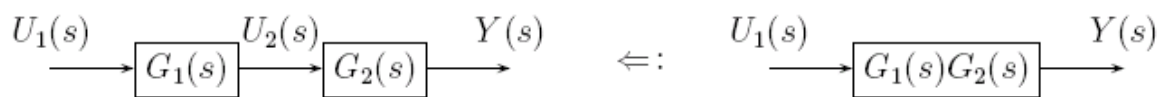


Figura 11- Blocos em cascata

b) Movimentação de um ponto de soma para trás de um bloco

No exemplo apresentado na figura 12, observa-se à esquerda, que o sinal $U_2(s)$ é multiplicado pela função de transferência $G(s)$. Para que nada seja alterado, aquele sinal deve ser multiplicado por $G(s)$ após o deslocamento do ponto de soma. Deve-se então acrescentar um bloco $G(s)$ na entrada $U_2(s)$.

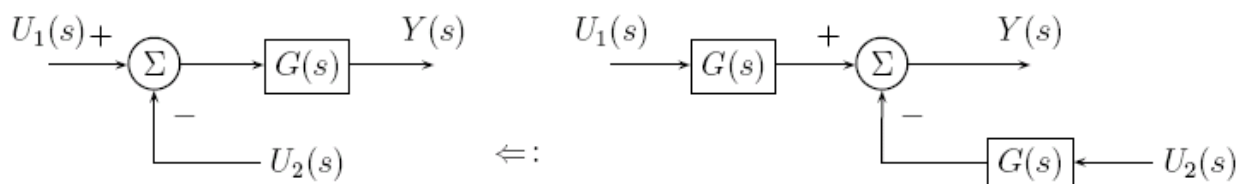


Figura 12 – Movimentação para trás do bloco

c) Movimentação de um ponto de soma para frente de um bloco

Neste caso o sinal $U_2(s)$, não multiplica $G(s)$. Após a mudança do ponto de soma ele ainda não deve multiplicar aquela função. Deve-se então adicionar um bloco $1/G(s)$, na entrada $U_2(s)$, para não alterar o valor de $Y(s)$.

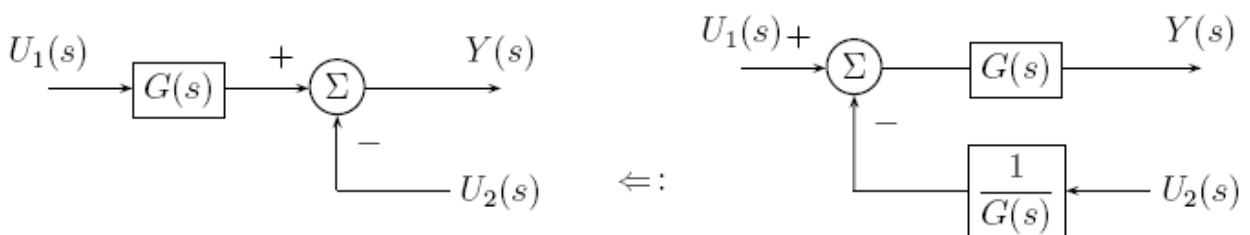


Figura 13 – Movimentação para frente do bloco

d) Movimentação de um ponto de ramificação para trás de um bloco

A simples mudança do ponto de soma alteraria o valor da variável na ramificação. Para manter o valor $U(s)$ deve-se então adicionar um bloco com valor $1/G(s)$, para manter o valor de saída $U(s)$.

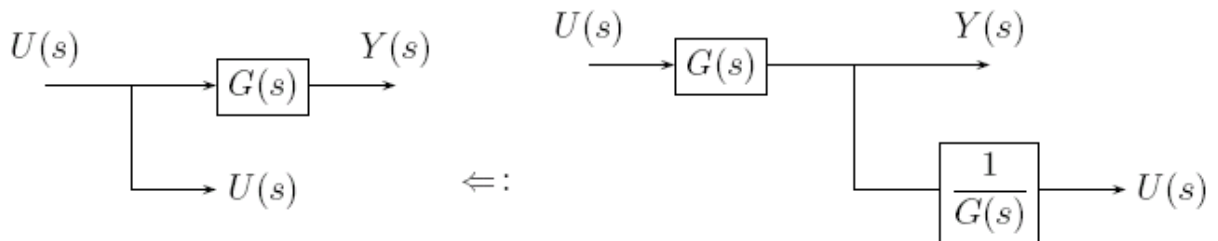


Figura 14 – Movimentação de um ponto de ramificação

e) Passagem de um ponto de ramificação para frente de um bloco

A variável na ramificação, no lado esquerdo da figura abaixo, é $Y(s) = G(s)U(s)$. Para manter este valor, após a mudança do ponto de ramificação, deve-se adicionar um bloco $G(s)$.

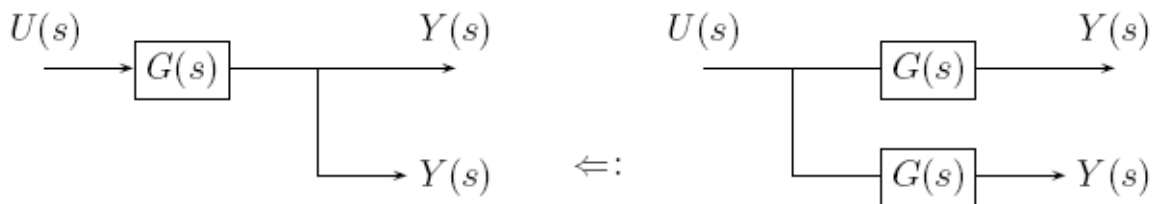


Figura 15 – Passagem de um ponto de ramificação

2.1.3 Diagrama de fluxo de sinal (método alternativo criado por S. J.

Mason)

OBS: não é superior ao diagrama de blocos – fornecem as mesmas informações

O diagrama de fluxo de sinal é uma ferramenta visual para representar a relação causal entre componentes do sistema. O diagrama de fluxo de sinal, além do uso para obtenção de uma função de transferência equivalente de um sistema, pode ser usado para explicar vários conceitos de controle moderno. A Figura 16 ilustra um diagrama de fluxo de sinal.

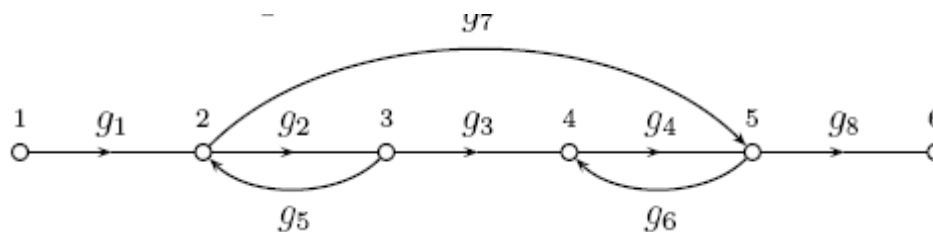


Figura 16 – Diagrama de fluxo de sinal

Elementos e definições

A seguir são apresentadas algumas definições relacionadas ao diagrama de fluxo de sinal.

Nós - Sinais internos como a entrada comum para vários blocos ou a saída de um somador, são chamados nós. Nós são usados para representar variáveis. No exemplo da Figura 16 têm-se os nós 1; 2; 3; 4; 5 e 6.

Ramo - Segmento direcionado unindo 2 nós.

Tramitância - Ganho do ramo

Caminho - É a sequência de nós conectada, a rota passando de uma variável a outra, na direção do fluxo, sem incluir nenhuma variável mais de uma vez. Na Figura 16 os caminhos 123 e 2345 são exemplos de caminhos.

Caminho direto - Caminho da entrada para a saída, sem incluir nenhum nó mais de uma vez. No exemplo da Figura 16 têm-se dois caminhos diretos; 1256 e 123456.

Malha - Caminho que se origina e termina no mesmo nó. Na Figura 16 tem-se duas malhas; 232 e 454.

Ganho do caminho - Produto dos ganhos dos ramos que formam um caminho. Por exemplo, na Figura 16, o ganho do caminho direto 1256 é $g_1 g_7 g_8$.

Ganho de malha - É o ganho do caminho associado com uma malha. Na Figura 16 o ganho da malha 232 é $g_2 g_5$.

Nó de entrada (fonte) - É um nó que possui somente ramos que se afastam dele. No exemplo da Figura 16 o nó 1 é o nó fonte.

Nó de saída (sorvedouro) - É um nó que possui apenas ramos que se dirigem a ele. Na Figura 16 o nó 6 é o nó de saída.

Nó misto - Possuem ramos que chegam e saem.

Caminhos que não se tocam - Caminhos não se tocam se não existem nós comuns entre eles. No exemplo da Figura 16 as malhas 232 e 454 não se tocam. Já os caminhos diretos 1256 e 123456 se tocam com as duas malhas.

Álgebra de diagramas de fluxo de sinal

Algumas regras simples permitem eliminar nós e simplificar um diagrama de fluxo de sinal. Estas regras são similares às regras de álgebra de blocos.

1. O valor da variável representada por um nó é igual a soma de todos os sinais que entram no nó.
2. O valor da variável representada por um nó é transmitido por todos os ramos que deixam o nó.
3. Ramos paralelos na mesma direção conectando dois nós podem ser substituídos por um único ramo com ganho igual a soma dos ganhos dos ramos em paralelo.

Construção do diagrama de fluxo de sinal

O diagrama de fluxo de sinal pode ser construído facilmente a partir do diagrama de blocos do sistema. Consideram-se as variáveis de entrada e de saída como sendo nós fonte e sorvedouro, respectivamente. Além disso, as variáveis de saída dos somadores, variáveis de entrada de blocos e variáveis de entrada comum a vários blocos também são tomados como nós. Ao se construir o diagrama de fluxo de sinal a partir do diagrama de blocos deve-se observar que o nó não deve ser confundido com um somador. O nó representa uma variável cujo valor é a soma dos sinais que incidem neste nó. É importante notar que o diagrama de fluxo de sinal não é único. Pode-se escolher um número diferente de nós e ainda se representar o mesmo sistema.

Exemplo 1: Considere o sistema representado pelo diagrama de blocos da Figura 17. Vamos construir o diagrama de fluxo de sinal partir deste diagrama.

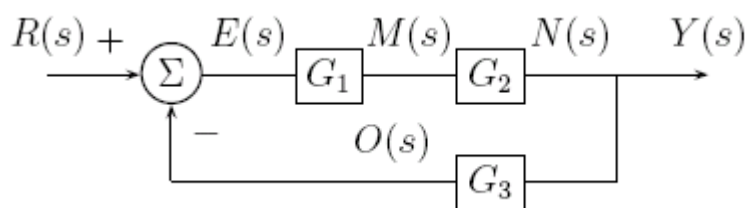


Figura 17 – Diagrama de Blocos

O primeiro passo é identificar as variáveis que serão representadas por nós no diagrama de fluxo. As variáveis $R(s)$ e $Y(s)$ corresponderão aos nós de entrada e saída, respectivamente. Escolhemos ainda as variáveis $E(s)$, $M(s)$, $N(s)$ e $O(s)$ para serem representadas por nós no diagrama de fluxo. Estes nós podem então ser desenhados, conforme a Figura 18.

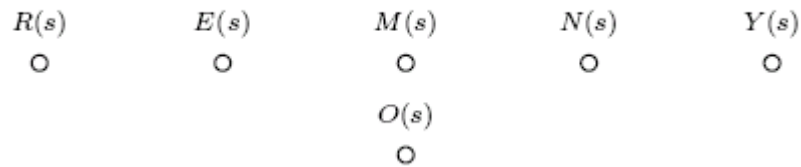


Figura 18 – Representação dos nós

A seguir identificam-se os ramos que incidem nestes nós. O valor de cada nó corresponde a soma dos valores dos sinais incidentes. Para facilitar a explicação, iremos nos referir a cada nó correspondente a uma variável pelo nome da própria variável. Começamos pela variável $R(s)$.

Esta variável é a entrada e portanto nenhum ramo terminará no nó $R(s)$. A variável $E(s)$ é a soma de $R(s)$ e do negativo de $N(s)$. Portanto haverá um ramo incidente vindo do nó $R(s)$, com ganho unitário, e um ramo vindo de $N(s)$ com ganho -1 . Isto é mostrado na Figura 19.

A variável $M(s)$ tem um valor que corresponde ao valor de $E(s)$ multiplicado por G_1 . Portanto existe um ramo incidente em $M(s)$ vindo de $E(s)$ com ganho G_1 , como mostrado na Figura 20.

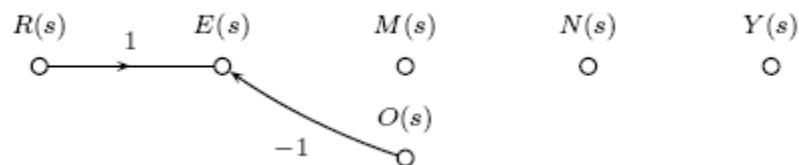


Figura 19 – Adição de ramos incidentes no nó $E(s)$

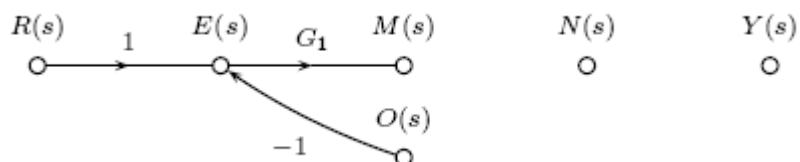


Figura 20 – Adição de ramos incidentes no nó $M(s)$

A variável $N(s)$ é o valor de $M(s)$ multiplicado por G_2 e portanto existe um ramo incidente em $N(s)$ vindo de $M(s)$ com ganho G_2 . O valor de $Y(s)$ é o valor de $N(s)$ e portanto existe um ramo incidente em $Y(s)$ com ganho 1 . O diagrama até este ponto é mostrado na Figura 21

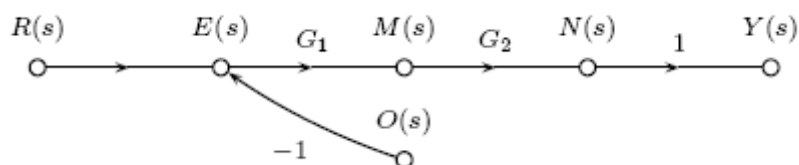


Figura 21-Adição dos ramos incidentes no nós $M(s)$ e $Y(s)$

Finalmente a variável $O(s)$ corresponde ao valor de $N(s)$ multiplicado por G_3 . Portanto um ramo parte de $N(s)$ e termina em $O(s)$ com ganho G_3 . Com isto o diagrama de fluxo de sinal está completo, como mostrado na Figura 22.

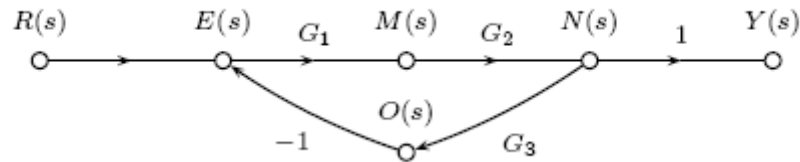


Figura 22 – Diagrama completo de fluxo de sinal

Regra de Mason

A função de transferência de um sistema pode ser determinada a partir do diagrama de fluxo de sinal através da regra de Mason. Esta regra é útil em casos onde é muito difícil determinar a função de transferência equivalente de um diagrama de blocos usando a álgebra de blocos.

A regra de Mason é dada por:

$$G(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_i G_i \Delta_i$$

onde:

$G_i \rightarrow$ Ganho do i -ésimo caminho direto

$\Delta = 1 - \sum (\text{todos os ganhos das malhas individuais})$

$+\sum$ (produto dois a dois dos ganhos das malhas que não se tocam)

$-\sum$ (produto três a três dos ganhos das malhas que não se tocam)

$+\sum$ (produto quatro a quatro dos ganhos das malhas que não se tocam)

$-\sum$ (produto cinco a cinco dos ganhos das malhas que não se tocam)....

$\Delta_i \rightarrow$ Valor de Δ para a parte do diagrama que não toca o i -ésimo caminho direto.

Exemplo:

Considere o diagrama de blocos da figura abaixo:

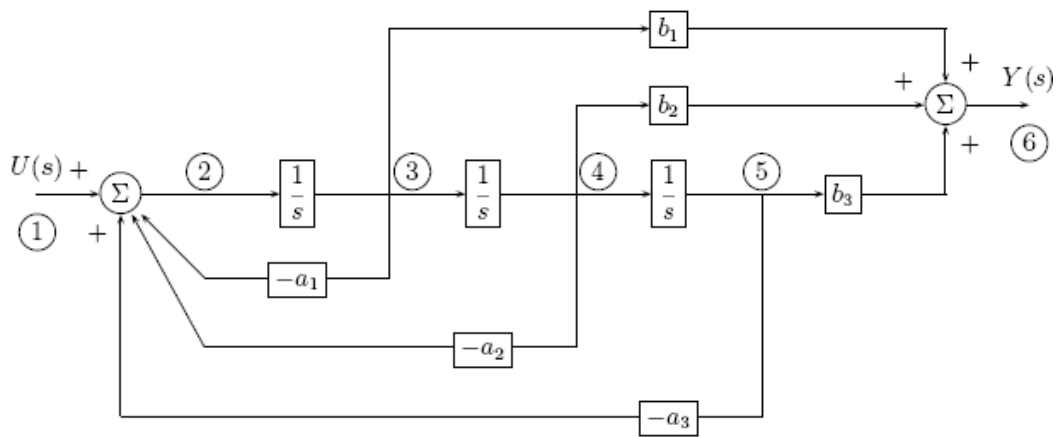


Figura 23 – Diagrama de blocos

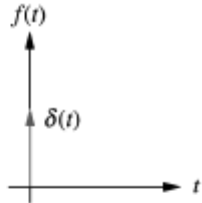
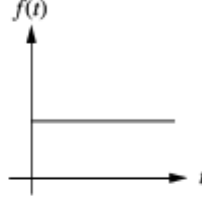
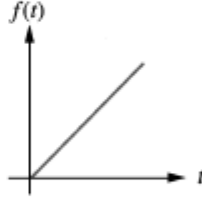
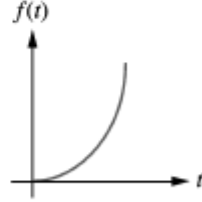
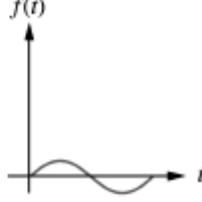
- Encontrar o diagrama de fluxo de sinal
- Encontrar a função de transferência do sistema utilizando a regra de Mason.

2.2 Comportamento Dinâmico de Sistemas Lineares

A determinação do modelo matemático de um sistema é o primeiro passo para a análise e projeto de sistemas de controle. Com o modelo matemático obtido podemos então verificar e analisar o comportamento dinâmico (resposta transitória e de estado estacionário) das diversas variáveis envolvidas no processo.

Sinais de testes típicos podem ser aplicados na entrada do sistema para que a análise da resposta do sistema para um determinado projeto de controlador possa ser analisada. Sinais de teste típicos podem ser vistos na tabela 1.

Tabela 1 – Sinais de teste típicos

Entrada	Função	Descrição	Gráfico
Impulso	$\delta(t)$	$\delta(t) = \infty \quad 0- < t < 0+$ $= 0$ $\int_{0-}^{0+} \delta(t) dt = 1$	
Degrau	$u(t)$	$u(t) = 1 \quad t > 0$ $= 0 \quad t < 0$	
Rampa	$tu(t)$	$tu(t) = t \quad t \geq 0$ $= 0$	
Parábola	$\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{2}t^2u(t) = \frac{1}{2}t^2 \quad t \geq 0$ $= 0$	
Senóide	ωt		

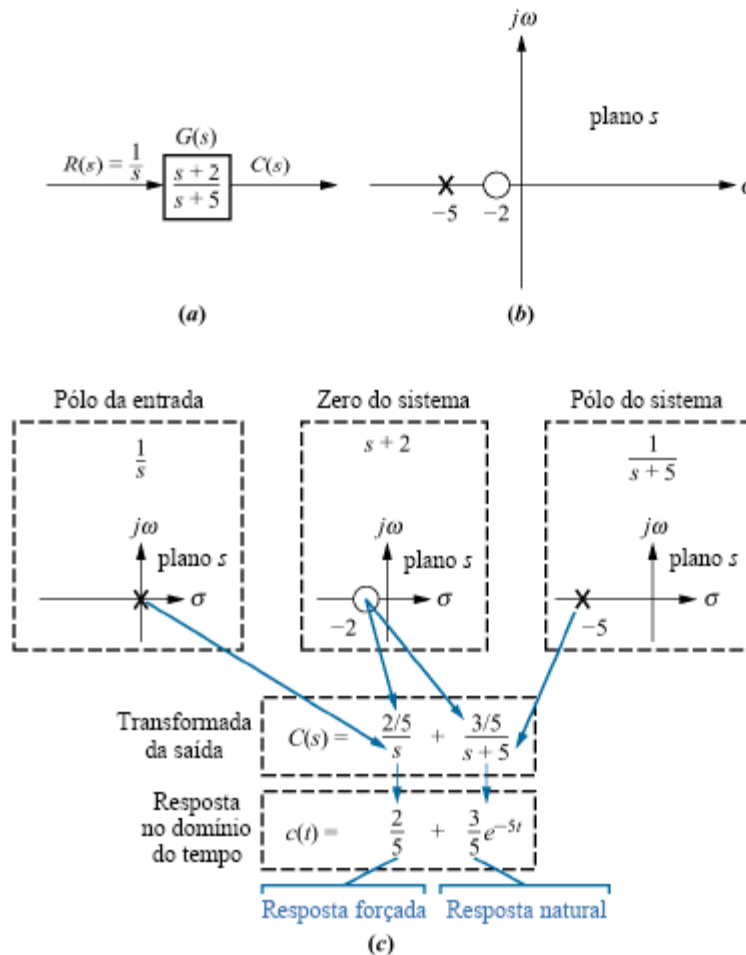
2.2.1 Pólos e Zeros de uma Função de Transferência

O conceito de pólos e zeros é fundamental para análise e projeto de sistemas de controle pois simplifica o cálculo da resposta de um sistema.

Os **pólos** de uma função de transferência são os valores da variável s , da transformada de Laplace, que fazem com que a função de transferência se torne infinita \rightarrow raízes do denominador da função de transferência

Os **zeros** de uma função de transferência são os valores da variável s , da transformada de Laplace, que fazem com que a função de transferência se torne igual a zero \rightarrow raízes do numerador da função de transferência.

Exemplo:



Os pólos determinam a natureza da resposta no domínio do tempo:

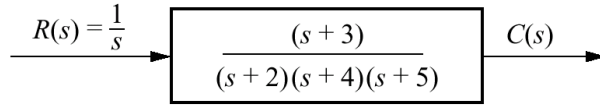
Pólos da função de entrada – determinam a forma da resposta forçada (estado estacionário)

Pólos da Função de transferência - determinam a forma da resposta natural (resposta transitória)

Pólos e zeros da função de entrada ou da função de transferência – contribuem para as amplitudes das partes componentes da resposta total.

Exemplo: Cálculo da resposta usando pólos.

Considere o sistema abaixo:



Por inspeção temos:

$$C(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+4} + \frac{K_4}{s+5}$$

Aplicando a transformada inversa temos então a resposta temporal:

$$c(t) = K_1 + K_2 e^{-2t} + K_3 e^{-4t} + K_4 e^{-5t}$$

2.2.2 Sistemas de Primeira Ordem

Um sistema de primeira ordem pode ser descrito pela função de transferência mostrada na figura 24.

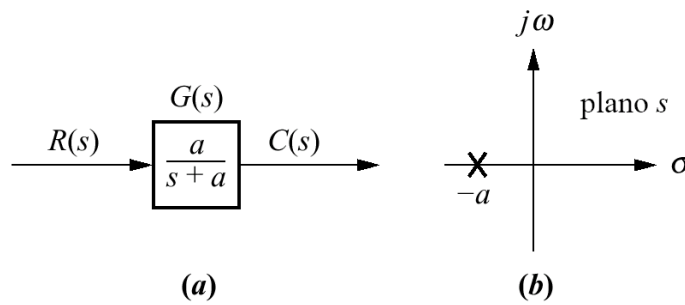


Figura 24 – Sistema de Primeira Ordem

Aplicando uma entrada degrau unitário ao sistema, a resposta $C(s)$ será:

$$C(s) = \frac{a}{s(s+a)} \quad (8)$$

Aplicando a transformada inversa temos a resposta do sistema no domínio do tempo que pode ser vista na figura 25:

$$c(t) = 1 - e^{-at} \quad (9)$$

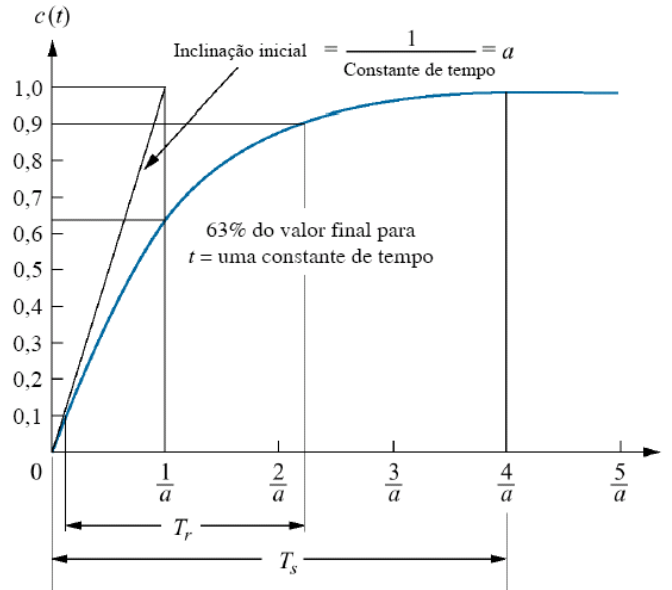


Figura 25 – Resposta ao degrau de um sistema de primeira ordem

Chamando de τ a constante de tempo do sistema temos então que :

$$\tau = \frac{1}{a} \quad (10)$$

Podemos definir a constante de tempo como o tempo necessário para que a resposta do sistema ao degrau unitário alcance 63% do seu valor final.

Podemos ver que a constante de tempo do sistema é o inverso do pólo da função de transferência. Logo quanto mais afastado o pólo estiver do eixo imaginário mais rápida será a resposta transitória do sistema.

Tempo de subida (T_r): tempo necessário para que a forma de onda vá de 0.1 a 0.9 do seu valor final.

Encontrando a diferença para os valores de t para os quais $c(t) = 0.9$ e $c(t) = 0.1$ obtemos:

$$T_r = \frac{2.31}{a} - \frac{0.11}{a} = \frac{2.2}{a} \quad (11)$$

Tempo de assentamento ou de acomodação (T_s): tempo necessário para que a resposta alcance uma faixa de valores de 2% do valor final e aí permaneça.

Fazendo $c(t) = 0.98$ na equação (9) e resolvendo em função de t temos:

$$T_s = \frac{4}{a} \quad (12)$$

2.2.3 Sistemas de Segunda Ordem

Considerando sistemas de segunda ordem, dois casos serão analisados:

- Sistemas com dois pólos reais
- Sistemas com dois pólos complexos conjugados

Caso de pólos reais:

Neste caso a função de transferência é dada por:

$$C(s) = \frac{1}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)} \quad (13)$$

Com $\tau_1 > 0$ e $\tau_2 > 0$

A resposta do sistema ao degrau é dada por:

$$c(t) = c_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + c_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad (14)$$

Os pólos determinam a forma da resposta do sistema. Se um dos pólos for dominante, ou seja, se um dos pólos estiver bem mais próximo do eixo imaginário que o outro, a resposta do sistema de segunda ordem será bem semelhante a uma resposta do tipo primeira ordem.

Caso de pólos complexos:

Consideremos a função de transferência padrão de um sistema de segunda ordem:

$$C(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad (15)$$

Sendo que os pólos são dados por $p = \sigma \pm jw_p$, com $\sigma = -\zeta w_n$ e $w_p = w_n \sqrt{1 - \zeta^2}$.

A resposta no domínio do tempo é dada por:

$$c(t) = M e^{\sigma t} \cos(w_p t + \phi) \quad (16)$$

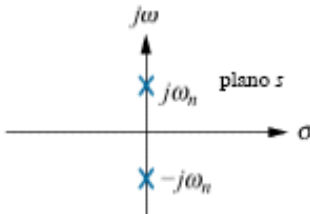
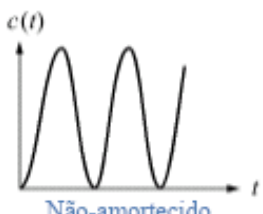
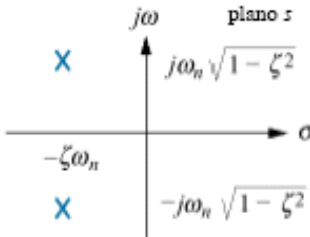
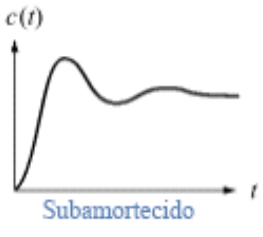
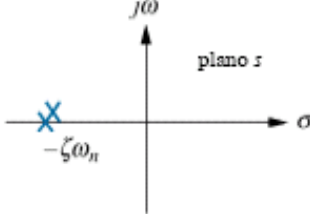
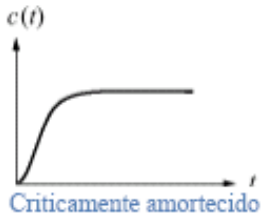
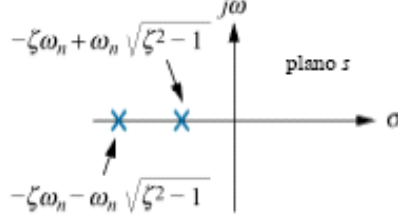
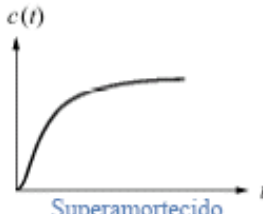
Portanto a resposta de um sistema de segunda ordem com pólos complexos apresenta uma componente senoidal com uma envoltória dada por $e^{\sigma t}$. A frequência da senóide é w_p .

Verifica-se então uma associação entre a posição dos pólos no plano complexo e a forma da resposta. Os pólos podem ser expressos como $-\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, onde ζ é o coeficiente de amortecimento do sistema e ω_n a frequência natural de amortecimento. A frequência ω_p é a frequência natural de oscilação e corresponde a parte imaginária do pólo. O coeficiente de amortecimento é uma indicação do decaimento da resposta no tempo. A frequência natural é a frequência que o sistema oscila quando o coeficiente de amortecimento é igual a zero.

O comportamento dinâmico dos sistemas de segunda ordem é descrito em termos dos parâmetros: coeficiente de amortecimento e frequência natural. A tabela abaixo apresenta a classificação dos sistemas de segunda-ordem baseada no coeficiente de amortecimento do sistema.

Note que para o caso em que o coeficiente de amortecimento é igual ou maior que 1, nós temos o primeiro caso analisado de sistemas de segunda ordem com dois pólos reais.

Tabela II – Classificação dos sistemas de segunda-ordem

ζ	Pólos	Resposta ao degrau
0		 <p>Não-amortecido</p>
$0 < \zeta < 1$		 <p>Subamortecido</p>
$\zeta = 1$		 <p>Criticamente amortecido</p>
$\zeta > 1$		 <p>Superamortecido</p>

Especificações da Resposta Transitória

1. Tempo de atraso (T_d): tempo necessário para resposta alcançar metade de seu valor final pela primeira vez.
2. Tempo de subida (T_r): tempo necessário para resposta passar de 10% a 90%, ou de 5% a 95% ou de 0% a 100% do valor final. $T_r = \frac{\pi - \beta}{w_d}$ com β definido na figura 26.
3. Tempo de pico (T_p): tempo para que a resposta atinja o primeiro pico de sobressinal.

$$T_p = \frac{\pi}{w_d}$$
4. Máximo sobre-sinal (M_p): é o valor máximo do pico da curva de resposta medido a partir da unidade. Se o valor final diferir da unidade, então é comum utilizar a porcentagem de sobre-sinal definida por: $M_p(\%) = \frac{c(T_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$
5. Tempo de acomodação (T_s): tempo necessário para que a curva alcance valores em uma faixa (usualmente 2% ou 5%) em torno do valor final e aí permanecendo indefinidamente. $T_s = \frac{4}{\zeta w_n}$ (critério de 2%) e $T_s = \frac{3}{\zeta w_n}$ (critério de 5%)

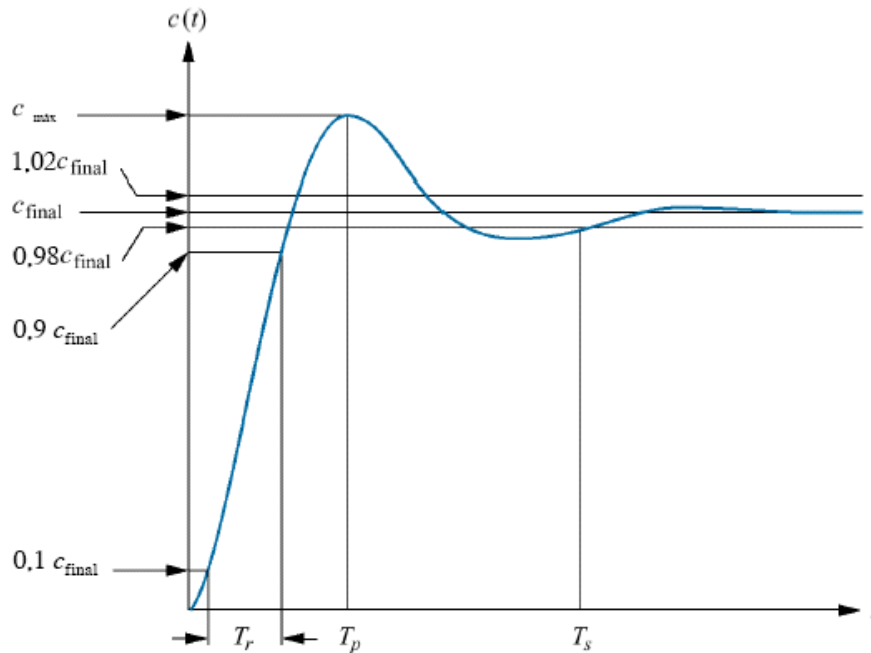


Figura 27- Especificações no domínio do tempo

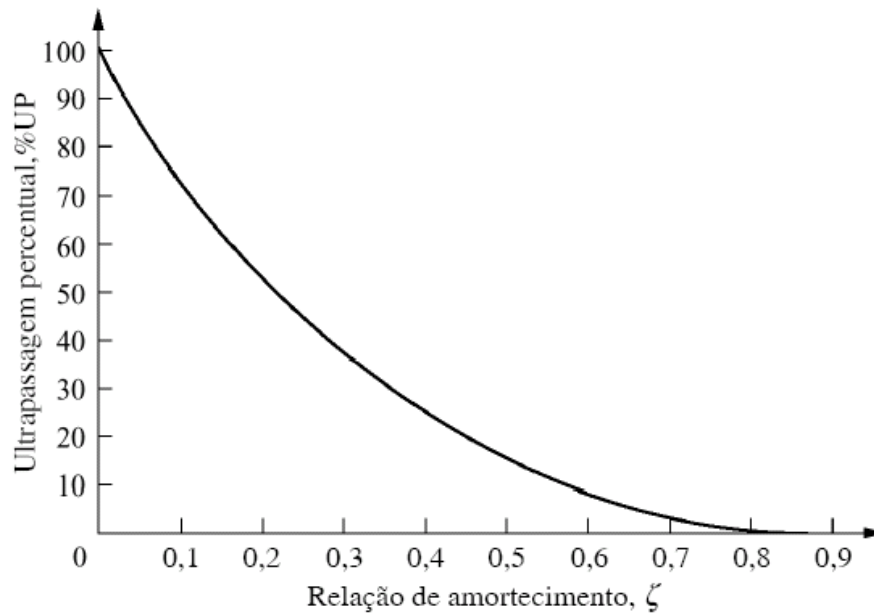


Figura 28 – $M_p(\%)$ em relação ao amortecimento

Efeito de pólos e zeros adicionais

Sob certas condições, sistemas com mais de dois pólos e com zeros podem ser aproximados como sistemas de segunda ordem que possuem apenas dois pólos dominantes. Uma vez justificada esta aproximação poderemos então utilizar as especificações no domínio do tempo para estes sistemas de ordem elevada.

Efeito de um pólo adicional

A resposta no domínio do tempo para um sistema de segunda-ordem com um pólo adicional em $-\alpha_r$ é dada por:

$$c(t) = Au(t) + e^{-\zeta\omega_n t} (B \cos \omega_d t + C \sin \omega_d t) + De^{-\alpha_r t} \quad (17)$$

As partes componentes de $c(t)$ para três casos de α_r são mostradas na figura 29.

Podemos observar que para o caso II e III nós poderemos aproximar o sistema para um sistema de segunda-ordem com pólos dominantes. Para o caso I, em que $\zeta\omega_n$ não é muito maior que α_r , a resposta transitória para o pólo real não se tornará insignificante no instante do primeiro sobre-sinal. Neste caso não poderemos aproximar tal sistema para um sistema de segunda-ordem e desta forma utilizar as especificações no domínio do tempo.

A pergunta que se faz é a seguinte: quão longe dos pólos dominantes deverá estar o terceiro pólo para que possamos aproximar o sistema de um sistema de segunda-ordem?

Uma regra prática que vem sendo utilizada (condição necessária mais não suficiente) é a regra das “cinco vezes”, no qual diz que para que possamos aproximar um sistema para um sistema de segunda-ordem com certa segurança durante o projeto temos que ter o pólo real adicional à esquerda dos pólos dominantes cinco vezes mais distante.

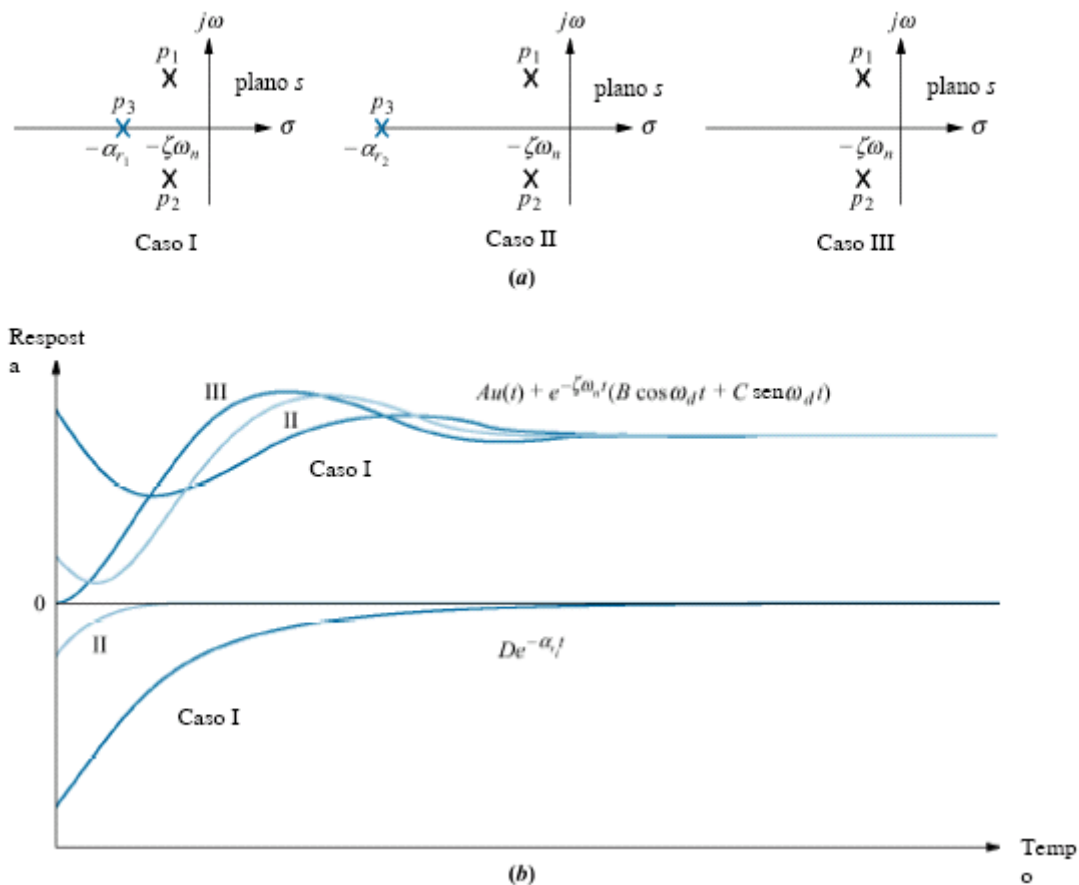


Figura 29 – respostas dos componentes de um sistema com três pólos

Exemplo:

Considere o sistema de segunda ordem com a seguinte função de transferência:

$$C_1(s) = \frac{24.542}{s^2 + 4s + 24.542}$$

A figura 30 apresenta as respostas ao degrau para tal sistema e mais:

$C_2(s)$ – acrescentando um pólo em -10

$C_3(s)$ – acrescentando um pólo em -3

Podemos verificar que o caso do pólo em -10 é o que apresenta a resposta mais aproximada do sistema de segunda-ordem.

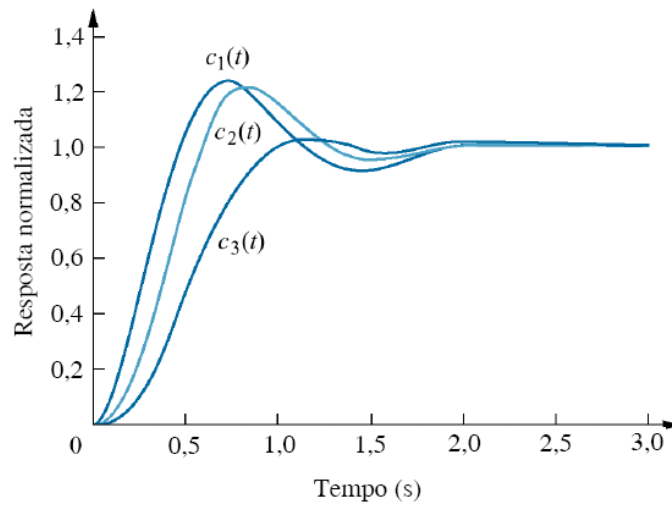


Figura 30 – Resposta para os três sistemas

Efeito de um zero adicional

Os zeros de uma resposta afetam o resíduo, ou amplitude, de uma componente da resposta, mas não afetam a natureza da resposta. Vamos considerar para análise do efeito de um zero adicional a um sistema de segunda ordem o seguinte exemplo:

Considerando um sistema de segunda-ordem com pólos em $(-1 \pm j2.828)$. Adicionemos consecutivamente zeros em -3, -5 e -10. As respostas para estes sistemas estão plotadas na figura 31.

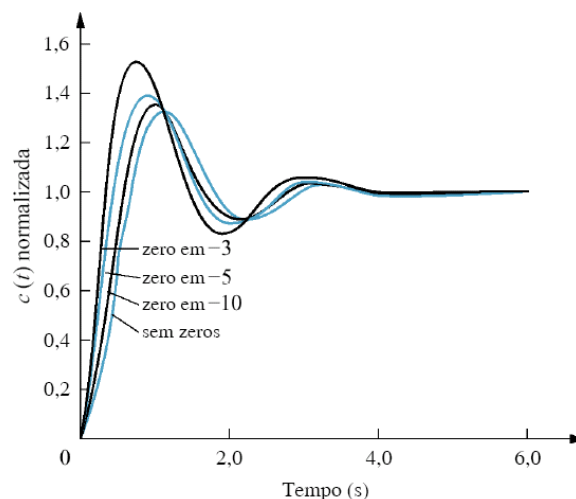


Figura 31 – Efeito de adicionar um zero a um sistema com dois pólos

Podemos observar que à medida que o zero se afasta dos pólos dominantes, a resposta tende à do sistema com dois pólos.

Capítulo 3

Princípios Básicos de Controle por Realimentação

3.1 Sistemas de Controle de Malha Fechada e Malha Aberta

Sistema de Controle - é uma interconexão de componentes que formam a configuração de um sistema, de modo a proporcionar uma resposta ou desempenho desejado para o mesmo.

Podemos dividir os sistemas de controle em duas categorias:

- A Eventos Discretos: Controla-se uma seqüência de eventos dentro de uma linha de produção. Ex. Movimentar ou parar uma esteira transportadora.
- A Eventos Contínuos: Controla-se variáveis específicas de um evento. Ex. Velocidade de uma esteira transportadora.

A base para a análise de um sistema de controle a Eventos Contínuos fundamenta-se na teoria dos sistemas lineares, a qual supõe uma relação de causa e efeito para os componentes do sistema.

Seja a planta ou processo a ser controlado representado pela figura 1. A relação causa – efeito do processo é representada pela relação entrada – saída. A planta (ou processo) pode ser controlada (o) de duas maneiras: em um sistema de controle de malha aberta ou em um sistema de controle de malha fechada.



Figura 1 – Sistema de Controle

3.1.1 Sistema de Controle de Malha Aberta

Um sistema de controle de malha aberta consiste de um subsistema chamado transdutor que converte a forma da entrada na que é usada pelo controlador. O controlador está conectado em série com o processo a ser controlado, de modo que a entrada do processo deve ser tal que sua saída se comportará como desejado. A entrada é as vezes chamada de referência, ao passo que a saída de variável controlada. A característica importante é que a ação de controle independe da saída. Observe-se que um sistema de controle deste tipo fornecerá a saída desejada se não ocorrerem perturbações externas que alterem o valor da saída ou alterações paramétricas internas do sistema. Se alguma destas ocorrer, a saída muda, mas a ação de controle continua

exatamente a mesma. Portanto, os sistemas de malha aberta não corrigem os efeitos de perturbações e são comandados unicamente com base na entrada.

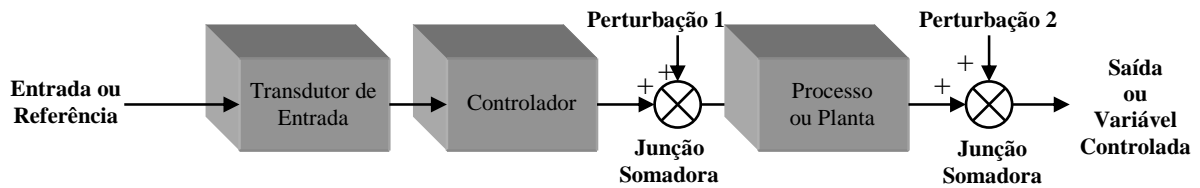


Figura 2 – Sistema de controle de malha aberta

Definições importantes:

Robustez: um sistema de controle é dito robusto se, sua resposta apresenta o comportamento desejado (projetado), mesmo quando o sistema está sujeito a distúrbios (internos ou externos), ou seja, o sistema robusto é aquele que opera satisfatoriamente sempre, ainda que haja erros de modelagem do sistema, variações paramétricas ou perturbações externas.

Sensibilidade: é a capacidade que o sistema tem de reagir à presença de um distúrbio (interno ou externo).

Obs.: como podemos notar robustez e sensibilidade são conceitos praticamente opostos.

Importante: no projeto de sistemas de controle sempre é requerido que o sistema seja estável e robusto.

Análise da estabilidade e da robustez de um sistema de malha aberta:

Seja o sistema com saída desejada $Y_D(s)$, saída real $Y(s)$ e controlado em malha aberta, onde $G(s)$ é a planta e $C(s)$ é o compensador, conforme mostra a figura abaixo.

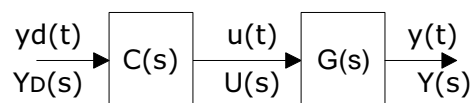


Figura 3 - Sistema de malha aberta

A função de transferência do sistema é:

$$T(s) = G(s)C(s) \quad (1)$$

Ou seja,

$$Y(s) = [G(s)C(s)]Y_D(s) \quad (2)$$

Para que a saída real seja igual a saída desejada, o compensador deve ser projetado para ter a seguinte forma:

$$C(s) = \frac{1}{G(s)} \quad (3)$$

Assim,

$$Y(s) = \left[G(s) \frac{1}{G(s)} \right] Y_D(s) = Y_D(s) \quad (4)$$

Análise da estabilidade:

Se a planta $G(s)$ possui zero(s) instável (eis), é indesejável que $C(s)$ seja da forma vista na equação 3, pois isto implicará em um compensador instável. Isto é uma limitação fortíssima de estabilidade para o controle em malha aberta.

Análise da robustez:

Considere que a planta tem um erro de modelagem ou sofreu uma variação paramétrica tal que o novo processo é $G(s) + \Delta G(s)$. Assim, a resposta real do sistema será:

$$Y(s) = \left[(G(s) + \Delta G(s)) \frac{1}{G(s)} \right] Y_D(s) = \left(1 + \frac{\Delta G(s)}{G(s)} \right) Y_D(s) \quad (5)$$

ou

$$Y(s) = Y_D(s) + \Delta Y(s) \quad (6)$$

onde,

$$\Delta Y(s) = \frac{\Delta G(s)}{G(s)} Y_D(s) \quad (7)$$

Isto significa, por exemplo, que se a planta possui um erro de modelagem ou sofreu uma variação paramétrica de 10% do seu valor nominal, a saída real também diferirá de 10% da saída desejada em regime permanente. Logo o controle em malha aberta é pouco robusto (ou muito sensível) a distúrbios internos.

Considere agora que o sistema de malha aberta sofreu uma perturbação externa ω , conforme mostra a figura abaixo:

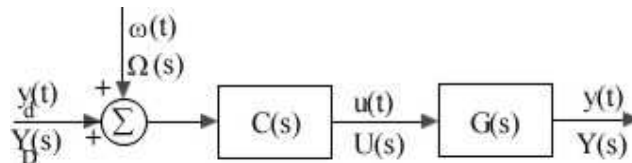


Figura 4 – Sistema de malha aberta com perturbação externa

A saída real desse sistema é (para $C(s) = 1/G(s)$):

$$Y(s) = [G(s)G^{-1}(s)](Y_D(s) + \Omega(s)) = Y_D(s) + \Omega(s) = Y_D(s) + \Delta Y_\omega(s) \quad (8)$$

onde, $\Delta Y_\omega(s) = \Omega(s)$. Isto significa que a saída real será a saída desejada mais a perturbação externa. Logo, o controle em malha aberta é pouco robusto (muito sensível) a distúrbios externos.

3.1.2 Sistema de Controle de Malha Fechada

As desvantagens dos sistemas de malha aberta, especificamente a sensibilidade a perturbações e a incapacidade de corrigir os efeitos destas perturbações, podem ser superadas nos sistemas de controle de malha fechada (Figura 5). Basicamente, um sistema de malha fechada é um sistema no qual a saída influencia a variável de controle (com realimentação).

O Transdutor de entrada converte a forma de entrada na forma usada pelo controlador. Um transdutor de saída (sensor) mede a resposta de saída e a converte na forma usada pelo controlador.

A primeira junção de adição adiciona algebricamente o sinal de entrada ao sinal de saída que chega pelo canal de retroação. O sinal de saída é subtraído do sinal de entrada resultando no sinal de erro atuante.

O sistema de malha fechada compensa perturbações medindo a resposta de saída, retornando esta medição pelo canal de retroação e comparando com a resposta desejada. Se existir diferença entre as respostas (erro), o sistema age sobre a planta, por meio do sinal de erro atuante, para fazer a correção (controlador). Se não existir erro, o sistema não age sobre o processo, uma vez que a saída está com o valor desejado.

Os sistemas de malha fechada apresentam a vantagem de serem sistemas mais precisos que os sistemas de malha aberta. Eles são sistemas menos sensíveis a ruídos, a perturbações e as mudanças das condições ambientais.

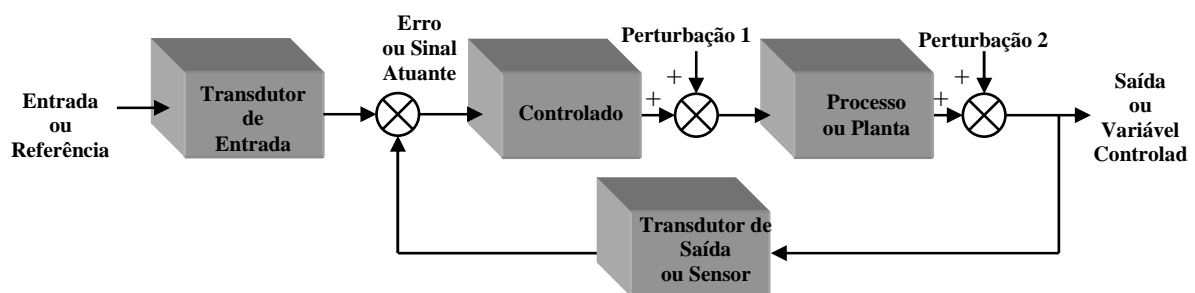


Figura 5 – Sistema de controle de malha fechada

Análise da estabilidade e da robustez de um sistema de malha fechada:

Seja o sistema com saída desejada $Y_D(s)$ e controlado em malha fechada, onde $G(s)$ é a planta, $C(s)$ é o compensador, e ambos estão na malha direta, conforme mostra a figura abaixo:

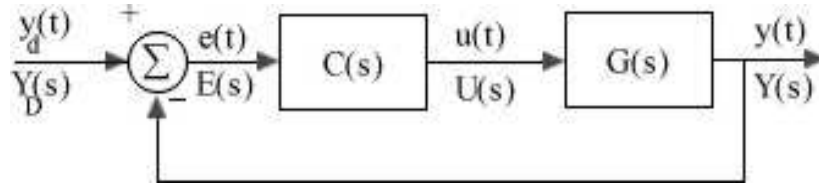


Figura 6 – Sistema de controle de malha fechada

A função de transferência desse sistema pode ser obtida facilmente:

$$E(s) = Y_D(s) - Y(s) \quad (9)$$

$$Y(s) = [G(s)C(s)]E(s) \quad (10)$$

$$Y(s) = [G(s)C(s)](Y_D(s) - Y(s)) \quad (11)$$

$$T(s) = \frac{Y(s)}{Y_D(s)} = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} \quad (12)$$

Ou seja,

$$Y(s) = \left[\frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} \right] Y_D(s) \quad (13)$$

Se $G(s)C(s) \gg 1$ para todas as frequências complexas de interesse, então pela Equação 13, obtemos:

$$Y(s) \cong Y_D(s) \quad (14)$$

Que é o resultado desejado. Ou seja, a saída real será igual a saída desejada.

Análise da Estabilidade: Como observamos nas equações 12 ou 13 o comportamento dinâmico do sistema em malha fechada é determinado por $1 + G(s)C(s)$. Logo, os pólos de $T(s)$ poderão ser feitos completamente diferentes aos de $G(s)$. Isto faz com que o sistema em malha fechada seja facilmente estabilizável.

Análise da Robustez: Considere agora que a planta possui um distúrbio interno tal que o novo processo é $G(s) + \Delta G(s)$. Assim, a resposta real do sistema será:

$$Y(s) = \frac{(G(s) + \Delta G(s))C(s)}{1 + (G(s) + \Delta G(s))C(s)} Y_D(s) \quad (15)$$

Para expressar $Y(s)$ em termos de $\Delta G(s)$ para que a expressão (14) possa ser expandida em uma série, primeiro devemos arrumar o denominador para que ele tenha a forma $1 + x$, onde x é pequeno:

$$Y(s) = \frac{[G(s)C(s)/(1 + G(s)C(s))] + [\Delta G(s)C(s)/(1 + C(s)G(s))]}{1 + [\Delta G(s)C(s)/(1 + G(s)C(s))]} Y_D(s) \quad (16)$$

Agora,

$$\frac{1}{1+x} \cong 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \dots |x| < 1 \quad (17)$$

Onde $x = \Delta G(s)C(s)/(1 + G(s)C(s))$, então

$$Y(s) \cong \left(\frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} + \frac{\Delta G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} \right) \left(1 - \frac{\Delta G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} \right) Y_D(s) \quad (18)$$

Ignorando a 2ª potência de $\Delta G(s)$ e definindo

$$Y'(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} Y_D(s) \quad (19)$$

Que é a saída sem distúrbios, temos:

$$Y(s) \cong Y'(s) - Y'(s) \frac{1}{1 + G(s)C(s)} \Delta G(s)C(s) \quad (20)$$

Ou

$$Y(s) \cong Y'(s) - \Delta Y(s) \quad (21)$$

Onde

$$\Delta Y(s) = \left[\frac{C(s)}{1 + G(s)C(s)} \Delta G(s) \right] Y'(s) \quad (22)$$

Assim, vemos que uma variação de 10% em $G(s)$ causará uma variação de apenas $[1/(1+G(s)C(s))].10\%$ de $Y'(s)$ em $\Delta Y(s)$ e isto, se $G(s)C(s) \gg 1$ para as frequências complexas de interesse, é muito pequeno e ainda teremos $Y'(s) \cong Y_D(s)$. Portanto, se $G(s)C(s) \gg 1$, $Y(s) \cong Y_D(s)$ e o sistema é altamente robusto a distúrbios internos.

A sensibilidade a distúrbios internos se define como:

$$S = \frac{\Delta T(s) / T(s)}{\Delta G(s) / G(s)} \quad (23)$$

No limite, para variações incrementais, a equação (23) será:

$$S = \frac{\partial T / T}{\partial G / G} \quad (24)$$

Para um sistema de malha fechada:

$$T(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} \quad (25)$$

a sensibilidade é:

$$S = \frac{\partial T}{\partial G} \frac{G}{T} = \frac{C}{(1 + GC)^2} \frac{G(1 + GC)}{GC} = \frac{1}{1 + GC} \quad (26)$$

Considere agora que o sistema está sujeito a perturbações externas v e w , conforme mostra a figura abaixo:

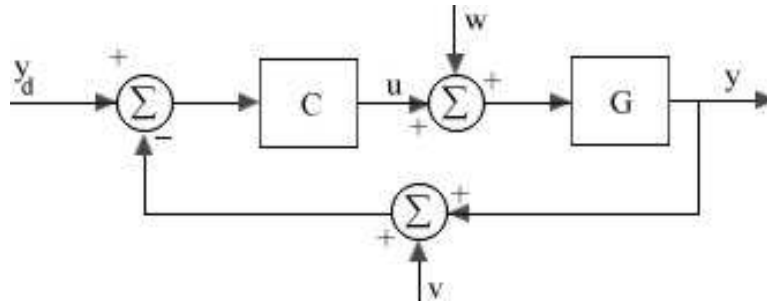


Figura 7 – Sistema de malha fechada com perturbação interna e externa

A saída deste sistema é:

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_w(s) + Y_v(s) \quad (27)$$

ou

$$Y(s) = \frac{CG}{1 + CG} Y_D(s) + \frac{G}{1 + CG} W(s) - \frac{CG}{1 + CG} V(s) \quad (28)$$

Se $|CG| \gg 1$, temos

$$\frac{CG}{1 + CG} \cong 1 \quad (29)$$

e

$$Y_1(s) \cong Y_D(s) \quad (30)$$

A saída à perturbação W é:

$$Y_W(s) = \frac{G}{1 + CG} W(s) \quad (31)$$

Se fizermos $|C|$ muito grande, a resposta Y_W a W poderá ser reduzida.

A saída à perturbação V é:

$$Y_V(s) = \frac{CG}{1 + CG} V(s) \quad (32)$$

Ou seja, sofre a mesma influência que $Y_D(s)$. Assim, não é possível atenuar o efeito do ruído $V(s)$ sem prejudicar a habilidade em comandar o sistema. Portanto, é importante usar sensores com baixa aceitabilidade a ruídos nas faixas de frequência a serem controladas, ou seja, nas frequências onde y acompanha y_d .

3.2 Erros de Estado Estacionário

Os erros em um sistema de controle podem ser atribuídos a muitos fatores, tais como:

- Alterações na entrada de referência
- Imperfeições nos componentes do sistema, como atrito estático, folga e deriva dos amplificadores, desgastes ou deterioração.

Entretanto, nesta secção não vamos estudar os erros referentes às imperfeições nos componentes, mas sim um tipo de erro causado pela incapacidade de um sistema em seguir determinado tipo de sinal de entrada.

Considerando a figura 8, podemos verificar que para o caso da entrada degrau, a saída 1 apresenta erro de estado estacionário nulo, enquanto a saída 2 apresenta um erro finito. No caso da entrada rampa, a saída 1 apresenta um erro nulo, a saída 2 apresenta um erro finito e a saída 3 um erro infinito.

O erro estacionário que um sistema apresenta em relação a determinada entrada depende do tipo de função de transferência de malha aberta deste sistema.

Basicamente, os sistemas de controle podem ser classificados de acordo com a sua habilidade para seguir entradas em degrau, entradas em rampa, entradas parabólicas, etc.

Considere o sistema da figura 9 onde a função de transferência de malha direta $C(s)G(s)$ é dada por:

$$C(s)G(s) = \frac{K(\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1) \dots (\tau_m s + 1)}{s^n (\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots (\tau_p s + 1)} \quad (33)$$

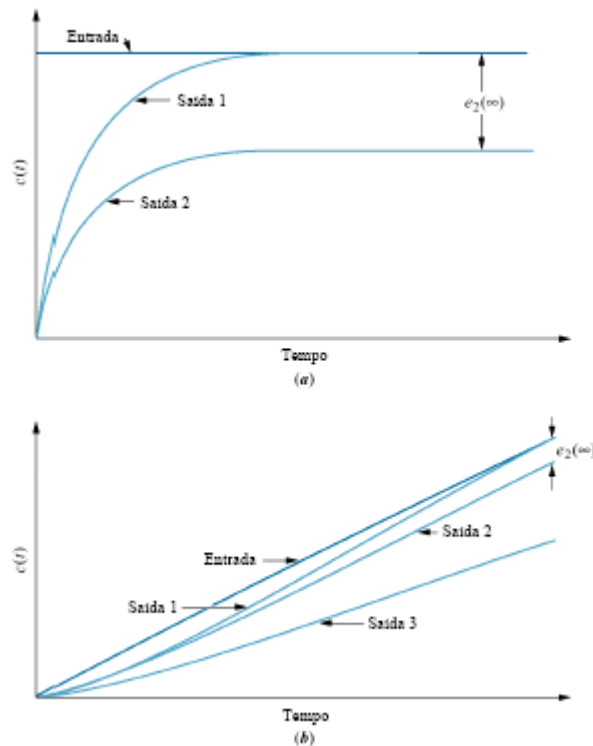


Figura 8 – Erro de estado estacionário – (a) entrada degrau (b) entrada rampa

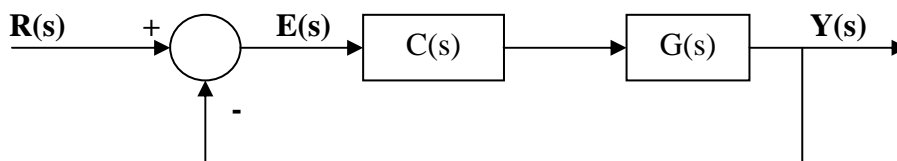


Figura 9 – Sistema de Controle

Para esta configuração $e(t) = r(t) - y(t)$. Para sistemas com realimentação unitária a classificação é baseada no número de integrações indicadas pela função de transferência de malha aberta. Um sistema é chamado do tipo 0, tipo 1, tipo 2, ..., se $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, ..., respectivamente.

Na prática, raramente se tem um sistema do tipo 3 ou maior porque geralmente é difícil projetar sistemas estáveis com mais do que duas integrações no ramo direto.

Erros estacionários ou erro de regime permanente para sistemas de malha fechada com realimentação unitária:

Seja o sistema da figura 9, a função de transferência de malha fechada deste sistema é dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (34)$$

A função de transferência entre o erro e a entrada é:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \quad (35)$$

Assim,

$$E(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} R(s) \quad (36)$$

Aplicando o teorema do valor final, determinamos o erro estacionário:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + C(s)G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (37)$$

O limite na equação acima tende a zero, um valor finito, ou infinito.

Coefficiente de erro de posição estático K_p :

O erro atuante estacionário do sistema para uma entrada degrau unitário é:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + C(s)G(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + C(0)G(0)} \quad (38)$$

O coeficiente de erro de posição estático K_p é definido por:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} C(s)G(s) = C(0)G(0) \quad (39)$$

Assim,

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (40)$$

Onde

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1) \dots}{s^n (\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots} = K \quad (n = 0)$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1) \dots}{s^n (\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots} = \infty \quad (n \geq 1) \quad (41)$$

Portanto

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} \quad \text{para sistemas do tipo 0}$$

$$e_{ss} = 0 \quad \text{para sistemas do tipo 1 ou maior}$$

Coefficiente de erro de velocidade estático K_v :

O erro atuante estacionário do sistema com uma entrada rampa unitária é dado por:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + C(s)G(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sC(s)G(s)} \quad (42)$$

O coeficiente K_v é definido por:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s)G(s) \quad (43)$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \quad (44)$$

Para um sistema do tipo 0:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1) \dots}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots} = 0 \quad (45)$$

Para um sistema do tipo 1:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1) \dots}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots} = K \quad (46)$$

Para um sistema do tipo 2:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1) \dots}{s^n (\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots} = \infty \quad (n \geq 2) \quad (47)$$

Portanto,

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \infty \quad \text{para sistemas do tipo 0}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \quad \text{para sistemas do tipo 1}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0 \quad \text{para sistemas do tipo 2 ou maior}$$

Coefficiente de erro de aceleração estático K_a :

O erro atuante do sistema com uma entrada parábola unitária que é definida por:

$$r(t) = \frac{T^2}{2} \quad \text{para } T \geq 0 \quad \text{e} \quad r(t) = 0 \quad \text{para } T < 0 \quad (48)$$

é dado por

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + C(s)G(s)} \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 C(s)G(s)} \quad (49)$$

O coeficiente de erro estático K_a é definido por :

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 C(s)G(s) \quad (50)$$

Assim,

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} \quad (51)$$

Sistema tipo 0: $K_a = 0$

Sistema tipo 1: $K_a = 0$

Sistema tipo 2: $K_a = K$

Sistema tipo 3: $K_a = \infty$ ($n \geq 3$)

Portanto,

$e_{ss} = \infty$ para sistemas do tipo 0 ou tipo 1

$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$ para sistemas do tipo 2

$e_{ss} = 0$ para sistemas do tipo 3

Tabela 1 – Erro estacionário

Entrada	Expressão do erro estacionário	Tipo 0		Tipo 1		Tipo 2	
		Constante de erro estacionário	Erro	Constante de erro estacionário	Erro	Constante de erro estacionário	Erro
Degrau, $u(t)$	$\frac{1}{1 + K_p}$	$K_p =$ Constante	$\frac{1}{1 + K_p}$	$K_p = \infty$	0	$K_p = \infty$	0
Rampa, $tu(t)$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = 0$	∞	$K_v =$ Constante	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = \infty$	0
Parábola, $\frac{1}{2}t^2 u(t)$	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = 0$	∞	$K_a = 0$	∞	$K_a =$ Constante	$\frac{1}{K_a}$

Os coeficientes de erro K_p , K_v e K_a descrevem a habilidade de um sistema reduzir ou eliminar erros estacionários para entradas polinomiais.

O coeficiente de erro pode ser definido de maneira geral como:

$$K_K = \lim_{s \rightarrow 0} s^K C(s)G(s) \quad (52)$$

Erros de estado estacionário devido a perturbações

A grande vantagem de se utilizar retroação é que, independentemente de quais sejam as perturbações, podemos projetar o sistema para seguir o sinal de entrada, com erro pequeno ou nulo. Considere o sistema de controle com retroação com uma perturbação $D(s)$.

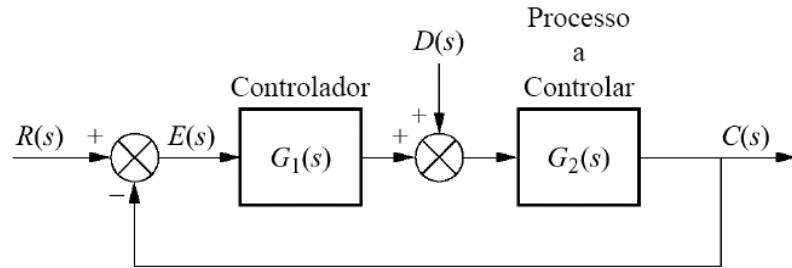


Figura 10 – Sistema de controle com perturbação

A saída do sistema é dada por:

$$C(s) = E(s)G_1(s)G_2(s) + D(s)G_2(s) \quad (53)$$

Mas,

$$C(s) = R(s) - E(s) \quad (54)$$

Substituindo (54) em (53)

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)} R(s) - \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} D(s) \quad (55)$$

Onde podemos assimilar que a expressão $\frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)}$ a uma função de transferência relacionando $E(s)$ a $R(s)$ e $-\frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$ a uma função de transferência relacionando $E(s)$ a $D(s)$.

Para determinar o valor de estado estacionário do erro, aplicamos o teorema do valor final a (55) e obtemos :

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G_1(s)G_2(s)} R(s) - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sG_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} D(s) = e_R(\infty) - e_D(\infty) \quad (56)$$

Para que o erro devido à perturbação seja reduzido devemos elaborar algumas considerações sobre $D(s)$, sobre o controlador e sobre o processo a ser controlado.

A componente do erro estacionário devido à perturbação em degrau é obtida por:

$$e_D(\infty) = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{sG_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \frac{1}{s} = -\frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{G_2(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} G_1(s)} \quad (57)$$

Esta equação mostra que o erro estacionário produzido por uma perturbação em degrau pode ser reduzido aumentando-se o ganho estático de $G_1(s)$ ou decrescendo o ganho estático de $G_2(s)$.

Erros estacionários ou erro de regime permanente para sistemas de malha fechada com realimentação não-unitária:

A Figura 11 apresenta como transformar um sistema com realimentação não-unitária em um sistema com realimentação unitária.

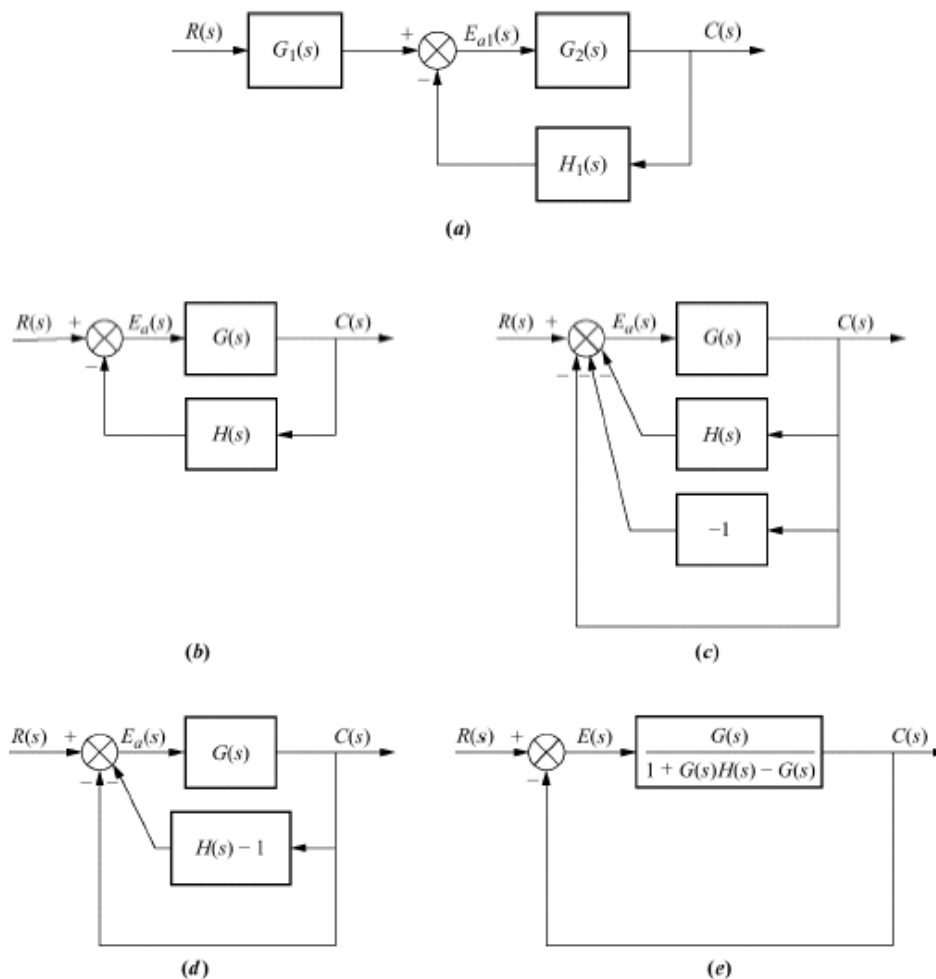


Figura 11 – Transformação de um sistema com realimentação não unitária em um sistema com realimentação unitária.

Podemos então classificar sistema com realimentação unitária equivalente de acordo com o que já vimos anteriormente sobre erro estacionário.

3.3 Estabilidade de Sistemas Dinâmicos

Além da resposta transitória e da resposta em estado estacionário (erro estacionário), outro importante requisito que integra o projeto de sistemas de controle é a estabilidade do sistema. Podemos dizer que a estabilidade é o requisito mais importante.

Para fins de análise e projeto, podemos classificar estabilidade em estabilidade absoluta e estabilidade relativa. A estabilidade absoluta se refere ao fato de um sistema ser estável ou instável; é uma condição do tipo sim ou não. Uma vez constatado que o sistema é estável, é interessante determinar quão estável ele é, e este grau de estabilidade é uma medida de estabilidade relativa. Certos parâmetros como sobre-sinal e taxa de amortecimento, relativos à resposta transitória, indicam frequentemente a estabilidade dos sistemas lineares invariantes no tempo.

Definição de estabilidade:

- Um sistema linear e invariante no tempo é estável se toda entrada limitada gerar uma saída limitada.

Chamamos este enunciado de definição de estabilidade entrada-limitada saída-limitada, ou estabilidade BIBO (Bounded-Input Bounded-output).

Lembrando da teoria de análise de sistemas lineares:

- O sistema é estável se todos os pólos do sistema estiverem localizado no semi-plano esquerdo do plano S ;
- O sistema é instável se pelo menos um pólo estiver no semi-plano direito do plano S e/ou pólos de multiplicidade maior que um sobre o eixo imaginário.
- Se os pólos estiverem no semi-plano esquerdo e um pólo de multiplicidade 1 no eixo imaginário, temos então um sistema marginalmente estável.

Fisicamente, um sistema instável pode causar danos ao sistema, as instalações adjacentes, ou à vida humana. Em muitas ocasiões os sistemas são projetados com limites de parada para evitar uma perda de controle.

A Figura 12 apresenta exemplos de um sistema estável e um sistema instável.

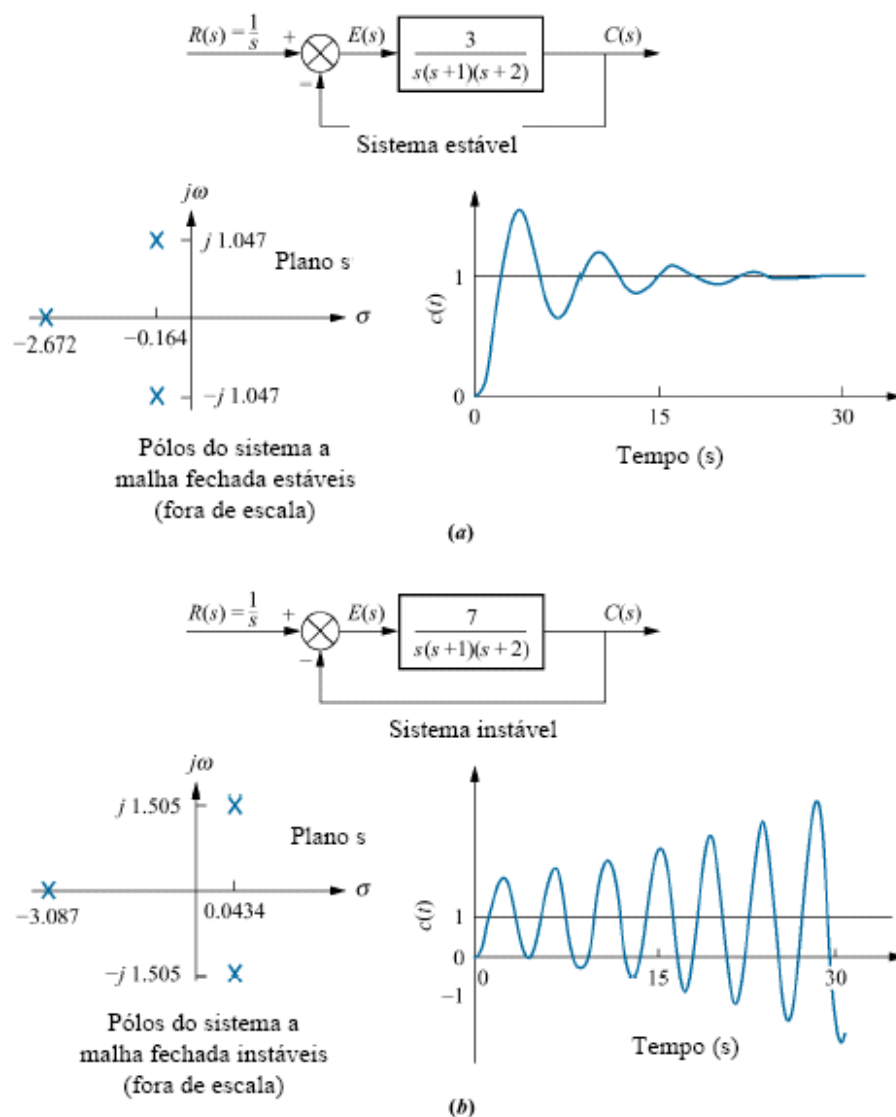


Figura 12 – Estabilidade de sistemas

Para os sistemas que apresentam equações características de 1ª ou de 2ª ordem, a estabilidade pode ser determinada diretamente por inspeção. Um polinômio de 1ª ou de 2ª ordem apresentará todas as suas raízes no semi-plano esquerdo do plano- s (sistema estável), se e somente se todos os coeficientes do polinômio apresentarem o mesmo sinal algébrico. Entretanto para polinômios de ordem superior a 2, estas informações não são conclusivas. Nestes casos deve-se aplicar algum procedimento matemático que auxilie na determinação do número de raízes que o polinômio apresenta no semi-plano direito do plano- s (raízes instáveis).

O critério de estabilidade de Routh-Hurwitz, permite investigar a estabilidade absoluta dos sistemas, através dos coeficientes das equações características. A utilização deste método evita a necessidade de fatoração da equação característica para obtenção dos pólos (raízes) e a

verificação se existe algum destes no semi-plano direito do plano complexo, ou sobre o eixo imaginário. Caso exista, o sistema é instável.

O procedimento utilizado nesta técnica é:

1) Escrever a equação característica de “S” na seguinte forma:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

2) Se um dos coeficientes é zero ou negativo na presença de pelo menos um coeficiente positivo, então há pelo menos uma raiz com parte real positiva e portanto o sistema NÃO É ESTÁVEL.

3) Se todos os coeficientes são positivos, arranje os coeficientes da equação característica em linhas e colunas da seguinte forma:

S^n	a_0	a_2	a_4	a_6	$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$
S^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$
S^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$	$c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$
S^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	$b_4 = \frac{a_1 a_8 - a_0 a_9}{a_1}$	$c_4 = \frac{b_1 a_9 - a_1 b_5}{b_1}$
S^2	d_1	d_2				
S^1	e_1					
S^0	f_1					

O critério de estabilidade de Routh-Hurwitz diz que o número de raízes da equação característica com parte real positiva, é igual ao número de mudanças de sinal nos coeficientes da primeira coluna da tabela ($a_0, a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1$).

Se todos estes coeficientes são positivos, então todos os pólos da equação característica apresentam parte real negativa e portanto o sistema é **estável**.

Observações:

- Se um termo da primeira coluna (b_1, c_1, d_1 , etc.) é nulo, e os restantes não são, então zero deve ser substituído por um número positivo muito pequeno “ ϵ ”, e então o resto da tabela é calculado.
- Caso os termos de uma linha sejam todos nulos, devemos substituir estes valores, pelos coeficientes da derivada do polinômio anterior (linha anterior) em relação a “S”. Este polinômio é chamado de polinômio auxiliar.

3.4 Estruturas Básicas de Controladores – Controladores Industriais

Quando o sistema em malha fechada não atende os requisitos de projeto em termos de desempenho em regime e transitório desejados, deve-se modificar a função de transferência através do uso de um controlador ou compensador. Este controlador deve ter as propriedades adequadas para modificar as características do sistema, para que os requisitos de projeto sejam atingidos. Embora diversas estruturas de controle possam ser usadas, os controladores são geralmente escolhidos dentre alguns tipos básicos de estrutura, o que facilita a análise do seu comportamento e o projeto dos seus parâmetros. Não se justifica, na maior parte das aplicações, a escolha de estruturas diferentes das padronizadas. Em geral, quanto mais complexa a estrutura de um controlador, com maior número de parâmetros, maior é a liberdade em atender diversos requisitos de projeto, mas mais complexo é o ajuste dos parâmetros.

Os controladores que serão apresentados nesta secção serão usados nos capítulos seguintes, os quais abordam a questão do projeto, ou seja, da determinação dos parâmetros dos controladores visando algum desempenho especificado do sistema em malha fechada. O projeto de sistemas de controle visa obter um desempenho do sistema tal que:

- O sistema seja estável,
- A resposta transitória do sistema seja aceitável,
- O erro em regime permanente atenda determinadas especificações.

3.4.1 – Controladores Industriais

a) Controladores do tipo Relé

- Ação de controle de duas posições ou liga – desliga (on – off):

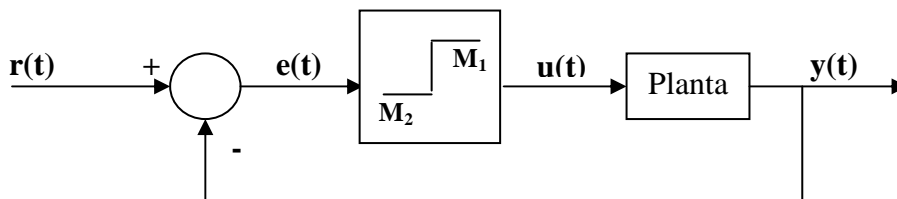


Figura 13 – Sistema de controle com controlador do tipo relé

Em um controle de duas posições, o sinal $u(t)$ permanece em um valor máximo ou em um valor mínimo, dependendo do sinal de erro $e(t)$ ser maior ou menor que um certo valor E_I .

$$u(t) = \begin{cases} M_1 & , e(t) > E_I \\ M_2 & , e(t) < E_I \end{cases} \quad (58)$$

Obs.: Usualmente M_2 é zero ou $-M_1$.

Exemplo: Sistema de controle de nível

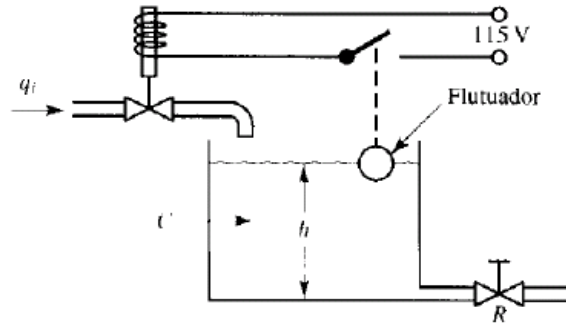


Figura 14 – Sistema de controle de nível

b) Controlador Proporcional

A primeira e mais básica ação de controle é o controle proporcional. O controlador aplica uma força corretiva que é proporcional ao erro (Figura 15):

$$U(s) = K_p E(s) \quad (59)$$

$$C(s) = K_p \quad (60)$$

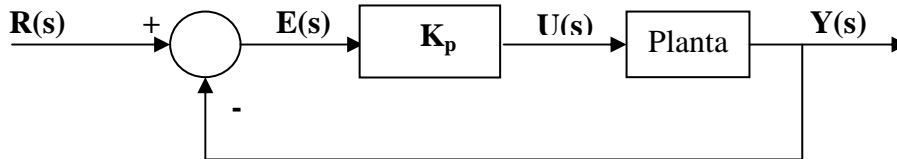


Figura 15 – Sistema de controle com controlador proporcional

Considere uma planta arbitrária de 2ª ordem:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (61)$$

A função de transferência de malha fechada da figura 15 considerando $G(s)$ de (61) é então:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{s^2 + s + 1 + K_p} \quad (62)$$

Em relação ao erro de regime permanente, matematicamente temos que:

$$e_{\infty} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (63)$$

De (63) podemos observar que o aumento do ganho proporcional pode reduzir o erro de regime permanente. Deve-se tomar cuidado em relação aos sistemas de ordem maior que 2 pois o aumento de K_p pode levar o sistema à instabilidade.

De (61) e (62) podemos verificar que a introdução do controlador proporcional altera o valor do coeficiente de amortecimento e da frequência natural do sistema, modificando desta forma o tempo de resposta do sistema e o sobre-sinal do mesmo.

A figura 16 apresenta a resposta do sistema para diversos valores de K_p , onde podemos comprovar graficamente que a medida que aumentamos o valor do ganho proporcional temos que:

- o erro de regime permanente é reduzido (mas não eliminado)
- a estabilidade do sistema é reduzida (menor coeficiente de amortecimento)
- o tempo de resposta do sistema é mais rápido

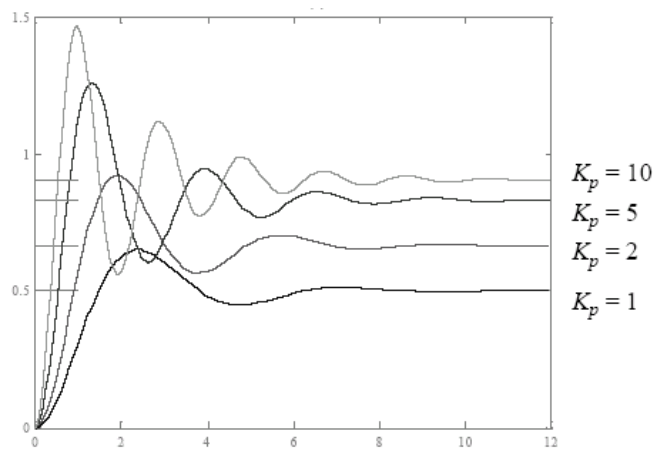


Figura 16 – Resposta do sistema para diversos valores de K_p

c) Controlador Integral

Em um controlador com ação de controle integral, o valor da saída do controlador $u(t)$ é variado em uma taxa proporcional ao sinal erro atuante $e(t)$. Isto é:

$$u(t) = \frac{K_p}{T_I} \int_{t_0}^t e(t) dt \quad (64)$$

O controle integral gera uma força corretiva que é proporcional à soma de todos os erros passados multiplicada pelo tempo.

Aplicando Laplace temos:

$$U(s) = \frac{K_p}{T_I s} E(s) = \frac{K_i}{s} E(s) \quad (65)$$

onde

$T_i \rightarrow$ tempo integral

$\frac{1}{T_i} \rightarrow$ taxa de restabelecimento

$K_i \rightarrow$ constante integral

A introdução de um controlador integral em um sistema de controle reduz o erro de regime a zero (sistema tipo 1 – entrada degrau unitário), mas isto pode acarretar redução da estabilidade.

d) Controlador Proporcional Integral

Ação de controle proporcional integral:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt \quad (66)$$

$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) E(s) = K_p E(s) + \frac{K_i}{s} E(s) \quad (67)$$

O controlador PI equivale a dar um ganho $\frac{K_p}{T_i}$ na malha direta, adicionar um zero em

$s = -\frac{1}{T_i}$ e um pólo em $s = 0$ à função de transferência de malha aberta (aumenta a ordem e o tipo do sistema).

Considere o sistema da figura 17 com o controlador PI e a planta com função $G(s)$ dada em (61).

A função de transferência de malha fechada resultante é:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p s + K_i}{s^3 + s^2 + (1 + K_p)s + K_i} \quad (68)$$

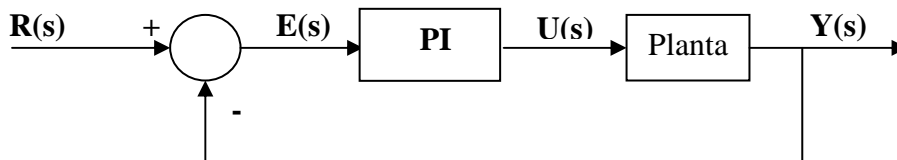


Figura 17 – Sistema de controle com controlador PI

A figura 18 apresenta a resposta do sistema para diversos valores de K_i , mantendo K_p constante igual a 2.

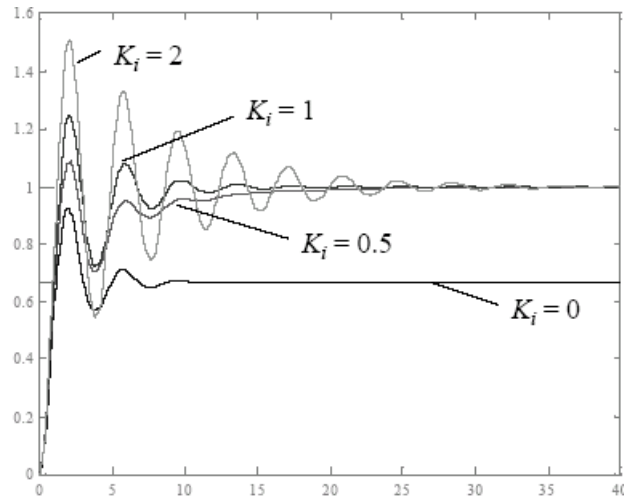


Figura 18 – Respostas para diversos valores de K_i e K_p constante

Podemos verificar que a introdução do controlador integral ao sistema apenas com controlador proporcional melhora a resposta em regime permanente (erro nulo) mas a estabilidade do sistema é reduzida. Entretanto, a utilização do controlador proporcional em conjunto com o integral permite maior grau de liberdade para ajuste dos parâmetros de acordo com as especificações da resposta transitória desejada.

e) Controlador (proporcional) Derivativo

Ação de controle derivativa:

$$u(t) = K_p T_d \frac{de(t)}{dt} + K_p e(t) \quad (69)$$

$$U(s) = (K_p T_d s + K_p) E(s) = (K_d s + K_p) E(s) \quad (70)$$

No controle derivativo a correção depende da taxa de variação do erro. Um controlador derivativo exibe uma resposta antecipatória. O controlador avalia a inclinação instantânea do erro $e(t)$, prevê o grande sobre-sinal que está por vir e faz um esforço de correção apropriado antes que o sobre-sinal realmente ocorra. Este comportamento indica que o controlador derivativo é adequado para melhorar o comportamento transitório do sistema (é usado tipicamente para aumentar o amortecimento e geralmente para melhorar a estabilidade de um sistema).

O controle PD é equivalente à adição de um zero simples em $s = -\frac{1}{T_d}$ e de um ganho de

$K_p T_d$ na malha direta.

Considere o sistema da figura 19 com o controlador PD e a planta com função $G(s)$ dada em (61). A função de transferência de malha fechada resultante é:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_d s + K_p}{s^2 + (1 + k_d)s + (1 + K_p)} \quad (71)$$

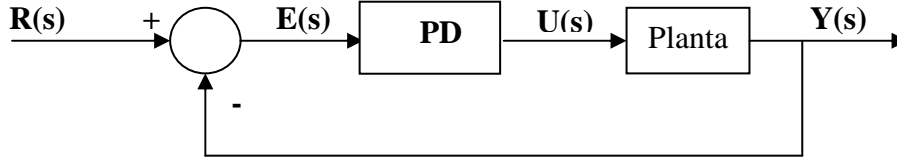


Figura 19 – Sistema com controlador PD

A resposta do sistema para diversos valores de K_d e K_p constante igual a 2 é dada na figura 20.

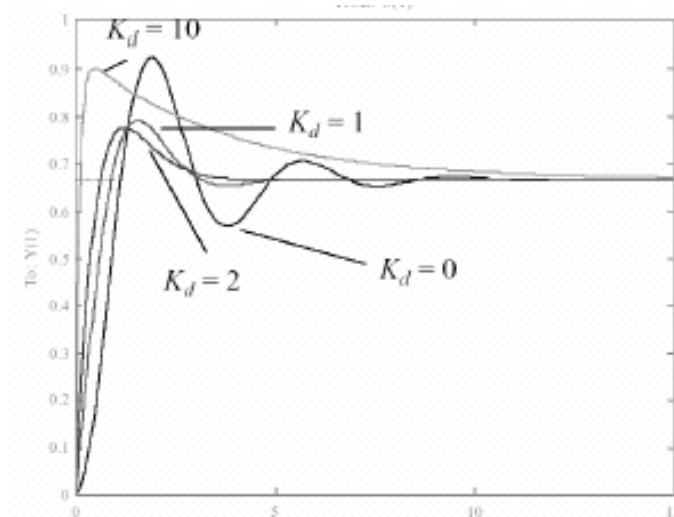


Figura 20 – Resposta do sistema para diversos valores de K_d e K_p constante

Podemos verificar graficamente que a introdução do controlador derivativo ao controle proporcional pode melhorar a resposta transitória do sistema sem afetar a resposta em regime permanente. A resposta mais adequada, de acordo com as especificações desejadas pode ser obtida realizando-se um ajuste dos parâmetros K_d e K_p .

e) Controle Proporcional mais Integral mais Derivativo (PID):

Ação de controle PID:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (72)$$

$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i} + T_d s \right) E(s) \quad (73)$$

A figura 21 apresenta exemplos de respostas de um sistema com controlador PID para diversos valores dos parâmetros.

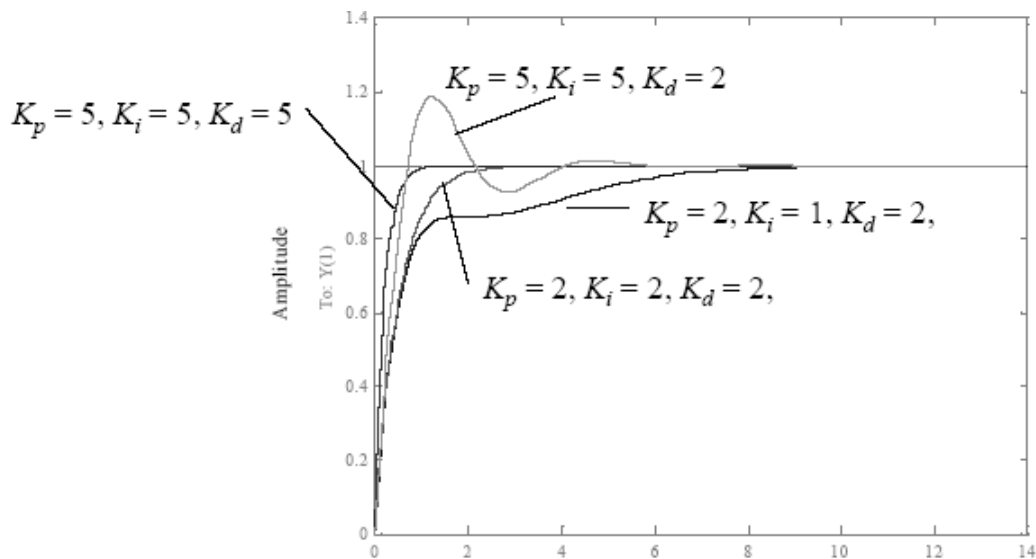


Figura 21 – Respostas para controlador PID

3.4.2 Projetos de Controladores PID

- Baseado no conhecimento das ações P, I e D.

Tentativa e erro;

Sintonia manual;

Simulação.

- Método heurístico de Ziegler-Nichols (década de 1940):

Métodos geralmente utilizados quando a função de transferência da planta do sistema é desconhecida.

Baseado em um processo em malha aberta (primeiro método);

Baseado no ganho crítico (malha fechada – segundo método).

Métodos de Sintonização Heurística de Controladores PID

1) Primeiro Método de Ziegler- Nichols - Método de Sintonização pela Curva de Reação

No primeiro método obtemos experimentalmente a resposta da planta a uma entrada degrau unitário. Ziegler e Nichols observaram que a resposta ao degrau da maioria dos sistemas de controle de processos tem a forma geral de um “s” como mostrado na figura 22.

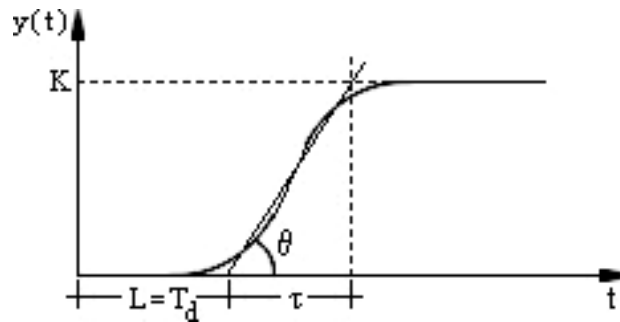


Figura 22 – Curva de resposta de um sistema de controle

A curva da figura 22 é chamada de curva de reação do processo e pode ser gerada experimentalmente ou a partir de uma simulação dinâmica da planta. Esta curva é caracterizada por um atraso L e uma constante de tempo τ .

A forma da curva é característica de sistemas de ordem elevada, e a relação entrada – saída pode ser aproximada por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K e^{-Ls}}{\tau s + 1} \quad (74)$$

Os parâmetros do controlador PID sugerido por Ziegler – Nichols para o método da curva de reação são mostrados na tabela abaixo:

Tipo do controlador	Ganho ótimo
P	$K_p = \frac{\tau}{L}$
PI	$K_p = \frac{0,9\tau}{L}, T_i = \frac{L}{0.3}$
PID	$K_p = \frac{1.2\tau}{L}, T_i = 2L$ e $T_d = 0.5L$

2) Segundo Método de Ziegler- Nichols - Método do Ganho Crítico

Neste método, os parâmetros do PID são levantados em testes com o sistema em malha fechada (figura 23)

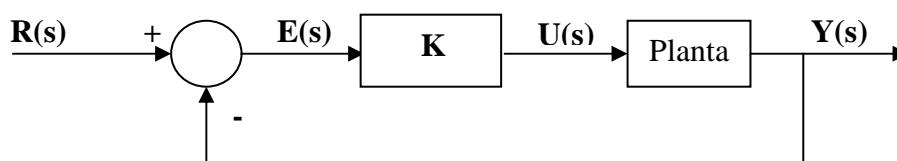


Figura 23 – Sistema de malha fechada com controlador proporcional

Procedimento:

O ganho de um controlador proporcional é variado até serem observadas oscilações contínuas na resposta do sistema, isto é, até o sistema se tornar marginalmente estável. O ganho crítico correspondente K_c e o período de oscilação P_c da curva oscilatória obtidos durante o teste são utilizados para o ajuste dos parâmetros do controlador PID de acordo com a tabela abaixo.

Procedimento:

O ganho de um controlador proporcional é variado até serem observadas oscilações contínuas na resposta do sistema, isto é, até o sistema se tornar marginalmente estável. O ganho crítico correspondente K_c e o período de oscilação P_c da curva oscilatória obtidos durante o teste são utilizados para o ajuste dos parâmetros do controlador PID de acordo com a tabela abaixo.

Tipo do controlador	Ganho ótimo
P	$K_p = 0.5K_c$
PI	$K_p = 0.45K_c, T_i = 0.833P_c$
PID	$K_p = 0.6K_c, T_i = 0.5P_c, T_d = 0.125P_c$

Capítulo 4

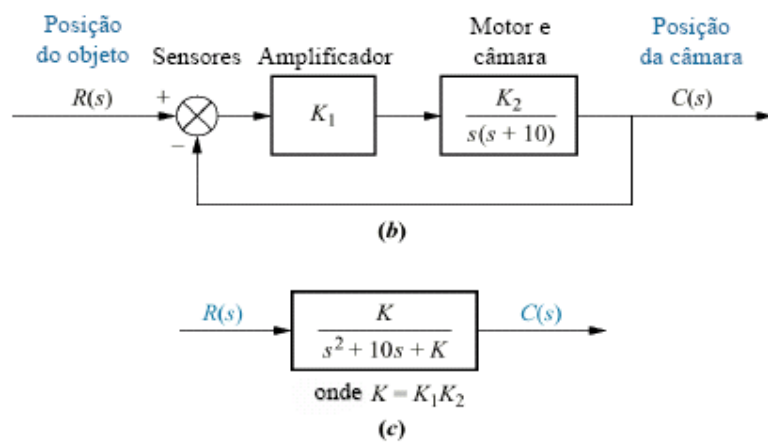
Método do Lugar Geométrico das Raízes

4.1 Introdução

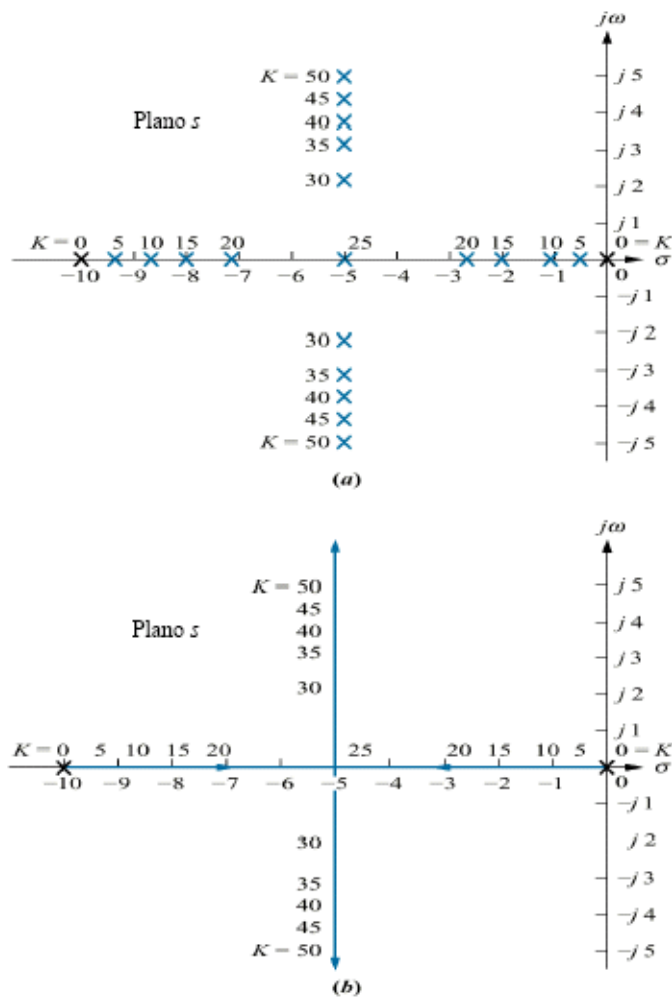
- Lugar Geométrico das Raízes (LGR) - apresentação gráfica dos pólos de malha fechada em função da variação de um parâmetro do sistema.
- Poderoso método de análise e projeto visando à estabilidade e à resposta transitória.
- Sua força real reside na capacidade de fornecer soluções para sistemas de ordem maior que dois.

4.2 Definindo o Lugar das Raízes

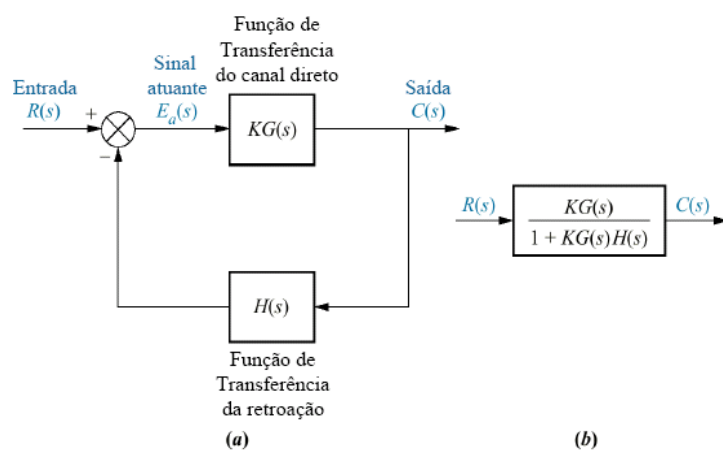
Exemplo 1:



K	Pólo 1	Pólo 2
0	-10	0
5	-9,47	-0,53
10	-8,87	-1,13
15	-8,16	-1,84
20	-7,24	-2,76
25	-5	-5
30	$-5 + j2,24$	$-5 - j2,24$
35	$-5 + j3,16$	$-5 - j3,16$
40	$-5 + j3,87$	$-5 - j3,87$
45	$-5 + j4,47$	$-5 - j4,47$
50	$-5 + j5$	$-5 - j5$



4.3 Propriedades do Lugar das Raízes



Função de transferência de malha fechada:

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} \quad (1)$$

Existe um pólo, s , quando o polinômio característico no denominador se anula, ou seja,

$$KG(s)H(s) = -1 = 1\angle(2k+1)180^\circ \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2)$$

Alternativamente, um valor de s é um pólo de malha fechada se:

$$|KG(s)H(s)| = 1 \quad (3)$$

e

$$\angle KG(s)H(s) = (2k+1)180^\circ \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (4)$$

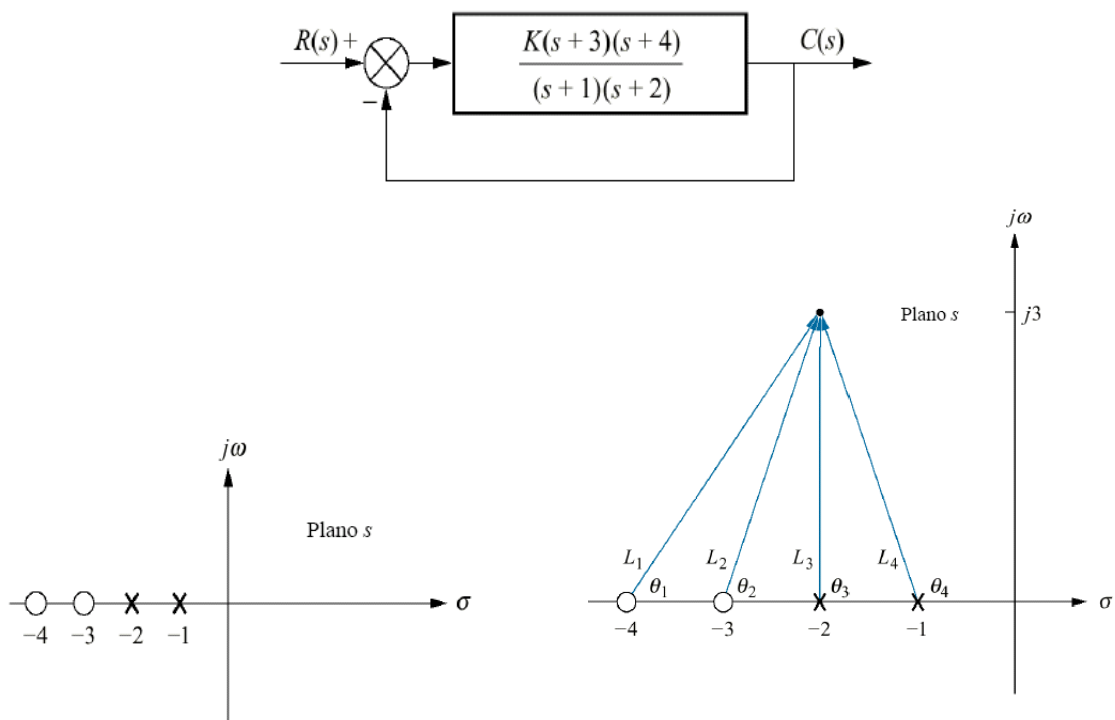
O critério de ângulo deve ser necessariamente satisfeito, sendo a condição de módulo utilizada para o cálculo do ganho K , ou seja,

$$K = \frac{1}{|G(s)||H(s)|} \quad (5)$$

Obs: Verificar exemplo 1

Exemplo 2 : Visualizando graficamente o significado de (4)

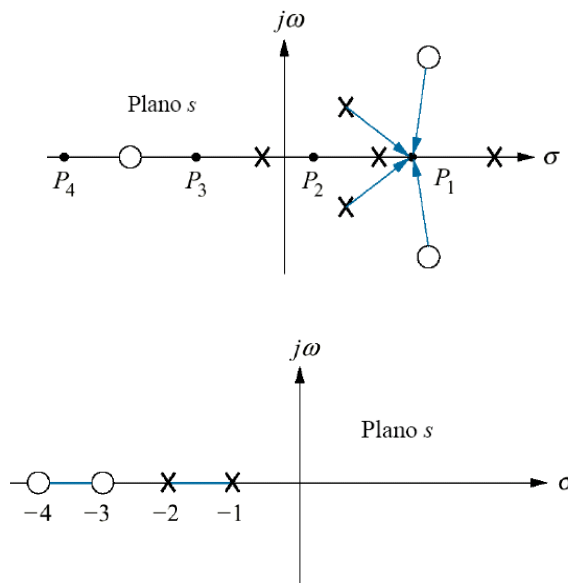
Considere os pontos $s = -2 + 3j$ e $s = -2 + \sqrt{2}/2j$. Vamos verificar se estes pontos fazem parte do LGR do sistema abaixo.



4.4 Esboçando o Lugar das Raízes

Regras para o esboço do LGR:

1. **Número de ramos:** cada pólo a malha fechada se desloca quando o ganho é variado. Se definirmos ramo como sendo o caminho que o pólo percorre, existirá um ramo para cada pólo a malha fechada, logo: *O número de ramos do LGR é igual ao número de pólos a malha fechada do sistema.*
2. **Simetria:** *O LGR é simétrico em relação ao eixo real*
3. **Segmentos sobre o eixo real:** *No eixo real, para $K > 0$, o LGR existe à esquerda de um número ímpar de pólos e/ou zeros finitos a malha aberta sobre o eixo real.*



4. **Pontos de entrada e de saída:** *O LGR se inicia nos pólos finitos e infinitos de $G(s)H(s)$ e termina nos zeros finitos e infinitos de $G(s)H(s)$.*

Considere que,

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)} \quad \text{e} \quad H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$$

Então,

$$T(s) = \frac{KN_G(s)D_H(s)}{D_G(s)D_H(s) + KN_G(s)N_H(s)} \quad (6)$$

À medida que K está tende a zero (ganho pequeno),

$$T(s) \approx \frac{KN_G(s)D_H(s)}{D_G(s)D_H(s) + \epsilon} \quad (7)$$

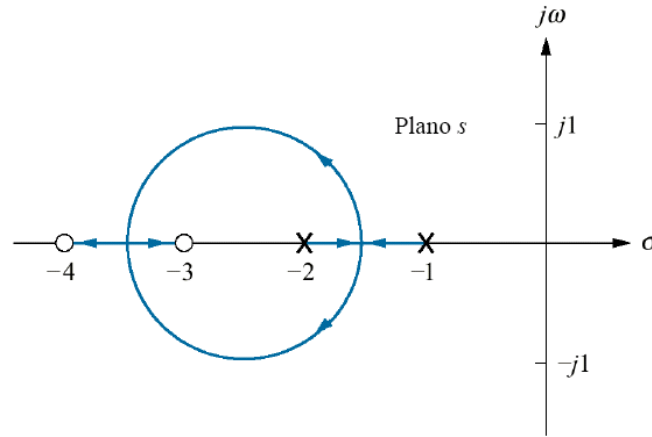
Desta forma podemos verificar que os pólos de malha fechada do sistema para ganhos pequenos tendem aos pólos combinados de $G(s)$ e $H(s)$. *Conclui-se então que o LGR se inicia nos pólos de $G(s)H(s)$, a função de transferência de malha aberta.*

Para ganhos altos, onde K está tendendo para o infinito,

$$T(s) \approx \frac{KN_G(s)D_H(s)}{\epsilon + KN_G(s)N_H(s)} \quad (8)$$

Desta forma podemos verificar que os pólos de malha fechada do sistema para ganhos elevados tendem aos zeros combinados de $G(s)$ e $H(s)$. *Conclui-se então que o LGR termina nos zeros de $G(s)H(s)$, a função de transferência de malha aberta.*

Exemplo 3:



5. Comportamento no infinito: O LGR tende a retas assintóticas quando o lugar tende ao infinito. Além disso, a equação das assíntotas é dada pelo ponto de interseção sobre o eixo real, σ_a , e o ângulo, θ_a da seguinte forma:

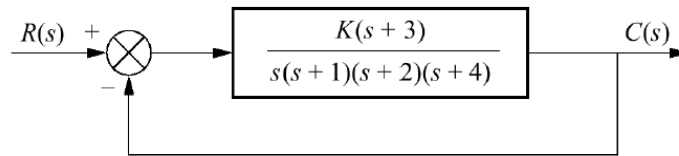
$$\sigma_a = \frac{\sum \text{pólos finitos} - \sum \text{zeros finitos}}{\# \text{pólos finitos} - \# \text{zeros finitos}} \quad (9)$$

$$\theta_a = \frac{(2k+1)\pi}{\# \text{pólos finitos} - \# \text{zeros finitos}} \quad (10)$$

Onde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ e o ângulo é dado em radianos, no sentido trigonométrico, a partir do eixo real positivo.

Exemplo 4:

Esboçar o LGR para o sistema da abaixo



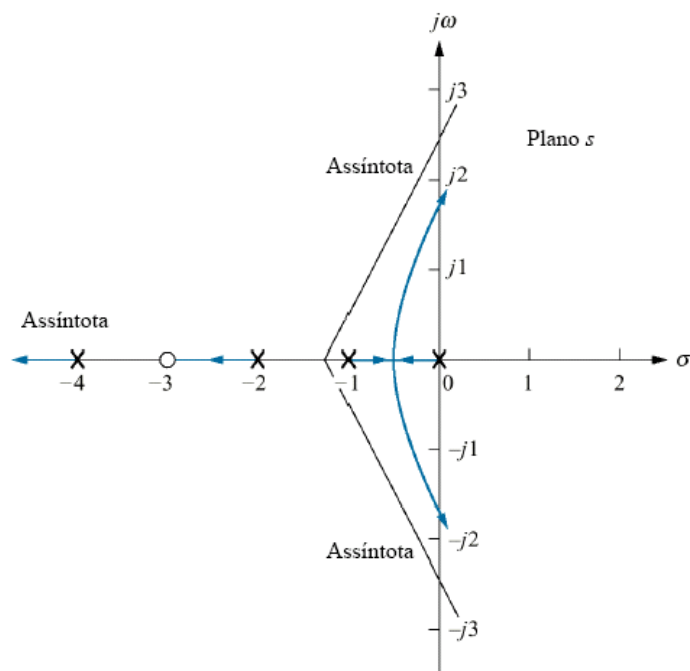
Cálculo das assíntotas:

$$\sigma_a = \frac{(-1-2-4)-(-3)}{4-1} = -\frac{4}{3}$$

Os ângulos das retas que se cruzam em $-4/3$ são:

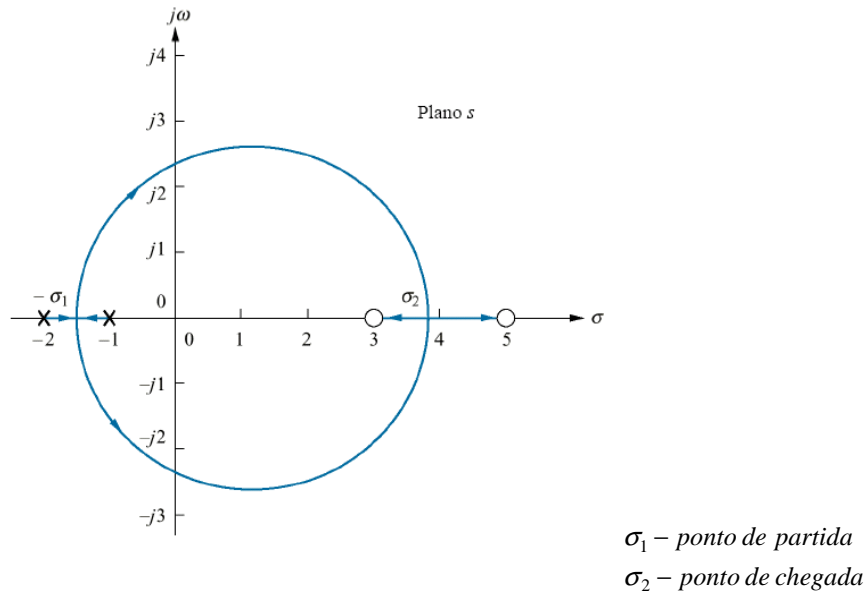
$$\begin{aligned}\theta_a &= \frac{(2k+1)\pi}{3} = \frac{\pi}{3} & \text{para } k=0 \\ &= \pi & \text{para } k=1 \\ &= \frac{5\pi}{3} & \text{para } k=2\end{aligned}$$

Se o valor k continuar a aumentar, os ângulos começarão a se repetir. *O número de retas obtidas é igual à diferença entre o número de pólos finitos e o número de zeros finitos.*



4.5 Refinando o Esboço do LGR

1. Pontos de partida e de chegada sobre o eixo real:



Temos que:

$$K = -\frac{1}{G(s)H(s)}$$

Nos pontos do LGR ao longo do eixo real onde ocorrem pontos de entrada e de saída, $s = \sigma$.

Portanto,

$$K = -\frac{1}{G(\sigma)H(\sigma)} \quad (12)$$

Esta equação representa uma curva de K versus σ . Portanto se derivarmos (12) com relação a σ podemos encontrar os pontos máximos e mínimos e portanto os pontos de partida e chegada.

Exemplo 5: Usando os pólos e zeros de malha aberta, representamos o sistema a malha aberta, cujo LGR é mostrado na figura acima, como se segue:

$$KG(s)H(s) = \frac{K(s-3)((s-5))}{(s+1)((s+2))} = \frac{K(s^2-8s+15)}{(s^2+3s+2)}$$

Para os pontos sobre o eixo real do LGR:

$$\frac{K(\sigma^2-8\sigma+15)}{(\sigma^2+3\sigma+2)} = -1$$

Resolvendo para K temos:

$$K = \frac{-(\sigma^2+3\sigma+2)}{(\sigma^2-8\sigma+15)}$$

Derivando K em relação à σ e igualando a zero resulta:

$$\frac{dK}{d\sigma} = \frac{(11\sigma^2 - 26\sigma - 61)}{(\sigma^2 - 8\sigma + 15)^2} = 0$$

Resolvendo para σ , encontramos $\sigma = -1.45$ e $\sigma = 3.82$, os quais são os pontos de saída e de entrada procurados.

Cálculo do ponto de chegada e partida pelo método de transição:

Os pontos de partida e entrada satisfazem a relação:

$$\sum_1^m \frac{1}{\sigma + z_i} = \sum_1^n \frac{1}{\sigma + p_i} \quad (13)$$

Resolvendo (13) para σ encontramos os pontos de entrada e saída desejados

Exemplo 6 : Repetir o exemplo 5 sem o uso de derivação

Usando (13) temos,

$$\frac{1}{\sigma - 3} + \frac{1}{\sigma - 5} = \frac{1}{\sigma + 1} + \frac{1}{\sigma + 2}$$

Simplificando:

$$11\sigma^2 - 26\sigma - 61 = 0$$

Resolvendo temos $\sigma = -1.45$ e $\sigma = 3.82$, que está de acordo com o exemplo 5.

1. Pontos de interseção com o eixo $j\omega$:

Utiliza-se o Critério de Routh-Hurwitz como se segue: *forçando uma linha de zeros na tabela de Routh se obterá o ganho; retornando à linha para a equação de polinômio par e determinando as raízes resulta a frequência do ponto de interseção como eixo imaginário.*

Exemplo 7:

Para o sistema do exemplo 4, obter a frequência e o ganho K, para o qual o LGR cruza o eixo imaginário.

$$T(s) = \frac{K(s+3)}{s^4 + 7s^3 + 14s^2 + (8+K)s + 3K}$$

Da tabela de Routh temos que:

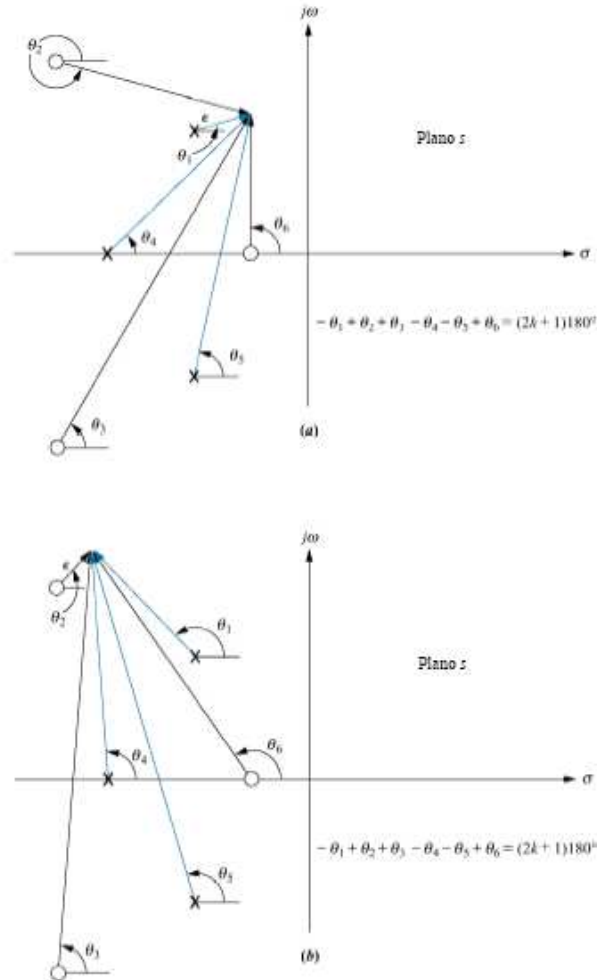
$$-K^2 - 65K + 720 = 0 \quad \text{sendo } K = 9.65$$

Formando o polinômio par usando a linha s^2 com $K = 9.65$, obtém-se:

$$(90 - K)s^2 + 21K = 80.35s^2 + 202.7 = 0$$

E s é encontrado igual a $\pm j1.59$. Desta forma o LGR cruza o eixo imaginário em $\pm j1.59$ com $K=9.65$.

2. Ângulos de partida e de Chegada



Da figura (a)

$$-\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 = (2k+1)180^\circ \text{ ou}$$

$$\theta_1 = \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - (2k+1)180^\circ \quad (\text{ângulo de partida do pólo complexo})$$

Da figura (b)

$$-\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 = (2k+1)180^\circ \text{ ou}$$

$$\theta_2 = \theta_1 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + (2k+1)180^\circ \quad (\text{ângulo de chegada ao zero complexo})$$

Resumo das Regras básicas para esboçar o LGR:

1. **Número de ramos:** *O número de ramos do LGR é igual ao número de pólos a malha fechada do sistema.*
2. **Simetria :** *O LGR é simétrico em relação ao eixo real*
3. **Segmentos sobre o eixo real:** *No eixo real, para $K > 0$, o LGR existe à esquerda de um número ímpar de pólos e/ou zeros finitos a malha aberta sobre o eixo real.*
4. **Pontos de início e término:** *o LGR se inicia nos pólos finitos e infinitos de $G(s) H(s)$ e termina nos zeros finitos e infinitos de $G(s) H(s)$.*
5. **Comportamento no infinito:** *o LGR tende a retas assintóticas quando o lugar tende ao infinito. Além disso, a equação das assíntotas é dada pelo ponto de interseção sobre o eixo real, σ_a , e o ângulo, θ_a da seguinte forma:*

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{pólos finitos} - \sum \text{zeros finitos}}{\# \text{pólos finitos} - \# \text{zeros finitos}}$$

$$\theta_a = \frac{(2k+1)\pi}{\# \text{pólos finitos} - \# \text{zeros finitos}}$$

Onde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ e o ângulo é dado em radianos, no sentido trigonométrico, a partir do eixo real positivo.

Refinando o Esboço do LGR:

6. Pontos de saída e de chegada sobre o eixo real:

$$K = -\frac{1}{G(s)H(s)}$$

Nos pontos do LGR1 ao longo do eixo real onde ocorrem pontos de entrada e de saída, $s = \sigma$. Portanto,

$$K = -\frac{1}{G(\sigma)H(\sigma)}$$

Esta equação representa uma curva de K versus σ . Portanto se derivarmos com relação a σ podemos encontrar os pontos máximos e mínimos e portanto os pontos de partida e chegada.

- Cálculo do ponto de chegada e partida pelo método de transição:
Os pontos de partida e entrada satisfazem a relação:

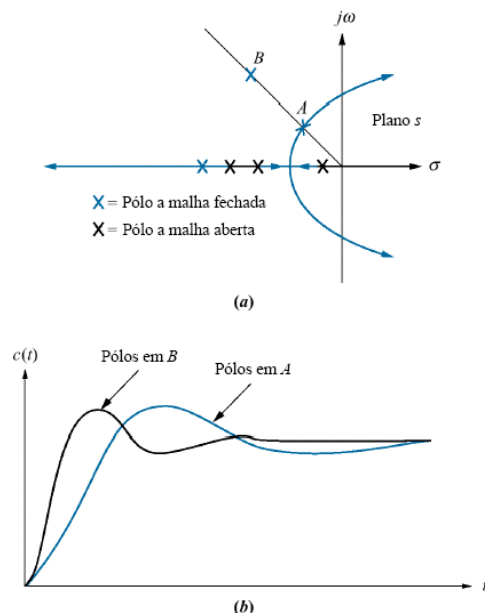
$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma + z_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma + p_i}$$

Resolvendo para σ encontramos os pontos de entrada e saída desejados

7. Pontos de interseção com o eixo $j\omega$: *forçando uma linha de zeros na tabela de Routh se obterá o ganho; retornando à linha para a equação de polinômio par e determinando as raízes resulta a frequência do ponto de interseção como eixo imaginário.*
8. Ângulos de partida e de Chegada

4.6 Projeto por Intermédio do LGR

Problema:

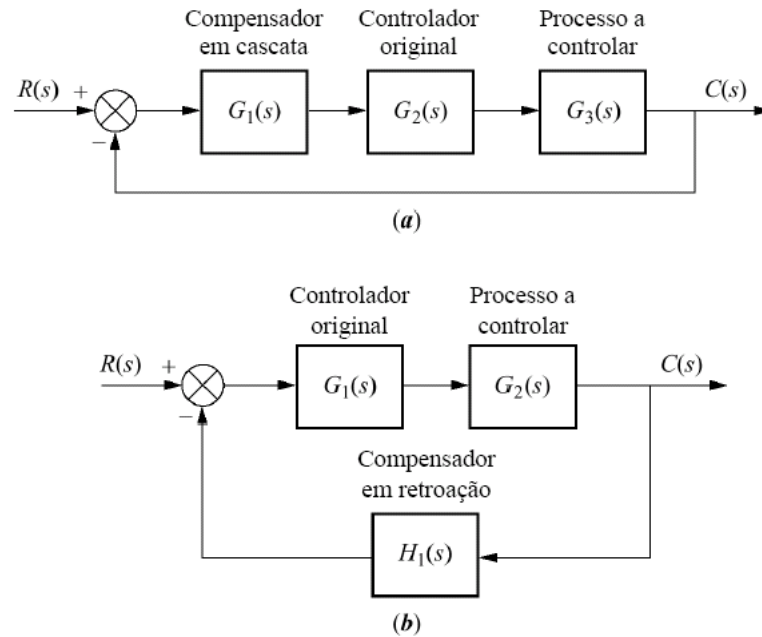


Solução: Compensar o sistema, ou seja, aumentar o número de pólos e zeros de tal forma que o sistema compensado possua um LGR que passe pela localização desejada. Os pólos e zeros de compensação podem ser gerados por meio de circuitos passivos ou ativos.

4.6.1 Projeto de Compensadores

4.6.1.1 Melhorando o erro de estado estacionário:

- O erro de estado estacionário pode ser melhorado pela introdução de uma integração no percurso direto.
- Configurações: compensadores em cascata e em retroação.



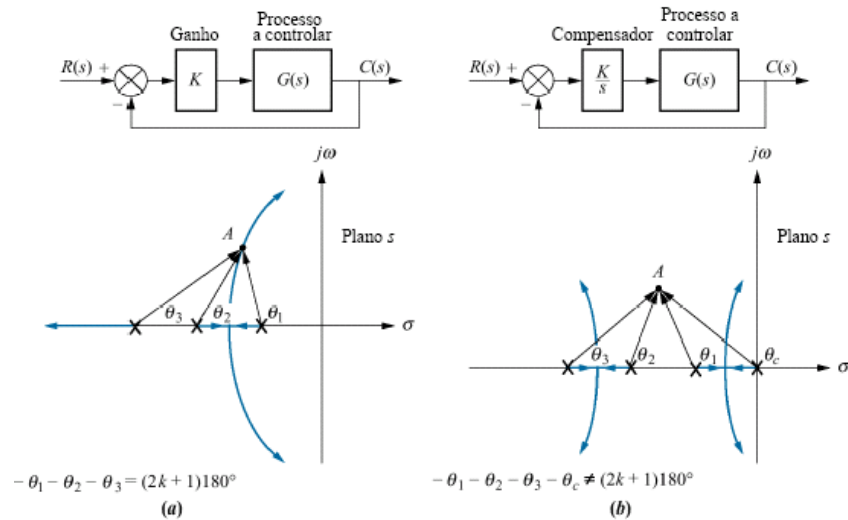
- Compensadores ideais: utilizam integração pura para melhorar o erro de estado estacionário. Podem ser implementados com estruturas ativas (circuitos elétricos: amplificadores ativos e fontes de alimentação adicionais).
- Compensadores com estruturas passivas: podem ser implementados através de elementos passivos (resistores e capacitores). São mais baratos e não necessitam de fontes de alimentação adicionais para o funcionamento. A desvantagem é que o erro de estado estacionário não é forçado a zero.

Melhorando o erro de estado estacionário utilizando compensação em cascata

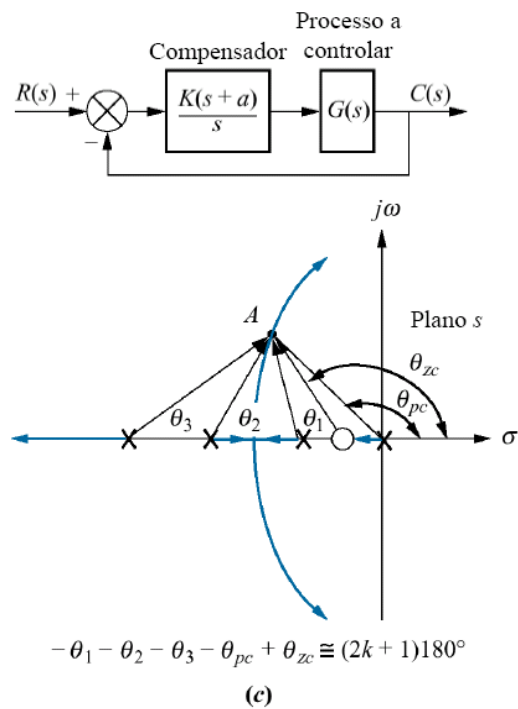
Objetivo: Melhorar o estado estacionário sem afetar de forma apreciável a resposta transitória.

a) Compensação Integral Ideal (PI)

- Utiliza um integrador puro para posicionar um pólo de malha aberta na origem e desta forma aumentar o tipo de sistema e consequentemente reduzir o erro de estado estacionário a zero.
- Compensador implementado com estruturas ativas, como amplificadores.

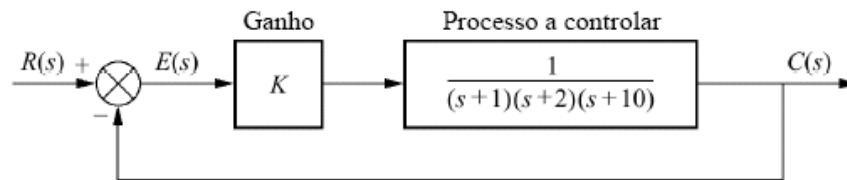


Solução: acrescentar um zero próximo à origem

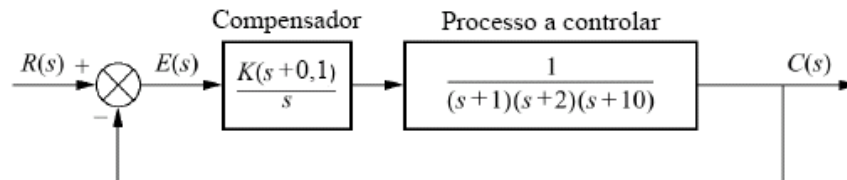


Então, o compensador integral ideal (PI) é aquele que possui um pólo na origem e um zero próximo ao pólo.

Exemplo: Dado o sistema da figura (a), operando com amortecimento de 0.174, mostrar que a adição do compensador integral ideal mostrado na figura (b) reduz o erro a zero para uma entrada degrau sem afetar de forma apreciável a resposta transitória.



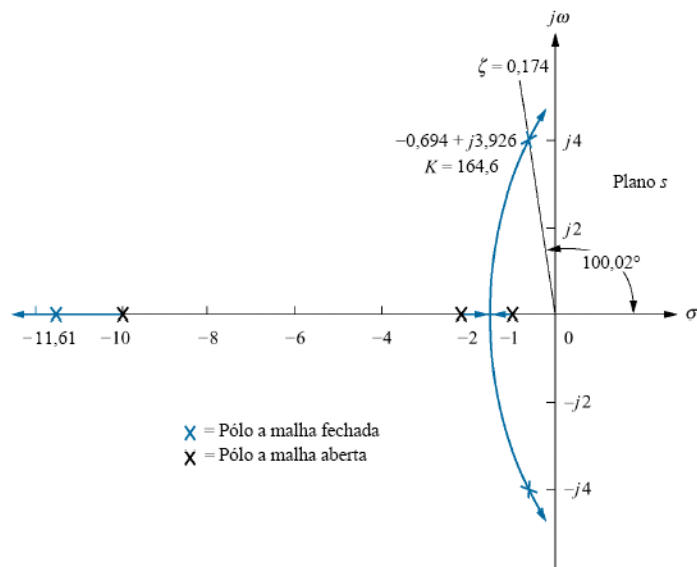
(a)



(b)

Solução:

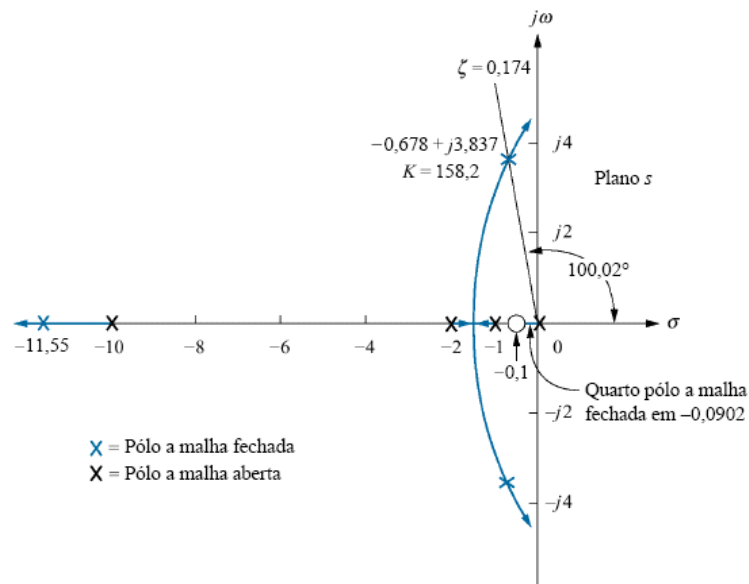
Sistema não compensado:



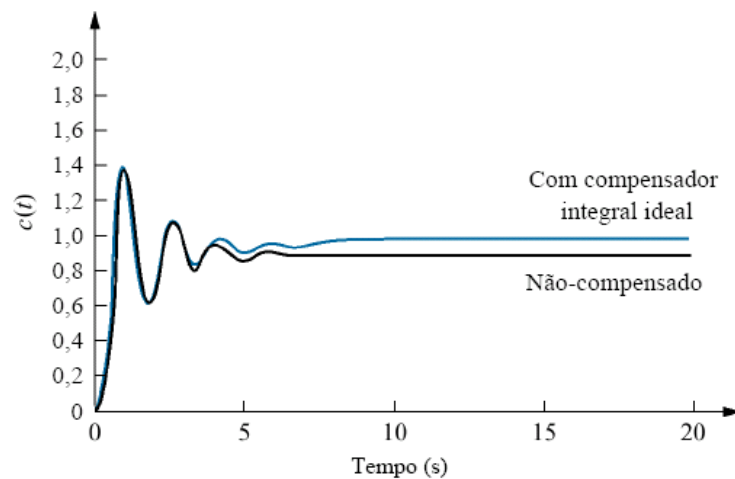
$$\text{Erro de estado estacionário: } e(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + 8.23} = 0.108$$

Sistema Compensado:

Adicionamos um compensador integral ideal com um zero em -0.1 como visto na figura (b) e obtemos o seguinte LGR do sistema compensado.

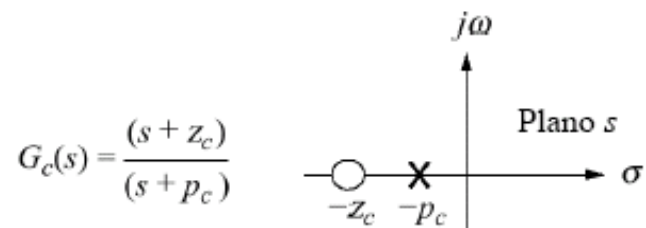


Resposta do sistema compensado e do sistema não compensado:

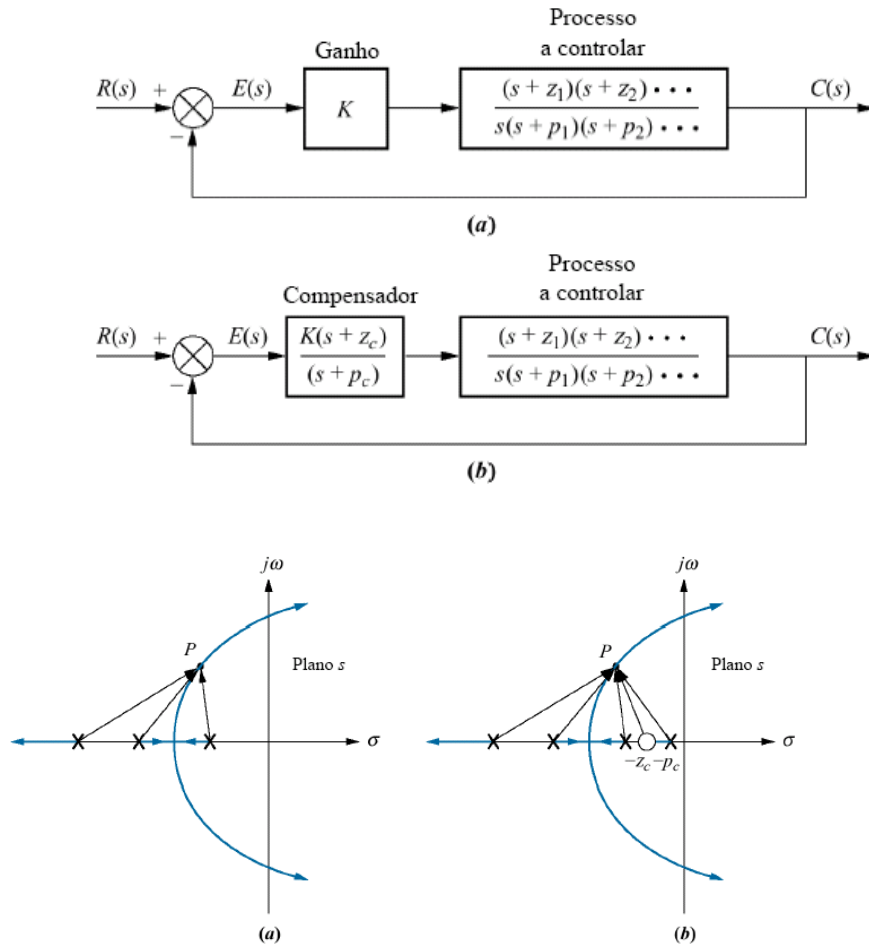


b) Compensação por atraso de fase

- Utilizamos estruturas passivas.
- O pólo e zero são colocados para a esquerda, nas proximidades da origem.



- LGR



Considerando o sistema não compensado do diagrama de blocos da figura (a), o erro de estado estacionário é dado por:

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_p}, K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{K z_1 z_2 \dots}{p_1 p_2 \dots} \quad (1)$$

Para o sistema compensado temos:

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_{pc}}, K_{pc} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{(K z_1 z_2 \dots)(z_c)}{(p_1 p_2 \dots)(p_c)} \quad (2)$$

Através do LGR do sistema compensado e do não compensado podemos verificar que a resposta transitória do sistema original não é alterada consideravelmente com a inclusão do compensador com atraso de fase.

Vemos também que o valor do ganho K também não se altera apreciavelmente.

Logo de (1) e (2), igualando os valores de K , podemos tirar que:

$$K_{pc} = K_p \frac{z_c}{p_c}$$

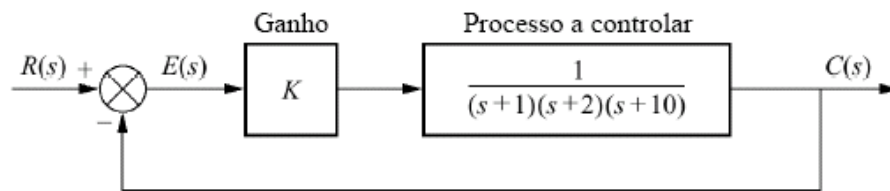
Objetivo: Para que o erro de estado estacionário do sistema compensado diminua temos que:

$$K_{pc} > K_p$$

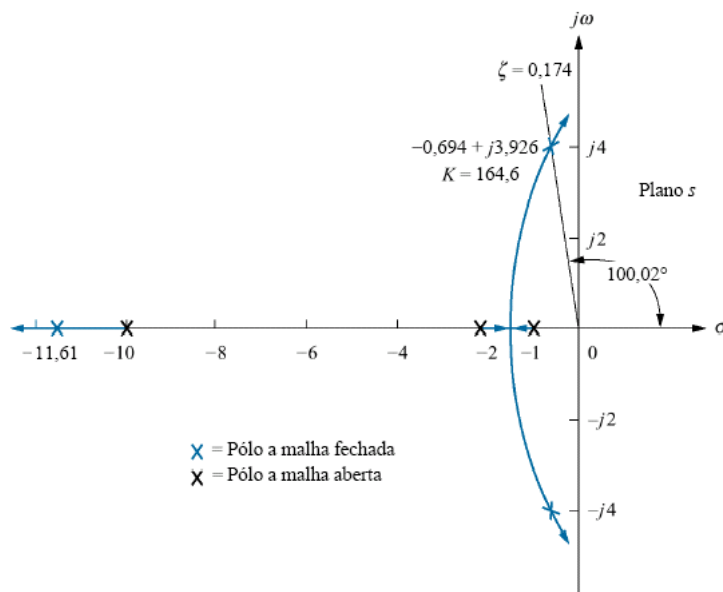
Logo, como z_c e p_c devem estar próximos um do outro para que a resposta transitória não se altere apreciavelmente, então para que a relação entre z_c e p_c seja grande, o par de pólo e zero deve ser colocado bem próximo a origem. (Ex: Se o pólo estiver em -0.001 e o zero em -0.01 então a relação entre o zero e o pólo é igual a 10).

Exemplo:

Compensar o sistema da figura abaixo para melhorar o erro de estado estacionário por meio de um fator de 10 se o sistema estiver funcionando com uma relação de amortecimento de 0.174.



LGR:



Erro de estado estacionário:

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + 8.23} = 0.108$$

Uma melhoria de 10 vezes significa um erro de:

$$e(\infty) = \frac{0.108}{10} = 0.0108 = \frac{1}{1 + K_{pc}}$$

O que resulta, para o sistema compensado, em :

$$K_{pc} = \frac{1 - e(\infty)}{e(\infty)} = 91.59$$

Sabemos que:

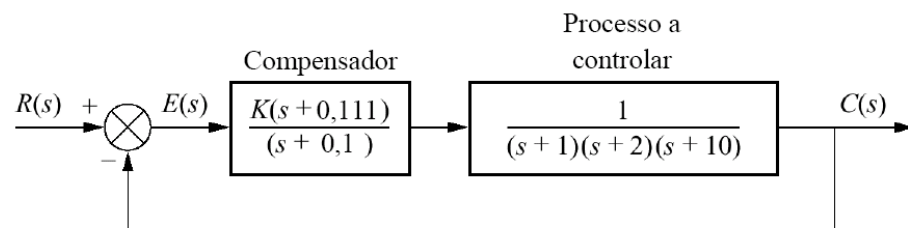
$$K_{pc} = K_p \frac{z_c}{p_c} \quad \text{ou} \quad \frac{z_c}{p_c} = \frac{K_{pc}}{K_p} = \frac{91.59}{8.23} = 11.13$$

Selecionando arbitrariamente:

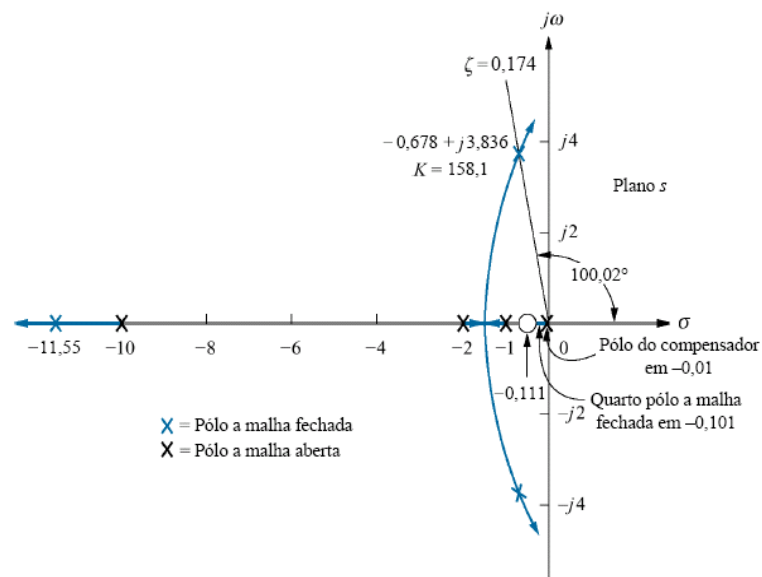
$$p_c = 0.01$$

Ficamos com:

$$z_c = 11.13 p_c \approx 0.111$$

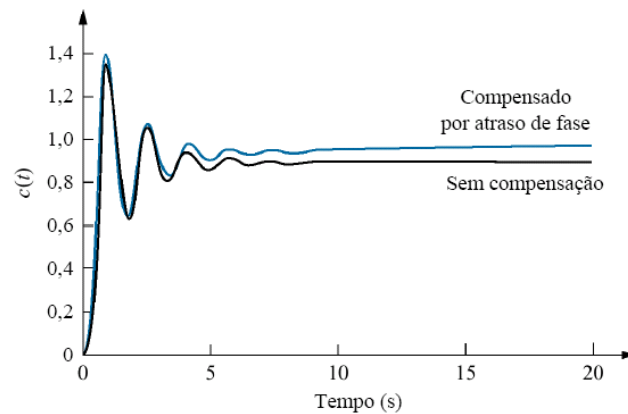


LGR do sistema compensado:



Características do sistema compensado e não compensado:

Parâmetro	Não-compensado	Compensado por atraso de fase
Processo e compensador	$\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+10)}$	$\frac{K(s+0,111)}{(s+1)(s+2)(s+10)(s+0,01)}$
K	164,6	158,1
K_p	8,23	87,75
$e(\infty)$	0,108	0,011
Pólos dominantes de segunda ordem	$-0,694 \pm j3,926$	$-0,678 \pm j3,836$
Terceiro pólo	-11,61	-11,55
Quarto pólo	Nenhum	-0,101
Zero	Nenhum	-0,111



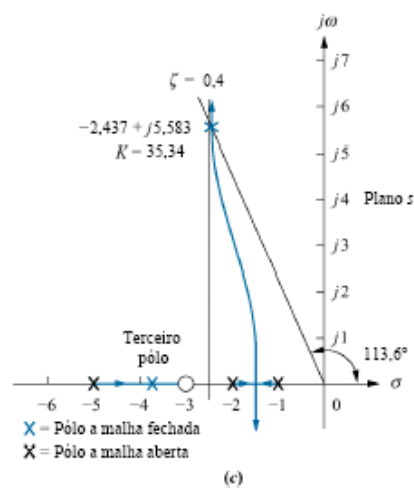
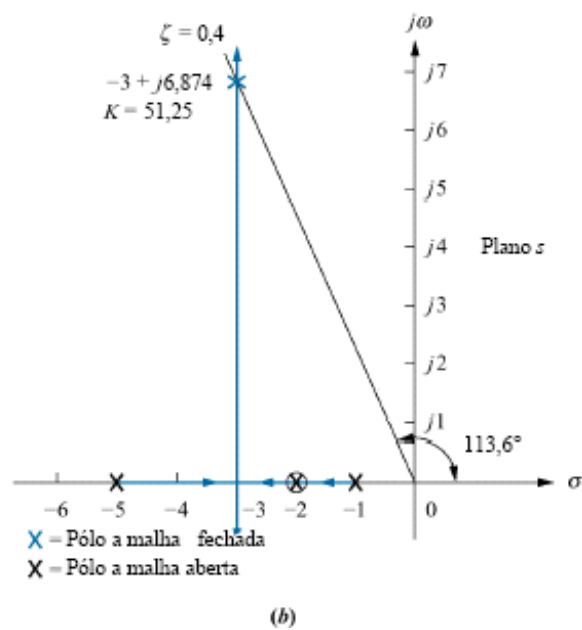
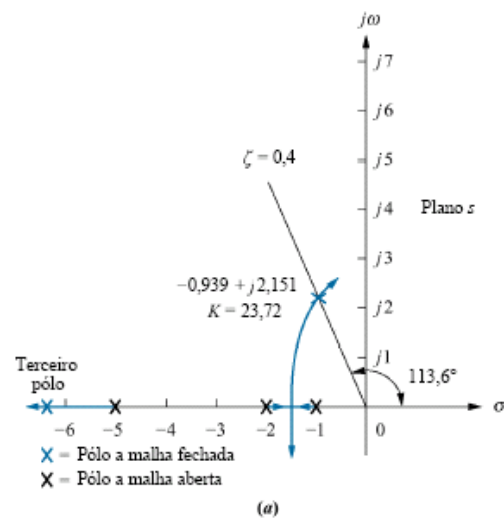
Melhorando a Resposta Transitória

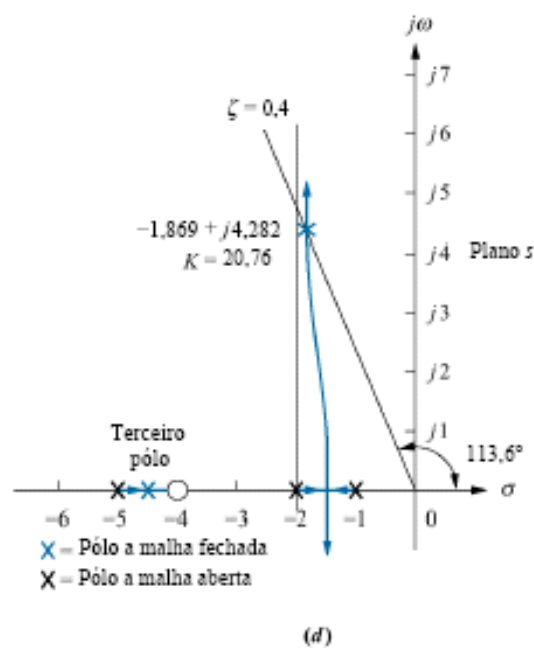
Melhorando a Resposta Transitória utilizando compensação em cascata:

a) Compensação Derivativa Ideal (PD)

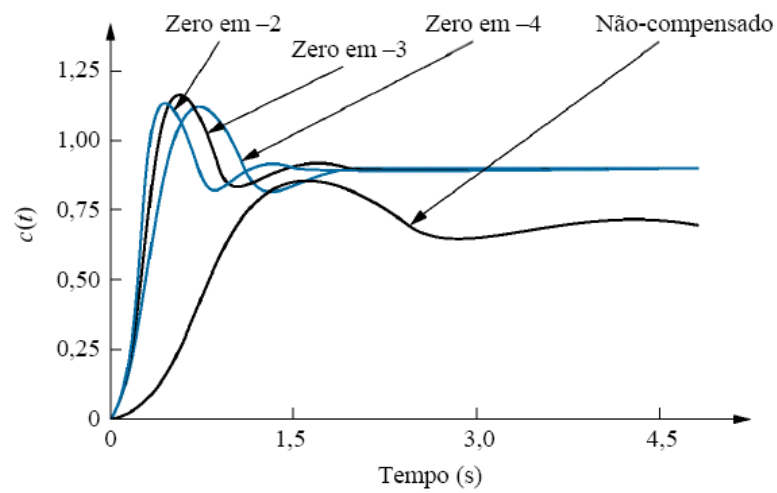
Função de transferência do compensador:

$$G_c(s) = s + z_c$$

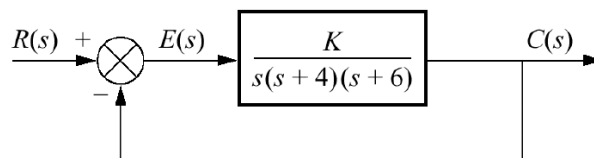




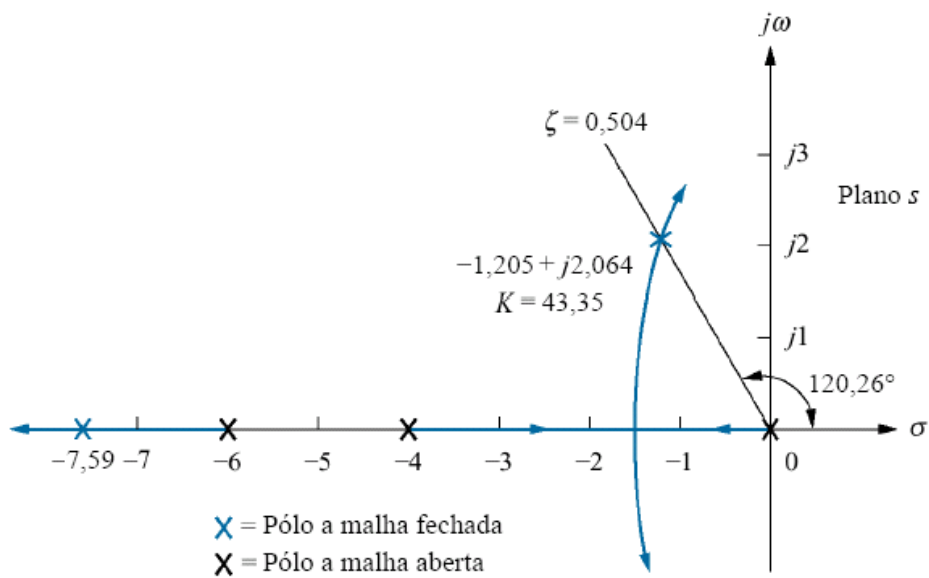
	Não-compensado	Compensação b	Compensação c	Compensação d
Processo e Compensador	$\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+5)}$	$\frac{K(s+2)}{(s+1)(s+2)(s+5)}$	$\frac{K(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+5)}$	$\frac{K(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+5)}$
Pólos dom.	$-0,939 \pm j2,151$	$-3 \pm j6,874$	$-2,437 \pm j5,583$	$-1,869 \pm j4,282$
K	23,72	51,25	35,34	20,76
ζ	0,4	0,4	0,4	0,4
ω_n	2,347	7,5	6,091	4,673
%UP	25,38	25,38	25,38	25,38
T_s	4,26	1,33	1,64	2,14
T_p	1,46	0,46	0,56	0,733
K_p	2,372	10,25	10,6	8,304
$e(\infty)$	0,297	0,089	0,086	0,107
Terceiro pólo	-6,123	Nenhum	-3,127	-4,262
Zero	Nenhum	Nenhum	-3	-4
Comentários	Aprox. de 2ª ordem OK	Sistema de 2ª ordem puro	Aprox. de 2ª ordem OK	Aprox. de 2ª ordem OK



Exemplo: $M_p=16\%$ e T_s (redução de três vezes)



LGR Sistema não-compensado:



	Não-compensado	Simulação	Compensado	Simulação
Processo e compensador	$\frac{K}{s(s+4)(s+6)}$		$\frac{K(s+3,006)}{s(s+4)(s+6)}$	
Pólos dominantes	$1,205 \pm j2,064$		$3,613 \pm j6,193$	
K	43,35		47,45	
ζ	0,504		0,504	
ω_n	2,39		7,17	
%UP	16	14,8	16	11,8
T_s	3,320	3,6	1,107	1,2
T_p	1,522	1,7	0,507	0,5
K_v	1,806		5,94	
$e(\infty)$	0,554		0,168	
Terceiro pólo	$-7,591$		$-2,775$	
Zero	Nenhum		$-3,006$	
Comentários	Aprox. de 2ª ordem OK		Não há cancelamento de pólo com zero	

Sistema –compensado:

$$T_s = \frac{3.320}{3} = 1.107$$

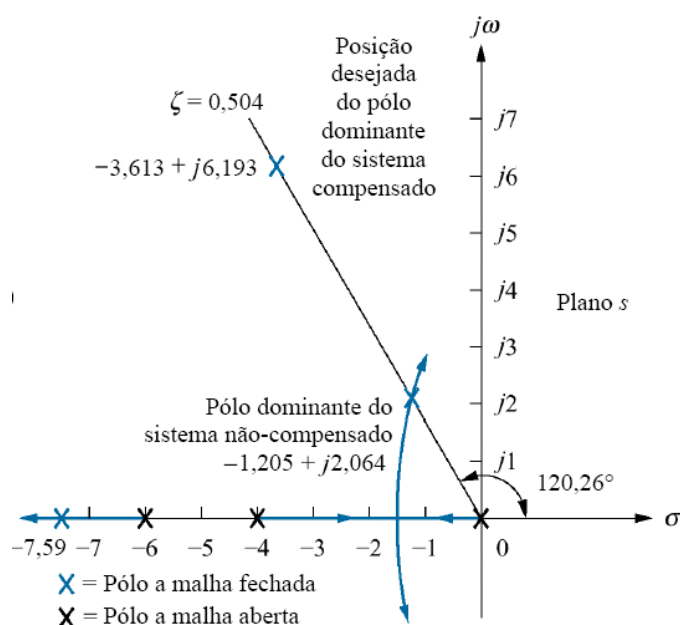
Cálculo da parte real do pólo dominante desejado:

$$T_s = \frac{4}{\sigma} = 1.107, \sigma = -3.613$$

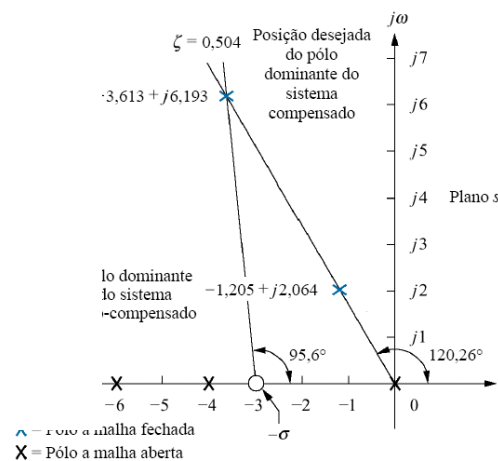
Cálculo da parte imaginária:

$$\sigma = -\zeta\omega_n, \omega_n = 7.168, \omega_d = 6.193$$

Pólos desejados para sistema compensado:



Cálculo da posição do zero do compensador:



Fazendo o pólo desejado como ponto de teste e aplicando condição de módulo para o sistema com o compensador:

$$\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 = 180^\circ$$

Obtém-se o ângulo do zero em relação ao ponto de teste:

$$\theta_1 = 95,6^\circ$$

Para encontrar a posição exata do zero do compensador :

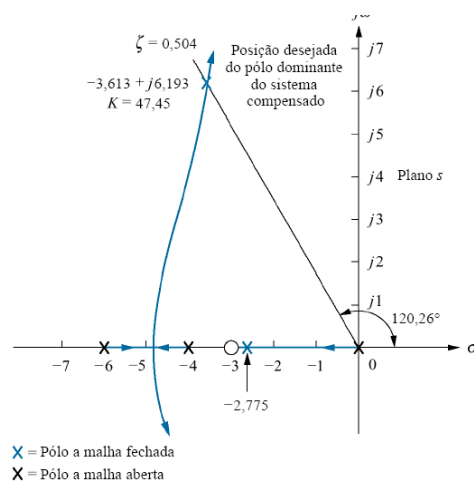
$$\frac{6,193}{3,613 - \sigma_c} = \operatorname{tg}(180^\circ - 95,6^\circ)$$

Onde temos então: $\sigma = 3,006$

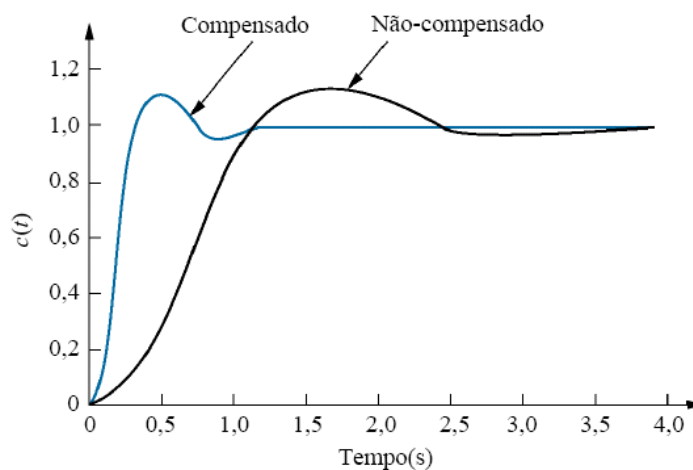
Ficando a FT de ramo direto do sistema com o compensador igual a:

$$G(s) = \frac{K(s + 3,006)}{s(s + 4)(s + 6)}$$

O LGR do sistema compensado fica então:



	Não-compensado	Simulação	Compensado	Simulação
Processo e compensador	$\frac{K}{s(s+4)(s+6)}$		$\frac{K(s+3,006)}{s(s+4)(s+6)}$	
Pólos dominantes	$1,205 \pm j2,064$		$3,613 \pm j6,193$	
K	43,35		47,45	
ζ	0,504		0,504	
ω_n	2,39		7,17	
%UP	16	14,8	16	11,8
T_s	3,320	3,6	1,107	1,2
T_p	1,522	1,7	0,507	0,5
K_v	1,806		5,94	
$e(\infty)$	0,554		0,168	
Terceiro pólo	-7,591		-2,775	
Zero	Nenhum		-3,006	
Comentários	Aprox. de 2ª ordem OK		Não há cancelamento de pólo com zero	



b) Melhorando a resposta transitória utilizando compensação por avanço de fase

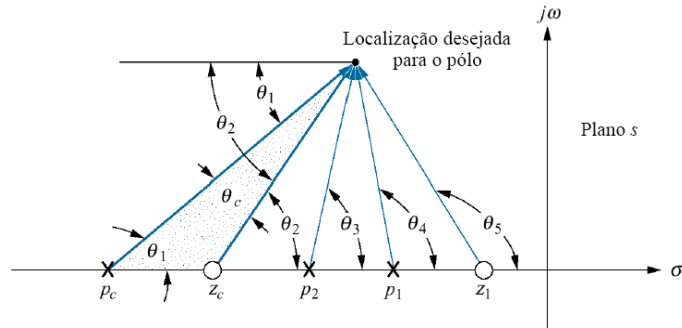
- São construídos a partir de estruturas passivas (resistores, capacitores)
- A utilização de estruturas passiva não permitem a produção de apenas um zero simples, em vez disso resultam em um zero e um pólo do compensador.

Função de transferência do compensador:

$$G_c(s) = \frac{s + z_c}{s + p_c}$$

O pólo deve estar mais afastado do eixo imaginário que o zero para que a contribuição angular $\theta_z - \theta_p$ seja positiva, portanto aproximando da utilização de um zero simples no compensador (como no PD ideal).

Considerações sobre os ângulos do zero e pólo do compensador:



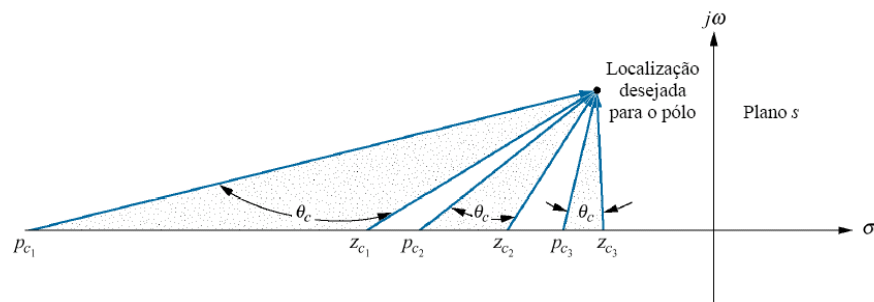
Onde:

$$\theta_2 - \theta_1 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 = (2k + 1)180^\circ$$

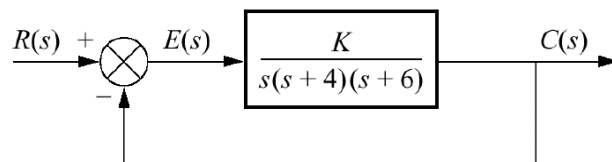
Sendo,

$$\theta_2 - \theta_1 = \theta_c$$

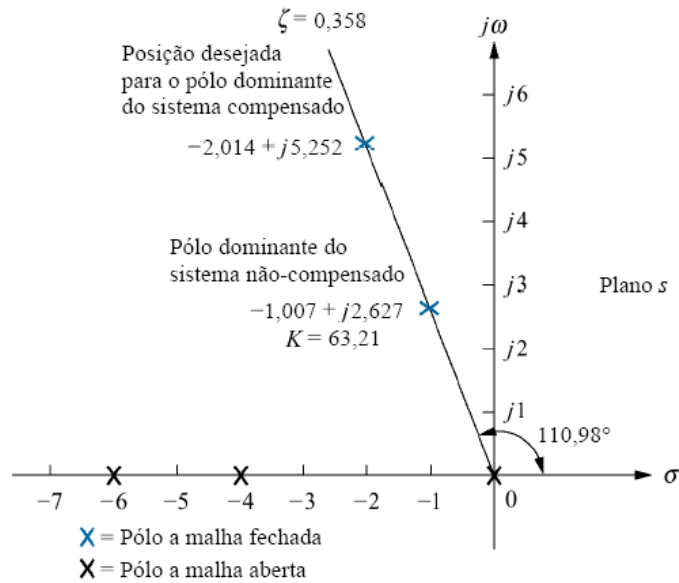
a contribuição angular do compensador.



Exemplo: Projetar um compensador por avanço de fase para o sistema visando reduzir o tempo de assentamento à metade, mantendo a ultrapassagem percentual de 30%.



Para ultrapassagem percentual de 30% temos coeficiente de amortecimento desejado igual a 0.358.



Para o sistema não compensado, a partir do pólo dominante do sistema o tempo de estabilização é:

$$T_s = \frac{4}{1.007} = 3.972s$$

Para o sistema compensado queremos que o tempo de estabilização seja a metade do sistema não compensado então temos que:

$$T_s = 3.972 / 2 = 1.986s$$

$$T_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 1.986, \xi\omega_n = 2.014$$

Logo a parte real do pólo dominante do sistema compensado deve ser $-\xi\omega_n = -2.014$ e a parte imaginária, dado que $\xi = 0.358$, deve ser igual a $\omega_d = 5.252$, como pode ser visto na figura anterior.

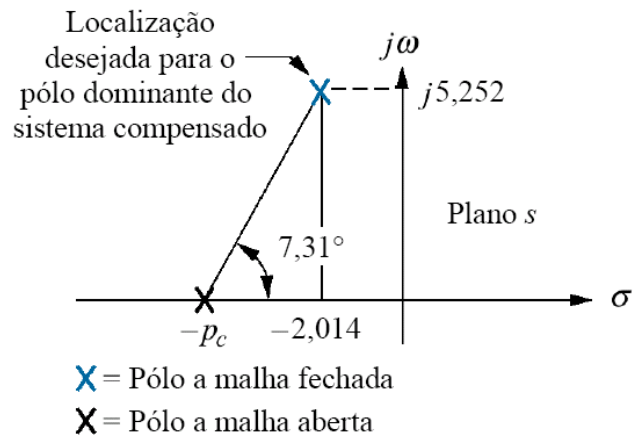
O nosso compensador tem FT igual a: $G_c(s) = \frac{s + z_c}{s + p_c}$

Admitindo arbitrariamente um zero do compensador em -5 no eixo real como uma possível solução. O próximo passo será calcular o pólo do compensador que garanta que o LGR do sistema passe pelo pólo dominante de malha fechada desejado para o sistema com o compensador.

Utilizando o ponto desejado como ponto de teste, aplicamos a condição de ângulo e calculamos o ângulo desejado para o pólo do compensador:

$$\theta_{pc} = 7.31$$

Através do ângulo do pólo podemos então calcular o valor deste pólo sobre o eixo real:



Nota: Esta figura não está desenhada em escala

Sendo:

$$\operatorname{tg} 7,31^\circ = \frac{5,252}{p_c - 2,014}$$

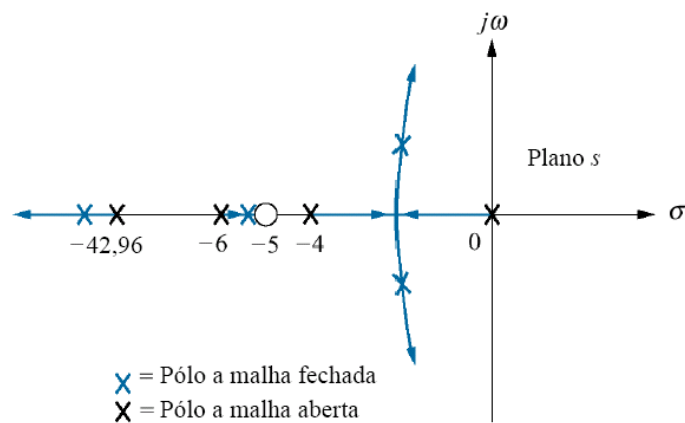
Onde temos então:

$$p_c = 42,96$$

Nosso compensador é então:

$$G_c(s) = \frac{s + 5}{s + 42,96}$$

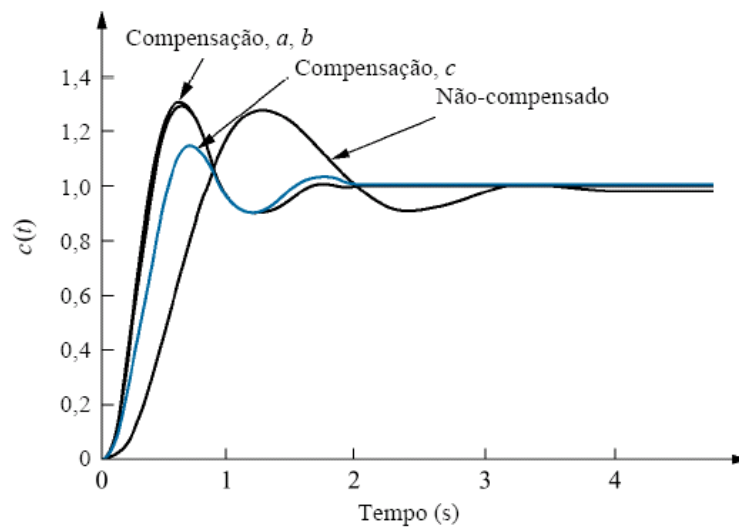
O LGR do sistema compensado fica então:



Nota: Esta figura não está desenhada em escala

	Não-compensado	Compensação a	Compensação b	Compensação c
Processo e compensador	K $s(s+4)(s+6)$	$K(s+5)$ $s(s+4)(s+6)(s+42,96)$	$K(s+4)$ $s(s+4)(s+6)(s+20,09)$	$K(s+2)$ $s(s+4)(s+6)(s+8,971)$
Pólos dominantes	$-1,007 \pm j2,627$	$-2,014 \pm j5,252$	$-2,014 \pm j5,252$	$-2,014 \pm j5,252$
K	63,21	1423	698,1	345,6
ζ	0,358	0,358	0,358	0,358
ω_n	2,813	5,625	5,625	5,625
%UP	30(28)	30(30,7)	30(28,2)	30(14,5)
T_s	3,972(4)	1,986(2)	1,986(2)	1,986(1,7)
T_p	1,196(1,3)	0,598(0,6)	0,598(0,6)	0,598(0,7)
K_v	2,634	6,9	5,791	3,21
$e(\infty)$	0,380	0,145	0,173	0,312
Outros pólos	$-7,986$	$-43,8, -5,134$	$-22,06$	$-13,3, -1,642$
Zero	Nenhum	-5	Nenhum	-2
Comentários	Aprox. de 2ª ordem OK	Aprox. de 2ª ordem OK	Aprox. de 2ª ordem OK	Não há cancelamento de pólo com zero

Nota: Os resultados de simulação estão mostrados entre parênteses



4.6.1.3 Melhorando a resposta transitória e o erro de estado estacionário:

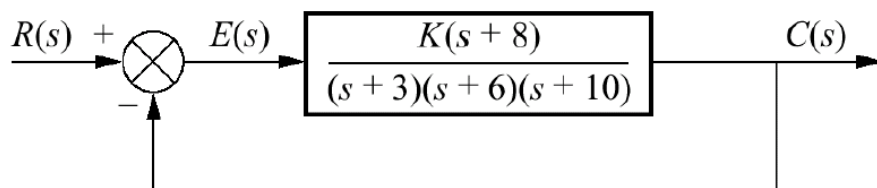
- Combinamos as duas técnicas aprendidas anteriormente para melhorar a resposta transitória e o erro de regime individualmente.
- Podemos primeiro melhorar o erro de regime e então seguir com o projeto para melhorar a resposta transitória (ou vice-versa).
- O projeto pode tanto utilizar estruturas ativas como estruturas passivas.
- Ativo - PD +PI = PID
- Passivo – Compensador por avanço de fase + compensador por atraso de fase = Compensador por avanço e atraso defase.

Projeto do Controlador PID Ativo

A técnica de projeto consiste nos seguintes passos:

1. Calcule o desempenho do sistema não-compensado para determinar quanto de melhoria é requerido na resposta transitória.
2. Projete o controlador PD ideal para atender as especificações da resposta transitória.
3. Simule o sistema e certifique-se que todas as especificações foram satisfeitas.
4. Reprojete se a simulação mostrar que os requisitos não foram atendidos.
5. Projete o controlador PI ideal para produzir o erro estacionário desejado.
6. Simule o sistema e certifique-se que todas as especificações foram satisfeitas.
7. Reprojete se a simulação mostrar que os requisitos não foram atendidos.

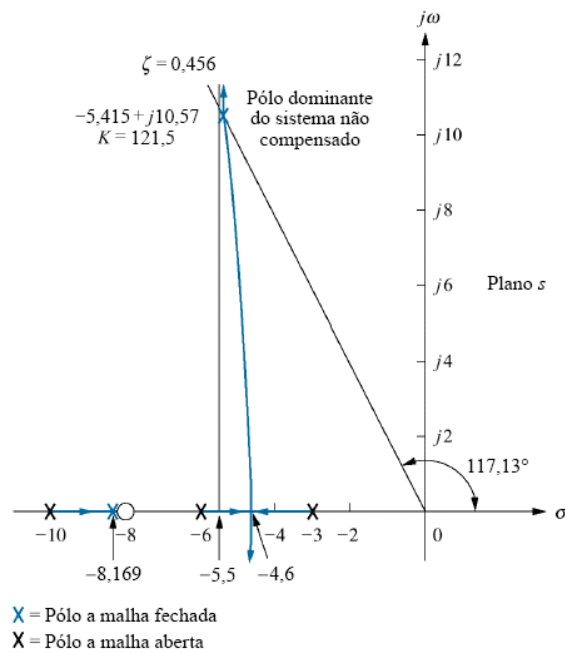
Exemplo:



Projetar um controlador PID de modo que o sistema possa operar com um tempo de pico cujo valor seja dois terços do valor relativo ao sistema não compensado com ultrapassagem máxima percentual de 20% e erro de regime nulo.

Passo 1:

LGR do sistema não-compensado:



Parâmetro	Não-compensado	Compensador PD	Compensador PID
Processo e compensador	$\frac{K(s+8)}{(s+3)(s+6)(s+10)}$	$\frac{K(s+8)(s+55,92)}{(s+3)(s+6)(s+10)}$	$\frac{K(s+8)(s+55,92)(s+0,5)}{(s+3)(s+6)(s+10)s}$
Pólos dominantes	$-5,415 \pm j10,57$	$-8,13 \pm j15,87$	$-7,516 \pm j14,67$
K	121,5	5,34	4,6
ζ	0,456	0,456	0,456
ω_n	11,88	17,83	16,49
%UP	20	20	20
T_s	0,739	0,492	0,532
T_p	0,297	0,198	0,214
K_p	5,4	13,27	∞
$e(\infty)$	0,156	0,070	0
Outros pólos	-8,169	-8,079	-8,099, -0,468
Zeros	-8	-8, -55,92	-8, -55,92, -0,5
Comentários	Aprox. de 2ª ordem OK	Aprox. de 2ª ordem OK	Zeros em -55,92 e em -0,5 não são cancelados

Passo 2:

Compensar o sistema com o objetivo de reduzir o tempo de pico para dois terços do sistema não compensado.

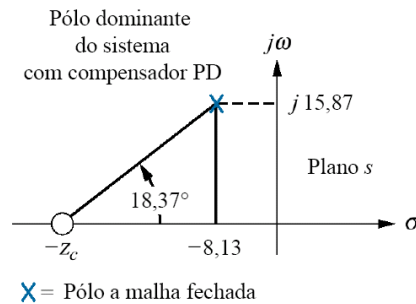
- Primeiro temos que encontrar a localização dos pólos dominantes do sistema com o compensador:

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d}, \omega_d = \frac{\pi}{(2/3)(0.297)} = 15.87 \text{ s}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}, \sigma = \omega_n \zeta = 8.13$$

$$s = -8.13 \pm 15.87j$$

- A seguir projetamos o compensador: Aplicando a condição de ângulo, podemos calcular a contribuição requerida do zero do compensador que é igual a 18.37° . Depois, supondo que o zero do compensador esteja localizado em $-z_c$, como mostrado na figura abaixo, calculamos a localização do zero do compensador.



$$\tan 18.37^\circ = \frac{15.87}{z_c - 8.13}$$

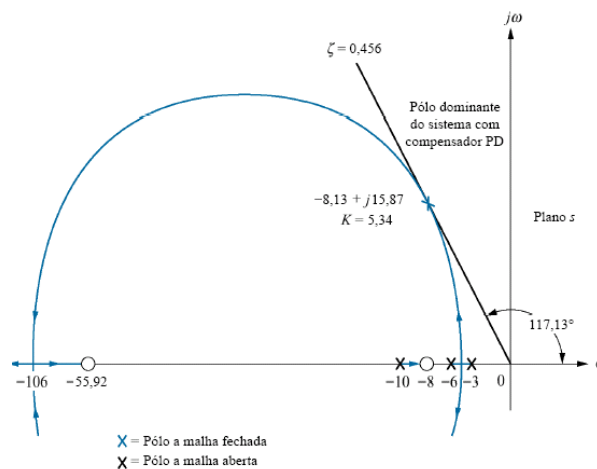
Então:

$$z_c = 55.92$$

Assim o controlador PD ideal é dado por:

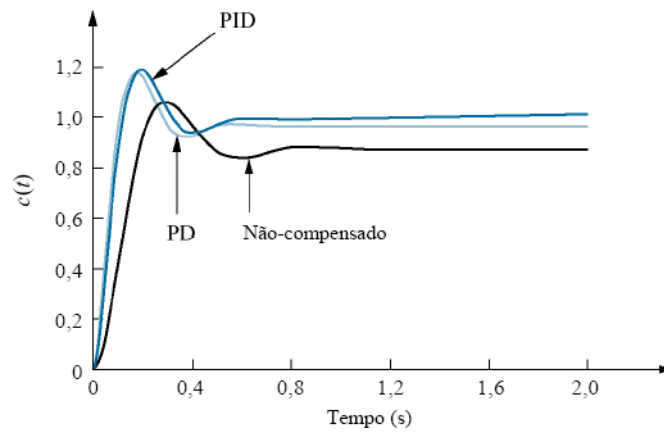
$$G_{PD}(s) = (s + 55.92)$$

O LGR do sistema compensado com o controlador PD é então:



Passo 3:

Simulamos o sistema com o compensador projetado para melhorar a resposta transitória. (ver tabela comparativa)

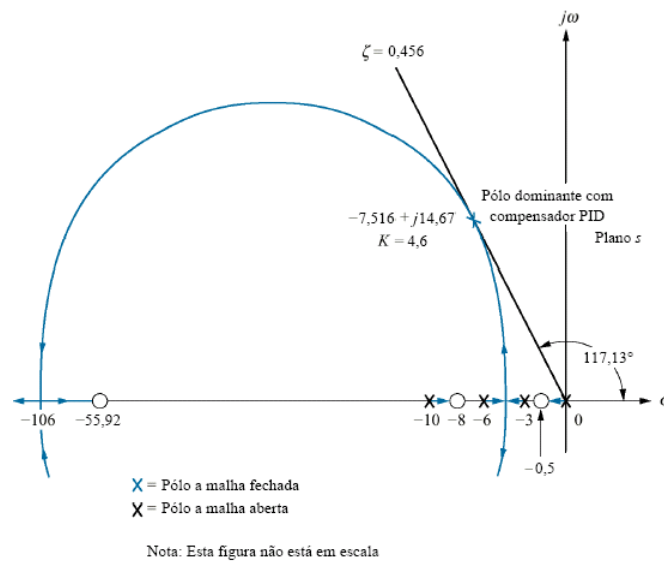


Passo 4: projeto do controlador PI ideal para melhorar o erro de regime permanente.

Escolhendo o compensador PI ideal como sendo:

$$G_{PI}(s) = \frac{(s + 0.5)}{s}$$

Esboçamos o LGR do sistema com o compensador PID:



Passo 5:

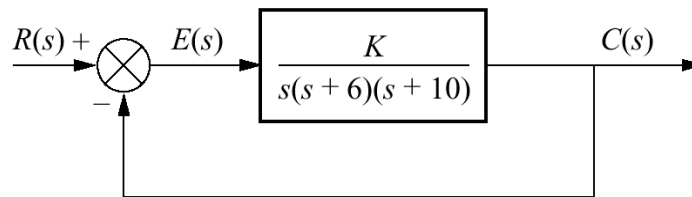
Simulamos o sistema para verificar se especificações foram atendidas. (ver gráfico com simulações e tabela comparativa)

Projeto do controlador por atraso e avanço de fase

A técnica de projeto consiste nos seguintes passos:

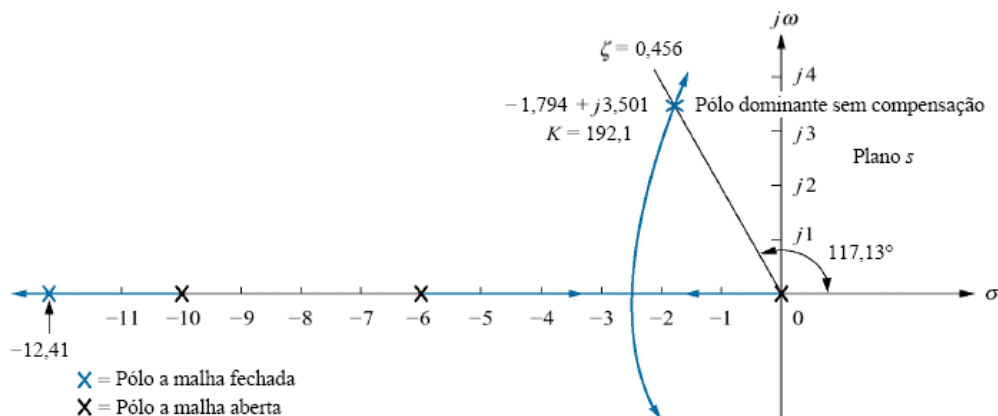
1. Calcule o desempenho do sistema não-compensado para determinar quanto de melhoria é requerida na resposta transitória.
2. Projete o controlador por avanço de fase para atender as especificações da resposta transitória.
3. Simule o sistema e certifique-se que todas as especificações foram satisfeitas.
4. Reprojete se a simulação mostrar que os requisitos não foram atendidos.
5. Calcule o desempenho de erro estacionário relativo ao sistema compensado e determine a melhoria adicional necessária no erro.
6. Projete o compensador por atraso de fase para produzir o erro de regime requerido.
7. Simule o sistema.
8. Reprojete se a simulação mostrar que os requisitos não foram atendidos.

Exemplo:



Projetar um compensador por atraso e avanço de fase de modo que o sistema possa operar com ultrapassagem máxima percentual de 20% e uma redução à metade do tempo de assentamento. Além disso, o sistema compensado apresentará uma melhoria de dez vezes no erro de regime para uma entrada rampa.

Passo 1:



Parâmetro	Não-compensado	Compensado por avanço de fase	Compensado por atraso de fase
Processo e compensador	$\frac{K}{s(s+6)(s+10)}$	$\frac{K}{s(s+10)(s+29,1)}$	$\frac{K(s+0,04713)}{s(s+10)(s+29,1)(s+0,01)}$
Pólos dominantes	$-1,794 \pm j3,501$	$-3,588 \pm j7,003$	$-3,574 \pm j6,976$
K	192,1	1977	1971
ζ	0,456	0,456	0,456
ω_n	3,934	7,869	7,838
%UP	20	20	20
T_s	2,230	1,115	1,119
T_p	0,897	0,449	0,450
K_v	3,202	6,794	31,92
$e(\infty)$	0,312	0,147	0,0313
Terceiro pólo	-12,41	-31,92	-31,91, -0,0474
Zero	Nenhum	Nenhum	-0,04713
Comentários	Aprox. de 2ª ordem OK	Aprox. de 2ª ordem OK	Aprox. de 2ª ordem OK

Passo 2:

- Cálculo dos pólos dominantes do sistema compensado:

Partindo da especificação desejada para o tempo de assentamento do sistema compensado:

$$T_s = \frac{2.230}{2} = 1.115 = \frac{4}{\zeta\omega_n}, \zeta\omega_n = 3.588$$

$$\omega_d = 7.003$$

- Projeto do compensador por avanço de fase:

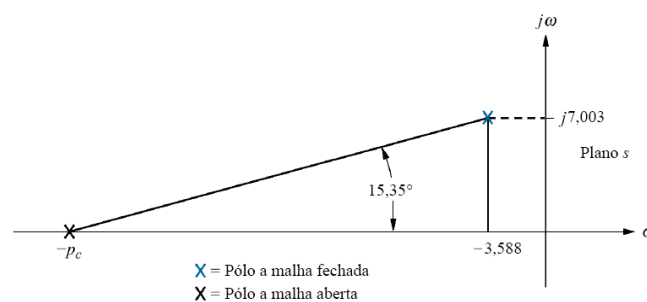
Selecionar arbitrariamente a localização do zero do compensador:

$$z_c = -6$$

Encontrar a localização do pólo, através da condição de ângulo.

$$\theta_p = -15.35^\circ$$

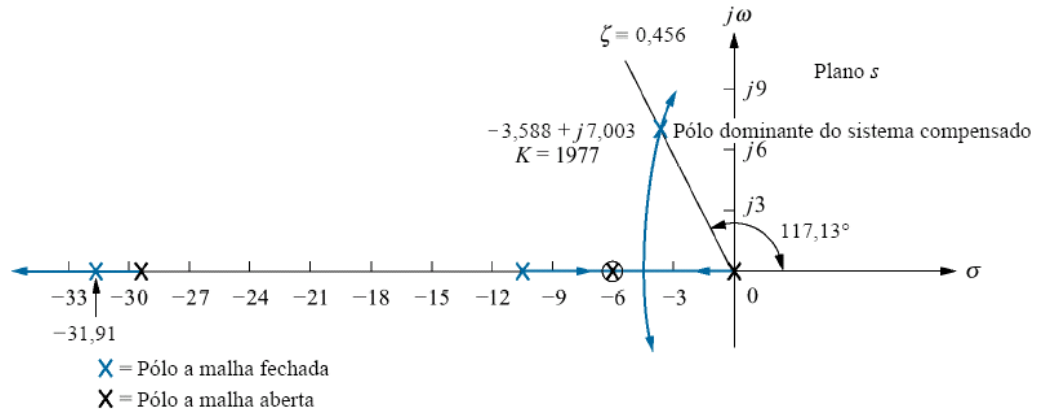
E utilizando a geometria na figura abaixo:



Encontramos a localização do pólo do compensador:

$$p_c = -29.1$$

O LGR do sistema compensado fica então:



Passo 3 e 4: Simulação do sistema

Passo 5: Continuar o projeto utilizando o compensador por atraso de fase para melhorar a resposta em regime permanente.

Pela tabela comparativa podemos ver que para o sistema não compensado

$$K_v = 3.201$$

e para o sistema compensado com o compensador por avanço de fase o valor de $K_v = 6.794$.

Portanto a adição do compensador melhorou o erro por um fator de 2.122.

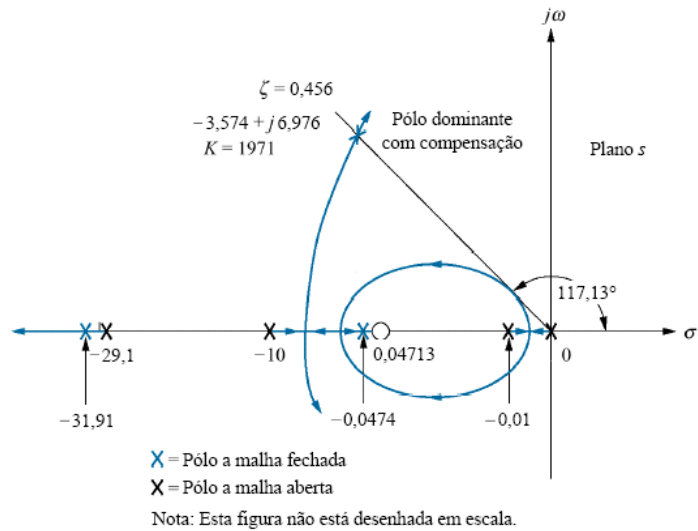
A exigência de projeto era uma melhoria de 10 vezes, logo devemos introduzir o compensador por atraso de fase para completar a exigência de projeto.

Para melhorar o erro em 10 vezes, temos que completar a melhoria com um fator de 4.713 (10/2.122) em relação ao sistema compensado por avanço de fase.

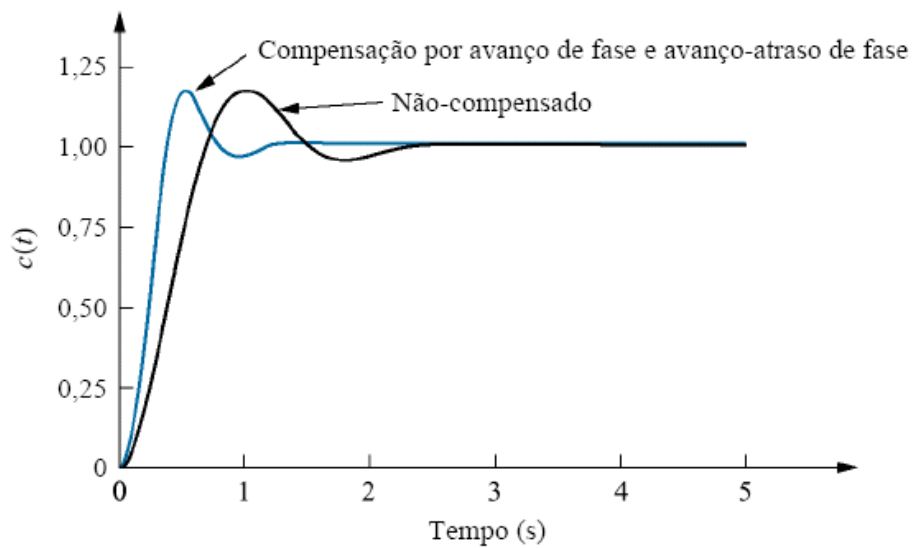
Passo 6:

Escolhemos arbitrariamente o pólo do compensador em 0.01, o que coloca o zero em -0.04713.

LGR do sistema compensado por atraso e avanço defase:

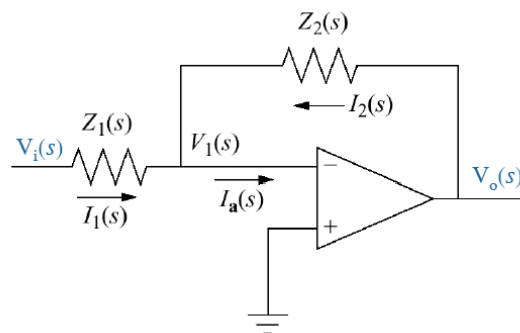









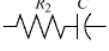
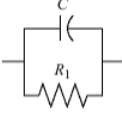

Passo 9: Simulação

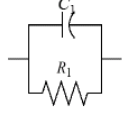
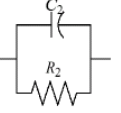
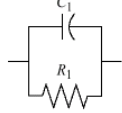
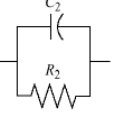


4.6.2 Realização Física da Compensação:

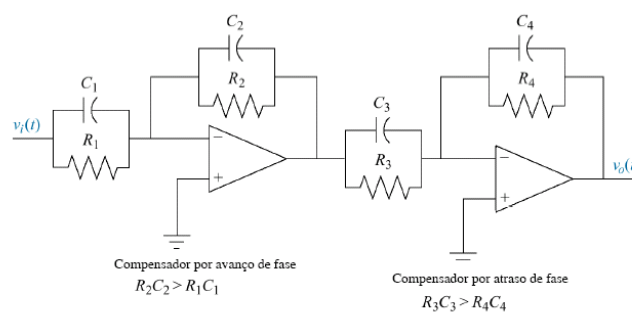
a) Realização de circuito ativo:



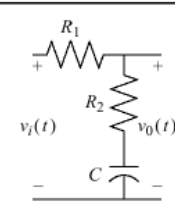
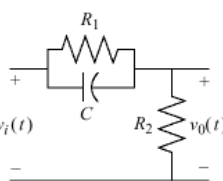
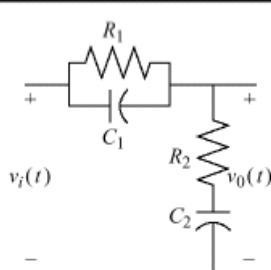
Função	$Z_1(s)$	$Z_2(s)$	$G_c(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$
Ganho			$-\frac{R_2}{R_1}$
Integração			$-\frac{1}{RCs}$
Derivação			$-RCs$
Controlador PI			$-\frac{R_2}{R_1} \left(s + \frac{1}{R_2 C} \right)$
Controlador PD			$-R_2 C \left(s + \frac{1}{R_1 C} \right)$

Função	$Z_1(s)$	$Z_2(s)$	$G_c(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$
Compensação por atraso de fase			$-\frac{C_1}{C_2} \left(s + \frac{1}{R_1 C_1} \right) \left(s + \frac{1}{R_2 C_2} \right)$ onde $R_2 C_2 > R_1 C_1$
Compensação por avanço de fase			$-\frac{C_1}{C_2} \left(s + \frac{1}{R_1 C_1} \right) \left(s + \frac{1}{R_2 C_2} \right)$ onde $R_1 C_1 > R_2 C_2$

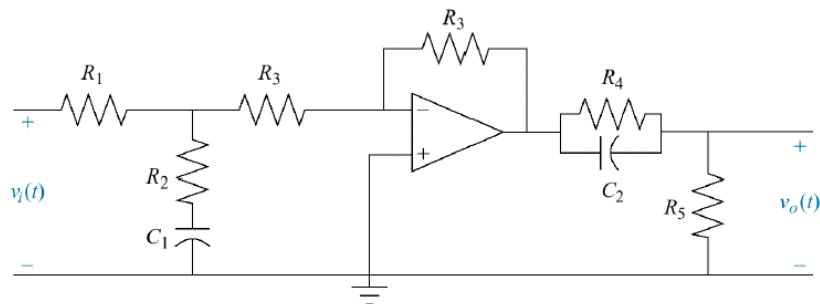
Compensador por atraso e avanço de fase implementado com amplificadores operacionais



b) Realização de circuito passivo:

Função	Circuito	Função de transferência	$\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$
Compensação por atraso de fase		$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{s + \frac{1}{R_2 C}}{s + \frac{1}{(R_1 + R_2) C}}$	
Compensação por avanço de fase		$\frac{s + \frac{1}{R_1 C}}{s + \frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C}}$	
Compensação por atraso e avanço de fase		$\frac{\left(s + \frac{1}{R_1 C_1}\right) \left(s + \frac{1}{R_2 C_2}\right)}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1}\right) s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$	

Compensador por atraso e avanço de fase implementado com associação em cascata de estruturas de atraso de fase e de avanço de fase com desacoplamento



Capítulo 5

Métodos de Resposta em Frequência

5.1 Introdução

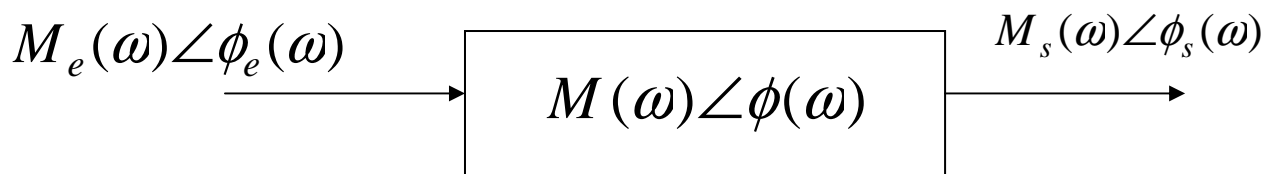
- O termo resposta em frequência significa a resposta em regime permanente de um sistema a uma entrada senoidal.
- Nos métodos de resposta em frequência, variamos a frequência do sinal de entrada dentro de certo intervalo e estudamos a resposta resultante.
- Em regime permanente, entradas senoidais aplicadas a sistemas lineares geram respostas senoidais de mesma frequência.
- As respostas diferem da entrada em amplitude e ângulo de fase.

Representação dos sinais senoidais:

- Os sinais senoidais podem ser representados por números complexos chamados fasores:

$$M_1 \cos(\omega t + \phi_1) \rightarrow M_1 \angle \phi_1$$

Onde a magnitude do número complexo é a amplitude do sinal senoidal e o ângulo no número complexo é o ângulo de fase da senóide. A frequência ω do sinal fica implícita.



Admitindo o sistema representado pelo número complexo $M(\omega) \angle \phi(\omega)$, então a senóide de estado estacionário da saída é:

$$M_s(\omega) \angle \phi_s(\omega) = M_e(\omega) M(\omega) \angle [\phi_e(\omega) + \phi(\omega)]$$

Com:

$$M(\omega) = \frac{M_s(\omega)}{M_e(\omega)} \quad (1) \quad \text{e} \quad \phi(\omega) = \phi_s(\omega) - \phi_e(\omega) \quad (2)$$

Definição de Resposta em frequência :

Chamamos $M(\omega)$ em (1) a resposta de frequência em magnitude e $\phi(\omega)$ em (2) a resposta de frequência em fase. A combinação das duas respostas é chamada de Resposta de Frequência $M(\omega) \angle \phi(\omega)$.

Função de Transferência Senoidal: $G(s) \rightarrow G(j\omega)$

5.2 Apresentação das características da resposta em frequência na forma gráfica

- Diagrama de Bode
- Diagrama de Nyquist ou diagrama polar
- Diagrama do Logaritmo do módulo versus ângulo de fase (carta de Nichols)

a) Diagrama de Bode

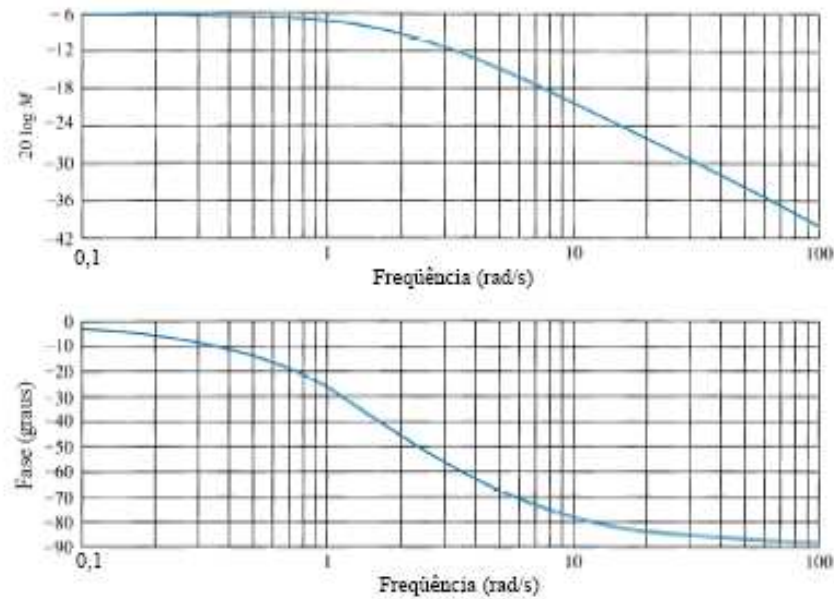
Constituído de dois gráficos: **gráfico do módulo em dB** de uma função de transferência senoidal e o **gráfico do ângulo de fase**, ambos traçados em relação à frequência em escala logarítmica.

Exemplo:

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega+2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2+4)}}$$

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}(\omega/2)$$



Aproximações Assintóticas:

- Aproximação do gráfico de bode como uma sequência de linhas retas.
- Esta aproximação simplifica o cálculo da magnitude e fase da resposta de frequência.

Considere:

$$G(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_k)}{s^m (s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_k)} \quad (1)$$

A magnitude da resposta de frequência é o produto da magnitude das respostas para cada termo:

$$|G(j\omega)| = \frac{K |(s + z_1)| |(s + z_2)| \dots |(s + z_k)|}{|s^m| |(s + p_1)| |(s + p_2)| \dots |(s + p_k)|} \Big|_{s \rightarrow j\omega}$$

Trabalhando com o logaritmo e a magnitude em dB, temos:

$$\begin{aligned} 20\log|G(j\omega)| &= 20\log K + 20\log|(s + z_1)| + \\ &20\log|(s + z_2)| + \dots + 20\log|(s + z_k)| - 20\log|s^m| - \\ &20\log|(s + p_1)| - \dots - 20\log|(s + p_k)| \Big|_{s \rightarrow j\omega} \end{aligned}$$

Em relação ao gráfico da fase, a partir da função de transferência em (1) temos que a resposta de frequência é a soma das curvas de fase dos termos relativos aos zeros menos a soma das curvas de fase referentes aos pólos.

Aproximações da resposta de frequência para termos de pólos e zeros simples:

a) **Gráficos de Bode para :** $G(s) = s + a$

$$G(j\omega) = j\omega + a = a\left(j\frac{\omega}{a} + 1\right)$$

Nas baixas frequências, quando ω tende a zero, $G(j\omega) \approx a$ e a magnitude da resposta em dB fica:

$$20\log |G(j\omega)| = 20\log a$$

Nas altas frequências, onde $\omega \gg a$ temos:

$$G(j\omega) \approx a\left(j\frac{\omega}{a}\right) = a\left(\frac{\omega}{a}\right)\angle 90^\circ = \omega\angle 90^\circ$$

Sendo em dB igual a:

$$20\log |G(j\omega)| = 20\log a + 20\log \frac{\omega}{a} = 20\log \omega, a < \omega < \infty$$

Gráfico de Magnitude:

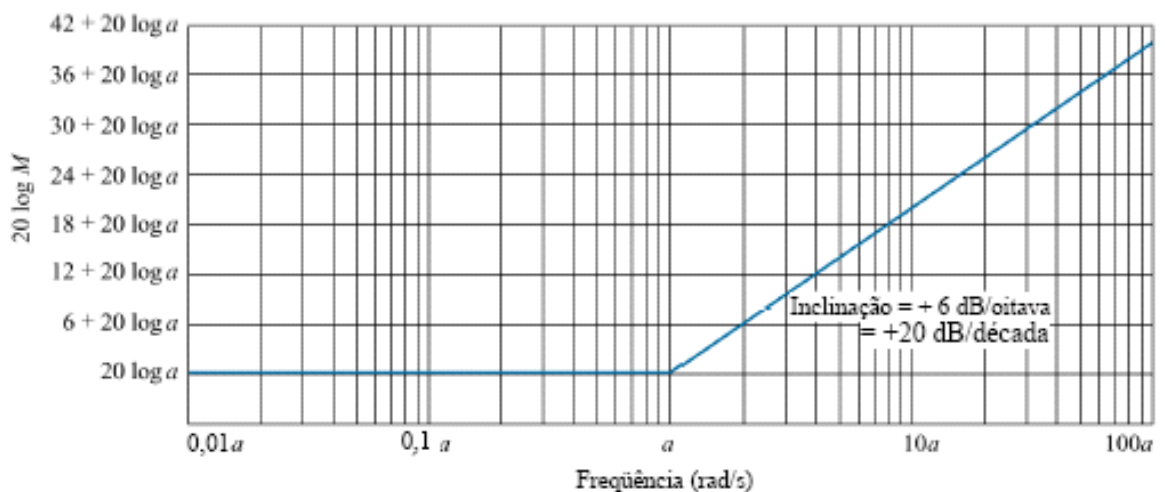
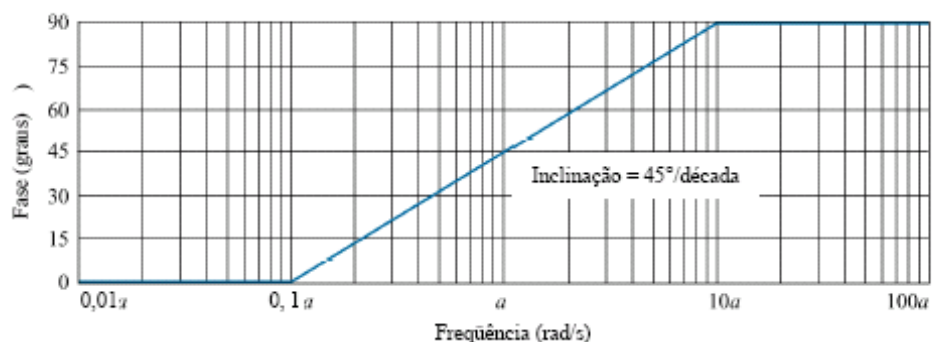


Gráfico de fase: $\phi(\omega) = \text{tg}^{-1}(\omega/a)$



Dados da resposta de frequência assintótica e real normalizada para (s+a):

Frequência a	20 log $\frac{M}{a}$ (dB)		Fase (graus)	
	Assintótica	Real	Assintótica	Real
rad/s				
0,01	0	0,00	0,00	0,57
0,02	0	0,00	0,00	1,15
0,04	0	0,01	0,00	2,29
0,06	0	0,02	0,00	3,43
0,08	0	0,03	0,00	4,57
0,1	0	0,04	0,00	5,71
0,2	0	0,17	13,55	11,31
0,4	0	0,64	27,09	21,80
0,6	0	1,34	35,02	30,96
0,8	0	2,15	40,64	38,66
1	0	3,01	45,00	45,00
2	6	6,99	58,55	63,43
4	12	12,30	72,09	75,96
6	15,56	15,68	80,02	80,54
8	18	18,13	85,64	82,87
10	20	20,04	90,00	84,29
20	26,02	26,03	90,00	87,14
40	32,04	32,04	90,00	88,57
60	35,56	35,56	90,00	89,05
80	38,06	38,06	90,00	89,28
100	40	40,00	90,00	89,43

Resposta real e assintótica:

Gráfico da Magnitude:

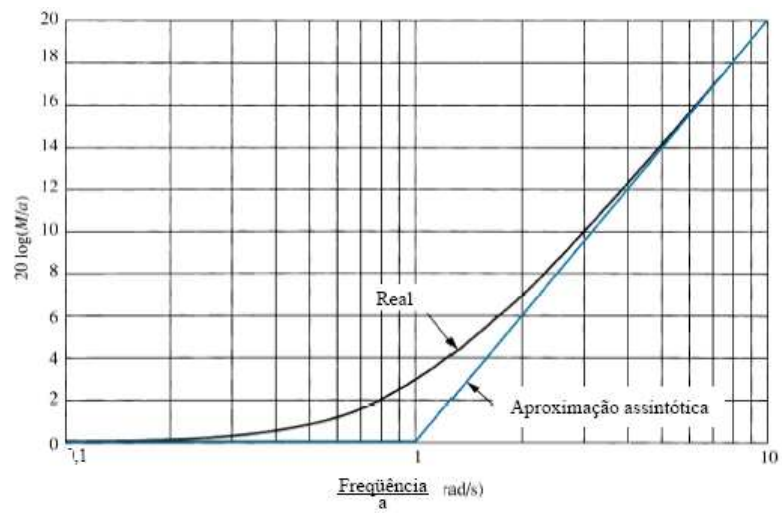
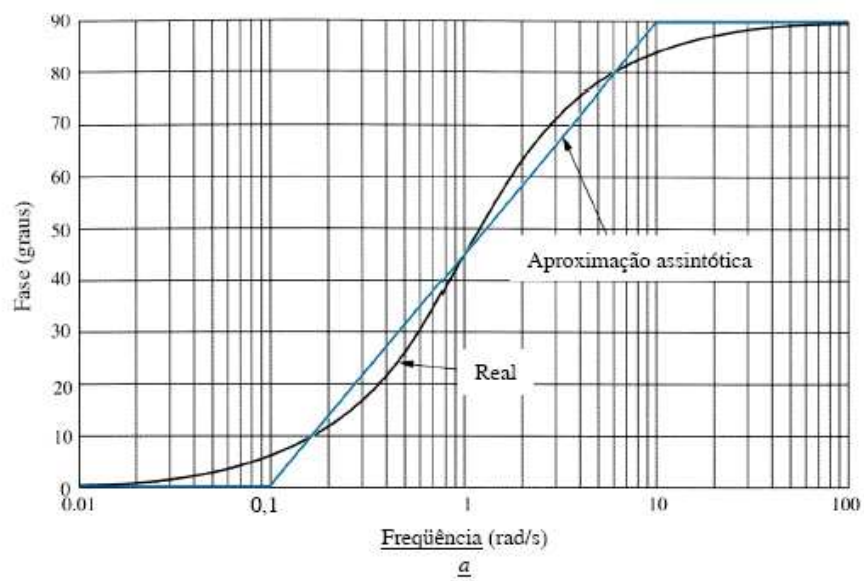
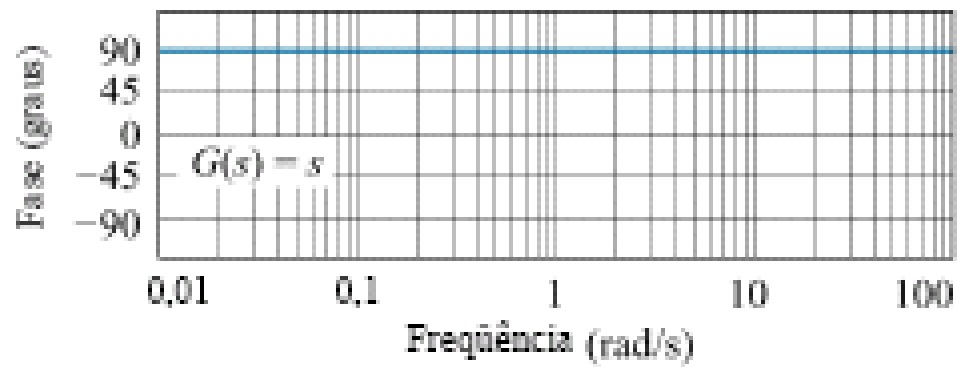
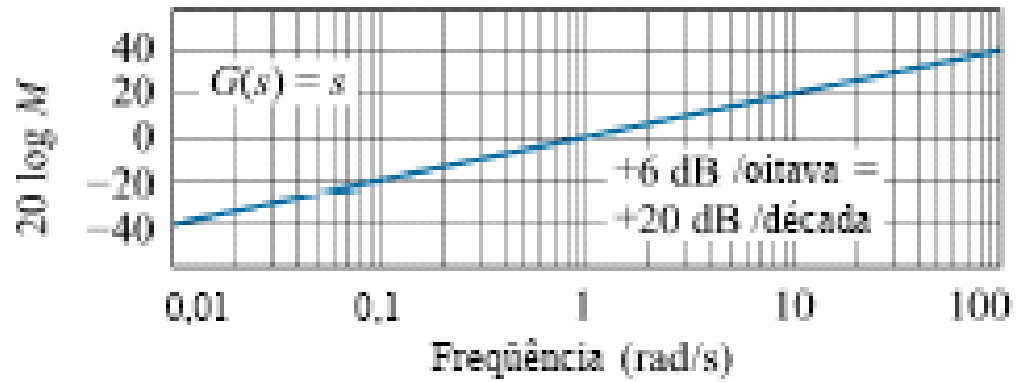


Gráfico da fase:

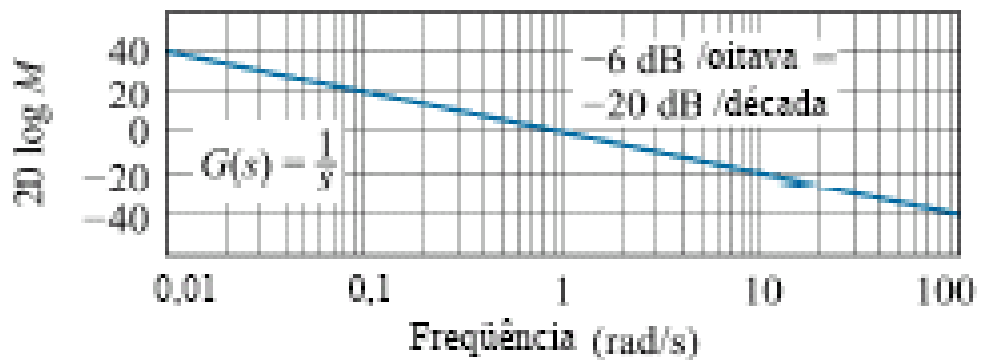


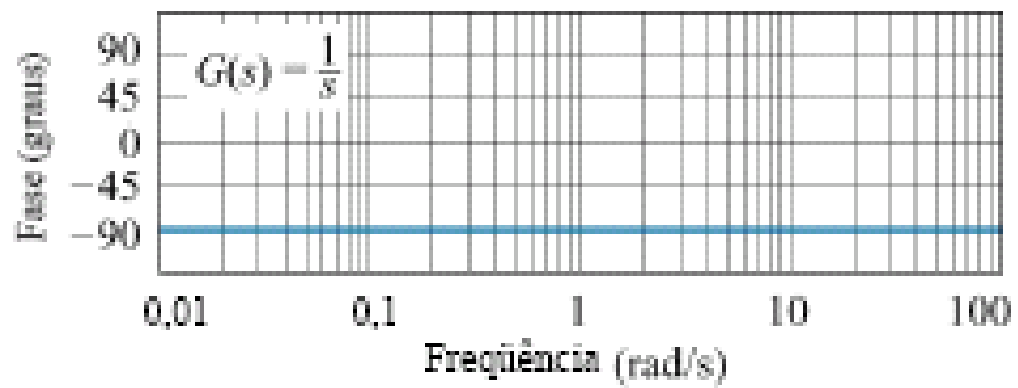
Gráficos de Bode para:

1. $G(s) = s$

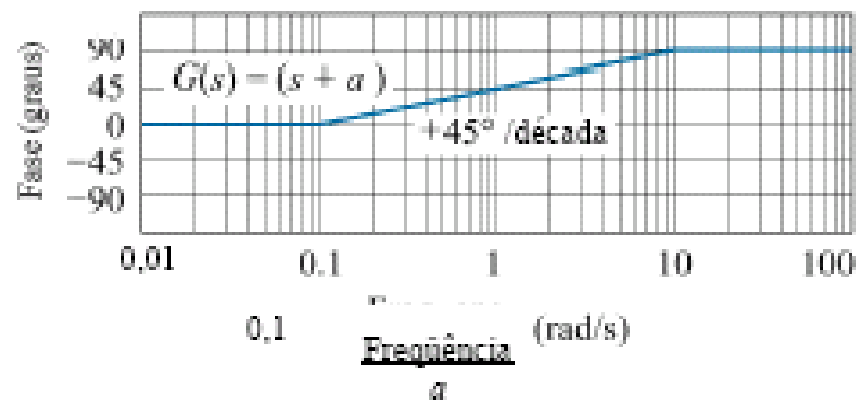
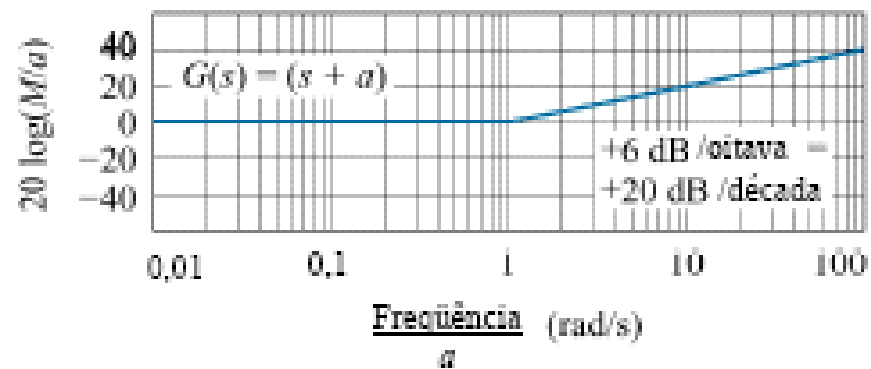


2. $G(s) = 1/s$

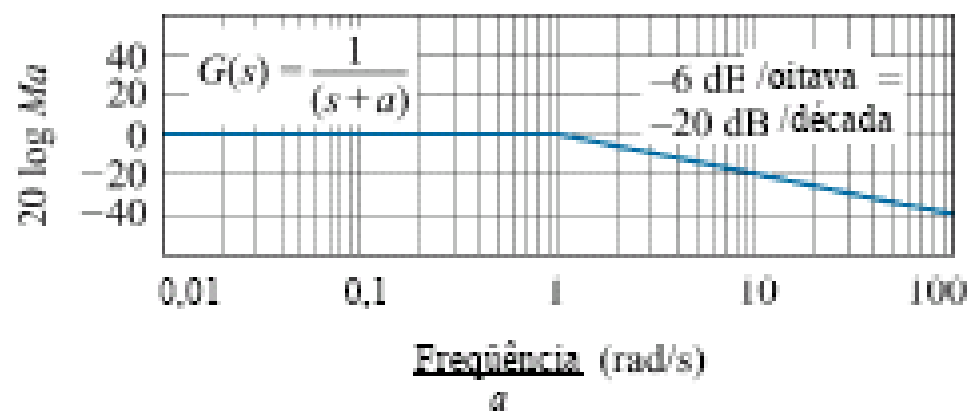


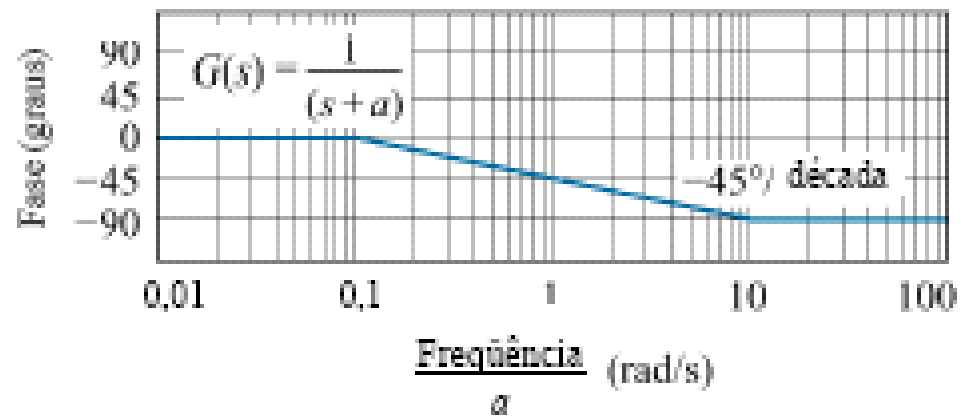


3. $G(s) = s + a$

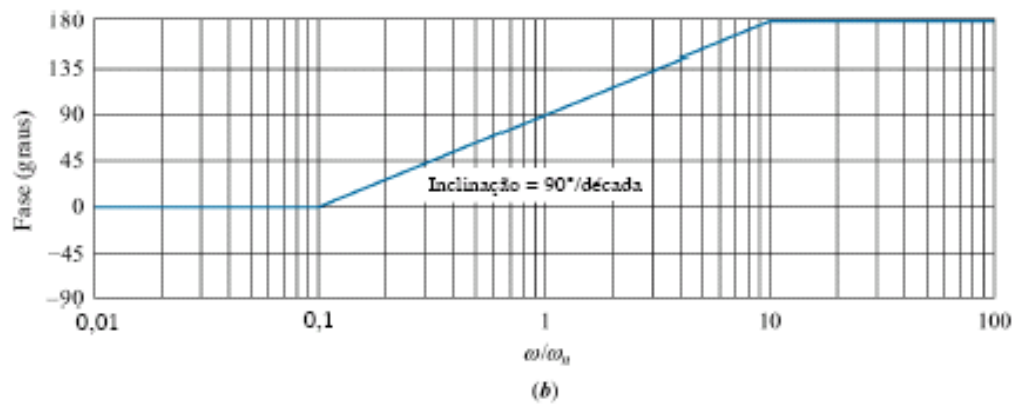
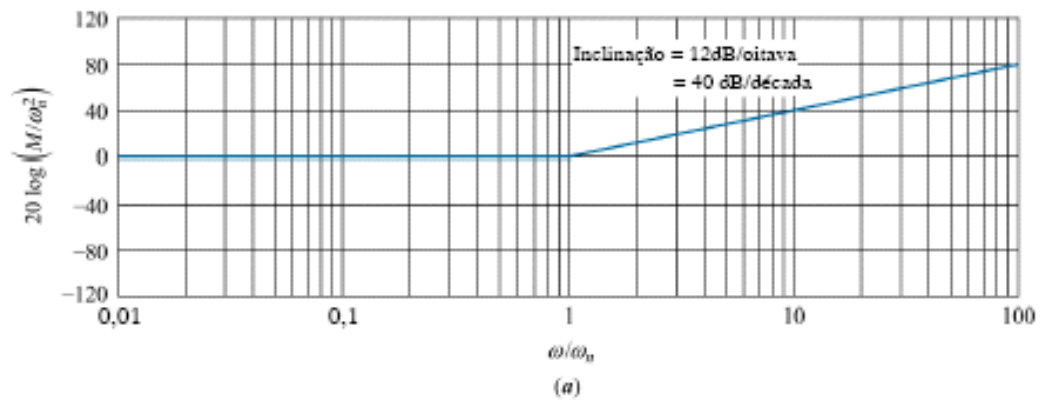


4. $G(s) = 1/(s + a)$

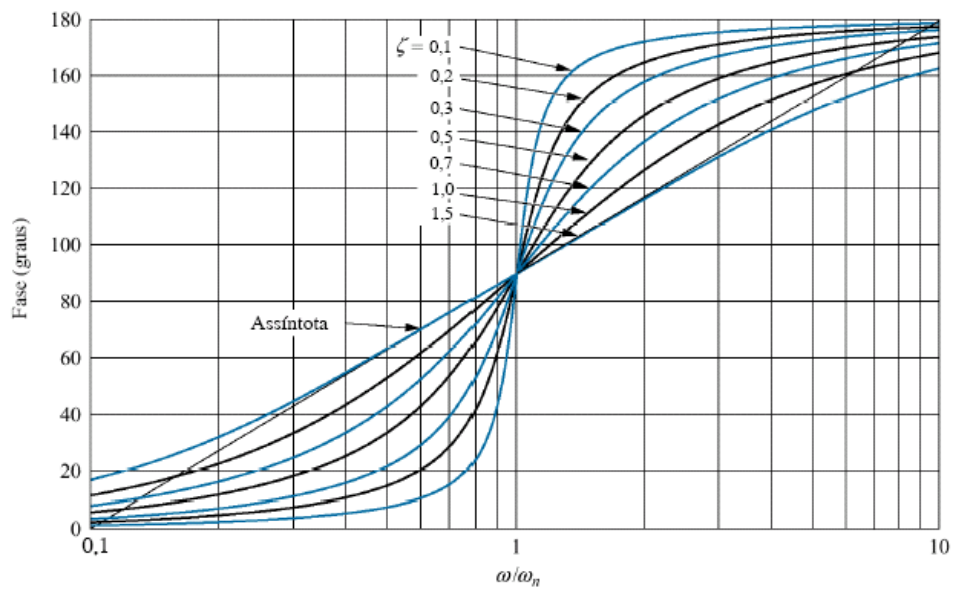
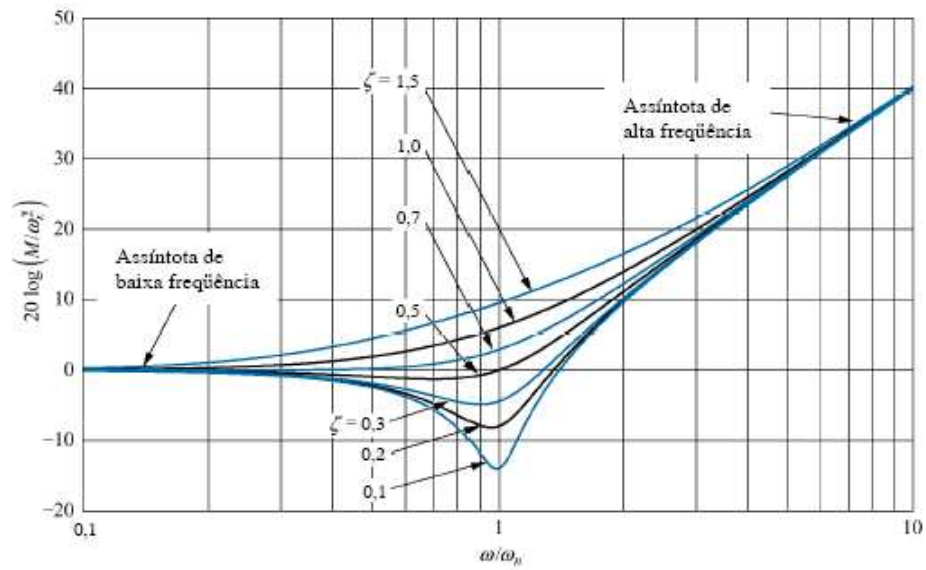




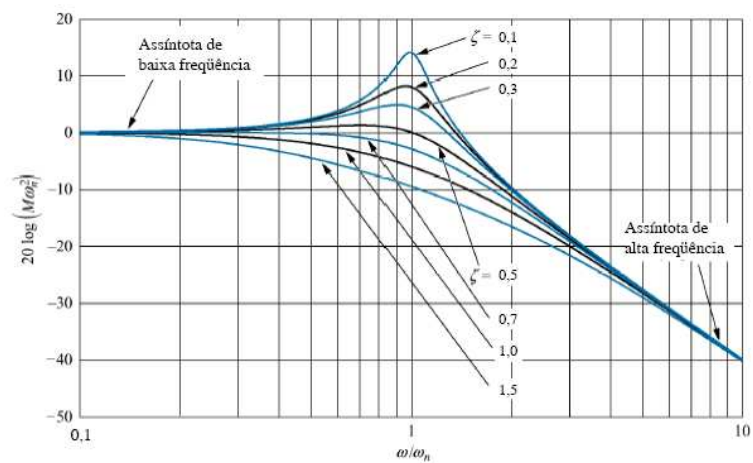
5. $G(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$

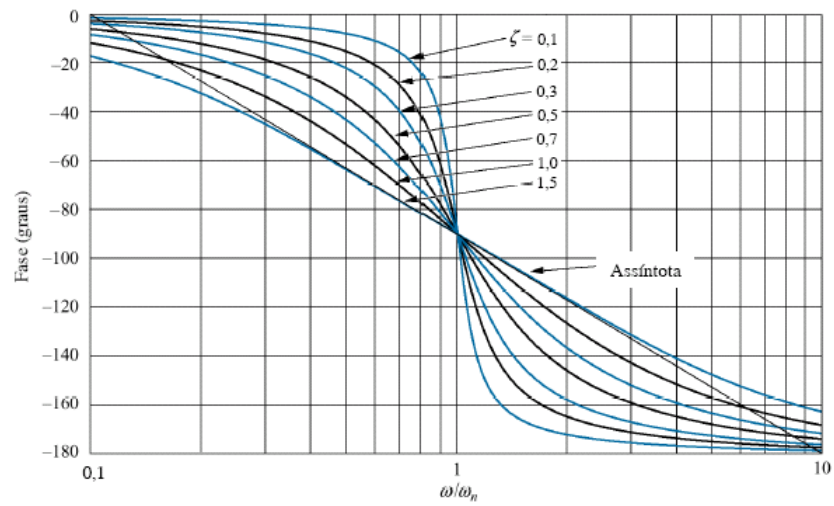


Correções para Bode de segunda ordem:



6. $G(s) = 1/s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$

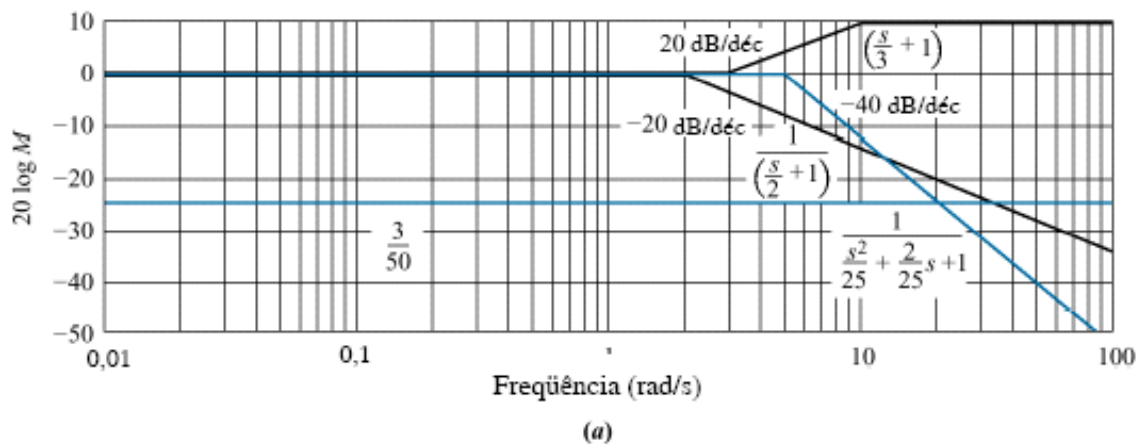




Exemplo:

$$G(s) = \frac{(s+3)}{(s+2)(s^2+2s+25)}$$

Gráfico de Módulo:



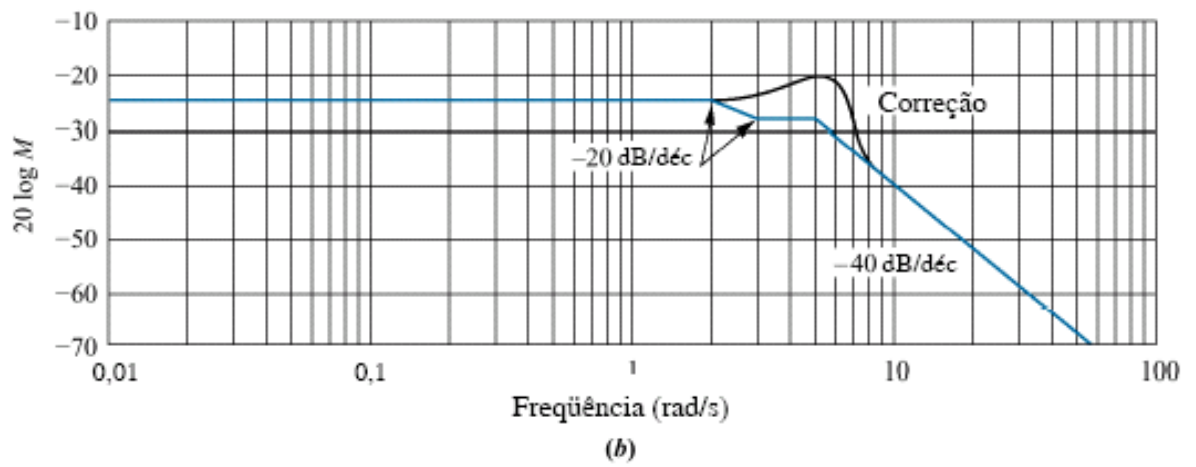
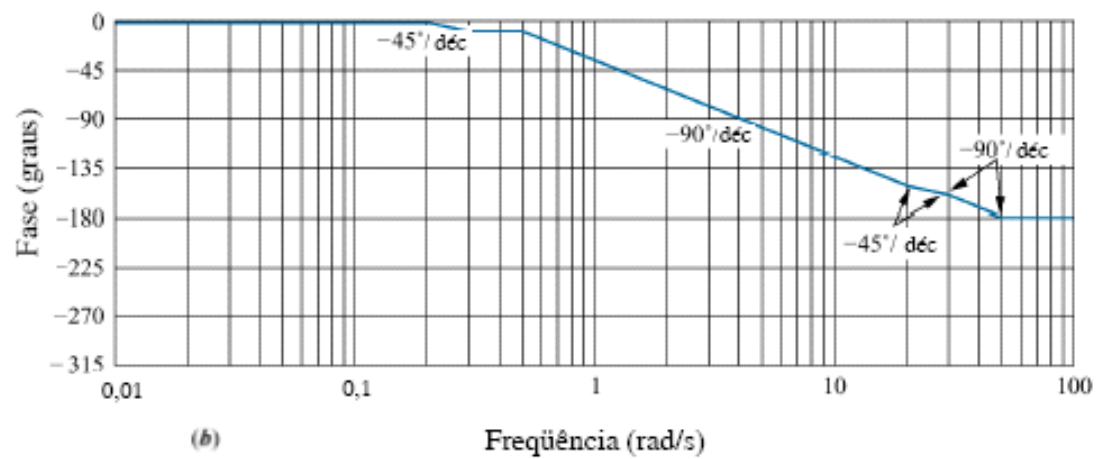
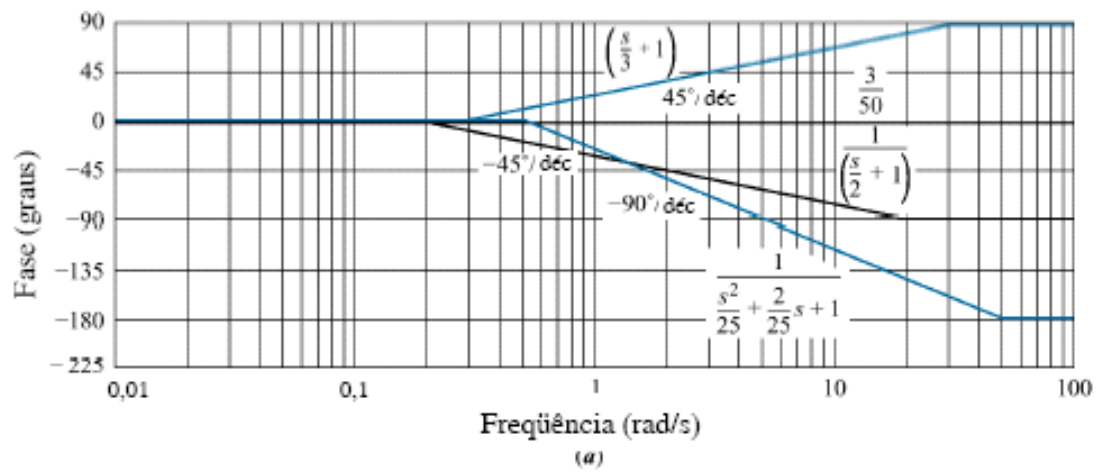


Gráfico de fase:



Solução utilizando Matlab:

$$G(s) = \frac{(s+3)}{(s+2)(s^2+2s+25)}$$

```
>>num=[1];
```

```
>>den=[ 1 2 25];
```

```
>>g1=tf(num,den)
```

Transfer function: $1/s^2 + 2s + 25$

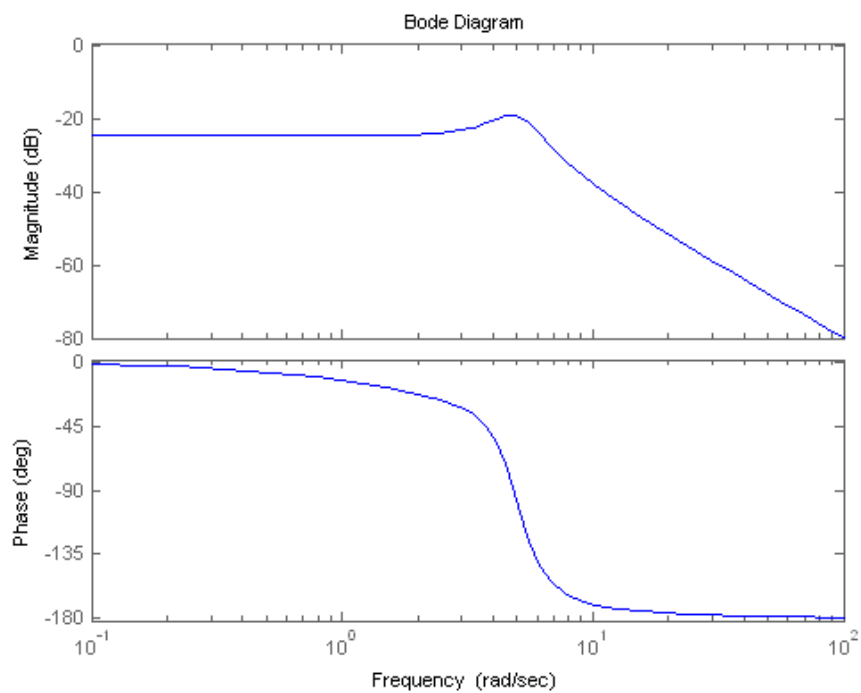
```
>>g2=zpk([-3], [-2],1)
```

Zero/pole/gain: $(s+3)/(s+2)$

```
>>g=g1*g2;
```

Zero/pole/gain: $(s+3)/(s+2)(s^2+2s+25)$

```
>>bode(g)
```

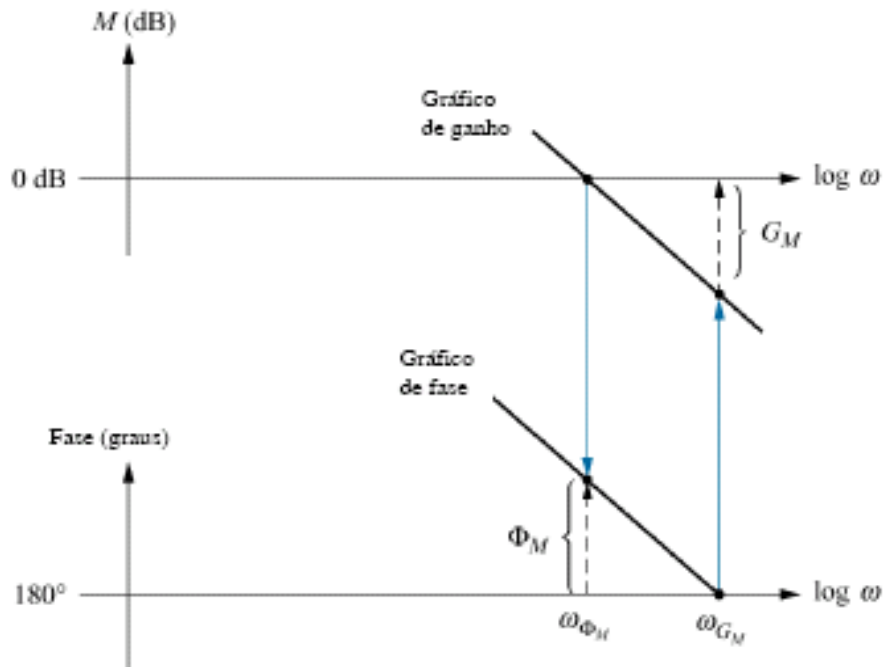


bodemag(g) – plota somente gráfico da magnitude

Análise da Estabilidade através do Diagrama de Bode

Margem de Ganho e Margem de Fase:

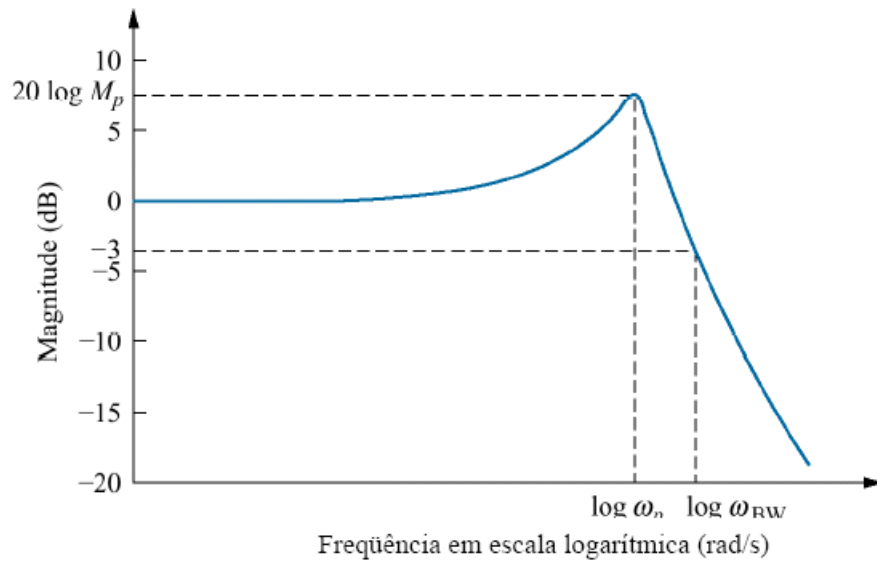
- a) **Margem de Ganho (G_M):** é a mudança no valor de ganho a malha aberta no ponto com fase de 180° , expressa em decibéis, necessária para tornar instável o sistema a malha fechada. (Ganho necessário para elevar a curva de magnitude até 0 dB na frequência com fase igual a $\pm 180^\circ$)
- b) **Margem de fase (ϕ_M):** é a mudança no valor da fase da malha aberta no ponto com ganho unitário (0 dB), necessária para tornar instável o sistema a malha fechada.



Estabilidade: Se a margem de ganho for positiva (dB) e a margem de fase positiva o sistema é estável e se a margem de ganho for negativa (dB) e a margem de fase negativa o sistema é instável.

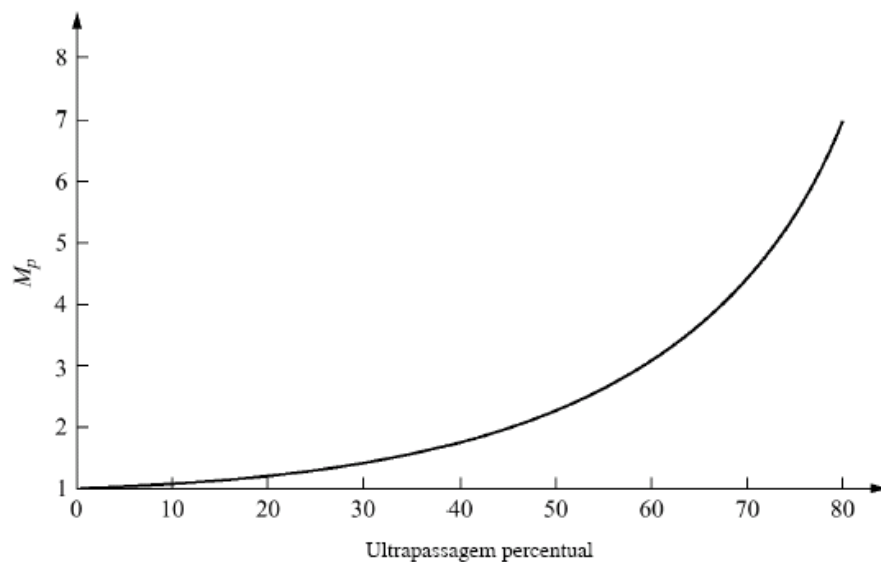
Relação entre resposta transitória a malha fechada e resposta em frequência a malha fechada

a) Relação de Amortecimento e resposta em frequência a malha fechada:



Valor de pico da resposta de magnitude logarítmica:

$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{na frequência} \quad \omega_p = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$$



Pico de resposta em função da ultrapassagem percentual

b) Velocidade de resposta e resposta de frequência a malha fechada:

Banda passante : frequência ω_{BW} na qual o valor da curva de magnitude da resposta de frequência é 3dB abaixo de seu valor na frequência zero.

$$\omega_{BW} = \omega_n \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

Ou para relacionar com o **tempo de assentamento**:

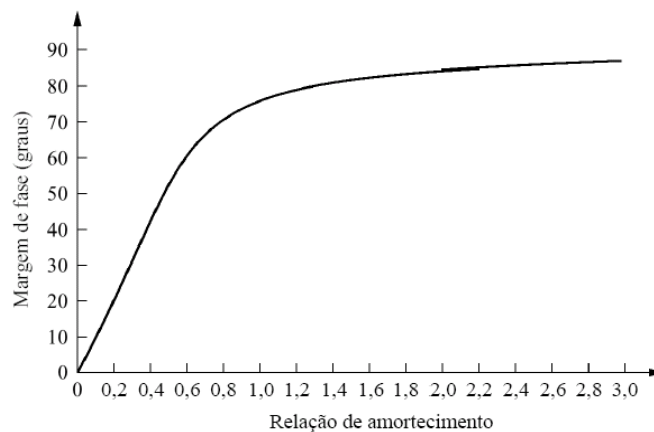
$$\omega_{BW} = \frac{4}{T_s \zeta} \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

Ou para relacionar com o **tempo de pico**:

$$\omega_{BW} = \frac{\pi}{T_p \sqrt{1 - \zeta^2}} \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

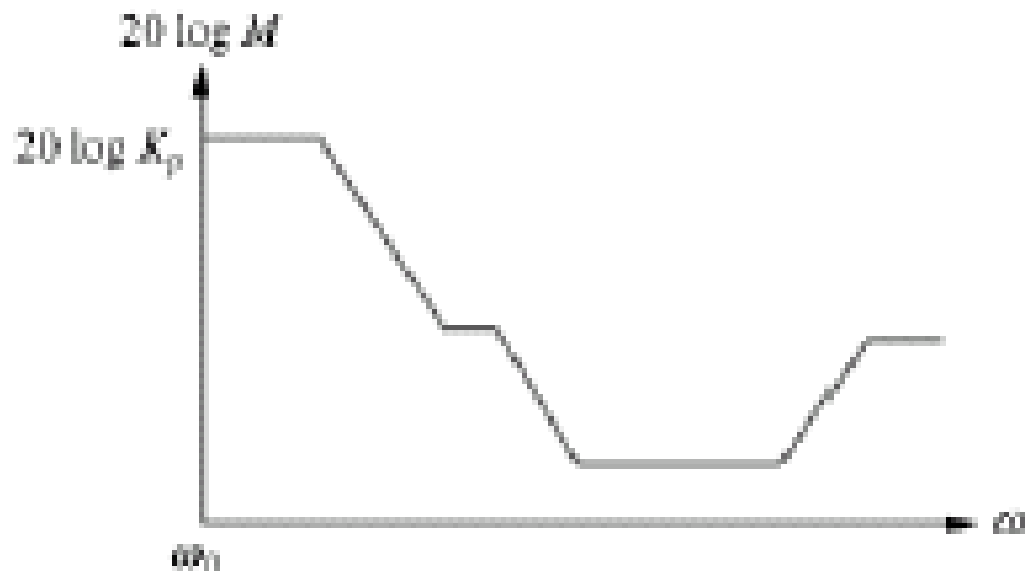
c) Relação de amortecimento a partir da margem de fase:

$$\phi_M = \tan^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}}}$$

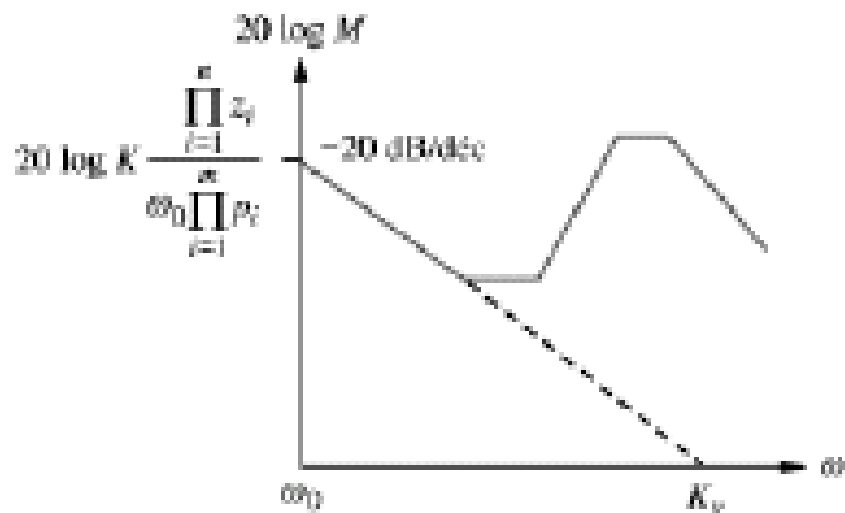


Características de Erro de estado estacionário a partir da resposta de frequência

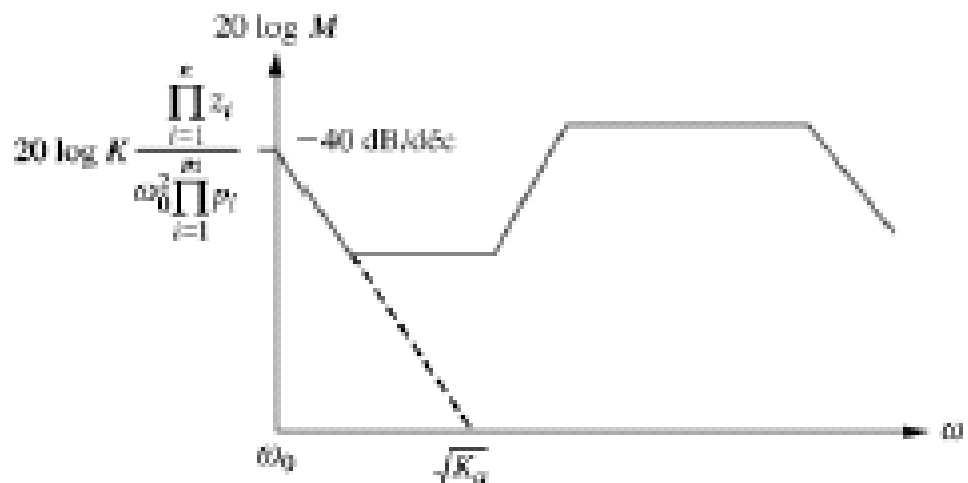
a) Constante de erro ao degrau (sistema tipo 0):



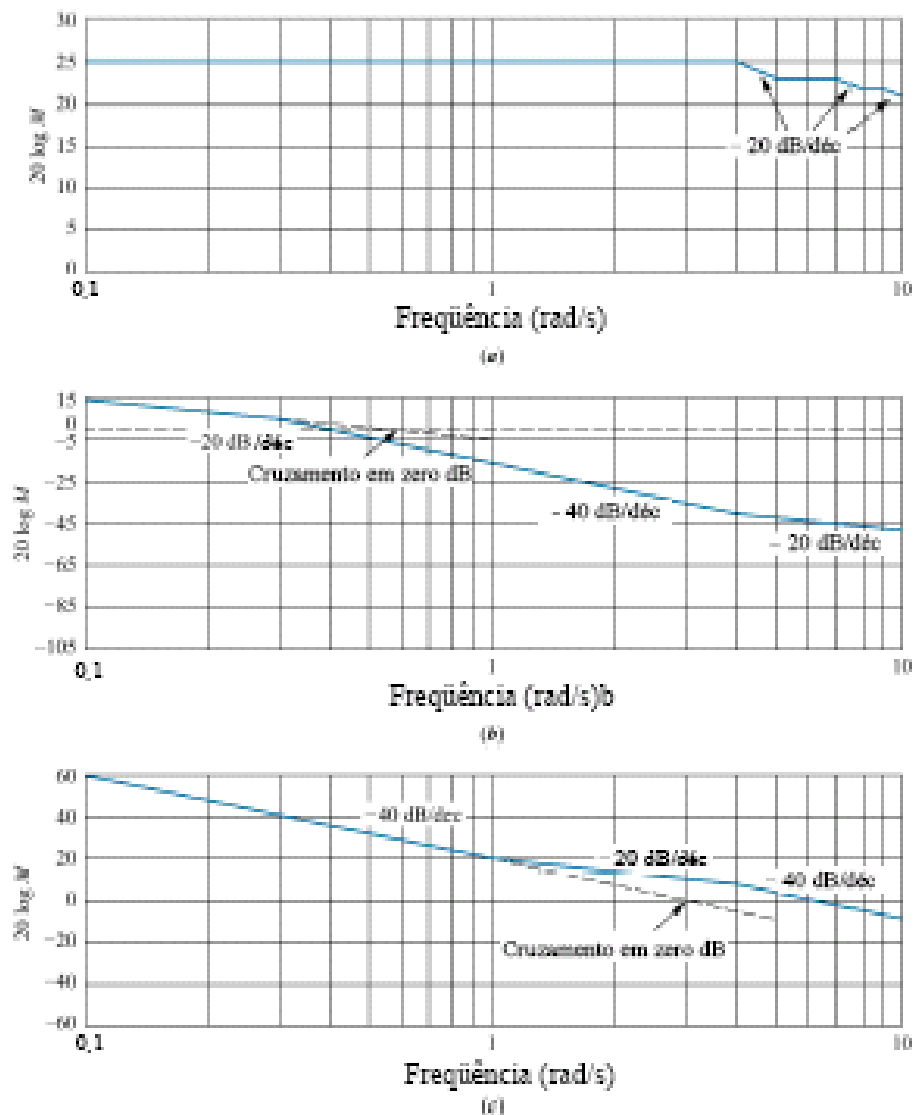
b) Constante de erro a rampa (sistema tipo 1):



c) Constante de erro a parábola (Sistema Tipo 2):



Exemplo: Determinar o tipo de sistema e o valor da constante de erro estático apropriada



a) Sistema tipo zero desde que a inclinação inicial é zero com:

$$20 \log K_p = 25, K_p = 17.78$$

b) Sistema tipo 1 desde que a inclinação inicial é de -20 dB/década com :

$K_v = 0.55$ (valor da frequência em que a inclinação inicial cruza o eixo de frequências em 0 dB.

c) Sistema tipo 2 desde que a inclinação inicial é de -40 dB/década com : $K_a = 9$

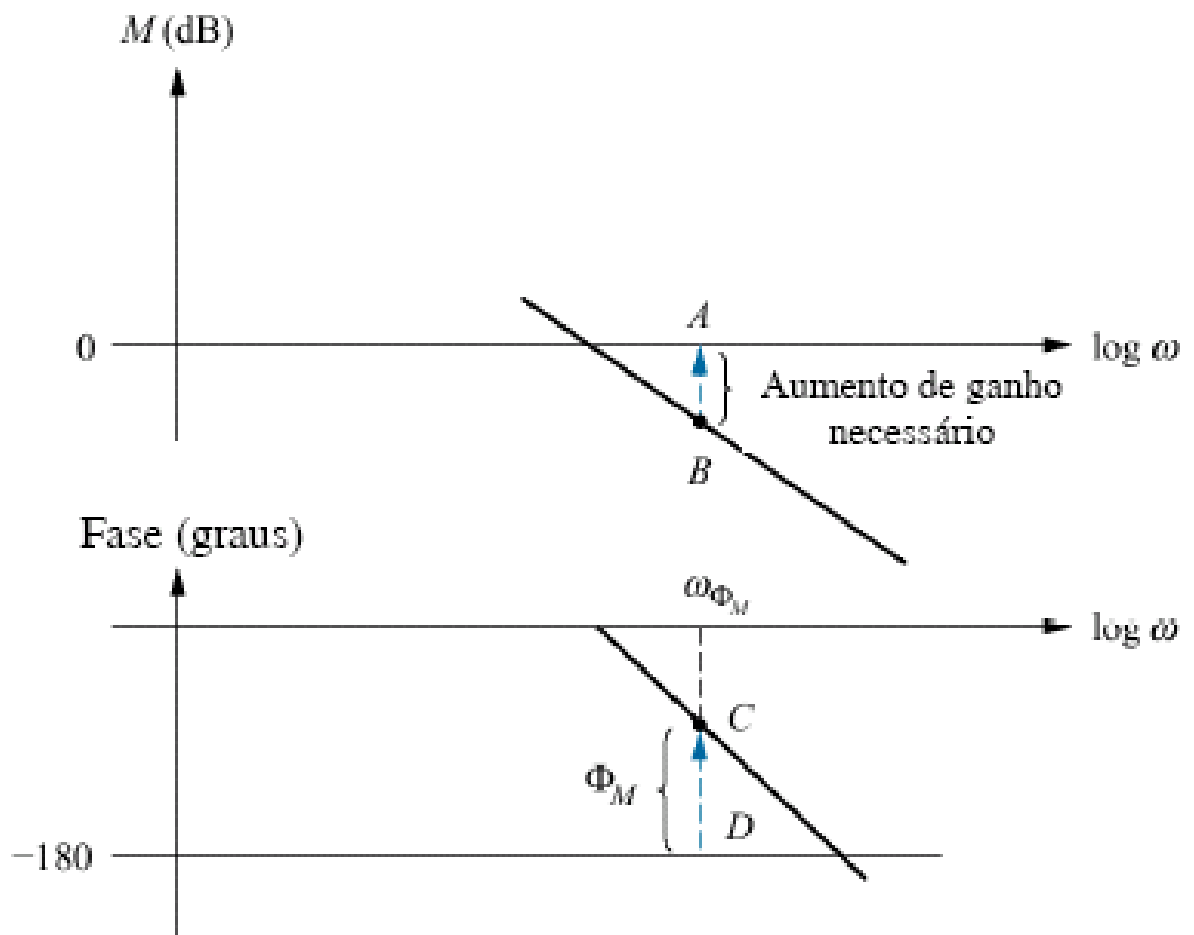
($\sqrt{K_a}$ é valor da frequência em que a inclinação inicial cruza o eixo de frequências em 0 dB.

Projeto por intermédio da Resposta em Frequência

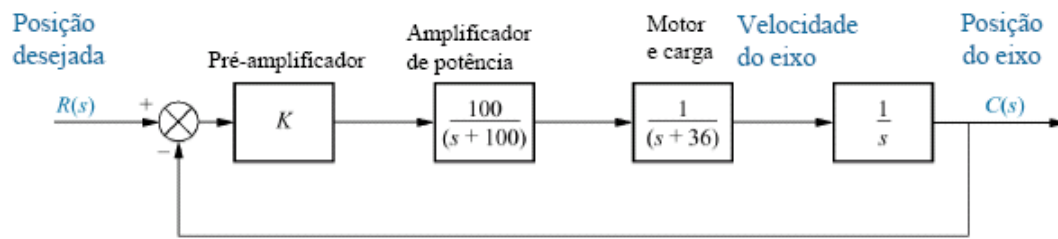
1. Resposta transitória por intermédio do Ajuste do Ganho:

Ajuste de ganho para uma margem de fase desejada (ultrapassagem percentual desejada):

$$\phi_M = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}}$$



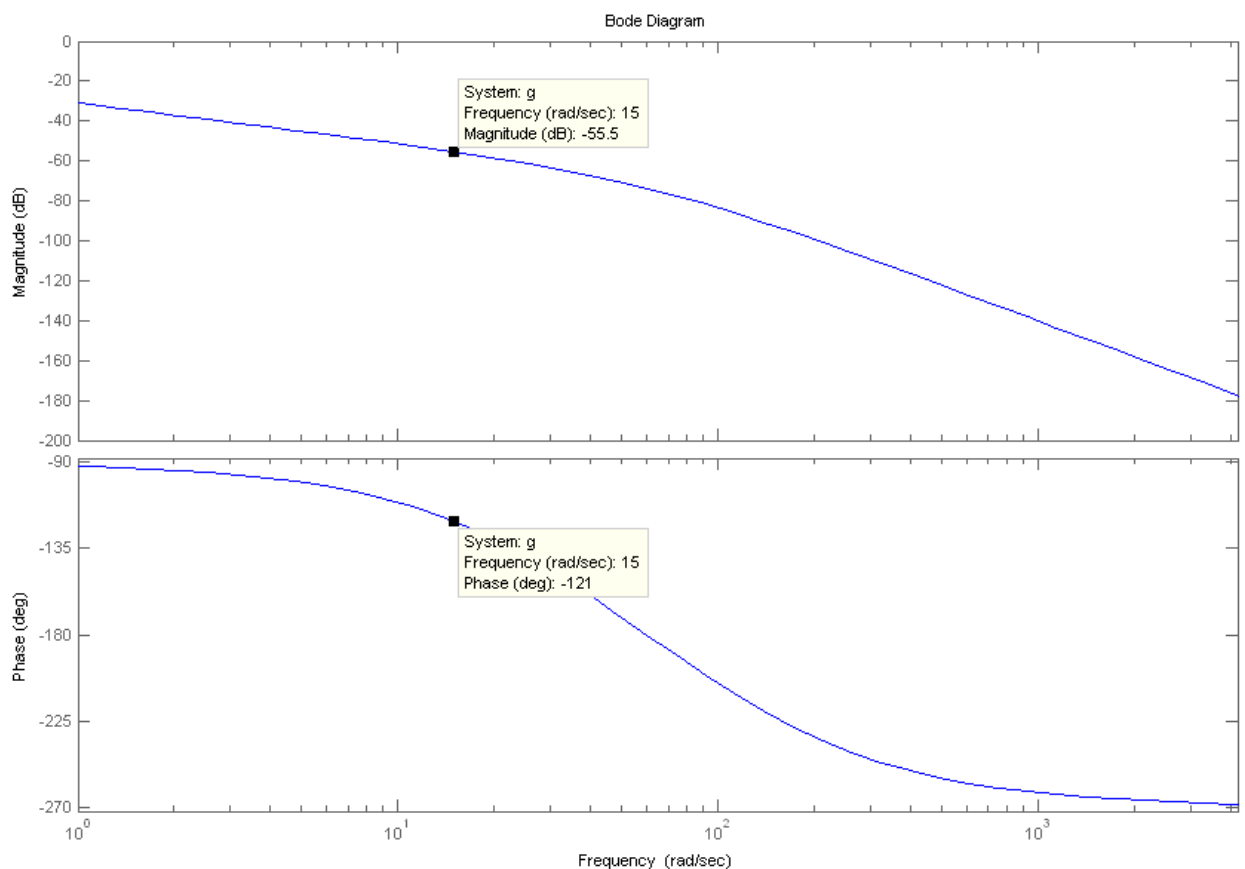
Exemplo: Para o sistema abaixo, determinar o valor do ganho K para que a resposta transitória a uma entrada degrau apresente uma ultrapassagem máxima de 9.5%. Usar o método de resposta em frequência.



$$M_p = 9.5\%, \zeta = 0.6, \phi_M = 59.2^\circ$$

1) Diagrama de bode para : $\frac{100}{s(s+100)(s+36)}$

Assinalar no diagrama de fase a frequência que leva a uma margem de fase desejada. Esta frequência é obtida no ponto onde o ângulo de fase é a soma entre -180° e 59.2° , ou seja, -120.8°



Para que a margem de fase seja de 59.2° como desejado, na frequência de 15 rad/sec a magnitude deverá ser de 0 dB, entretanto através do diagrama de magnitude vemos que o valor da magnitude é de -55.5 DB. Então devemos dar um ganho no sistema de 55.5 dB para que a magnitude nesta frequência seja igual a zero.

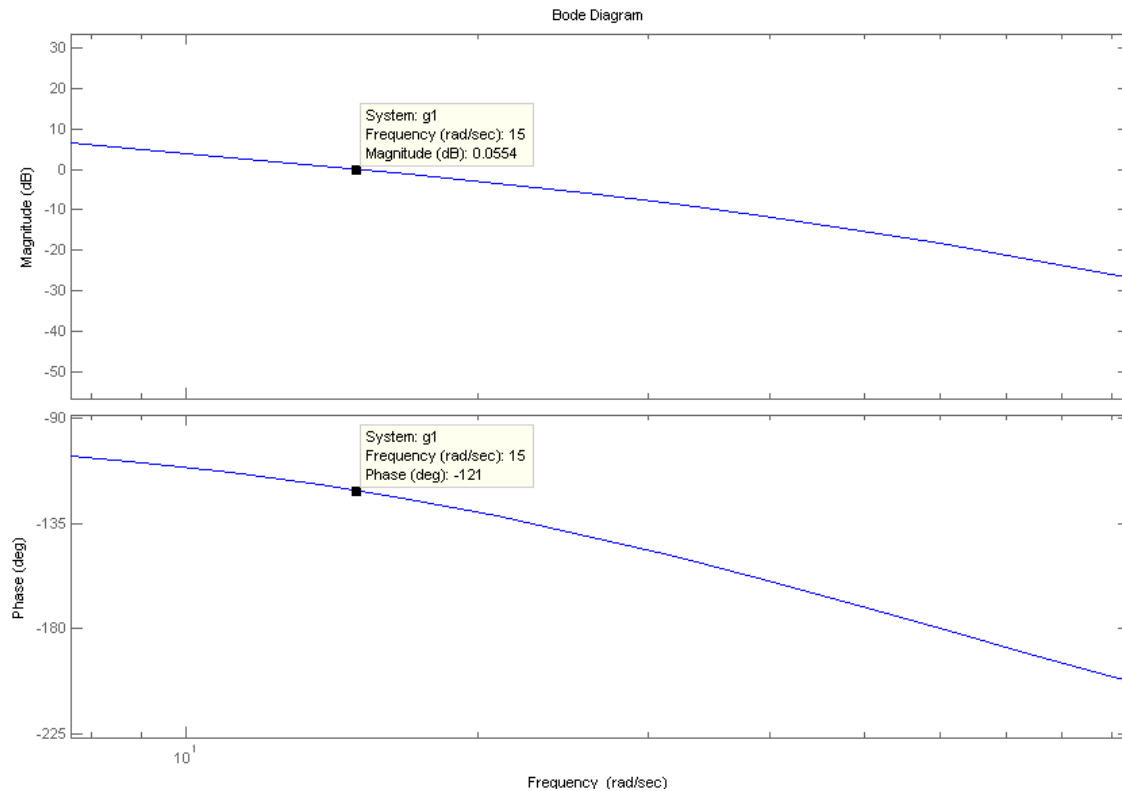
Então podemos acrescentar um ganho ao sistema para que apenas a curva de magnitude seja afetada:

$$\frac{100K}{s(s+100)(s+36)}$$

A contribuição do termo K para o diagrama de magnitude deverá ser de :

$$20 \log K = 55.5$$

O que leva ao valor de $K = 595.66$



2. Compensação por atraso de fase

- Utilizado para melhorar a constante de erro estático aumentando somente o ganho nas baixas frequências sem que resulte instabilidade.
- Utilizado para aumentar a margem de fase que leve a uma resposta transitória desejada.

Função de transferência do compensador por atraso de fase:

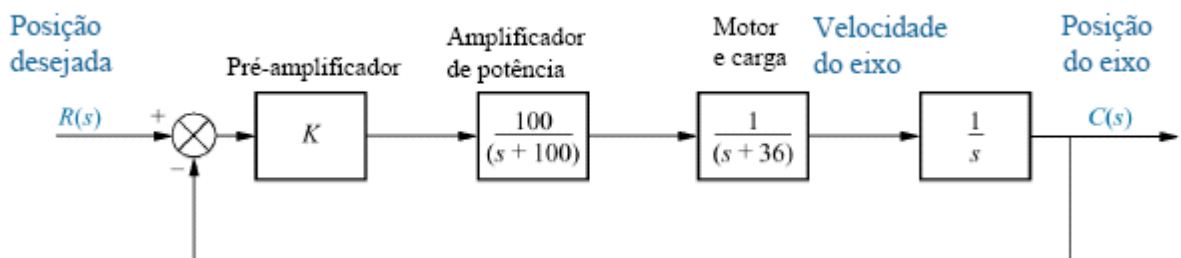
$$G_c(s) = \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}, \alpha > 1$$

Procedimento de Projeto

1. **Ajustar o ganho K** , ao valor que satisfaça a especificação de erro estacionário e traçar o diagrama de bode para este valor de ganho.
2. **Determinar a frequência para margem de fase desejada** : determinar a frequência onde a margem de fase seja superior de 5° a 12° à margem de fase que leva a resposta transitória desejada.
3. **Selecionar o compensador por atraso de fase** cuja resposta em magnitude leve a um diagrama de magnitude “composto” que cruze a linha de 0 dB na frequência obtida na fase 2 como se segue: desenhe a assíntota de altas frequências para interceptar 0 dB na frequência encontrada na etapa 2; selecione a frequência de corte superior uma década abaixo da frequência encontrada na etapa 2; selecione a assíntota de baixas frequência em 0 dB; conecte as assíntotas de altas e de baixas frequências do compensador com uma reta de -20db/década para posicionar a frequência de corte inferior.
4. **Restabelecer o ganho do sistema, K** , para compensar alguma atenuação da estrutura de atraso de fase mantendo a constante de erro estático com o mesmo valor obtido na etapa

Exemplo de Projeto:

Dado o sistema abaixo, use o diagrama de bode para projetar um compensador por atraso de fase que leve a uma melhoria de dez vezes no erro de estado estacionário em comparação com o sistema compensado por ajuste de ganho, mantendo a ultrapassagem em 9.5%



1. **Passo 1- ajuste do ganho K para erro estacionário desejado:** Pelo projeto realizado anteriormente para compensador por ajuste de ganho obtemos $K = 583.9$ para ultrapassagem de 9.5% o que leva a um $K_v = 16.22$ para o sistema. Para uma melhoria de 10 vezes no erro de estado estacionário K_v deve ser multiplicado por 10 ou seja $K_v = 162.2$,

consequentemente o valor de K deve ser igual a **K = 5839** e a função de transferência de malha aberta deve ser igual a:

$$G(s) = \frac{583.900}{s(s+36)(s+100)}$$

O diagrama de bode para este sistema pode ser visto na figura 1.

2. A margem de fase necessária para ultrapassagem de 9.5% é obtida de :

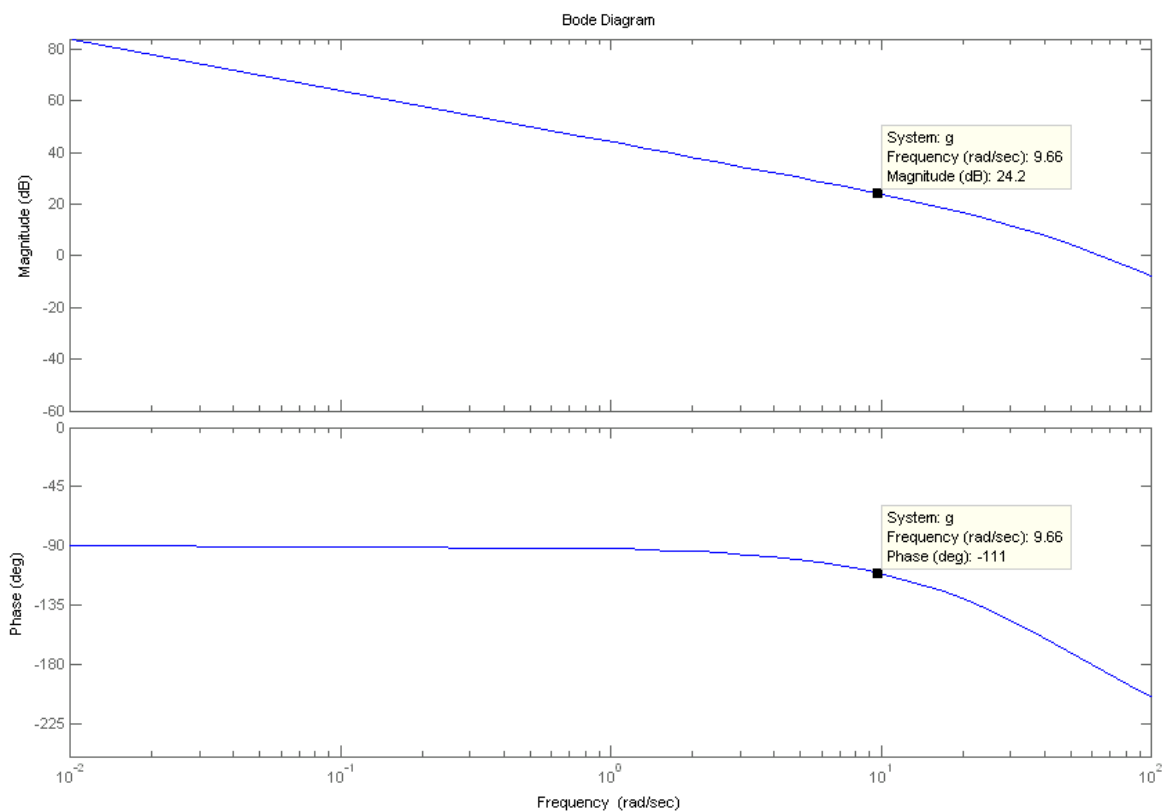
$$\phi_M = \tan^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}}$$

O que dá um valor de margem de fase de 59.2° .

Aumentamos este valor em 10° para 69.2° a fim de compensar a contribuição angular do compensador.

Determinamos agora a frequência onde a margem de fase é de 69.2° . Esta frequência ocorre em $-180^\circ + 69.2^\circ = -110.8^\circ$ e é de **9.8 rad/seg.**

A magnitude nesta frequência é de 24 dB portanto **o compensador deve fornecer -24 dB de atenuação em 9.8 rad/seg.**



Figural

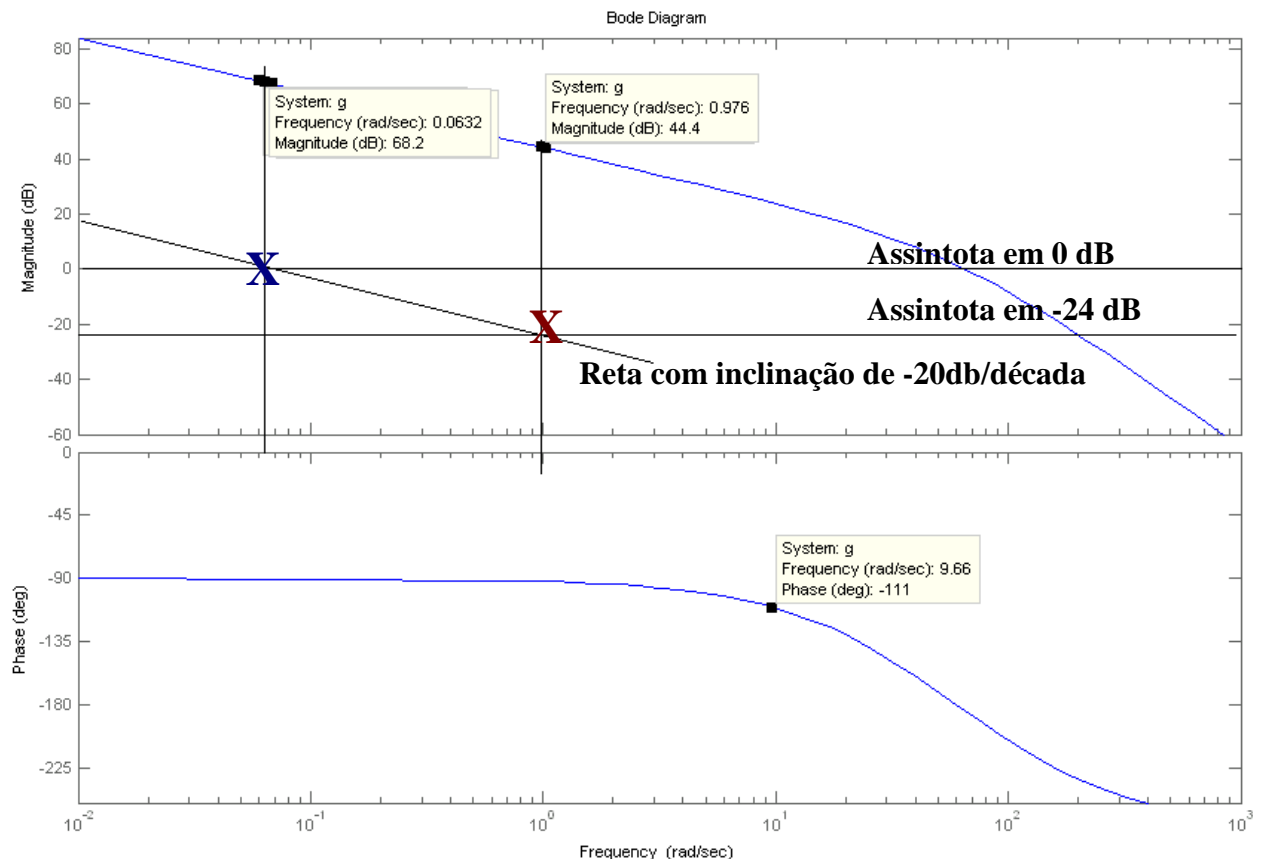
3. Projeto do compensador.

Cálculo da maior frequência de corte do compensador: uma década abaixo da frequência para margem de fase desejada , ou seja **0.98 rad/s**.

Determinação da menor frequência de corte do compensador:

Graficamente marcamos:

- A assíntota para -24 dB
- Onde esta assíntota intercepta a frequência de corte superior de 0.98 rad/s (**X**).
- Marcamos agora a assíntota em 0 dB
- Ligamos o ponto (**X**) até a assíntota de 0 dB com uma reta com inclinação de -20dB/década e verificamos onde esta reta corta a assíntota de 0 dB (**X**). Verificamos a frequência neste ponto que é de 0.0632 rad/s. Esta será a nossa frequência de corte inferior.



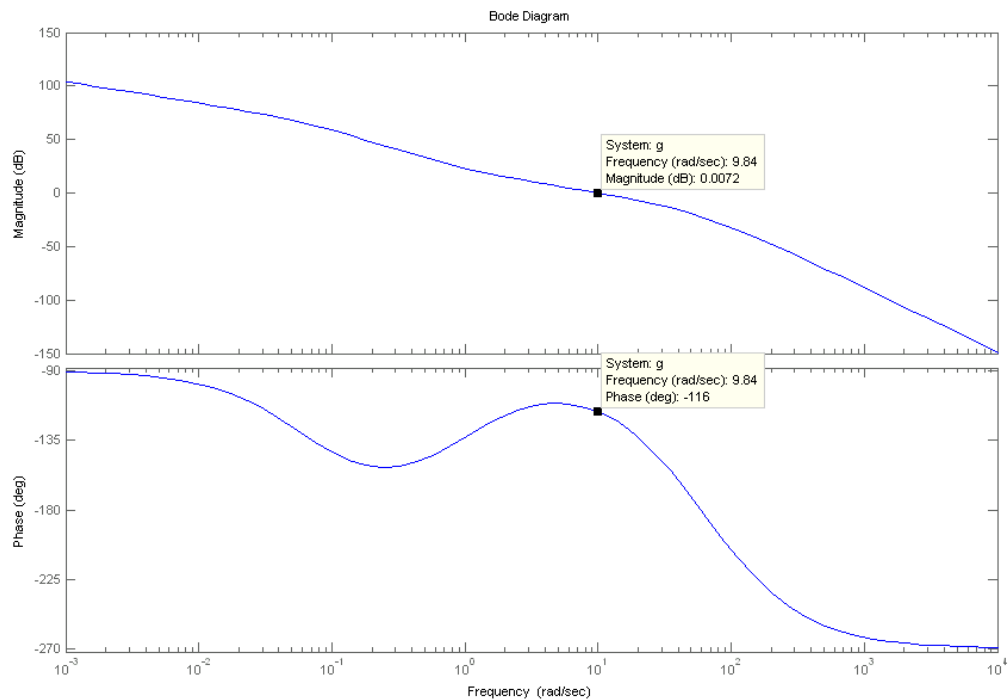
A função de transferência do compensador será então:

$$G_c(s) = \frac{0.06329(s + 0.98)}{s + 0.062}$$

Onde o ganho do compensador é de 0.06329 para gerar um ganho estático unitário que não influencie no valor de K_v do sistema. Logo a FT de malha aberta do sistema fica:

$$G(s) = \frac{583.900 * 0.06329(s + 0.98)}{s(s + 36)(s + 100)(s + 0.062)}$$

Diagrama de Bode para sistema com o compensador calculado:



Resultados:

Margem de fase: 64° (desejada de 59.5°) com sobre-sinal de aproximadamente 10% (desejado = 9.5%)

$K_v = 161.5$ (desejado = 162.2)