

Capítulo 12

A Corrente de Deslocamento e a Força Eletromotriz Induzida (FEM)

12.1 A CORRENTE DE DESLOCAMENTO

O rotacional do campo \mathbf{H} foi definido pontualmente como a *densidade de corrente de condução* \mathbf{J}_c ; onde o índice subscrito c foi adicionado para enfatizar que a corrente é constituída de cargas móveis (elétrons, prótons ou íons). Supondo que a forma simplificada $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c$ seja válida para campos magnéticos e cargas variando no tempo, a equação de continuidade ficaria reduzida a:

$\nabla \cdot \mathbf{J}_c = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$. Isso é inconsistente, pois o resultado correto deveria ser:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_c = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Esse contra-senso levou James Clerk Maxwell a postular que:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_D \quad \text{onde} \quad \mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Com a inclusão da *densidade de corrente de deslocamento* \mathbf{J}_D , Maxwell manteve inexorável a consistência da equação da continuidade:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_c = -\nabla \cdot \mathbf{J}_D = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

A *corrente de deslocamento* i_D que atravessa uma superfície específica é obtida por integração da componente normal de \mathbf{J}_D sobre a superfície (do mesmo modo que i_c foi obtida de \mathbf{J}_c).

$$i_D = \int_S \mathbf{J}_D \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

onde a comutação do símbolo de integração com o de derivação, na última passagem, só pôde ser realizada porque foi assumido que a superfície S não varia no tempo*.

Exemplo 1 Use o Teorema de Stokes (Seção 9.8) para mostrar que $i_c = i_D$ no circuito da Fig. 12-1.

* N. de T. Para que a integração seja realizada, é essencial que $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ seja integrável, i.e., que o integrando converja uniformemente na região de integração.

Como as duas superfícies S_1 e S_2 são limitadas simultaneamente pelo contorno C ,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

$$= \int_{S_1} \left(\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} \left(\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

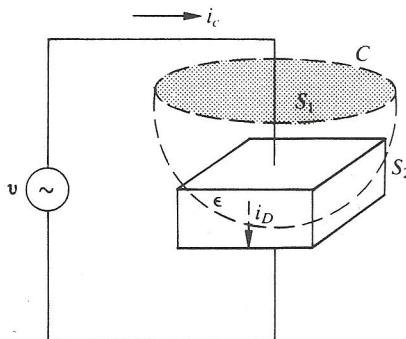


Fig. 12-1

Desprezando-se os efeitos de borda, ocorre o confinamento do fluxo elétrico entre as placas do capacitor e, portanto, $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ sobre S_1 . Desse modo, desde que nenhuma carga livre se movimenta dentro do dielétrico, $\mathbf{J}_c = \mathbf{0}$ sobre S_2 . Portanto,

$$\int_{S_1} \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{ou} \quad i_c = i_D$$

Deve ser enfatizado que $\partial \mathbf{D}/\partial t$ é não-nula somente na parte S_2 que está situada dentro do dielétrico.

Exemplo 2 Repita o Exemplo 1. Desta vez, usando análise de circuito.

Para o capacitor do circuito da Fig. 12-1, a capacitância é:

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

sendo A a área das placas do capacitor (placas idênticas) e d a distância que as separam. Então, a corrente de condução é:

$$i_c = C \frac{dv}{dt} = \frac{\epsilon A}{d} \frac{dv}{dt}$$

Além disso, o campo elétrico no dielétrico é $E = v/d$ (desprezando os efeitos de borda). Assim,

$$D = \epsilon E = \frac{\epsilon}{d} v \quad \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\epsilon}{d} \frac{dv}{dt}$$

lembrando que \mathbf{D} é normal às placas, a corrente de deslocamento é:

$$i_D = \int_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \int_A \frac{\epsilon}{d} \frac{dv}{dt} dS = \frac{\epsilon A}{d} \frac{dv}{dt} = i_c$$

12.2 RELAÇÃO ENTRE J_c E J_d

Alguns tipos de meios materiais não são bons condutores elétricos e também não são dielétricos perfeitos. Nesses meios, a corrente de condução e a corrente de deslocamento podem coexistir. Para modelar um mau condutor ou um dielétrico com perdas pode ser utilizada a Fig. 12-2. Considerando que o campo \mathbf{E} possui dependência harmônica no tempo, i.e. do tipo $e^{j\omega t}$, a densidade de corrente total é:

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_d = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \mathbf{E}) = \sigma \mathbf{E} + j\omega \epsilon \mathbf{E}$$

onde

$$\frac{J_c}{J_d} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$$

Como era esperado, a corrente de deslocamento torna-se bastante relevante à medida que a freqüência aumenta.

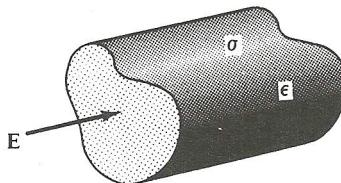


Fig. 12-2

Exemplo 3 Um condutor de seção reta circular de raio 1,5mm conduz uma corrente $i_c = 5,5 \operatorname{sen}(4 \times 10^{10} t)$ (μA). Qual é o módulo da densidade de corrente de deslocamento, se $\sigma = 35 \text{ MS/m}$ e $\epsilon_r = 1$?

$$\begin{aligned} \frac{J_c}{J_d} &= \frac{\sigma}{\omega \epsilon} = \frac{3,50 \times 10^7}{(4 \times 10^{10})(10^{-9}/36\pi)} = 9,90 \times 10^7 \\ \text{Então, } J_d &= \frac{(5,5 \times 10^{-6})/[\pi(1,5 \times 10^{-3})^2]}{9,90 \times 10^7} = 7,86 \times 10^{-3} \mu\text{A/m}^2 \end{aligned}$$

12.3 LEI DE FARADAY E A LEI DE LENZ

O sinal negativo na Lei de Faraday (Seção 11.3) mostra implicitamente a polaridade da tensão instantânea induzida v . Para compreendê-lo melhor, considere o caso onde um plano de área S (limitado pela curva C) é cortado perpendicularmente por uma densidade de fluxo variável no tempo $\mathbf{B}(t)$ (Fig. 12-3). Nesse caso, a forma integral da Lei de Faraday é:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

o sentido positivo ao longo de C e a direção da normal $d\mathbf{S}$ são determinados corretamente pela regra da mão direita [Fig. 12-3(a)]. Logo, se acréscimos em t provocam aumentos em \mathbf{B} , a derivada $d\mathbf{B}/dt$ é positiva e, desse modo, o lado direito da equação será negativo. O único modo de satisfazer a igualdade e explicar o aparecimento do sinal negativo no lado esquerdo é admitir que a direção do campo \mathbf{E} seja oposta ao sentido de orientação do contorno C [ou seja, oposta ao sentido do elemento $d\mathbf{l}$, Fig. 12-3(b)]. Sendo assim, se o contorno C for uma espira condutora, por ele circulará uma corrente i_c , consistente com o sentido de \mathbf{E} . De acordo com a Fig. 12-3(c), essa espira de corrente gera um fluxo ϕ' que se opõe ao sentido do campo \mathbf{B} . A Lei de Lenz sintetiza essa discussão: *a tensão instantânea induzida por um fluxo magnético variável no tempo tem uma polaridade tal que a corrente estabelecida em um percurso fechado (malha) origina um fluxo que se opõe à variação do fluxo inicial.*

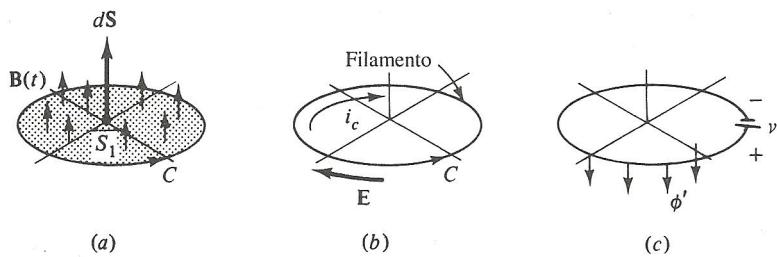


Fig. 12-3

Considerando o caso especial de um condutor em movimento relativo num campo magnetostático, a polaridade predita pela Lei de Lenz é produzida por dois outros métodos. (1) A polaridade é tal que o condutor experimenta uma força de origem magnética que se opõe ao sentido de movimento. (2) Como indicado na Fig. 12-4, um condutor em movimento dentro de um campo magnetostático distorce as linhas de fluxo magnético e empurra essas linhas de fluxo no sentido do movimento. A ilustração sugere uma distorção nas linhas de fluxo em volta do condutor, distorção essa provocada pelo fluxo no sentido anti-horário criado pela corrente. Se a malha estiver fechada externamente, a partir das extremidades do condutor, a regra da mão direita revela que a corrente para produzir estas linhas de fluxo possui o sentido indicado na figura. A polaridade da tensão induzida é tal que o polo + aparece mais à esquerda no desenho, por onde a corrente está saindo do condutor (no sentido convencional). A Fig. 12-5 mostra uma fonte de tensão equivalente e o mesmo sentido de corrente que flui pelo circuito resistivo externo.

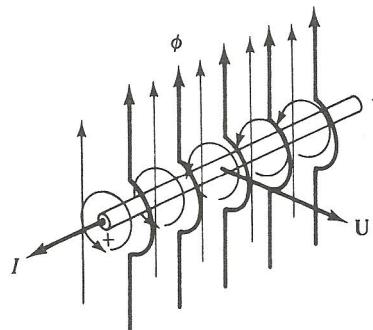


Fig. 12-4



Fig. 12-5

12.4 CONDUTORES EM MOVIMENTO RELATIVO EM UM CAMPO MAGNETOSTÁTICO

A força \mathbf{F} sobre uma carga Q em movimento, com velocidade \mathbf{U} numa região de campo magnético \mathbf{B} , foi estudada no Capítulo 10.

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{U} \times \mathbf{B})$$

Um campo elétrico produzido pela carga em movimento (\mathbf{E}_m) pode ser definido como a força por unidade de carga:

$$\mathbf{E}_m = \frac{\mathbf{F}}{Q} = \mathbf{U} \times \mathbf{B}$$

Quando um condutor é movido através de um campo \mathbf{B} , o campo \mathbf{E}_m cria uma diferença de potencial entre as duas extremidades do condutor, cujo módulo depende de como \mathbf{E}_m está orientado em relação ao condutor. Denotando as extremidades do condutor por a e b , a tensão do ponto a relativamente ao ponto b é:

$$v_{ab} = \int_b^a \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l} = \int_b^a (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

Se a velocidade \mathbf{U} e o campo \mathbf{B} formarem um ângulo reto entre si e o condutor for perpendicular a ambos, então em um comprimento ℓ desse condutor será desenvolvida uma tensão dada por:

$$v = B\ell U$$

A integral de linha tomada ao longo de todo um circuito fechado resulta na tensão induzida:

$$v = \oint (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

É claro que, se apenas uma parte do circuito estiver em movimento, será necessário realizar a integração apenas nessa parte. Nas demais, \mathbf{E}_m será nulo.

Exemplo 4 Na Fig. 12-6, duas barras condutoras movem-se para fora com velocidades $\mathbf{U}_1 = 12,5(-\mathbf{a}_y)$ m/s e $\mathbf{U}_2 = 8,0\mathbf{a}_y$ m/s em um campo $\mathbf{B} = 0,35\mathbf{a}_z$ T. Calcule a tensão do ponto b relativamente ao ponto c .

Para os dois condutores,

$$\mathbf{E}_{m1} = \mathbf{U}_1 \times \mathbf{B} = 4,38(-\mathbf{a}_x) \text{ V/m}$$

$$\mathbf{E}_{m2} = \mathbf{U}_2 \times \mathbf{B} = 2,80\mathbf{a}_x \text{ V/m}$$

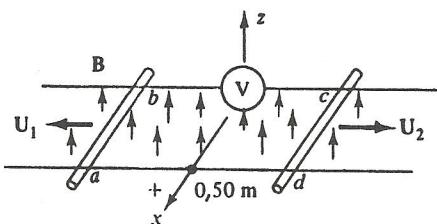


Fig. 12-6

e, daí:

$$v_{ab} = \int_0^{0,50} 4,38(-\mathbf{a}_x) \cdot dx \mathbf{a}_x = -2,19 \text{ V} \quad v_{dc} = \int_0^{0,50} 2,80\mathbf{a}_x \cdot dx \mathbf{a}_x = 1,40 \text{ V}$$

$$v_{bc} = v_{ba} + v_{ad} + v_{dc} = 2,19 + 0 + 1,40 = 3,59 \text{ V}$$

Como o ponto b é positivo em relação ao ponto c , a corrente através do medidor estará na direção de \mathbf{a}_y . Este sentido da corrente produz um fluxo magnético na direção $-\mathbf{a}_z$, o qual, segundo a Lei de Lenz, contraria o aumento do fluxo magnético devido à expansão do circuito na direção de $+\mathbf{a}_z$. Além disso, as forças que o campo \mathbf{B} exerce sobre os condutores em movimento apontam contrariamente aos sentidos das velocidades nos condutores.

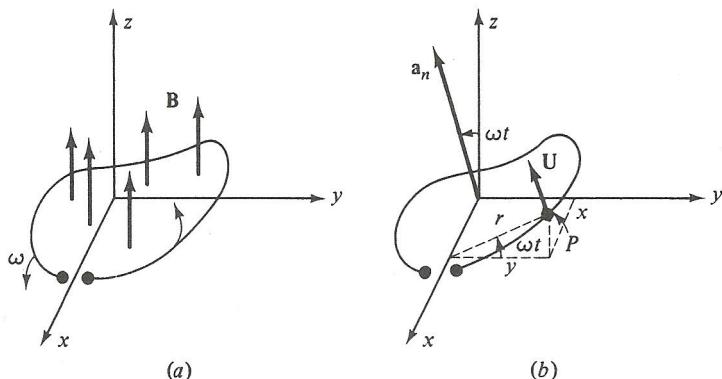
12.5 CONDUTORES EM MOVIMENTO RELATIVO EM UM CAMPO MAGNÉTICO VARIÁVEL NO TEMPO

Quando uma espira fechada está em movimento relativo (isso inclui mudança na forma da espira) e o campo magnético também exibe dependência temporal, a tensão instantânea induzida terá parcelas oriundas a essas duas fontes de variação do fluxo magnético. A Lei de Faraday torna-se:

$$v = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

onde o primeiro termo à direita é a tensão induzida devido à variação no tempo do campo \mathbf{B} , com a espira mantida fixa; o segundo termo refere-se à tensão instantânea induzida provocada pelo movimento relativo entre a espira e o campo magnético, fixando-se o campo \mathbf{B} . A polaridade provocada por cada uma das parcelas deve ser encontrada através da Lei de Lenz na forma apropriada e, então, as duas contribuições devem ser superpostas com as respectivas polaridades individuais.

Exemplo 5 De acordo com a Fig. 12-7(a), uma espira condutora plana gira em torno do eixo x com velocidade angular ω ; em $t = 0$ ela está no plano xy . Toda a região onde a espira evolui, possui um campo magnético variável no tempo da forma $\mathbf{B} = B(t)\mathbf{a}_z$. Calcule a tensão instantânea induzida na espira obtendo cada um dos termos da Lei de Faraday:



Figs. 12-7

Denotemos a área da espira por A . A parcela em v devido à variação temporal em \mathbf{B} é

$$v_1 = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{dB}{dt} \mathbf{a}_z \cdot dS \mathbf{a}_n = - \frac{dB}{dt} A \cos \omega t$$

visto que $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_n = \cos \omega t$.

Para determinar a segunda parcela, contribuição do movimento relativo entre a espira e o campo na tensão v , é necessário estabelecer a velocidade \mathbf{U} em um ponto específico sobre a espira. Da Fig. 12-7(b) está evidente que

$$\mathbf{U} = r\omega \mathbf{a}_n = \frac{y}{\cos \omega t} \omega \mathbf{a}_n$$

desse modo,

$$\mathbf{U} \times \mathbf{B} = \frac{y}{\cos \omega t} \omega \mathbf{a}_n \times B \mathbf{a}_z = \frac{y}{\cos \omega t} \omega B \sin \omega t (-\mathbf{a}_x)$$

visto que $\mathbf{a}_n \times \mathbf{a}_z = \sin \omega t (-\mathbf{a}_x)$. Conseqüentemente, a integração a ser realizada ao longo do percurso fechado da espira é:

$$v_2 = \oint (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\omega B \sin \omega t}{\cos \omega t} \oint y \mathbf{a}_x \cdot d\mathbf{l}$$

Devemos utilizar o Teorema de Stokes (Seção 9.8) para calcular a última integral. Como $\nabla \times (y \mathbf{a}_x) = -\mathbf{a}_z$,

$$\oint y \mathbf{a}_x \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times y \mathbf{a}_x) \cdot d\mathbf{S} = \int_S (-\mathbf{a}_z) \cdot dS \mathbf{a}_n = -A \cos \omega t$$

Sendo assim:

$$v_2 = -\frac{\omega B \sin \omega t}{\cos \omega t} (-A \cos \omega t) = BA \omega \sin \omega t$$

Problemas Resolvidos

- 12.1** Para um material cujo $\sigma = 5,0 \text{ S/m}$ e $\epsilon_r = 1$, o campo elétrico é $\mathbf{E} = 250 \sin 10^{10}t \text{ (V/m)}$. Calcule as densidades de corrente de condução e de deslocamento e a freqüência na qual elas possuem o mesmo módulo.

$$J_c = \sigma E = 1250 \sin 10^{10}t \text{ (A/m}^2)$$

Assumindo como premissa que a direção do campo não varia no tempo,

$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \epsilon_r 250 \sin 10^{10}t) = 22,1 \cos 10^{10}t \text{ (A/m}^2)$$

Impondo $J_c = J_D$,

$$\sigma = \omega \epsilon \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{5,0}{8,854 \times 10^{-12}} = 5,65 \times 10^{11} \text{ rad/s}$$

que é equivalente a uma freqüência $f = 8,99 \times 10^{10} \text{ Hz} = 89,9 \text{ GHz}$.

- 12.2** Um capacitor coaxial com raios, interno e externo, 5 e 6mm, respectivamente, e 500mm de comprimento possui um dielétrico para o qual $\epsilon_r = 6,7$. Ele está sujeito à tensão instantânea $250 \sin 377t \text{ (V)}$. Determine a corrente de deslocamento i_D e compare-a com a corrente de condução i_c .

Considere que o condutor interno possui um potencial fixo $v = 0$. Então, do Problema 8.7, o potencial na região $0,005 \text{ m} \leq r \leq 0,006 \text{ m}$ é

$$v = \left[\frac{250}{\ln(\frac{6}{5})} \sin 377t \right] \left(\ln \frac{r}{0,005} \right) \text{ (V)}$$

Disto,

$$\mathbf{E} = -\nabla v = -\frac{1,37 \times 10^3}{r} \sin 377t \mathbf{a}_r \text{ (V/m)}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = -\frac{8,13 \times 10^{-8}}{r} \sin 377t \mathbf{a}_r \text{ (C/m}^2)$$

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{3,07 \times 10^{-5}}{r} \cos 377t \mathbf{a}_r \text{ (A/m}^2)$$

$$i_D = J_D (2\pi r L) = 9,63 \times 10^{-5} \cos 377t \text{ (A)}$$

A capacidade do sistema é,

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r L}{\ln(\frac{6}{5})} = 1,02 \text{ nF}$$

Da equação para a corrente i_c num capacitor:

$$i_c = C \frac{dv}{dt} = (1,02 \times 10^{-9})(250)(377)(\cos 377t) = 9,63 \times 10^{-5} \cos 377t \text{ (A)}$$

Fica estabelecida a igualdade $i_c = i_D$.

- 12.3** O solo úmido possui uma condutividade média da ordem de 10^{-3} S/m e $\epsilon_r = 2,5$. Determine J_c e J_D , onde

$$E = 6,0 \times 10^{-6} \operatorname{sen} 9,0 \times 10^9 t \text{ (V/m)}$$

Primeiro, recordemos que $J_c = \sigma E = 6,0 \times 10^{-9} \operatorname{sen}(9,0 \times 10^9 t) \text{ (A/m}^2\text{)}$. Portanto, como $D = \epsilon_0 \epsilon_r E$,

$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial E}{\partial t} = 1,20 \times 10^{-6} \cos 9,0 \times 10^9 t \text{ (A/m}^2\text{)}$$

- 12.4** Calcule a tensão induzida no condutor da Fig. 12-8 onde $\mathbf{B} = 0,04\mathbf{a}_y \text{ T}$ e

$$\mathbf{U} = 2,5 \operatorname{sen} 10^3 t \mathbf{a}_z \text{ (m/s)}$$

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{U} \times \mathbf{B} = 0,10 \operatorname{sen} 10^3 t (-\mathbf{a}_x) \text{ (V/m)}$$

$$\begin{aligned} v &= \int_0^{0,20} 0,10 \operatorname{sen} 10^3 t (-\mathbf{a}_x) \cdot d\mathbf{x} \mathbf{a}_x \\ &= -0,02 \operatorname{sen} 10^3 t \text{ (V)} \end{aligned}$$

O condutor inicialmente é movido na direção \mathbf{a}_z . A extremidade $x = 0,20$ é negativa em relação à outra extremidade situada na origem do sistema, para este meio ciclo.

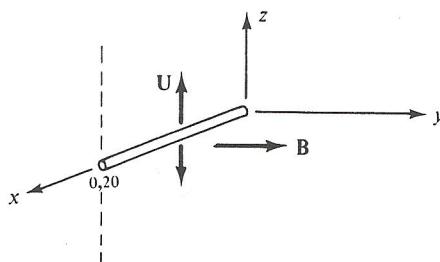


Fig. 12-8

- 12.5** Refaça o Problema 12.4 se a direção do campo for mudada para $\mathbf{B} = 0,04\mathbf{a}_x \text{ T}$.

Em virtude do condutor não cortar linhas de fluxo, a tensão instantânea induzida deve ser zero. Isto pode ser verificado analiticamente usando o resultado do Problema 1.8:

$$v = \int (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{U} \cdot (\mathbf{B} \times d\mathbf{l}) = 0$$

porque \mathbf{B} e $d\mathbf{l}$ são sempre paralelos.

- 12.6** Uma área de $0,65 \text{ m}^2$ no plano $z = 0$ é envolvida por um fio condutor. Encontre a tensão instantânea induzida dado que

$$\mathbf{B} = 0,05 \cos 10^3 t \left(\frac{\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{2}} \right) \text{ (T)}$$

Veja a Fig. 12-9.

$$\begin{aligned} v &= - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \mathbf{a}_z \\ &= \int_S 50 \operatorname{sen} 10^3 t \left(\frac{\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{2}} \right) \cdot d\mathbf{S} \mathbf{a}_z \\ &= 23,0 \operatorname{sen} 10^3 t \text{ (V)} \end{aligned}$$

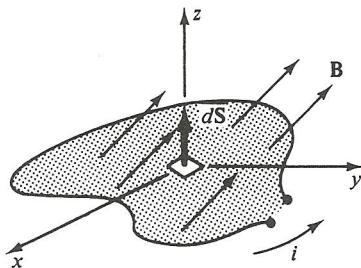


Fig. 12-9

O fluxo do campo está diminuindo na primeira metade de ciclo da função co-seno. A direção da corrente i na malha fechada deve ser tal que se oponha a esse decréscimo no fluxo. Logo, o sentido convencional para a corrente deve possuir a direção mostrada na Fig. 12-9.

- 12.7** A espira condutora circular mostrada na Fig. 12-10 situa-se no plano $z = 0$, tem raio $0,10\text{m}$ e resistência elétrica de $5,0\Omega$. Dado que $\mathbf{B} = 0,20 \text{ sen} 10^3 t \mathbf{a}_z \text{ T}$, determine a corrente na espira.

$$\phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = 2 \times 10^{-3} \pi \text{ sen } 10^3 t \text{ (Wb)}$$

$$v = -\frac{d\phi}{dt} = -2\pi \cos 10^3 t \text{ (V)}$$

$$i = \frac{v}{R} = -0,4\pi \cos 10^3 t \text{ (A)}$$

O fluxo magnético está aumentando para $t = 0+$. De modo a se opor a este aumento no fluxo, a corrente na espira tem a direção instantânea $-\mathbf{a}_y$, onde a espira cruza o eixo x positivo.

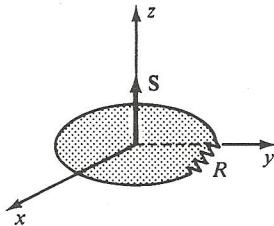


Fig. 12-10

- 12.8** A espira retangular mostrada na Fig. 12-11 está em movimento em direção à origem com velocidade $\mathbf{U} = -250\mathbf{a}_y \text{ m/s}$, num campo

$$\mathbf{B} = 0,80e^{-0.50y}\mathbf{a}_z \text{ (T)}$$

Calcule a corrente no instante em que a bobina está em $y = 0,50\text{m}$ e $0,60\text{m}$, se $R = 2,5\Omega$.

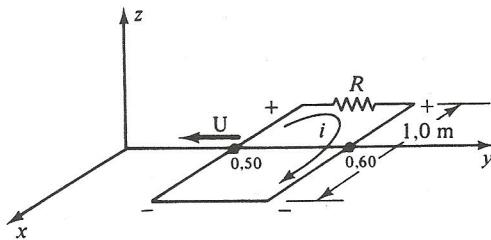


Fig. 12-11

Somente o par de lados de comprimento 1m possui tensões instantâneas induzidas. Denotemos o lado em $y = 0,50\text{m}$ por 1. Então,

$$v_1 = B_1 \ell U = 0,80e^{-0,25}(1)(250) = 155,8 \text{ V} \quad v_2 = B_2 \ell U = 148,2 \text{ V}$$

As tensões têm as polaridades indicadas na figura. Assim, a corrente instantânea é:

$$i = \frac{155,8 - 148,2}{2,5} = 3,04 \text{ A}$$

- 12.9** Um condutor de 1cm de comprimento é mantido paralelamente ao eixo z , enquanto gira a 1200rev/min em volta deste eixo, formando um círculo de raio 25cm (veja a Fig. 12-12). Determine a tensão induzida se o campo radial é dado por $\mathbf{B} = 0,5\mathbf{a}_r$, T.

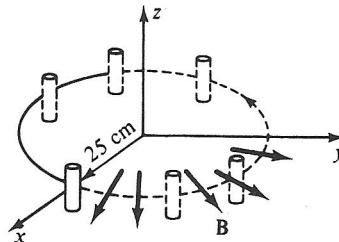


Fig. 12-12

A velocidade angular é

$$\left(1200 \frac{\text{rev}}{\text{min}}\right) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{rev}}\right) = 40\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Assim

$$U = r\omega = (0,25)(40\pi) \text{ m/s}$$

$$\mathbf{E}_m = 10\pi \mathbf{a}_\phi \times 0,5\mathbf{a}_r = 5,0\pi(-\mathbf{a}_z) \text{ V/m}$$

$$v = \int_0^{0,01} 5,0\pi(-\mathbf{a}_z) \cdot d\mathbf{z} \mathbf{a}_z = -5,0 \times 10^{-2}\pi \text{ V}$$

O sinal negativo indica que a extremidade inferior do condutor está positiva em relação à extremidade superior.

- 12.10** Um cilindro condutor de raio 7cm e altura 15cm gira a 600rev/min em um campo radial $\mathbf{B} = 0,20\mathbf{a}_r$, T. Contatos móveis presos ao topo e à base conectam um voltímetro ao cilindro, como mostra a Fig. 12-13. Calcule a tensão induzida.

$$\omega = (600)\left(\frac{1}{60}\right)(2\pi) = 20\pi \text{ rad/s}$$

$$\mathbf{U} = (20\pi)(0,07)\mathbf{a}_\phi \text{ m/s}$$

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{U} \times \mathbf{B} = 0,88(-\mathbf{a}_z) \text{ V/m}$$

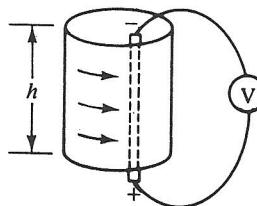


Fig. 12-13

Cada elemento vertical de superfície curva corta o mesmo fluxo magnético e tem a mesma tensão induzida. Esses elementos estão efetivamente em paralelo. Significa que a tensão induzida em um elemento qualquer representa a própria tensão total. Portanto,

$$v = \int_0^{0,15} 0,88(-\mathbf{a}_z) \cdot d\mathbf{z} \mathbf{a}_z = -0,13 \text{ V} \quad (+ \text{ na extremidade inferior})$$

- 12.11** Na Fig. 12-14 uma espira condutora retangular, com resistência elétrica $R = 0,20\Omega$, gira a 500rev/min ao redor do eixo z. O condutor vertical mais interno está a $r_1 = 0,03\text{m}$ do eixo z e sujeito ao campo $\mathbf{B}_1 = 0,25\mathbf{a}_r\text{T}$. Já o condutor vertical mais externo está a $r_2 = 0,05\text{m}$ do eixo z e submetido ao campo $\mathbf{B}_2 = 0,80\mathbf{a}_r\text{T}$. Encontre a corrente na espira.

$$\mathbf{U}_1 = (500)\left(\frac{1}{60}\right)(2\pi)(0,03)\mathbf{a}_\phi = 0,50\pi\mathbf{a}_\phi \text{ m/s}$$

$$v_1 = \int_0^{0,50} (0,50\pi\mathbf{a}_\phi \times 0,25\mathbf{a}_r) \cdot d\mathbf{z} \mathbf{a}_z = -0,20 \text{ V}$$

Similarmente, $\mathbf{U}_2 = 0,83\pi\mathbf{a}_\phi \text{ m/s}$ e $v_2 = -1,04 \text{ V}$. Desse modo,

$$i = \frac{1,04 - 0,20}{0,20} = 4,20 \text{ A}$$

com o sentido indicado na figura.

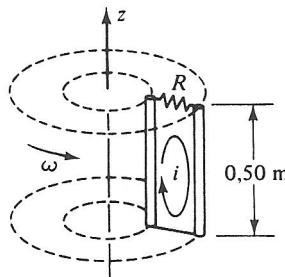


Fig. 12-14

- 12.12** O disco circular da Fig. 12-15 gira a ω (rad/s) em um campo de densidade de fluxo uniforme $\mathbf{B} = B \mathbf{a}_z$. Permitindo que contatos móveis conectados a um voltímetro deslizem sobre o disco enquanto ele gira, qual a tensão instantânea induzida sobre o medidor deste gerador homopolar* de Faraday?

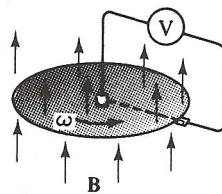


Fig. 12-15

Examinemos um elemento radial do disco. Um ponto genérico sobre o elemento radial possui velocidade linear (ou tangencial) $\mathbf{U} = \omega r \mathbf{a}_\phi$, tal que

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{U} \times \mathbf{B} = \omega r B \mathbf{a}_r$$

$$v = \int_0^a \omega r B \mathbf{a}_r \cdot d\mathbf{r} \mathbf{a}_r = \frac{\omega a^2 B}{2}$$

sendo a o raio do disco. O resultado positivo implica que a extremidade de fora do voltímetro está mais positiva em relação à extremidade próxima ao centro do disco, para as direções de \mathbf{B} e ω mostradas.

* N. de T. Ligação homopolar é aquela em que a atração eletrostática é nula ou desprezível.

- 12.13** Um bobina quadrada de lado 0,60m gira ao redor do eixo x , em uma velocidade angular $\omega = 60\pi \text{ rad/s}$ e em um campo $\mathbf{B} = 0,80\mathbf{a}_z \text{ T}$, como indica a Fig. 12-16(a). Calcule a tensão instantânea induzida.

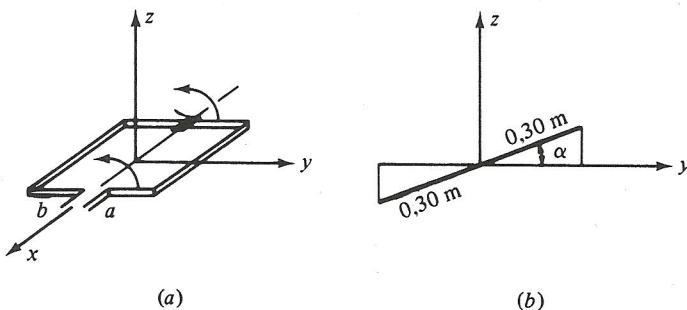


Fig. 12-16

Considerando que a espira está inicialmente no plano xy ,

$$\alpha = \omega t = 60\pi t \text{ (rad)}$$

A projeção da área da espira sobre o plano xy é [veja a Fig. 12-16(b)]:

$$A = (0,6)(0,6 \cos 60\pi t) \text{ (m}^2\text{)}$$

Então, $\phi = BA = 0,288 \cos 60\pi t \text{ (Wb)}$

$$v = -\frac{d\phi}{dt} = 54,3 \sin 60\pi t \text{ (V)}$$

A Lei de Lenz mostra que esta é a tensão induzida do ponto a relativamente ao ponto b .

Método Alternativo

Cada lado paralelo ao eixo x possui uma componente y da velocidade cujo módulo é

$$|U_y| = |r\omega \sin \alpha| = |18,0\pi \sin 60\pi t| \text{ (m/s)}$$

As tensões $B\ell|U_y|$ resultante dos dois lados produzem

$$v = 2(B\ell|U_y|) = |54,3 \sin 60\pi t| \text{ (V)}$$

A determinação do sinal novamente é dada pela Lei de Lenz.

- 12.14** Verifique o Exemplo 5 baseando-se na forma diferencial da Lei de Faraday.

Da Fig. 12-7(b), a projeção normal da área da espira para o campo sugerido é $A \cos \omega t$. Sendo assim,

$$\phi = B(t)(A \cos \omega t)$$

$$v = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{dB}{dt} A \cos \omega t + BA\omega \sin \omega t = v_1 + v_2$$

(Quase sempre é mais simples lidar com a forma diferencial das Leis do Eletromagnetismo do que a forma integral, veja Capítulos 13 e 14).

- 12.15** Calcule a potência elétrica na espira do Problema 12.11. Verifique o resultado calculando a taxa com que o trabalho mecânico é convertido em elétrico na espira.

Toda a potência elétrica é dissipada na resistência R do resistor:

$$P_e = i^2 R = (4,20)^2(0,20) = 3,53 \text{ W}$$

As forças que agem sobre os dois condutores verticais são:

$$\mathbf{F}_1 = i(\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B}_1) = (4,20)(0,50)(0,25)(\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_r) = 0,525\mathbf{a}_\phi \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_2 = i(\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_2) = (4,20)(0,50)(0,80)(-\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_r) = -1,68\mathbf{a}_\phi \text{ N}$$

Para girar a espira, forças $-\mathbf{F}_1$ e $-\mathbf{F}_2$ devem ser aplicadas; isso provoca a realização de trabalho em uma taxa:

$$P = (-\mathbf{F}_1) \cdot \mathbf{U}_1 + (-\mathbf{F}_2) \cdot \mathbf{U}_2 = (-0,525)(0,50\pi) + (1,68)(0,83\pi) = 3,55 \text{ W}$$

O que está dentro da margem de erro de arredondamento. Logo, $P = P_e$.

Problemas Complementares

- 12.16** Dada $J_c = 0,02\sin 10^9 t \text{ (A/m}^2)$, a densidade de corrente de condução num dielétrico com perdas, calcule a densidade de corrente de deslocamento se $\sigma = 10^3 \text{ S/m}$ e $\epsilon_r = 6,5$.
Resp. $1,15 \times 10^{-6}\cos 10^9 t \text{ (A/m}^2)$
- 12.17** Um condutor de seção reta circular de raio 1,5mm conduz uma corrente $i_c = 5,5\sin(4 \times 10^{10}t) \text{ (\mu A)}$. Qual é o módulo da densidade de corrente de deslocamento, se $\sigma = 35 \text{ MS/m}$ e $\epsilon_r = 1$?
Resp. $7,87 \times 10^{-3} \text{ (\mu A/m}^2)$
- 12.18** Determine a freqüência para a qual as densidades de corrente de condução e de deslocamento são iguais na (a) água destilada, onde $\sigma = 2,0 \times 10^{-4} \text{ S/m}$ e $\epsilon_r = 81$; (b) água do mar, onde $\sigma = 4,0 \text{ S/m}$ e $\epsilon_r = 1$.
Resp. (a) $4,44 \times 10^4 \text{ Hz}$; (b) $7,19 \times 10^{10} \text{ Hz}$
- 12.19** Cascas esféricas condutoras concêntricas em $r_1 = 0,5\text{mm}$ e $r_2 = 1\text{mm}$ estão separadas por um dielétrico de $\epsilon_r = 8,5$. Determine a capacidade do sistema e calcule i_c , dada a tensão aplicada $v = 150\sin 5000t \text{ (V)}$. Obtenha a corrente de deslocamento i_D e compare-a com i_c .
Resp. $i_c = i_D = 7,09 \times 10^{-7}\cos 5000t \text{ (A)}$
- 12.20** Duas placas condutoras paralelas de área $0,05\text{m}^2$ estão separadas por um dielétrico com perdas e 2mm de espessura; $\epsilon_r = 8,3$ e $\sigma = 8,0 \times 10^{-4} \text{ S/m}$. Se as placas estão submetidas a uma tensão $v = 10\sin 10^7 t \text{ (V)}$, calcule a corrente eficaz* total.
Resp. $0,192\text{A}$
- 12.21** Um capacitor de placas paralelas, separadas por 0,6mm e com um meio dielétrico de $\epsilon_r = 15,3$ foi submetido a uma fonte tensão eficaz de 25V/15GHz. Calcule a densidade de corrente de deslocamento eficaz. Despreze os efeitos de borda.
Resp. $5,32 \times 10^5 \text{ A/m}^2$
- 12.22** Um condutor sobre o eixo x , entre os pontos $x = 0$ e $x = 0,2\text{m}$, tem uma velocidade $\mathbf{U} = 6,0\mathbf{a}_z \text{ m/s}$ em um campo $\mathbf{B} = 0,04\mathbf{a}_y \text{ T}$. Calcule a tensão instantânea induzida usando (a) o campo elétrico resultante do movimento \mathbf{E}_m ; (b) $d\phi/dt$ e (c) $B\ell U$. Indique a polaridade da tensão induzida e discuta o que a Lei de Lenz prediz, se nas extremidades do condutor a mola está fechada.
Resp. 0,048V (a extremidade $x = 0$ é positiva)
- 12.23** Repita o Problema 12.22 para $\mathbf{B} = 0,04\sin kz \mathbf{a}_y \text{ T}$. Discuta o que a Lei de Lenz prediz quando o condutor está em movimento na direção contrária ao sentido considerado positivo para o fluxo.
Resp. $0,048\sin kz \text{ V}$
- 12.24** Uma barra condutora paralela ao eixo y , mostrada na Fig. 12-17, fecha o circuito efetuando contatos móveis com os condutores em $y = 0$ e $y = 0,05\text{m}$. (a) Calcule a tensão induzida quando a barra está em repouso, na posição $x = 0,05\text{m}$, sobre o par de condutores e $\mathbf{B} = 0,30\sin 10^4 t \mathbf{a}_z \text{ T}$. (b) Calcule a tensão induzida se a barra está em movimento com velocidade $\mathbf{U} = 150\mathbf{a}_x \text{ m/s}$. Discuta a polaridade da tensão em cada caso.
Resp. (a) $-7,5\cos 10^4 t \text{ V}$; (b) $-7,5\cos 10^4 t - 2,25\sin 10^4 t \text{ V}$

* N. de T. Ou rms.

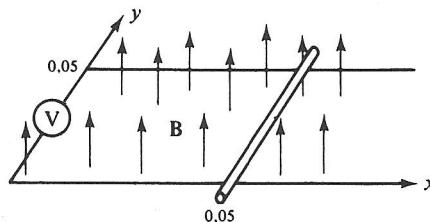


Fig. 12-17

- 12.25** A espira retangular na Fig. 12-18 está em movimento para a direita com velocidade $U = 2,5\text{m/s}$. O lado esquerdo corta o fluxo magnético perpendicularmente, sendo $B_1 = 0,30\text{T}$, e o lado direito corta um fluxo B_2 igual em módulo, mas de sentido contrário a B_1 . Determine a corrente instantânea na espira e discuta o sentido de circulação da mesma usando a Lei de Lenz.

Resp. 15mA (sentido anti-horário)

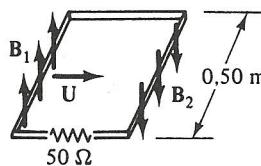


Fig. 12-18

- 12.26** Uma espira condutora retangular é colocada no plano $z = 0$ com os lados paralelos aos eixos; o lado paralelo a y é igual a 1cm e o paralelo a x mede 2cm. Suponha que a resistência da espira é $5,0\Omega$. Em um instante de tempo onde os lados da espira encontram-se em $x = 20\text{cm}$ e $x = 22\text{cm}$, ela está em movimento, ao longo de x , em direção à origem com uma velocidade de $2,5\text{m/s}$. Calcule a corrente se $\mathbf{B} = 5,0e^{-10x}\mathbf{a}_z\text{T}$. Repita o cálculo quando os lados estiverem em $x = 5\text{cm}$ e $x = 7\text{cm}$.

Resp. 0,613mA; 2,75mA

- 12.27** O condutor vertical de comprimento 2m, mostrado na Fig. 12-19, gira a 1200rev/min no campo radial $\mathbf{B} = 0,10\sin\phi\mathbf{a}_r\text{T}$. Calcule a corrente na malha fechada, se a resistência do circuito vale 100Ω . Discuta a polaridade da tensão e o sentido resultante para a corrente.

Resp. $5,03 \times 10^{-2}\sin 40\pi t\text{ A}$

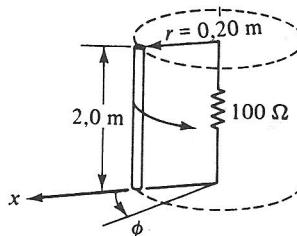


Fig. 12-19

- 12.28** Dois condutores estão em paralelo com o eixo z em um campo radial $\mathbf{B} = 0,50\mathbf{a}_r\text{T}$, situados em $r = 0,23\text{m}$ e $r = 0,25\text{m}$, e possuem comprimento $0,01\text{m}$ cada. Se ambos condutores estão no plano $\phi = 40\pi t$, que valor de tensão há nas extremidades no instante em que os dois condutores são fechados, formando uma malha, por meio condutores radiais que provocam a circulação de corrente?

Resp. 12,6mV

- 12.29** Na Fig. 12-20, um condutor radial $3 \leq r \leq 6\text{cm}$ está fixado sobre um disco de vidro em movimento circular. Dois resistores de $11,2\text{m}\Omega$ completam dois circuitos adjacentes. O disco gira a 12 rev/min. Se o campo perpendicular ao plano do disco é $\mathbf{B} = 0,30\mathbf{a}_n\text{T}$, calcule a potência elétrica dissipada. Qual é o efeito da dissipação de potência sobre a rotação do disco? Discuta a Lei de Lenz neste caso.

Resp. $46,3\mu\text{W}$

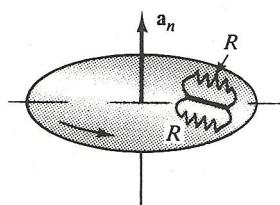


Fig. 12-20

- 12.30** Que tensão induzida se desenvolve em um disco gerador de Faraday (Problema 12.12) com o medidor conectado entre $r_1 = 1\text{mm}$ e $r_2 = 100\text{mm}$, quando disco gira a 50rev/min em uma densidade de fluxo magnético $B = 0,80\text{T}$?

Resp. 0,209V

- 12.31** Uma espira, como aquela mostrada na Fig. 12-16(a), tem 75mm de largura (dimensão y) e 100mm de comprimento (dimensão x). Qual é a velocidade de rotação, se uma tensão eficaz de 0,25V é desenvolvida no campo uniforme $\mathbf{B} = 0,45\mathbf{a}_y\text{T}$?

Resp. 1000rev/min