Gramática Regular

- Uma gramática consiste de uma coleção de regras que especificam como derivar strings de uma linguagem.
- A partir de gramáticas definimos Linguagens regulares (LR) e Não-regulares (LNR).
- LR são representadas por formalismos pouco complexos, muito eficientes e de fácil implementação.
- LR são restritas e limitadas.

- $S \rightarrow A$

  $A \rightarrow 0A1$

  $A \rightarrow \varepsilon$

- $S \rightarrow A \rightarrow 0A1 \rightarrow 00A11 \rightarrow 000A111 \rightarrow 000111$.
- $L(G) = \{0^n 1^n \mid n >= 0\}$

Gramáticas Lineares

- $G = (V,T,P,S)$
  - Sejam A e B elementos de V e w uma palavra de T^*.
  - G será:
    - Gramática Linear à Direita (GLD) se todas as regras de produção são da forma: $A \rightarrow wB$ ou $A \rightarrow w$
    - Gramática Linear à Esquerda (GLE) se todas as regras de produção são da forma: $A \rightarrow Bw$ ou $A \rightarrow w$
    - Gramática Linear Unitária à Direita (GLUD) se são como GLD e $|w| <= 1$
    - Gramática Linear Unitária à Esquerda (GLUE) se são como GLD e $|w| <= 1$

Exemplos GL

- GLD:

  ({A, B},{0, 1},{A → 0A | B, B → 1B |ε}, A)

  - L(GLD) = {0*1*}

- GLE:

  ({S}, {0, 1}, {S → S10 | 0},S)

  - L(GLE) = {w | w começa e termina com 0}

- GLUD:

  ({S,A,B},{a,b},{S → aA, A → bB |ε, B → aA}, S)

  - L(GLUD) = {a(ba)*}

- GLUE:

  ({S,A},{a,b},{S → Aa | a, A → Sb}, S)

Equivalência das GL's

- Seja GD e GE tal que cada regra de produção $\alpha \rightarrow \beta d$ de Pd tem uma regra de produção $\alpha \rightarrow \beta e$ correspondente em Pe, tal que $\beta d = (\beta e)^R$ (βd e βe são invertidas).
- Lemma 1: GD é uma GLD sse GE é uma GLE.
- Lemma 2: A linguagem gerada por GD é a inversa da linguagem gerada por GE :

$$L(GD) = (L(GE))^R .$$

Gramática Regular

- GR é qualquer GL.
- Exemplo:
  - A linguagem a(ba)* é gerada por uma:
    - **GLD**: G = ({S,A}, {a,b},P,S), onde P possui as regras:

      $S \rightarrow aA$ e $A \rightarrow baA \mid \varepsilon$

    - **GLE**: G = ({S}, {a,b},P,S), onde P possui as regras:

      $S \rightarrow Sba \mid a$

Gramática Regular

- GR é qualquer GL.
- Exemplo:
  - A linguagem $a(ba)^*$ é gerada por uma:
    - **GLUD**: G = ({S,A,B}, {a,b},P,S), onde P possui as regras:

      $S \rightarrow aA \quad A \rightarrow bB \mid \varepsilon \quad B \rightarrow aA$

    - **GLUE**: G = ({S,A}, {a,b},P,S), onde P possui as regras:

      $S \rightarrow Aa \mid a \quad A \rightarrow Sb$

Gramática Regular

- Exemplo:
  - A linguagem (a+b)*(aa+bb) é gerada por uma:
    - GLD:
    - GLE:

Gramática Regular

- Exemplo:
  - A linguagem (a+b)*(aa+bb) é gerada por uma:
    - GLD: G = ({S,A},{a,b},P,S), onde P possui as regras:

      $S \rightarrow aS \mid bS \mid A \qquad A \rightarrow aa \mid bb$

    - GLE:

Gramática Regular

- Exemplo:
  - A linguagem (a+b)*(aa+bb) é gerada por uma:
    - GLD: G = ({S,A},{a,b},P,S), onde P possui as regras:

      $S \rightarrow aS \mid bS \mid A \qquad A \rightarrow aa \mid bb$

    - GLE: G =({S,A},{a,b},P,S) , onde P possui as regras:

      $S \rightarrow Aaa \mid Abb \qquad A \rightarrow Aa \mid Ab \mid \varepsilon$

GR → LR

- Se L é gerada por uma GR, então L é uma LR.
- Duvida?! Então, contrua um AF que reconheça L! :)

GR → LR - Prova

- Tome uma GLUD G = (V,T,P,S).
- O AFε M = (Q, Σ, δ ,q0, F), onde
  - Σ = T
  - Q = V U {qf}
  - F = {qf}
  - Q0 = S

δ :

Tipo da produção	Transição gerada
A → ε	(A,ε) = qf
A → a	(A,a) = qf
A → B	(A,ε) = B
A → aB	(A,a) = B

GR → LR - Prova

- ACEITA(M) = GERA(G)?
- Base de indução: S $\rightarrow^1 \alpha$, se
  - $\alpha = \varepsilon$, há uma regra S $\rightarrow \varepsilon$ e $\delta(S, \varepsilon) = qf$
  - $\alpha = a$, há uma regra S → a e $\delta(S, a) = qf$
  - $\alpha = A$, há uma regra S → A e $\delta(S, \varepsilon) = A$
  - $\alpha = aA$, há uma regra S → aA e $\delta(S, a) = A$

GR → LR - Prova

- ACEITA(M) = GERA(G)?
- Hipótese de indução: $S \rightarrow^{n} \alpha$, n>1, se
  - $\alpha = w$, então $\delta(S, w) = qf$
  - $\alpha = wA$, então $\delta(S, w) = A$

GR → LR - Prova

- ACEITA(M) = GERA(G)?
- Passo de indução: S $\rightarrow^{n+1} \alpha$, se
  - Somente $\alpha = wA$ ocorre e S $\rightarrow^{n}$ wA $\rightarrow^{1} \alpha$ portanto, se:
    - $\alpha = w\varepsilon = w$, existe uma regra A → ε

$$\delta(S, w\varepsilon) = \delta(\delta(S, w), \varepsilon) = \delta(A, \varepsilon) = qf$$

    - $\alpha = wb$, existe uma regra A → b

$$\delta(S, wb) = \delta(\delta(S, w), b) = \delta(A, b) = qf$$

    - $\alpha = wB$, existe uma regra A → B

$$\delta(S, w\varepsilon) = \delta(\delta(S, w), \varepsilon) = \delta(A, \varepsilon) = B$$

    - $\alpha = wbB$, existe uma regra A → bB

$$\delta(S, wb) = \delta(\delta(S, w), b) = \delta(A, b) = B$$

GR → LR - Exemplo

- Construindo um AFε a partir de uma GR:

$$G = (\{S,A,B\},\{a,b\},P,S)$$

$$P: S \rightarrow aA \qquad A \rightarrow bB \mid \varepsilon \qquad B \rightarrow aA$$

  - AF que reconhece a linguagem de G é:

$$M = (\{a,b\},\{S,A,B,qf\},\delta,S,\{qf\})$$

GR → LR - Exemplo

- Construindo um AFε a partir de uma GR

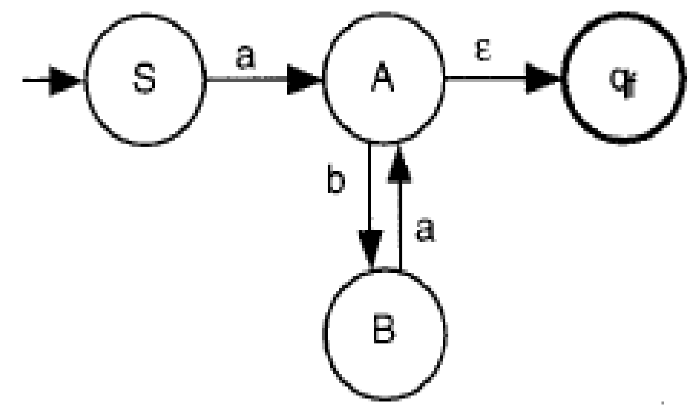
G = ({S,A,B},{a,b},P,S)

P: S → aA   A → bB | ε B → aA

  - AF que reconhece a linguagem de G é:

    M = ({a,b},{S,A,B,qf}, δ ,S,{qf})

Produção	Transição
S → aA	$\delta(S, a) = A$
A → bB	$\delta(A, b) = B$
A → ε	$\delta(A, \varepsilon) = qf$
B → aA	$\delta(B, a) = A$



$LR \rightarrow GR$

- Se L é LR, então existe uma GR que gera L.
- Prova: Construa uma GLD a partir do autômato M, onde GERA(G) = ACEITA(M).
- Tome

  G = (V,T,P,S)

  V = Q U {S}

  T = Alfabeto

Transição	Produção
-	$S \rightarrow q_0$
-	$q_f \rightarrow \varepsilon$
$\delta(q_i,a)=q_k$	$q_i \rightarrow aq_k$

qi e q0 pertencem a Q, qf é elemento de F e a pertence ao alfabeto

LR → GR - Prova

- GERA(G) = ACEITA(M): tamanho da palavra.
- Base de indução:
  - Seja |w| = 0, por definição S → q0. Se ε pertence à ACEITA(M), q0 é estado final e S → q0 → ε (opa!)
- Hipótese de indução:
  - Seja |w| = n (n>= 1) e $\delta(q0, w) = q$
    - q não é final, suponha que S → wq.
    - q é final , suponha que S → wq → w (o que não é importante para o passo).

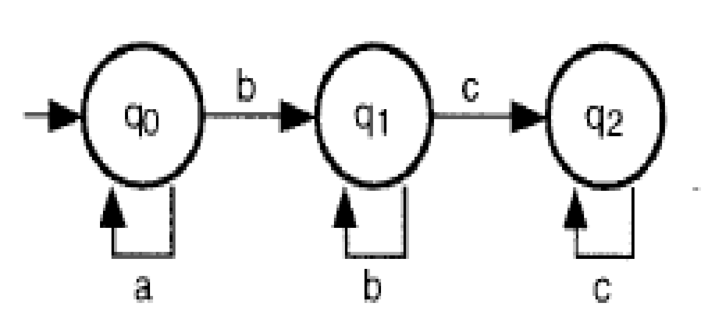
$LR \rightarrow GR$ - Prova

- Passo de indução:
  - Seja |wa| = n+1 e $\delta(q0, wa) = p$

    $$\delta(\delta(q0, w), a) = p$$

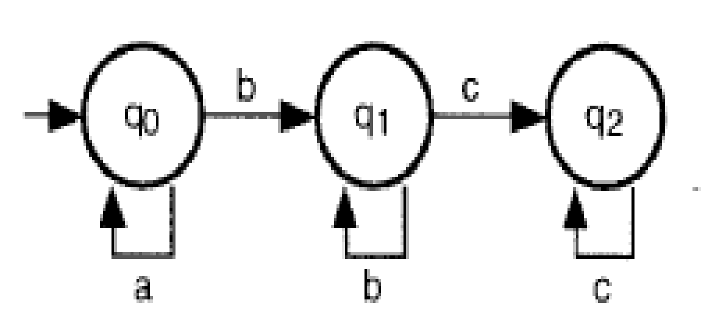
  - p não é final, então $S \rightarrow^{n} wq \rightarrow^{1} wap$
  - p é final, então $S \rightarrow^{n} wq \rightarrow^{1} wap \rightarrow^{1} wa$

LR → GR - Exemplo



- Dado M = ({a,b,c},{q0,q1,q2}, δ,q0, {q0,q1,q2}), construa G tal que ACEITA(M) = GERA(G).

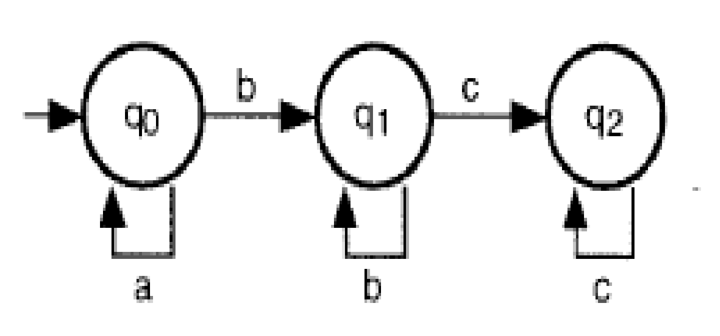
LR → GR - Exemplo



- G = ({q0,q1,q2,S},{a,b,c},S,P)

Transição	Produção
-	
-	
-	
-	
δ(q0,a) = q0	
δ(q0,b) = q1	
δ(q1,b) = q1	
δ(q1,b) = q2	
δ(q2,b) = q2	

LR → GR - Exemplo



- G = ({q0,q1,q2,S},{a,b,c},S,P)

Transição	Produção
-	S → q0
-	q0 → ε
-	q1 → ε
-	q2 → ε
δ(q0,a) = q0	q0 → aq0
δ(q0,b) = q1	q0 → bq1
δ(q1,b) = q1	q1 → bq1
δ(q1,c) = q2	q1 → cq2
δ(q2,c) = q2	q2 → cq2