

2 SINAIS E ESPAÇO DE SINAIS

Neste capítulo, discutiremos certos conceitos básicos relativos a sinais, que são processados por sistemas. Iniciaremos com uma explicação dos termos *sinal* e *sistema*.

Sinais

Um sinal, como implica o termo, é um conjunto de informação ou dados. Como exemplo, podemos citar o sinal de telefone ou o de televisão, os dados de vendas mensais de uma empresa, os preços de ações no fechamento do pregão da bolsa de valores (no caso do Brasil, a média do índice Bovespa). Em todos esses casos, os sinais são funções da variável independente *tempo*. No entanto, nem sempre é assim. Quando uma carga elétrica é distribuída em uma superfície, por exemplo, o sinal é a densidade de carga, uma função do *espaço*, e não do tempo. Neste livro, trataremos quase exclusivamente de sinais que são funções do tempo. A discussão, entretanto, se aplica também a outras variáveis independentes.

Sistemas

Sinais podem ser processados por **sistemas**, que podem modificá-los ou deles extrair informação adicional. Por exemplo, um lançador de míssil antiaéreo pode necessitar conhecer a localização futura de um alvo móvel hostil, que é rastreado pelo radar. Como o sinal de radar fornece a localização passada e a velocidade do alvo, com o processamento adequado do sinal do radar (a entrada) é possível estimar a posição futura do alvo. Assim, um sistema é uma entidade que *processa* um conjunto de sinais (**entradas**) para produzir outro conjunto de sinais (**saídas**). Um sistema pode ser constituído de componentes físicos, como em sistemas elétricos, mecânicos ou hidráulicos (implementação em hardware), ou pode ser um algoritmo que calcula uma saída a partir de um sinal de entrada (implementação em software).

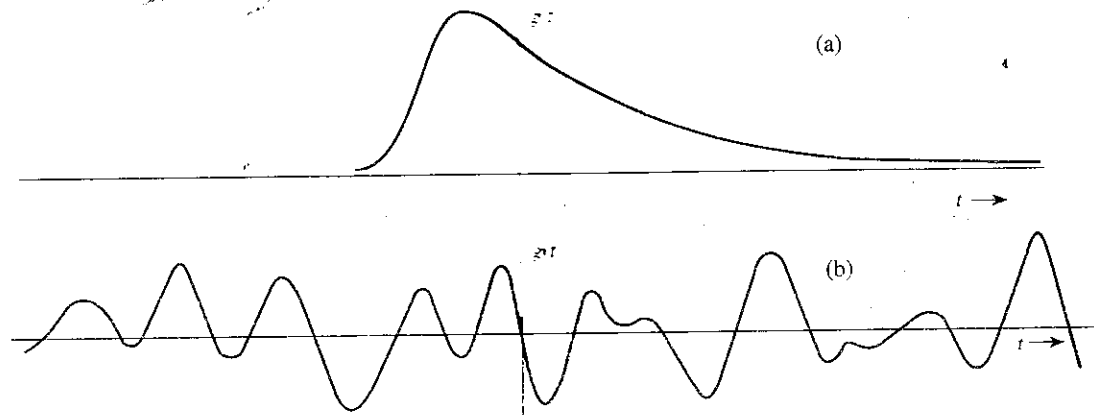
2.1 TAMANHO DE UM SINAL

Energia de um Sinal

O tamanho de qualquer entidade é uma grandeza que indica sua intensidade. De maneira geral, um sinal varia com o **tempo**. Para estabelecer uma grandeza padrão que meça a intensidade de um sinal, normalmente vemos um sinal $g(t)$ como uma tensão através de um resistor de um ohm. Definimos a **energia do sinal** E_g do sinal $g(t)$ como a energia que a tensão $g(t)$ dissipa no resistor. De modo mais formal, definimos E_g (para um sinal de valores reais) como

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt \quad (2.1)$$

Figura 2.1
Exemplos de
sinais. (a) Sinal
com energia
finita. (b) Sinal
com potência
finita.



Essa definição pode ser generalizada para um sinal $g(t)$ de valores complexos como

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \quad (2.2)$$

Potência de um Sinal

Para ser uma medida do tamanho do sinal que faça sentido, a energia do sinal deve ser finita. Uma condição necessária para que a energia seja finita é que a amplitude do sinal tenda a zero à medida que $|t|$ tenda ao infinito (Fig. 2.1a). Caso contrário, a integral na Eq. (2.1) não convergirá.

Se a amplitude de $g(t)$ não tender a zero à medida que $|t|$ tender ao infinito (Fig. 2.1b), a energia do sinal será infinita. Em casos como esse, uma medida mais razoável do tamanho do sinal é a média temporal da energia (caso exista), que é a potência média P_g , definida (para um sinal de valores reais) por

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt \quad (2.3)$$

Podemos generalizar esta definição para um sinal $g(t)$ de valores complexos como

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 dt \quad (2.4)$$

Observemos que a potência do sinal P_g é a média temporal (valor médio) da amplitude quadrática do sinal, ou seja, o valor **quadrático médio** de $g(t)$. Na verdade, a raiz quadrada de P_g é o valor **rms** (*Root Mean Square*), ou valor eficaz, de $g(t)$.

O valor médio de uma grandeza, calculado em um longo intervalo de tempo que tende ao infinito, existe se a grandeza for periódica ou tiver regularidade estatística. Caso essa condição não seja satisfeita, pode não existir um valor médio. Por exemplo, um sinal rampa $g(t) = t$ aumenta indefinidamente quando $|t| \rightarrow \infty$, de modo que nem energia e nem potência existirão para esse sinal.

Unidades de Energia e de Potência de um Sinal

As unidades padrão de energia e de potência de um sinal são, respectivamente, joule e watt. Contudo, na prática, é comum o uso de escalas logarítmicas para descrever a potência de um sinal. Esta notação evita a dificuldade de trabalhar com casas decimais quando a potência do sinal é muito alta ou muito baixa. Por convenção, dizemos que um sinal com potência média de P watts tem potência de

$$[10 \cdot \log_{10} P] \text{ dBw} \quad \text{ou} \quad [30 + 10 \cdot \log_{10} P] \text{ dBm}$$

Por exemplo, -30 dBm representa uma potência de sinal de 10^{-6} W na escala decimal padrão.

Exemplo 2.1 Determinemos medidas razoáveis dos sinais na Fig. 2.2.

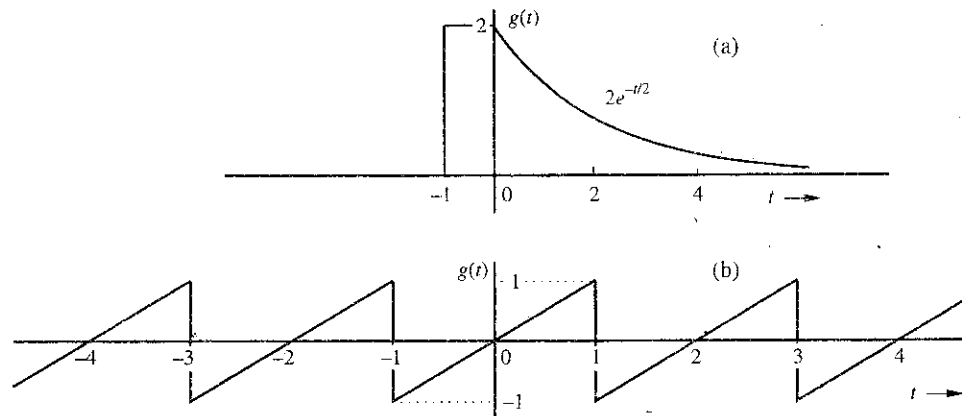
O sinal na Fig. 2.2a tende a 0 à medida que $|t| \rightarrow \infty$. Portanto, uma medida razoável para este sinal é a energia E_g , dada por

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt = \int_{-1}^0 (2)^2 dt + \int_0^{\infty} 4e^{-t} dt = 4 + 4 = 8$$

O sinal na Fig. 2.2b não tende a 0 à medida que $|t| \rightarrow \infty$. Entretanto, este sinal é periódico; logo, sua potência existe e podemos calculá-la usando a Eq. (2.3). Para sinais periódicos, este processo pode ser simplificado se observamos que um sinal periódico se repete regularmente a cada período (2 segundos, neste caso). Assim, calcular a média de $g^2(t)$ em um intervalo de tempo infinitamente longo é equivalente a calculá-la em um período (2 segundos, neste caso), ou seja

$$P_g = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

Figura 2.2
Sinais para o
Exemplo 2.1.



Recordemos que a potência de um sinal é o quadrado de seu valor rms. Portanto, o valor rms deste sinal é $1/\sqrt{3}$.

2.2 CLASSIFICAÇÃO DE SINAIS

Existem várias classes de sinais. Aqui, consideraremos apenas os seguintes pares de classes, adequadas ao escopo deste livro:

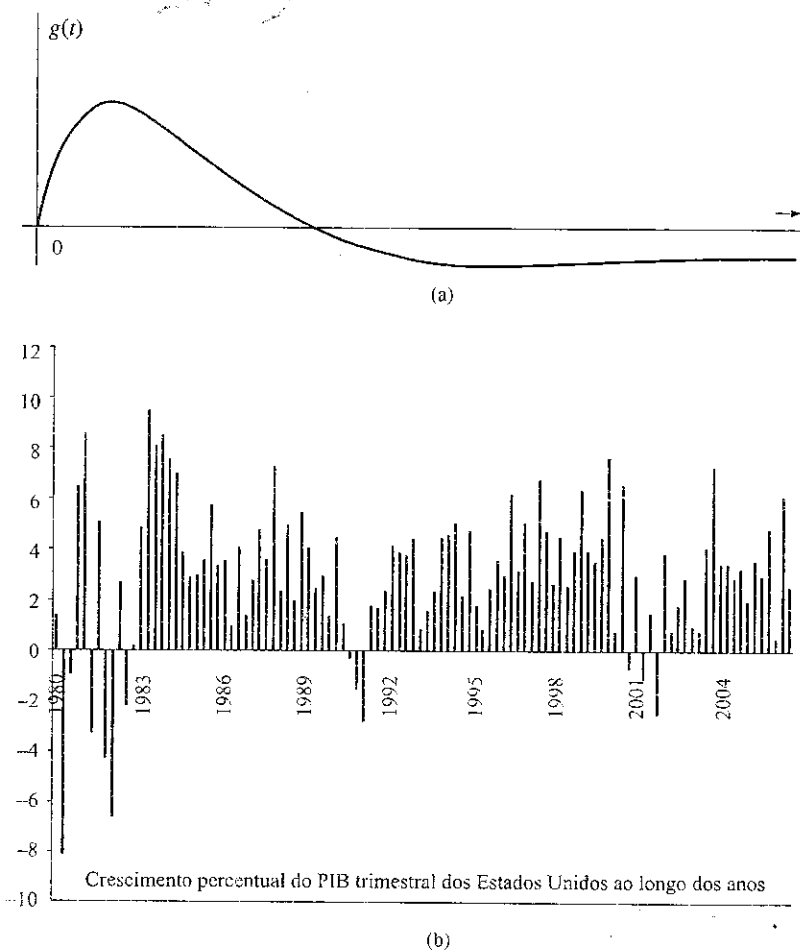
1. Sinais em tempo contínuo e sinais em tempo discreto
2. Sinais analógicos e sinais digitais
3. Sinais periódicos e sinais aperiódicos
4. Sinais de energia e sinais de potência
5. Sinais determinísticos e sinais probabilísticos

2.2.1 Sinais em Tempo Contínuo e Sinais em Tempo Discreto

Um sinal que é especificado em todos os valores do tempo t (Fig. 2.3a) é um sinal em tempo contínuo; um sinal que é especificado apenas em pontos discretos $t = nT$ (Fig. 2.3b) é um sinal em tem-

Figura 2.3

(a) Sinal em tempo contínuo.
(b) Sinal em tempo discreto

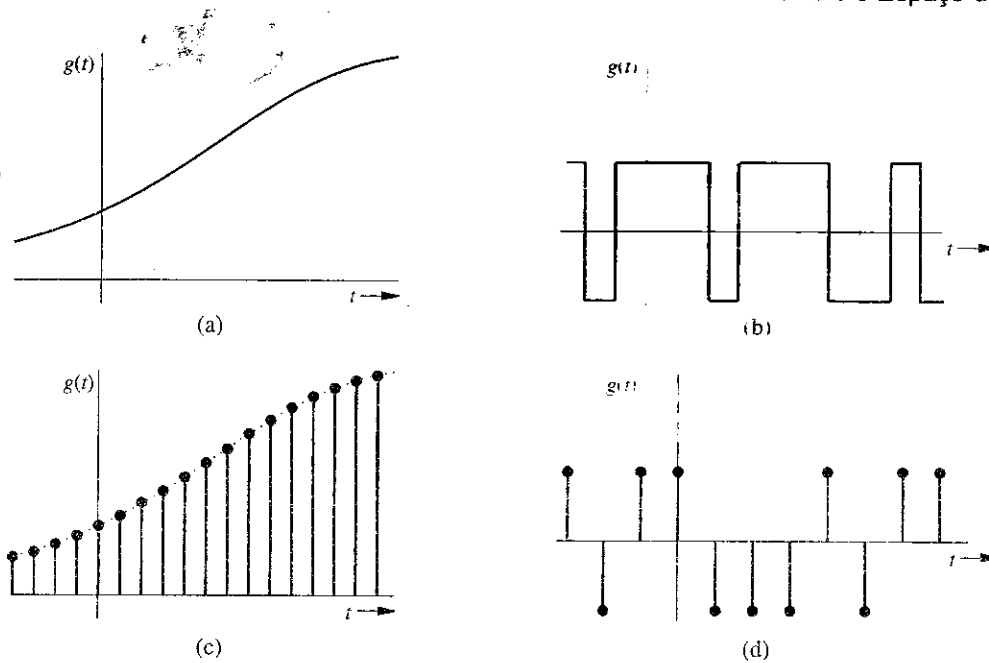


po discreto. Gravações de áudio ou de vídeo são sinais em tempo contínuo, o produto interno bruto (PIB) trimestral, venda mensal de uma empresa e índice médio diário da bolsa de valores são sinais em tempo discreto.

2.2.2 Sinais Analógicos e Sinais Digitais

Não devemos confundir sinais analógicos com sinais em tempo contínuo. Os dois conceitos não são iguais. Isso também se aplica aos conceitos de sinais digitais e sinais em tempo discreto. Um sinal cuja amplitude pode assumir apenas valores em um intervalo contínuo de tempo é um **sinal analógico**, o que significa que a amplitude de um sinal analógico pode assumir um número infinito (incontável) de valores. Um **sinal digital**, por sua vez, é aquele cuja amplitude pode assumir somente um número finito de valores. Sinais associados com um computador digital são digitais porque assumem apenas dois valores (sinais binários). Para que um sinal se qualifique como digital, o número de valores não precisa ser limitado a dois: pode ser um número finito qualquer. Um sinal digital cuja amplitude pode assumir M valores é um **sinal M -ário**, do qual o binário ($M=2$) é um caso especial. Os termos “tempo contínuo” e “tempo discreto” descrevem a natureza do sinal ao longo do eixo do tempo (eixo horizontal). Os termos “analógico” e “digital” descrevem a natureza do eixo de amplitude do sinal (eixo vertical). A Fig. 2.4 mostra exemplos de sinais de vários tipos. Fica claro que analógico não é necessariamente em tempo contínuo, assim como digital não tem que ser em tempo discreto. A Fig. 2.4c mostra um exemplo de um **sinal analógico em tempo discreto**. Um sinal analógico pode ser convertido em um sinal digital (via **conversão analógico-digital, A/D**) por meio de quantização (arredondamento), como explicado no Capítulo 6.

Figura 2.4
Exemplos de sinais: (a) Sinal analógico em tempo contínuo, (b) Sinal digital em tempo contínuo, (c) Sinal analógico em tempo discreto, (d) Sinal digital em tempo discreto.



2.2.3 Sinais Periódicos e Sinais Aperiódicos

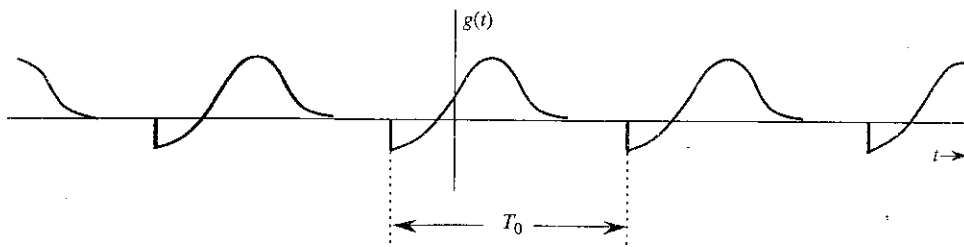
Um sinal $g(t)$ é dito **periódico** se existir uma constante positiva T_0 tal que

$$g(t) = g(t + T_0) \quad \text{para todo } t \quad (2.5)$$

O **menor** valor de T_0 que satisfaz a condição de periodicidade da Eq. (2.5) é o **período** de $g(t)$. O sinal na Fig. 2.2b é um sinal periódico com período 2. Naturalmente, um sinal é **aperiódico** se não for periódico. O sinal na Fig. 2.2a é aperiódico.

Por definição, um sinal periódico $g(t)$ não se altera quando sofre deslocamento ou translação temporal igual a um período. Isso significa que um sinal periódico deve ter início em $t = -\infty$, pois, se tivesse início em algum instante de tempo finito, digamos, $t = 0$, o sinal deslocado $g(t + T_0)$ teria início em $t = -T_0$ e, portanto, $g(t + T_0)$ não seria o mesmo que $g(t)$. Em consequência, um **sinal periódico, por definição, deve ter início em $t = -\infty$ e continuar indefinidamente**, como ilustrado na Fig. 2.5. Vale observar que um sinal periódico não se altera quando é deslocado no tempo por um múltiplo de T_0 . Dessa forma, $g(t)$ pode ser considerado um sinal periódico com período mT_0 , sendo m um inteiro qualquer. No entanto, pela definição, o período é o menor intervalo que satisfaz a condição de periodicidade da Eq. (2.5). Ou seja, o período é T_0 .

Figura 2.5
Sinal periódico de período T_0 .



2.2.4 Sinais de Energia e Sinais de Potência

Um sinal com energia finita é um **sinal de energia**; um sinal com potência finita é um **sinal de potência**. Em outras palavras, um sinal $g(t)$ é um sinal de energia se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty \quad (2.6)$$

De modo similar, um sinal com potência (valor quadrático médio) finita(o) e não nula(o) é um sinal de potência. Em outras palavras, um sinal é de potência se

$$0 < \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 dt < \infty \quad (2.7)$$

Os sinais nas Figs. 2.2a e 2.2b são exemplos de sinais de energia e de potência, respectivamente. Observemos que potência é o valor temporal de energia. Como o valor é tomado em um intervalo de tempo infinitamente longo, um sinal com energia finita tem potência nula, e um sinal com potência finita tem energia infinita. Portanto, um sinal não pode, ao mesmo tempo, ser de energia e de potência. Se for um, não poderá ser o outro. Contudo, alguns sinais com potência infinita não são nem de energia nem de potência. O sinal rampa é um exemplo.

Comentários

Todo sinal observado na vida real é um sinal de energia. Um sinal de potência, por sua vez, é teórico, com uma duração infinita. Caso contrário, sua potência, que é o valor temporal de energia (calculado em um intervalo de tempo infinitamente longo) não tenderá a um limite (não nulo). É óbvio que, na prática, é impossível gerar um verdadeiro sinal de potência, pois este sinal deveria ter duração e energia infinitas.

Por fim, devido à repetição periódica, sinais periódicos para os quais a área sob a curva de $|g(t)|^2$ ao longo de um período é finita são sinais de potência; no entanto, nem todos os sinais de potência são periódicos.

2.2.5 Sinais Determinísticos e Sinais Aleatórios

Um sinal cuja descrição física seja completamente conhecida, de forma matemática ou gráfica, é um **sinal determinístico**. Um sinal que seja conhecido apenas em termos de uma descrição probabilística, como valor médio, valor quadrático médio ou distribuições, e não de sua completa descrição matemática ou gráfica, é um **sinal aleatório**. A maioria dos sinais de ruído encontrados na prática são sinais aleatórios. Todos os sinais de mensagens são sinais aleatórios, pois, como mostraremos posteriormente, para que um sinal transporte informação, deve haver alguma incerteza (aleatoriedade) em relação ao mesmo. O tratamento de sinais aleatórios será discutido em capítulos ulteriores.

2.3 SINAL IMPULSO UNITÁRIO

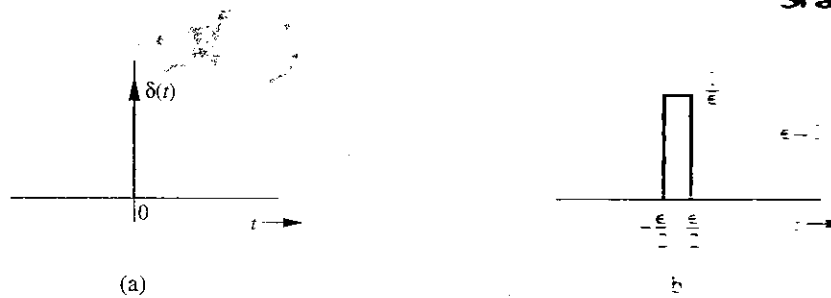
A função impulso unitário $\delta(t)$ é uma das mais importantes funções no estudo de sinais e sistemas. Suas definição e aplicação resultam em conveniências não permitidas em matemática pura.

A função impulso unitário $\delta(t)$ foi definida por P. A. M. Dirac (e, por isso, também é conhecida como função “delta de Dirac”) como

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0 \quad (2.8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.9)$$

Figura 2.6
Um impulso
unitário e sua
aproximação.



Podemos visualizar um impulso como um pulso retangular alto e estreito de área unitária, como mostrado na Fig. 2.6. A largura desse pulso retangular é um valor muito pequeno ϵ ; no limite $\epsilon \rightarrow 0$, sua altura tem um valor muito grande $1/\epsilon$. O impulso unitário pode, portanto, ser considerado um pulso retangular cuja largura se torna infinitamente pequena, cuja altura se torna infinitamente grande e uma área total que permanece constante e igual à unidade.* Assim, $\delta(t) = 0$ para todos os valores de t , exceto $t = 0$, onde, formalmente, a função não é definida. Por essa razão, um impulso unitário é representado de forma gráfica por uma seta, como na Fig. 2.6a.

Multipliação de uma Função por um Impulso

Consideremos, agora, o que ocorre quando multiplicamos o impulso unitário $\delta(t)$ por uma função $\phi(t)$, contínua em $t = 0$. Como o impulso existe apenas em $t = 0$ e o valor de $\phi(t)$ em $t = 0$ é $\phi(0)$, obtemos

$$\phi(t)\delta(t) = \phi(0)\delta(t) \quad (2.10a)$$

De modo similar, se $\phi(t)$ for multiplicada por um impulso $\delta(t - T)$ (um impulso localizado em $t = T$), obtemos

$$\phi(t)\delta(t - T) = \phi(T)\delta(t - T) \quad (2.10b)$$

desde que $\phi(t)$ seja definida em $t = T$.

Propriedade de Amostragem da Função Impulso Unitário

Da Eq. (2.10), temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t - T) dt = \phi(T) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - T) dt = \phi(T) \quad (2.11a)$$

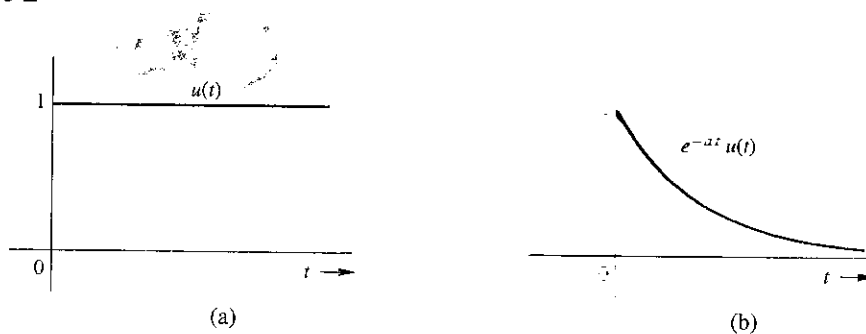
desde que $\phi(t)$ seja contínua em $t = T$. Esse resultado significa que a área sob a curva do produto de uma função por um impulso $\delta(t)$ é igual ao valor da função no instante de tempo em que o impulso está localizado. Essa importante e útil propriedade é conhecida como **propriedade de amostragem** (ou peneiramento) do impulso unitário.

Dependendo do valor de T e dos limites de integração, a função impulso pode ou não estar no intervalo de integração. Assim, temos

$$\int_a^b \phi(t)\delta(t - T) dt = \phi(T) \int_a^b \delta(t - T) dt = \begin{cases} \phi(T) & a \leq T < b \\ 0 & T < a \leq b, \text{ ou } T \geq b > a \end{cases} \quad (2.11b)$$

*A função impulso também pode ser aproximada por outros pulsos, como um triângulo positivo, pulso exponencial ou pulso gaussiano.

Figura 2.7
(a) Função degrau unitário $u(t)$. (b) Exponencial causal $e^{-at}u(t)$.



Função Degrau Unitário $u(t)$

Outra função útil e familiar é a função **degrau unitário** $u(t)$, encontrada com frequência na análise de circuitos e definida na Fig. 2.7a como:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Se desejarmos que um sinal tenha início em $t = 0$ (de modo que tenha valor nulo para $t < 0$), basta que o multipliquemos por $u(t)$. Um sinal que começa após $t = 0$ é denominado **sinal causal**. Em outras palavras, $g(t)$ é um sinal causal se

$$g(t) = 0 \quad t < 0$$

O sinal e^{-at} representa uma exponencial que tem início em $t = -\infty$. Se desejarmos que este sinal comece em $t = 0$ (forma causal), podemos descrevê-lo como $e^{-at}u(t)$ (Fig. 2.7b). Da Fig. 2.6b, observamos que, de $-\infty$ a t , a área sob a curva da forma aproximada de $\delta(t)$ é zero se $t < 0$ e igual à unidade se $t \geq 0$. Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau &= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \\ &= u(t) \end{aligned} \quad (2.13a)$$

Deste resultado, obtemos

$$\frac{du}{dt} = \delta(t) \quad (2.13b)$$

2.4 ANALOGIA ENTRE SINAIS E VETORES

Existe uma forte conexão entre sinais e vetores. Sinais definidos em apenas um número finito (digamos, N) de instantes de tempo podem ser escritos como vetores (de dimensão N). Assim, consideremos um sinal $g(t)$ definido em um intervalo fechado $[a, b]$. Tomemos N pontos uniformemente espaçados no intervalo $[a, b]$, tais que

$$t_1 = a, \quad t_2 = a + \epsilon, \quad t_3 = a + 2\epsilon, \quad t_N = a + (N-1)\epsilon = b, \quad \epsilon = \frac{b-a}{N-1}$$

Podemos, então, escrever um sinal vetorial \mathbf{g} como um vetor de dimensão N

$$\mathbf{g} = [g(t_1) \quad g(t_2) \quad \cdots \quad g(t_N)]$$

À medida que o número N de instantes de tempo aumenta, a dimensão do sinal vetorial amostrado \mathbf{g} aumentará. Se $N \rightarrow \infty$, os valores do sinal formarão um vetor \mathbf{g} de dimensão infinita. Como, neste

caso, $\epsilon \rightarrow 0$, o sinal vetorial g se transformará no sinal em tempo contínuo $g(t)$, definido no intervalo $[a, b]$. Em outras palavras,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} g = g(t) \quad t \in [a, b]$$

Essa relação mostra claramente que sinais em tempo contínuo são generalizações diretas de vetores de dimensão finita. Em consequência, definições e operações básicas em um espaço vetorial também podem ser aplicadas a sinais em tempo contínuo. A seguir, exploraremos esta conexão entre o espaço de vetores de dimensão finita e o espaço de sinais em tempo contínuo.

Denotaremos todos os vetores por letras em negrito. Por exemplo, \mathbf{x} é um certo vetor com magnitude ou comprimento $\|\mathbf{x}\|$. Um vetor tem magnitude e direção. Em um espaço vetorial, podemos definir o produto interno (ou escalar) de dois vetores de valores reais \mathbf{g} e \mathbf{x} como

$$\langle \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{g}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \cos \theta \quad (2.14)$$

em que θ é o ângulo entre os vetores \mathbf{g} e \mathbf{x} . Com essa definição, podemos expressar $\|\mathbf{x}\|$, o comprimento (ou norma) do vetor \mathbf{x} como

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \quad (2.15)$$

Isso define um espaço vetorial normado.

2.4.1 Componente de um Vetor na Direção de Outro Vetor

Consideremos dois vetores \mathbf{g} e \mathbf{x} , como mostrado na Fig. 2.8. Seja $c\mathbf{x}$ a componente de \mathbf{g} na direção de \mathbf{x} (ou ao longo de \mathbf{x}). Do ponto de vista geométrico, a componente de \mathbf{g} ao longo de \mathbf{x} é a projeção de \mathbf{g} sobre \mathbf{x} , obtida traçando, a partir da extremidade de \mathbf{g} , uma linha reta perpendicular ao vetor \mathbf{x} , como ilustrado na Fig. 2.8. Qual é o significado matemático da componente de um vetor na direção de outro vetor? Como visto na Fig. 2.8, o vetor \mathbf{g} pode ser expresso em termos do vetor \mathbf{x} como

$$\mathbf{g} = c\mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (2.16)$$

Contudo, isso não descreve uma única forma de decompor \mathbf{g} em termos de \mathbf{x} e de \mathbf{e} . A Fig. 2.9 mostra duas das outras infinitas possibilidades. Das Fig. 2.9a e b, temos

$$\mathbf{g} = c_1\mathbf{x} + \mathbf{e}_1 = c_2\mathbf{x} + \mathbf{e}_2 \quad (2.17)$$

Figura 2.8
Componente (projeção) de um vetor ao longo de outro vetor.

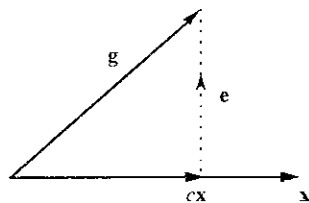
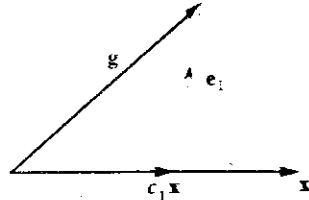
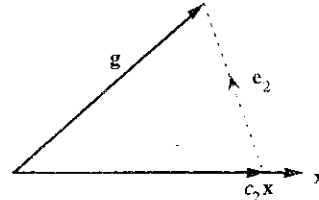


Figura 2.9
Aproximações de um vetor em termos de outro vetor.



(a)



(b)

Cabe a seguinte pergunta: qual é a “melhor” decomposição? O conceito de ótimo depende de nosso objetivo ao decompor \mathbf{g} em duas componentes.

Em cada uma das três representações anteriores, \mathbf{g} é dado em termos de \mathbf{x} e de outro vetor, denominado **vetor de erro**. Se nosso objetivo for aproximar \mathbf{g} por $c\mathbf{x}$ (Fig. 2.8),

$$\mathbf{g} \simeq \hat{\mathbf{g}} = c\mathbf{x} \quad (2.18)$$

o erro nessa aproximação é o vetor (diferença) $\mathbf{e} = \mathbf{g} - c\mathbf{x}$. De modo similar, os erros nas aproximações nas Figs. 2.9a e b são \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 , respectivamente. A aproximação na Fig. 2.8 é única, pois seu vetor de erro é o menor (menor magnitude ou norma). Podemos, agora, definir matematicamente a componente (ou projeção) de um vetor \mathbf{g} na direção de um vetor \mathbf{x} como $c\mathbf{x}$, onde c é escolhido para minimizar a magnitude do vetor de erro $\mathbf{e} = \mathbf{g} - c\mathbf{x}$.

Do ponto de vista geométrico, a magnitude da componente de \mathbf{g} ao longo de \mathbf{x} é $\|\mathbf{g}\|\cos\theta$, que também é igual a $c\|\mathbf{x}\|$. Portanto,

$$c\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{g}\|\cos\theta$$

Com base na definição do produto interno de dois vetores, multiplicando os dois lados por $\|\mathbf{x}\|$, obtemos

$$c\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{g}\|\|\mathbf{x}\|\cos\theta = \langle \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle$$

e

$$c = \frac{\langle \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} \langle \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle \quad (2.19)$$

Da Fig. 2.8, fica aparente que, quando \mathbf{g} e \mathbf{x} são perpendiculares ou ortogonais, \mathbf{g} tem componente nula na direção de \mathbf{x} ; neste caso, $c = 0$. Tendo em vista a Eq. (2.19), podemos definir \mathbf{g} e \mathbf{x} como **ortogonais** se o produto interno dos dois vetores for zero, ou seja, se

$$\langle \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle = 0 \quad (2.20)$$

2.4.2 Decomposição de um Sinal e Componentes de um Sinal

Os conceitos de componentes e ortogonalidade de vetores podem ser diretamente estendidos a **sinais** em tempo contínuo. Consideremos o problema de aproximar um sinal de valores reais $g(t)$ em termos de outro sinal de valores reais $x(t)$, em um intervalo $[t_1, t_2]$:

$$g(t) \simeq cx(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (2.21)$$

O erro $e(t)$ nesta aproximação é

$$e(t) = \begin{cases} g(t) - cx(t) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & \text{para qualquer} \\ & \text{outro valor de } t \end{cases} \quad (2.22)$$

Para a “melhor aproximação”, precisamos minimizar o sinal de erro, ou seja, minimizar a norma do mesmo. A mínima norma de um sinal corresponde à mínima energia E_e no intervalo $[t_1, t_2]$, dada por

$$\begin{aligned} E_e &= \int_{t_1}^{t_2} e^2(t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [g(t) - cx(t)]^2 dt \end{aligned}$$

Observemos que o lado direito é uma integral definida cuja variável de integração é t . Portanto, E_e é uma função do parâmetro c (não de t), e E_e será mínima para alguma escolha do valor de c . Uma condição necessária para a minimização de E_e é

$$\frac{dE_e}{dc} = 0 \quad (2.23)$$

ou

$$\frac{d}{dc} \left[\int_{t_1}^{t_2} [g(t) - cx(t)]^2 dt \right] = 0$$

Expandindo o termo quadrático no integrando, obtemos

$$\frac{d}{dc} \left[\int_{t_1}^{t_2} g^2(t) dt \right] - \frac{d}{dc} \left[2c \int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t) dt \right] + \frac{d}{dc} \left[c^2 \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt \right] = 0$$

portanto,

$$-2 \int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t) dt + 2c \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = 0$$

e

$$c = \frac{\int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt} = \frac{1}{E_x} \int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t) dt \quad (2.24)$$

Em resumo, se um sinal $g(t)$ for aproximado por outro sinal $x(t)$ na forma

$$g(t) \simeq cx(t)$$

o valor ótimo de c que minimiza a energia do sinal de erro nesta aproximação é dado pela Eq. (2.24).

Seguindo o que é feito com vetores, dizemos que o sinal $g(t)$ tem uma componente $cx(t)$, com c dado pela Eq. (2.24). Como no caso de um espaço vetorial, $cx(t)$ é a projeção de $g(t)$ sobre $x(t)$. Mantendo a terminologia de espaço vetorial, se a componente de um sinal $g(t)$ da forma $cx(t)$ for zero (ou seja, se $c = 0$), dizemos que os sinais $g(t)$ e $x(t)$ são ortogonais no intervalo $[t_1, t_2]$. Em outras palavras, para sinais de valores reais, dois sinais $g(t)$ e $x(t)$ são ortogonais quando a contribuição de um sinal ao outro for zero ($c = 0$). Assim, $x(t)$ e $g(t)$ são ortogonais se e somente se

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t) dt = 0 \quad (2.25)$$

Com base nas ilustrações de vetores na Fig. 2.9, podemos dizer que dois sinais são ortogonais se e somente se o produto interno dos dois for zero. Isto indica que a integral da Eq. (2.25) guarda uma relação muito próxima com o conceito de produto interno de vetores.

A definição padrão de produto interno de dois vetores \mathbf{g} e \mathbf{x} de dimensão N

$$\langle \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^N g_i x_i$$

tem forma quase idêntica à integral na Eq. (2.25). Portanto, definimos o produto interno de dois sinais (de valores reais) $g(t)$ e $x(t)$, ambos especificados no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, como

$$\langle g(t), x(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t) dt \quad (2.26)$$

Recordemos da álgebra linear que o quadrado do comprimento de um vetor, $\|\mathbf{x}\|^2$, é igual a $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$. Com esse conceito em mente e prosseguindo com a analogia com análise vetorial, definimos a norma de um sinal $g(t)$ como

$$\|g(t)\| = \sqrt{\langle g(t), g(t) \rangle} \quad (2.27)$$

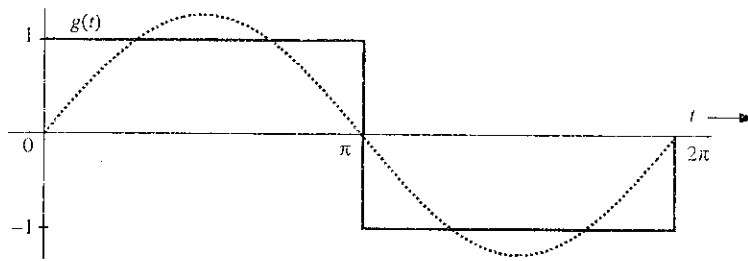
que é a raiz quadrada da energia do sinal no dado intervalo de tempo. Fica claro que a norma de um sinal é análoga ao comprimento de um vetor de dimensão finita. De modo mais geral, sinais podem não ser meramente definidos em um segmento contínuo de tempo $[t_1, t_2]$.*

Exemplo 2.2 Para o sinal quadrado $g(t)$ mostrado na Fig. 2.10, determinemos a componente em $g(t)$ da forma de $\sin t$. Em outras palavras, aproximemos $g(t)$ em termos de $\sin t$.

$$g(t) \simeq c \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

de modo que a energia do sinal seja mínima.

Figura 2.10
Aproximação
do sinal
quadrado em
termos de uma
única senoide.



Neste caso,

$$x(t) = \sin t \quad \text{e} \quad E_x = \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = \pi$$

Da Eq. (2.24), obtemos

$$c = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \sin t dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin t dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin t) dt \right] = \frac{4}{\pi} \quad (2.29)$$

Portanto,

$$g(t) \simeq \frac{4}{\pi} \sin t \quad (2.30)$$

representa a melhor aproximação de $g(t)$ pela função $\sin t$, que minimiza a energia do sinal de erro. Essa componente senoidal de $g(t)$ é mostrada hachurada na Fig. 2.10. Como em um espaço vetorial, dizemos que a função quadrada $g(t)$ ilustrada na Fig. 2.10 tem uma componente de sinal $\sin t$ com magnitude $4/\pi$.

2.4.3 Espaço Complexo de Sinais e Ortogonalidade

Até aqui, restringimos a atenção a funções de valores reais de t . Para estender os resultados a funções de valores complexos de t , consideremos, mais uma vez, o problema de aproximar a função $g(t)$ por uma função $x(t)$, em um intervalo $(t_1 \leq t \leq t_2)$

$$g(t) \simeq cx(t) \quad (2.31)$$

*De fato, o espaço de sinais em consideração pode consistir em um conjunto de intervalos de tempo representado simplesmente por Θ . No caso desses espaços de sinais mais genéricos, o produto interno é definido como uma integral em todo o domínio temporal Θ . Para sinais de valores complexos, o produto interno é modificado para

$$\langle g(t), x(t) \rangle = \int_{\Theta} g(t)x^*(t) dt \quad (2.28)$$

Dada a definição de produto interno, a norma do sinal $\|g(t)\| = \sqrt{\langle g(t), g(t) \rangle}$ e o espaço de sinais podem ser definidos para qualquer sinal no domínio do tempo.

em que $g(t)$ e $x(t)$ são funções de valores complexos de t . Em geral, tanto o coeficiente c como o sinal de erro

$$e(t) = g(t) - cx(t) \quad (2.32)$$

são complexos. Recordemos que a energia E_x do sinal complexo $x(t)$ no intervalo $[t_1, t_2]$ é

$$E_x = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

Para a melhor aproximação, devemos escolher o valor de c que minimiza E_e , a energia do sinal de erro $e(t)$, dada por

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} |g(t) - cx(t)|^2 dt \quad (2.33)$$

Recordemos, também, que

$$|u + v|^2 = (u + v)(u^* + v^*) = |u|^2 + |v|^2 + u^*v + uv^* \quad (2.34)$$

Usando esse resultado, podemos, após alguns cálculos, expressar a integral E_e na Eq. (2.33) como

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} |g(t)|^2 dt - \left| \frac{1}{\sqrt{E_x}} \int_{t_1}^{t_2} g(t)x^*(t) dt \right|^2 + \left| c\sqrt{E_x} - \frac{1}{\sqrt{E_x}} \int_{t_1}^{t_2} g(t)x^*(t) dt \right|^2$$

Já que os primeiros dois termos no lado direito independem de c , fica claro que E_e é minimizada com a escolha do valor de c que anula o terceiro termo. Isso leva ao coeficiente ótimo

$$c = \frac{1}{E_x} \int_{t_1}^{t_2} g(t)x^*(t) dt \quad (2.35)$$

Com esse resultado, devemos redefinir ortogonalidade para o caso complexo, o que é feito da seguinte forma: funções (sinais) de valores complexos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são ortogonais em um intervalo $(t_1 \leq t \leq t_2)$ se

$$\int_{t_1}^{t_2} x_1(t)x_2^*(t) dt = 0 \quad \text{ou} \quad \int_{t_1}^{t_2} x_1^*(t)x_2(t) dt = 0 \quad (2.36)$$

Na verdade, basta qualquer uma das igualdades. Essa é uma definição geral de ortogonalidade, que se reduz à Eq. (2.25) quando as funções têm valores reais.

Do mesmo modo, a definição de produto interno para sinais de valores complexos em um domínio temporal Θ pode ser modificada como:

$$\langle g(t), x(t) \rangle = \int_{t \in \Theta} g(t)x^*(t) dt \quad (2.37)$$

Em consequência, a norma de um sinal $g(t)$ fica dada por

$$\|g(t)\| = \left[\int_{t \in \Theta} |g(t)|^2 dt \right]^{1/2} \quad (2.38)$$

2.4.4 Energia da Soma de Sinais Ortogonais

Sabemos que o **quadrado do comprimento geométrico** (ou magnitude) da soma de dois vetores ortogonais é **igual à soma dos quadrados** das magnitudes dos vetores. Portanto, se os vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} forem ortogonais e se $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, então,

$$\|\mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

Um resultado semelhante se aplica a sinais. A energia da soma de dois sinais ortogonais é igual à soma das energias dos dois sinais. Assim, se os sinais $x(t)$ e $y(t)$ forem ortogonais em um intervalo $[t_1, t_2]$ e se $z(t) = x(t) + y(t)$, então

$$E_z = E_x + E_y \quad (2.39)$$

A seguir, provaremos esse resultado para sinais de valores complexos, dos quais aqueles com valores reais são um caso especial. Da Eq. (2.34), temos

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} |x(t) + y(t)|^2 dt &= \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} x(t)y^*(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} x^*(t)y(t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|^2 dt \end{aligned} \quad (2.40)$$

A última igualdade resulta da ortogonalidade dos dois sinais, que anula as duas integrais dos produtos cruzados $x(t)y^*(t)$ e $x^*(t)y(t)$. Tal resultado pode ser estendido à soma de um número qualquer de sinais mutuamente ortogonais.

2.5 CORRELAÇÃO DE SINAIS

Com as definições do produto interno e da norma de sinais, preparamos o caminho para a comparação de sinais. Mais uma vez, podemos tirar proveito da analogia com os familiares espaços vetoriais. Dois vetores \mathbf{g} e \mathbf{x} são similares se \mathbf{g} tiver uma grande componente ao longo de \mathbf{x} . Em outras palavras, se c na Eq. (2.19) for grande, os vetores \mathbf{g} e \mathbf{x} serão similares. Podemos considerar c como uma medida quantitativa da similaridade entre \mathbf{g} e \mathbf{x} . Contudo, essa medida seria defeituosa, pois varia com as normas (ou comprimentos) de \mathbf{g} e \mathbf{x} . Para ser adequada, a medida da similaridade entre \mathbf{g} e \mathbf{x} deveria depender dos comprimentos de \mathbf{g} e \mathbf{x} . Se, por exemplo, dobrarmos o comprimento de \mathbf{g} , a medida da similaridade entre \mathbf{g} e \mathbf{x} não deveria se alterar. A Eq. (2.19) nos mostra que, se dobrarmos \mathbf{g} , o valor de c também dobra (se dobrarmos \mathbf{x} , o valor de c será dividido por dois). Fica claro que a medida de similaridade com base na correlação de sinais é falha. A similaridade entre dois vetores é indicada pelo ângulo θ entre eles. Quanto menor o valor de θ , maior a similaridade e vice-versa. A similaridade pode, então, ser adequadamente medida por $\cos \theta$. Maior o valor de $\cos \theta$, maior a similaridade entre os dois vetores. Assim, uma medida apropriada seria $\rho = \cos \theta$, dada por

$$\rho = \cos \theta = \frac{\langle \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{g}\| \|\mathbf{x}\|} \quad (2.41)$$

Podemos verificar prontamente que esta medida independe dos comprimentos de \mathbf{g} e \mathbf{x} . Essa medida de similaridade, ρ , é conhecida como **coeficiente de correlação**. Vale observar que

$$-1 \leq \rho \leq 1 \quad (2.42)$$

A magnitude de ρ , portanto, jamais é maior que a unidade. Se os dois vetores estiverem alinhados, a similaridade é máxima ($\rho = 1$). Dois vetores alinhados em direções opostas têm máxima dissimilaridade ($\rho = -1$). Se os dois vetores forem ortogonais, a similaridade será zero.

Usamos os mesmos argumentos na definição de um índice de similaridade (coeficiente de correlação) para sinais. Por conveniência, consideraremos sinais em todo o eixo do tempo, de $-\infty$ a ∞ . Para definirmos um índice de similaridade que independa das energias (tamanhos) de $g(t)$ e $x(t)$, devemos

normalizar c ; para isso, normalizamos os dois sinais, de modo que tenham energias unitárias. Assim, um adequado índice de similaridade ρ , análogo à Eq. (2.41), é dada por

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{E_g E_x}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)x(t) dt \quad (2.43)$$

Vale ressaltar que a multiplicação de $g(t)$ ou de $x(t)$ por qualquer constante não altera o valor desse índice. Por conseguinte, o mesmo independe dos tamanhos (energias) de $g(t)$ e $x(t)$. Fazendo uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz (provada no Apêndice B),* podemos mostrar que a magnitude ρ jamais é maior que a unidade:

$$-1 \leq \rho \leq 1 \quad (2.44)$$

2.5.1 Funções de Correlação

É conveniente que examinemos a aplicação de correlação à detecção de sinais em um equipamento de radar, onde um pulso é transmitido para detectar um alvo suspeito. A detecção da presença ou ausência do pulso refletido confirma a presença ou ausência do alvo. A medida do atraso temporal entre os pulsos transmitido e recebido (refletido) nos permite determinar a distância ao alvo. Sejam os pulsos transmitido e recebido denotados por $g(t)$ e $z(t)$, respectivamente. Se usássemos a Eq. (2.43) diretamente para medir o coeficiente de correlação ρ , obteríamos

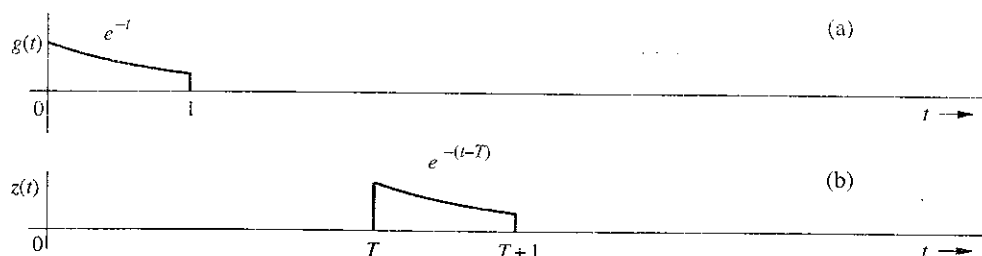
$$\rho = \frac{1}{\sqrt{E_g E_z}} \int_{-\infty}^{\infty} z(t)g^*(t) dt = 0 \quad (2.45)$$

A correlação é zero porque os pulsos são separados (não se sobrepõem no tempo). A integral na Eq. (2.45) será igual a zero mesmo que os pulsos sejam idênticos, mas guardem um deslocamento temporal. Para evitar essa dificuldade, comparamos o pulso recebido $z(t)$ com o pulso transmitido $g(t)$ deslocado de τ . Se, para algum valor de τ , houver uma forte correlação, não apenas detectaremos a presença do pulso, mas também determinaremos o deslocamento temporal de $z(t)$ em relação a $g(t)$. Por isso, em vez da integral no lado direito, usamos a integral modificada $\psi_{gz}(\tau)$, denominada função de correlação cruzada dos dois sinais de valores complexos $g(t)$ e $z(t)$ e definida como

$$\psi_{gz}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)g^*(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} z(t+\tau)g^*(t) dt \quad (2.46)$$

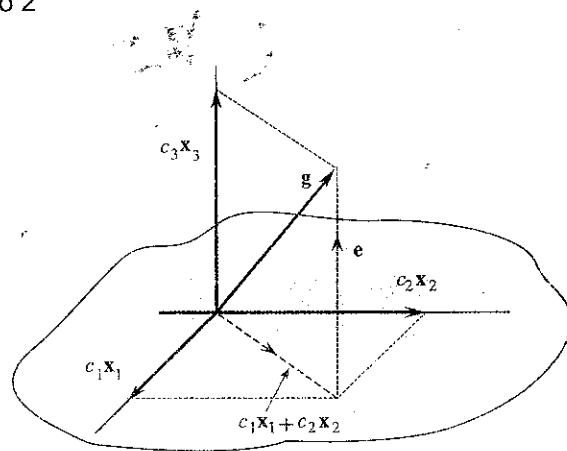
$\psi_{gz}(\tau)$ é, portanto, uma indicação da similaridade (correlação) entre $g(t)$ e $z(t)$ adiantado (deslocado para a esquerda) de τ segundos.

Figura 2.11
Explicação
gráfica da
função de
autocorrelação



*Segundo a desigualdade de Cauchy-Schwarz, para dois sinais de energias reais $g(t)$ e $x(t)$, $\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)x(t) dt\right)^2 \leq E_g E_x$, sendo que a igualdade ocorre se e somente se $x(t) = Kg(t)$, em que K é uma constante arbitrária. Existe uma desigualdade equivalente para sinais de valores complexos.

Figura 2.12
Representação
de um vetor
no espaço
tridimensional.



2.5.2 Função de Autocorrelação

A correlação de um sinal com ele próprio, como ilustrado na Fig. 2.11, é denominada **autocorrelação**. A função de autocorrelação $\psi_g(\tau)$ de um sinal de valores reais $g(t)$ é definida como

$$\psi_g(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t + \tau) dt \quad (2.47)$$

A função de autocorrelação mede a similaridade do sinal $g(t)$ com sua versão deslocada no tempo. No Capítulo 3, mostraremos que a função de autocorrelação fornece valiosas informações espectrais a respeito do sinal.

2.6 CONJUNTO ORTOGONAL DE SINAIS

Nesta seção, mostraremos uma forma de representar um sinal como a soma de um conjunto ortogonal de sinais. Na verdade, os sinais nesse conjunto ortogonal formam uma base para o espaço de sinais em questão. Aqui, mais uma vez, podemos nos beneficiar do entendimento de um problema similar envolvendo vetores. Sabemos que um vetor pode ser representado como a soma de vetores ortogonais, que formam o sistema de coordenadas de um espaço vetorial. Com sinais, o problema é análogo e os resultados são similares aos do problema com vetores. Por isso, façamos uma revisão da representação de vetores.

2.6.1 Espaço Vetorial Ortogonal

Consideremos um espaço vetorial cartesiano multidimensional, representado na Fig. 2.12 por três vetores ortogonais x_1 , x_2 e x_3 , para o caso especial de um espaço tridimensional. Primeiro, procuramos aproximar um vetor tridimensional g em termos de dois vetores ortogonais x_1 e x_2 :

$$\text{O erro } e \text{ nesta aproximação é} \quad g \simeq c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$e = g - (c_1 x_1 + c_2 x_2)$$

ou, o que é equivalente,

$$g = c_1 x_1 + c_2 x_2 + e$$

De acordo com a argumentação geométrica anterior, a Fig. 2.12 deixa claro que o comprimento do vetor de erro e é mínimo quando o mesmo for perpendicular ao plano (x_1, x_2) e quando $c_1 x_1$ e $c_2 x_2$ forem as projeções (componentes) de g sobre x_1 e x_2 , respectivamente. Portanto, as constantes c_1 e c_2 são dadas pela fórmula na Eq. (2.19).

Agora, determinemos a melhor aproximação de \mathbf{g} em termos dos três vetores mutuamente ortogonais \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 e \mathbf{x}_3 :

$$\mathbf{g} \simeq c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + c_3 \mathbf{x}_3 \quad (2.48)$$

A Fig. 2.12 mostra que existe uma única escolha para os valores de c_1 , c_2 e c_3 para a qual a Eq. (2.48) deixa de ser uma aproximação e se torna uma igualdade:

$$\mathbf{g} = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + c_3 \mathbf{x}_3$$

Neste caso, $c_1 \mathbf{x}_1$, $c_2 \mathbf{x}_2$ e $c_3 \mathbf{x}_3$ são as projeções (componentes) de \mathbf{g} sobre \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 e \mathbf{x}_3 , respectivamente. Vale notar que, agora, o erro da aproximação é zero quando \mathbf{g} é aproximado em termos de três vetores mutuamente ortogonais \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 e \mathbf{x}_3 . Isso ocorre porque \mathbf{g} é um vetor tridimensional e os vetores \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 e \mathbf{x}_3 representam um *conjunto completo* de vetores ortogonais no espaço tridimensional. Completeza, aqui, significa que é impossível, nesse espaço, encontrar qualquer outro vetor \mathbf{x}_4 que seja ortogonal a todos os três vetores \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 e \mathbf{x}_3 . Nesse espaço, qualquer vetor pode, portanto, ser representado (com erro zero) em termos desses três vetores. Vetores como esses são conhecidos como vetores de **base** e o conjunto dos vetores, como uma **base ortogonal completa** desse espaço vetorial. Se um conjunto de vetores $\{\mathbf{x}_i\}$ não for completo, o erro da aproximação, na maioria dos casos, não será zero. Por exemplo, no espaço tridimensional que acabamos de considerar, em geral, não é possível representar um vetor \mathbf{g} em termos de apenas dois vetores da base sem erro.

A escolha dos vetores de base não é única. Na verdade, cada conjunto de vetores de base corresponde a uma escolha particular de sistema de coordenadas. Assim, um vetor tridimensional \mathbf{g} pode ser representado de diferentes formas, dependendo do sistema de coordenadas utilizado.

Em resumo, se um conjunto de vetores mutuamente ortogonais $\{\mathbf{x}_i\}$, ou seja, vetores tais que

$$\langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n \rangle = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ |\mathbf{x}_m|^2 & m = n \end{cases}$$

e se esse conjunto for completo, um vetor \mathbf{g} nesse espaço pode ser expresso como

$$\mathbf{g} = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + c_3 \mathbf{x}_3 \quad (2.49)$$

onde as constantes c_i são dadas por

$$c_i = \frac{\langle \mathbf{g}, \mathbf{x}_i \rangle}{\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle} \quad (2.50a)$$

$$= \frac{1}{\|\mathbf{x}_i\|^2} \langle \mathbf{g}, \mathbf{x}_i \rangle \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.50b)$$

2.6.2 Espaço Ortogonal de Sinais

Dando prosseguimento ao problema de aproximação de sinais, usaremos conceitos e resultados da aproximação de vetores. Como antes, definimos ortogonalidade de um conjunto de sinais $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_N(t)$ em um domínio temporal Θ (pode ser um intervalo $[t_1, t_2]$) como

$$\int_{t \in \Theta} x_m(t) x_n^*(t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ E_n & m = n \end{cases} \quad (2.51)$$

Se todos os sinais tiverem energia unitária $E_n = 1$, dizemos que o conjunto é *normalizado* e o denominamos **conjunto ortonormal**. Um conjunto ortogonal sempre pode ser normalizado, bastando dividir

$x_n(t)$ por $\sqrt{E_n}$, para todo n . Consideremos, agora, o problema de aproximar um sinal $g(t)$ em Θ por N sinais mutuamente ortogonais $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$:

$$g(t) \simeq c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_N x_N(t) \quad (2.52a)$$

$$= \sum_{n=1}^N c_n x_n(t) \quad t \in \Theta \quad (2.52b)$$

Pode ser mostrado que E_e , a energia do sinal de erro $e(t)$ nessa aproximação, é minimizada quando escolhemos

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\int_{t \in \Theta} g(t) x_n^*(t) dt}{\int_{t \in \Theta} |x_n(t)|^2 dt} \\ &= \frac{1}{E_n} \int_{t \in \Theta} g(t) x_n^*(t) dt \quad n = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.53)$$

Além disso, se o conjunto ortogonal for **completo**, a energia do erro $E_e \rightarrow 0$ e a aproximação em (2.52) deixa de ser uma aproximação, tornando-se uma igualdade. Mais precisamente, definamos o erro da aproximação de N termos por

$$e_N(t) = g(t) - c_1 x_1(t) - c_2 x_2(t) - \dots - c_N x_N(t) = g(t) - \sum_{n=1}^N c_n x_n(t) \quad t \in \Theta \quad (2.54)$$

Se a base ortogonal for **completa**, a energia do sinal de erro converge a zero, ou seja

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{t \in \Theta} |e_N(t)|^2 dt = 0 \quad (2.55)$$

Em termos estritamente matemáticos, no entanto, um sinal pode não convergir a zero mesmo que sua energia convirja a zero. Isso ocorre porque um sinal pode ser não nulo em alguns pontos isolados. Entretanto, na prática, sinais são contínuos para todo t e a igualdade (2.55) afirma que o sinal de erro tem energia zero quando $N \rightarrow \infty$. Assim, para $N \rightarrow \infty$, a igualdade (2.55) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} g(t) &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t) + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n(t) \quad t \in \Theta \end{aligned} \quad (2.56)$$

em que os coeficientes c_n são dados pela Eq. (2.53). Como a energia do sinal de erro se aproxima de zero, a energia de $g(t)$ fica igual à soma das energias de suas componentes ortogonais.

A série no lado direito da Eq. (2.53) é denominada **série de Fourier generalizada** de $g(t)$ em termos do conjunto $\{x_n(t)\}$. Quando o conjunto $\{x_n(t)\}$ é tal que a energia do erro $E_N \rightarrow 0$ à medida que $N \rightarrow \infty$, para qualquer membro de alguma classe particular de sinais, dizemos que o conjunto $\{x_n(t)\}$ é completo em $\{t: \Theta\}$ para aquela classe de $g(t)$, e o conjunto $\{x_n(t)\}$ é denominado um conjunto de **funções de base** ou **sinais de base**. Em particular, a classe de sinais de energia (finita) em Θ é denotado por $L^2\{\Theta\}$. De aqui em diante, consideraremos apenas a classe de sinais de energia, a menos que especifiquemos de modo diferente.

2.6.3 Teorema de Parseval

Recordemos que a energia da soma de sinais ortogonais é igual à soma das energias dos mesmos. Portanto, a energia do lado direito da Eq. (2.56) é a soma das energias das componentes ortogonais.

*Conhecidos como conjunto de medida zero.

A energia de uma componente $c_n x_n(t)$ é $c_n^2 E_n$. Igualando as energias nos dois lados da Eq. (2.56), obtemos

$$E_g = c_1^2 E_1 + c_2^2 E_2 + c_3^2 E_3 + \dots$$

$$= \sum_n c_n^2 E_n \quad (2.57)$$

Esse importante resultado é conhecido como **teorema de Parseval**. Recordemos que a energia de um sinal (área sob a curva do quadrado do valor do sinal) é análoga ao quadrado do comprimento de um vetor, segundo a analogia vetor-sinal. Em um espaço vetorial, sabemos que o quadrado do comprimento de um vetor é igual à soma dos quadrados dos comprimentos de suas componentes ortogonais. O teorema de Parseval [Eq. (2.57)] é a afirmação desse fato para o caso de sinais.

2.7 SÉRIE DE FOURIER EXPONENCIAL

Observamos anteriormente que a representação ortogonal de sinais NÃO é única. Embora a tradicional série de Fourier trigonométrica permita uma boa representação de todos os sinais periódicos, nesta seção apresentamos uma representação ortogonal de sinais periódicos **equivalente**, mas que tem forma mais simples.

Primeiro, observemos que o conjunto de exponenciais $e^{jn\omega_0 t}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) é ortogonal em um intervalo de duração $T_0 = 2\pi/\omega_0$, ou seja,

$$\int_{T_0} e^{jm\omega_0 t} (e^{jn\omega_0 t})^* dt = \int_{T_0} e^{j(m-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T_0 & m = n \end{cases} \quad (2.58)$$

Além disso, esse conjunto é completo.^{1,2} Das Eqs. (2.53) e (2.56), um sinal $g(t)$ pode ser expresso em um intervalo de duração T_0 segundos por uma série de Fourier exponencial

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn2\pi f_0 t} \quad (2.59)$$

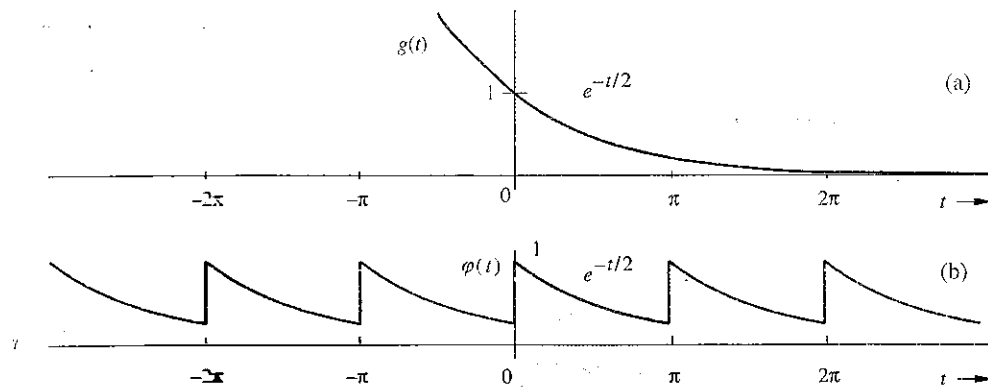
em que [ver Eq. (2.53)]

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} g(t) e^{-jn2\pi f_0 t} dt \quad (2.60)$$

A série de Fourier exponencial na Eq. (2.59) consiste em componentes da forma $e^{jn2\pi f_0 t}$, com n variando de $-\infty$ a ∞ , e é periódica, com período T_0 .

Exemplo 2.3 Determinemos a série de Fourier exponencial para o sinal na Fig. 2.13b.

Figura 2.13
Um sinal
periódico.



Neste caso, $T_0 = \pi$; $2\pi f_0 = 2\pi/T_0 = 2$ e

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2nt}$$

em que

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \varphi(t) e^{-j2nt} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t/2} e^{-j2nt} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-(\frac{1}{2} + j2n)t} dt \\ &= \frac{-1}{\pi \left(\frac{1}{2} + j2n\right)} e^{-(\frac{1}{2} + j2n)t} \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{0,504}{1 + j4n} \end{aligned} \quad (2.61)$$

e

$$\varphi(t) = 0,504 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + j4n} e^{j2nt} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} &= 0,504 \left[1 + \frac{1}{1 + j4} e^{j2t} + \frac{1}{1 + j8} e^{j4t} + \frac{1}{1 + j12} e^{j6t} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1 - j4} e^{-j2t} + \frac{1}{1 - j8} e^{-j4t} + \frac{1}{1 - j12} e^{-j6t} + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.62')$$

Vale observar que os coeficientes D_n são complexos. Além disso, D_n e D_{-n} são complexos conjugados, como esperado.

Espectro de Fourier Exponencial

No espectro exponencial, representamos graficamente os valores dos coeficientes D_n em função de n . Contudo, como em geral D_n é complexo, necessitamos de dois gráficos: um para a parte real e outro para a parte imaginária de D_n , ou um para a amplitude (magnitude) e outro para a fase de D_n . Preferimos a última opção, devido à conexão com amplitudes e fases das componentes correspondentes da série de Fourier trigonométrica. Portanto, desenhamos gráficos de $|D_n|$ em função de ω e de $\angle D_n$ em função de ω . Isso requer que os coeficientes D_n sejam expressos na forma polar $|D_n| e^{j\angle D_n}$.

Para um sinal periódico, os coeficientes D_n e D_{-n} são complexos conjugados,

$$|D_n| = |D_{-n}| \quad (2.63a)$$

$$\angle D_n = \theta_n \quad \text{e} \quad \angle D_{-n} = -\theta_n \quad (2.63b)$$

Logo,

$$D_n = |D_n| e^{j\theta_n} \quad \text{e} \quad D_{-n} = |D_n| e^{-j\theta_n} \quad (2.64)$$

Notemos que $|D_n|$ representa a amplitude (magnitude) e $\angle D_n$, a fase de cada componente. Pela Eq. (2.63), quando o sinal $g(t)$ tiver valores reais, o espectro de amplitude ($|D_n|$ versus f) será uma função par da frequência e o espectro de fase (ou angular, $\angle D_n$ versus f), uma função ímpar de f .

Para a série no Exemplo 2.3,

$$D_0 = 0,504$$

$$D_1 = \frac{0,504}{1+j4} = 0,122e^{-j75,96^\circ} \Rightarrow |D_1| = 0,122, \angle D_1 = -75,96^\circ$$

$$D_{-1} = \frac{0,504}{1-j4} = 0,122e^{j75,96^\circ} \Rightarrow |D_{-1}| = 0,122, \angle D_{-1} = 75,96^\circ$$

e

$$D_2 = \frac{0,504}{1+j8} = 0,0625e^{-j82,87^\circ} \Rightarrow |D_2| = 0,0625, \angle D_2 = -82,87^\circ$$

$$D_{-2} = \frac{0,504}{1-j8} = 0,0625e^{j82,87^\circ} \Rightarrow |D_{-2}| = 0,0625, \angle D_{-2} = 82,87^\circ$$

e assim por diante. Vale notar que D_n e D_{-n} são complexos conjugados, como esperado [ver Eq. (2.63b)].

A Fig. 2.14 mostra os espectros de frequência (amplitude e fase) da série de Fourier exponencial para o sinal periódico $\varphi(t)$ na Fig. 2.13b.

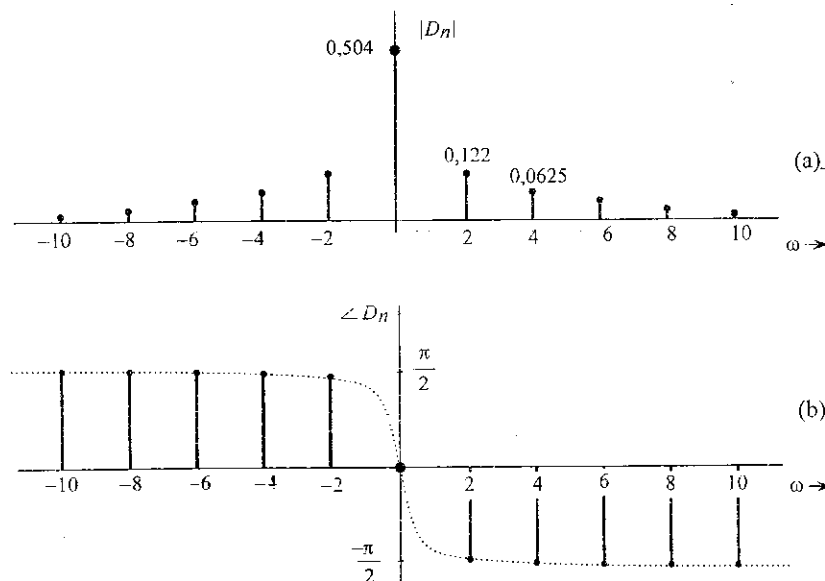
Podemos observar algumas características interessantes nesses espectros. Primeira, o espectro existe para valores positivos e negativos de f (frequência). Segunda, o espectro de amplitude é uma função par de f e o espectro de fase, uma função ímpar de f . As Eqs. (2.63) mostram as características de simetria da amplitude e da fase de D_n .

O que Significa Frequência Negativa?

A existência do espectro em frequências negativas é, de alguma forma, algo intrigante para algumas pessoas, pois a frequência (número de repetições por segundo) é, por definição, uma grandeza positiva. Como devemos interpretar uma frequência negativa f_0 ? Para expressar uma senoide de uma frequência negativa $-f_0$, podemos subtrair $\omega_0 = 2\pi f_0$ e usar uma identidade trigonométrica, como

$$\cos(-\omega_0 t + \theta) = \cos(\omega_0 t - \theta)$$

Figura 2.14
Espectro
de Fourier
exponencial
para o sinal
na Fig. 2.13a.



Isso mostra claramente que a frequência angular de uma senoide $\cos(-\omega_0 t + \theta)$ é $|\omega_0|$, que é uma grandeza positiva. A afirmação, baseada no bom senso, de que uma frequência deve ser positiva advém da tradicional noção de que frequência está associada a uma senoide de valores reais (como seno ou cosseno). Na verdade, o conceito de frequência associado a senoides de valores reais descreve somente a taxa de variação senoidal, sem ater-se ao sentido da variação. Isso ocorre porque sinais senoidais de valores reais NÃO contêm informação a respeito do sentido de sua variação.

O conceito de frequência negativa faz sentido **apenas** quando consideramos senoides de valores complexos, para as quais a taxa e o *sentido* da variação têm significado. Devemos observar que

$$e^{\pm j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t \pm j \sin \omega_0 t$$

Essa relação deixa claro que uma frequência ω positiva ou negativa leva a variações periódicas com a mesma taxa. Contudo, os resultantes sinais de valores complexos NÃO são iguais. Dado que $|e^{\pm j\omega_0 t}| = 1$, tanto $e^{+j\omega_0 t}$ como $e^{-j\omega_0 t}$ são variáveis complexas de comprimento unitário, que podem ser representadas no plano complexo. Na Fig. 2.15, mostramos as duas senoides exponenciais como grandezas complexas de comprimento unitário que variam no tempo t . A taxa de rotação para as duas exponenciais $e^{\pm j\omega_0 t}$ é $|\omega_0|$. Fica claro que, para frequências positivas, a senoide exponencial gira no sentido anti-horário ou trigonométrico; para frequências negativas, a senoide exponencial gira no sentido horário. Isso ilustra o real significado de frequências negativas.

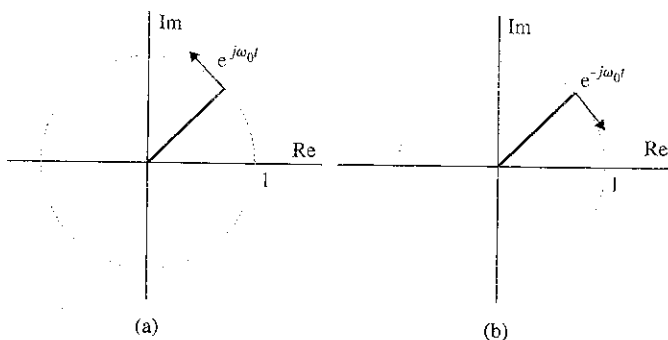
Existe uma boa analogia entre frequência positiva/negativa e velocidade positiva/negativa. Assim como pessoas relutam em usar velocidade *negativa* para descrever o movimento de um objeto, também relutam em aceitar o conceito de frequência “negativa”. Contudo, uma vez que entendamos que velocidade negativa simplesmente se refere tanto ao sentido negativo do deslocamento como a velocidade de um objeto em movimento, velocidade negativa passa a fazer sentido. De modo similar, frequência negativa NÃO descreve a taxa de variação periódica de um seno ou cosseno, mas, sim, o sentido e a taxa de rotação de uma exponencial senoidal de comprimento unitário.

Outra maneira de ver essa situação é dizer que os *espectros exponenciais* são uma representação gráfica dos coeficientes D_n como uma função de f . A existência do espectro em $f = -nf_0$ simplesmente indica que uma componente exponencial $e^{-jn2\pi f_0 t}$ existe na série. Sabemos, pela identidade de Euler

$$\cos(\omega t + \theta) = \frac{e^{j\theta}}{2} \exp(j\omega t) + \frac{e^{-j\theta}}{2} \exp(-j\omega t)$$

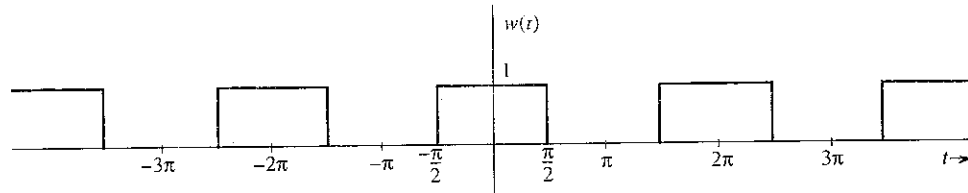
que uma senoide de frequência $n\omega_0$ pode ser expressa em termos de um par de exponenciais $e^{jn\omega_0 t}$ e $e^{-jn\omega_0 t}$. O fato de seno e cosseno consistirem em componentes senoidais exponenciais de frequências positiva e negativa indica que NÃO é possível descrever o *sentido* de suas variações periódicas. Na verdade, as funções seno e cosseno da frequência ω_0 consistem em duas senoides exponenciais de mesma amplitude e frequências $\pm \omega_0$. Em consequência, a frequência de um seno ou cosseno é o valor absoluto das duas componentes de frequência e denota apenas a taxa das variações senoidais.

Figura 2.15
Variável complexa de comprimento unitário e frequência positiva (rotação no sentido anti-horário) comparada com variável complexa de comprimento unitário e frequência negativa (rotação no sentido horário).



Exemplo 2.4 Determinemos a série de Fourier exponencial da onda quadrada periódica mostrada na Fig. 2.16.

Figura 2.16
Sinal de pulso
quadrado
periódico.



$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn2\pi f_0 t}$$

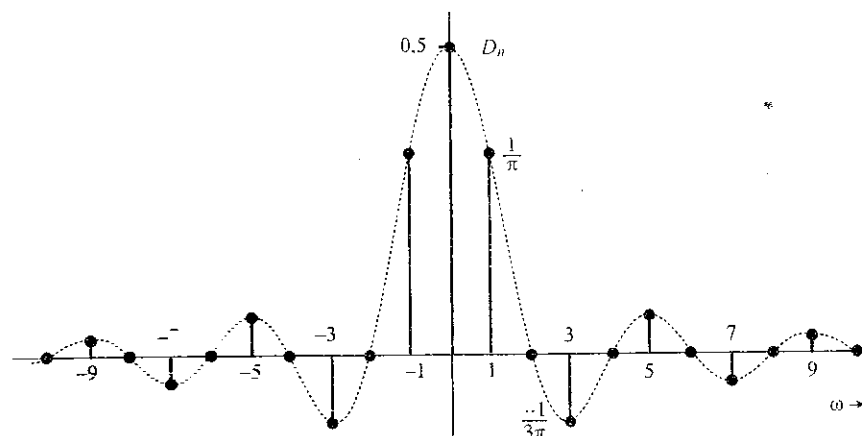
onde

$$D_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} w(t) dt = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} w(t) e^{-jn2\pi f_0 t} dt, \quad n \neq 0 \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{T_0/4} e^{-jn2\pi f_0 t} dt \\ &= \frac{1}{-jn2\pi f_0 T_0} \left[e^{-jn2\pi f_0 T_0/4} - e^{jn2\pi f_0 T_0/4} \right] \\ &= \frac{2}{n2\pi f_0 T_0} \operatorname{sen}\left(\frac{n2\pi f_0 T_0}{4}\right) = \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Neste caso, D_n é real. Consequentemente, não precisamos do gráfico de fase ou ângulo e, em vez de representarmos o espectro de amplitude ($|D_n|$ versus f), podemos traçar apenas o gráfico de D_n versus f , como na Fig. 2.17.

Figura 2.17
Espectro
de Fourier
exponencial
do sinal de
pulso quadrado
periódico.



Exemplo 2.5 Determinemos a série de Fourier exponencial para o trem de pulsos $\delta_{T_0}(t)$ mostrado na Fig. 2.18a, e tracemos o gráfico dos correspondentes espectros.

A série de Fourier exponencial é dada por

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn2\pi f_0 t} \quad f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (2.65)$$

com

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \delta_{T_0}(t) e^{-jn2\pi f_0 t} dt$$

Escolhendo o intervalo de integração $\left(-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right)$ e observando que, neste intervalo, $\delta_{T_0}(t) = \delta(t)$, obtemos

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jn2\pi f_0 t} dt$$

Nessa integral, o impulso está localizado em $t = 0$. Da propriedade de amostragem da função impulso, a integral no lado direito é o valor de $e^{-jn2\pi f_0 t}$ em $t = 0$ (localização do impulso). Logo,

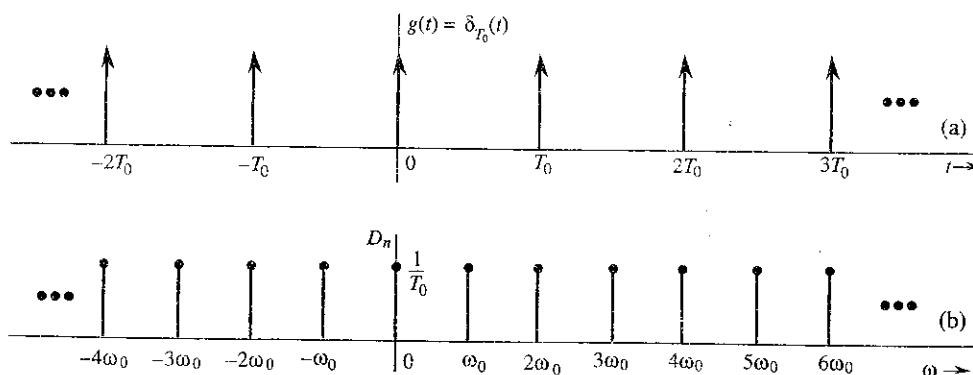
$$D_n = \frac{1}{T_0} \quad (2.66)$$

e

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn2\pi f_0 t} \quad f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (2.67)$$

As Eqs. (2.67) mostram que o espectro exponencial é uniforme ($D_n = 1/T_0$) para todas as frequências, como ilustrado na Fig. 2.18b. Como o espectro é real, basta que tracemos o gráfico da amplitude. Todas as fases são iguais a zero.

Figura 2.18
Trem de impulsos e correspondente espectro de Fourier exponencial.



Teorema de Parseval na Série de Fourier

Um sinal periódico $g(t)$ é um sinal de potência, e cada termo em sua série de Fourier também é um sinal de potência. A potência P_g de $g(t)$ é igual à potência de sua série de Fourier. Como a série de Fourier consiste em termos que são mutuamente ortogonais em um período, a potência da série de Fourier é igual à soma das potências das componentes de Fourier. Esse resultado advém do teorema de Parseval.

Portanto, para a série de Fourier exponencial

$$g(t) = D_0 + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

a potência é dada por (veja o Exercício 2.1-7)

$$P_g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2 \quad (2.68a)$$

Para um sinal $g(t)$ de valores reais, $|D_{-n}| = |D_n|$. Logo,

$$P_g = D_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |D_n|^2 \quad (2.68b)$$

Comentário: O teorema de Parseval admite diferentes formas, como as das Eq. (2.57) e Eq. (2.68a). No próximo capítulo, apresentaremos mais uma forma para o caso de sinais periódicos. Embora essas várias representações do teorema pareçam distintas, todas afirmam o mesmo princípio: o quadrado do comprimento de um vetor é igual à soma dos quadrados dos comprimentos de suas componentes ortogonais. A primeira forma [Eq. (2.57)] se aplica a sinais de energia; a segunda [Eq. (2.68a)], a sinais periódicos representados pela série de Fourier exponencial.

Alguns Exemplos Adicionais de Conjuntos Ortogonais de Sinais

A representação de um sinal pela série de Fourier mostra que sinais são, em todos os sentidos, vetores. Assim como há diversas maneiras de representar um vetor como a soma de componentes, dependendo da escolha do sistema de coordenadas, também existem numerosas formas de representar um sinal como a soma de componentes. Assim como um sistema de coordenadas vetoriais é formado por um conjunto de vetores mutuamente ortogonais (retangulares, cilíndricos, esféricos etc.), um sistema de coordenadas de sinais também é formado por um conjunto de sinais mutuamente ortogonais, os sinais de base. Existe um grande número de conjuntos ortogonais de sinais que podem ser usados como sinais de base para séries de Fourier generalizadas. Alguns conjuntos de sinais bem conhecidos são os das funções trigonométricas (senoidais), funções exponenciais, funções de Walsh, funções de Bessel, polinômios de Legendre, funções de Laguerre, polinômios de Jacobi, polinômios de Hermite e polinômios de Chebyshev. Neste livro, as funções de maior interesse são as exponenciais, discutidas no próximo capítulo.

2.8 EXERCÍCIOS COM O MATLAB

Nesta seção, apresentamos alguns exercícios básicos com o MATLAB para ilustrar o processo de geração de sinais, operações com sinais e análise de sinais por série de Fourier.

Sinais Básicos e Representação Gráfica de Sinais

Funções básicas podem ser definidas por meio de arquivos m de MATLAB. A seguir, apresentamos três programas MATLAB para implementar três funções básicas, a partir de um vetor t variante no tempo:

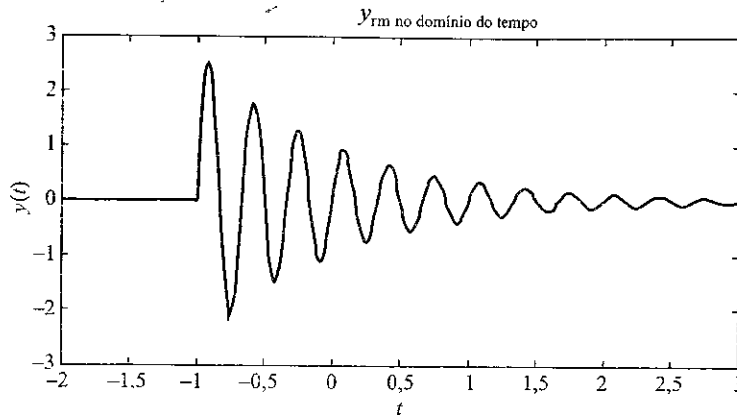
.ustep.m implementa a função degrau unitário $u(t)$
 .rect.m implementa a função retangular padrão $rect(t)$
 .triangl.m implementa a função triangular padrão $\Delta(t)$

```
% (nome do arquivo:  ustep.m)
% A função degrau unitário é uma função do tempo 't'.
% Uso  y = ustep(t)
%
% ustep(t) = 0      se t < 0
% ustep(t) = 1,    se t >= 0
%
% t - deve ser uma variável real, podendo ser um vetor ou uma matriz
%
function y=ustep(t)
    y = (t>=0) ;
end
```

```
% (nome do arquivo: rect.m)
% A função rectangular é uma função do tempo 't'.
%
% Uso  y = rect(t)
% t - deve ser uma variável real, podendo ser um vetor ou uma matriz
%
% rect(t) = 1,      se |t| < 0.5
% rect(t) = 0,      se |t| > 0.5
%
function y=rect(t)
    y = (sign(t+0.5)-sign(t-0.5) > 0);
end
```

```
% (nome do arquivo: triangl.m)
% A função triangular é uma função do tempo 't'.
%
% triangl(t) = 1-|t|, se |t| < 1
% triangl(t) = 0, se |t| > 1
%
% Uso  y = triangl(t)
% t - deve ser uma variável real, podendo ser um vetor ou uma matriz
%
function y=triangl(t)
    y = (1-abs(t)).*(t>=-1).*(t<1);
end
```

Figura 2.19
Gráfico de
um sinal.



A seguir, mostramos um exemplo de como usar o MATLAB para gerar o gráfico de um sinal. Para isso, fornecemos o arquivo `siggraf.m`. Neste exemplo, construímos o sinal

$$y(t) = \exp(-t)\sin(6\pi t)u(t+1)$$

e traçamos o gráfico de sua variação com o tempo. A Fig. 2.19 mostra a curva resultante.

```
% (nome do arquivo: siggraf.m)
% Para traçar o gráfico de um sinal, o primeiro passo é especificar
% os eixos x e y
% Podemos, primeiro, especificar o comprimento do eixo x
t=[-2:0.01:3]; % "t" varia de -2 a 3, em incrementos de 0,01
% A seguir, calculamos valores do sinal no intervalo de "t"
% especificado para o gráfico
y=exp(-t).*sin(10*pi*t).*ustep(t+1);
figure(1); fig1=plot(t,y); % gráfico de t versus y na figura 1
set(fig1,'Linewidth',2); % escolhemos uma linha mais larga
xlabel('\it t'); % usamos 't' itálico para o título do eixo x
ylabel('\bf y\it t'); % usamos 'y' em negrito para o título
% do eixo y
title('\bf y\it t no domínio do tempo'); % podemos usar
% subscritos
```

Sinais Periódicos e Sinais de Potência

Para gerar sinais periódicos, primeiro calculamos valores do sinal em um período e, depois, repetimos esses valores múltiplas vezes.

Com o programa de MATLAB `PfuncEx.m`, fornecido a seguir, geramos um sinal periódico e observamos seu comportamento ao longo de $2M$ períodos. Neste exemplo, o período é $T = 6$. O programa também calcula a potência média do sinal, armazenada na variável `y_power`, e a energia do sinal em um período, armazenada na variável `y_energyT`.

```
% (nome do arquivo: PfuncEx.m)
% Este exemplo gera um sinal periódico, traça o gráfico de sua variação
% com o tempo
```

```

% e calcula a potência média do sinal, na variável y_power, e a energia
% do sinal em um período T, na variável: y_energyT
    echo off;clear;clf;
% Para gerar um sinal periódico g_T(t),
% podemos, primeiro, calcular valores do sinal em um período 'T'
    Dt=0.002; % Intervalo de tempo (para amostra do sinal)
    T=6;      % período=T
    M=3;      % Para gerar 2M períodos do sinal
    t=[0:Dt:T-Dt]; % "t" varia em um período, [0, T], em incrementos de Dt
% A seguir, o sinal é calculado em um período "T"
    y=exp(-abs(t)/2).*sin(2*pi*t).*(ustep(t)-ustep(t-4));
% Agora, múltiplos períodos podem ser gerados.
    time=[];
    y_periodic=[];
    for i=-M:M-1,
        time=[time i*T+t];
        y_periodic=[y_periodic y];
    end
    figure(1); fy=plot(time,y_periodic);
    set(fy,'Linewidth',2);xlabel('\it t');
    echo on
% Cálculo da potência média
    y_power=sum(y_periodic*y_periodic')*Dt/(max(time)-min(time))
% Cálculo da energia em um período T
    y_energyT=sum(y.*conj(y))*Dt

```

O programa gera um sinal periódico, como mostrado na Fig. 2.20, e produz as respostas numéricas:

```

y_power =
    0.0813

y_energyT =
    0.4878

```

Correlação de Sinais

Um programa de MATLAB pode implementar diretamente o conceito de correlação de sinais introduzido na Seção 2.5. No próximo exemplo, fornecemos um programa, `sign_cor.m`, que calcula os coeficientes de correlação entre o sinal $x(t)$ e sinais $g_1(t), g_2(t), \dots, g_5(t)$. O programa, primeiro, gera a Fig. 2.21, que ilustra os seis sinais no domínio do tempo.

```

% (nome do arquivo: sign_cor.m)
clear
% Para gerar os seis sinais x(t), g_1(t), ... g_5(t);
% deste exemplo
% podemos primeiro, gerar o sinal g(t) em um período 'T'

```

Figura 2.20
Geração de
um sinal
periódico.

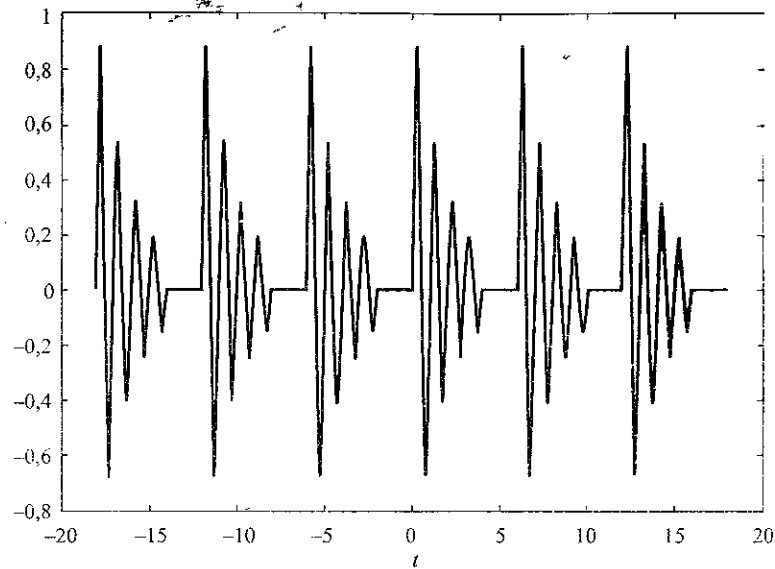
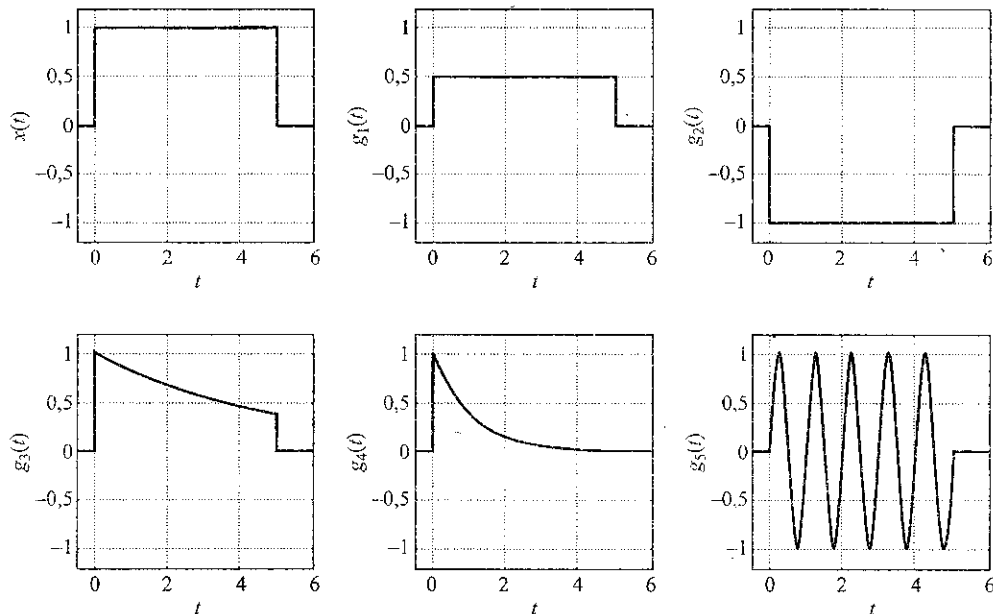


Figura 2.21
Seis sinais
simples.



```

Dt=0.01; % incremento temporal Dt
T=6.0; % duração temporal = T
t=[-1:Dt:T]; % "t" varia em [-1, T] em incrementos Dt
% A seguir, o sinal é calculado no intervalo de variação de "t" para
% gerar o gráfico
x=ustep(t)-ustep(t-5);
g1=0.5*(ustep(t)-ustep(t-5));
g2=-(ustep(t)-ustep(t-5));
g3=exp(-t/5).*(ustep(t)-ustep(t-5));
g4=exp(-t).*(ustep(t)-ustep(t-5));
g5=sin(2*pi*t).*(ustep(t)-ustep(t-5));
subplot(231); sig1=plot(t,x,'k');

```

```

xlabel('\it t'); ylabel('\it x({\it t})'); % Título do eixo x
set(sig1,'Linewidth',2); % especificação da largura da linha
axis([-0.5 6 -1.2 1.2]); grid % especificação dos intervalos nos eixos
x (de -0,5 a 6) e y (de -1,2 a 1,2)
subplot(232); sig2=plot(t,g1,'k');
xlabel('\it t'); ylabel('\it g}_1({\it t})');
set(sig2,'Linewidth',2);
axis([-0.5 6 -1.2 1.2]); grid
subplot(233); sig3=plot(t,g2,'k');
xlabel('\it t'); ylabel('\it g}_2({\it t})');
set(sig3,'Linewidth',2);
axis([-0.5 6 -1.2 1.2]); grid
subplot(234); sig4=plot(t,g3,'k');
xlabel('\it t'); ylabel('\it g}_3({\it t})');
set(sig4,'Linewidth',2);
axis([-0.5 6 -1.2 1.2]); grid
subplot(235); sig5=plot(t,g4,'k');
xlabel('\it t'); ylabel('\it g}_4({\it t})');
set(sig5,'Linewidth',2); grid
axis([-0.5 6 -1.2 1.2]);
subplot(236); sig6=plot(t,g5,'k');
xlabel('\it t'); ylabel('\it g}_5({\it t})');
set(sig6,'Linewidth',2); grid
axis([-0.5 6 -1.2 1.2]);

% Cálculo da energia de cada sinal
E0=sum(x.*conj(x))*Dt;
E1=sum(g1.*conj(g1))*Dt;
E2=sum(g2.*conj(g2))*Dt;
E3=sum(g3.*conj(g3))*Dt;
E4=sum(g4.*conj(g4))*Dt;
E5=sum(g5.*conj(g5))*Dt;

c0=sum(x.*conj(x))*Dt/(sqrt(E0*E0))
c1=sum(x.*conj(g1))*Dt/(sqrt(E0*E1))
c2=sum(x.*conj(g2))*Dt/(sqrt(E0*E2))
c3=sum(x.*conj(g3))*Dt/(sqrt(E0*E3))
c4=sum(x.*conj(g4))*Dt/(sqrt(E0*E4))
c5=sum(x.*conj(g5))*Dt/(sqrt(E0*E5))

```

Os seis coeficientes de correlação obtidos com o programa são:

```

c0 =
    1
c1 =
    1
c2 =
   -1
c3 =

```

```

0.9614
c4 =
0.6282
c5 =
8.6748e-17

```

Cálculo Numérico de Coeficientes D_n

Existem numerosas maneiras de calcular valores dos coeficientes D_n de uma série de Fourier. A seguir, usaremos o MATLAB para mostrar como usar integração numérica no cálculo de séries de Fourier.

Para efetuar a integração numérica direta da Eq. (2.60), o primeiro passo consiste em definir a expressão simbólica do sinal $g(t)$ em análise. Neste exemplo, usamos a função triangular $\Delta(t)$.

```

% (funct_tri.m)
% Função triangular padrão, com base de -1 a 1
function y = funct_tri(t)
% Uso y = funct_tri(t)
% t = variável de entrada i
y=((t>-1)-(t>1)).*(1-abs(t));

```

Uma vez que o arquivo `funct_tri.m` define a função $y = g(t)$, podemos efetuar diretamente a integração numérica da Eq. (2.60), considerando um número finito de coeficientes da série de Fourier $\{D_n, n = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N\}$. A seguir, fornecemos um programa em MATLAB denominado `FSexample.m`, que permite o cálculo da série de Fourier de $\Delta(t/2)$, com período $[a, b]$ ($a = -2, b = 2$). Neste exemplo, $N = 11$. A execução desse pequeno programa em MATLAB gerará a Fig. 2.22, que mostra a variação da amplitude e da fase de D_n .

```

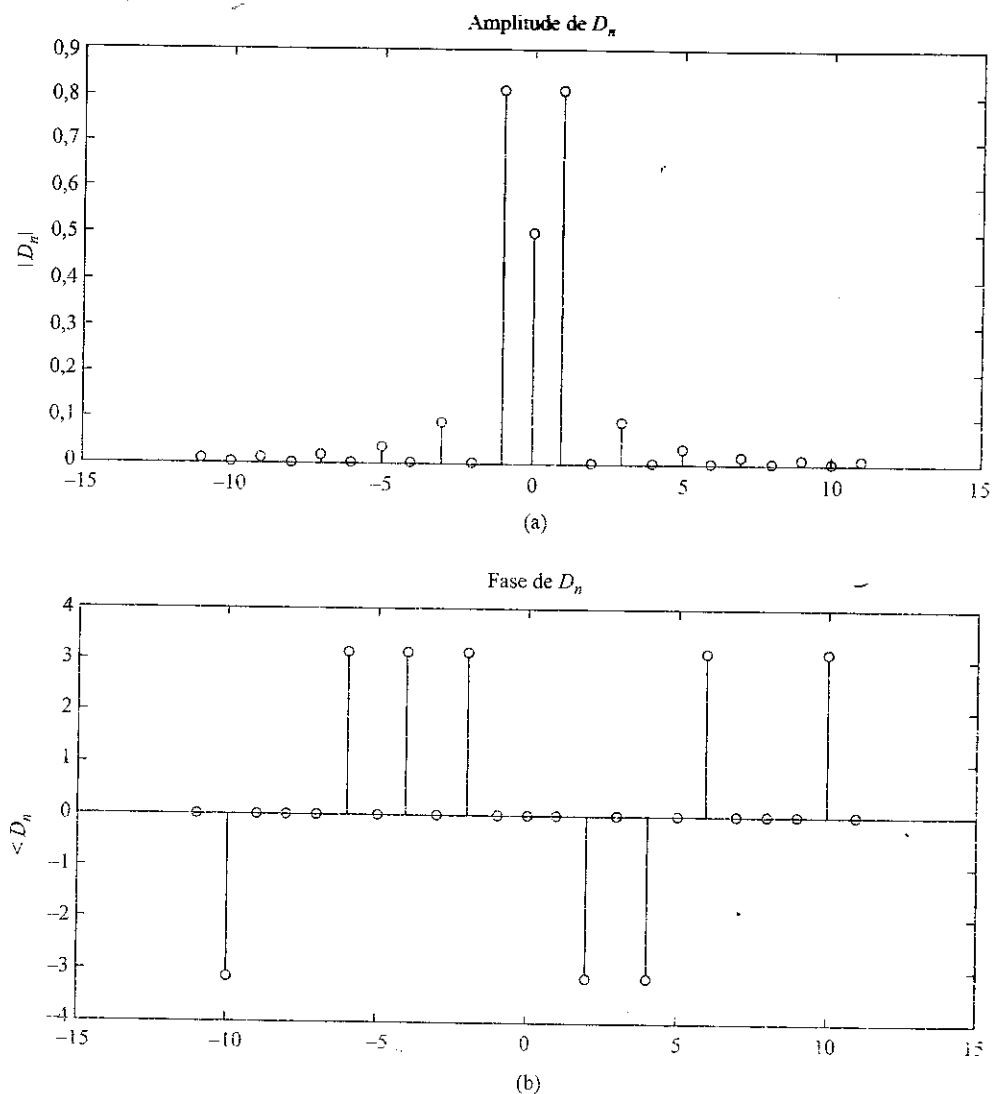
% (nome do arquivo: FSexp_a.m)
% Este exemplo mostra como calcular, numericamente
% Coeficientes  $D_n$  da série de Fourier exponencial
% diretamente.
% O usuário deve definir uma função simbólica
%  $g(t)$ . Neste exemplo,  $g(t) = \text{funct\_tri}(t)$ .
echo off; clear; clf;
j=sqrt(-1); % Define j para algebra complexa*
b=2; a=-2; % Definição de um período do sinal
tol=1.e-5; % Especificação da tolerância para erro de integração
T=b-a; % comprimento de um período
N=11; % Número de componentes da série de Fourier
% em cada lado da frequência zero
Fi=[-N:N]*2*pi/T; % Especificação do intervalo de frequência
%  $D_0$  é calculado e armazenado em  $D(N+1)$ ;
Func=@(t) funct_tri(t/2);
D(N+1)=1/T*quad(Func,a,b,tol); % a função quad,m de MATLAB usada
% para cálculo da integral

for i=1:N

```

*Na verdade, isso não é necessário. Em MATLAB, as letras i e j são definidas internamente como representações da unidade imaginária, embora possam também ser usadas para representar entidades genéricas. (N.T.)

Figura 2.22
Coeficientes
da série
de Fourier
exponencial
da repetição
de $\Delta(t/2)$
com período
 $T = 4$.



```
% Dn é calculado, para n=1,...,N, e armazenado em D(N+2), ... D(2N+1)
Func = @(t) exp(-j*2*pi*t*i/T).*func_tri(t/2);
D(i+N+1)=quad(Func,a,b,tol);

% Dn é calculado, para n=-N,...,-1 e armazenado em D(1), ... D(N)
Func = @(t) exp(j*2*pi*t*(N+1-i)/T).*func_tri(t/2);
D(i)= quad(Func,a,b,tol);

end

figure(1);
subplot(211);s1=stem([-N:N],abs(D));
set(s1,'Linewidth',2); ylabel('|{\it D}_{\it n}|');
title('Amplitude de {\it D}_{\it n}');
subplot(212);s2=stem([-N:N],angle(D));
set(s2,'Linewidth',2); ylabel('<{\it D}_{\it n}');
title('Fase de {\it D}_{\it n}');
```

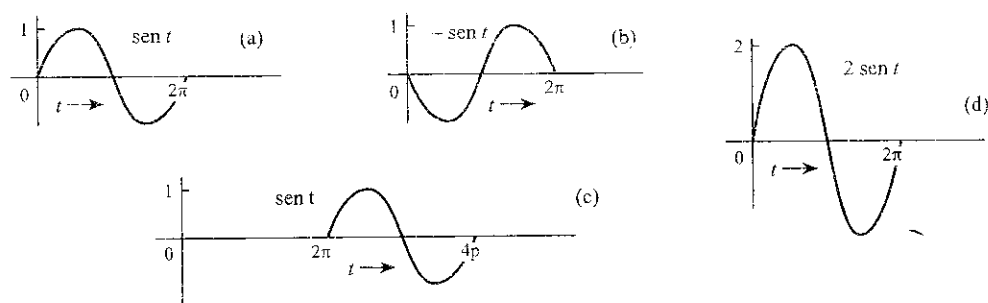

REFERÊNCIAS

1. P. L. Walker, *The Theory of Fourier Series and Integrals*, Wiley-Interscience, New York, 1986.
2. R. V. Churchill, and J. W. Brown, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1978.

EXERCÍCIOS

2.1-1 Determine a energia de cada um dos sinais representados na Fig. E.2.1-1. Comente os efeitos de mudança de sinal, translação temporal e multiplicação do sinal por dois sobre a energia. Qual é o efeito sobre a energia se o sinal for multiplicado por k ?

Figura E.2.1-1



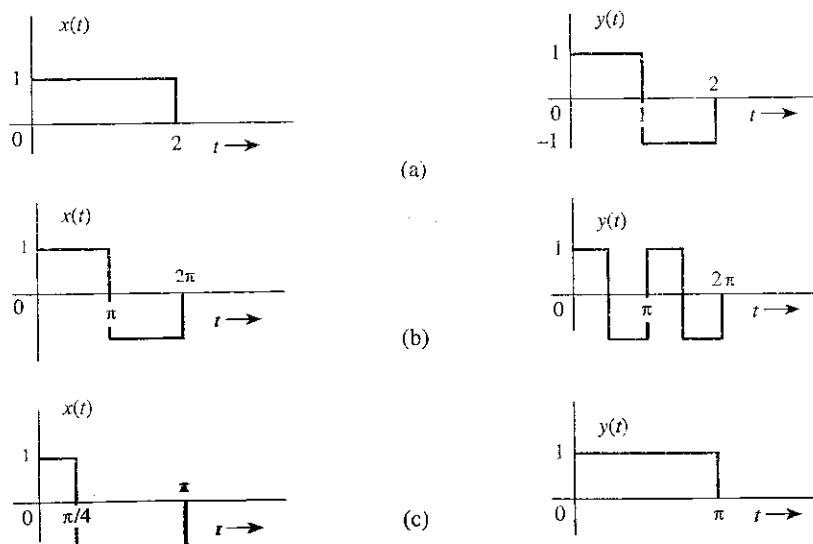
2.1-2 (a) Determine E_x e E_y , energias dos sinais $x(t)$ e $y(t)$ mostrados na Fig. E.2.1-2a. Esboce os gráficos dos sinais $x(t) + y(t)$ e $x(t) - y(t)$, e mostre que a energia de qualquer um desses sinais é igual a $E_x + E_y$. Repita o procedimento para o par de sinais na Fig. E.2.1-2b.

(b) Agora, repita o procedimento para o par de sinais na Fig. E.2.1-2c. Nesse caso, as energias dos sinais $x(t) + y(t)$ e $x(t) - y(t)$ são iguais?

2.1-3 Determine a energia de uma senoide $C \cos(\omega_0 t + \theta)$.

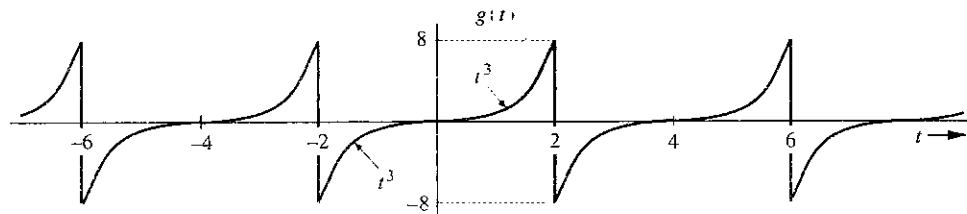
2.1-4 Mostre que, se $\omega_1 = \omega_2$, a potência de $g(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$ é $\{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\}/2$, que não é igual a $(C_1^2 + C_2^2)/2$.

Figura E.2.1-2



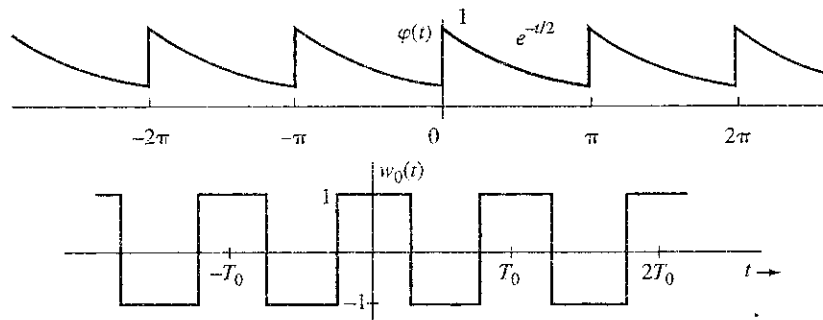
- 2.1-5 Determine a potência do sinal periódico $g(t)$ mostrado na Fig. E.2.1-5. Determine, também, a potência e valor rms de (a) $-g(t)$, (b) $2g(t)$ e (c) $cg(t)$. Comente os resultados.

Figura E.2.1-5



- 2.1-6 Determine a potência e valor rms dos sinais na (a) Fig. E.2.1-6a, (b) Fig. 2.16, (c) Fig. E.2.1-6b, (d) Fig. E.2.7-4a, (e) Fig. E.2.7-4c.

Figura E.2.1-6



- 2.1-7 Mostre que a potência de um sinal $g(t)$ dado por

$$g(t) = \sum_{k=m}^n D_k e^{j\omega_k t} \quad \omega_i \neq \omega_k \text{ para todo } i \neq k$$

é (teorema de Parseval)

$$P_g = \sum_{k=m}^n |D_k|^2$$

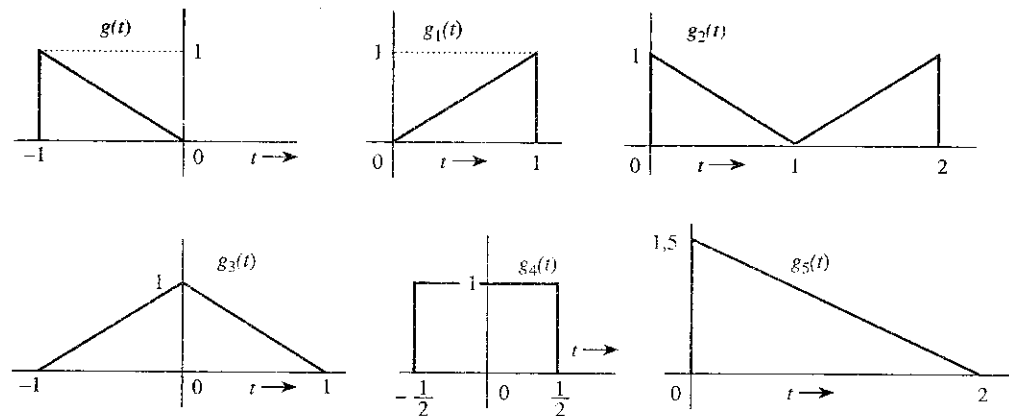
- 2.1-8 Determine a potência e o valor rms dos seguintes sinais:

- | | |
|---|-------------------------------------|
| (a) $10 \cos\left(100t + \frac{\pi}{3}\right)$ | (d) $10 \cos 5t \cos 10t$ |
| (b) $10 \cos\left(100t + \frac{\pi}{3}\right) + 16 \sin\left(150t + \frac{\pi}{5}\right)$ | (e) $10 \sin 5t \cos 10t$ |
| (c) $(10 + 2 \sin 3t) \cos 10t$ | (f) $e^{j\alpha t} \cos \omega_0 t$ |

- 2.2-1 Mostre que uma exponencial e^{-at} com início em $-\infty$ não é um sinal de energia e nem um sinal de potência, para qualquer valor real de a . A seguir, para a imaginário, mostre que é um sinal de potência com potência $P_g = 1$, independentemente do valor de a .

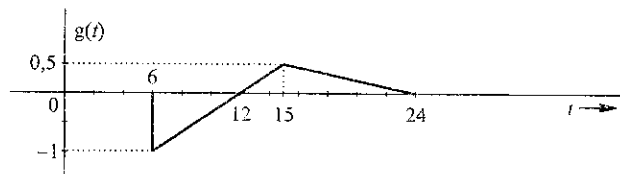
- 2.3-1 Na Fig. E.2.3-1, o sinal $g_1(t) = g(-t)$. Expresse os sinais $g_2(t)$, $g_3(t)$, $g_4(t)$ e $g_5(t)$ em termos dos sinais $g(t)$, $g_1(t)$ e de suas versões nas quais o eixo do tempo é deslocado, dilatado e invertido. Por exemplo, $g_2(t) = g(t - T) + g_1(t - T)$, para algum valor adequado de T . Do mesmo modo, $g_3(t)$ e $g_4(t)$ podem ser expressos como $g(t - T) + g(t - T)$, para algum valor adequado de T . Por sua vez, $g_5(t)$ pode ser expresso em termos de $g(t)$ com o eixo do tempo deslocado, dilatado e, por fim, $g(t)$ multiplicado por uma constante.

Figura E.2.3-1



- 2.3-2 Para o sinal $g(t)$ mostrado na Fig. E.2.3-2, esboce gráficos dos seguintes sinais: (a) $g(-t)$, (b) $g(t + 6)$, (c) $g(3t)$, (d) $g(6 - t)$.

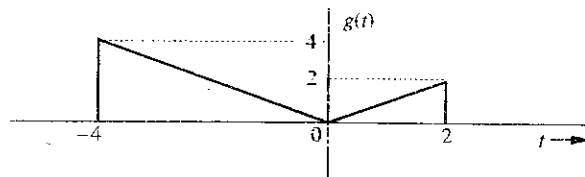
Figura E.2.3-2



- 2.3-3 Para o sinal $g(t)$ mostrado na Fig. E.2.3-3, esboce gráficos dos seguintes sinais: (a) $g(t - 4)$, (b) $g(t/1.5)$, (c) $g(2t - 4)$, (d) $g(2 - t)$.

Sugestão: Lembre-se de que a substituição de t por $t - T$ atrasa o sinal em T . Portanto, $g(2t - 4)$ é $g(2t)$ com t substituído por $t - 2$. Da mesma forma, $g(2 - t)$ é $g(-t)$ com t substituído por $t - 2$.

Figura E.2.3-3



- 2.3-4 Para um sinal de energia $g(t)$ com energia E_g , mostre que a energia de qualquer um dos sinais $-g(t)$, $g(-t)$ e $g(t - T)$ é E_g . Mostre, também, que a energia de $g(at)$ e a de $g(at - b)$ são iguais a E_g/a . Isso demonstra que a inversão e a translação temporais não afetam a energia de sinais. Contudo, a compressão temporal de um sinal por um fator a (t substituído por at) divide a energia pelo mesmo fator. Qual é o efeito sobre a energia quando o sinal é (a) dilatado temporalmente por um fator a (t substituído por at , $a > 1$) e (b) multiplicado por uma constante a ?

2.3-5 Simplifique as seguintes expressões:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \left(\frac{\tan t}{2t^2 + 1} \right) \delta(t) & \text{(d)} \quad \left(\frac{\sin \pi(t+2)}{t^2 - 4} \right) \delta(t-1) \\ \text{(b)} \quad \left(\frac{j\omega - 3}{\omega^2 + 9} \right) \delta(\omega) & \text{(e)} \quad \left(\frac{\cos(\pi t)}{t+2} \right) \delta(2t+3) \\ \text{(c)} \quad [e^{-t} \cos(3t - \pi/3)] \delta(t + \pi) & \text{(f)} \quad \left(\frac{\sin k\omega}{\omega} \right) \delta(\omega) \end{array}$$

Sugestão: Use a Eq. (2.10b). Para a parte (f), use a regra de L'Hôpital.

2.3-6 Calcule as seguintes integrais:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \delta(t - \tau) d\tau & \text{(e)} \quad \int_{-2}^{\infty} \delta(3+t) e^{-t} dt \\ \text{(b)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) g(t - \tau) d\tau & \text{(f)} \quad \int_{-2}^2 (t^3 + 4) \delta(1-t) dt \\ \text{(c)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt & \text{(g)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(2-t) \delta(3-t) dt \\ \text{(d)} \quad \int_{-\infty}^1 \delta(t-2) \sin \pi t dt & \text{(h)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x-1)} \cos \frac{\pi}{2}(x-5) \delta(2x-3) dx \end{array}$$

Sugestão: $\delta(x)$ está localizado em $x = 0$. Por exemplo, $\delta(1-t)$ está localizado em $1-t=0$, ou seja, em $t=1$, e assim por diante.

2.3-7 Prove que

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

Depois, mostre que

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \delta(f) \quad \text{onde} \quad \omega = 2\pi f$$

Sugestão: mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(at) dt = \frac{1}{|a|} \phi(0)$$

2.4-1 Deduza a Eq. (2.19) de modo alternativo; para isto, observe que $\mathbf{e} = (\mathbf{g} - c\mathbf{x})$ e

$$|\mathbf{e}|^2 = (\mathbf{g} - c\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{g} - c\mathbf{x}) = |\mathbf{g}|^2 + c^2 |\mathbf{x}|^2 - 2c\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$$

Para minimizar $|\mathbf{e}|^2$, iguale a zero sua derivada em relação a c .

2.4-2 Para os sinais $g(t)$ e $x(t)$ mostrados na Fig. E.2.4-2, determine a componente da forma de $x(t)$ contida em $g(t)$. Em outras palavras, determine o valor ótimo de c na aproximação $g(t) \approx cx(t)$, de modo que a energia do sinal de erro seja mínima. Qual é o valor da energia do resultante sinal de erro?

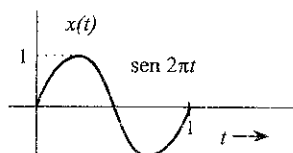
Figura E.2.4-2



2.4-3 Para os sinais $g(t)$ e $x(t)$ mostrados na Fig. E.2.4-2, determine a componente da forma de $g(t)$ contida em $x(t)$. Em outras palavras, determine o valor ótimo de c na aproximação $x(t) \approx cg(t)$, de modo que a energia do sinal de erro seja mínima. Qual é o valor da energia do resultante sinal de erro?

2.4-4 Refaça o Exercício 2.4-2 para o caso em que $x(t)$ é o pulso senoidal na Fig. E.2.2-4

Figura E.2.4-4



2.4-5 As energias de dois sinais $x(t)$ e $y(t)$ são E_x e E_y , respectivamente.

(a) Se $x(t)$ e $y(t)$ forem ortogonais, mostre que a energia do sinal $x(t) + y(t)$ é igual à energia do sinal $x(t) - y(t)$ e dada por $E_x + E_y$.

(b) Se $x(t)$ e $y(t)$ forem ortogonais, determine as energias dos sinais $c_1x(t) + c_2y(t)$ e $c_1x(t) - c_2y(t)$.

(c) A energia cruzada de dois sinais de energia $x(t)$ e $y(t)$, E_{xy} , é definida como

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt$$

Se $z(t) = x(t) \pm y(t)$, mostra que

$$E_z = E_x + E_y \pm (E_{xy} + E_{yx})$$

2.4-6 Sejam $x_1(t)$ e $x_2(t)$ dois sinais de energia unitária e ortogonais no intervalo de $t = t_1$ a t_2 . Como os sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ têm energia unitária e são ortogonais, podem ser representados como dois vetores ortogonais e de comprimentos unitários (x_1, x_2). Considere um sinal $g(t)$, dado por

$$g(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

Este sinal pode ser representado como um vetor g por meio de um ponto (c_1, c_2) no plano $x_1 - x_2$.

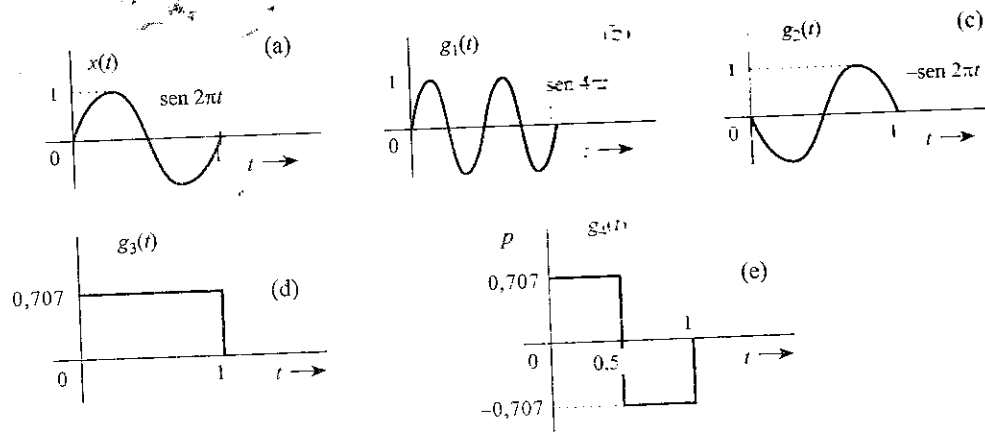
(a) Determine, neste espaço bidimensional, a representação vetorial dos seguintes seis sinais:

(i) $g_1(t) = 2x_1(t) - x_2(t)$	(iv) $g_4(t) = x_1(t) + 2x_2(t)$
(ii) $g_2(t) = -x_1(t) + 2x_2(t)$	(v) $g_5(t) = 2x_1(t) + x_2(t)$
(iii) $g_3(t) = -x_2(t)$	(vi) $g_6(t) = 3x_1(t)$

(b) Entre os seis vetores do item (a), identifique pares de vetores mutuamente ortogonais. Verifique que os pares de sinais correspondentes a estes vetores também são ortogonais.

2.5-1 Determine os coeficientes de correlação c_n do sinal $x(t)$ e de cada um dos quatro pulsos $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_3(t)$ e $g_4(t)$ mostrados na Fig. E.2.5-1. Para garantir máxima margem contra ruído ao longo da rota de transmissão, que par de pulsos você selecionaria para uma comunicação binária?

Figura E.2.5-1



- 2.7-1 (a) Esboce o gráfico do sinal $g(t) = t^2$ e determine a série de Fourier exponencial para representar $g(t)$ no intervalo $(-1, 1)$. Esboce o gráfico da série de Fourier $\phi(t)$ para todos os valores de t .
- (b) Comprove o teorema de Parseval [Eq. (2.68a)] para este caso, dado que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

- 2.7-2 (a) Esboce o gráfico do sinal $g(t) = t$ e determine a série de Fourier exponencial para representar $g(t)$ no intervalo $(-\pi, \pi)$. Esboce o gráfico da série de Fourier $\phi(t)$ para todos os valores de t .
- (b) Comprove o teorema de Parseval [Eq. (2.68a)] para este caso, dado que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- 2.7-3 Se um sinal periódico satisfizer certas condições de simetria, a evolução dos coeficientes da série de Fourier pode ser um pouco simplificada.

- (a) Mostre que, se $g(t) = g(-t)$ (simetria par), os coeficientes da série de Fourier exponencial são reais.
- (b) Mostre que, se $g(t) = -g(-t)$ (simetria ímpar), os coeficientes da série de Fourier exponencial são imaginários.
- (c) Mostre que, em cada caso, os coeficientes de Fourier podem ser calculados por meio da integração de sinais periódicos ao longo de apenas meio período. Isso ocorre porque toda a informação de um período está implícita em um meio período, devido à simetria.

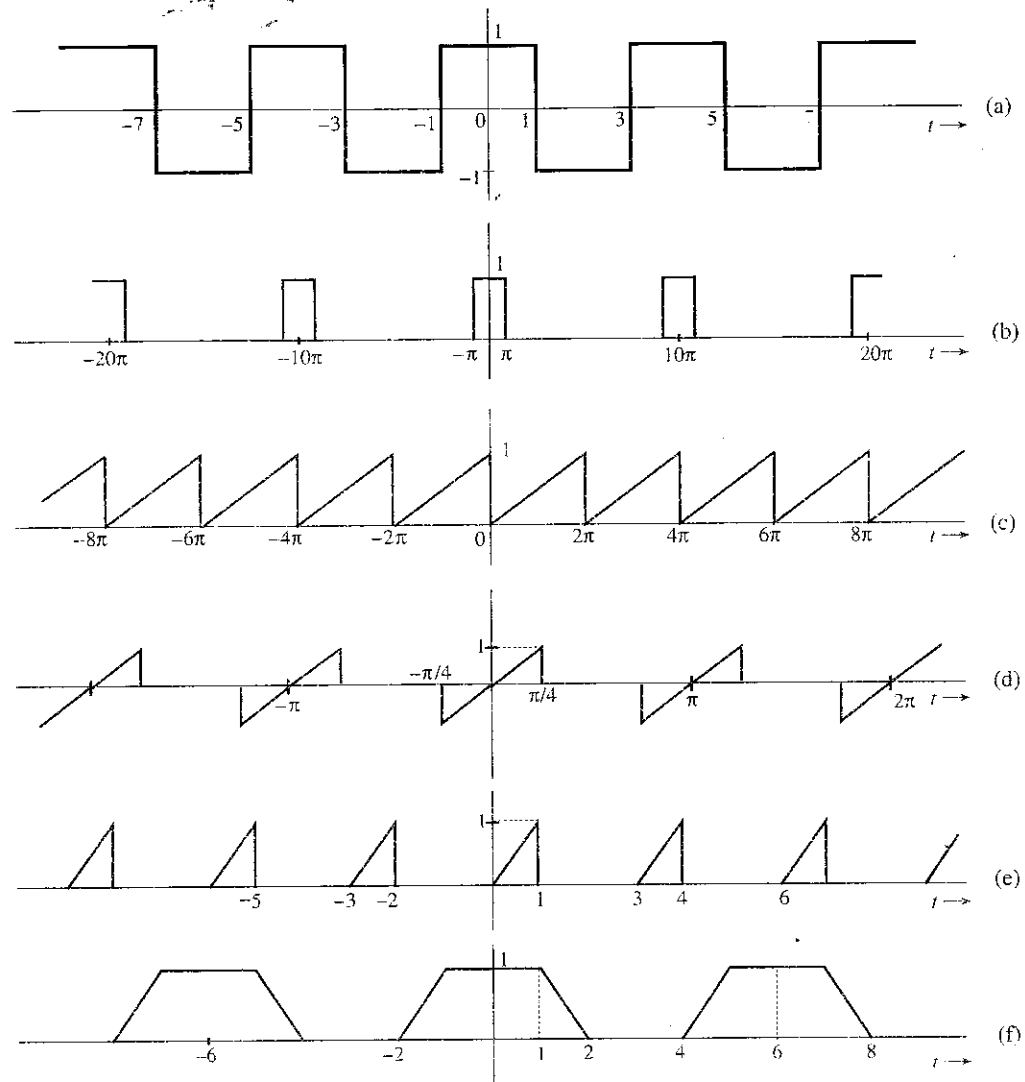
Sugestão: Se $g_e(t)$ e $g_o(t)$ forem funções par e ímpar, respectivamente, de t , então (assumindo que não há impulso ou suas derivadas na origem),

$$\int_{-a}^a g_e(t) dt = \int_0^{2a} g_e(t) dt \quad \text{e} \quad \int_{-a}^a g_o(t) dt = 0$$

Além disso, o produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar; o produto de duas funções pares é uma função par; o produto de duas funções ímpares é uma função par.

- 2.7-4 Para cada sinal periódico mostrado na Fig. E.2.7-4, determine a série de Fourier exponencial e esboce os gráficos dos espectros de amplitude e de fase. Relate qualquer propriedade de simetria.

Figura E.2.7-4



- 2.7-5 (a) Mostre que uma função arbitrária $g(t)$ pode ser expressa como uma soma de uma função par $g_e(t)$ e de uma função ímpar $g_o(t)$:

$$g(t) = g_e(t) + g_o(t)$$

$$\text{Sugestão: } g(t) = \underbrace{\frac{1}{2}[g(t) + g(-t)]}_{g_e(t)} + \underbrace{\frac{1}{2}[g(t) - g(-t)]}_{g_o(t)}$$

- (b) Determine as componentes pares e ímpares das seguintes funções: (i) $u(t)$; (ii) $e^{-\alpha t}u(t)$; (iii) e^{jt} .

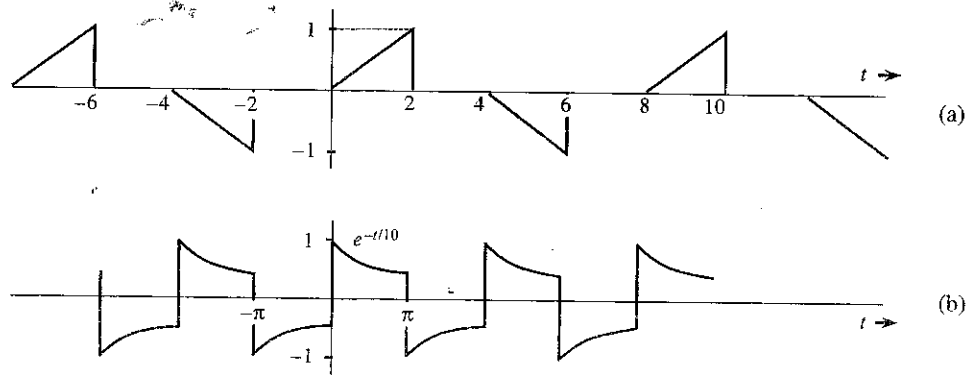
- 2.7-6 (a) Se, em um período, as duas metades de sinal periódico tiverem a mesma forma e fases opostas, o sinal periódico tem **simetria de meia onda**. Se um sinal periódico $g(t)$, de período T_0 , satisfizer a condição de simetria de meia onda, então,

$$g\left(t - \frac{T_0}{2}\right) = -g(t)$$

Neste caso, mostre que todos os harmônicos (coeficientes) de ordem par são nulos.

- (b) Use este resultado para determinar a série de Fourier para os sinais periódicos na Fig. E.2.7-6.

Figura E.2.7-6



2.8-1 Um sinal periódico $g(t)$ é expresso pela seguinte série de Fourier:

$$g(t) = 3 \sin t + \cos \left(3t - \frac{2\pi}{3} \right) + 2 \cos \left(8t + \frac{\pi}{3} \right)$$

- (a) Aplique as identidades de Euler diretamente ao sinal $g(t)$ e escreva sua série de Fourier exponencial.
- (b) Aplique as identidades de Euler diretamente ao sinal $g(t)$ e esboce gráficos dos espectros da correspondente série de Fourier exponencial.