UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
FACULDADE DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO
E TELECOMUNICAÇÕES

Técnicas de Otimização

Dualidade e Análise de Sensibilidade

Professor Dr. Lamartine Vilar de Souza

lvsouza@ufpa.br

www.lvsouza.ufpa.br

Belém - 2015

- Os conceitos e textos abordados neste capítulo foram retirados integralmente e textualmente da bibliografia contida no plano de aula desta disciplina.

- Estes ***slides*** não substituem nem suprem uma leitura detalhada e completa dos assuntos que serão estudados e dos relacionados existentes nas bibliografias sugeridas e em outras referências bibliográficas eventualmente encontradas pelos estudantes.

- Utilize estes ***slides*** **APENAS** como um direcionador para os seus estudos em livros ou materiais da área.

Tópicos

1. Dualidade

2. Análise de Sensibilidade

Dualidade

- Um problema **dual** é um problema de PL definido direta e sistematicamente de acordo com o problema de PL **primal** (ou original).

- O **dual** é definido para os vários formatos do **primal** dependendo do sentido de otimização (maximização ou minimização), dos tipos de restrições ($\leq$, $\geq$ ou $=$) e da orientação das variáveis (não-negativa ou irrestrita).

Um par de modelos matemáticos denominado **primal** (original) e **dual** preservam as seguintes características:

- Possuem funções objetivo simétricas: se um **Max**, o outro é **Min** e vice-versa.
- Os lados direitos das equações no primal são os coeficientes da Função Objetivo do dual.
- O número de restrições no primal é o número de variáveis do dual e vice-versa.
- A matriz de restrição do primal é a transposta da matriz de restrição do dual e vice-versa.
- **A solução ótima de um fornece a solução ótima do outro.**

- Construção do **dual** a partir do **primal**:

  – Uma variável **dual** é definida para cada equação **primal**.

  – Uma restrição **dual** é definida para cada variável **primal**.

  – Os coeficientes da restrição de uma variável **primal** definem os coeficientes do lado esquerdo da restrição **dual** e seus coeficientes na função objetivo definem os coeficientes do lado direito.

  –Os coeficientes da função objetivo do problema **dual** são iguais aos coeficientes do lado direito das equações de restrição do problema **primal**.

•Regras de construção do problema dual

Problema de Maximização		Problema de Minimização
Restrições		Variáveis
$\geq$	$\Leftrightarrow$	≤ 0
$\leq$	$\Leftrightarrow$	≥ 0
$=$	$\Leftrightarrow$	Irrestrita ($\in \Re$)
Variáveis		Restrições
≥ 0	$\Leftrightarrow$	$\geq$
≤ 0	$\Leftrightarrow$	$\leq$
Irrestrita	$\Leftrightarrow$	$=$

- **Exemplo 1**

Primal: Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$

sujeito a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- **Solução**
  - 1º Passo (tipo)
    - Primal (max) → Dual (min)

•Solução (exemplo 1)

Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$

sujeito a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Problema de Maximização		Problema de Minimização
Restrições		Variáveis
$\geq$	$\Leftrightarrow$	≤ 0
$\leq$	$\Leftrightarrow$	≥ 0
$=$	$\Leftrightarrow$	Irrestrita ($\in \Re$)
Variáveis		Restrições
≥ 0	$\Leftrightarrow$	$\geq$
≤ 0	$\Leftrightarrow$	$\leq$
Irrestrita	$\Leftrightarrow$	$=$

• 2º Passo (restrições)

–Primal (2 restrições) $\rightarrow$ Dual (duas variáveis - y_1, y_2)

- •1ª Restrição: $\leq$ $\rightarrow$ Variável $y_1 \geq 0$
- •2ª Restrição: $=$ $\rightarrow$ Variável y_2 irrestrita ($y2 \in \Re$)

- **Solução (exemplo 1)**

Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$
sujeito a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Problema de Maximização		Problema de Minimização
Restrições		Variáveis
$\geq$	$\Leftrightarrow$	≤ 0
$\leq$	$\Leftrightarrow$	≥ 0
$=$	$\Leftrightarrow$	Irrestrita ($\in \Re$)
Variáveis		Restrições
≥ 0	$\Leftrightarrow$	$\geq$
≤ 0	$\Leftrightarrow$	$\leq$
Irrestrita	$\Leftrightarrow$	$=$

- **3º Passo (variáveis)**
  - **Primal (3 variáveis) $\longrightarrow$ Dual (3 restrições)**
    - **$\geq 0 \rightarrow$ Restrições $\geq$**

- **Solução (exemplo 1)**

Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$

sujeito a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \quad y_1$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \quad y_2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- **Construção da função objetivo**

Minimizar $w = 10y_1 + 8y_2$

Os coeficientes da FO do problema **dual** são iguais aos coeficientes do lado direito das equações de restrição do problema **primal**.

- **Solução (exemplo 1)**

Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$

sujeito a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Os coeficientes da restrição de uma variável **primal** definem os coeficientes do lado esquerdo da restrição **dual** e seus coeficientes na FO definem os coeficientes do lado direito.

- **Construção das restrições**

Matriz de restrição: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

Transposta: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + 2y_2 \\ 2y_1 - y_2 \\ y_1 + 3y_2 \end{bmatrix}$$

- **Solução (exemplo 1)**

Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$

sujeito a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- **Construção das restrições**

LD da restrição

No passo 3 as restrições são todas ≥

Os coeficientes da restrição de uma variável **primal** definem os coeficientes do lado esquerdo da restrição **dual** e seus coeficientes na FO definem os coeficientes do lado direito.

$$y_1 + 2y_2 \geq 5$$
$$2y_1 - y_2 \geq 12$$
$$y_1 + 3y_2 \geq 4$$

•Formulação completa (exemplo 1)

Minimizar $w = 10y_1 + 8y_2$

sujeito a

$$y_1+2y_2 \geq 5$$
$$2y_1-y_2 \geq 12$$
$$y_1 + 3y_2 \geq 4$$
$$y_1 \geq 0$$
y_2 irrestrita

Maximizar $z = 5x_1+ 12x_2+4x_3$

sujeito a

$$x_1+2x_2+ x_3 \leq 10$$
$$2x_1-x_2+ 3x_3 = 8$$
$$x_1,x_2,x_3 \geq 0$$

- **Exemplo 2**

Primal: **Minimizar** $z = 15x_1 + 12x_2$

sujeito a

$$x_1 + 2x_2 \geq 3$$
$$2x_1 - 4x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- **Solução**
  - **1º Passo (tipo)**
    - **Primal (min) → Dual (max)**

- **Solução (exemplo 2)**

Minimizar $z = 15x_1 + 12x_2$

sujeito a

$$x_1 + 2x_2 \geq 3$$
$$2x_1 - 4x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problema de Maximização		Problema de Minimização
Restrições		Variáveis
$\geq$	$\Leftrightarrow$	≤ 0
$\leq$	$\Leftrightarrow$	≥ 0
$=$	$\Leftrightarrow$	Irrestrita ($\in \Re$)
Variáveis		Restrições
≥ 0	$\Leftrightarrow$	$\geq$
≤ 0	$\Leftrightarrow$	$\leq$
Irrestrita	$\Leftrightarrow$	$=$

- **2º Passo (restrições)**

  – **Primal (2 restrições) $\longrightarrow$ Dual(2 variáveis - y_1, y_2)**

    - **1ª Restrição: $\geq$ $\rightarrow$ Variável $y_1 \geq 0$**
    - **2ª Restrição: $\leq$ $\rightarrow$ Variável $y_2 \leq 0$**

- **Solução (exemplo 2)**

Minimizar $z = 15x_1 + 12x_2$

sujeito a

$$x_1 + 2x_2 \geq 3$$
$$2x_1 - 4x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problema de Maximização		Problema de Minimização
Restrições		Variáveis
$\geq$	$\Leftrightarrow$	≤ 0
$\leq$	$\Leftrightarrow$	≥ 0
$=$	$\Leftrightarrow$	Irrestrita ($\in \Re$)
Variáveis		Restrições
≥ 0	$\Leftrightarrow$	$\geq$
≤ 0	$\Leftrightarrow$	$\leq$
Irrestrita	$\Leftrightarrow$	$=$

- **3º Passo (variáveis)**
  - **Primal (2 variáveis) $\longrightarrow$ Dual (2 restrições)**
    - **$\geq 0 \rightarrow$ Restrições $\leq$**

- **Solução (exemplo 2)**

Minimizar $z = 15x_1 + 12x_2$

sujeito a

$x_1 + 2x_2 \geq 3$ $\quad y_1$

$2x_1 - 4x_2 \leq 5$ $\quad y_2$

$x_1, x_2 \geq 0$

- **Construção da função objetivo**

Maximizar $w = 3\,y_1 + 5\,y_2$

Os coeficientes da FO do problema **dual** são iguais aos coeficientes do lado direito das equações de restrição do problema **primal**.

- **Solução (exemplo 2)**

Minimizar $z = 15x_1 + 12x_2$

sujeito a

$$x_1 + 2x_2 \geq 3$$
$$2x_1 - 4x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Os coeficientes da restrição de uma variável **primal** definem os coeficientes do lado esquerdo da restrição **dual** e seus coeficientes na FO definem os coeficientes do lado direito.

- **Construção das restrições**

Matriz de restrição

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \overset{T}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + 2y_2 \\ 2y_1 - 4y_2 \end{bmatrix}$$

- **Solução (exemplo 2)**

Minimizar $z = 15x_1 + 12x_2$

sujeito a

$$x_1 + 2x_2 \geq 3$$
$$2x_1 - 4x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- **Construção das restrições**

LD da restrição

No passo 3 as restrições são todas ≤

Os coeficientes da restrição de uma variável **primal** definem os coeficientes do lado esquerdo da restrição **dual** e seus coeficientes na FO definem os coeficientes do lado direito.

$$y_1 + 2y_2 \leq 15$$

$$2y_1 - 4y_2 \leq 12$$

- **Formulação completa (exemplo 2)**

Maximizar $w = 3y_1 + 5y_2$

sujeito a $y_1 + 2y_2 \leq 15$

$2y_1 - 4y_2 \leq 12$

$y_1 \geq 0$

$y_2 \leq 0$

Minimizar $z = 15x_1 + 12x_2$

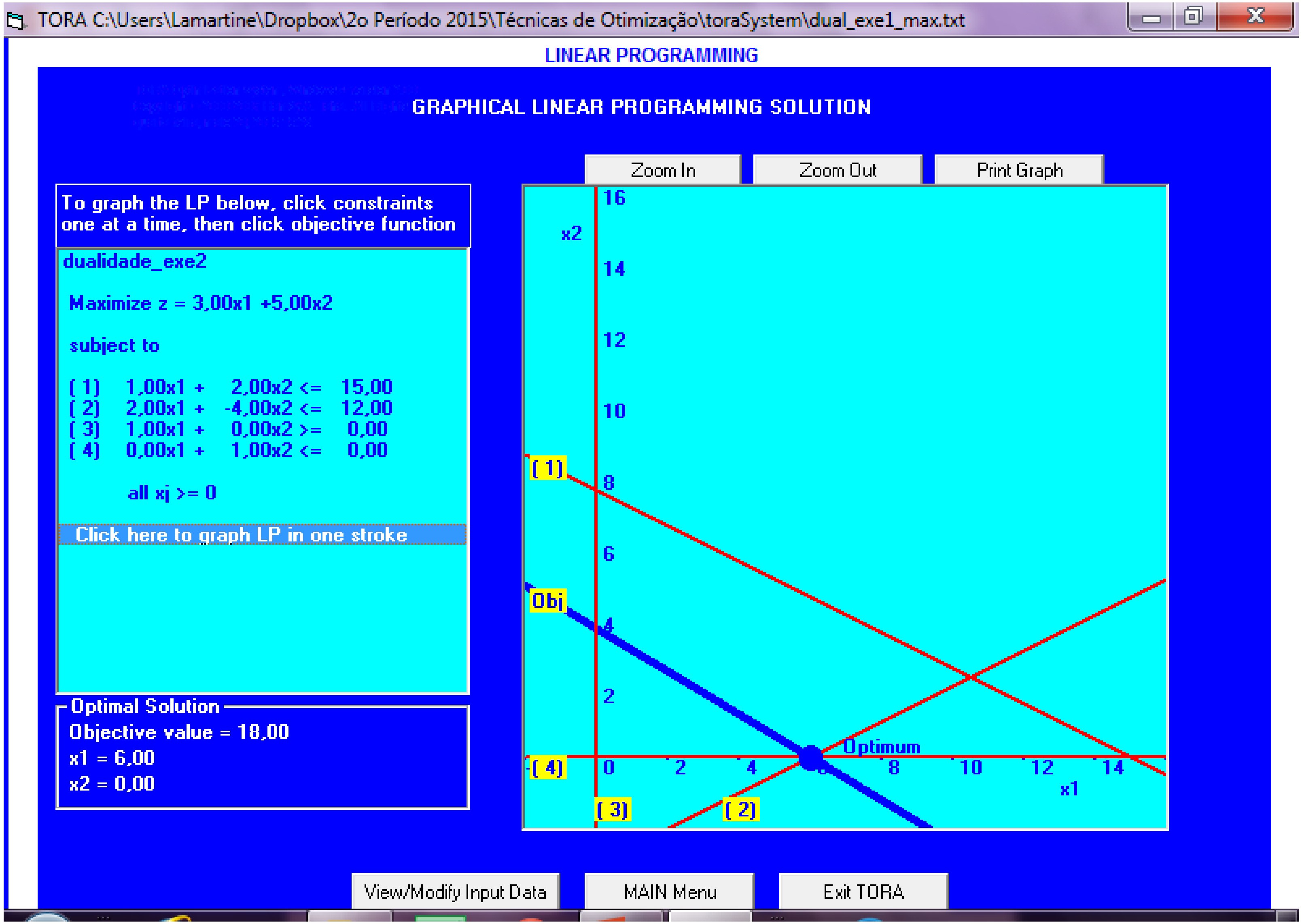
sujeito a

$x_1 + 2x_2 \geq 3$

$2x_1 - 4x_2 \leq 5$

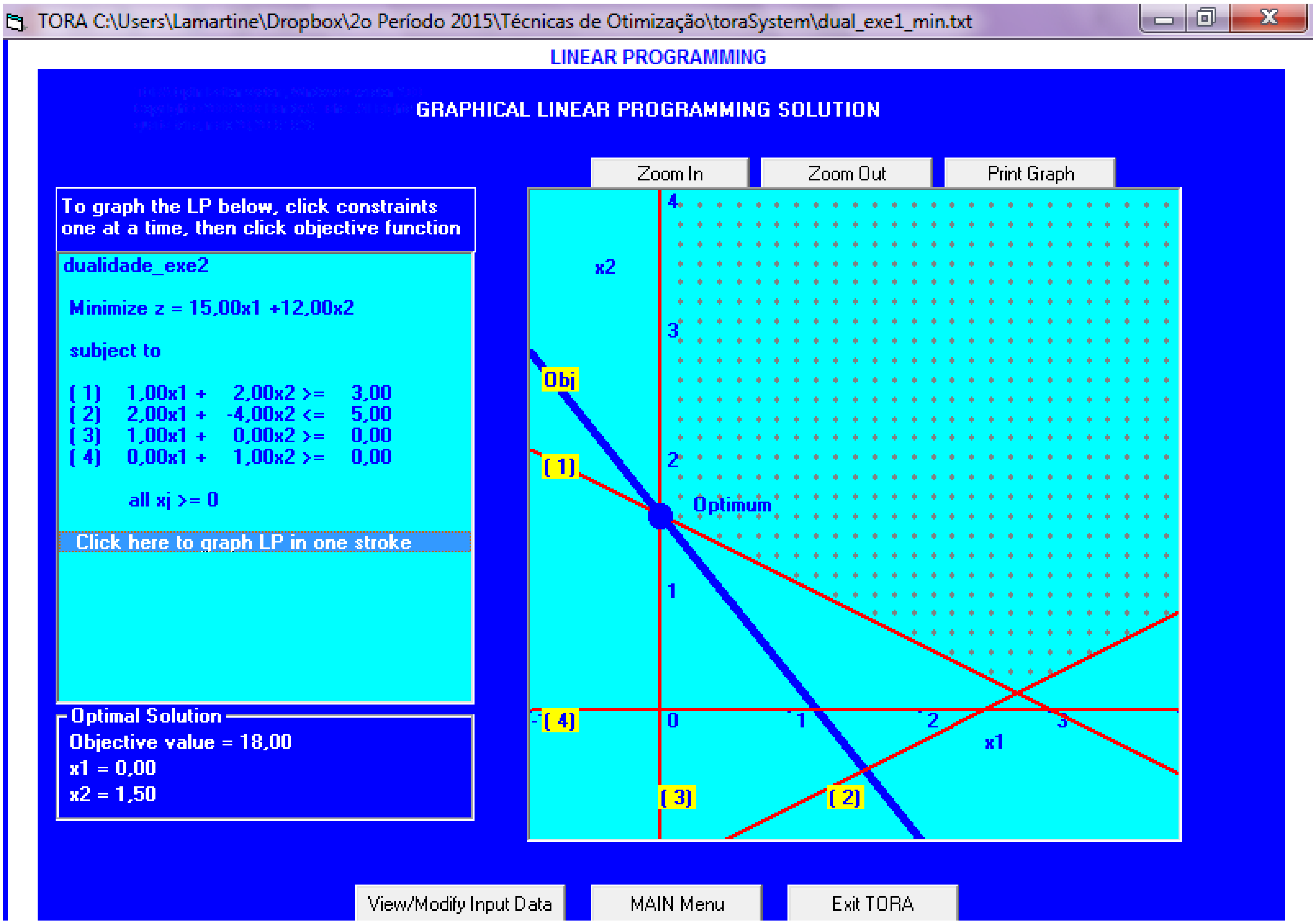
$x_1, x_2 \geq 0$

•Exemplo 2


TORA C:\Users\Lamartine\Dropbox\2o Período 2015\Técnicas de Otimização\toraSystem\dual_exe1_max.txt
LINEAR PROGRAMMING
GRAPHICAL LINEAR PROGRAMMING SOLUTION
Zoom In
Zoom Out
Print Graph
To graph the LP below, click constraints one at a time, then click objective function
dualidade_exe2
Maximize z = 3,00x1 +5,00x2
subject to
(1) 1,00x1 + 2,00x2 <= 15,00
(2) 2,00x1 + -4,00x2 <= 12,00
(3) 1,00x1 + 0,00x2 >= 0,00
(4) 0,00x1 + 1,00x2 <= 0,00
all xj >= 0
Click here to graph LP in one stroke
Optimal Solution
Objective value = 18,00
x1 = 6,00
x2 = 0,00
x2
16
14
12
10
8
6
4
2
0
2
4
8
10
12
14
x1
(1)
Obj
(4)
(3)
(2)
Optimum
View/Modify Input Data
MAIN Menu
Exit TORA

Técnicas de Otimização
Dualidade

- **Exemplo 2**



- **Exemplo 3**

Primal: Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$

sujeito a

$$x_1 + 2x_2 = 5$$
$$-x_1 + 5x_2 \geq 3$$
$$4x_1 + 7x_2 \leq 8$$
$$x_1 \text{ irrestrita, } x_2 \geq 0$$

Problema de Maximização		Problema de Minimização
Restrições		Variáveis
$\geq$	$\Leftrightarrow$	≤ 0
$\leq$	$\Leftrightarrow$	≥ 0
$=$	$\Leftrightarrow$	Irrestrita ($\in \Re$)
Variáveis		Restrições
≥ 0	$\Leftrightarrow$	$\geq$
≤ 0	$\Leftrightarrow$	$\leq$
Irrestrita	$\Leftrightarrow$	$=$

- **Exemplo 3**

Primal: Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$

sujeito a

$$x_1 + 2x_2 = 5$$
$$-x_1 + 5x_2 \geq 3$$
$$4x_1 + 7x_2 \leq 8$$
$$x_1 \text{ irrestrita}, x_2 \geq 0$$

- **Solução**
  - 1º Passo (tipo)
    - Primal (max) → Dual (min)

- **Solução (exemplo 3)**

Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$

sujeito a

$$x_1+2x_2 = 5$$
$$-x_1+ 5x_2 \geq 3$$
$$4x_1+ 7x_2 \leq 8$$
$$x_1 \text{ irrestrita, } x_2 \geq 0$$

Problema de Maximização		Problema de Minimização
Restrições		Variáveis
$\geq$	$\Leftrightarrow$	≤ 0
$\leq$	$\Leftrightarrow$	≥ 0
$=$	$\Leftrightarrow$	Irrestrita ($\in \Re$)
Variáveis		Restrições
≥ 0	$\Leftrightarrow$	$\geq$
≤ 0	$\Leftrightarrow$	$\leq$
Irrestrita	$\Leftrightarrow$	$=$

- **2º Passo (restrições)**

  – **Primal (3 restrições) ⟶ Dual(3 variáveis- y_1, y_2, y_3)**

  - **1ª Restrição: $=$ → Variável y_1 irrestrita**
  - **2ª Restrição: $\geq$ → Variável $y_2 \leq 0$**
  - **3ª Restrição: $\leq$ → Variável $y_3 \geq 0$**

Problema de Maximização		Problema de Minimização
Restrições		Variáveis
$\geq$	$\Leftrightarrow$	≤ 0
$\leq$	$\Leftrightarrow$	≥ 0
$=$	$\Leftrightarrow$	Irrestrita ($\in \Re$)
Variáveis		Restrições
≥ 0	$\Leftrightarrow$	$\geq$
≤ 0	$\Leftrightarrow$	$\leq$
Irrestrita	$\Leftrightarrow$	$=$

- **Solução (exemplo 3)**

Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$

sujeito a

$$x_1 + 2x_2 = 5$$
$$-x_1 + 5x_2 \geq 3$$
$$4x_1 + 7x_2 \leq 8$$
$$x_1 \text{ irrestrita, } x_2 \geq 0$$

- **3º Passo (variáveis)**

  – **Primal (2 variáveis) $\longrightarrow$ Dual (2 restrições)**

  - **1ª variável primal: irrestrita $\rightarrow$ Restrições =**
  - **2ª variável primal: ≥ 0 $\rightarrow$ Restrições $\geq$**

- **Solução (exemplo 3)**

Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$

sujeito a

$x_1 + 2x_2 = 5$ $\quad y_1$

$-x_1 + 5x_2 \geq 3$ $\quad y_2$

$4x_1 + 7x_2 \leq 8$ $\quad y_3$

x_1 irrestrita, $x_2 \geq 0$

- **Construção da função objetivo**

Minimizar $w = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3$

Os coeficientes da FO do problema **dual** são iguais aos coeficientes do lado direito das equações de restrição do problema **primal**.

- **Solução (exemplo 3)**

Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$

sujeito a

$$x_1 + 2x_2 = 5$$
$$-x_1 + 5x_2 \geq 3$$
$$4x_1 + 7x_2 \leq 8$$
$$x_1 \text{ irrestrita}, \; x_2 \geq 0$$

Os coeficientes da restrição de uma variável **primal** definem os coeficientes do lado esquerdo da restrição **dual** e seus coeficientes na FO definem os coeficientes do lado direito.

- **Construção das restrições**

Usando a ideia da transposta....

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \overset{T}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} y_1 & -y_2 & +4y_3 \\ 2y_1 & +5y_2 & +7y_3 \end{matrix}$$

- **Solução (exemplo 3)**

Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$

sujeito a

$$x_1 + 2x_2 = 5$$
$$-x_1 + 5x_2 \geq 3$$
$$4x_1 + 7x_2 \leq 8$$
$$x_1 \text{ irrestrita}, x_2 \geq 0$$

Os coeficientes da restrição de uma variável **primal** definem os coeficientes do lado esquerdo da restrição **dual** e seus coeficientes na FO definem os coeficientes do lado direito.

- **Construção das restrições**

LD da restrição

No passo 3 determinou-se que a 1ª restrição é =, a 2ª é ≥

$$\begin{aligned} y_1 \quad - y_2 \quad + 4y_3 &= 5 \\ 2y_1 \quad + 5y_2 \quad + 7y_3 &\geq 6 \end{aligned}$$

- **Formulação completa (exemplo 3)**

Minimizar $w = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3$

sujeito a

$$y_1 - y_2 + 4y_3 = 15$$
$$2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \geq 6$$
$$y_1 \text{ irrestrita}$$
$$y_2 \leq 0$$
$$y_3 \geq 0$$

Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$

sujeito a

$$x_1 + 2x_2 = 5$$
$$-x_1 + 5x_2 \geq 3$$
$$4x_1 + 7x_2 \leq 8$$

$$x_1 \text{ irrestrita}, \; x_2 \geq 0$$

Análise de Sensibilidade

- Em PL, os parâmetros (dados de entrada) de um modelo podem mudar dentro de certos limites, sem provocar alteração significativa na solução ótima.

- A análise destas variações é denominada de **Análise de Sensibilidade**.

- De um modo geral, os parâmetros em modelos de PL não são exatos.

- Com a análise de sensibilidade podemos averiguar o impacto dessa incerteza na solução ótima.

- **Exemplo**: Considere o caso do lucro estimado final de um determinado produto. Após a análise de sensibilidade, descobriu-se que a solução ótima continua a mesma com uma variação de ± 10% no lucro unitário do produto.

- **O que nos indica esse resultado?**

- **É preferível ter uma variação menor ou maior da solução ótima, sendo você o tomador de decisão da empresa?**

- **Resposta: uma variação maior! Por quê?**

- **Porque assim temos uma faixa maior de valores que os parâmetros podem assumir sem alterar a solução ótima.**

São possíveis dois casos:

- **Sensibilidade da solução ótima às variações na disponibilidade de recursos (lado direito das restrições);**

- **Sensibilidade da solução ótima às variações do lucro unitário ou no custo unitário (coeficientes da função objetivo).**

- **Exemplo 4:**

A FCT Máquinas produz dois produtos em duas máquinas. Uma unidade do produto 1 requer duas horas na máquina 1 e uma hora na máquina 2. Para o produto 2, uma unidade requer uma hora na máquina 1 e 3 horas na máquina 2. O tempo de processamento diário disponível para cada máquina é de 8 horas. As receitas por unidade dos produtos 1 e 2 são \$30 e \$20, respectivamente. Desejamos maximizar a receita para fabricação dos produtos.

- **Pergunta 1: Se a FCT Máquinas puder aumentar a capacidade de ambas as máquinas, qual delas deve receber maior prioridade?**

- **Pergunta 2: É dada uma sugestão para aumentar as capacidades das máquinas 1 e 2 ao custo adicional de 10$/hora. Isso é aconselhável?**

- **Pergunta 3: Se a capacidade da máquina 1 for aumentada das atuais 8 horas para 13 horas, qual será o impacto desse aumento na receita ótima?**

- **Pergunta 4: Supondo que a capacidade da máquina 1 seja aumentada para 20 horas, qual será o impacto desse aumento na receita ótima?**

Resolução:

- **Descrevendo o modelo de PL para o problema apresentado:**

$$\textbf{Maximizar} \quad z = 30X_1 + 20X_2$$

X_1 e X_2 são o número diário de unidades dos produtos 1 e 2, respectivamente.

- **Descrevendo o modelo de PL para o problema apresentado:**

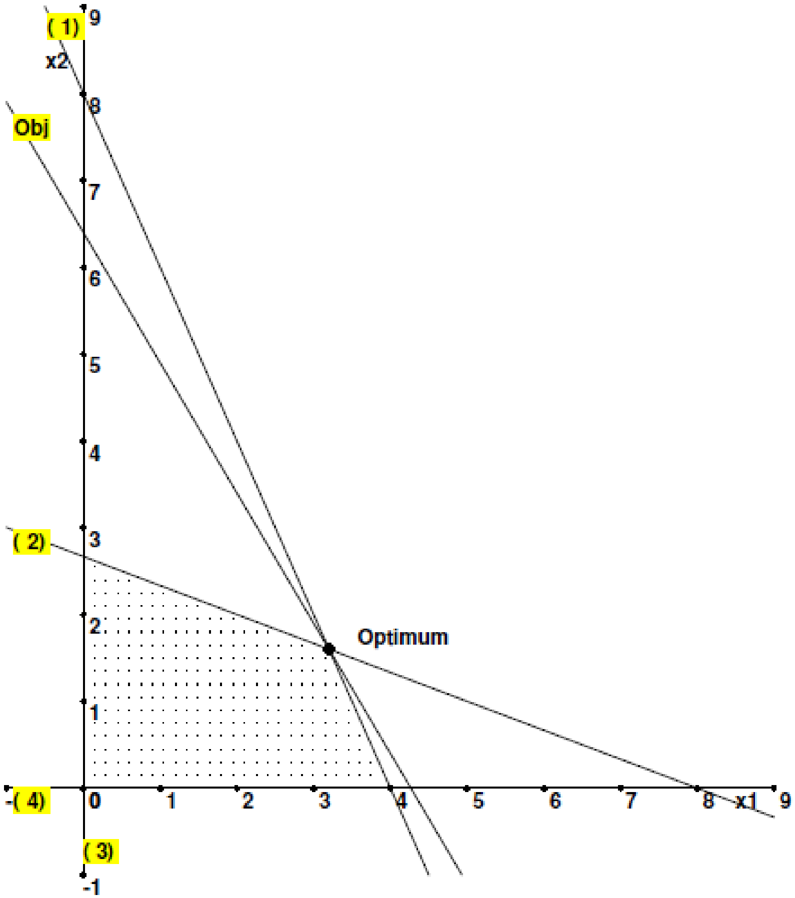
$$\textbf{Maximizar} \quad z = 30X_1 + 20X_2$$

Sujeito a:

$$2X_1 + X_2 \leq 8 \text{ (Máquina 1)}$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 8 \text{ (Máquina 2)}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



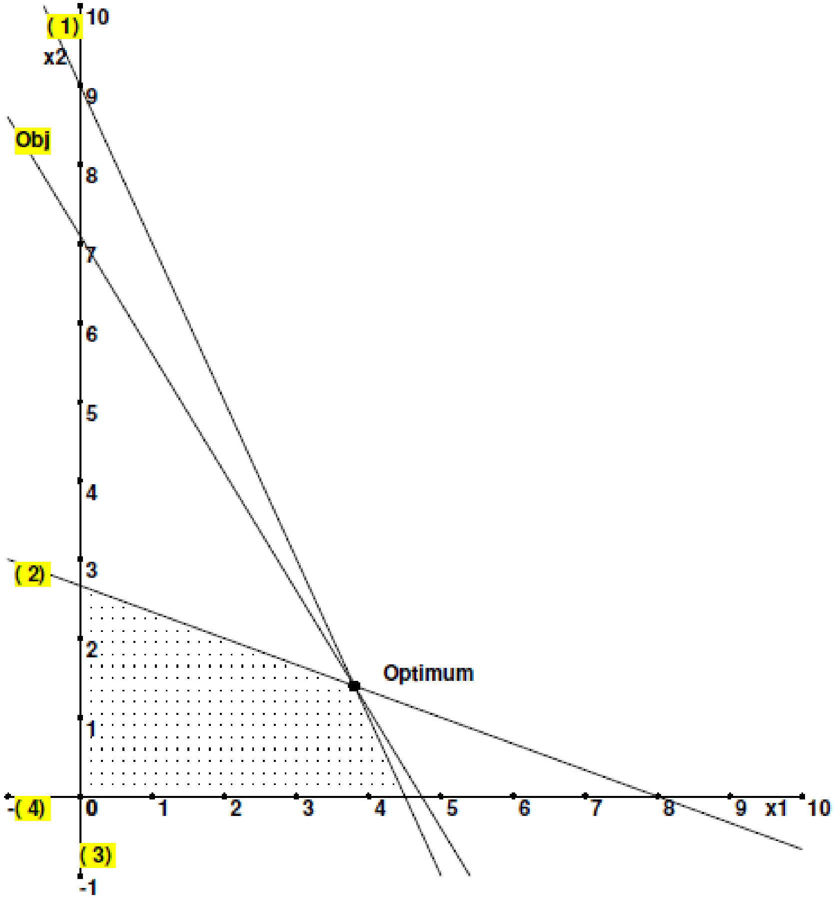
Solução para o problema original:

Summary of Optimal Solution:

Objective Value = 128,00

x1 = 3,20

x2 = 1,60



Alterando a capacidade diária da máquina 1 de 8 horas para 9 horas:

Summary of Optimal Solution:

Objective Value = 142,00

x1 = 3,80

x2 = 1,40

Taxa de variação da função objetivo (preço dual ou preço sombra):

$$\text{Taxa} = (z_2 - z_1) / (\text{alteração na capacidade})$$

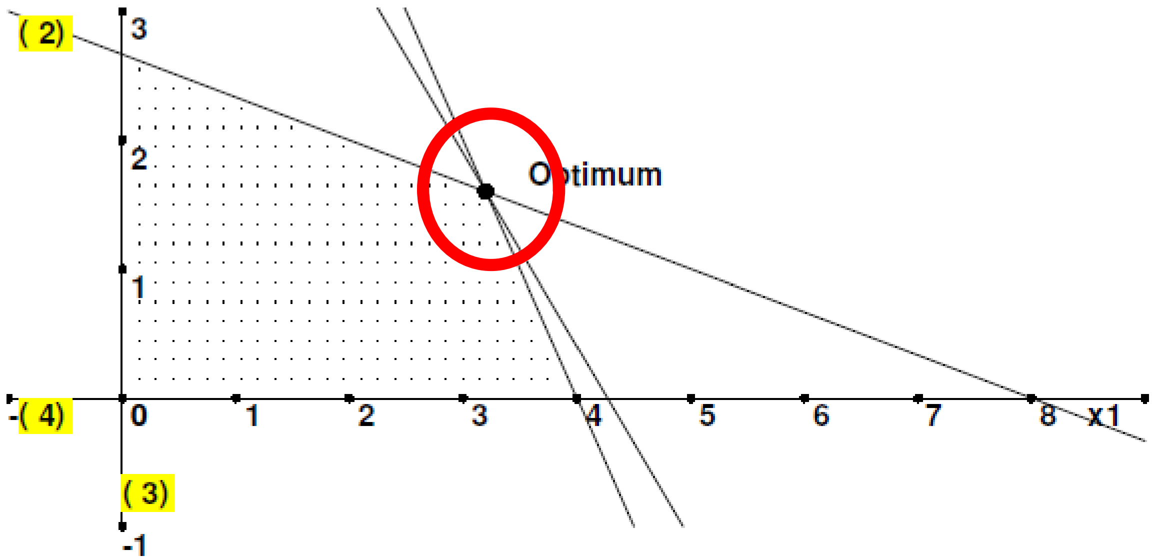
$$\text{Taxa} = (142 - 128) / (9 - 8) = \$14/\text{h}$$

Taxa de variação na receita resultante do aumento de uma hora na capacidade da máquina 1.

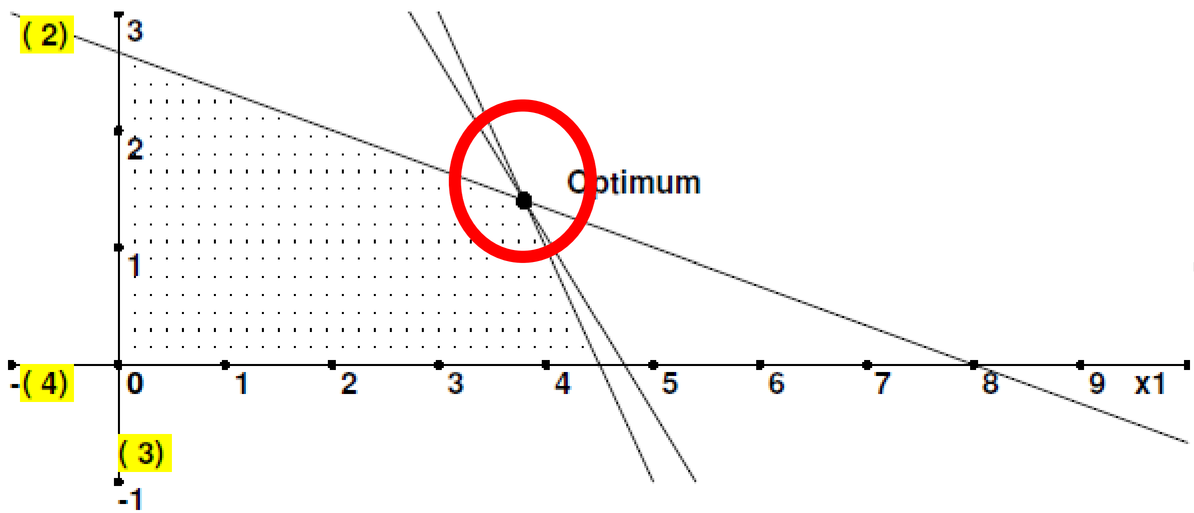
Ou seja, o preço dual ou preço sombra fornece uma ligação direta entre a entrada do modelo (recursos) e a sua saída (receita total).

O preço dual ou sombra representa o valor unitário equivalente de um recurso (em $/hora), isto é, a variação no valor ótimo da função objetivo por unidade de variação na disponibilidade do recurso.

Qual é a faixa de aplicabilidade do preço dual ou preço sombra encontrado?



Solução original:



Solução alterada:

O preço dual de \$14/h permanece válido para variações (aumentos ou reduções) na capacidade da máquina 1 que se deslocam sobre o segmento de reta formado pela restrição da máquina 2 ($X_1 + 3X_2 \leq 8$):

Pontos extremos:

A = (0 , 2,67)

B = (8 , 0)

Recordando que a restrição da máquina 1 é dada por

$$2X_1 + X_2$$

Podemos expressar matematicamente os limites:

Capacidade mínima [em A = (0 , 2,67)] =
= 2 x 0 + 1 x 2,67 = 2,67 horas
Capacidade máxima [em B = (8 , 0)] =
= 2 x 8 + 1 x 0 = 16 horas

Podemos concluir que o preço dual de $14/h permanecerá válido para a faixa:

2,67 horas ≤ Capacidade da Máquina 1 ≤ 16 horas

Utilizando um raciocínio semelhante, podemos determinar o preço dual para a máquina 2:

\$2/h

4,0 horas $\leq$ Capacidade da Máquina 2 $\leq$ 24 horas

Preço dual para a máquina 2:

$$\text{Taxa} = (z_2 - z_1) / (\text{alteração na capacidade})$$

$$\text{Taxa} = (130 - 128) / (9 - 8) = \$2/h$$

Restrição da máquina 1 ($2X_1 + X_2 \leq 8$):

Pontos extremos:

A = (0 , 8)

B = (4 , 0)

Recordando que a restrição da máquina 2 é dada por

$$X_1 + 3X_2$$

Podemos expressar matematicamente os limites:

Capacidade máxima [em A = (0 , 8)] =

= 0 + 3 x 8 = 24 horas

Capacidade mínima [em B = (4 , 0)] =

= 4 + 3 x 0 = 4 horas

Preço dual para a máquina 2:

\$2/h

4,0 horas ≤ Capacidade da Máquina 2 ≤ 24 horas

Os limites calculados para as máquinas 1 e 2 são denominados de faixas de viabilidade.

- **Pergunta 1: Se a FCT Máquinas puder aumentar a capacidade de ambas as máquinas, qual delas deve receber maior prioridade?**

Os preços duais para as máquinas 1 e 2 são \$14/h e \$2/h, respectivamente.

Cada hora adicional da máquina 1 resultará em um aumento de \$14 na receita, enquanto que a máquina 2 resultará em \$2. Então devemos priorizar a máquina 1.

- **Pergunta 2: É dada uma sugestão para aumentar as capacidades das máquinas 1 e 2 ao custo adicional de 10$/hora. Isso é aconselhável?**

Para a máquina 1, a receita líquida adicional por hora é

\$14 - \$10 = \$4

e, para a máquina 2

\$2 - \$10 = -\$8

Portanto, só a capacidade de máquina 1 deve ser aumentada.

- **Pergunta 3: Se a capacidade da máquina 1 for aumentada das atuais 8 horas para 13 horas, qual será o impacto desse aumento na receita ótima?**

O preço dual para a máquina 1 é $14/h, aplicável na faixa de 2,67 a 16 horas.

O aumento proposto cai dentro da faixa de viabilidade.

O aumento da receita será $ 14 x (13 – 8) = $ 70.

- **Pergunta 4: Supondo que a capacidade da máquina 1 seja aumentada para 20 horas, qual será o impacto desse aumento na receita ótima?**

A alteração proposta está fora da faixa (2,67 , 16) horas para a qual o preço dual $14/h permanece aplicável.

São necessários mais cálculos (análise pós-otimização) para achar a resposta.

Ou seja, não temos informações para tomar uma decisão imediata.