ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Equações de Maxwell na forma complexa

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t}\right\} \qquad (2)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{B}(\mathbf{r})e^{j\omega t}\right\} \qquad (3)$$

Fasores

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = |\mathbf{E}(\mathbf{r})|e^{j\theta_E}\hat{\mathbf{n}}_E \qquad (4)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = |\mathbf{B}(\mathbf{r})|e^{j\theta_B}\hat{\mathbf{n}}_B \qquad (5)$$

Substituindo (2) e (3) em (1) temos

$$\nabla \times \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t}\right\} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\left\{\mathbf{B}(\mathbf{r})e^{j\omega t}\right\} \quad \therefore \quad \mathrm{Re}\left\{\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t}\right\} = -\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r})e^{j\omega t}\right\} \quad \therefore$$

$$\mathrm{Re}\left\{\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t}\right\} = -\mathrm{Re}\left\{j\omega\mathbf{B}(\mathbf{r})e^{j\omega t}\right\} \quad \therefore \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mathbf{B}(\mathbf{r})$$

Portanto temos para as versões real e complexa, para a lei de Faraday

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} \qquad (6)$$

Procedendo de maneira análoga, para a lei de Ampère- Maxwell, temos

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{J}} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\mathbf{D} \qquad (7)$$

Para a lei de Gauss resulta

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\rho} \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad (8)$$

Final mente para a lei de Gauss aplicada ao magnetismo

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (9)$$

Agora utilizamos as **relações constitutivas** de modo a termos todas as equações de Maxwell expressas pelos campos fasoriais $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ *e* $\mathbf{H}(\mathbf{r})$.

$$\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E}$$

$$\mathbf{J} = \sigma\,\mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H}$$

Equações de Maxwell na forma fasorial em termos de $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ *e* $\mathbf{H}(\mathbf{r})$.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\,\mathbf{H} \qquad (10)$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E} \qquad (11)$$
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon \qquad (12)$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (13)$$

Equação de onda ou equação de Helmholtz

O rotacional da equação (10) é

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\nabla \times \mathbf{H}$$

mas

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E} \qquad \rightarrow \qquad \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E}$$

Identidade vetorial

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E}$$

Segue-se que

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E}$$

Para um meio com $\rho = 0$, *ou seja, com* $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, *resulta*

$$\nabla^2\mathbf{E} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E}$$

ou

$$\nabla^2\mathbf{E} = \gamma^2\mathbf{E} \qquad c/ \qquad \gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} \qquad (\textit{equação de onda})$$

A constante de propagação é

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \alpha + j\beta$$

α : constante de atenuação (neper/m)

β : constande de fase (rad/m)

Solução para a equação de onda

$$\text{Seja } \mathbf{r} = z\,\hat{\mathbf{z}} \rightarrow \nabla^2\mathbf{E} = \frac{d^2\mathbf{E}}{dz^2} \quad e \quad seja \quad \mathbf{E} = E\,\hat{\mathbf{x}} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2E}{dz^2} = \gamma^2 E \quad \rightarrow \quad E = E^+ e^{-\gamma z} + E^- e^{\gamma z}$$

Solução para o campo magnético. Usamos a equação de Maxwell, como segue

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\,\mathbf{H} \quad \therefore \quad \mathbf{H} = \frac{j}{\omega\mu}\nabla \times \mathbf{E} = \frac{j}{\omega\mu}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \therefore \quad \mathbf{H} = \frac{j}{\omega\mu}\frac{dE}{dz}\hat{\mathbf{y}}$$

Solução da equação de onda para meios sem perdas $\sigma = 0$.

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \sqrt{j^2\omega^2\mu\varepsilon} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\beta = jk \quad \rightarrow \quad \mathbf{E} = \left(E^+ e^{-jkz} + E^- e^{jkz}\right)\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{H} = \frac{j}{\omega\mu}\frac{d}{dz}\left(E^+ e^{-jkz} + E^- e^{jkz}\right)\hat{\mathbf{y}} = \frac{k}{\omega\mu}\left(E^+ e^{-jkz} - E^- e^{jkz}\right)\hat{\mathbf{y}} \rightarrow \quad \mathbf{H} = \left(H^+ e^{-jkz} - H^- e^{jkz}\right)\hat{\mathbf{y}}$$

Impedância de onda ou impedância intrínseca do meio, η

$$\frac{E^+}{H^+} = \frac{E^-}{H^-} = \frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad \rightarrow \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Vejamos agora os campos no domínio real:

$$\widetilde{\mathbf{E}} = \mathrm{Re}\{\mathbf{E}e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{\left(E^+ e^{-jkz} + E^- e^{jkz}\right)e^{j\omega t}\}\hat{\mathbf{x}}$$

$$\widetilde{\mathbf{E}} = \left[E^+\cos(\omega t - kz) + E^-\cos(\omega t + kz)\right]\hat{\mathbf{x}} \quad e \quad \widetilde{\mathbf{H}} = \left[H^+\cos(\omega t - kz) - H^-\cos(\omega t + kz)\right]\hat{\mathbf{y}}$$

Velocidade de propagação de fase

Consideremos a componente

$$E^+\cos(\omega t - kz).\ Seja \quad \omega t - kz = 2\pi\, m = cte. \rightarrow \frac{d}{dt}(\omega t - kz) = 0 \ \therefore\ \omega = k\frac{dz}{dt} \quad \therefore \quad v_z = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Esta é a velocidade de fase segundo $+\hat{\mathbf{z}}$.

$$E^-\cos(\omega t + kz).\ Seja \quad \omega t + kz = 2\pi\, m = cte. \rightarrow \frac{d}{dt}(\omega t + kz) = 0 \ \therefore\ \omega = -k\frac{dz}{dt} \quad \therefore \quad v_z = -\frac{\omega}{k} = -\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Esta é a velocidade de fase segundo $-\hat{\mathbf{z}}$.

Para o espaço livre temos $\quad \eta = \eta_v \cong 120\pi \quad \Omega \quad e \quad v = c \cong 3\times 10^8 \ m/s.$

Vetor de Poyinting

$\widetilde{\mathbf{S}} = \widetilde{\mathbf{E}} \times \widetilde{\mathbf{H}} \qquad W/m^2$

Consideremos os resultados para os campos eletromagnéticos obtidos acima. Temos, para as ondas propagando segundo + z:

$$\widetilde{\mathbf{S}} = \widetilde{\mathbf{E}} \times \widetilde{\mathbf{H}} = \left[E^+ \cos(\omega t - kz)\,\hat{\mathbf{x}}\right] \times \left[H^+ \cos(\omega t - kz)\,\hat{\mathbf{y}}\right] \qquad \therefore \quad \widetilde{\mathbf{S}} = E^+ H^+ \cos^2(\omega t - kz)\hat{\mathbf{z}}$$

Vetor de Poyinting complexo

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\} \qquad W/m^2$$

O vetor de Poyinting complexo é igual ao vetor médio instantâneo, ou seja,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\} = \frac{1}{T}\int_0^T \widetilde{\mathbf{S}}dt$$

1 – Uso de fasores:

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{E^+ e^{-jkz}\hat{\mathbf{x}} \times H^+ e^{jkz}\hat{\mathbf{y}}\} = \frac{1}{2}E^+ H^+ \hat{\mathbf{z}}.$$

2 – Uso de campos instantâneos :

$$\widetilde{\mathbf{S}} = \widetilde{\mathbf{E}} \times \widetilde{\mathbf{H}} = \left[E^+ \cos(\omega t - kz)\,\hat{\mathbf{x}}\right] \times \left[H^+ \cos(\omega t - kz)\,\hat{\mathbf{y}}\right] \qquad \therefore \quad \widetilde{\mathbf{S}} = E^+ H^+ \cos^2(\omega t - kz)\hat{\mathbf{z}}$$

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{1}{T}\int_0^T E^+ H^+ \cos^2(\omega t - kz)dt\,\hat{\mathbf{z}} = \left[E^+ H^+ \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - kz)dt\right]\hat{\mathbf{z}} \quad \therefore$$

$$\overline{\mathbf{S}} = \left[E^+ H^+ \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}(1 + \cos 2(\omega t - kz)dt)\right]\hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{2}E^+ H^+ \hat{\mathbf{z}} + \left[E^+ H^+ \frac{1}{T}\int_0^T \cos 2(\omega t - kz)dt\right]\hat{\mathbf{z}} \; \therefore$$

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}E^+ H^+ \hat{\mathbf{z}}$$

Observe que temos considerado, por simplicidade, os parametros E^+, H^+, E^- e H^- como números reais e positivos.

Efeito ***skin*** em bons condutores

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} \cong \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \alpha + j\beta$$

$$|E| = E_0 e^{-\alpha z}$$

Observe que o campo decresce à medida que propaga no condutor. Isto é, a magnitude do campo é significativa próximo à superfície do condutor. O grau de penetração da onda é obtida à partir do *delta de penetração* (*skin depth*) definido por

$$\left|E\right|_{\delta} = E_0 e^{-\alpha z}\Big|_{\alpha z=1} \quad \rightarrow \alpha z = 1 \quad ou \quad \alpha\delta = 1 \quad \therefore$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad m$$

Impedância de superfície de bons condutor

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \cong \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \quad \therefore \quad \eta = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1+j) = R_s + jX_2 \qquad c/ \quad R_s = X_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

Perda de potência em bons condutores

$$P_L = \frac{1}{2} R_s J_s^2 \quad W$$

Relação entre parâmetros de dielétrico e espaço livre

Velocidade de fase

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} \quad \therefore \quad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

Constante de fase (número de onda)

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r} = k_0\sqrt{\varepsilon_r}$$

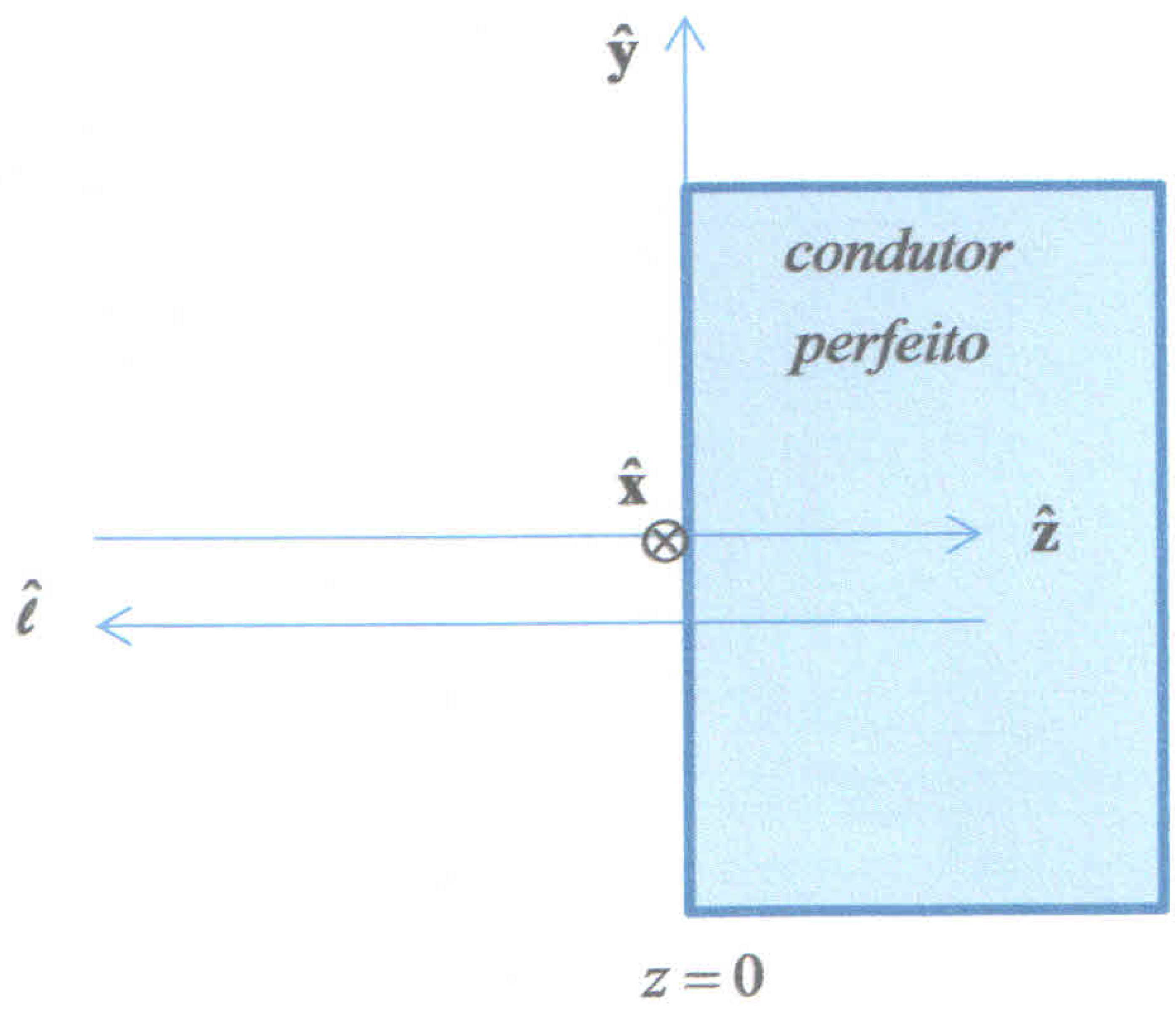
Comprimento de onda

$$k = k_0\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \therefore \quad \lambda = \frac{2\pi}{k_0}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} \qquad \therefore \qquad \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

Impedância intrínseca

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} \qquad \therefore \qquad \eta = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cong \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}} \qquad \Omega$$

Reflexão de onda por um condutor perfeito (incidência normal)



$$Para\ z=0 \rightarrow E^+ + E^- = 0 \rightarrow E^- = -E^+$$

$$\mathbf{E} = \left(E^+ e^{-jkz} + E^- e^{jkz}\right)\hat{\mathbf{x}} = E^+\left(e^{-jkz} - e^{jkz}\right)\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{E} = -j2E^+ \sin(kz)\hat{\mathbf{x}} = j2E^+ \sin(k\ell)\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{H} = \left(H^+ e^{-jkz} - H^- e^{jkz}\right)\hat{\mathbf{y}} = \left(\frac{E^+}{\eta} e^{-jkz} - \frac{E^-}{\eta} H^- e^{jkz}\right)\hat{\mathbf{y}} = \left(\frac{E^+}{\eta} e^{-jkz} + \frac{E^+}{\eta} H^- e^{jkz}\right)\hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{H} = \frac{2E^+}{\eta}\cos(kz)\hat{\mathbf{y}} = \frac{2E^+}{\eta}\cos(k\ell)\hat{\mathbf{y}}$$

Reflexão de onda por um dielétrico perfeito (incidência normal)

(1) $Para\ z=0 \rightarrow E^+ + E^- = E_T$

(2) $Para\ z=0 \rightarrow H^+ - H^- = H_T \quad \therefore \quad \dfrac{E^+}{\eta_1} - \dfrac{E^-}{\eta_1} = \dfrac{E_T}{\eta_2} \quad \therefore \quad \eta_2 E^+ - \eta_2 E^- = E_T \eta_1$

Resolvendo o sistema de equações acima, resulta

$$\Gamma \equiv \frac{E^-}{E^+} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \qquad \text{(coeficiente de reflexão)}$$

$$T \equiv \frac{E_T}{E^+} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \qquad \text{(coeficiente de transmissão)}$$