

ELETROMAGNETISMO

2ª edição

Joseph A. Edminis

ELETROMAGNETISMO



Compatível com qualquer livro-texto



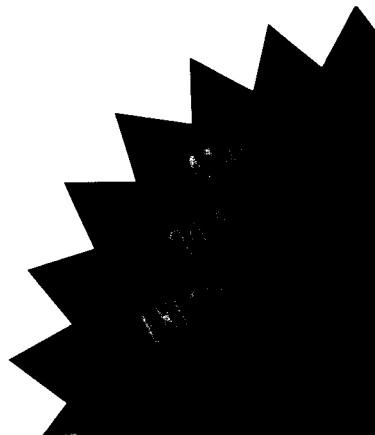
Cobre os conteúdos fundamentais sobre Eletromagnetismo



Capítulos extras sobre linhas de transmissão, antenas e microondas



351 exercícios resolvidos passo a passo



Coleção SCHAUM

A essência do conhecimento

LOWES JR. & MENDELSON
Cálculo, 4.ed.

MAVER, N.
Arquitetura de Computadores

MATNEY, J.
Circuitos e Dispositivos Eletrônicos, 2.ed.

MCMINISTER, J.
Eletromagnetismo, 2.ed.

MCCARTHOON, D.
Engenharia de Software

MEYER, M. H.
Processamento Digital de Sinais

MORRIS, J. R.
Programação em C++, 2.ed.

MORRIS, J. R.
Programação com Java, 2.ed.

NEEL, R.
Comunicação Analógica e Digital, 2.ed.

NEEL, R.
Dados e Sistemas

NEWMAN, L. J.
Estatística aplicada à administração e economia, 4.ed.

OPENCURTZ & LIPSON
Álgebra Linear, 3.ed.

OPENCURTZ & LIPSON
Matemática Discreta, 2.ed.

OPENCURTZ, E.
Introdução ao Cálculo, 2.ed.

OPENCURTZ & ATLAS JR.
Wigonometria, 3.ed.

OPENCURTZ & EDWARDS
Circuitos Elétricos, 4.ed.

OPENCURTZ, E., revisado por P. A. OPENCURTZ
Geometria, 3.ed.

OPENCURTZ & OPENCURTZ
Química Geral, 3.ed.

OPENCURTZ, F.
Pré-cálculo

OPENCURTZ & ATLAS
Matemática para Engenharia

OPENCURTZ & LIPSON
Manual de Física

OPENCURTZ & OPENCURTZ
Álgebra, 2.ed.

OPENCURTZ, E.
Probabilidade

TITTEL, E.
Rede de Computadores

TITTEL, E.
XML

WATSON
Circuitos

• Livro
em PDF

Teoria e Problemas de
ELETROMAGNETISMO



E24t

Edminister, Joseph A.

Teoria e problemas de eletromagnetismo / Joseph A. Edminister ; tradução
Glaysen Eduardo de Figueiredo. – 2. ed. – Porto Alegre : Bookman, 2006.
352 p. : il. p&b ; 28 cm. – (Coleção Schaum)

ISBN 85-363-0713-7

1. Eletromagnetismo. I. Título.

CDU 537

Catálogo na publicação: Júlia Angst Coelho – CRB 10/1712

JOSEPH A. EDMINISTER
Professor Emérito de Engenharia Elétrica
Universidade de Akron

Teoria e Problemas de **ELETROMAGNETISMO**

2ª Edição

Tradução:

Glaysen Eduardo de Figueiredo
Bacharel em Física pela UFMG
Mestrando em Engenharia Elétrica (UFMG)

Consultoria, supervisão e revisão técnica desta edição:

Antonio Pertence Júnior
Engenheiro Eletrônico e de Telecomunicações
Especialista em Processamento de Sinais (Ryerson University – Canadá)
Professor de Telecomunicações da FUMEC (MG)
Professor Titular da Faculdade de Sabará/MG
Membro da Sociedade Brasileira de Eletromagnetismo (SBmag)



2006

Obra originalmente publicada sob o título *Schaum's Outline: Electromagnetics, 2/E*

Joseph A. Edminister

ISBN 007-021234-1

©1993, The McGraw-Hill Companies, New York, NY, USA.

All rights reserved.

Portuguese-language translation ©2006, Bookman Companhia Editora Ltda., a division of Artmed Editora SA.

All rights reserved.

Capa: *Rogério Grilho*

Leitura final: *Rachel Garcia Valdez*

Supervisão editorial: *Denise Weber Nowaczyk*

Editoração eletrônica: *Laser House*

JOSEPH A. EDMINISTER é Diretor de Relações Corporativas da Escola de Engenharia da Cornell University. Em 1984, ocupou o cargo de IEEE Congressional Fellowship no lugar de Dennis E. Eckart (D-OH). Recebeu os graus de bacharel, mestre e doutor na Universidade de Akron, onde ocupou os cargos de Professor de Engenharia Elétrica, Chefe do Departamento de Engenharia Elétrica e Reitor da Pró-Reitoria de Engenharia. Ao longo da carreira acadêmica, lecionou Análise de Circuitos Elétricos e Teoria Eletromagnética. Atualmente, é Professor Emérito de Engenharia Elétrica da Universidade de Akron.

Reservados todos os direitos de publicação, em língua portuguesa, à

ARTMED® EDITORA S.A.

(BOOKMAN® COMPANHIA EDITORA é uma divisão da ARTMED® EDITORA S.A.)

Av. Jerônimo de Ornelas, 670 – Santana

90040-340 – Porto Alegre RS

Fone: (51) 3027-7000 Fax: (51) 3027-7070

É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na Web e outros), sem permissão expressa da Editora.

SÃO PAULO

Av. Angélica, 1.091 – Higienópolis

01227-100 – São Paulo – SP

Fone: (11) 3665-1100 Fax: (11) 3667-1333

SAC 0800 703-3444

IMPRESSO NO BRASIL

PRINTED IN BRAZIL

Prefácio

A segunda edição de *Eletromagnetismo* apresenta três novos capítulos: linhas de transmissão, guias de onda e antenas. Eles foram incluídos para tornar o livro uma ferramenta ainda mais poderosa para estudantes e profissionais que lidam com a teoria do campo eletromagnético. Quero expressar minha gratidão aos meus colegas M. L. Kult e K. F. Lee pela contribuição valiosa dada nesses novos capítulos.

Os objetivos da primeira edição foram mantidos: “Como é tradição da Coleção Schaum, é um livro voltado a ensinar como resolver problemas. Cada capítulo consiste em um amplo conjunto de problemas com soluções detalhadas e um conjunto posterior de problemas com respostas, precedidos por um resumo simplificado dos princípios necessários à assimilação dos problemas e de suas soluções. A matemática empregada continua tão simples quanto possível e procuramos evitar um enfoque abstrato. Exemplos concretos são apresentados, assim como vários gráficos e desenhos. Sei, pelos meus muitos anos de experiência lecionando a disciplina, que a solução da maioria dos problemas começa com um desenho cuidadoso”.

Uma vez mais agradeço meus alunos e ex-alunos, aos quais dedico este livro.

Joseph A. Edminister

Sumário

Capítulo 1	Análise Vetorial	11
	1.1 Introdução	11
	1.2 Notação Vetorial	11
	1.3 Álgebra Vetorial	12
	1.4 Sistemas de Coordenadas	13
	1.5 Elementos de Linha, de Área e de Volume	15
Capítulo 2	Forças de Coulomb e o Vetor Campo Elétrico	23
	2.1 Lei de Coulomb	23
	2.2 Vetor Campo Elétrico	24
	2.3 Distribuição de Cargas	25
	2.4 Configurações Modelo de Cargas	27
Capítulo 3	Fluxo Elétrico e a Lei de Gauss	43
	3.1 Carga Total em uma Região	43
	3.2 Fluxo Elétrico e Densidade de Fluxo	43
	3.3 Lei de Gauss	46
	3.4 Relação entre Densidade de Fluxo e o Campo Elétrico	46
	3.5 Superfícies Gaussianas Especiais	47
Capítulo 4	Divergência e o Teorema da Divergência de Gauss	59
	4.1 Divergência	59
	4.2 Divergência em Coordenadas Cartesianas	59
	4.3 A Divergência de \mathbf{D}	61
	4.4 O Operador Del	62
	4.5 O Teorema da Divergência de Gauss	63
Capítulo 5	O Campo Eletrostático: Trabalho, Energia e Potencial Elétrico	73
	5.1 Trabalho para Mover uma Carga Elétrica	73
	5.2 O Campo Eletrostático é um Campo Conservativo	74

	5.3 Potencial Elétrico entre Dois Pontos	75
	5.4 Potencial de uma Carga Pontual	75
	5.5 Potencial de uma Distribuição de Cargas	76
	5.6 Gradiente	77
	5.7 Relação entre \mathbf{E} e V	78
	5.8 Energia em Campos Elétricos Estáticos	79
Capítulo 6	Corrente, Densidade de Corrente e Condutores	92
	6.1 Introdução	92
	6.2 Cargas em Movimento em um Campo	92
	6.3 Densidade de Corrente de Convecção \mathbf{J}	93
	6.4 Densidade de Corrente de Condução \mathbf{J}	93
	6.5 Condutividade σ	94
	6.6 Corrente Elétrica I	95
	6.7 Resistência Elétrica R	96
	6.8 Densidade de Corrente Superficial \mathbf{K}	98
	6.9 Equação da Continuidade	99
	6.10 Condições de Contorno na Interface Condutor-Dielétrico	100
Capítulo 7	Capacitância e Meios Dielétricos	112
	7.1 Polarização \mathbf{P} e Permissividade Relativa ϵ_r	112
	7.2 Capacitância	113
	7.3 Capacitores Multidielétricos	114
	7.4 Energia Armazenada em um Capacitor	116
	7.5 Os Campos \mathbf{D} e \mathbf{E} para uma Diferença de Potencial Fixa	116
	7.6 Os Campos \mathbf{D} e \mathbf{E} para uma Carga Fixa Q	117
	7.7 Condições de Contorno na Interface entre Dois Dielétricos	117
Capítulo 8	Equação de Laplace	132
	8.1 Introdução	132
	8.2 Equação de Poisson e a Equação de Laplace	132
	8.3 Formas Explícitas para a Equação de Laplace	133
	8.4 Teorema da Unicidade das Soluções	134
	8.5 Teoremas: do Valor Médio e do Valor Máximo	134
	8.6 Solução em Coordenadas Cartesianas em uma Dimensão	135
	8.7 Solução em Coordenadas Cartesianas em Duas Dimensões	135
	8.8 Solução em Coordenadas Cilíndricas em Três Dimensões	136
	8.9 Solução em Coordenadas Esféricas em Duas Dimensões	138
Capítulo 9	A Lei de Ampère e o Campo Magnético	155
	9.1 Introdução	155
	9.2 Lei de Biot-Savart	155
	9.3 Lei de Ampère	156
	9.4 Rotacional	158
	9.5 A Relação entre \mathbf{J} e \mathbf{H}	159
	9.6 Densidade de Fluxo Magnético \mathbf{B}	160
	9.7 O Vetor Potencial Magnético \mathbf{A}	161
	9.8 O Teorema de Stokes	163

Capítulo 10	Forças e Torques em Campos Magnéticos	174
	10.1 Força Magnética sobre Partículas Carregadas	174
	10.2 Combinação dos Campos Elétrico e Magnético	175
	10.3 Força Magnética sobre um Elemento de Corrente	176
	10.4 Trabalho e Potência	177
	10.5 Torque (ou Momento de uma Força)	178
	10.6 Momento Magnético de uma Espira Plana	178
Capítulo 11	Indutância e Circuitos Magnéticos	191
	11.1 Indutância	191
	11.2 Cálculo da Indutância em Configurações Padronizadas	193
	11.3 Lei de Faraday e Auto-Indutância	194
	11.4 Indutância Interna	194
	11.5 Indutância Mútua	195
	11.6 Circuitos Magnéticos	196
	11.7 A Curva B - H	197
	11.8 Lei de Ampère para Circuitos Magnéticos	198
	11.9 Núcleos com Entreferro de Ar	200
	11.10 Núcleos com Múltiplas Bobinas	200
	11.11 Circuitos Magnéticos Paralelos	201
Capítulo 12	A Corrente de Deslocamento e a Força Eletromotriz Induzida (FEM)	216
	12.1 A Corrente de Deslocamento	216
	12.2 Relação entre J_e e J_p	218
	12.3 Lei de Faraday e a Lei de Lenz	218
	12.4 Condutores em Movimento Relativo em um Campo Magnetostático	219
	12.5 Condutores em Movimento Relativo em um Campo Magnético Variável no Tempo	220
Capítulo 13	As Equações de Maxwell e Condições de Contorno	231
	13.1 Introdução	231
	13.2 Condições de Contorno para Campos Magnéticos	231
	13.3 Condições de Contorno em uma Película de Corrente	233
	13.4 Resumo das Condições de Contorno	233
	13.5 Equações de Maxwell	234
Capítulo 14	Ondas Eletromagnéticas	243
	14.1 Introdução	243
	14.2 Equações de Onda	243
	14.3 Soluções Unidimensionais em Coordenadas Cartesianas	244
	14.4 Soluções para Meios Quase Condutores	246
	14.5 Soluções para Dielétricos Perfeitos	247
	14.6 Soluções para Bons Condutores: Profundidade de Penetração	247
	14.7 Ondas em Interfaces: Incidência Normal	248
	14.8 Ondas em Interfaces: Incidência Oblíqua e a Lei de Snell	250
	14.9 Polarização Ortogonal	251
	14.10 Polarização Paralela	251
	14.11 Ondas Estacionárias	252
	14.12 Transporte de Energia e o Vetor de Poynting	253

Capítulo 15	Linhas de Transmissão	265
	15.1 Introdução	265
	15.2 Parâmetros Distribuídos	265
	15.3 Modelo Incremental: Tensões e Correntes na Linha	267
	15.4 Estado Estacionário com Excitação Senoidal	267
	15.5 A Carta de Smith	270
	15.6 Casamento de Impedância	272
	15.7 Casamento de Impedância: Estube Simples	273
	15.8 Casamento de Impedância: Estube Duplo	274
	15.9 Medição de Impedância	276
	15.10 Transitórios em Linhas sem Perdas	277
Capítulo 16	Guias de Onda	303
	16.1 Introdução	303
	16.2 Campos Transversal e Axial	303
	16.3 Modos TE e TM: Impedância de Onda	305
	16.4 Determinação dos Campos Axiais	305
	16.5 Frequência de Corte	307
	16.6 Modo Dominante	307
	16.7 Potência Transmitida em um Guia de Ondas sem Perdas	309
	16.8 Dissipação de Potência em um Guia de Ondas com Perdas	309
Capítulo 17	Antenas	323
	17.1 Introdução	323
	17.2 Fonte de Corrente de Entrada e os Campos E e H	323
	17.3 Antena de Dipolo Elétrico (Hertziana)	324
	17.4 Parâmetros da Antena	325
	17.5 Antena Tipo Espira-Circular	326
	17.6 Antena Dipolo Curto	327
	17.7 Antena Monopolar	328
	17.8 Impedância de Entrada <i>versus</i> Impedância Mútua	329
	17.9 Antena Receptora	330
	17.10 Arranjos Lineares	331
	17.11 Refletores	332
Apêndice		345
Índice		347

Capítulo 1

Análise Vetorial

INTRODUÇÃO

Vetores são introduzidos nos cursos de Física e de Matemática e descritos inicialmente no sistema de coordenadas cartesianas. Embora alguns livros-texto de Cálculo apresentem o sistema de coordenadas cilíndricas, raramente encontramos o sistema de coordenadas esféricas. Os três sistemas de coordenadas devem ser empregados no estudo do Eletromagnetismo. Tanto para vetores como para sistemas de coordenadas, a notação encontrada difere de um livro-texto para outro. A perfeita compreensão da notação adotada é de fundamental importância na esquematização dos problemas e na obtenção das soluções.

NOTAÇÃO VETORIAL

Empregaremos símbolos em negrito quando se tratar de *vetores* (quantidades que possuem módulo, direção e sentido) para distingui-los dos *escalares* (quantidades que possuem apenas módulo e sinal). Um *vetor unitário*, vetor de valor absoluto (ou magnitude ou comprimento) 1, será indicado neste livro por uma letra minúscula em negrito, por exemplo **a**. O vetor unitário na direção de um vetor arbitrário **A** é determinado dividindo **A** pelo valor absoluto dele:

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathbf{A}}{A}$$

Utilizando-se, como é habitual, os vetores unitários **a_x**, **a_y** e **a_z** ao longo dos eixos *x*, *y* e *z* do sistema de coordenadas cartesianas, podemos escrever um vetor arbitrário em *componentes cartesianas* como:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$$

Em termos das *componentes cartesianas*, o valor absoluto desse vetor **A** é definido por:

$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

1.3 ÁLGEBRA VETORIAL

1. Vetores podem ser somados e subtraídos.

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \pm \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \pm (B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z) \\ &= (A_x \pm B_x) \mathbf{a}_x + (A_y \pm B_y) \mathbf{a}_y + (A_z \pm B_z) \mathbf{a}_z\end{aligned}$$

2. As propriedades associativa, distributiva e comutativa (comutatividade em relação à soma) são válidas.

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \\ k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= k\mathbf{A} + k\mathbf{B} \quad (k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A} \\ \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B} + \mathbf{A}\end{aligned}$$

3. O produto escalar de dois vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} é, por definição,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (\text{lê-se "A escalar B"})$$

onde θ é o menor ângulo entre \mathbf{A} e \mathbf{B} . No exemplo 1 é mostrado que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Perceba que, em particular, $|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$.

Exemplo 1 O produto escalar obedece à propriedade distributiva e à multiplicação ordinária

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad \mathbf{A} \cdot k\mathbf{B} = k(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot (B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z) \\ &= A_x B_x (\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x) + A_y B_y (\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y) + A_z B_z (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z) \\ &\quad + A_x B_y (\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y) + \dots + A_z B_y (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y)\end{aligned}$$

Entretanto $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1$ porque $\cos \theta = 1$ quando $\theta = 0^\circ$ entre os vetores do produto escalar. Quando $\theta = 90^\circ$, $\cos \theta = 0$. Assim todos os demais produtos escalares ($\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z = \dots = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y$) são zero. Logo,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

4. O produto vetorial* de dois vetores é, por definição,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB \sin \theta) \mathbf{a}_n \quad (\text{lê-se "A vetorial B" ou "A vet B"})$$

onde θ é o menor ângulo entre \mathbf{A} e \mathbf{B} , e \mathbf{a}_n é o vetor unitário na direção normal (perpendicular) ao plano gerado pelos vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} , quando eles são desenhados com as origens coincidentes. Há dois vetores normais a esse plano, o que possibilita duas escolhas para o vetor unitário. É necessário especificar univocamente o sentido. O vetor normal será aquele gerado quando fixamos quatro dedos da mão direita (exceto o polegar) no primeiro vetor do produto, no caso \mathbf{A} , e movemos esses dedos em direção ao segundo, no caso \mathbf{B} (Fig. 1-1). O

* N. de T. Deve ser mencionado que o caráter vetorial desse produto é um acidente associado à natureza ordinária do espaço \mathcal{R}^3 e que se mantém apenas para esse espaço. Tecnicamente é possível definir um produto vetorial em \mathcal{R}^7 , espaço 7-dimensional, mas tal produto teria propriedades patologicamente inaceitáveis.

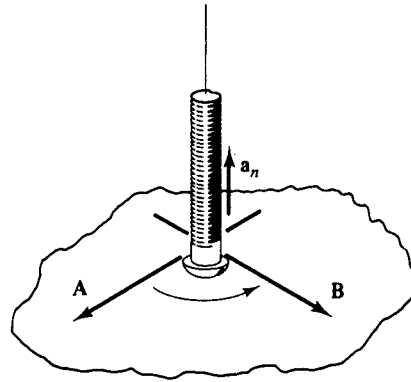


Fig. 1-1

polegar apontará o sentido da normal. Essa é a famosa “regra da mão direita”. Graças à essa dupla possibilidade de escolha da normal, a propriedade comutativa não se aplica ao produto vetorial. Aplicando a “regra da mão direita” percebemos que,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

Expandindo o produto vetorial em termos das componentes cartesianas vem

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \times (B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{a}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{a}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

O que pode ser convenientemente escrito na forma de determinante:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Exemplo 2 Dados $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z$ e $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y$, encontramos $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ e $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (2)(1) + (4)(-1) + (-3)(0) = -2$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y - 6\mathbf{a}_z$$

1.4 SISTEMAS DE COORDENADAS

Um problema que exhibe simetria cilíndrica ou esférica pode ser esquematizado e resolvido em coordenadas cartesianas. Todavia, a solução não explicita a simetria do problema e, na maioria dos casos, é desnecessariamente complexa. Assim, ao longo deste livro, utilizaremos coordenadas cilíndricas e esféricas sempre que as coordenadas cartesianas se mostrarem inadequadas. A simetria do problema dirá qual sistema adotar e, para cada problema, vale a pena analisar a simetria antes de começar a resolução do mesmo. Os três sistemas de coordenadas serão analisados juntos de modo a ilustrar as semelhanças e diferenças entre eles.

Um ponto P é descrito em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas, respectivamente, por (x, y, z) , (r, ϕ, z) e (r, θ, ϕ) . A Fig. 1-2 mostra cada caso. A ordem das coordenadas é muito importante e deve ser seguida com bastante rigor. Então, como exemplo, não escreva a coordenada z no lugar da coordenada x no sistema cartesiano. O ângulo ϕ é o mesmo tanto em coordenadas cilíndricas quanto em coordenadas esféricas. Entretanto, de modo a não deixar dúvidas sobre qual sistema de coordenadas está sendo adotado, ϕ aparece na segunda posição no sistema cilíndrico (r, ϕ, z) e na terceira posição no sistema esférico (r, θ, ϕ) . O mesmo símbolo, r , é usado em coordenadas

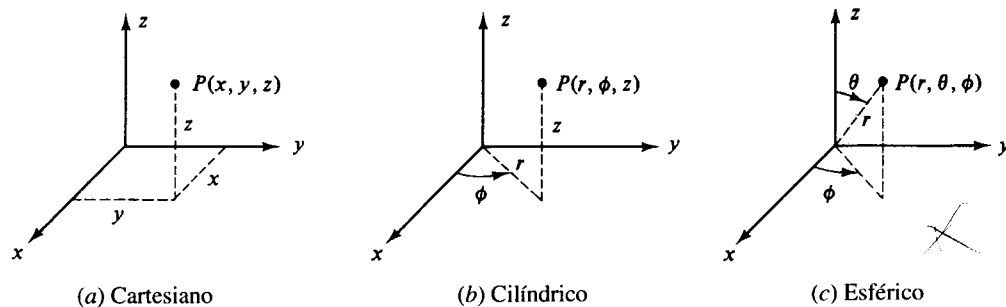


Fig. 1-2

cilíndricas e esféricas, mas com significados completamente diferentes. Em coordenadas cilíndricas, r mede a distância ao eixo z , tomada no plano normal a este; no sistema esférico, r mede a distância da origem ao ponto P . O contexto do problema, como veremos, mostrará que coordenada r empregar.

Um ponto P também pode ser definido como a interseção de três superfícies ortogonais (perpendiculares), denominadas *superfícies coordenadas*, como mostrado na Fig. 1-3. Em coordenadas cartesianas, as superfícies são os planos infinitos $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ e $z = \text{const.}$ Em coordenadas cilíndricas, $z = \text{const.}$ é o mesmo plano do sistema de coordenadas cartesianas; $\phi = \text{const.}$ é o semi-plano que contém o eixo z . $r = \text{const.}$ é um cilindro circular reto. Essas três superfícies são ortogonais entre si e a interseção delas localiza o ponto P . Em coordenadas esféricas, $r = \text{const.}$ é uma esfera com centro na origem; $\theta = \text{const.}$ é um cone circular reto, cujo eixo é o eixo z , e o vértice está localizado na origem. Perceba que o ângulo θ está limitado a $0 \leq \theta \leq \pi$. $\phi = \text{const.}$ é o semi-plano que contém o eixo z , idêntico ao semi-plano z das coordenadas cilíndricas.

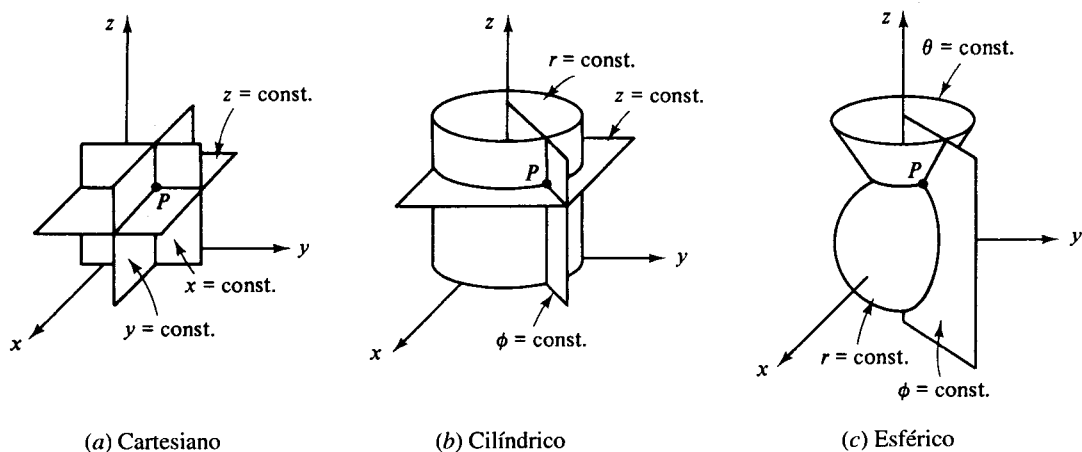


Fig. 1-3

A Fig. 1-4 mostra em detalhes os três vetores unitários no ponto P . No sistema cartesiano, os vetores unitários possuem direções fixas, independentemente da localização de P . Isto não ocorre para os outros dois sistemas (exceto \mathbf{a}_z no sistema cilíndrico). A cada superfície coordenada temos associado um vetor normal unitário. Cada um desses vetores tem o sentido apontando na direção positiva da coordenada correspondente. É importante perceber também que um vetor unitário pode ser gerado a partir do produto vetorial dos outros vetores da base:

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \quad \mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z \quad \mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi$$

Um vetor \mathbf{A} escrito em termos das componentes, na base dos vetores unitários, para os três sistemas de coordenadas, toma a forma

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z \quad (\text{cartesiano})$$

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{a}_r + A_\phi \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z \quad (\text{cilíndrico})$$

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\phi \mathbf{a}_\phi \quad (\text{esférico})$$

Deve ser observado que as componentes A_x , A_r , A_ϕ , etc. não são necessariamente constantes, mas freqüentemente são funções das coordenadas do sistema em particular.

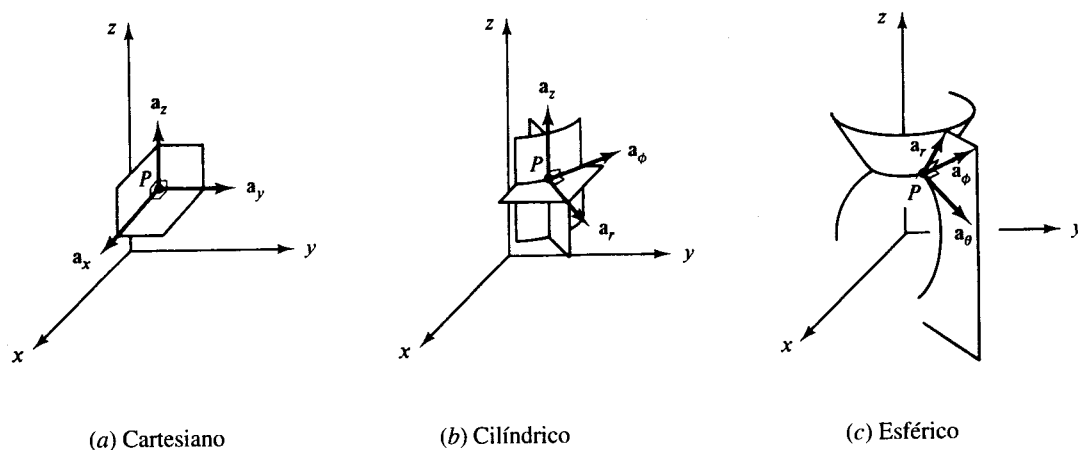


Fig. 1-4

ELEMENTOS DE LINHA, DE ÁREA E DE VOLUME

Poucos problemas no Eletromagnetismo podem ser resolvidos sem algum tipo de integração ao longo de uma curva, sobre uma superfície ou em um volume. Assim os elementos diferenciais de linha, área e volume correspondentes a cada sistema de coordenadas devem ser construídos a partir dos incrementos nas coordenadas.

Quando as coordenadas do ponto P são incrementadas de um elemento diferencial $(x + dx, y + dy, z + dz)$ ou $(r + dr, \phi + d\phi, z + dz)$ ou $(r + dr, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$ forma-se um elemento diferencial de volume dv . Em primeira ordem, um elemento diferencial de volume é uma caixa retangular para quaisquer sistemas de coordenadas. O elemento dv é calculado, em cada sistema de coordenadas, pelas expressões na Fig. 1-5.

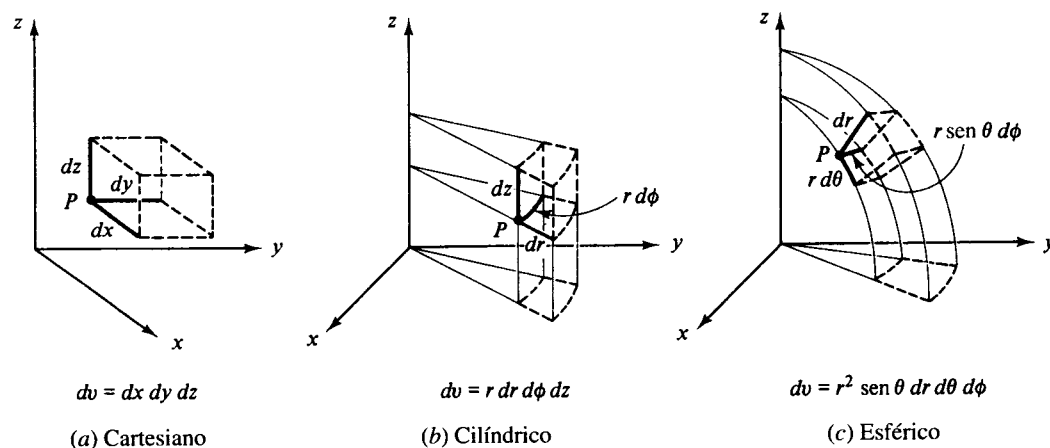


Fig. 1-5

Da Fig. 1-5 podem ser lidos os elementos diferenciais de área e de volume. Por exemplo, em coordenadas esféricas, o elemento diferencial de área, perpendicular a a_r , é

$$dS = (r d\theta)(r \sin \theta d\phi) = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

O elemento diferencial de linha, $d\ell$, é a diagonal a partir de P . Assim,

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{cartesiano})$$

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2 \quad (\text{cilíndrico})$$

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (\text{esférico})$$

Problemas Resolvidos

1.1 Mostre que o vetor que liga o ponto $M(x_1, y_1, z_1)$ ao ponto $N(x_2, y_2, z_2)$ na Fig. 1-6 é dado por

$$(x_2 - x_1)\mathbf{a}_x + (y_2 - y_1)\mathbf{a}_y + (z_2 - z_1)\mathbf{a}_z$$

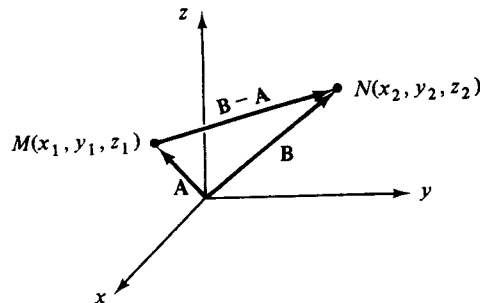


Fig. 1-6

As coordenadas de M e N são usadas para escrever a posição dos dois vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} na Fig. 1-6.

$$\mathbf{A} = x_1\mathbf{a}_x + y_1\mathbf{a}_y + z_1\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{B} = x_2\mathbf{a}_x + y_2\mathbf{a}_y + z_2\mathbf{a}_z$$

Então,

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = (x_2 - x_1)\mathbf{a}_x + (y_2 - y_1)\mathbf{a}_y + (z_2 - z_1)\mathbf{a}_z$$

1.2 Encontre o vetor \mathbf{A} dirigido do ponto $(2, -4, 1)$ ao ponto $(0, -2, 0)$ em coordenadas cartesianas. Ache também o vetor unitário ao longo de \mathbf{A} .

$$\mathbf{A} = (0 - 2)\mathbf{a}_x + [-2 - (-4)]\mathbf{a}_y + (0 - 1)\mathbf{a}_z = -2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$$

$$|\mathbf{A}|^2 = (-2)^2 + (2)^2 + (-1)^2 = 9$$

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = -\frac{2}{3}\mathbf{a}_x + \frac{2}{3}\mathbf{a}_y - \frac{1}{3}\mathbf{a}_z$$

1.3 Calcule a distância entre $(5, 3\pi/2, 0)$ e $(5, \pi/2, 10)$ em coordenadas cilíndricas.

Primeiro obtenha a posição *cartesiana* dos vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} (veja Fig. 1-7).

$$\mathbf{A} = -5\mathbf{a}_y \quad \mathbf{B} = 5\mathbf{a}_y + 10\mathbf{a}_z$$

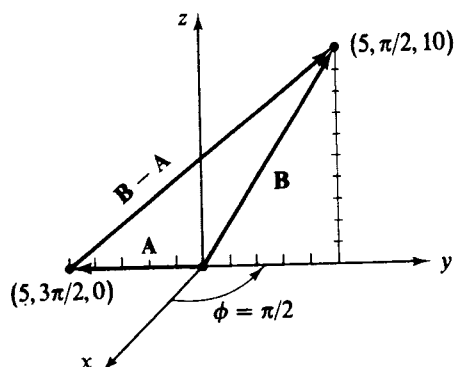


Fig. 1-7

Então $\mathbf{B} - \mathbf{A} = 10\mathbf{a}_y + 10\mathbf{a}_z$ e a distância desejada entre os pontos é o módulo.

$$|\mathbf{B} - \mathbf{A}| = 10\sqrt{2}$$

Não é possível utilizar as coordenadas cilíndricas dos pontos para se obter o vetor que liga os dois e, então, calcular a distância entre eles, do mesmo modo que foi feito em coordenadas cartesianas no Problema 1.1.

- 1.4 Mostre que os vetores $\mathbf{A} = 4\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$ e $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 4\mathbf{a}_z$ são perpendiculares entre si.

Desde que o produto escalar leva em consideração o co-seno do ângulo entre os vetores, $\cos \theta$, um produto escalar zero implica que os vetores não nulos só podem formar ângulo tal que $\theta = 90^\circ$.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (4)(1) + (-2)(4) + (-1)(-4) = 0$$

- 1.5 Dados $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y$ e $\mathbf{B} = 6\mathbf{a}_y - 4\mathbf{a}_z$, encontre o menor ângulo entre eles usando (a) produto vetorial, (b) produto escalar.

$$\begin{aligned} (a) \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -16\mathbf{a}_x + 8\mathbf{a}_y + 12\mathbf{a}_z \\ |\mathbf{A}| &= \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (0)^2} = 4,47 \\ |\mathbf{B}| &= \sqrt{(0)^2 + (6)^2 + (-4)^2} = 7,21 \\ |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| &= \sqrt{(-16)^2 + (8)^2 + (12)^2} = 21,54 \end{aligned}$$

Então, desde que $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta$,

$$\sin \theta = \frac{21,54}{(4,47)(7,21)} = 0,668 \quad \text{ou} \quad \theta = 41,9^\circ$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (2)(0) + (4)(6) + (0)(-4) = 24 \\ \cos \theta &= \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} = \frac{24}{(4,47)(7,21)} = 0,745 \quad \text{ou} \quad \theta = 41,9^\circ \end{aligned}$$

- 1.6 Dado $\mathbf{F} = (y - 1)\mathbf{a}_x + 2x\mathbf{a}_y$, encontre o vetor no ponto (2, 2, 1) e a projeção dele sobre \mathbf{B} , onde $\mathbf{B} = 5\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(2, 2, 1) &= (2 - 1)\mathbf{a}_x + (2)(2)\mathbf{a}_y \\ &= \mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y \end{aligned}$$

Como está indicado na Fig. 1-8, a projeção de um vetor \mathbf{A} sobre um segundo vetor \mathbf{B} é feita encontrando o vetor unitário \mathbf{a}_B na direção de \mathbf{B} e realizando o produto escalar de \mathbf{A} com o unitário de \mathbf{B} .

$$\text{Projeção de } \mathbf{A} \text{ sobre } \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_B = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$$

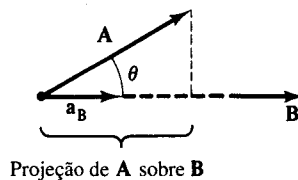


Fig. 1-8

Assim, no ponto (2, 2, 1),

$$\text{Projeção de } \mathbf{F} \text{ sobre } \mathbf{B} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \frac{(1)(5) + (4)(-1) + (0)(2)}{\sqrt{30}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$$

- 1.7 Dados $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y$, $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y$ e $\mathbf{C} = 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$, encontre $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ e compare-o com $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$$

Então,

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$$

Cálculos semelhantes mostram que $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 2\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$. Assim a ordem dos parênteses é importante, pois os resultados são diferentes. Isso mostra que o produto vetorial triplo não é associativo.

- 1.8 Usando os vetores \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} do Problema 1.7, encontre $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ e compare-o com $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$.

Do Problema 1.7, $\mathbf{B} \times \mathbf{C} = -4\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ calculamos. Então,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = (1)(-4) + (1)(-1) + (0)(2) = -5$$

Também do Problema 1.7, calculamos $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 2\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$. Então,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = (2)(0) + (-2)(2) + (-1)(1) = -5$$

Os parênteses não são necessários no produto escalar triplo se for guardada a ordem cíclica dos vetores. Noutros casos, o resultado será o mesmo, a menos de um sinal. Em geral, pode ser demonstrado que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

A mudança no sinal pode ser explicada pela propriedade dos determinantes que mostra que, se duas linhas são permutadas, o determinante ganha um sinal negativo. Mantendo a ordem cíclica, manteremos assim as linhas do determinante inalteradas.

- 1.9 Expresse o vetor unitário que aponta de $z = h$, sobre eixo z , até o ponto $(r, \phi, 0)$ em coordenadas cilíndricas. Veja a Fig. 1-9.

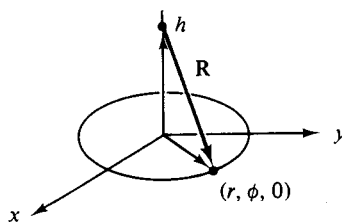


Fig. 1-9

O vetor \mathbf{R} é a diferença entre de dois vetores:

$$\mathbf{R} = r\mathbf{a}_r - h\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{r\mathbf{a}_r - h\mathbf{a}_z}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

O ângulo ϕ não aparece explicitamente nessas expressões. Todavia, tanto \mathbf{R} como \mathbf{a}_R variam com ϕ através de \mathbf{a}_r .

- 1.10 Encontre o vetor unitário para o vetor \mathbf{R} que parte de um ponto arbitrário sobre o plano $z = -5$ até a origem, conforme mostra Fig. 1-10.

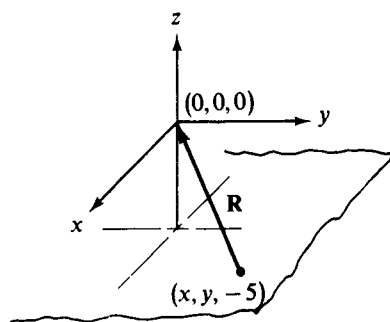


Fig. 1-10

Visto que o problema está em coordenadas cartesianas, o método das diferenças do Problema 1.1 se aplica.

$$\mathbf{R} = -x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{-x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + 25}}$$

- 1.11 Use coordenadas esféricas para encontrar a área da região $\alpha \leq \theta \leq \beta$, sobre a casca esférica de raio a (Fig. 1-11). Qual é o resultado quando $\alpha = 0$ e $\beta = \pi$?

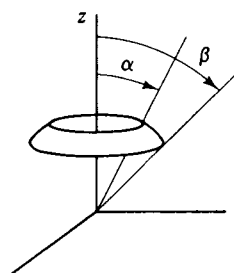


Fig. 1-11

O elemento diferencial de área é [veja Fig. 1-5(c)]

$$dS = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

Então,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_\alpha^\beta a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= 2\pi a^2 (\cos \alpha - \cos \beta) \end{aligned}$$

Quando, $\alpha = 0$ e $\beta = \pi$, $A = 4\pi a^2$, o que é, evidentemente, toda a área da superfície esférica.

- 1.12 Obtenha a expressão para o volume de uma esfera de raio a , a partir do dv correspondente.

Da Fig. 1-5(c), $dv = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$. Então,

$$v = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi = \frac{4}{3} \pi a^3$$

- 1.13 Use o sistema de coordenadas cilíndricas para encontrar a área da superfície curva de um cilindro circular reto, onde $r = 2\text{m}$, $h = 5\text{m}$ e $30^\circ \leq \phi \leq 120^\circ$ (veja Fig. 1-12).

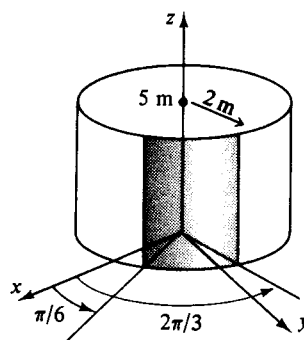


Fig. 1-12

O elemento diferencial de área é $dS = r d\phi dz$. Logo,

$$A = \int_0^5 \int_{\pi/6}^{2\pi/3} 2 d\phi dz$$

$$= 5\pi \text{ m}^2$$

1.14 Transforme

$$\mathbf{A} = y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{a}_z$$

de cartesiano para coordenadas cilíndricas.

Olhando a Fig. 1-2(b),

$$x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Por isso,

$$\mathbf{A} = r \sin \phi \mathbf{a}_x + r \cos \phi \mathbf{a}_y + r \cos^2 \phi \mathbf{a}_z$$

As projeções dos vetores cartesianos unitários sobre \mathbf{a}_r , \mathbf{a}_ϕ e \mathbf{a}_z são:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r = \cos \phi & \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi = -\sin \phi & \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z = 0 \\ \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_r = \sin \phi & \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi = \cos \phi & \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = 0 \\ \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r = 0 & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi = 0 & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1 \end{array}$$

Desse modo,

$$\mathbf{a}_x = \cos \phi \mathbf{a}_r - \sin \phi \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{a}_y = \sin \phi \mathbf{a}_r + \cos \phi \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z$$

E, finalmente,

$$\mathbf{A} = 2r \sin \phi \cos \phi \mathbf{a}_r + (r \cos^2 \phi - r \sin^2 \phi) \mathbf{a}_\phi + r \cos^2 \phi \mathbf{a}_z$$

- 1.15 Um vetor de módulo 10 aponta de $(5, 5\pi, 0)$ em direção à origem do sistema de coordenadas cilíndricas (Fig. 1-13). Expresse tal vetor em coordenadas cartesianas.

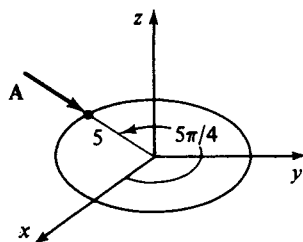


Fig. 1-13

Em coordenadas cilíndricas o vetor é escrito simplesmente como $10\mathbf{a}_\phi$, onde $\phi = \pi/4$. Assim,

$$A_x = 10 \cos \frac{\pi}{4} = \frac{10}{\sqrt{2}} \quad A_y = 10 \sin \frac{\pi}{4} = \frac{10}{\sqrt{2}} \quad A_z = 0$$

Tal que,

$$\mathbf{A} = \frac{10}{\sqrt{2}} \mathbf{a}_x + \frac{10}{\sqrt{2}} \mathbf{a}_y$$

Note que o valor da coordenada radial, 5, é irrelevante para solução do problema.

Problemas Complementares

1.16 Dados $\mathbf{A} = 4\mathbf{a}_x + 10\mathbf{a}_z$ e $\mathbf{B} = 2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y$, encontre a projeção de \mathbf{A} sobre \mathbf{B} .

Resp. $12/\sqrt{13}$.

1.17 Dados $\mathbf{A} = (10/\sqrt{2})(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z)$ e $\mathbf{B} = 3(\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)$, expresse a projeção de \mathbf{B} sobre \mathbf{A} como um vetor na direção de \mathbf{A} .

Resp. $1,50(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z)$

1.18 Ache o menor ângulo entre $\mathbf{A} = 10\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ e $\mathbf{B} = -4\mathbf{a}_y + 0,5\mathbf{a}_z$ usando tanto o produto escalar como o produto vetorial.

Resp. $161,5^\circ$

1.19 Repita o problema anterior para os vetores $\mathbf{A} = 5,8\mathbf{a}_x + 1,55\mathbf{a}_z$ e $\mathbf{B} = -6,93\mathbf{a}_y + 4,0\mathbf{a}_z$.

Resp. 135°

1.20 Dado o plano $4x + 3y + 2z = 12$, encontre o vetor unitário normal à superfície, na direção positiva em relação à origem.

Resp. $(4\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z)/\sqrt{29}$

1.21 Encontre as relações a serem satisfeitas entre as componentes cartesianas de dois vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} , para que tais vetores sejam paralelos em todos os pontos do espaço vetorial.

Resp. $\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$

1.22 Encontre o vetor unitário que aponta para origem a partir de um ponto arbitrário sobre a reta $x = 0$ e $y = 3$.

Resp. $\mathbf{a} = \frac{-3\mathbf{a}_y - z\mathbf{a}_z}{\sqrt{9 + z^2}}$

1.23 Ache o vetor unitário dirigido ao ponto (x_1, y_1, z_1) partindo de um ponto arbitrário sobre o plano $y = -5$.

Resp. $\mathbf{a} = \frac{(x_1 - x)\mathbf{a}_x + (y_1 + 5)\mathbf{a}_y + (z_1 - z)\mathbf{a}_z}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 + 5)^2 + (z_1 - z)^2}}$

1.24 Encontre o vetor unitário dirigido ao ponto $(0, 0, h)$ partindo de um ponto arbitrário no plano $z = -2$.

Resp. $\mathbf{a} = \frac{-x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y + (h + 2)\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + (h + 2)^2}}$

1.25 Dados $\mathbf{A} = 5\mathbf{a}_x$ e $\mathbf{B} = 4\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y$, encontre B_y tal que o ângulo entre \mathbf{A} e \mathbf{B} seja 45° . Se \mathbf{B} também possuir um termo $B_z\mathbf{a}_z$, que relação deve existir entre B_y e B_z ?

Resp. $B_y = \pm 4, \quad \sqrt{B_y^2 + B_z^2} = 4$

1.26 Mostre que o valor absoluto (módulo) de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ é o volume do paralelepípedo de lados \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} . (Sugestão: primeiro mostre que a base possui área $|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|$.)

1.27 Dados $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_z$, $\mathbf{B} = 3\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y$ e $\mathbf{C} = -2\mathbf{a}_x + 6\mathbf{a}_y - 4\mathbf{a}_z$, mostre que \mathbf{C} é perpendicular simultaneamente a \mathbf{A} e \mathbf{B} .

1.28 Dados $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{a}_z$ e $\mathbf{C} = -\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y$, calcule $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$. Examine outras variações desse produto escalar triplo.

Resp. $-4, \pm 4$

1.29 Use os vetores do Problema 1.28 para calcular $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$.

Resp. $-8\mathbf{a}_z$

1.30 Encontre o vetor unitário partindo do ponto $(2, -5, -2)$ em direção a $(14, -5, 3)$.

Resp. $\mathbf{a} = \frac{12}{13}\mathbf{a}_x + \frac{5}{13}\mathbf{a}_z$

1.31 Ache o vetor dirigido do ponto $(10, 3\pi/4, \pi/6)$ ao ponto $(5, \pi/4, \pi)$, pontos expressos em coordenadas esféricas.

Resp. $-9,66\mathbf{a}_x - 3,54\mathbf{a}_y + 10,61\mathbf{a}_z$

1.32 Ache a distância entre $(2, \pi/6, 0)$ e $(1, \pi, 2)$, onde os pontos são dados em coordenadas cilíndricas.

Resp. 3,53

1.33 Ache a distância entre $(1, \pi/4, 0)$ e $(1, 3\pi/4, \pi)$, onde os pontos são dados em coordenadas esféricas.

Resp. 2,0

1.34 Use coordenadas esféricas e integre-as para encontrar a área da região $0 \leq \phi \leq \alpha$ na casca esférica de raio a . Qual é o resultado quando impomos $\alpha = 2\pi$?

Resp. $2\alpha a^2, A = 4\pi a^2$

1.35 Use coordenadas cilíndricas para encontrar a área da superfície curva de um cilindro circular reto de raio a e altura h .

Resp. $2\pi ah$

1.36 Use coordenadas cilíndricas e integre-as para obter o volume do cilindro circular reto do Problema 1.35.

Resp. $\pi a^2 h$

1.37 Use coordenadas esféricas para escrever as diferenciais de área dS_1 e dS_2 e então integre-as para obter as áreas das regiões hachuradas 1 e 2 na Fig. 1-14.

Resp. $\pi/4, \pi/6$

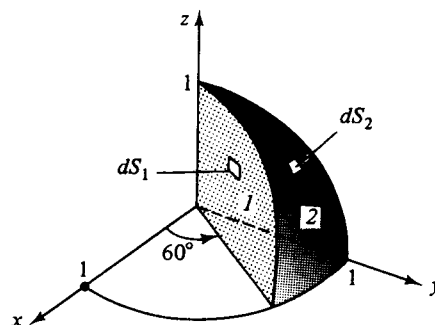


Fig. 1-14

1.38 Use coordenadas esféricas para encontrar o volume de uma casca hemisférica de raio interno 2,00m e raio externo 2,02m.

Resp. $0,162\pi \text{ m}^3$

1.39 Usando coordenadas esféricas para expressar o diferencial de volume, integre esse diferencial para obter o volume definido por $(1 \leq r \leq 2)\text{m}$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e $0 \leq \phi \leq \pi/2$.

Resp. $7\pi/6 \text{ m}^3$

Capítulo 2

Forças de Coulomb e o Vetor Campo Elétrico

LEI DE COULOMB

Entre duas cargas elétricas existe uma força diretamente proporcional às magnitudes das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa. Esta é a *Lei de Coulomb* que foi desenvolvida em um trabalho com pequenos corpos carregados presos a uma delicada balança de torção.

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon d^2} \mathbf{a}$$

Ao longo do livro será adotado o Sistema Internacional de Unidades (SI). A força é medida em newtons (N), a distância em metros (m) e a unidade de carga (derivada do SI) é o Coulomb (C). O sistema está racionalizado de um fator 4π , introduzido na Lei de Coulomb de modo a simplificar, mais tarde, as equações de Maxwell. O símbolo ϵ é a *permisividade* do meio, cuja unidade é o $C^2/N \cdot m^2$ ou, equivalentemente, farads por metro (F/m). No espaço livre ou vácuo,

$$\epsilon = \epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m} \approx \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ F/m}$$

Nos demais tipos de meios, diferentes do vácuo, $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, sendo ϵ_r a *permisividade relativa* ou *constante dielétrica* do meio. A menos que seja feita alguma ressalva, o vácuo será assumido em todos os problemas e exemplos do livro.

Para cargas pontuais de sinais iguais, a força de Coulomb é repulsiva. Se as cargas forem de sinais diferentes, a força é atrativa. Para incorporar esta informação na equação, basta rescrever a Lei de Coulomb como segue:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{21}^2} \mathbf{a}_{21} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{21}^3} \mathbf{R}_{21}$$

onde \mathbf{F}_1 é a força sobre a carga Q_1 devido à presença da segunda carga Q_2 , \mathbf{a}_{21} é o *vetor unitário apontando de Q_2 para Q_1* e $\mathbf{R}_{21} = R_{21} \mathbf{a}_{21}$ é o *vetor deslocamento de Q_2 a Q_1* .

Exemplo 1 Calcule a força sobre a $Q_1 = 20\mu\text{C}$ em virtude da carga $Q_2 = -300\mu\text{C}$. Q_1 está localizada em (0, 1, 2)m e Q_2 está em (2, 0, 0)m.

Freqüentemente as cargas são dadas em microcoulombs (μC), nanocoulombs (nC) ou picocoulombs (pC), porque 1 C é uma unidade grande demais (Veja o Apêndice para prefixos do sistema SI). Olhando para a Fig. 2-1,

$$\mathbf{R}_{21} = -2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z \quad R_{21} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3$$

$$\mathbf{a}_{21} = \frac{1}{3}(-2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z)$$

$$\begin{aligned} \text{Então,} \quad \mathbf{F}_1 &= \frac{(20 \times 10^{-6})(-300 \times 10^{-6})}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(3)^2} \left(\frac{-2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3} \right) \\ &= 6 \left(\frac{2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z}{3} \right) \text{ N} \end{aligned}$$

O módulo da força vale 6N e a direção é tal que Q_1 é atraída para Q_2 (como era de se esperar).

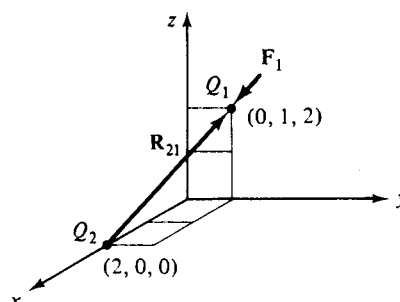


Fig. 2-1

De acordo com a Lei de Coulomb, a relação de forças é bilinear em cada uma das cargas. Significa que se estivermos lidando com um sistema de duas ou mais cargas (múltiplas cargas), a força resultante na carga Q_i será o somatório sobre as outras Q_j cargas divididas pelo quadrado da distância que separa a carga Q_i da carga Q_j ($j \neq i$). O somatório fica racionalizado de um fator $4\pi\epsilon_0$ (veja a expressão abaixo). Em outras palavras, o somatório assegura a validade do *princípio da superposição* para forças de Coulomb. A força sobre a carga Q_1 devido a todas as outras $n - 1$ cargas Q_2, Q_3, \dots, Q_n é a *soma vetorial* das forças individuais:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{21}^2} \mathbf{a}_{21} + \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{31}^2} \mathbf{a}_{31} + \dots = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=2}^n \frac{Q_k}{R_{k1}^2} \mathbf{a}_{k1}$$

A extensão natural do princípio da superposição para o caso em que uma certa quantidade de cargas está continuamente distribuída sobre uma superfície, ou encerrada numa região espacial, é a substituição da soma vetorial por uma *integração vetorial* (veja Seção 2.3).

O campo de forças ao redor de uma carga isolada Q é esfericamente simétrico. Isto torna-se evidente localizando Q na origem do sistema de coordenadas esféricas. O vetor posição \mathbf{R} da carga Q , localizada na origem, a uma pequena carga teste Q_i ($Q_i \ll Q$) é escrito como $r\mathbf{a}_r$. Então,

$$\mathbf{F}_i = \frac{Q_i Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

mostrando que, sobre uma superfície esférica $r = \text{constante}$, $|\mathbf{F}_i|$ é constante e \mathbf{F}_i é radial.

2.2 VETOR CAMPO ELÉTRICO

Suponha que a carga teste Q_i seja suficientemente pequena, se comparada à carga Q ($Q_i \ll Q$), de tal sorte que, quando colocada nas proximidades de uma carga fixa, não perturbe significativamente o campo produzido por Q . Então, o *vetor campo elétrico* (\mathbf{E}) devido à carga Q é definido como sendo a força por unidade de carga Q_i : $\mathbf{E} = \mathbf{F}_i/Q_i$.

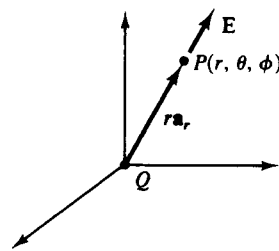
Estabelecendo a origem do sistema de coordenadas esféricas em Q [veja Fig. 2-2(a)], o vetor campo elétrico em um ponto arbitrário P é (da Seção 2.1),

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

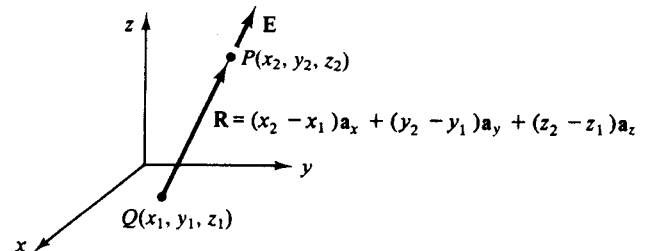
Se a origem do sistema de coordenadas não coincidir com a posição da carga, o vetor campo elétrico dependerá das diferenças relativas entre as coordenadas da carga e do ponto P [veja Fig. 2-2(b)],

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R$$

Definido desse modo, o campo elétrico no sistema SI é medido em newton por Coulomb (N/C) ou, equivalentemente, volt por metro (V/m).



(a) Esférico



(b) Cartesiano

Fig. 2-2

Exemplo 2 Encontre o campo \mathbf{E} em $(0, 3, 4)\text{m}$, em coordenadas cartesianas, devido à carga pontual $Q = 0,5\mu\text{C}$ na origem.

$$\mathbf{R} = 3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z \quad R = 5 \quad \mathbf{a}_R = 0,6\mathbf{a}_y + 0,8\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E} = \frac{0,5 \times 10^{-6}}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(5)^2} (0,6\mathbf{a}_y + 0,8\mathbf{a}_z)$$

Logo $|\mathbf{E}| = 180 \text{ V/m}$ na direção de $\mathbf{a}_R = 0,6\mathbf{a}_y + 0,8\mathbf{a}_z$.

DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS

Volume carregado

Quando cargas estiverem distribuídas em todo um volume específico, um diferencial de carga dQ contribui para o campo elétrico em um ponto externo. O campo elétrico total é obtido via um somatório ou uma integração. Assim, mesmo sabendo que a menor divisão de cargas é um elétron ou próton (portanto carga discreta), é bastante conveniente e útil considerar distribuições contínuas (logo diferenciáveis) de carga e definir uma *densidade volumétrica de carga* por

$$\rho = \frac{dQ}{dv} \quad (\text{C/m}^3)$$

A unidade de densidade de carga está indicada entre parênteses, mostrando que ρ estará em C/m^3 sempre que as variáveis forem expressas em unidades do SI (C para Q e m^3 para v). Esta convenção será adotada ao longo deste livro.

Olhando o volume v na Fig. 2-3, cada diferencial de carga dQ produz correspondente diferencial de campo elétrico $d\mathbf{E}$ no ponto de observação P .