

# 3 ANÁLISE E TRANSMISSÃO DE SINAIS

**E**ngenheiros eletricitas, de modo instintivo, quando pensam sobre sinais e sistema o fazem em termos de espectros de frequência e de respostas em frequência, respectivamente. Até mesmo adolescentes sabem que sinais de áudio têm largura de banda de 20 kHz e que alto-falantes de boa qualidade devem responder até 20 kHz. Isso significa pensar no domínio da frequência. No capítulo anterior, discutimos representações espectrais de sinais periódicos (série de Fourier). No presente capítulo, estenderemos esta representação espectral a sinais aperiódicos.

## 3.1 REPRESENTAÇÃO DE SINAIS APERIÓDICOS ATRAVÉS DA INTEGRAL DE FOURIER

Aplicaremos um processo de limite para mostrar que um sinal aperiódico pode ser expresso como uma soma contínua (integral) de exponenciais eternas. Para representar um sinal aperiódico  $g(t)$ , como o mostrado na Fig. 3.1a, em termos de exponenciais infinitas no tempo, construamos um sinal periódico  $g_{T_0}(t)$  com a repetição do sinal  $g(t)$  a cada  $T_0$  segundos, como indicado na Fig. 3.1b. O período  $T_0$  deve ser suficientemente longo para evitar sobreposição de pulsos repetidos. O sinal periódico  $g_{T_0}(t)$  pode ser representado por uma série de Fourier exponencial. Se fizermos  $T_0 \rightarrow \infty$ , os pulsos no sinal periódico se repetirão após um intervalo infinito, de modo que

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} g_{T_0}(t) = g(t)$$

Portanto, no limite  $T_0 \rightarrow \infty$ , a série de Fourier que representa  $g_{T_0}(t)$  também representa  $g(t)$ . A série de Fourier exponencial para  $g_{T_0}(t)$  é dada por

$$g_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \quad (3.1)$$

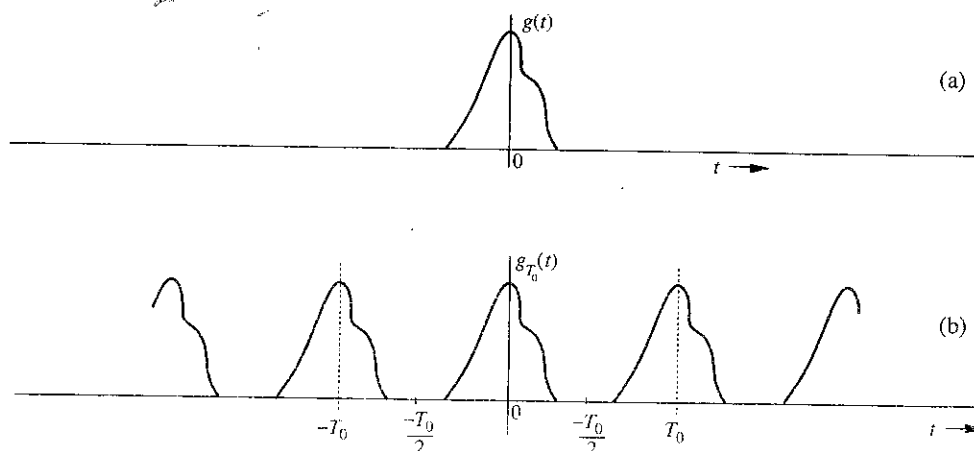
com

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_{T_0}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3.2a)$$

e

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0 \quad (3.2b)$$

**Figura 3.1**  
Construção  
de um sinal  
periódico  
através da  
repetição  
periódica de  
 $g(t)$ .



Vale observar que integrar  $g_{T_0}(t)$  no intervalo  $(-T_0/2, T_0/2)$  é o mesmo que integrar  $g(t)$  em  $(-\infty, \infty)$ . Portanto, a Eq. (3.2a) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \end{aligned} \quad (3.2c)$$

É interessante notar como a natureza do espectro é alterada à medida que  $T_0$  aumenta. Para entender esse fascinante comportamento, definamos  $G(f)$ , uma função contínua de  $\omega$ , como

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.3)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (3.4)$$

em que  $\omega = 2\pi f$ . Um exame das Eqs. (3.2c) e (3.3) revela que

$$D_n = \frac{1}{T_0} G(nf_0) \quad (3.5)$$

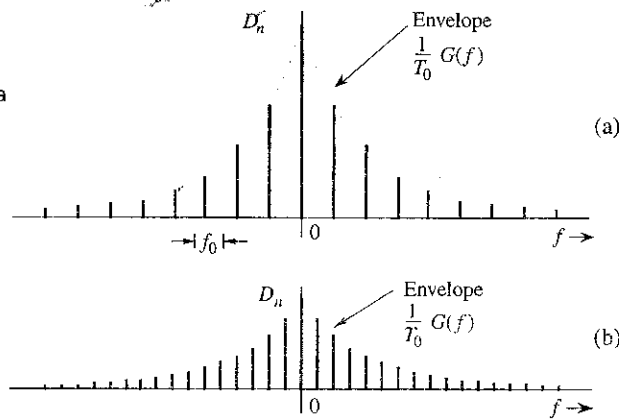
E também que os coeficientes de Fourier  $D_n$  são iguais a  $(1/T_0)$  vezes as amostras de  $G(f)$  uniformemente espaçadas a intervalos de  $f_0$  Hertz, como mostrado na Fig. 3.2a.\*

Portanto,  $(1/T_0)G(f)$  é o envelope dos coeficientes  $D_n$ . Agora, para tomar o limite  $T_0 \rightarrow \infty$ , dobremos o valor de  $T_0$  sucessivamente. Dobrar  $T_0$  significa dividir por dois o valor da frequência fundamental  $f_0$ , ou seja, dobrar o número de componentes (amostras) no espectro. No entanto, dobrar o valor de  $T_0$  implica dividir a amplitude do envelope  $(1/T_0)G(f)$  por dois, como ilustrado na Fig. 3.2b. Se continuarmos com esse processo de dobrar o valor de  $T_0$  sucessivamente, o espectro se torna cada vez mais denso e sua magnitude, menor. Vale observar que, no entanto, a forma do espectro permanece a mesma [proporcional a  $G(f)$  da Eq. (3.3)]. No limite, à medida que  $T_0 \rightarrow \infty$ ,  $f_0 \rightarrow 0$  e  $D_n \rightarrow 0$ . Isso significa que o espectro se torna tão denso que as componentes espectrais são espaçadas por um intervalo nulo (infinitesimal). Ao mesmo tempo, a amplitude de cada componente é zero (infinitesimal). Temos *nada de tudo, embora tenhamos algo!* Isto soa como *Alice no País das Maravilhas* e, como veremos, é característico de um fenômeno muito familiar.\*\*

\*Para simplificar, consideramos, na Fig. 3.2, que  $D_n$  e, portanto,  $G(f)$  são reais. Contudo, o argumento também se aplica a  $D_n$  [ou  $G(f)$ ] complexo.

\*\*Considere isso uma prova irrefutável da máxima que diz que ter 0% de tudo é melhor do que ter 100% de nada!

**Figura 3.2**  
Mudança no espectro de Fourier à medida que o período  $T_0$  na Fig. 3.1 é dobrado.



A substituição da Eq. (3.5) na Eq. (3.1) leva a

$$g_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{G(nf_0)}{T_0} e^{jn2\pi f_0 t} \quad (3.6)$$

À medida que  $T_0 \rightarrow \infty$ ,  $f_0 = 1/T_0$  se torna infinitesimal ( $f_0 \rightarrow 0$ ). Em consequência, podemos substituir  $f_0$  por uma notação mais apropriada,  $\Delta f$ . Em termos desta nova notação, a Eq. (3.2b) passa a

$$\Delta f = \frac{1}{T_0}$$

e a Eq. (3.6),

$$g_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [G(n\Delta f)\Delta f] e^{(j2\pi n\Delta f)t} \quad (3.7a)$$

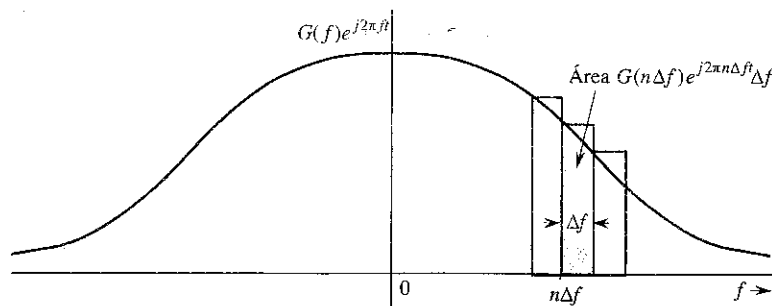
A Eq. (3.7a) mostra que  $g_{T_0}(t)$  pode ser expressa como uma soma de exponenciais infinitas no tempo de frequências  $0, \pm \Delta f, \pm 2\Delta f, \pm 3\Delta f, \dots$  (a série de Fourier). A amplitude da componente de frequência  $n\Delta f$  é  $[G(n\Delta f)\Delta f]$ . No limite, quando  $T_0 \rightarrow \infty$ ,  $\Delta f \rightarrow 0$  e  $g_{T_0}(t) \rightarrow g(t)$ . Portanto,

$$g(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} g_{T_0}(t) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n\Delta f) e^{(j2\pi n\Delta f)t} \Delta f \quad (3.7b)$$

A soma no lado direito da Eq. (3.7b) pode ser vista como a área sob a curva da função  $G(f)e^{j2\pi ft}$ , como mostrado na Fig. 3.3. Logo,

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft} df \quad (3.8)$$

**Figura 3.3**  
No limite  $T_0 \rightarrow \infty$ , a série de Fourier se torna a integral de Fourier.



A integral no lado direito da Eq. (3.8) é denominada **integral de Fourier**. Conseguimos, então, representar um sinal aperiódico  $g(t)$  por uma integral de Fourier\* (em vez de uma série de Fourier). Essa integral é basicamente (no limite) uma série de Fourier com frequência fundamental  $\Delta f \rightarrow 0$ , como visto na Eq. (3.7b). A amplitude da exponencial  $e^{j2\pi n\Delta f t}$  é  $G(n\Delta f)\Delta f$ . Assim, a função  $G(f)$  dada pela Eq. (3.3) atua como uma função espectral.

Denominamos  $G(f)$  a transformada de Fourier **direta** de  $g(t)$ , e  $g(t)$  a transformada de Fourier **inversa** de  $G(f)$ . A mesma informação é transmitida quando dizemos que  $g(t)$  e  $G(f)$  formam um par de transformadas de Fourier. Simbolicamente, isso é representado como

$$G(f) = \mathcal{F}[g(t)] \quad \text{e} \quad g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(f)]$$

ou

$$g(t) \longleftrightarrow G(f)$$

Recapitulando,

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.9a)$$

e

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j\omega t} df \quad (3.9b)$$

em que  $\omega = 2\pi f$ .

É interessante termos em mente que a integral de Fourier na Eq. (3.9b) tem a natureza de uma série de Fourier com frequência fundamental  $\Delta f$  que tende a zero [Eq. (3.7b)]. Portanto, a maioria das considerações sobre a série de Fourier, assim como suas propriedades, se aplica também à transformada de Fourier. Podemos desenhar o gráfico do espectro  $G(f)$  em função de  $f$ . Como  $G(f)$  tem valores complexos, temos espectros de amplitude e de ângulo (fase):

$$G(f) = |G(f)| e^{j\theta_g(f)}$$

em que  $|G(f)|$  é a amplitude e  $\theta_g(f)$ , o ângulo (ou fase) de  $G(f)$ . Da Eq. (3.9a),

$$G(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{j2\pi ft} dt$$

### *f versus $\omega$*

Na representação de sinais no domínio da frequência, usamos as notações equivalentes de frequência angular  $\omega$  e frequência  $f$  indiscriminadamente. Não existe qualquer diferença conceitual entre o emprego de frequência angular  $\omega$  (cuja unidade é radiano por segundo) e frequência (cuja unidade é hertz, Hz). Dada a relação direta entre as duas frequências, podemos substituir  $\omega = 2\pi f$  em  $G(f)$  e obter a expressão da transformada de Fourier no domínio  $\omega$ :

$$\mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.10)$$

Devido ao fator adicional  $2\pi$  na variável  $\omega$  usada na Eq. (3.10), a expressão da transformada inversa em função de  $\omega$  requer uma divisão por  $2\pi$ . Portanto, a notação em termos de  $f$  é, em geral, preferida na prática para a expressão de transformadas de Fourier. Por isto, neste livro, denotaremos, na maioria dos casos, a transformada de Fourier de sinais como funções  $G(f)$ . A notação de frequência angular  $\omega$ , por sua vez, também pode oferecer alguma conveniência na representação de senoides. Assim, em capítulos posteriores, sempre que for *conveniente e não gerar confusão* usaremos as duas notações equivalentes de modo indiscriminado.

\*Isso não deve ser considerado uma prova rigorosa da Eq. (3.8). A situação não é tão simples como fizemos parecer.<sup>1</sup>

### Propriedade de Simetria Conjugada

A partir da Eq. (3.9a), concluímos que, se  $g(t)$  for uma função de  $t$  de valores reais,  $G(f)$  e  $G(-f)$  são complexos conjugados, ou seja,\*

$$G(-f) = G^*(f) \quad (3.11)$$

Logo,

$$|G(-f)| = |G(f)| \quad (3.12a)$$

$$\theta_g(-f) = -\theta_g(f) \quad (3.12b)$$

Assim, para  $g(t)$  de valores reais, o espectro de amplitude  $|G(f)|$  é uma função par e o espectro de fase  $\theta_g(f)$ , uma função ímpar de  $f$ . Esta propriedade (**propriedade de simetria conjugada**) é válida apenas para funções  $g(t)$  de valores reais. Esse resultado não deve causar surpresa, pois foi obtido no Capítulo 2 para o espectro de Fourier de um sinal periódico. A transformada  $G(f)$  é a especificação de  $g(t)$  no domínio da frequência.

Exemplo 3.1 Determinemos a transformada de Fourier de  $e^{-at}u(t)$ .

Por definição [Eq. (3.9a)],

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt = \frac{-1}{a+j2\pi f} e^{-(a+j2\pi f)t} \Big|_0^{\infty}$$

Mas  $|e^{-j2\pi ft}| = 1$ . Logo, quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $e^{-(a+j2\pi f)t} = e^{-at}e^{-j2\pi ft} = 0$  se  $a > 0$ . Portanto,

$$G(f) = \frac{1}{a+j\omega} \quad a > 0 \quad (3.13a)$$

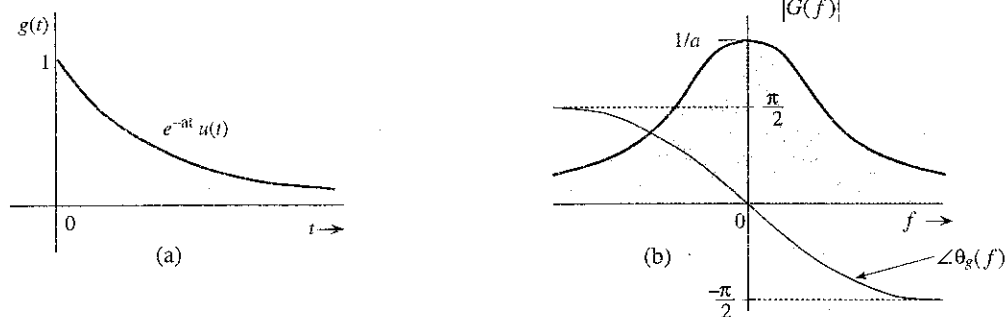
em que  $\omega = 2\pi f$ . Expressando  $a+j\omega$  na forma polar como  $\sqrt{a^2 + \omega^2} e^{j \tan^{-1}(\frac{\omega}{a})}$ , obtemos

$$G(f) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2\pi f)^2}} e^{-j \tan^{-1}(\frac{2\pi f}{a})} \quad (3.13b)$$

Logo,

$$|G(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2\pi f)^2}} \quad \text{e} \quad \theta_g(f) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\pi f}{a}\right)$$

Figura 3.4  
 $e^{-at}u(t)$  e  
correspondente  
espectro de  
Fourier.



Os espectros de amplitude,  $|G(f)|$ , e de fase,  $\theta_g(f)$ , de  $e^{-at}u(t)$  são mostrados na Fig. 3.4b. Observemos que  $|G(f)|$  é uma função par de  $f$  e  $\theta_g(f)$ , uma função ímpar de  $f$ , como esperado.

\*Simetria hermitiana é o termo usado para descrever funções complexas que satisfazem a Eq. (3.11).

### Existência da Transformada de Fourier

No Exemplo 3.1, observamos que, quando  $a < 0$ , a integral de Fourier para  $e^{-at}u(t)$  não converge. Em consequência, a transformada de Fourier de  $e^{-at}u(t)$  não existe para  $a < 0$  (exponencial crescente). Fica claro que nem todos os sinais podem ser transformados pela integral de Fourier. A existência da transformada de Fourier é assegurada para qualquer  $g(t)$  que satisfaça as condições de Dirichlet, sendo a primeira delas\*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty \quad (3.14)$$

Para mostrar isso, recordemos que  $|e^{-j2\pi ft}| = 1$ . Assim, a partir da Eq. (3.9a), obtemos

$$|G(f)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt$$

Isto mostra que a existência da transformada de Fourier fica assegurada se a condição (3.14) for satisfeita. Caso contrário, não há garantia. Vimos no Exemplo 3.1 que a transformada de Fourier de um sinal exponencial crescente (que viola essa condição) não existe. Embora tal condição seja suficiente, não é necessária para a existência da transformada de Fourier de um sinal. Por exemplo, o sinal  $(\sin at)/t$  viola a condição (3.14), mas tem uma transformada de Fourier. Qualquer sinal que possa ser gerado na prática satisfaz as condições de Dirichlet e, portanto, tem uma transformada de Fourier. Dessa forma, a existência física de um sinal é uma condição suficiente para a existência de sua transformada de Fourier.

### Linearidade da Transformada de Fourier (Teorema da Superposição)

A transformada de Fourier é linear, ou seja, se

$$g_1(t) \Longleftrightarrow G_1(f) \quad \text{e} \quad g_2(t) \Longleftrightarrow G_2(f)$$

então, para quaisquer constantes  $a_1$  e  $a_2$ , temos

$$a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t) \Longleftrightarrow a_1 G_1(f) + a_2 G_2(f) \quad (3.15)$$

A prova é simples e resulta diretamente da Eq. (3.9a). Esse teorema simplesmente afirma que combinações lineares de sinais no domínio do tempo correspondem, no domínio da frequência, a combinações lineares de suas transformadas de Fourier. Esse resultado pode ser estendido a um número finito arbitrário de termos:

$$\sum_k a_k g_k(t) \Longleftrightarrow \sum_k a_k G_k(f)$$

para quaisquer constantes  $\{a_k\}$  e sinais  $\{g_k(t)\}$ .

### Interpretação Física da Transformada de Fourier

Para o entendimento de aspectos da transformada de Fourier, devemos lembrar que a representação de Fourier é uma forma de expressar um sinal em termos de senoides infinitas no tempo ou exponenciais. O espectro de Fourier de um sinal indica as amplitudes e fases relativas das senoides necessárias à síntese do sinal. O espectro de Fourier de um sinal periódico tem amplitudes finitas e existe em frequências discretas ( $f$  e seus múltiplos). É fácil visualizar um espectro desse tipo; mas, no caso de sinais aperiódicos, a visualização do espectro não é simples, pois o mesmo é contínuo e existe em todas as frequências. O conceito de espectro contínuo pode ser interpretado por meio da consideração de um fenômeno análogo e mais tangível. Um exemplo familiar de uma distribuição contínua é o carregamento de uma viga. Consideremos uma viga submetida à carga de pesos  $D_1, D_2, D_3, \dots, D_n$  loca-

\*As condições de Dirichlet restantes são: em qualquer intervalo finito,  $g(t)$  pode ter apenas um número finito de máximos e mínimos e um número finito de descontinuidades finitas. Quando essas condições são satisfeitas, a integral de Fourier no lado direito da Eq. (3.9b) converge para  $g(t)$  em todos os pontos em que  $g(t)$  é contínua; em pontos em que  $g(t)$  é descontínua, a integral converge para o valor médio dos limites de  $g(t)$  à direita e à esquerda do ponto de descontinuidade.

lizados em pontos uniformemente espaçados  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , como mostrado na Fig. 3.5a. A carga total  $W_T$  sobre a viga é dada pela soma das cargas localizadas nestes  $n$  pontos:

$$W_T = \sum_{i=1}^n D_i$$

Consideremos o caso de uma viga submetida a uma carga contínua, como ilustrado na Fig. 3.5b. Nesse caso, embora pareça existir uma carga em cada ponto, a carga em cada ponto é zero. Isso não significa que não exista carga sobre a viga. Nesse caso, uma medida adequada do carregamento não é a carga em cada ponto, mas a densidade de carga por unidade de comprimento no ponto. Seja  $G(x)$  a densidade de carga por unidade de comprimento da viga. Isso significa que a carga sobre um comprimento de viga  $\Delta x$  ( $\Delta x \rightarrow 0$ ), em algum ponto  $x$ , é  $G(x)\Delta x$ . Para determinar a carga total sobre a viga, dividimos a viga em segmentos de comprimento  $\Delta x$  ( $\Delta x \rightarrow 0$ ). A carga sobre o  $n$ -ésimo segmento de comprimento  $\Delta x$  é  $[G(n\Delta x)]\Delta x$ . A carga total  $W_T$  é, então, dada por

$$\begin{aligned} W_T &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_1}^{x_n} G(n\Delta x) \Delta x \\ &= \int_{x_1}^{x_n} G(x) dx \end{aligned}$$

No caso de carregamento discreto (Fig. 3.5a), a carga total existe apenas nos  $n$  pontos discretos. Nos outros pontos, não há carga. No caso de carregamento contínuo, no entanto, a carga existe em cada ponto, mas, em qualquer ponto específico  $x$ , a carga é zero. Contudo, a carga em um pequeno comprimento de viga  $\Delta x$  é  $[G(n\Delta x)]\Delta x$  (Fig. 3.5b). Dessa forma, embora a carga em um ponto  $x$  seja zero, a carga relativa neste ponto é  $G(x)$ .

O espectro de um sinal é completamente análogo ao carregamento de uma viga. Quando o sinal  $g(t)$  é periódico, o espectro é discreto e  $g(t)$  pode ser expresso como a soma de exponenciais discretas e de amplitudes finitas:

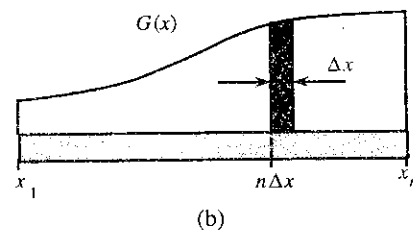
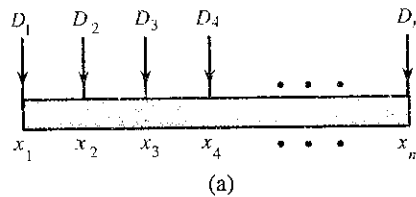
$$g(t) = \sum_n D_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

No caso de um sinal aperiódico, o espectro se torna contínuo; ou seja, o espectro existe para todos os valores de  $f$ , mas a amplitude de cada componente espectral é zero. Aqui, a medida adequada não é a amplitude de uma componente em uma dada frequência, mas a densidade espectral por unidade de largura de banda. Da Eq. (3.7b), fica claro que  $g(t)$  é sintetizada por meio da soma de exponenciais da forma  $e^{j2\pi n \Delta f t}$ , onde a contribuição de qualquer uma das componentes exponenciais é zero. Contudo, a contribuição de exponenciais em uma largura de banda infinitesimal  $\Delta f$  localizada em  $f = n\Delta f$  é  $G(n\Delta f)\Delta f$ , e a adição de todas estas componentes produz a forma integral de  $g(t)$ :

$$g(t) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n\Delta f) e^{j2\pi n \Delta f t} \Delta f = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df$$

A contribuição das componentes na largura de banda  $df$  é  $G(f)df$ , em que  $df$  é a largura de banda em hertz. Fica claro que  $G(f)$  é a **densidade espectral** por unidade de largura de banda (em hertz).

Figura 3.5  
Analogia com  
a transformada  
de Fourier.



Isso também significa que, mesmo que a amplitude de uma componente qualquer seja zero, a amplitude relativa de uma componente de frequência  $f$  é  $G(f)$ . Embora  $G(f)$  seja uma densidade espectral, na prática é costume denominá-la **espectro** de  $g(t)$ , em vez de densidade espectral de  $g(t)$ . Seguindo essa convenção, chamaremos  $G(f)$  de espectro de Fourier (ou transformada de Fourier) de  $g(t)$ .

### 3.2 TRANSFORMADAS DE ALGUMAS FUNÇÕES ÚTEIS

Por conveniência, a seguir, introduziremos uma notação compacta para algumas funções úteis, como as funções retangular, triangular e de interpolação.

#### Função Retangular Unitária

Usamos a notação  $\Pi(x)$  para representar um pulso retangular de altura e largura unitárias, centrado na origem, como ilustrado na Fig. 3.6a:

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0,5 & |x| = \frac{1}{2} \\ 0 & |x| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.16)$$

Vale notar que o pulso retangular na Fig. 3.6b é o pulso retangular unitário  $\Pi(x)$  expandido por um fator  $\tau$  e, portanto, pode ser expresso como  $\Pi(x/\tau)$ . Observemos, ainda, que o denominador  $\tau$  em  $\Pi(x/\tau)$  indica a largura do pulso.

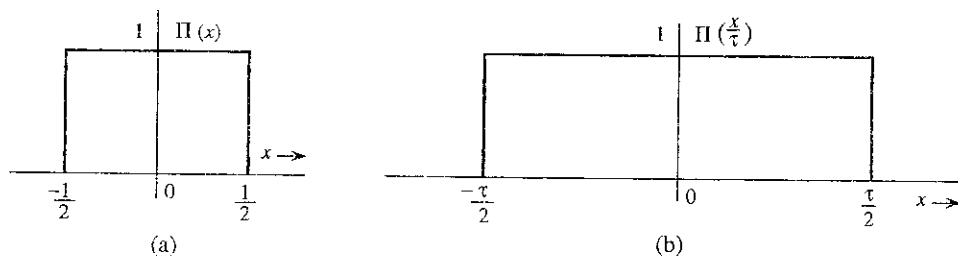
#### Função Triangular Unitária

Usamos a notação  $\Delta(x)$  para representar um pulso triangular de altura e largura unitárias, centrado na origem, como ilustrado na Fig. 3.7a:

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1 - 2|x| & |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & |x| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.17)$$

Vale notar que o pulso na Fig. 3.7b é o pulso  $\Delta(x/\tau)$ . Observemos que, como no caso do pulso retangular, o denominador  $\tau$  em  $\Delta(x/\tau)$  indica a largura do pulso.

**Figura 3.6**  
Pulso  
retangular.



**Figura 3.7**  
Pulso  
triangular.

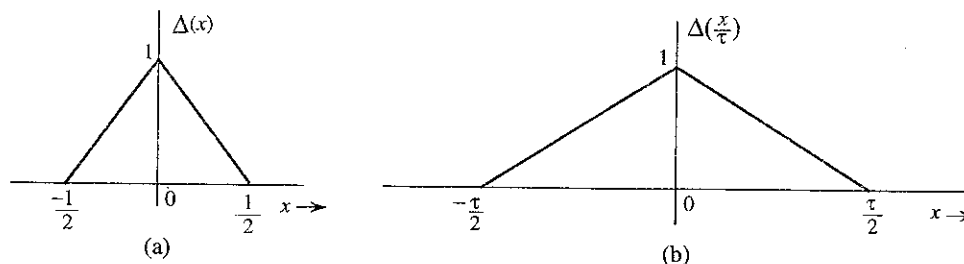
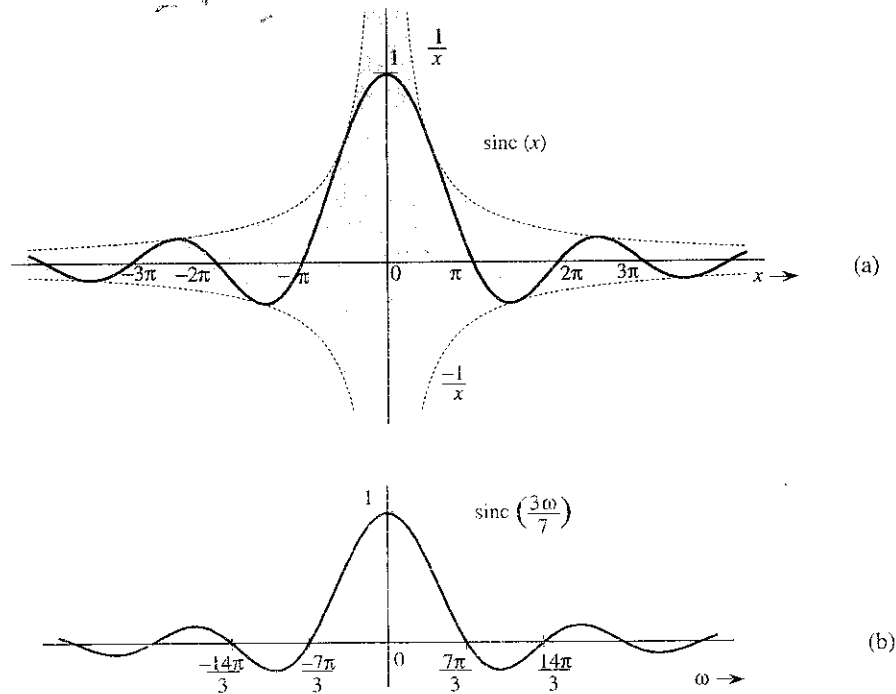




Figura 3.8  
Pulso sinc.



### Função Sinc $\text{sinc}(x)$

A função  $\text{sen } x/x$  é a função “seno dividido pelo argumento”, denotada por  $\text{sinc}(x)$ .\*

Essa função tem um papel importante no processamento de sinais. Definimos

$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen } x}{x} \quad (3.18)$$

Uma inspeção da Eq. (3.18) mostra que

1.  $\text{sinc}(x)$  é uma função par de  $x$ .
2.  $\text{sinc}(x) = 0$  quando  $\text{sen } x = 0$ , exceto em  $x = 0$ , em que a função é indeterminada. Isso significa que  $\text{sinc}(x) = 0$  para  $x = \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$
3. Usando a regra de L'Hôpital, determinamos  $\text{sinc}(0) = 1$ .
4.  $\text{sinc}(x)$  é o produto de um sinal oscilatório  $\text{sen } x$  (de período  $2\pi$ ) por uma função monótona decrescente  $1/x$ . Portanto,  $\text{sinc}(x)$  exibe oscilações senoidais de período  $2\pi$ , cuja amplitude decresce continuamente na forma  $1/x$ .
5. Resumindo,  $\text{sinc}(x)$  é uma função oscilatória par, de amplitude decrescente. A função tem um pico unitário em  $x = 0$  e cruza o eixo  $x$  em múltiplos inteiros de  $\pi$ .

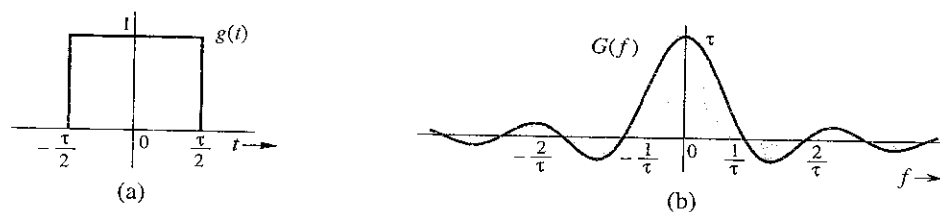
A Fig. 3.8a mostra um gráfico de  $\text{sinc}(x)$ . Observemos que  $\text{sinc}(x) = 0$  para valores de  $x$  múltiplos inteiros positivos e negativos de  $\pi$ . A Fig. 3.8b mostra o gráfico de  $\text{sinc}(3\omega/7)$ . O argumento  $3\omega/7 = \pi$  quando  $\omega = 7\pi/3$  ou  $f = 7/6$ . Portanto, o primeiro zero dessa função ocorre em  $\omega = 7\pi/3$  ( $f = 7/6$ ).

\*Na literatura,  $\text{sinc}(x)$  também é denotada por  $\text{Sa}(x)$ . Alguns autores definem  $\text{sinc}(x)$  como

$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen } \pi x}{\pi x}$$

**Exemplo 3.2** Determinemos a transformada de Fourier de  $g(t) = \Pi(t/\tau)$  (Fig. 3.9a).

**Figura 3.9**  
Pulsos  
retangular e  
correspondente  
espectro de  
Fourier.



Temos

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-j2\pi f t} dt$$

Como  $\Pi(t/\tau) = 1$  para  $|t| < \tau/2$  e é zero para  $|t| > \tau/2$ ,

$$\begin{aligned} G(f) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j2\pi f t} dt \\ &= -\frac{1}{j2\pi f} (e^{-j\pi f \tau} - e^{j\pi f \tau}) = \frac{2 \operatorname{sen}(\pi f \tau)}{2\pi f} \\ &= \tau \frac{\operatorname{sen}(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)} = \tau \operatorname{sinc}(\pi f \tau) \end{aligned}$$

Logo,

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \longleftrightarrow \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) = \tau \operatorname{sinc}(\pi f \tau) \quad (3.19)$$

Recordemos que  $\operatorname{sinc}(x) = 0$  quando  $x = \pm n\pi$ . Logo,  $\operatorname{sinc}(\omega \tau/2) = 0$  quando  $\omega \tau/2 = \pm n\pi$ ; ou seja, quando  $f = \pm n/\tau$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), como ilustrado na Fig. 3.9b. Observemos que, neste caso,  $G(f)$  é real; portanto, a informação espectral está contida em apenas um gráfico de  $G(f)$ , mostrado na Fig. 3.9b.

**Exemplo 3.3** Determinemos a transformada do sinal impulso unitário  $\delta(t)$ .

Usando a propriedade de amostragem da função impulso, obtemos

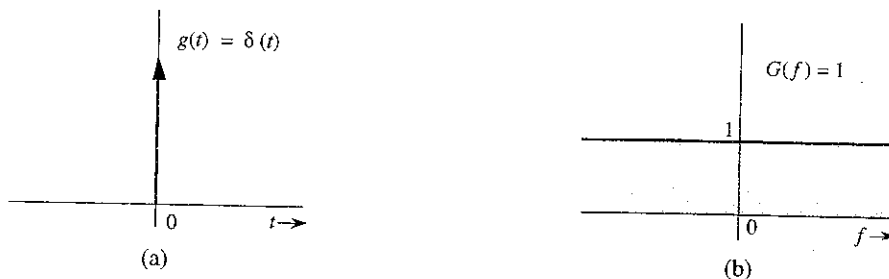
$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = e^{-j2\pi f \cdot 0} = 1 \quad (3.20a)$$

ou

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1 \quad (3.20b)$$

A Fig. 3.10 mostra  $\delta(t)$  e seu espectro.

**Figura 3.10**  
Impulso  
unitário e  
correspondente  
espectro de  
Fourier.



Exemplo 3.4 Determinemos a transformada de Fourier inversa de  $\delta(2\pi f) = \frac{1}{2\pi} \delta(f)$ .

A partir da Eq. (3.9b) e da propriedade de amostragem da função impulso,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\delta(2\pi f)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(2\pi f) e^{j2\pi ft} df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(2\pi f) e^{j2\pi ft} d(2\pi f) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-j2\pi f \cdot 0} = \frac{1}{2\pi}\end{aligned}$$

Portanto,

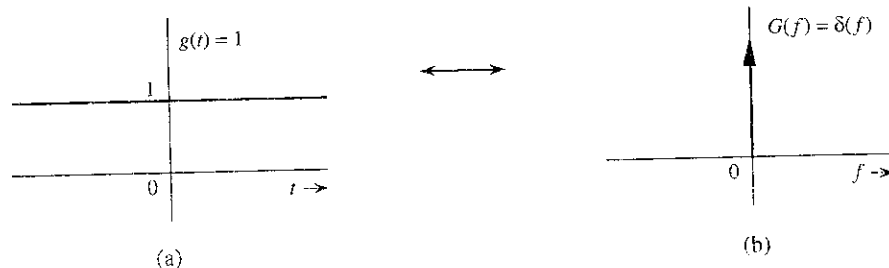
$$\frac{1}{2\pi} \iff \delta(2\pi f) \quad (3.21a)$$

ou

$$1 \iff \delta(f) \quad (3.21b)$$

Isso mostra que o espectro de um sinal constante  $g(t) = 1$  é um impulso  $\delta(f) = 2\pi \delta(2\pi f)$ , como ilustrado na Fig. 3.11.

**Figura 3.11**  
Sinal constante (dc) e correspondente espectro de Fourier.



Esse resultado [Eq. (3.21b)] também poderia ter sido obtido por uma análise qualitativa. Recordemos que a transformada de Fourier de  $g(t)$  é uma representação espectral de  $g(t)$  em termos de componentes exponenciais infinitas da forma  $e^{j2\pi ft}$ . Para representar um sinal constante  $g(t) = 1$ , precisamos apenas de uma exponencial infinita  $e^{j2\pi ft}$  com  $f = 0$ . Isso resulta em um espectro em uma única frequência  $f = 0$ . Também poderíamos dizer que  $g(t) = 1$  é um sinal dc que tem uma única componente de frequência em  $f = 0$  (dc).

Se um impulso em  $f = 0$  é o espectro de um sinal dc, o que representará um impulso em  $f = f_0$ ? Responderemos a esta pergunta no próximo exemplo.

Exemplo 3.5 Determinemos a transformada de Fourier inversa de  $\delta(f - f_0)$ .

Usando a propriedade de amostragem da função impulso, obtemos

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(f - f_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) e^{j2\pi ft} df = e^{j2\pi f_0 t}$$

Portanto,

$$e^{j2\pi f_0 t} \iff \delta(f - f_0) \quad (3.22a)$$

Esse resultado mostra que o espectro de uma exponencial eterna  $e^{j2\pi f_0 t}$  é um único impulso em  $f = f_0$ . Também chegaríamos a essa conclusão por uma análise qualitativa. Para representar a exponencial infinita  $e^{j2\pi f_0 t}$ , precisamos de uma única exponencial infinita  $e^{j2\pi ft}$  com  $\omega = 2\pi f_0$ . Portanto, o espectro consiste em uma única componente na frequência  $f = f_0$ .

Da Eq. (3.22a), temos

$$e^{-j2\pi f_0 t} \Longleftrightarrow \delta(f + f_0) \quad (3.22b)$$

**Exemplo 3.6** Determinemos a transformada de Fourier da senoide eterna  $\cos 2\pi f_0 t$ .

Recordemos a fórmula de Euler

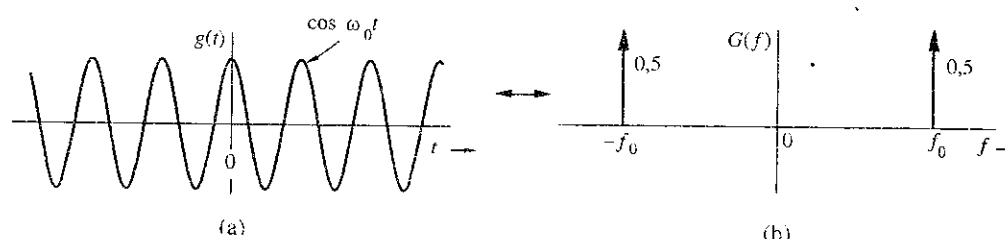
$$\cos 2\pi f_0 t = \frac{1}{2}(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})$$

Somando as Eqs. (3.22a) e (3.22b) e usando a fórmula anterior, obtemos

$$\cos 2\pi f_0 t \Longleftrightarrow \frac{1}{2}[\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] \quad (3.23)$$

O espectro de  $\cos 2\pi f_0 t$  consiste em dois impulsos, em  $f_0$  e  $-f_0$ , no domínio da frequência, ou dois impulsos em  $\pm \omega_0 = \pm 2\pi f_0$ , no domínio  $\omega$ , como ilustrado na Fig. 3.12. Esse resultado também poderia ter sido obtido por análise qualitativa. Uma senoide infinita  $\cos \omega_0 t$  pode ser sintetizada por duas exponenciais infinitas,  $e^{j\omega_0 t}$  e  $e^{-j\omega_0 t}$ . Portanto, o espectro consiste em apenas duas componentes de frequência, em  $\omega_0$  e  $-\omega_0$ .

**Figura 3.12**  
Sinal cosseno e  
correspondentes  
espectro de  
Fourier.



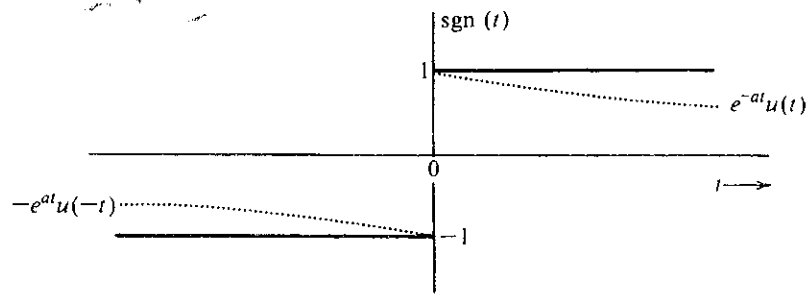
**Exemplo 3.7** Determinemos a transformada de Fourier da função  $\text{sgn}(t)$  (pronunciada *signum de t*), mostrada na Fig. 3.13. O valor da função é +1 ou -1, dependendo se  $t$  é positivo ou negativo:

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Não podemos usar integração para determinar a transformada de  $\text{sgn}(t)$  diretamente, pois  $\text{sgn}(t)$  viola a condição de Dirichlet [ver Eq. (3.14) e a nota de rodapé associada]. Para sermos específicos,  $\text{sgn}(t)$  não é absolutamente integrável. Contudo, a transformada pode ser obtida considerando  $\text{sgn}(t)$  como a soma de duas exponenciais, como mostrado na Fig. 3.13, no limite quando  $a \rightarrow 0$ :

$$\text{sgn } t = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at} u(t) - e^{at} u(-t)]$$

Figura 3.13  
Função signum.



Portanto,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[\text{sgn}(t)] &= \lim_{a \rightarrow 0} \{ \mathcal{F}[e^{-at}u(t)] - \mathcal{F}[e^{at}u(-t)] \} \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{1}{a + j2\pi f} - \frac{1}{a - j2\pi f} \right) \quad (\text{ver pares 1 e 2 na Tabela 3.1}) \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{-j4\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \right) = \frac{1}{j\pi f} \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

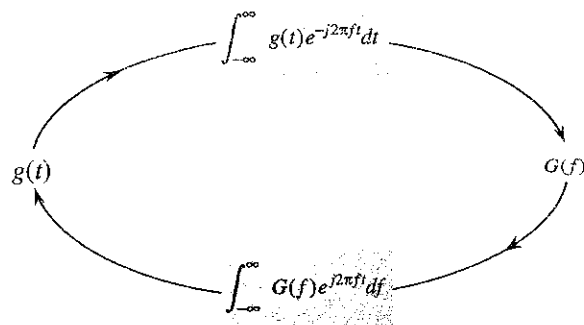
### 3.3 ALGUMAS PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE FOURIER

Agora, estudaremos algumas propriedades importantes da transformada de Fourier, suas implicações e aplicações. Antes de embarcarmos neste estudo, devemos ressaltar um aspecto essencial da transformada de Fourier: a **dualidade tempo-frequência**.

#### 3.3.1 Dualidade Tempo-Frequência

As Eqs. (3.9) mostram um fato interessante: a notável similaridade entre as operações de transformação direta e inversa. Essas operações, necessárias para passar de  $g(t)$  a  $G(f)$  e de  $G(f)$  a  $g(t)$ , são ilustradas graficamente na Fig. 3.14. A única pequena diferença entre essas duas operações reside nos sinais opostos usados nos argumentos das exponenciais.

Figura 3.14  
Quase  
simetria entre  
transformadas  
de Fourier  
direta e  
inversa.



**Tabela 3.1**

Pequena Tabela de Transformadas de Fourier

$g(t)$	$G(f)$	
1 $e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$	$a > 0$
2 $e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{a - j2\pi f}$	$a > 0$
3 $e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$	$a > 0$
4 $te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^2}$	$a > 0$
5 $t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(a + j2\pi f)^{n+1}}$	$a > 0$
6 $\delta(t)$	1	
7 1	$\delta(f)$	
8 $e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$	
9 $\cos 2\pi f_0 t$	$0,5 [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$	
10 $\sen 2\pi f_0 t$	$j0,5 [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$	
11 $u(t)$	$\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$	
12 $\operatorname{sgn} t$	$\frac{2}{j2\pi f}$	
13 $\cos 2\pi f_0 t u(t)$	$\frac{1}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] + \frac{j2\pi f}{(2\pi f_0)^2 - (2\pi f)^2}$	
14 $\sen 2\pi f_0 t u(t)$	$\frac{1}{4j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] + \frac{2\pi f_0}{(2\pi f_0)^2 - (2\pi f)^2}$	
15 $e^{-at} \sen 2\pi f_0 t u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$	$a > 0$
16 $e^{-at} \cos 2\pi f_0 t u(t)$	$\frac{a + j2\pi f}{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$	$a > 0$
17 $\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \operatorname{sinc}(\pi f \tau)$	
18 $2B \operatorname{sinc}(2\pi Bt)$	$\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$	
19 $\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\frac{\tau}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi f \tau}{2}\right)$	
20 $B \operatorname{sinc}^2(\pi Bt)$	$\Delta\left(\frac{f}{2B}\right)$	
21 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0)$	$f_0 = \frac{1}{T}$
22 $e^{-t^2/2\sigma^2}$	$\sigma\sqrt{2\pi} e^{-2(\sigma\pi f)^2}$	

Essa similaridade tem amplas consequências no estudo de transformadas de Fourier e é a base da chamada dualidade entre tempo e frequência. *O princípio da dualidade pode ser comparado a uma fotografia e seu negativo. Uma fotografia pode ser obtida de seu negativo e, por meio de procedimento semelhante, o negativo pode ser obtido da fotografia.* Para qualquer resultado ou relação envolvendo  $g(t)$  e  $G(f)$ , existe um resultado ou relação dual, obtido(a) por meio de troca dos papéis de  $g(t)$  e  $G(f)$  no resultado/relação original (juntamente com algumas pequenas modificações, devido ao fator  $2\pi$  e a uma mudança de sinal). Por exemplo, a propriedade de translação temporal, que será provada posteriormente, afirma que, se  $g(t) \iff G(f)$ , então

$$g(t - t_0) \iff G(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

O dual dessa propriedade (propriedade de translação em frequência) afirma que

$$g(t)e^{j2\pi f_0 t} \Longleftrightarrow G(f - f_0)$$

Observemos a troca de papéis entre tempo e frequência nestas duas equações (com a pequena diferença devido à mudança de sinal no argumento da exponencial). A utilidade desse princípio reside no fato de que, *sempre que deduzimos algum resultado, podemos ter certeza de que existe um dual do mesmo*. Essa informação propicia um maior entendimento de muitas propriedades ou resultados inesperados em processamento de sinais.

As propriedades da transformada de Fourier são úteis não apenas no cálculo de transformadas direta e inversa de diversas funções, mas também na obtenção de resultados valiosos em processamento de sinais. Nesta discussão, o leitor não deve deixar de observar a sempre presente dualidade entre tempo e frequência. Iniciamos com a propriedade de dualidade, que é uma das consequências do princípio de dualidade.

### 3.3.2 Propriedade de Dualidade

A propriedade de dualidade afirma que

$$g(t) \Longleftrightarrow G(f)$$

e

$$G(t) \Longleftrightarrow g(-f) \quad (3.26)$$

Pela propriedade de dualidade, se a transformada de Fourier de  $g(t)$  for  $G(f)$ , a transformada de Fourier de  $G(t)$ , com  $f$  substituído por  $t$ , é  $g(-f)$ , que é o sinal original no domínio do tempo, com  $t$  substituído por  $-f$ .

*Prova:* A partir da Eq. (3.9b),

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x)e^{j2\pi xt} dx$$

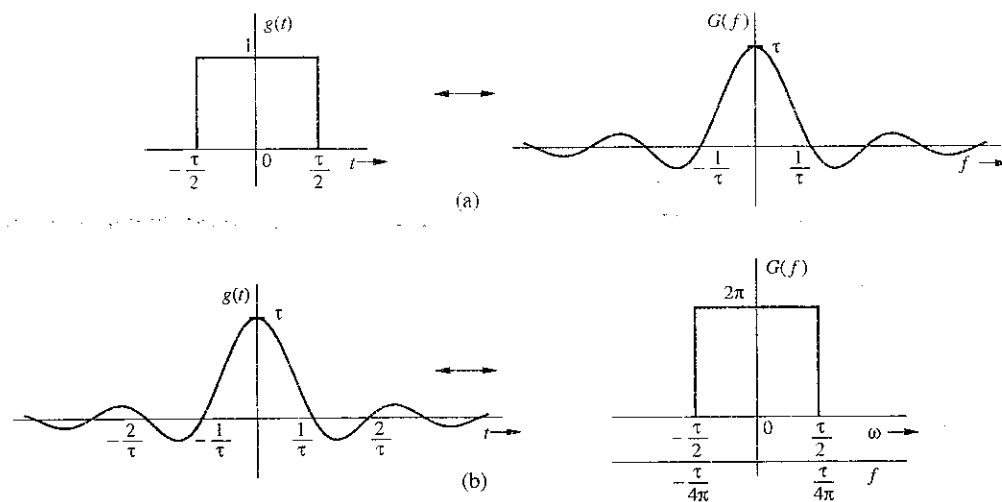
Logo,

$$g(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x)e^{-j2\pi xt} dx$$

A substituição de  $t$  por  $f$  resulta na Eq. (3.26). ■

**Exemplo 3.8** Neste exemplo, aplicaremos a propriedade de dualidade [Eq. (3.26)] ao par de funções na Fig. 3.15a.

**Figura 3.15**  
Propriedade de dualidade da transformada de Fourier.



Da Eq. (3.19), temos

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \Longleftrightarrow \tau \operatorname{sinc}(\pi f \tau) \quad (3.27a)$$

$$\underbrace{\Pi\left(\frac{t}{\alpha}\right)}_{g(t)} \Longleftrightarrow \underbrace{\alpha \operatorname{sinc}(\pi f \alpha)}_{G(f)} \quad (3.27b)$$

$G(t)$  tem a mesma forma de  $G(f)$ , apenas com  $f$  substituído por  $t$ ;  $g(-f)$  é  $g(t)$  com  $t$  substituído por  $-f$ . Portanto, a propriedade de dualidade (3.26) fornece

$$\underbrace{\alpha \operatorname{sinc}(\pi \alpha t)}_{G(t)} \Longleftrightarrow \underbrace{\Pi\left(-\frac{f}{\alpha}\right)}_{g(-f)} = \Pi\left(\frac{f}{\alpha}\right) \quad (3.28a)$$

Substituindo  $\tau = 2\pi\alpha$ , obtemos

$$\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha t}{2}\right) \Longleftrightarrow 2\pi \Pi\left(\frac{2\pi f}{\tau}\right) \quad (3.28b)$$

Na Eq. (3.8), usamos o fato de que  $\Pi(-t) = \Pi(t)$ , pois  $\Pi(t)$  é uma função par de  $t$ . A Fig. 3.15b mostra gráficos deste par de funções. Observemos a troca de papéis entre  $t$  e  $2\pi f$  (com o pequeno ajuste do fator  $2\pi$ ). Esse resultado aparece como o par 18 na Tabela 3.1 (com  $\tau/2 = W$ ).

Como um exercício interessante, propomos a aplicação da propriedade de dualidade para gerar o dual de cada par na Tabela 3.1.

### 3.3.3 Propriedade de Dilatação no Tempo

Se

$$g(t) \Longleftrightarrow G(f)$$

então, para uma constante real positiva  $a$ ,

$$g(at) \Longleftrightarrow \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right) \quad (3.29)$$

*Prova:* Para uma constante real positiva  $a$ ,

$$\mathcal{F}[g(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(at) e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-j2\pi f/a x} dx = \frac{1}{a} G\left(\frac{f}{a}\right)$$

Do mesmo modo, pode ser mostrado que, se  $a < 0$ ,

$$g(at) \Longleftrightarrow \frac{-1}{a} G\left(\frac{f}{a}\right)$$

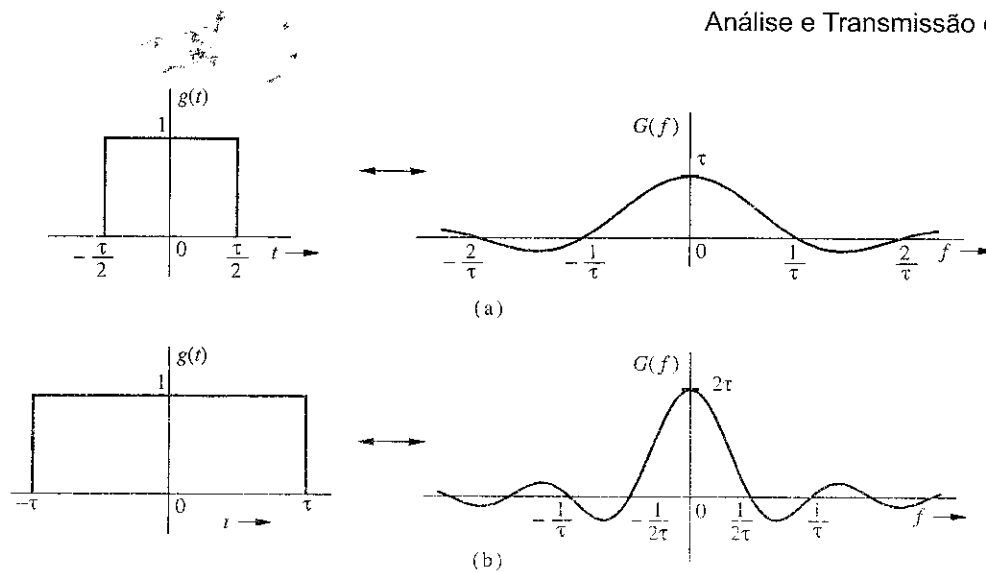
Disto resulta a Eq. (3.29). ■

#### Importância da Propriedade de Dilatação no Tempo

A função  $g(at)$  representa a função  $g(t)$  comprimida no tempo por um fator  $a$  ( $|a| > 1$ ). Da mesma forma, uma função  $G(f/a)$  representa a função  $G(f)$  expandida em frequência pelo mesmo fator  $a$ . A



Figura 3.16  
Propriedade  
de dilatação da  
transformada de  
Fourier.



propriedade de dilatação temporal afirma que a compressão temporal de um sinal resulta em sua expansão espectral, e que a expansão temporal de um sinal resulta em sua compressão espectral. De modo intuitivo, podemos perceber que a compressão temporal de um sinal por um fator  $a$  significa que o sinal varia **mais rapidamente**, sendo a taxa de variação aumentada pelo mesmo fator. Para sintetizar esse sinal, as frequências de suas componentes senoidais devem ser aumentadas pelo fator  $a$ , implicando que o espectro de frequências do sinal é expandido pelo fator  $a$ . Outrossim, a expansão temporal de um sinal o faz variar mais lentamente; ou seja, as frequências de suas componentes são reduzidas, implicando a compressão do espectro de frequências. Por exemplo, o sinal  $\cos 4\pi f_0 t$  é o sinal  $\cos 2\pi f_0 t$  é comprimido no tempo por um fator 2. Fica claro que o espectro do primeiro (impulsos em  $\pm 2f_0$ ) é uma versão expandida do espectro do último (impulsos em  $\pm f_0$ ). O efeito da dilatação temporal é ilustrado na Fig. 3.16.

### Reciprocidade entre Duração de um Sinal e Sua Largura de Banda

A propriedade de dilatação temporal implica que, se a largura de  $g(t)$  aumentar, seu espectro se torna mais estreito, e vice-versa. Dobrar a duração de um sinal significa dividir sua largura espectral por dois, e vice-versa. Isso sugere que a largura de banda de um sinal é inversamente proporcional à duração ou largura temporal (em segundos). Já comprovamos tal fato para o pulso retangular, quando determinamos que a largura de banda de um pulso de duração  $\tau$  segundos era  $1/\tau$  Hz. Uma discussão mais aprofundada sobre este interessante tema pode ser encontrada na literatura.<sup>2</sup>

Exemplo 3.9 Mostremos que

$$g(-t) \Longleftrightarrow G(-f) \quad (3.30)$$

A seguir, usemos esse resultado e o fato de que  $e^{-at}u(t) \Longleftrightarrow 1/(a + j2\pi f)$  para calcular as transformadas de Fourier de  $e^{-at}u(-t)$  e  $e^{-a|t|}$ .

A Eq. (3.30) resulta da Eq. (3.29) com  $a = -1$ . Aplicação da Eq. (3.30) ao par 1 da Tabela 3.1 fornece

$$e^{at}u(-t) \Longleftrightarrow \frac{1}{a - j2\pi f}$$

e

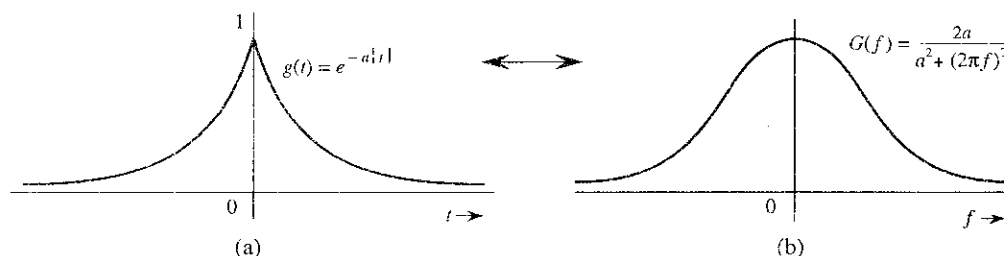
$$e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$

Logo,

$$e^{-a|t|} \Longleftrightarrow \frac{1}{a + j2\pi f} + \frac{1}{a - j2\pi f} = \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} \quad (3.31)$$

Gráficos do sinal  $e^{-a|t|}$  e de seu espectro são mostrados na Fig. 3.17.

**Figura 3.17**  
 $e^{-a|t|}$  e  
correspondente  
espectro de  
Fourier.



### 3.3.4 Propriedade de Translação no Tempo

Se

$$g(t) \Longleftrightarrow G(f)$$

então

$$g(t - t_0) \Longleftrightarrow G(f)e^{-j2\pi f t_0} \quad (3.32a)$$

*Prova:* Por definição,

$$\mathcal{F}[g(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - t_0) e^{-j2\pi f t} dt$$

Fazendo  $t - t_0 = x$ , obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-j2\pi f (x + t_0)} dx \\ &= e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-j2\pi f x} dx = G(f) e^{-j2\pi f t_0} \end{aligned} \quad (3.32b)$$

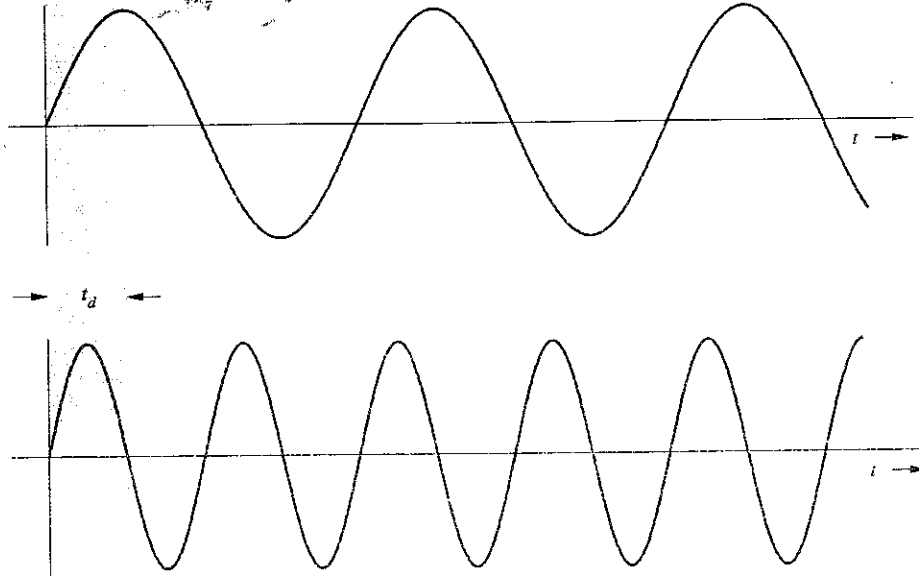
Esse resultado mostra que *atrasar um sinal em  $t_0$  segundos não altera seu espectro de amplitude. O espectro de fase, contudo, sofre uma alteração de  $-2\pi f t_0$ .*

#### Interpretação Física da Fase Linear

O atraso temporal de um sinal provoca um deslocamento de fase linear no espectro do mesmo. Esse resultado também pode ser obtido por meio de uma análise heurística. Imaginemos que  $g(t)$  seja sintetizada por suas componentes de Fourier, que são senoides de certas amplitudes e fases. O sinal atrasado  $g(t - t_0)$  pode ser sintetizado pelas mesmas componentes senoidais, cada uma atrasada em  $t_0$  segundos. As amplitudes das componentes não são alteradas; portanto, o espectro de amplitude de  $g(t - t_0)$  é idêntico ao de  $g(t)$ . Contudo, o atraso temporal  $t_0$  aplicado a cada senoide altera a fase de cada componente. Uma senoide  $\cos 2\pi f t$  atrasada de  $t_0$  é dada por

$$\cos 2\pi f (t - t_0) = \cos (2\pi f t - 2\pi f t_0)$$

**Figura 3.18**  
Interpretação física da propriedade de translação no tempo.



Isso significa que um atraso temporal  $t_0$  em uma senoide de frequência  $f$  se manifesta como um atraso de fase  $2\pi f t_0$ , que é uma função linear de  $f$ . Isso implica que, para um dado atraso temporal, as componentes de frequências mais elevadas sofrerão deslocamentos de fase proporcionalmente mais altos. Esse efeito é ilustrado na Fig. 3.18 com duas senoides, sendo a frequência da senoide na parte inferior o dobro da frequência da senoide na parte superior. O mesmo atraso temporal  $t_0$  resulta em um deslocamento de fase de  $\pi/2$  na senoide de cima e um deslocamento de fase de  $\pi$  na outra senoide. Isso comprova que, para obter o mesmo atraso temporal, senoides de frequências mais elevadas devem sofrer deslocamentos de fase proporcionalmente mais altos.

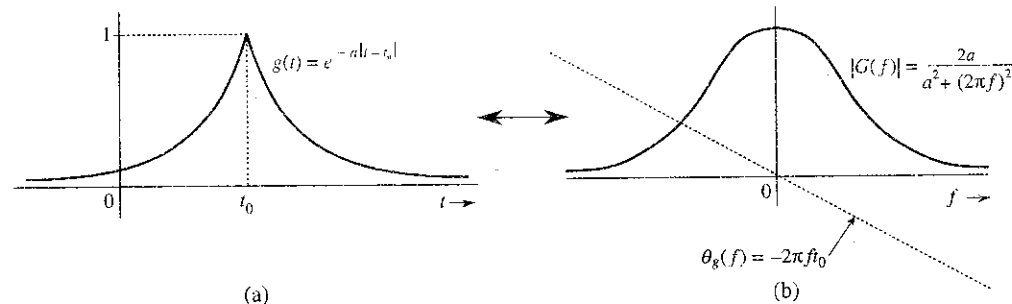
**Exemplo 3.10** Determinemos a transformada de Fourier de  $e^{-a|t-t_0|}$ .

Essa função, cujo gráfico é mostrado na Fig. 3.19a, é uma versão de  $e^{-a|t|}$  (cujo gráfico é mostrado na Fig. 3.17a) deslocada no tempo. Das Eqs. (3.31) e (3.32), temos

$$e^{-a|t-t_0|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} e^{-j2\pi f t_0} \quad (3.33)$$

O espectro de  $e^{-a|t-t_0|}$  (Fig. 3.19b) é igual ao de  $e^{-a|t|}$  (Fig. 3.17b), a menos do deslocamento de fase de  $-2\pi f t_0$ .

**Figura 3.19**  
Efeito do deslocamento temporal no espectro de Fourier de um sinal.



Vale observar que o atraso temporal  $t_0$  provoca um deslocamento de fase linear  $-2\pi f t_0$  no espectro. Esse exemplo demonstra, de maneira clara, o efeito de um deslocamento temporal.

## 3.3.5 Propriedade de Translação na Frequência

Se

$$g(t) \longleftrightarrow G(f)$$

então,

$$g(t)e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow G(f - f_0) \quad (3.34)$$

Essa propriedade também é conhecida como propriedade de modulação.

*Prova:* Por definição,

$$\mathcal{F}[g(t)e^{j2\pi f_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j(2\pi f - 2\pi f_0)t} dt = G(f - f_0)$$

Essa propriedade afirma que a multiplicação de um sinal por um fator  $e^{j2\pi f_0 t}$  desloca o espectro do sinal por  $f = f_0$ . Vale notar a dualidade entre as propriedades de translação no tempo e na frequência.

Substituindo  $f_0$  por  $-f_0$  na Eq. (3.34), obtemos

$$g(t)e^{-j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow G(f + f_0) \quad (3.35)$$

Como  $e^{j2\pi f_0 t}$  não é uma função real que possa ser gerada, o deslocamento em frequência é obtido, na prática, pela multiplicação de  $g(t)$  por uma senoide. Isso pode ser visto de

$$g(t) \cos 2\pi f_0 t = \frac{1}{2} [g(t)e^{j2\pi f_0 t} + g(t)e^{-j2\pi f_0 t}]$$

Das Eqs. (3.34) e (3.35), temos

$$g(t) \cos 2\pi f_0 t \longleftrightarrow \frac{1}{2} [G(f - f_0) + G(f + f_0)] \quad (3.36)$$

Esse resultado mostra que a multiplicação de um sinal  $g(t)$  por uma senoide de frequência  $f_0$  desloca o espectro  $G(f)$  por  $\pm f_0$ . Multiplicar  $g(t)$  por uma senoide  $\cos 2\pi f_0 t$  corresponde a modular a amplitude da senoide. Esse tipo de modulação é conhecido como **modulação em amplitude**. A senoide  $\cos 2\pi f_0 t$  é denominada **portadora**; o sinal  $g(t)$  é o **sinal modulante** e o sinal  $g(t) \cos 2\pi f_0 t$ , o **sinal modulado**. Modulação e demodulação serão discutidas nos Capítulos 4 e 5.

Para esboçar o gráfico do sinal  $g(t) \cos 2\pi f_0 t$ , observemos que

$$g(t) \cos 2\pi f_0 t = \begin{cases} g(t) & \text{quando } \cos 2\pi f_0 t = 1 \\ -g(t) & \text{quando } \cos 2\pi f_0 t = -1 \end{cases}$$

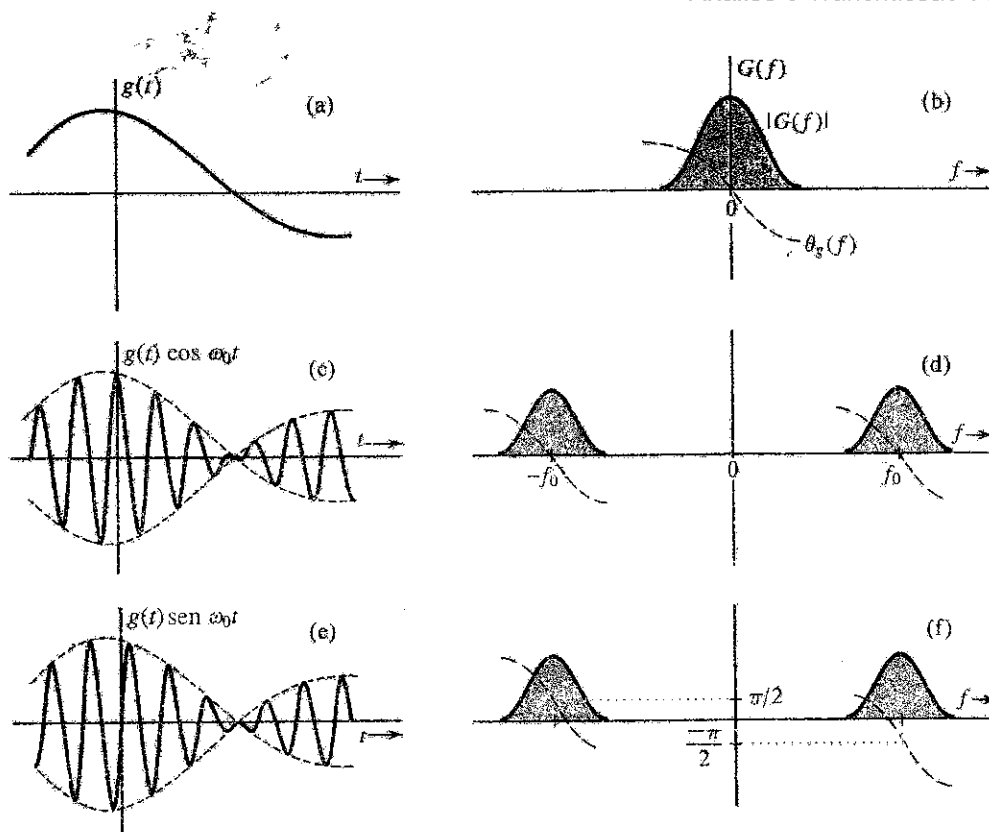
Portanto,  $g(t) \cos 2\pi f_0 t$  toca  $g(t)$  quando a senoide  $\cos 2\pi f_0 t$  passa por seus picos positivos, e toca  $-g(t)$  quando  $\cos 2\pi f_0 t$  passa por seus picos negativos. Isso significa que  $g(t)$  e  $-g(t)$  atuam como envelopes para o sinal  $g(t) \cos 2\pi f_0 t$  (ver Fig. 3.20c). O sinal  $-g(t)$  é o reflexo de  $g(t)$  em relação ao eixo horizontal. A Fig. 3.20 mostra gráficos dos sinais  $g(t)$ ,  $g(t) \cos 2\pi f_0 t$  e dos respectivos espectros.

**Translação do Espectro de Fase de um Sinal Modulado**

Podemos transladar a fase de cada componente espectral de um sinal modulado por um valor constante  $\theta_0$  simplesmente usando uma portadora  $\cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$  no lugar de  $\cos(2\pi f_0 t)$ . Se um sinal  $g(t)$  for multiplicado por  $\cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$ , podemos fazer uso de um argumento similar ao empregado na dedução da Eq. (3.36) e mostrar que

$$g(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) \longleftrightarrow \frac{1}{2} [G(f - f_0) e^{j\theta_0} + G(f + f_0) e^{-j\theta_0}] \quad (3.37)$$

**Figura 3.20**  
Modulação em amplitude de um sinal causa deslocamento espectral.



Para um caso especial em que  $\theta_0 = -\pi/2$ , a Eq. (3.37) se torna

$$g(t) \sin 2\pi f_0 t \iff \frac{1}{2} \left[ G(f - f_0) e^{-j\pi/2} + G(f + f_0) e^{j\pi/2} \right] \quad (3.38)$$

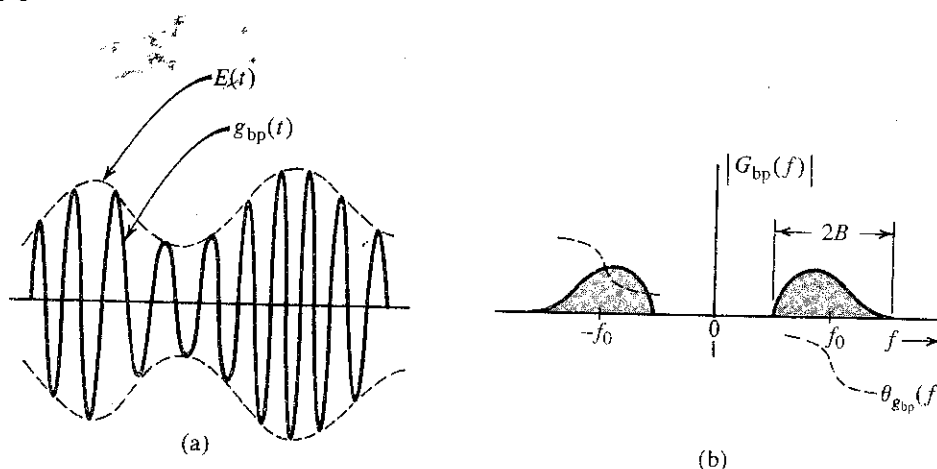
Vale notar que  $\sin 2\pi f_0 t$  é  $\cos 2\pi f_0 t$  com um atraso de fase de  $\pi/2$ . Portanto, deslocar a fase da portadora por  $\pi/2$  implica deslocar a fase de cada componente espectral por  $\pi/2$ . As Fig. 3.20e e 3.20f mostram gráficos do sinal  $g(t) \sin 2\pi f_0 t$  e de seu espectro.

Modulação é uma aplicação comum que desloca o espectro de sinais. Em particular, se diversos sinais de mensagem, todos ocupando a mesma faixa de frequências, forem transmitidos simultaneamente ao longo de um meio de transmissão comum, interferirão mutuamente; será impossível separá-los ou recuperá-los no receptor. Por exemplo, se todas as estações de rádio decidissem transmitir sinais de áudio simultaneamente, os receptores não seriam capazes de separá-los. Esse problema é resolvido com o uso da modulação, e a cada estação de rádio é alocada uma frequência portadora distinta. Cada estação transmite um sinal modulado e, dessa forma, desloca o espectro do sinal à faixa de frequências a ela alocada, que não é ocupada por qualquer outra estação. Um receptor de rádio pode sintonizar uma estação qualquer selecionando a faixa de frequências da estação desejada. O receptor deve, então, demodular o sinal recebido (desfazer o efeito da modulação). Demodulação, portanto, consiste em outro deslocamento espectral, necessário para transladar o sinal à sua faixa original de frequências.

### Sinais Passa-Faixa

A Fig. 3.20(d)(f) mostra que, se  $g_c(t)$  e  $g_s(t)$  forem sinais passa-baixos, cada um com largura de banda  $B$  Hz ou  $2\pi B$  rad/s, os sinais  $g_c(t) \cos 2\pi f_0 t$  e  $g_s(t) \sin 2\pi f_0 t$  serão sinais passa-faixa que ocupam a mesma faixa de frequências, cada um com largura de banda  $2B$  Hz. Portanto, uma combinação linear desses dois sinais também será um sinal passa-faixa que ocupará a mesma faixa de frequências

**Figura 3.21**  
Sinal passa-faixa e correspondente espectro.



de cada um deles e terá a mesma largura de banda ( $2B$  Hz). Assim, em geral, um sinal passa-faixa  $g_{bp}(t)$  pode ser expresso como\*

$$g_{bp}(t) = g_c(t) \cos 2\pi f_0 t + g_s(t) \sin 2\pi f_0 t \quad (3.39)$$

O espectro de  $g_{bp}(t)$  é centrado em  $\pm f_0$  e tem largura de banda  $2B$ , como ilustrado na Fig. 3.21. Embora os espectros de magnitude de  $g_c(t) \cos 2\pi f_0 t$  e de  $g_s(t) \sin 2\pi f_0 t$  sejam simétricos em relação a  $\pm f_0$ , o espectro de magnitude da soma desses sinais,  $g_{bp}(t)$ , não é necessariamente simétrico em relação a  $\pm f_0$ . Isto se deve ao fato de que as fases distintas dos dois sinais não permitem que suas amplitudes se somem diretamente, pois

$$a_1 e^{j\varphi_1} + a_2 e^{j\varphi_2} \neq (a_1 + a_2) e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Um sinal passa-faixa típico  $g_{bp}(t)$  e seu espectro são ilustrados na Fig. 3.21. Podemos usar uma identidade trigonométrica bem conhecida para expressar a Eq. (3.39) como

$$g_{bp}(t) = E(t) \cos [2\pi f_0 t + \psi(t)] \quad (3.40)$$

em que

$$E(t) = +\sqrt{g_c^2(t) + g_s^2(t)} \quad (3.41a)$$

$$\psi(t) = -\tan^{-1} \left[ \frac{g_s(t)}{g_c(t)} \right] \quad (3.41b)$$

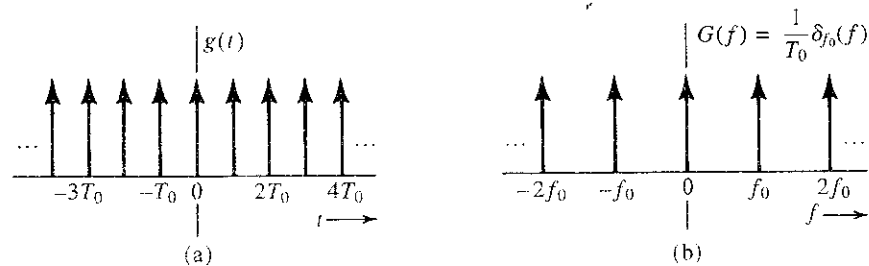
Como  $g_c(t)$  e  $g_s(t)$  são sinais passa-baixos,  $E(t)$  e  $\psi(t)$  também são sinais passa-baixos. Como  $E(t)$  é não negativo [Eq. (3.41a)], a Eq. (3.40) indica que  $E(t)$  é um envelope de variação lenta e que  $\psi(t)$  é uma fase de variação lenta do sinal passa-faixa  $g_{bp}(t)$ , como ilustrado na Fig. 3.21. Assim, o sinal passa-faixa  $g_{bp}(t)$  será uma senoide cuja amplitude varia lentamente. Devido à fase variante no tempo  $\psi(t)$ , a frequência da senoide também variará lentamente\*\* com o tempo, em torno da frequência central  $f_0$ .

\*Ver a Seção 9.9 para uma prova rigorosa dessa afirmação.

\*\*Para um envelope bem definido, é necessário  $B \ll f_0$ ; caso contrário, as variações de  $E(t)$  serão da mesma ordem que as da portadora e será difícil separar o envelope da portadora.

**Exemplo 3.11** Determinemos a transformada de Fourier de um sinal periódico  $g(t)$  de período  $T_0$  e, a seguir, determinemos a transformada de Fourier do trem periódico de impulsos  $\delta_{T_0}(t)$  mostrado na Fig. 3.22a.

**Figura 3.22**  
Trem de impulsos e correspondente espectro.



Um sinal periódico  $g(t)$  pode ser expresso por uma série de Fourier exponencial, da seguinte forma

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn2\pi f_0 t} \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Logo,

$$g(t) \longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[D_n e^{jn2\pi f_0 t}]$$

Da Eq. (3.22a), temos

$$g(t) \longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \delta(f - nf_0) \quad (3.42)$$

A Eq. (2.67) mostra que o trem de impulso  $\delta_{T_0}(t)$  pode ser expresso por uma série de Fourier como

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn2\pi f_0 t} \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Aqui,  $D_n = 1/T_0$ . Portanto, da Eq. (3.42), temos

$$\begin{aligned} \delta_{T_0}(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0) \\ &= \frac{1}{T_0} \delta_{f_0}(f) \quad f_0 = \frac{1}{T_0} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Logo, o espectro de um trem de impulsos também é um trem de impulsos (no domínio da frequência), como ilustrado na Fig. 3.23b.

### 3.3.6 Teorema da Convolução

A convolução de duas funções  $g(t)$  e  $w(t)$ , denotada por  $g(t) * w(t)$ , é definida pela integral

$$g(t) * w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) w(t - \tau) d\tau$$

A propriedade de convolução no domínio do tempo e sua dual, a propriedade de convolução no domínio da frequência, afirmam que, se

$$g_1(t) \Longleftrightarrow G_1(f) \quad \text{e} \quad g_2(t) \Longleftrightarrow G_2(f)$$

então (**convolução no domínio do tempo**)

$$g_1(t) * g_2(t) \Longleftrightarrow G_1(f)G_2(f) \quad (3.44)$$

e (**convolução no domínio da frequência**)

$$g_1(t)g_2(t) \Longleftrightarrow G_1(f) * G_2(f) \quad (3.45)$$

Essas duas relações do teorema da convolução afirmam que a convolução de dois sinais no domínio do tempo se torna uma multiplicação no domínio da frequência, enquanto a multiplicação de dois sinais no domínio do tempo se torna a convolução no domínio da frequência.

*Prova:* Por definição

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g_1(t) * g_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau)g_2(t-\tau)d\tau \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} g_2(t-\tau)dt \right] d\tau \end{aligned}$$

A integral interna é a transformada de Fourier de  $g_2(t-\tau)$ , dada por  $G_2(f)e^{-j2\pi f\tau}$  [propriedade de translação no tempo, Eq. (3.32a)]. Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g_1(t) * g_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau)e^{-j2\pi f\tau} G_2(f) d\tau \\ &= G_2(f) \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau = G_1(f)G_2(f) \end{aligned}$$

A propriedade de convolução no domínio da frequência [Eq. (3.45)] pode ser provada exatamente da mesma forma, simplesmente trocando os papéis de  $g(t)$  e  $G(f)$ .

### Largura de Banda do Produto de Dois Sinais

Se  $g_1(t)$  e  $g_2(t)$  tiverem larguras de banda  $B_1$  e  $B_2$  Hz, respectivamente, a largura de banda de  $g_1(t)g_2(t)$  é  $B_1 + B_2$  Hz. Esse resultado advém da aplicação da propriedade de largura de banda da convolução<sup>\*</sup> à Eq. (3.45). Essa propriedade afirma que a largura de banda de  $x * y$  é a soma das larguras de banda de  $x$  e de  $y$ . Logo, se a largura de banda de  $g(t)$  for  $B$  Hz, a largura de banda de  $g^2(t)$  será  $2B$  Hz, e a largura de banda de  $g^n(t)$ ,  $nB$  Hz.\*

\*A propriedade de largura de banda da convolução não se aplica a alguns casos patológicos. A propriedade falha quando a convolução de duas funções é zero em um intervalo, mesmo que as duas funções sejam não nulas [por exemplo,  $\sin 2\pi f_0 t u(t) * u(t)$ ]. Tecnicamente, a propriedade é válida até mesmo nesse caso desde que, no cálculo da largura de banda da função que resulta da convolução, levemos em consideração o intervalo em que a convolução é zero.



Exemplo 3.12 Usando a propriedade de convolução no domínio do tempo, mostremos que, se

$$g(t) \Longleftrightarrow G(f)$$

então

$$\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \Longleftrightarrow \frac{G(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}G(0)\delta(f) \quad (3.46)$$

Como

$$u(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \tau \leq t \\ 0 & \tau > t \end{cases}$$

temos

$$g(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau$$

Agora, da propriedade de convolução no domínio do tempo [Eq. (3.44)], obtemos

$$\begin{aligned} g(t) * u(t) &\Longleftrightarrow G(f)U(f) \\ &= G(f) \left[ \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f) \right] \\ &= \frac{G(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}G(0)\delta(f) \end{aligned}$$

Na dedução desse último resultado, usamos o par 11 da Tabela 3.1 e a Eq. (2.10a).

### 3.3.7 Diferenciação e Integração no Domínio do Tempo

Se

$$g(t) \Longleftrightarrow G(f),$$

então (diferenciação no domínio do tempo)\*

$$\frac{dg(t)}{dt} \Longleftrightarrow j2\pi fG(f) \quad (3.47)$$

e (integração no domínio do tempo)

$$\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \Longleftrightarrow \frac{G(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}G(0)\delta(f) \quad (3.48)$$

*Prova:* Diferenciando os dois lados da Eq. (3.9b), obtemos

$$\frac{dg(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} j2\pi fG(f)e^{j2\pi ft} df$$

Isso mostra que

$$\frac{dg(t)}{dt} \Longleftrightarrow j2\pi fG(f)$$

\*Válida apenas se a transformada de  $dg(t)/dt$  existir.

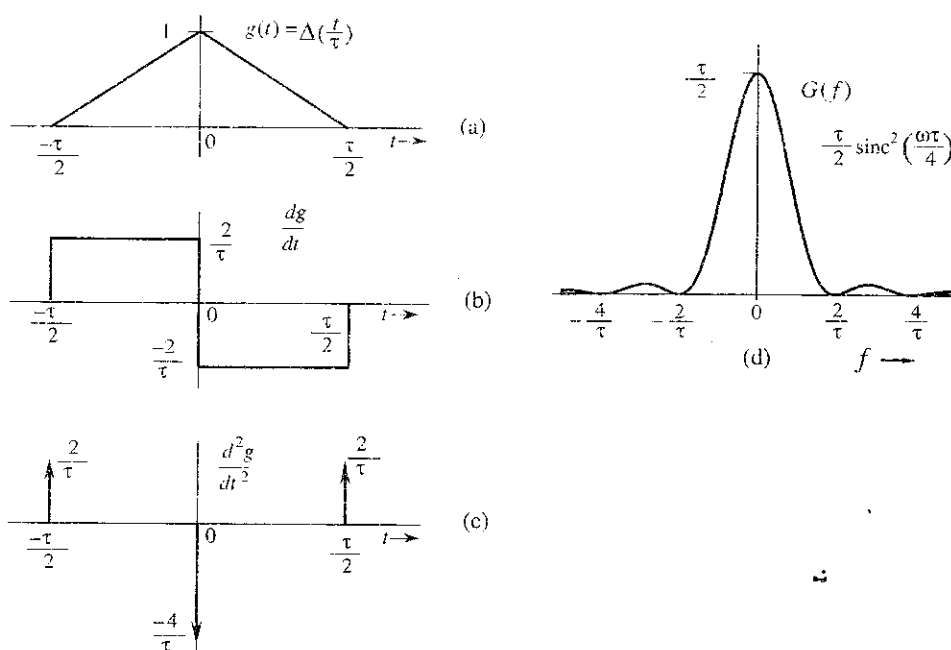
Sucessivas aplicações desta propriedade levam a

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} \iff (j2\pi f)^n G(f) \quad (3.49)$$

A propriedade de integração no domínio do tempo [Eq. (3.48)] já foi provada no Exemplo 3.12. ■

**Exemplo 3.13** Usemos a propriedade de diferenciação no domínio do tempo para calcular a transformada de Fourier do pulso triangular  $\Delta(t/\tau)$  mostrado na Fig. 3.23a.

**Figura 3.23**  
Uso da propriedade de diferenciação no domínio do tempo para calcular a transformada de Fourier de um sinal linear por partes.



Para calcular a transformada de Fourier deste pulso, o diferenciamos em relação ao tempo sucessivas vezes, como indicado na Fig. 3.23b e c. A derivada de segunda ordem consiste em uma sequência de impulsos (Fig. 3.23c). Recordemos que a derivada de um sinal em uma descontinuidade do tipo degrau é um impulso de amplitude igual à altura do degrau. A função  $dg(t)/dt$  tem um degrau ou salto positivo  $2/\tau$  em  $t = \pm \tau/2$ , e um degrau negativo  $4/\tau$  em  $t = 0$ . Portanto,

$$\frac{d^2 g(t)}{dt^2} = \frac{2}{\tau} \left[ \delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - 2\delta(t) + \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \quad (3.50)$$

Da propriedade de diferenciação no domínio do tempo [Eq. (3.49)], temos

$$\frac{d^2 g}{dt^2} \iff (j2\pi f)^2 G(f) = -(2\pi f)^2 G(f) \quad (3.51a)$$

Adicionalmente, a propriedade de translação no tempo [Eqs. (3.32)] fornece

$$\delta(t - t_0) \iff e^{-j2\pi f t_0} \quad (3.51b)$$

Tomando a transformada de Fourier da Eq. (3.50) e usando os resultados da Eq. (3.51), obtemos

$$(j2\pi f)^2 G(f) = \frac{2}{\tau} \left( e^{j\pi f \tau} - 2 + e^{-j\pi f \tau} \right) = \frac{4}{\tau} (\cos \pi f \tau - 1) = -\frac{8}{\tau} \sin^2 \left( \frac{\pi f \tau}{2} \right)$$

$$G(f) = \frac{8}{(2\pi f)^2 \tau} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi f \tau}{2} \right) = \frac{\tau}{2} \left[ \frac{\operatorname{sen}(\pi f \tau / 2)}{\pi f \tau / 2} \right]^2 = \frac{\tau}{2} \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\pi f \tau}{2} \right) \quad (3.52)$$

O espectro  $G(f)$  é ilustrado na Fig. 3.23d. Esse procedimento de cálculo da transformada de Fourier pode ser aplicado a qualquer função  $g(t)$  que consista em segmentos de reta, com  $g(t) \rightarrow 0$  quando  $|t| \rightarrow \infty$ . A derivada de segunda ordem de um sinal desse tipo é uma sequência de impulsos, cujas transformadas de Fourier podem ser determinadas por inspeção. Este exemplo sugere um método numérico para o cálculo da transformada de Fourier de um sinal arbitrário  $g(t)$ , em que o sinal é aproximado por segmentos de reta.

Para facilitar a consulta, diversas propriedades importantes da transformada de Fourier são resumidas na Tabela 3.2.

**Tabela 3.2**

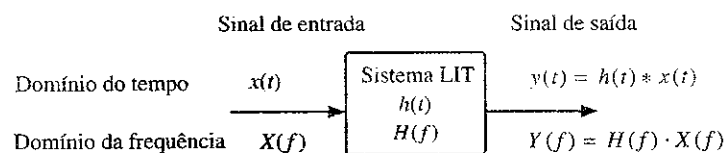
Propriedades de Operações com Transformada de Fourier

Operação	$g(t)$	$G(f)$
Superposição	$g_1(t) + g_2(t)$	$G_1(f) + G_2(f)$
Multiplicação por escalar	$kg(t)$	$kG(f)$
Dualidade	$G(t)$	$g(-f)$
Dilatação no tempo	$g(at)$	$\frac{1}{ a } G\left(\frac{f}{a}\right)$
Translação no tempo	$g(t - t_0)$	$G(f)e^{-j2\pi f t_0}$
Translação na frequência	$g(t)e^{j2\pi f_0 t}$	$G(f - f_0)$
Convolução no domínio do tempo	$g_1(t) * g_2(t)$	$G_1(f)G_2(f)$
Convolução no domínio da frequência	$g_1(t)g_2(t)$	$G_1(f) * G_2(f)$
Diferenciação no domínio do tempo	$\frac{d^n g(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n G(f)$
Integração no domínio do tempo	$\int_{-\infty}^t g(x) dx$	$\frac{G(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} G(0)\delta(f)$

### 3.4 TRANSMISSÃO DE SINAL EM UM SISTEMA LINEAR

Um sistema linear invariante no tempo (LIT) em tempo contínuo pode ser igualmente bem caracterizado no domínio do tempo ou no domínio da frequência. O modelo de sistema LIT ilustrado na Fig. 3.24 pode, muitas vezes, ser usado para caracterizar canais de comunicação. Em sistemas de comunicação e no processamento de sinais, o interesse reside apenas em sistemas lineares estáveis com entrada limitada e saída limitada (sistemas BIBO — *bounded-input-bounded-output systems*). Uma discussão detalhada sobre estabilidade de sistemas pode ser encontrada em um livro de Lathi.<sup>3</sup>

**Figura 3.24**  
Transmissão de um sinal através de um sistema linear invariante no tempo.



Um sistema LIT estável pode ser caracterizado no domínio do tempo por sua resposta ao impulso  $h(t)$ , que é a resposta do sistema a um impulso unitário de entrada:

$$y(t) = h(t) \quad \text{quando} \quad x(t) = \delta(t)$$

A resposta do sistema a um sinal de entrada limitado  $x(t)$  é obtida da relação de convolução

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad (3.53)$$

No domínio da frequência, a relação entre os sinais de entrada e de saída é obtida da transformada de Fourier dos dois lados da Eq. (3.53). Sejam,

$$x(t) \Longleftrightarrow X(f)$$

$$y(t) \Longleftrightarrow Y(f)$$

$$h(t) \Longleftrightarrow H(f)$$

Aplicando o teorema da convolução, a Eq. (3.53) passa a

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f) \quad (3.54)$$

Em geral,  $H(f)$ , a transformada de Fourier da resposta ao impulso  $h(t)$ , recebe a denominação **função de transferência** ou **resposta em frequência** do sistema LIT. É comum que  $H(f)$  seja uma função de valores complexos, podendo ser escrita como

$$H(f) = |H(f)|e^{j\theta_h(f)}$$

em que  $|H(f)|$  é a resposta de amplitude e  $\theta_h(f)$ , a resposta de fase do sistema LIT.

### 3.4.1 Distorção do Sinal Durante a Transmissão

A transmissão de um sinal de entrada  $x(t)$  através de um sistema o transforma no sinal de saída  $y(t)$ . A Eq. (3.54) ilustra a natureza dessa transformação ou modificação. Aqui,  $X(f)$  e  $Y(f)$  são os espectros de entrada e de saída, respectivamente. Portanto,  $H(f)$  é a resposta espectral do sistema. O espectro de saída é obtido multiplicando o espectro de entrada pela resposta espectral do sistema. A Eq. (3.54) ressalta a formação espectral (ou modificação) do sinal de entrada pelo sistema. A Eq. (3.54) pode ser expressa na forma polar como

$$|Y(f)|e^{j\theta_y(f)} = |X(f)||H(f)|e^{j[\theta_x(f)+\theta_h(f)]}$$

Assim, obtemos as relações de amplitude e de fase

$$|Y(f)| = |X(f)||H(f)| \quad (3.55a)$$

$$\theta_y(f) = \theta_x(f) + \theta_h(f) \quad (3.55b)$$

Durante a transmissão, o espectro de amplitude do sinal de entrada,  $|X(f)|$ , é alterado para  $|X(f)| \times |H(f)|$ . Do mesmo modo, o espectro de fase do sinal de entrada,  $\theta_x(f)$  é alterado para  $\theta_x(f) + \theta_h(f)$ .

Uma componente espectral do sinal de entrada de frequência  $f$  é modificada em amplitude por um fator  $|H(f)|$  e deslocada em fase por um ângulo  $\theta_h(f)$ .  $|H(f)|$  é a resposta de amplitude e  $\theta_h(f)$ , a resposta de fase do sistema. Os gráficos de  $|H(f)|$  e  $\theta_h(f)$  em função de  $f$  mostram como o sistema modifica as amplitudes e fases das diversas entradas senoidais. Por isso,  $H(f)$  é denominada **resposta em frequência** do sistema. Durante a transmissão através do sistema, algumas componentes de frequência podem ter a amplitude amplificada, enquanto outras podem ter a amplitude atenuada. As fases relativas das diversas componentes também são alteradas. Em geral, a forma de onda de saída será diferente da de entrada.

### 3.4.2 Transmissão sem Distorção

Em diversas aplicações, como amplificação de sinal ou transmissão de sinal de mensagem através de um canal de comunicação, é necessário que a forma de onda de saída seja uma réplica da forma de onda de entrada. Nesses casos, é necessário minimizar a distorção causada pelo amplificador ou canal de comunicação. Portanto, a determinação das características de um sistema que permita a passagem de um sinal sem distorção (**transmissão sem distorção**) é de interesse prático.

A transmissão é sem distorção se a entrada e a saída tiverem formas de onda idênticas, a menos de uma constante multiplicativa. Uma saída atrasada que mantenha a forma de onda de entrada também é considerada sem distorção. Assim, na transmissão sem distorção, a entrada  $x(t)$  e a saída  $y(t)$  satisfazem a condição

$$y(t) = k \cdot x(t - t_d) \quad (3.56)$$

A transformada de Fourier desta equação fornece

$$Y(f) = kX(f)e^{-j2\pi ft_d}$$

Contudo, como

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

temos,

$$H(f) = k e^{-j2\pi ft_d}$$

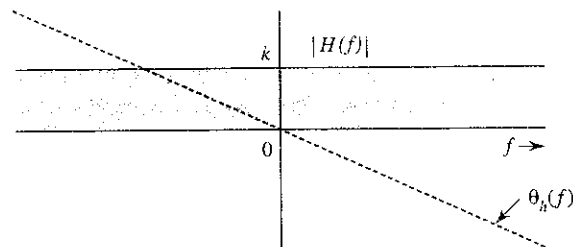
Esta é a função de transferência necessária para transmissão sem distorção. Desta equação, obtemos

$$|H(f)| = k \quad (3.57a)$$

$$\theta_h(f) = -2\pi ft_d \quad (3.57b)$$

Isto mostra que, para transmissão sem distorção, a resposta de amplitude  $|H(f)|$  deve ser constante e a resposta de fase  $\theta_h(f)$ , uma função linear de  $f$  que passa pela origem em  $f = 0$ , como ilustrado na Fig. 3.25. A inclinação de  $\theta_h(f)$  em relação à frequência angular  $\omega = 2\pi f$  é  $-t_d$ , onde  $t_d$  é o atraso da saída em relação à entrada.\*

Figura 3.25  
Resposta em  
frequência  
de um  
sistema linear  
invariante no  
tempo para  
transmissão  
sem distorção.



#### Sistemas Passa-Tudo versus Sistemas sem Distorção

Na análise de circuitos e no projeto de filtros, algumas vezes o maior interesse reside no ganho de um sistema. Um sistema passa-tudo tem ganho constante para todas as frequências [ou seja,  $|H(f)| = k$ ], sem a exigência de fase linear. Notemos que, pela Eq. (3.57), um sistema sem distorção é um sistema passa-tudo, embora a recíproca não seja verdadeira. Como é muito comum que os principiantes se confundam com a diferença entre sistemas sem distorção e sistemas passa-tudo, este é o melhor momento para esclarecer os conceitos.

\*Adicionalmente, é necessário que  $\theta_h(0)$  seja 0 (como na Fig. 3.25) ou um valor constante  $n\pi$  ( $n$  inteiro), ou seja,  $\theta_h(f) = n\pi - 2\pi ft_d$ . O efeito da adição da fase  $n\pi$  é, no máximo, uma mudança de sinal da função.

Para comprovar como um sistema passa-tudo pode introduzir distorção, consideremos um exemplo ilustrativo. Imaginemos que queiramos transmitir um sinal musical gravado de um dueto violino-violoncelo. O violino contribui com a parte de frequências altas desse sinal musical, enquanto o violoncelo contribui com a parte de frequências baixas. Quando esse sinal musical é transmitido através de um dado sistema *passa-tudo*, as duas partes recebem o mesmo ganho. Contudo, suponhamos que esse sistema passa-tudo cause um atraso *extra* de um segundo no conteúdo de alta frequência da música (a parte do violino). Em consequência, na recepção, a audiência ouvirá um sinal “musical” que está totalmente fora de sincronismo, embora *todas as componentes do sinal tenham recebido o mesmo ganho e todas estejam presentes*. A diferença no atraso de transmissão das distintas componentes de frequência advém da fase não linear de  $H(f)$  no filtro passa-tudo.

Para sermos mais precisos, o ganho da função de transferência  $|H(f)|$  determina o ganho de cada componente de frequência de entrada, e  $\angle H(f)$  determina o atraso de cada componente. Imaginemos que a entrada do sistema  $x(t)$  consista em múltiplas senoides (suas componentes espectrais). Para que o sinal de saída  $y(t)$  seja sem distorção, o mesmo deve ser igual ao sinal de entrada multiplicado pelo ganho  $k$  e atrasado por  $t_d$ . Para sintetizar um sinal desse tipo,  $y(t)$  precisa ter exatamente as mesmas componentes de  $x(t)$ , sendo cada uma multiplicada por  $k$  e atrasada por  $t_d$ . Isso significa que a função de transferência do sistema,  $H(f)$ , deve ser tal que cada componente senoidal receba o mesmo ganho (ou perda)  $k$  e sofra o mesmo atraso temporal  $t_d$  segundos. A primeira condição requer que

$$|H(f)| = k$$

Vimos anteriormente (Seção 3.3) que, para que todas as componentes de frequências sofram o mesmo atraso temporal  $t_d$ , é necessário um atraso de fase linear  $2\pi f t_d$  (Fig. 3.18) que passe pela origem

$$\theta_h(f) = -2\pi f t_d$$

Na prática, muitos sistemas têm característica de fase que pode apenas ser aproximada como linear. Um método conveniente para verificar a linearidade de fase consiste em traçar o gráfico da inclinação de  $\angle H(f)$  em função da frequência. A inclinação pode ser uma função de  $f$ , no caso geral, dada por

$$t_d(f) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\theta_h(f)}{df} \quad (3.58)$$

Se a inclinação de  $\theta_h$  for constante (ou seja, se  $\theta_h$  for linear em relação a  $f$ ), todas as componentes de frequência sofrerão o mesmo atraso temporal  $t_d$ . Se a inclinação não for constante, o atraso temporal  $t_d$  variará com a frequência. Isso significa que diferentes componentes de frequência sofrerão diferentes atrasos temporais e, em consequência, a forma de onda de saída não será uma réplica da forma de onda de entrada (como no exemplo do dueto de violino-violoncelo). Para que a transmissão de um sinal seja sem distorção,  $t_d(f)$  deve ser uma constante  $t_d$  em toda a faixa de frequências de interesse.\*

Existe, então, uma clara distinção entre sistemas passa-tudo e sistemas sem distorção. Um erro comum consiste em pensar que a planura da resposta de amplitude  $|H(f)|$  baste para garantir a qualidade

\*A Fig. 3.25 mostra que, para transmissão sem distorção, a resposta de fase deve não apenas ser linear, como também deve passar pela origem. Essa última exigência pode ser um pouco relaxada no caso de sinais passa-faixa. A fase na origem pode ser uma constante qualquer [ $\theta_h(f) = \theta_0 - 2\pi f t_d$  ou  $\theta_h(0) = \theta_0$ ]. A razão para isso reside na Eq. (3.37), que mostra que a adição de uma fase constante  $\theta_0$  ao espectro de um sinal passa-faixa equivale a deslocar a fase da portadora por  $\theta_0$ . O sinal modulante (envelope) não é afetado. O envelope de saída é igual ao de entrada, atrasado por

$$t_g = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_h(f)}{df}$$

Esse atraso  $t_d$  é chamado de **atraso de grupo** ou **atraso de envelope**; a portadora de saída é igual à de entrada, atrasada por

$$t_p = -\frac{\theta_h(f)}{2\pi f}$$

Esse atraso é denominado **atraso de fase**, sendo  $f_0$  a frequência central da banda passante.

do sinal. Um sistema que tenha uma resposta de amplitude plana pode distorcer um sinal a ponto de torná-lo irreconhecível, caso a resposta de fase não seja linear ( $t_d$  não constante).

### Natureza da Distorção em Sinais de Áudio e de Vídeo

De modo geral, um ouvido humano é capaz de perceber prontamente uma distorção de amplitude, embora seja insensível a distorção de fase. Para que a distorção de fase se torne perceptível, a variação no atraso temporal (variação da inclinação de  $\theta_h$ ) deve ser comparável à duração do sinal (ou a duração fisicamente perceptível, se o sinal, propriamente dito, seja longo). No caso de sinais de áudio, cada sílaba falada pode ser considerada um sinal individual. A duração média de uma sílaba falada é da ordem de 0,01 a 0,1 segundo. Embora sistemas de áudio possam ter resposta de fase não linear, é possível que nenhuma distorção perceptível resulte, pois, em sistemas de áudio usados na prática, a variação máxima na inclinação de  $\theta_h$  é apenas uma pequena fração de um milissegundo. Essa é a justificativa da afirmação "o ouvido humano é relativamente insensível à distorção de fase".<sup>4</sup> Um resultado disso é o fato de os fabricantes de equipamentos de áudio disponibilizarem apenas  $|H(f)|$ , a característica de resposta de amplitude de seus sistemas.

No caso de sinais de vídeo, a situação é exatamente oposta. O olho humano é sensível à distorção de fase e relativamente insensível à distorção de amplitude. Em sinais de televisão, a distorção de amplitude se manifesta como uma destruição parcial dos valores relativos de meios-tons da imagem resultante, o que não é prontamente percebido pelo olho humano. A distorção de fase (resposta de fase não linear), por sua vez, causa atrasos temporais diferentes aos distintos elementos da imagem. Isso resulta em uma imagem embaralhada, o que é imediatamente percebido pelo olho humano. A distorção de fase também é importante em sistemas de comunicação digital, pois a característica de fase não linear de um canal causa dispersão (alargamento temporal) dos pulsos, o que resulta em interferência entre pulsos vizinhos. Essa interferência pode provocar erros na amplitude dos pulsos no receptor: um 1 binário pode ser interpretado como 0 e vice-versa.

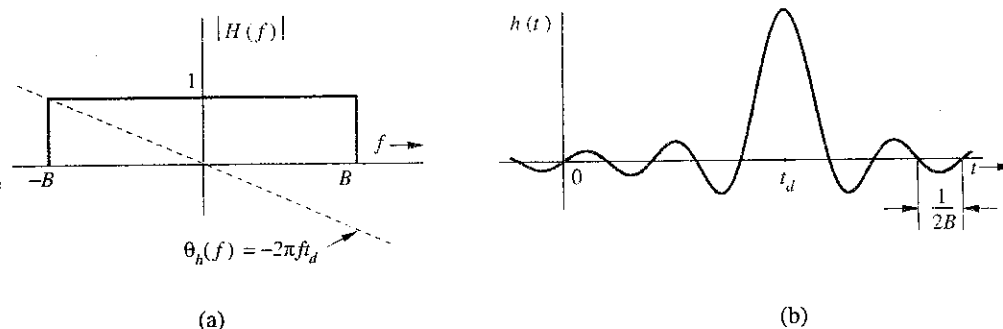
## 3.5 FILTROS IDEAIS VERSUS FILTROS PRÁTICOS

Filtros ideais permitem a transmissão sem distorção de uma determinada faixa de frequências e suprimem todas as outras frequências. O filtro passa-baixas ideal (Fig. 3.26), por exemplo, permite que todas as componentes de frequência abaixo de  $f = B$  Hz passem sem distorção e suprime todas as componentes acima de  $f = B$ . A Fig. 3.27 mostra características de filtros passa-altos e passa-faixa ideais.

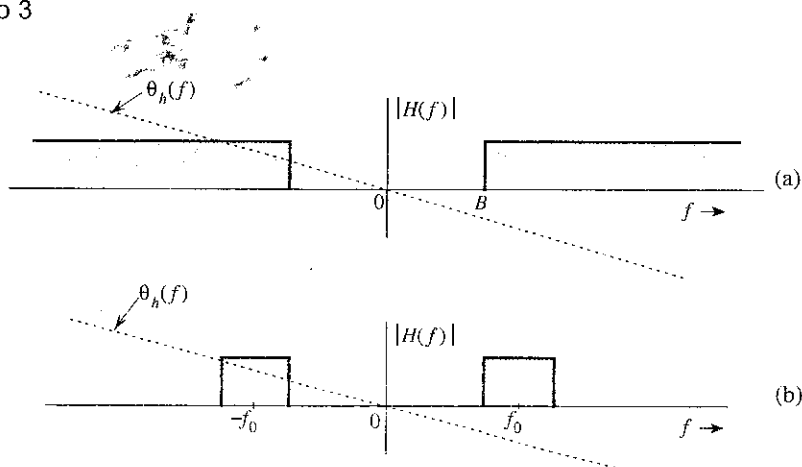
O filtro passa-baixas ideal na Fig. 3.26a tem inclinação de fase linear  $-\pi t_d$ , que resulta em um atraso temporal de  $t_d$  segundos para todas as componentes de frequências abaixo de  $B$  Hz. Portanto, se o sinal de entrada  $g(t)$  for limitado em banda a  $B$  Hz, a saída  $y(t)$  será igual a  $g(t)$  atrasado por  $t_d$ , ou seja,

$$y(t) = g(t - t_d)$$

Figura 3.26  
Resposta em frequência de um filtro passa-baixas ideal e correspondente resposta ao impulso.



**Figura 3.27**  
Respostas  
em frequência  
de filtros  
passa-altos e  
passa-faixa  
ideais.



O sinal  $g(t)$  é transmitido por esse sistema sem distorção, mas com atraso temporal  $t_d$ . Para este filtro,  $|H(f)| = \Pi(f/2B)$  e  $\theta_h(f) = -2\pi f t_d$ , de modo que

$$H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) e^{-j2\pi f t_d} \quad (3.59a)$$

A resposta ao impulso unitário  $h(t)$  deste filtro pode ser obtida do par 18 na Tabela 3.1 e da propriedade de translação no tempo:

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1} \left[ \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) e^{-j2\pi f t_d} \right] \\ &= 2B \operatorname{sinc} [2\pi B(t - t_d)] \end{aligned} \quad (3.59b)$$

Recordemos que  $h(t)$  é a resposta do sistema ao impulso unitário  $\delta(t)$  aplicado em  $t = 0$ . A Fig. 3.26b ilustra um fato curioso: a resposta  $h(t)$  tem início antes mesmo da aplicação da entrada (em  $t = 0$ ). É óbvio que o filtro é não causal e, portanto, não realizável; ou seja, um sistema como este é fisicamente impossível, pois nenhum sistema razoável é capaz de responder a uma entrada **antes** que a mesma seja aplicada ao sistema. De modo similar, podemos mostrar que outros filtros ideais (como os filtros passa-altos e passa-faixa mostrados na Fig. 3.27) também não são fisicamente realizáveis.

Para um sistema fisicamente realizável,  $h(t)$  deve ser causal, ou seja,

$$h(t) = 0 \quad \text{para } t < 0$$

No domínio da frequência, esta condição é equivalente ao **critério de Paley-Winer**, segundo o qual a condição necessária e suficiente para que  $|H(f)|$  seja a resposta de amplitude de um sistema realizável (ou causal) é\*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(f)||}{1 + (2\pi f)^2} df < \infty \quad (3.60)$$

Se  $H(f)$  não satisfizer esta condição, não será realizável. Vale notar que, se  $|H(f)| = 0$  em uma banda finita qualquer,  $|\ln |H(f)|| = \infty$  nesta banda, violando a condição (3.60). Se, no entanto,  $H(f) = 0$  em uma única frequência (ou em um conjunto de frequências discretas), a integral na Eq. (3.60) ainda pode ser finita, embora o integrando seja infinito. Portanto, para um sistema fisicamente realizável,  $H(f)$  pode ser zero em algumas frequências, mas não pode ser zero em uma faixa finita de frequências. Segundo esse critério, as características de filtros ideais (Figs. 3.26 e 3.27) são claramente não realizáveis.

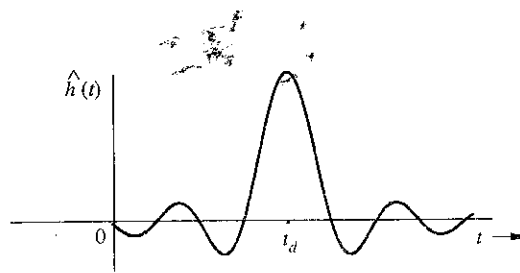
\*Assumimos que  $|H(f)|$  seja quadrático-integrável, ou seja, assumimos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

seja finita



**Figura 3.28**  
Realização  
aproximada  
de uma  
característica  
de filtro  
passa-baixos  
ideal com  
truncamento  
da resposta ao  
impulso.



A resposta ao impulso  $h(t)$  na Fig. 3.26 não é realizável. Uma abordagem prática ao projeto de filtros consiste em cortar a cauda de  $h(t)$  para  $t < 0$ . A resultante resposta ao impulso,  $\hat{h}(t)$  é causal e dada por

$$\hat{h}(t) = h(t)u(t)$$

por ser causal (Fig. 3.28),  $\hat{h}(t)$  é fisicamente realizável. Se  $t_d$  for suficientemente grande,  $\hat{h}(t)$  será uma boa aproximação de  $h(t)$  e o filtro correspondente,  $\hat{H}(f)$  será uma boa aproximação de um filtro ideal. Esta realização de um filtro ideal é possível devido ao maior valor do atraso temporal  $t_d$ . Isso significa que o preço de uma boa aproximação física é um maior atraso na saída, o que, com frequência, é verdade para sistemas não causais. Teoricamente, a realização da característica ideal requer um atraso  $t_d = \infty$ . Contudo, um exame da Fig. 3.27b mostra que um atraso  $t_d$  de três ou quatro vezes  $\pi/W$  fará com que  $\hat{h}(t)$  seja uma boa versão aproximada de  $h(t - t_d)$ . Por exemplo, filtros de áudio devem passar frequências de até 20 kHz (a maior frequência que o ouvido humano pode distinguir). Neste caso, um atraso  $t_d$  da ordem de  $10^{-4}$  segundo (0,1 ms) seria uma escolha razoável. No entanto, a operação de truncamento [corte da cauda de  $h(t)$  para torná-la causal] cria alguns problemas inesperados de espalhamento e vazamento espectrais, que podem ser parcialmente corrigidos com o emprego de uma função de truncamento gradual para que a cauda de  $h(t)$  seja cortada de forma gradual (e não de forma abrupta).<sup>5</sup>

Na prática, podemos realizar uma variedade de características de filtros para aproximar características ideais. Filtros práticos (ou realizáveis) têm resposta de amplitude  $|H(f)|$  com características graduais, sem descontinuidades do tipo degrau. Por exemplo, filtros de Butterworth ou de Chebychev são largamente utilizados em várias aplicações, incluindo circuitos práticos de comunicação.

Sinais analógicos também podem ser processados de forma digital (conversão A/D). Isto envolve amostragem, quantização e codificação. O resultante sinal digital pode ser processado por um pequeno computador digital especialmente projetado para converter a sequência de entrada na sequência de saída desejada. A sequência de saída é convertida de volta ao desejado sinal analógico. Um algoritmo especial para o computador digital de processamento pode ser usado para implementar uma dada operação com sinais (por exemplo, filtragem passa-baixos, passa-faixa ou passa-altos). O tema de filtragem digital foge um pouco do escopo deste livro. Existem livros excelentes sobre esse assunto.<sup>3</sup>

## 3.6 DISTORÇÃO DE SINAL EM UM CANAL DE COMUNICAÇÃO

Um sinal transmitido ao longo de um canal é distorcido por várias imperfeições do canal. A seguir, estudaremos a natureza da distorção de um sinal.

### 3.6.1 Distorção Linear

Primeiro, consideremos canais lineares invariantes no tempo. Em um canal desse tipo, a distorção do sinal pode ser causada por distorção de magnitude ou de fase, ou ambas, devido a características não ideais do canal. Podemos determinar os efeitos que tais **não idealidades** terão sobre um pulso

$g(t)$  transmitido ao longo do canal. Admitamos que o pulso exista em um intervalo  $(a, b)$  e seja zero fora dele. As componentes do espectro de Fourier do pulso terão um equilíbrio perfeito e delicado de magnitudes e fases, de modo que a soma das mesmas forma precisamente o pulso  $g(t)$  no intervalo  $(a, b)$  e é zero fora dele. A transmissão de  $g(t)$  através de um canal ideal que satisfaz as condições de transmissão sem distorção não perturba esse equilíbrio, pois um canal sem distorção multiplica todas as componentes pelo mesmo fator e as atrasa pelo mesmo intervalo de tempo. Contudo, se a resposta de amplitude do canal for não ideal [ou seja, se  $|H(f)|$  não for constante], esse delicado equilíbrio será quebrado e a soma de todas as componentes deixará de ser zero fora do intervalo  $(a, b)$ . Em resumo, o pulso se espalhará (ver Exemplo 3.14). O mesmo ocorre se a característica de fase do canal não for ideal, ou seja, se  $\theta_h(f) \neq -2\pi f t_d$ . Assim, alargamento, ou **dispersão**, do pulso ocorrerá se a resposta de amplitude ou a resposta de fase não for ideal, ou se ambas não forem ideais.

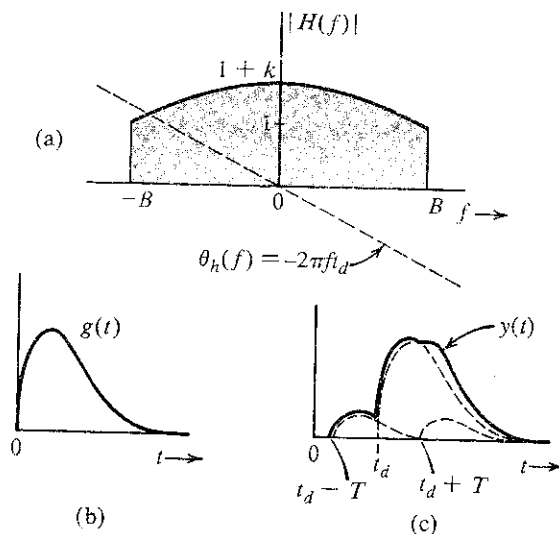
Distorção de canal linear (alargamento temporal) é particularmente danosa a sistemas de comunicação digital, pois introduz o que é conhecido como interferência intersimbólica (ISI — *InterSymbol Interference*). Em outras palavras, ao ser transmitido através de um canal dispersivo, um símbolo digital tende a se alargar além do intervalo de tempo a ele reservado. Portanto, símbolos adjacentes interferirão uns com os outros, aumentando a probabilidade de erro de detecção no receptor.

**Exemplo 3.14** A função de transferência de um filtro passa-baixas  $H(f)$  (Fig. 3.19a) é dada por

$$H(f) = \begin{cases} (1 + k \cos 2\pi f T) e^{-j2\pi f t_d} & |f| < B \\ 0 & |f| > B \end{cases} \quad (3.61)$$

Um pulso  $g(t)$  limitado em banda a  $B$  Hz (Fig. 3.29b) é aplicado à entrada desse filtro. Determinemos a saída  $y(t)$ .

**Figura 3.29**  
Pulso dispersado ao passar por um sistema que não é sem distorção.



A característica de fase desse filtro é ideal, mas a de amplitude é não ideal. Como  $g(t) \iff G(f)$ ,  $y(t) \iff Y(f)$ , e

$$\begin{aligned} Y(f) &= G(f)H(f) \\ &= G(f) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) (1 + k \cos 2\pi f T) e^{-j2\pi f t_d} \\ &= G(f) e^{-j2\pi f t_d} + k [G(f) \cos 2\pi f T] e^{-j2\pi f t_d} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Vale notar que, na dedução da Eq. (3.62), como  $g(t)$  é limitado em banda a  $B$  Hz, temos  $G(f) \times \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) = G(f)$ . Fazendo uso da propriedade de translação no tempo e da Eq. (3.32a), obtemos

$$y(t) = g(t - t_d) + \frac{k}{2}[g(t - t_d - T) + g(t - t_d + T)] \quad (3.63)$$

A saída é, na verdade,  $g(t) + (k/2)[g(t - T) + g(t + T)]$  atrasado de  $t_d$ . Ou seja, a saída consiste em  $g(t)$  e seus ecos deslocados por  $\pm t_d$ . A dispersão do pulso causada pelos ecos fica evidente na Fig. 3.29c. Se  $H(f)$  representar resposta ideal de amplitude e resposta não ideal de fase, o efeito será similar (ver Exercício 3.6-1).

### 3.6.2 Distorção Causada por Não Linearidades do Canal

Até aqui, consideremos o canal como linear. Essa aproximação é válida apenas para pequenos sinais. Para sinais de grande amplitude, não linearidades não podem ser desprezadas. Uma discussão detalhada de sistemas não lineares está além do escopo deste livro. Consideraremos um caso simples de um canal não ideal sem memória, onde a entrada  $g$  e a saída  $y$  se relacionam por alguma equação não linear (sem memória),

$$y = f(g)$$

O lado direito dessa equação pode ser expandido em uma série de Maclaurin, como

$$y(t) = a_0 + a_1 g(t) + a_2 g^2(t) + a_3 g^3(t) + \dots + a_k g^k(t) + \dots$$

Recordemos o resultado na Seção 3.3.6 (convolução), segundo o qual, se a largura de banda de  $g(t)$  for  $B$  Hz, então a largura de banda de  $g^k(t)$  será  $kB$  Hz. Portanto, a largura de banda de  $y(t)$  é **maior** que  $kB$  Hz. Em consequência, o espectro de saída será mais largo que o de entrada, e o sinal de saída conterá componentes de frequências não contidas no sinal de entrada. Em comunicação por difusão, é necessário amplificar sinais a níveis de potência muito elevados, o que requer amplificadores de alta eficiência (de classe C). Infelizmente, esses amplificadores são não lineares e, ao serem usados na amplificação de sinais, causam distorção. Esse é um dos sérios problemas de sinais AM. No entanto, sinais FM não são afetados por distorção não linear, como mostrado no Capítulo 5. Se um sinal for transmitido através de um canal não linear, a não linearidade não apenas distorce o sinal, mas também causa interferência em outros sinais no canal, devido a sua dispersão (alargamento) espectral.

No caso de sistemas de comunicação digital, o efeito da distorção não linear difere do efeito de alargamento temporal causado por distorção linear. A distorção linear provoca interferência entre sinais em um mesmo canal, enquanto a dispersão espectral, devido à distorção não linear, causa interferência entre sinais que usam diferentes canais de frequência.

**Exemplo 3.15** A relação entre a entrada  $x(t)$  e a saída  $y(t)$  de um certo canal não linear é dada por

$$y(t) = x(t) + 0,000158x^2(t)$$

Determinemos o sinal de saída  $y(t)$  e seu espectro  $Y(f)$ , considerando um sinal de entrada  $x(t) = 2000 \text{ sinc}(2000\pi t)$ . Comprovemos que a largura de banda do sinal de saída é o dobro da largura de banda do sinal de entrada. Esse é o resultado de usar o quadrado de um sinal. Será possível recuperar o sinal  $x(t)$  (sem distorção) da saída  $y(t)$ ?

Como

$$x(t) = 2000 \operatorname{sinc}(2000\pi t) \iff X(f) = \Pi\left(\frac{f}{2000}\right)$$

Temos,

$$y(t) = x(t) + 0,000158x^2(t) = 2000 \operatorname{sinc}(2000\pi t) + 0,316 \cdot 2000 \operatorname{sinc}^2(2000\pi t)$$

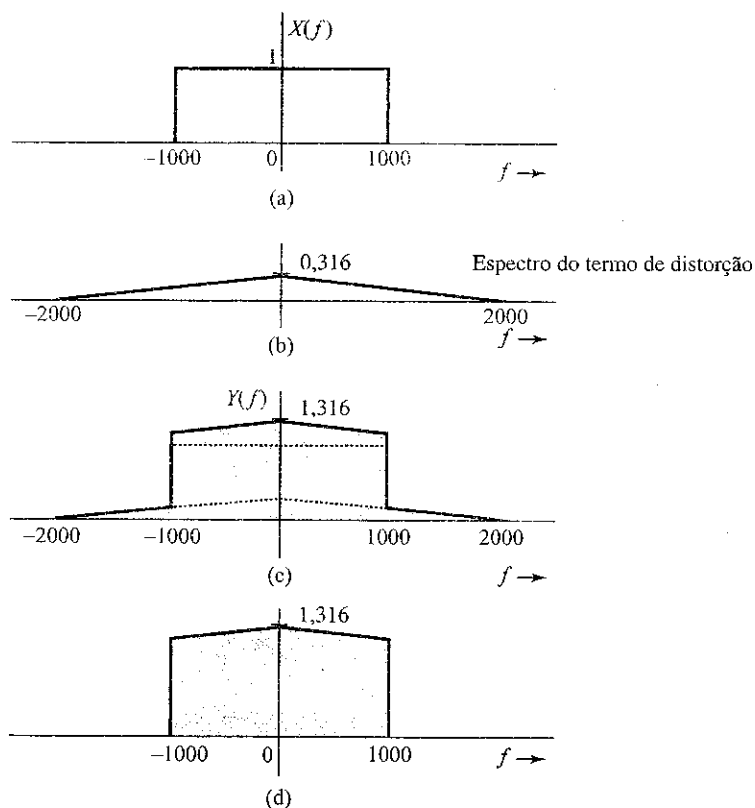
 $\iff$ 

$$Y(f) = \Pi\left(\frac{f}{2000}\right) + 0,316 \Delta\left(\frac{f}{4000}\right)$$

Vale notar que  $0,316 \times 2000 \operatorname{sinc}^2(2000\pi t)$  é o termo indesejado (distorção) no sinal recebido. A Fig. 3.30a mostra o espectro do sinal de entrada (desejado)  $X(f)$ ; a Fig. 3.30b mostra o espectro do termo indesejado (distorção); a Fig. 3.30c mostra o espectro recebido  $Y(f)$ . Fazemos as seguintes observações:

1. A largura de banda do sinal recebido  $y(t)$  é o dobro da largura de banda do sinal de entrada  $x(t)$  (pois o sinal foi elevado ao quadrado).
2. O sinal recebido contém o sinal de entrada  $x(t)$  e o sinal indesejado  $632 \operatorname{sinc}^2(2000\pi t)$ . Os espectros desses dois sinais são ilustrados na Fig. 3.30a e b. A Fig. 3.30c mostra  $Y(f)$ , o espectro do sinal recebido. Os espectros do sinal desejado e do sinal de distorção se sobrepõem, o que impede que o sinal  $x(t)$  seja recuperado do sinal  $y(t)$  sem alguma distorção.
3. Podemos reduzir a distorção aplicando o sinal recebido a um filtro passa-baixas com largura de banda de 1000 Hz. O espectro da saída desse filtro é ilustrado na Fig. 3.30d. A saída do filtro é o sinal de entrada desejado  $x(t)$  com alguma distorção residual.

**Figura 3.30**  
Distorção de  
sinal causada  
por operação  
não linear. (a)  
Espectro do  
sinal desejado  
(de entrada).  
(b) Espectro do  
sinal indesejado  
(distorção) no  
sinal recebido.  
(c) Espectro do  
sinal recebido.  
(d) Espectro do  
sinal recebido  
após filtragem  
passa-baixas.



4. Haverá um problema adicional de interferência com outros sinais caso o sinal de entrada  $x(t)$  seja multiplexado por divisão em frequência juntamente com outros sinais nesse mesmo canal. Isso significa que vários sinais que ocupam faixas de frequências que não se sobrepõem são transmitidos simultaneamente no mesmo canal. Se o espectro  $X(f)$  se alargar além de sua banda original de 1000 Hz, interferirá com o sinal que ocupa a faixa de frequências entre 1000 e 2000 Hz. Assim, em adição à distorção de  $x(t)$ , haverá interferência com a banda adjacente.
5. Se  $x(t)$  fosse um sinal digital consistindo em um trem de pulsos, cada pulso seria distorcido, mas não haveria interferência entre pulsos adjacentes. Mesmo com pulsos distorcidos, os dados podem ser recebidos sem perda, pois comunicação digital é capaz de suportar considerável distorção de pulsos sem perda de informação. Portanto, se esse canal fosse usado para transmitir um sinal multiplexado por divisão no tempo e consistindo em dois trens de pulsos entrelaçados, os dados nos dois trens seriam recuperados no receptor.

### 3.6.3 Distorção Causada por Efeitos de Multipercurso

Uma transmissão em multipercurso ocorre quando um sinal transmitido chega ao receptor por dois ou mais percursos, com atrasos distintos. Por exemplo, se um sinal for transmitido através de um cabo que apresenta irregularidades (descasamento) de impedâncias ao longo do percurso, o sinal chegará ao receptor na forma de uma onda direta mais diversas reflexões com atrasos variáveis. No caso de enlaces de rádio, o sinal pode ser recebido de um percurso direto entre as antenas transmissora e receptora e, também, de reflexões por outros objetos, como montanhas e edifícios. Em enlaces de rádio de longa distância que utilizam a ionosfera, efeitos similares ocorrem por conta de percursos de um e de múltiplos saltos. Em cada caso, o canal de transmissão pode ser representado como vários canais em paralelo, cada um com diferentes valores de atenuação relativa e de atraso temporal. Consideremos o caso de apenas dois percursos: um com ganho unitário e atraso  $t_d$ , e outro com ganho  $\alpha$  e atraso  $t_d + \Delta t$ , como ilustrado na Fig. 3.31a. As funções de transferências dos dois percursos são dadas  $e^{-j2\pi f t_d}$  e  $\alpha e^{-j2\pi f (t_d + \Delta t)}$ , respectivamente. A função de transferência global de um canal como esse é  $H(f)$ , dada por

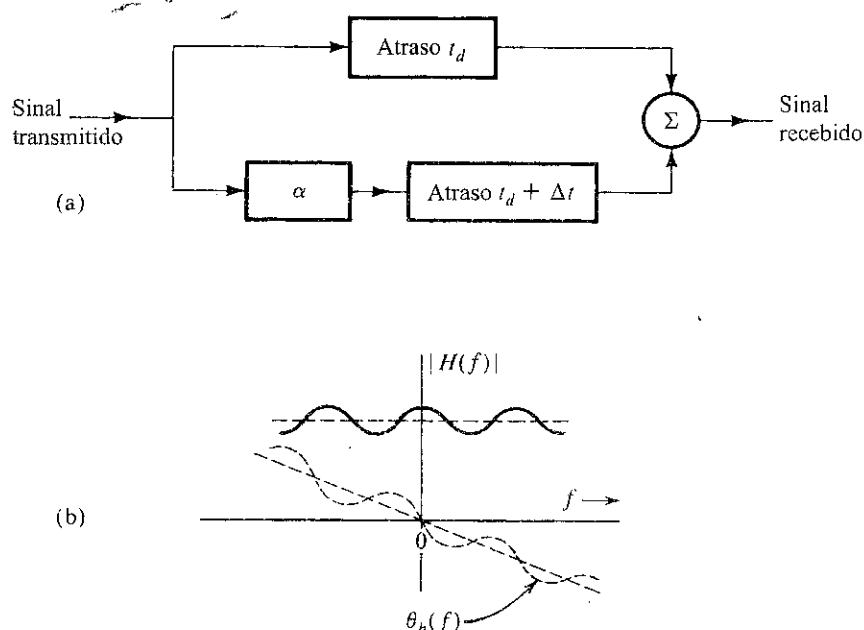
$$\begin{aligned} H(f) &= e^{-j2\pi f t_d} + \alpha e^{-j2\pi f (t_d + \Delta t)} \\ &= e^{-j2\pi f t_d} (1 + \alpha e^{-j2\pi f \Delta t}) \end{aligned} \quad (3.64a)$$

$$\begin{aligned} &= e^{-j2\pi f t_d} (1 + \alpha \cos 2\pi f \Delta t - j\alpha \sin 2\pi f \Delta t) \\ &= \underbrace{\sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos 2\pi f \Delta t}}_{|H(f)|} \exp \left[ -j \underbrace{\left( 2\pi f t_d + \tan^{-1} \frac{\alpha \sin 2\pi f \Delta t}{1 + \alpha \cos 2\pi f \Delta t} \right)}_{\theta_h(f)} \right] \end{aligned} \quad (3.64b)$$

As características de amplitude e de fase de  $H(f)$  são periódicas em  $f$ , com período  $1/\Delta t$  (Fig. 3.31b). O canal de multipercurso pode, portanto, exibir não idealidades nas características de amplitude e de fase e pode causar distorção linear (dispersão de pulsos), como discutido anteriormente.

Se, por exemplo, os ganhos dos dois percursos forem muito próximos, ou seja, se  $\alpha \approx 1$ , os sinais recebidos nos dois percursos podem ter fases opostas (defasadas por  $\pi$  radianos) em certas frequências. Isso significa que, em frequências nas quais os dois percursos resultam em fases opostas, os sinais dos dois percursos quase se cancelarão mutuamente. A Eq. (3.64b) mostra que, em frequências tais que  $f = n/(2\Delta t)$  ( $n$  ímpar),  $\cos 2\pi f \Delta t = -1$ , e  $|H(f)| \approx 0$  quando  $\alpha \approx 1$ . Essas são as frequências de nulo devido a multipercurso. Nas frequências  $f = n/(2\Delta t)$  ( $n$  par), os dois sinais interferirão de forma construtiva, reforçando o ganho. Tais canais são responsáveis pelo **desvanecimento seletivo em fre-**

**Figura 3.31**  
Transmissão em  
multipercurso.



quência de sinais transmitidos. Esse tipo de distorção pode ser parcialmente corrigido com o emprego de um equalizador com linha de retardo gradual, como mostrado no Exercício 3.6-2. Tais equalizadores são úteis em várias aplicações em comunicação; o projeto dos mesmos é abordado nos Capítulos 7 e 12.

### 3.6.4 Canais com Desvanecimento

Até aqui, presumimos que as características do canal eram constantes no tempo. Na prática, encontramos canais cujas características de transmissão variam com o tempo. Por exemplo, canais baseados no espalhamento troposférico e canais que, para alcançar comunicação de longa distância, utilizam a ionosfera para a reflexão de rádio. As variações temporais das propriedades do canal têm origem em alterações semiperiódicas e aleatórias das características de propagação do meio. As propriedades de reflexão da ionosfera, por exemplo, estão relacionadas às condições meteorológicas, que sofrem mudanças sazonais, diárias ou, até mesmo, horárias, assim como acontece com o clima. Períodos de tempestades repentinas também ocorrem. Portanto, a função de transferência efetiva do canal varia de modo semiperiódico e aleatório, causando atenuação randômica do sinal. Esse fenômeno é conhecido como **desvanecimento**. Efeitos de desvanecimento lento podem ser reduzidos com o emprego de **controle automático de ganho (AGC – Automatic Gain Control)**.\*

O desvanecimento pode exibir grande dependência da frequência, de modo que diferentes componentes de frequência são afetadas de modo não uniforme. Este tipo de desvanecimento, conhecido como desvanecimento seletivo em frequência, pode causar sérios problemas às comunicações. Propagação em multipercurso pode originar desvanecimento seletivo em frequência.

## 3.7 ENERGIA E DENSIDADE ESPECTRAL DE ENERGIA DE SINAIS

A energia  $E_g$  de um sinal  $g(t)$  é definida como a área sob a curva de  $|g(t)|^2$ . A energia também pode ser calculada da transformada de Fourier  $G(f)$ , através do teorema de Parseval.

\*O AGC também elimina variações lentas do sinal original.

### 3.7.1 Teorema de Parseval

A energia de um sinal pode ser relacionada ao espectro do sinal  $G(f)$ , por substituição da Eq. (3.9b) na Eq. (2.2):

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} G^*(f)e^{-j2\pi ft} df \right] dt$$

Nesta equação, usamos o fato de que  $g^*(t)$ , por ser o complexo conjugado de  $g(t)$ , pode ser expresso como o conjugado do lado direito da Eq. (3.9b). Agora, trocando a ordem de integração, obtemos,

$$\begin{aligned} E_g &= \int_{-\infty}^{\infty} G^*(f) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft} dt \right] df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(f)G^*(f) df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \end{aligned} \quad (3.65)$$

Este último resultado é o conhecido teorema de Parseval. Um resultado similar foi obtido, na Eq. (2.68), para um sinal periódico e sua série de Fourier. O teorema de Parseval permite que determinemos a energia de um sinal tanto de sua especificação no domínio do tempo,  $g(t)$ , como de sua especificação no domínio da frequência,  $G(f)$ .

**Exemplo 3.16** Comprovemos o teorema de Parseval para o sinal  $g(t) = e^{-at}u(t)$  ( $a > 0$ ).

Temos

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a} \quad (3.66)$$

Agora, determinemos  $E_g$  do espectro do sinal  $G(f)$ , dado por

$$G(f) = \frac{1}{j2\pi f + a}$$

e, da Eq. (3.65)

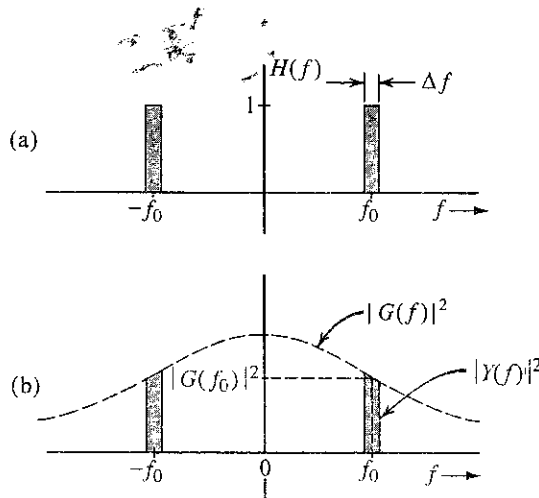
$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi f)^2 + a^2} df = \frac{1}{2\pi a} \tan^{-1} \frac{2\pi f}{a} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2a}$$

o que comprova o teorema de Parseval.

### 3.7.2 Densidade Espectral de Energia (ESD)

Uma interpretação da Eq. (3.65) nos diz que a energia de um sinal  $g(t)$  é o resultado das energias contribuídas por todas as componentes espectrais do sinal  $g(t)$ . A contribuição de uma componente espectral de frequência  $f$  é proporcional a  $|G(f)|^2$ . Para detalhar um pouco mais, consideremos um sinal  $g(t)$  aplicado à entrada de um filtro passa-faixa ideal, cuja função de transferência  $H(f)$  é mostrada na Fig. 3.32a. Esse filtro suprime todas as frequências, exceto aquelas em uma estreita faixa  $\Delta f$  ( $\Delta f \rightarrow 0$ ) cen-

**Figura 3.32**  
Interpretação  
da densidade  
espectral de  
energia de um  
sinal.



trada na frequência  $f_0$  (Fig. 3.32b). Seja  $y(t)$  a saída do filtro; então sua transformada de Fourier  $Y(f)$  é  $G(f)H(f)$ , e a energia  $E_y$  de  $y(t)$  é dada por

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)H(f)|^2 df \quad (3.67)$$

Como  $H(f) = 1$  na banda passante  $\Delta f$  e é zero em todas as outras frequências, a integral no lado direito é a soma das duas áreas hachuradas na Fig. 3.32b; logo (para  $\Delta f \rightarrow 0$ )

$$E_y = 2 |G(f_0)|^2 df$$

Portanto,  $2|G(f)|^2 df$  é a energia contribuída pelas componentes espectrais contidas nas duas bandas estreitas, cada uma com largura  $\Delta f$  Hz, centradas em  $\pm f_0$ . Podemos, então, interpretar  $|G(f)|^2$  como a energia por unidade de largura de banda (em hertz) das componentes espectrais de  $g(t)$  centradas na frequência  $f$ . Em outras palavras,  $|G(f)|^2$  é a densidade espectral de energia (por unidade de largura de banda em hertz) de  $g(t)$ . Na verdade, como as componentes de frequências positivas e negativas se combinam para formar as componentes na banda  $\Delta f$ , a energia contribuída por unidade de largura de banda é  $2|G(f)|^2$ . Contudo, por conveniência, consideramos frequências positivas e negativas como independentes. Assim a **densidade espectral de energia** (ESD — *Energy Spectral Density*)  $\Psi_g(f)$  é definida como

$$\Psi_g(f) = |G(f)|^2 \quad (3.68)$$

e a Eq. (3.65) pode ser expressa como

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_g(f) df \quad (3.69a)$$

Dos resultados do Exemplo 3.16, a ESD do sinal  $g(t) = e^{-at}u(t)$  é

$$\Psi_g(f) = |G(f)|^2 = \frac{1}{(2\pi f)^2 + a^2} \quad (3.69b)$$

### 3.7.3 Largura de Banda Essencial de um Sinal

O espectro da maioria dos sinais se estende ao infinito. Contudo, como a energia de um sinal prático é finita, o espectro do sinal deve tender a 0 quando  $f \rightarrow \infty$ . A maior parte da energia do sinal está contida em uma certa banda de  $B$  Hz, e a energia contribuída pelas componentes de frequência maiores que



$B$  Hz é desprezível. Podemos, então, suprimir o espectro do sinal que se estende além de  $B$  Hz, com pequeno efeito na forma e na energia do sinal. A largura de banda  $B$  é denominada **largura de banda essencial** do sinal. O critério para a determinação de  $B$  depende da tolerância ao erro em uma particular aplicação. Podemos, por exemplo, selecionar  $B$  de modo que a largura de banda contenha 95% da energia do sinal.\* O nível de energia pode ser maior ou menor que 95%, dependendo da precisão necessária. Podemos fazer uso de um critério como este para determinar a largura de banda essencial de um sinal. A supressão de todas as componentes espectrais de  $g(t)$  fora da largura de banda essencial resulta em um sinal  $\hat{g}(t)$ , que é uma boa aproximação de  $g(t)$ .\*\* Caso usemos o critério de 95% para a largura de banda essencial, a energia do erro (diferença)  $g(t) - \hat{g}(t)$  será 5% de  $E_g$ . O exemplo a seguir ilustra o procedimento para estimar a largura de banda.

**Exemplo 3.17** Estimemos a largura de banda essencial  $W$  (em rad/s) do sinal  $e^{-at}u(t)$  para que a banda essencial contenha 95% da energia do sinal.

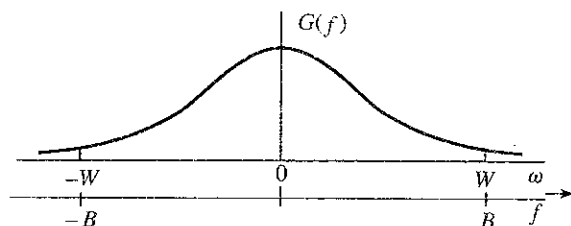
Neste caso,

$$G(f) = \frac{1}{j2\pi f + a}$$

e a ESD é

$$|G(f)|^2 = \frac{1}{(2\pi f)^2 + a^2}$$

**Figura 3.33**  
Estimativa da  
largura de  
banda  
essencial de  
um sinal.



A ESD é ilustrada na Fig. 3.33. A energia do sinal  $E_g$  é a área sob a curva da ESD, e já foi calculada como  $1/2a$ . Seja  $W$  rad/s a largura de banda essencial, que contém 95% da energia total do sinal  $E_g$ . Isso significa que  $1/2\pi$  vezes a área hachurada na Fig. 3.33 é  $0,95/2a$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{0,95}{2a} &= \int_{-W/2\pi}^{W/2\pi} \frac{df}{(2\pi f)^2 + a^2} \\ &= \frac{1}{2\pi a} \tan^{-1} \frac{2\pi f}{a} \Big|_{-W/2\pi}^{W/2\pi} = \frac{1}{\pi a} \tan^{-1} \frac{W}{a} \end{aligned}$$

ou

$$\frac{0,95\pi}{2} = \tan^{-1} \frac{W}{a} \Rightarrow W = 12,7 a \text{ rad/s}$$

\*No caso de um sinal passa-baixas, a largura de banda essencial também pode ser definida como a frequência na qual o valor da amplitude do espectro é uma pequena fração (digamos, 5–10%) do valor de pico. No Exemplo 3.16, o pico de  $|G(f)|$  é  $1/a$  e ocorre em  $f=0$ .

\*\*Na prática, o truncamento é efetuado de forma gradual, com o uso de janelas graduais, de modo a evitar vazamento espectral excessivo devido a um truncamento abrupto.<sup>5</sup>

O valor da largura de banda essencial em hertz é

$$B = \frac{W}{2\pi} = 2,02 a \text{ Hz}$$

Isso significa que, na banda de 0 (dc) a  $12,7 \times a \text{ rad/s}$  ( $2,02 \times a \text{ Hz}$ ), as componentes espectrais de  $g(t)$  contribuem com 95% da energia total do sinal; todas as componentes espectrais restantes (na banda de  $2,02 \times a \text{ Hz}$  a  $\infty$ ) contribuem com apenas 5% da energia do sinal.\*

**Exemplo 3.18** Estimemos a largura de banda essencial de um pulso retangular  $g(t) = \Pi(t/T)$  (Fig. 3.34a), para que a largura de banda essencial contenha pelo menos 90% da energia do pulso.

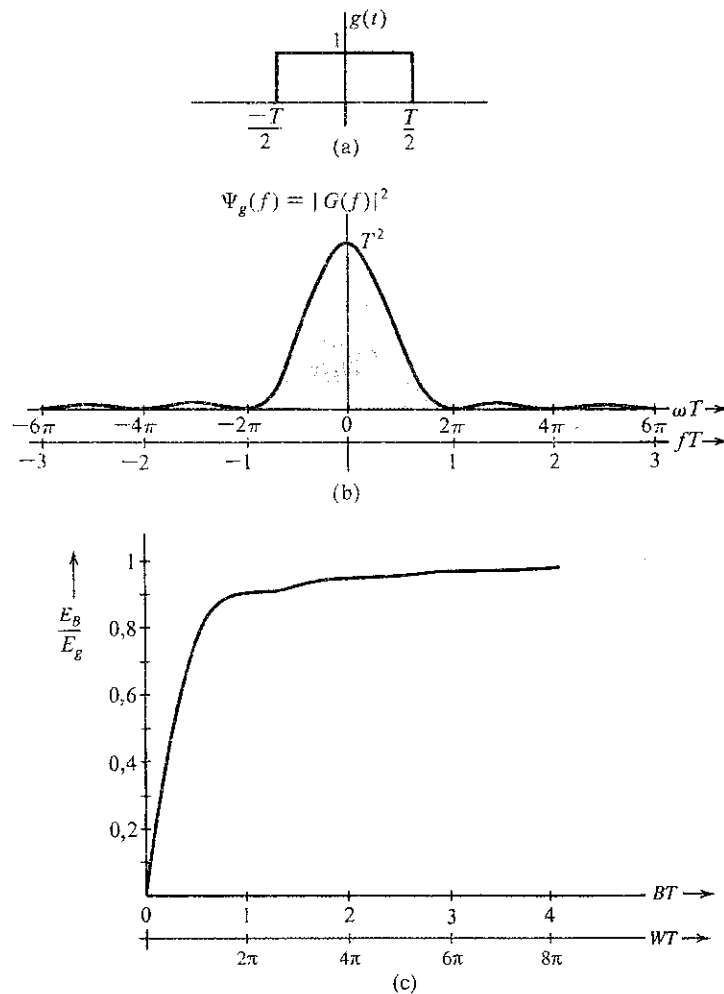
Para este pulso, a energia  $E_g$  é

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} dt = T$$

E, como

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \Longleftrightarrow T \operatorname{sinc}(\pi f T)$$

**Figura 3.34**  
a: Função retangular EX-FGC/FGC, (b) correspondente densidade espectral de energia e a fração da energia na banda  $B$  (Hz).



\*Vale notar que, embora a ESD exista em toda a banda de  $-\infty$  a  $\infty$ , o espectro trigonométrico existe apenas na banda de 0 a  $\infty$ . O intervalo espectral  $-\infty$  a  $\infty$  se aplica ao espectro exponencial. Contudo, na prática, sempre que nos referimos a uma largura de banda, o fazemos no sentido trigonométrico. Portanto, a banda essencial é de 0 a  $B \text{ Hz}$  (ou  $W \text{ rad/s}$ ) e não de  $-B$  a  $B$ .

a ESD desse pulso é dada por

$$\Psi_g(f) = |G(f)|^2 = T^2 \operatorname{sinc}^2(\pi fT)$$

A ESD é ilustrada na Fig. 3.34b como função de  $\omega T$  e de  $fT$ , sendo  $f$  a frequência em hertz. A energia  $E_B$  na banda de 0 a  $B$  Hz é dada por

$$E_B = \int_{-B}^B T^2 \operatorname{sinc}^2(\pi fT) df$$

Fazendo  $2\pi fT = x$  na integral, de modo que  $df = dx/(2\pi T)$ , obtemos

$$E_B = \frac{T}{\pi} \int_0^{2\pi BT} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

E, como  $E_g = T$ , temos

$$\frac{E_B}{E_g} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi BT} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

A integral no lado direito é calculada numericamente; um gráfico de  $E_B/E_g$  em função de  $BT$  é mostrado na Fig. 3.34c. Notemos que 90,28% da energia total do pulso  $g(t)$  estão contidos na banda  $B = 1/T$  Hz. Portanto, segundo o critério de 90%, a largura de banda de um pulso retangular de largura  $T$  segundos é  $1/T$  Hz.

### 3.7.4 Energia de Sinais Modulados

Vimos que a modulação desloca o espectro de sinal  $G(f)$  para a esquerda e a direita de  $f_0$ . A seguir, mostraremos que algo semelhante ocorre com a ESD do sinal modulado.

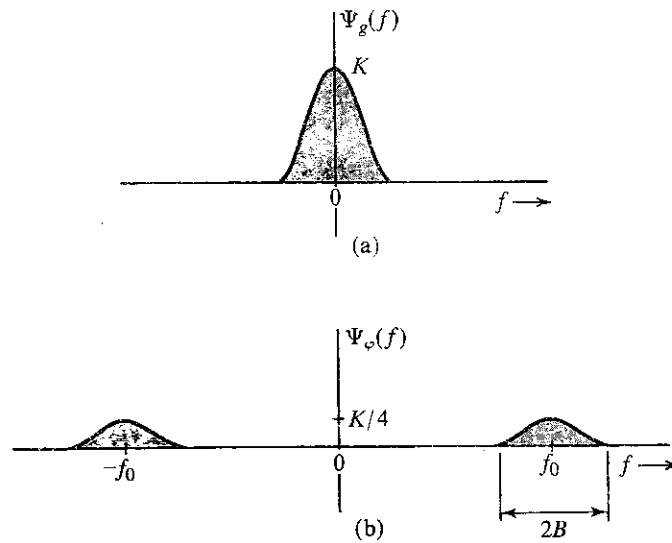
Seja  $g(t)$  um sinal em banda base, limitado a  $B$  Hz. O sinal modulado em amplitude  $\varphi(t)$  é dado por

$$\varphi(t) = g(t) \cos 2\pi f_0 t$$

O espectro (transformada de Fourier) de  $\varphi(t)$  é calculado como

$$\Phi(f) = \frac{1}{2}[G(f + f_0) + G(f - f_0)]$$

**Figura 3.35**  
Densidades espectrais de energia de sinais modulante e modulado.



A ESD do sinal modulado  $\varphi(t)$  é  $|\Phi(f)|^2$ , ou seja,

$$\Psi_{\varphi}(f) = \frac{1}{4} |G(f + f_0) + G(f - f_0)|^2$$

Se  $f_0 \geq B$ ,  $G(f + f_0)$  e  $G(f - f_0)$  não se sobrepõem (ver Fig. 3.35), e

$$\begin{aligned} \Psi_{\varphi}(f) &= \frac{1}{4} \left[ |G(f + f_0)|^2 + |G(f - f_0)|^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} \Psi_g(f + f_0) + \frac{1}{4} \Psi_g(f - f_0) \end{aligned} \quad (3.70)$$

As ESDs de  $g(t)$  e do sinal modulado  $\varphi(t)$  são mostradas na Fig. 3.35. Fica claro que a modulação desloca a ESD de  $g(t)$  de  $\pm f_0$ . Observemos que a área sob  $\Psi_{\varphi}(f)$  é a metade da área sob  $\Psi_g(f)$ . Como a energia de um sinal é proporcional à área sob a curva da ESD, concluímos que a energia de  $\varphi(t)$  é a metade da energia de  $g(t)$ , ou seja,

$$E_{\varphi} = \frac{1}{2} E_g \quad f_0 \geq B \quad (3.71)$$

Pode parecer surpreendente que um sinal  $\varphi(t)$ , que aparenta ser tão energético em comparação com  $g(t)$ , tenha apenas a metade da energia de  $g(t)$ . As aparências enganam, como sempre. A energia de um sinal é proporcional ao quadrado de sua amplitude; amplitudes mais altas contribuem mais para a energia. O sinal  $g(t)$  mantém altos níveis de amplitude na maior parte do tempo. O sinal modulado  $\varphi(t)$ , por sua vez, devido ao fator  $\cos 2\pi f_0 t$ , cai ao nível de amplitude zero muitas vezes, o que reduz sua energia.

### 3.7.5 Função de Autocorrelação Temporal e Densidade Espectral de Energia

No Capítulo 2, mostramos que uma boa medida de comparação de dois sinais  $g(t)$  e  $z(t)$  é a função de correlação cruzada  $\psi_{gz}(\tau)$ , definida na Eq. (2.46). Também definimos a correlação de um sinal  $g(t)$  com ele próprio [função de autocorrelação  $\psi_g(\tau)$ ] na Eq. (2.47). Para um sinal  $g(t)$  de valores reais, a função de autocorrelação  $\psi_g(\tau)$  é dada por\*

$$\psi_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t + \tau) dt \quad (3.72a)$$

Fazendo  $x = t + \tau$  na Eq. (3.72a), obtemos

$$\psi_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)g(x - \tau) dx$$

Nesta equação,  $x$  é uma simples variável de integração e pode ser substituída por  $t$ . Assim,

$$\psi_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t \pm \tau) dt \quad (3.72b)$$

Isso mostra que, para um sinal  $g(t)$  de valores reais, a função de autocorrelação é uma função par de  $\tau$ , ou seja,

$$\psi_g(\tau) = \psi_g(-\tau) \quad (3.72c)$$

\*Para um sinal de valores complexos, definimos

$$\psi_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t)g(t + \tau) dt$$

Existe, na verdade, uma relação muito importante entre a função de autocorrelação de um sinal e sua ESD. Especificamente, a função de autocorrelação de um sinal  $g(t)$  e sua ESD  $\Psi_g(f)$  formam um par de transformadas de Fourier:

$$\psi_g(\tau) \longleftrightarrow \Psi_g(f) \quad (3.73a)$$

Logo,

$$\Psi_g(f) = \mathcal{F}\{\psi_g(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_g(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (3.73b)$$

$$\psi_g(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{\Psi_g(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_g(f) e^{-j2\pi f \tau} df \quad (3.73c)$$

Notemos que a transformada de Fourier da Eq. (3.73a) é calculada em relação a  $\tau$ , e não em relação a  $t$ .

A seguir, mostraremos que a ESD  $\Psi_g(f) = |G(f)|^2$  é a transformada de Fourier da função de autocorrelação  $\psi_g(\tau)$ . Embora esse resultado seja mostrado aqui para sinais de valores reais, também é válido para sinais de valores complexos. Devemos notar que a função de autocorrelação é uma função de  $\tau$  e não de  $t$ . Portanto, sua transformada de Fourier é  $\int \psi_g(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$ . Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\psi_g(\tau)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f \tau} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t+\tau) dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau+t) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \right] dt \end{aligned}$$

A integral interna é a transformada de Fourier de  $g(\tau+t)$ , que é  $g(\tau)$  deslocado para a esquerda por  $t$ . Portanto, a transformada é dada por  $G(f)e^{j2\pi f t}$ , segundo a propriedade de translação no tempo, Eq. (3.32a). Portanto,

$$\mathcal{F}[\psi_g(\tau)] = G(f) \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{j2\pi f t} dt = G(f)G(-f) = |G(f)|^2$$

Isto completa a prova de que

$$\psi_g(\tau) \longleftrightarrow \Psi_g(f) = |G(f)|^2 \quad (3.74)$$

Uma análise cuidadosa da operação de correlação revela uma relação próxima com convolução. De fato, a função de autocorrelação  $\psi_g(\tau)$  é a convolução de  $g(\tau)$  com  $g(-\tau)$ , pois

$$g(\tau) * g(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)g[-(\tau-x)] dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)g(x-\tau) dx = \psi_g(\tau)$$

Aplicação da propriedade de convolução no domínio do tempo [Eq. (3.44)] a esse resultado produz a Eq. (3.74).

### ESD da Entrada e da Saída

Sejam  $x(t)$  e  $y(t)$ , respectivamente, o sinal de entrada e o correspondente sinal de saída de um sistema linear invariante no tempo (LIT); logo,

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

Portanto,

$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 |X(f)|^2$$

Isso mostra que

$$\Psi_y(f) = |H(f)|^2 \Psi_x(f) \quad (3.75)$$

Assim, a ESD do sinal de saída é  $|H(f)|^2$  vezes a ESD do sinal de entrada.

### 3.8 POTÊNCIA E DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA DE SINAIS

Para um sinal de potência, uma medida razoável de seu tamanho é a potência [definida na Eq. (2.4)], tomada como o valor médio da energia do sinal em um intervalo de tempo infinito. A potência  $P_g$  de um sinal de valores reais  $g(t)$  é dada por

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt \quad (3.76)$$

A potência do sinal e os conceitos a ela associados podem ser entendidos com facilidade se definirmos um sinal truncado  $g_T(t)$  como

$$g_T(t) = \begin{cases} g(t) & |t| \leq T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$

O sinal truncado é ilustrado na Fig. 3.36. A integral no lado direito da Eq. (3.76) corresponde a  $E_{g_T}$ , energia do sinal truncado  $g_T(t)$ . Assim,

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{g_T}}{T} \quad (3.77)$$

Esta equação descreve a relação entre potência e energia de sinais não periódicos. O entendimento desta relação auxiliará a compreensão de todos os conceitos associados a potência e energia, assim como o relacionamento entre eles. Como a potência de um sinal é o valor médio de sua energia, todos os conceitos e resultados relativos à energia de um sinal também se aplicam à potência do sinal, bastando que modifiquemos os conceitos de forma adequada, tomando seus valores médios.

#### 3.8.1 Densidade Espectral de Potência (PSD)

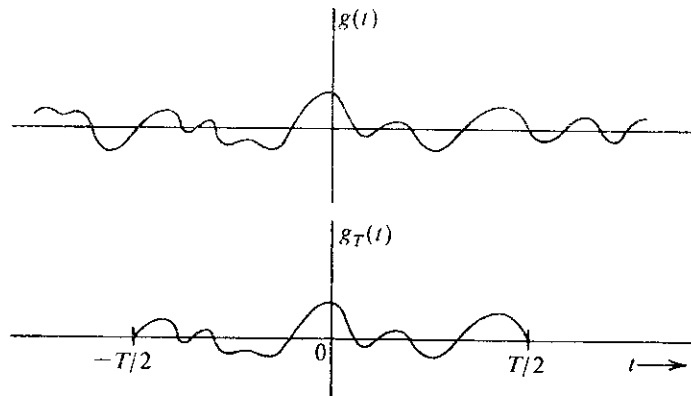
Caso um sinal  $g(t)$  seja um sinal de potência, sua potência é finita, e o sinal truncado  $g_T(t)$  é um sinal de energia desde que  $T$  permaneça finito. Se  $g_T(t) \iff G_T(f)$ , do teorema de Parseval, temos

$$E_{g_T} = \int_{-\infty}^{\infty} g_T^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G_T(f)|^2 df$$

Portanto,  $P_g$ , a potência de  $g(t)$ , fica dada por

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{g_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |G_T(f)|^2 df \right] \quad (3.78)$$

**Figura 3.36**  
Processo de  
limite para o  
cálculo da  
PSD.



À medida que  $T$  aumenta, a duração de  $g_T(t)$  aumenta e sua energia  $E_{g_T}$  aumenta proporcionalmente. Isso significa que  $|G_T(f)|^2$  também aumenta com  $T$  e, quando  $T \rightarrow \infty$ ,  $|G_T(f)|^2$  tende a  $\infty$ . Contudo,  $|G_T(f)|^2$  deve tender a  $\infty$  com a mesma taxa que  $T$ , pois, para um sinal de potência, o lado direito da Eq. (3.78) deve convergir. Essa convergência permite que troquemos a ordem do processo de limite e da integração na Eq. (3.78) e obtenhamos

$$P_g = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(f)|^2}{T} df \quad (3.79)$$

Definimos a **densidade espectral de potência** (PSD — *power spectral density*)  $S_g(\omega)$  como

$$S_g(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(f)|^2}{T} \quad (3.80)$$

Logo,\*

$$P_g = \int_{-\infty}^{\infty} S_g(f) df \quad (3.81a)$$

$$= 2 \int_0^{\infty} S_g(f) df \quad (3.81b)$$

Esse resultado reproduz o obtido [Eq. (3.69a)] para sinais de energia. A potência é a área sob a curva da PSD. Vale notar que a PSD é o valor médio temporal da ESD de  $g_T(t)$  [Eq. (3.80)].

A PSD, assim como a ESD, é uma função par de  $f$ , com valores reais e positivos. Se  $g(t)$  for um sinal de tensão, a unidade da PSD será volt quadrado por hertz.

### 3.8.2 Função de Autocorrelação Temporal de Sinais de Potência

A função de autocorrelação (temporal)  $\mathcal{R}_g(\tau)$  de um sinal de potência de valores reais  $g(t)$  é definida como\*\*

$$\mathcal{R}_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)g(t - \tau) dt \quad (3.82a)$$

Podemos lançar mão do mesmo argumento que usamos no caso de sinais de energia [Eqs. (3.72b) e (3.72c)] para mostrar que  $\mathcal{R}_g(\tau)$  é uma função par de  $\tau$ . Isso significa que, para  $g(t)$  de valores reais,

$$\mathcal{R}_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)g(t + \tau) dt \quad (3.82b)$$

e

$$\mathcal{R}_g(\tau) = \mathcal{R}_g(-\tau) \quad (3.83)$$

Para sinais de energia, a ESD  $\Psi_g(f)$  é a transformada de Fourier da função de autocorrelação  $\psi_g(\tau)$ . Um resultado similar se aplica a sinais de potência. Agora, mostraremos que, para um sinal de potência, a PSD  $S_g(f)$  é a transformada de Fourier da função de autocorrelação  $\mathcal{R}_g(\tau)$ . A partir da Eq. (3.82b) e da Fig. 3.36,

$$\mathcal{R}_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g_T(t)g_T(t + \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\psi_{g_T}(\tau)}{T} \quad (3.84)$$

\*Devemos ser cautelosos no uso de uma expressão unilateral, como  $P_g = 2 \int_0^{\infty} S_g(f) df$ , quando  $S_g(f)$  contém um impulso na origem (uma componente dc). O impulso não deve ser multiplicado pelo fator 2.

\*\*Para um sinal de valores complexos, definimos

$$\mathcal{R}_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)g^*(t - \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^*(t)g(t + \tau) dt$$

Recordemos, do teorema de Wiener-Khintchine, que  $\psi_{gT}(\tau) \iff |G_T(f)|^2$ . Logo, a transformada de Fourier da equação anterior nos fornece

$$\mathcal{R}_g(\tau) \iff \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(f)|^2}{T} = S_g(f) \quad (3.85)$$

Embora tenhamos provado esses resultados para um sinal  $g(t)$  de valores reais, as Eqs. (3.80), (3.81a), (3.81b) e (3.85) são igualmente válidas para sinais  $g(t)$  de valores complexos.

O conceito e relações associados à potência de sinal reproduzem os associados à energia de sinal. Isso fica claro na Tabela 3.3.

**Tabela 3.3**

$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt$	$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{gT}}{T}$
$\psi_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t+\tau) dt$	$\mathcal{R}_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)g(t+\tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\psi_{gT}(\tau)}{T}$
$\Psi_g(f) =  G(f) ^2$	$S_g(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{ G_T(f) ^2}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Psi_{gT}(f)}{T}$
$\psi_g(\tau) \iff \Psi_g(f)$	$\mathcal{R}_g(\tau) \iff S_g(f)$
$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_g(f) df$	$P_g = \int_{-\infty}^{\infty} S_g(f) df$

### A Potência de um Sinal É Seu Valor Quadrático Médio

Um exame da Eq. (3.76) revela que a potência do sinal é o valor médio temporal de seu valor quadrático. Em outras palavras,  $P_g$  é o valor quadrático médio de  $g(t)$ . Contudo, devemos recordar que este é um valor médio temporal, e não estatístico (a ser discutido em capítulos posteriores). Valores médios estatísticos são denotados por uma barra. Assim, o valor quadrático médio (estatístico) de uma variável  $x$  é denotado por  $\overline{x^2}$ . Usaremos uma barra ondulada para denotar o valor médio temporal e distingui-lo do valor médio estatístico. Assim, o valor quadrático médio temporal de  $g(t)$  será denotado por  $\overline{g^2(t)}$ . Valores médios temporais são, em geral, representados como  $(\overline{g^2(t)})$ . No entanto, usaremos a notação da barra ondulada, pois é a associação de valor médio com barra ondulada é mais simples que com colchetes. Com essa notação, vemos que

$$P_g = \overline{g^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt \quad (3.86a)$$

O valor rms de um sinal é a raiz quadrada de seu valor quadrático médio; logo

$$[g(t)]_{\text{rms}} = \sqrt{P_g} \quad (3.86b)$$

Da Eq. (3.82), fica claro que, para um sinal  $g(t)$  de valores reais, a função de autocorrelação temporal  $\mathcal{R}_g(\tau)$  é o valor médio temporal de  $g(t)g(t \pm \tau)$ . Assim,

$$\mathcal{R}_g(\tau) = \overline{g(t)g(t \pm \tau)} \quad (3.87)$$

Esta discussão também explica por que dizemos “autocorrelação temporal” em vez de “autocorrelação”. O objetivo é distinguir, de forma clara, essa função de autocorrelação (um valor médio temporal) da função de autocorrelação estatística (um valor médio estatístico) a ser introduzida no Capítulo 9, no contexto de teoria da probabilidade e processos aleatórios.



### Interpretação da Densidade Espectral de Potência

Como a PSD é o valor médio temporal da ESD de  $g(t)$ , podemos seguir a mesma argumentação usada na interpretação da ESD. Podemos mostrar prontamente que a PSD  $S_g(f)$  representa a potência por unidade de largura de banda (em hertz) das componentes espectrais na frequência  $f$ . A contribuição das componentes de frequência na banda de  $f_1$  a  $f_2$  à potência é dada por

$$\Delta P_g = 2 \int_{f_1}^{f_2} S_g(f) df \quad (3.88)$$

### Método de Autocorrelação: Uma Ferramenta Poderosa

Para um sinal  $g(t)$ , a ESD, que é igual a  $|G(f)|^2$ , também pode ser obtida da transformada de Fourier da correspondente função de autocorrelação. Se a transformada de Fourier de um sinal basta para o cálculo da ESD, por que complicar desnecessariamente nossa vida com a função de autocorrelação? A razão para seguir esse caminho alternativo é estabelecer a base para tratar de sinais de potência e sinais aleatórios. A transformada de Fourier de um sinal de potência, em geral, não existe. Além disso, o luxo de poder calcular a transformada de Fourier só é possível para sinais determinísticos, que podem ser descritos como funções do tempo. Sinais de mensagem aleatórios que ocorrem em problemas de comunicação (por exemplo, uma sequência aleatória de pulsos binários) não podem ser descritos como funções do tempo, o que torna impossível o cálculo de suas transformadas de Fourier. Contudo, a função de autocorrelação de sinais deste tipo pode ser calculada a partir da correspondente informação estatística. Isso permite que determinemos a PSD (informação espectral) desses sinais. De fato, podemos considerar a abordagem da autocorrelação como a generalização de técnicas de Fourier a sinais de potência e sinais aleatórios. O exemplo a seguir, de um trem aleatório de pulsos binários, ilustra, de forma dramática, o poder dessa técnica.

**Exemplo 3.19** A Fig. 3.37a mostra um trem aleatório de pulsos binários  $g(t)$ . A largura do pulso é  $T_b/2$  e um dígito binário é transmitido a cada  $T_b$  segundos. Um 1 binário é transmitido por um pulso positivo, e um 0 binário, por um pulso negativo. Os dois símbolos têm a mesma probabilidade de ocorrência, que é aleatória. Determinemos a função de autocorrelação, a PSD e a largura de banda essencial desse sinal.

Não podemos descrever esse sinal como uma função do tempo, pois sua forma de onda, por ser aleatória, não é conhecida. Podemos, no entanto, conhecer seu comportamento por meio de valores médios (informação estatística). A função de autocorrelação, por ser um parâmetro de valor médio (temporal) do sinal, é determinada da informação estatística (média) fornecida. Temos [Eq. (3.82a)]

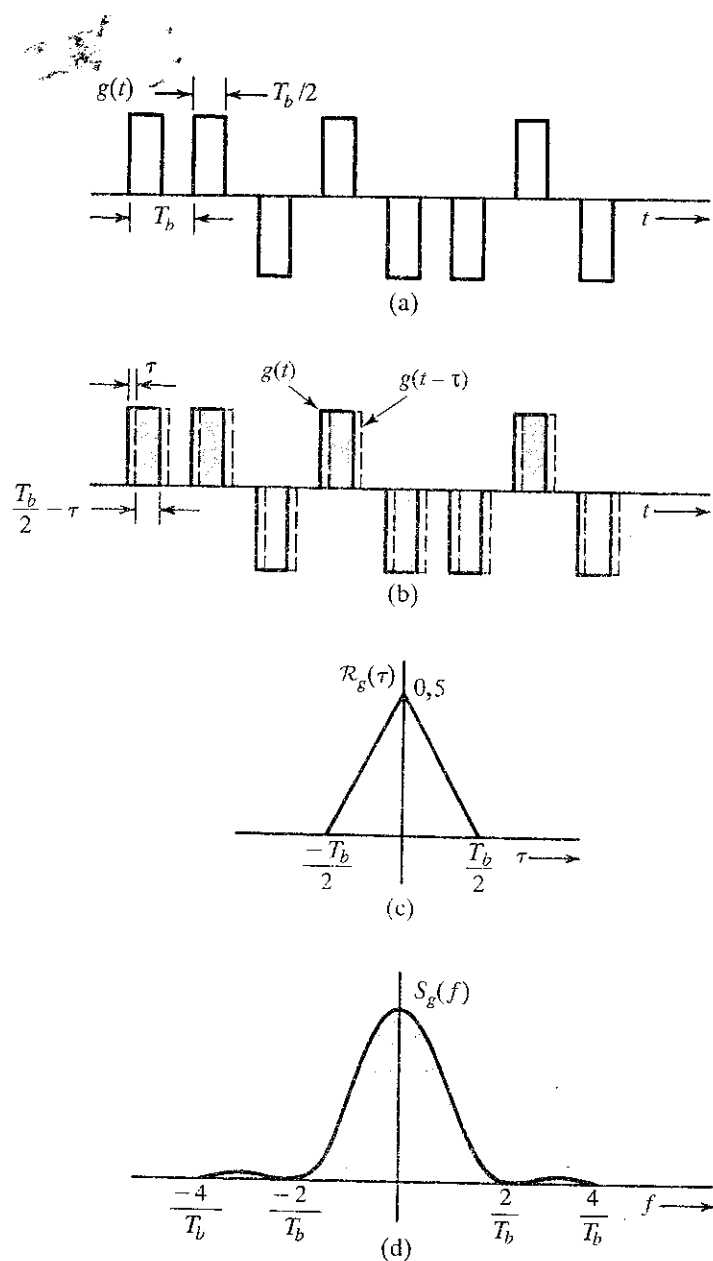
$$\mathcal{R}_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)g(t-\tau) dt$$

Na Fig. 3.37b, as linhas sólidas representam  $g(t)$  e as tracejadas,  $g(t-\tau)$ , que é  $g(t)$  atrasado por  $\tau$ . Para obter o valor integral no lado direito da equação anterior, multiplicamos  $g(t)$  por  $g(t-\tau)$ , calculamos a área sob a curva do produto  $g(t)g(t-\tau)$  e dividimos o resultado pela largura  $T$  do intervalo. Admitamos que há  $N$  bits (pulsos) neste intervalo  $T$ , de modo que  $T = NT_b$  e  $N \rightarrow \infty$  quando  $T \rightarrow \infty$ . Assim,

$$\mathcal{R}_g(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_b} \int_{-NT_b/2}^{NT_b/2} g(t)g(t-\tau) dt$$

Consideremos, primeiro, o caso  $\tau < T_b/2$ , em que todos os pulsos de  $g(t)$  e de  $g(t-\tau)$  se sobrepõem (região hachurada). A área sob a curva do produto  $g(t)g(t-\tau)$  é, para cada pulso,

**Figura 3.37**  
Função de autocorrelação e função de densidade espectral de potência de um trem aleatório de pulsos binários.



$T_b/2 - \tau$ . Como há  $N$  pulsos no intervalo em que o valor médio é calculado, a área total sob  $g(t)$  e  $g(t - \tau)$  é  $N(T_b/2 - \tau)$ , e

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_g(\tau) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_b} \left[ N \left( \frac{T_b}{2} - \tau \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2\tau}{T_b} \right) \quad \tau < \frac{T_b}{2} \end{aligned}$$

Como  $\mathcal{R}_g(\tau)$  é uma função par de  $\tau$ ,

$$\mathcal{R}_g(\tau) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2|\tau|}{T_b} \right) \quad |\tau| < \frac{T_b}{2} \quad (3.89a)$$

como mostrado na Fig. 3.37c.

À medida que aumentamos o valor de  $\tau$  além de  $T_b/2$ , pulsos adjacentes passarão a se sobrepor. Dois pulsos que se sobrepõem têm igual probabilidade de serem de mesma polaridade ou de polaridades opostas. Portanto, no intervalo de sobreposição, seu produto tem igual probabilidade de ser 1 ou -1. Na média, metade dos produtos de pulsos será 1 (combinações positivo-positivo ou negativo-negativo de pulsos), e metade será -1 (combinações positivo-negativo ou negativo-positivo de pulsos). Em consequência, a área sob a curva de  $g(t)g(t-\tau)$  será zero, se a média for calculada em um intervalo de tempo de duração infinita ( $T \rightarrow \infty$ ), e

$$\mathcal{R}_g(\tau) = 0 \quad |\tau| > \frac{T_b}{2} \quad (3.89b)$$

As duas partes da Eq. (3.89) mostram que, neste caso, a função de autocorrelação é a função triangular  $\frac{1}{2} \Delta(t/T_b)$ , obtida no Exemplo 3.13 (ou na Tabela 3.1, par 19), pois

$$S_g(f) = \frac{T_b}{4} \text{sinc}^2 \left( \frac{\pi f T_b}{2} \right) \quad (3.90)$$

A PSD é o quadrado da função sinc, como mostrado na Fig. 3.37d. Do resultado no Exemplo 3.18, concluímos que 90,28% da área deste espectro estão contidos na banda de 0 a  $4\pi/T_b$  rad/s ou de 0 a  $2/T_b$  Hz. Assim, a largura de banda essencial pode ser tomada como  $2/T_b$  Hz (presumindo um critério de 90%). Este exemplo ilustra, de forma dramática, como a função de autocorrelação pode ser usada para obter informação espectral de um sinal (aleatório) quando métodos convencionais de obtenção da transformada de Fourier não forem aplicáveis.

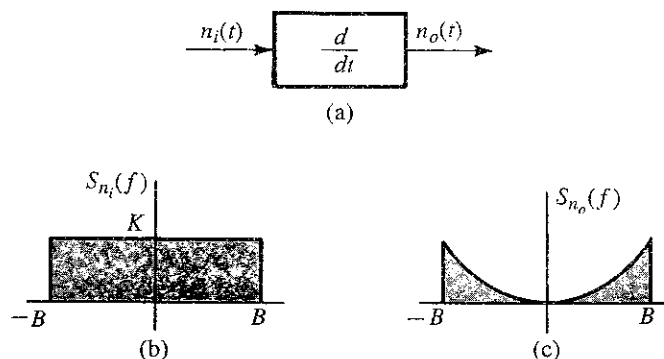
### 3.8.3 Densidades Espectrais de Potência de Entrada e de Saída

Como a PSD é o valor médio temporal da ESD, a relação entre as PSDs dos sinais de entrada e de saída de um sistema linear invariante no tempo (LIT) é similar à existente entre as correspondentes ESDs. Seguindo os argumentos usados no caso da ESD [Eq. (3.75)], podemos mostrar que, se  $g(t)$  e  $y(t)$  forem os sinais de entrada e de saída, respectivamente, de um sistema LIT com função de transferência  $H(f)$ , então,

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_g(f) \quad (3.91)$$

**Exemplo 3.20** Um sinal de ruído  $n_i(t)$ , com PSD  $S_{n_i}(f) = K$  é aplicado à entrada de um diferenciador ideal (Fig. 3.38a). Determinemos a PSD e a potência do sinal de ruído de saída,  $n_o(t)$ .

**Figura 3.38**  
Densidades espectrais dos sinais de entrada e de saída de um diferenciador ideal.



A função de transferência de um diferenciador ideal é  $H(f) = j2\pi f$ . Se o ruído na saída do diferenciador for  $n_o(t)$ , da Eq. (3.91), temos

$$S_{n_o}(f) = |H(f)|^2 S_{n_i}(f) = |j2\pi f|^2 K$$

A PSD do sinal de saída  $S_{no}(f)$  é parabólica, como indicado na Fig. 3.38c. A potência de ruído de saída  $N_o$  é a área sob a curva da PSD de saída. Logo,

$$N_o = \int_{-B}^B K(2\pi f)^2 df = 2K \int_0^B (2\pi f)^2 df = \frac{8\pi^2 B^3 K}{3}$$

### 3.8.4 PSD de Sinais Modulados

Seguindo o mesmo argumento empregado na dedução das Eqs. (3.70) e (3.71) para sinais de energia, podemos, no caso de sinais de potência, obter resultados similares se calcularmos valores médios. Podemos mostrar que, para um sinal de potência  $g(t)$ , se

$$\varphi(t) = g(t) \cos 2\pi f_0 t$$

a PSD  $S_\varphi(f)$  de um sinal modulado  $\varphi(t)$  é dada por

$$S_\varphi(f) = \frac{1}{4} [S_g(f + f_0) + S_g(f - f_0)] \quad (3.92)$$

Detalhes da dedução desse resultado são dados na Seção 7.8. Assim, a modulação desloca a PSD de  $g(t)$  por  $\pm f_0$ . A potência de  $\varphi(t)$  é a metade da potência de  $g(t)$ , ou seja,

$$P_\varphi = \frac{1}{2} P_g \quad f_0 \geq B \quad (3.93)$$

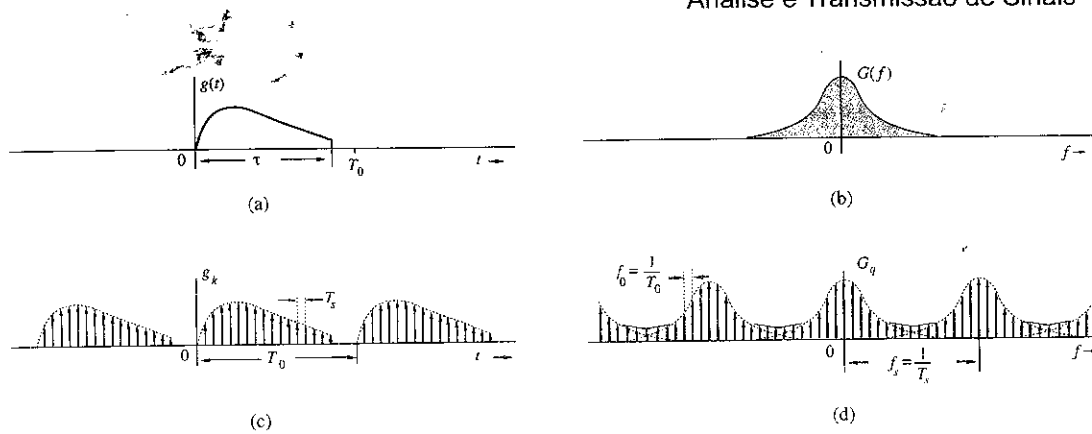
## 3.9 CÁLCULO NUMÉRICO DA TRANSFORMADA DE FOURIER: A DFT

Para efetuar o cálculo numérico de  $G(f)$ , a transformada de Fourier de  $g(t)$ , devemos utilizar amostras de  $g(t)$ . Além disso, conseguimos calcular  $G(f)$  apenas em número discreto de frequências. Assim, podemos calcular somente amostras de  $G(f)$ . Por isso, a seguir, estabeleceremos algumas relações entre amostras de  $g(t)$  e de  $G(f)$ .

Em cálculos numéricos, os dados devem ser finitos. Isso significa que o número de amostras de  $g(t)$  e de  $G(f)$  deve ser finito. Em outras palavras, devemos lidar com sinais limitados no tempo. Se um sinal não for limitado no tempo, é necessário truncá-lo para que tenha duração finita. O mesmo se aplica a  $G(f)$ . Consideremos, inicialmente, um sinal  $g(t)$  de duração  $\tau$  segundo e início em  $t = 0$ , como mostrado na Fig. 3.39a. Contudo, por motivos que se tornarão claros mais adiante, consideremos que a duração de  $g(t)$  seja  $T_0$ , com  $T_0 \geq \tau$ , de modo que  $g(t) = 0$  no intervalo  $\tau < t \leq T_0$ , como mostrado na Fig. 3.39a. Obviamente, isso em nada afeta o cálculo de  $G(f)$ . Tomemos amostras de  $g(t)$  a intervalos uniformes de  $T_s$  segundos, o que produz um total de  $N_0$  amostras, com

$$N_0 = \frac{T_0}{T_s} \quad (3.94)$$

Figura 3.39  
Relação entre  
amostras de  
 $g(t)$  e de  $G(f)$ .



Mas,\*

$$\begin{aligned} G(f) &= \int_0^{T_0} g(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \lim_{T_s \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{N_0-1} g(kT_s) e^{-j2\pi f k T_s} T_s \end{aligned} \quad (3.95)$$

Tomemos amostras de  $G(f)$  a intervalos uniformes de largura  $f_0$ . Seja  $G_q$  a  $q$ -ésima amostra, ou seja,  $G_q = G(qf_0)$ ; com isso, a partir da Eq. (3.95), temos

$$\begin{aligned} G_q &= \sum_{k=0}^{N_0-1} T_s g(kT_s) e^{-jq2\pi f_0 T_s k} \\ &= \sum_{k=0}^{N_0-1} g_k e^{-jq\Omega_0 k} \end{aligned} \quad (3.96)$$

em que

$$g_k = T_s g(kT_s), \quad G_q = G(qf_0), \quad \Omega_0 = 2\pi f_0 T_s \quad (3.97)$$

Portanto, a Eq. (3.96) relaciona as amostras de  $g(t)$  às amostras de  $G(f)$ . Nesta dedução, supomos que  $T_s \rightarrow 0$ . Na prática, não é possível fazer  $T_s \rightarrow 0$ , o que aumentaria a quantidade de dados demasiadamente. Devemos nos esforçar para fazer  $T_s$  tão pequeno quanto possível, do ponto de vista prático. Isso resultará em algum erro computacional.

Cabe uma interessante observação à Eq. (3.96). As amostras de  $G_q$  são periódicas, com período  $2\pi/\Omega_0$ . Isto resulta da Eq. (3.96), que mostra que  $G_{(q+2\pi/\Omega_0)} = G_q$ . Assim, apenas  $2\pi/\Omega_0$  amostras  $G_q$  podem ser independentes. A Eq. (3.96) mostra que  $G_q$  é determinada por  $N_0$  valores independentes de  $g_k$ . Portanto, para que exista uma única inversa para a Eq. (3.96), deve haver somente  $N_0$  amostras independentes de  $G_q$ . Isso significa que

$$N_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{2\pi f_0 T_s} = \frac{2\pi N_0}{2\pi f_0 T_0} \quad (3.98)$$

Em outras palavras, temos

$$2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad \text{e} \quad f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (3.99)$$

Portanto, o intervalo de amostragem espectral  $f_0$  Hz pode ser ajustado por meio de uma escolha adequada de  $T_0$ : maior  $T_0$ , menor  $f_0$ . Com isto, fica clara a motivação para escolher  $T_0 \geq \tau$ . Quando  $T_0$

\*O limite superior do somatório na Eq. (3.95) é  $N_0 - 1$  (não  $N_0$ ), pois o último termo do mesmo tem início em  $(N_0 - 1)T_s$  e cobre a área sob a curva até  $N_0 T_s = T_0$ .

é maior que  $\tau$ , temos várias amostras  $g_k$  com valor zero no intervalo entre  $\tau$  e  $T_0$ . Assim, ao aumentar o número de amostras  $g_k$  com valor zero, reduzimos  $f_0$  [amostras de  $G(f)$  mais próximas umas das outras], produzindo mais detalhes de  $G(f)$ . Esse processo de redução de  $f_0$  com a inclusão de amostras  $g_k$  com valor zero é conhecido como **preenchimento com zero**. Adicionalmente, para um dado intervalo de amostragem  $T_0$ , um maior valor de  $T_0$  implica maior  $N_0$ . Ou seja, com a escolha de um valor suficientemente grande para  $N_0$ , podemos obter amostras de  $G(f)$  tão próximas quanto possível.

Para determinar a relação inversa, multiplicamos os dois lados da Eq. (3.96) por  $e^{jm\Omega_0 q}$  e efetuamos a soma em  $q$ :

$$\sum_{q=0}^{N_0-1} G_q e^{jm\Omega_0 q} = \sum_{q=0}^{N_0-1} \left[ \sum_{k=0}^{N_0-1} g_k e^{-jq\Omega_0 k} \right] e^{jm\Omega_0 q}$$

Trocando a ordem das somas no lado direito, obtemos

$$\sum_{q=0}^{N_0-1} G_q e^{jm\Omega_0 q} = \sum_{k=0}^{N_0-1} g_k \left[ \sum_{q=0}^{N_0-1} e^{j(m-k)\Omega_0 q} \right] \quad (3.100)$$

Para calcular o valor da soma interna no lado direito, mostraremos que

$$\sum_{k=0}^{N_0-1} e^{jn\Omega_0 k} = \begin{cases} N_0 & n = 0, \pm N_0, \pm 2N_0, \dots \\ 0 & \text{para todos os outros} \\ & \text{valores de } n \end{cases} \quad (3.101)$$

Para mostrar isto, recordemos que  $\Omega_0 N_0 = 2\pi$  e  $e^{jn\Omega_0 k} = 1$  para  $n = 0, \pm N_0, \pm 2N_0, \dots$ , de modo que

$$\sum_{k=0}^{N_0-1} e^{jn\Omega_0 k} = \sum_{k=0}^{N_0-1} 1 = N_0 \quad n = 0, \pm N_0, \pm 2N_0, \dots$$

Para calcular a soma para outros valores de  $n$ , notemos que a soma no lado esquerdo da Eq. (3.101) é uma série geométrica de razão  $\alpha = e^{jn\Omega_0}$ . Portanto, a soma parcial dos primeiros  $N_0$  termos é

$$\sum_{k=0}^{N_0-1} e^{jn\Omega_0 k} = \frac{e^{jn\Omega_0 N_0} - 1}{e^{jn\Omega_0} - 1} = 0,$$

com

$$e^{jn\Omega_0 N_0} = e^{j2\pi n} = 1$$

Isso prova a Eq. (3.101).

Assim, a soma interna no lado direito da Eq. (3.100) é igual a zero para  $k \neq m$ , e igual a  $N_0$  para  $k = m$ . Portanto, a soma externa terá somente um termo não zero quando  $k = m$ , e este termo será  $N_0 g_m = N_0 g_m$ . Logo,

$$g_m = \frac{1}{N_0} \sum_{q=0}^{N_0-1} G_q e^{jm\Omega_0 q} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \quad (3.102)$$

A Eq. (3.102) revela um fato interessante: que  $g_{(m+N_0)} = g_m$ . Isso significa que a sequência  $g$ , também é periódica, com período  $N_0$  (correspondendo à duração temporal  $N_0 T_s = T_0$  segundos). Adicionalmente,  $G_q$  também é periódica, com período  $N_0$ , o que corresponde ao intervalo de frequência  $N_0 f_0 = (T_0/T_s)(T_0) = 1/T_s = f_s$  hertz. Notemos que  $1/T_s$  é o número de amostras de  $g(t)$  por segundo. Assim,  $1/T_s = f_s$  é a frequência de amostragem (em hertz) de  $g(t)$ . Em outras palavras,  $G_q$  é periódica.

com período  $N_0$  e se repete a cada  $f_s$  Hz. Resumamos os resultados obtidos até aqui. Provamos o par de transformadas de Fourier discretas (DFT – *discrete Fourier transform*).

$$G_q = \sum_{k=0}^{N_0-1} g_k e^{-jq\Omega_0 k} \quad (3.103a)$$

$$g_k = \frac{1}{N_0} \sum_{q=0}^{N_0-1} G_q e^{jk\Omega_0 q} \quad (3.103b)$$

com

$$\begin{aligned} g_k &= T_s g(kT_s) & G_q &= G(qf_0) \\ 2\pi f_0 &= \frac{2\pi}{T_0} & 2\pi f_s &= \frac{2\pi}{T_s} \\ N_0 &= \frac{T_0}{T_s} = \frac{f_s}{f_0} & \Omega_0 &= 2\pi f_0 T_s = \frac{2\pi}{N_0} \end{aligned} \quad (3.104)$$

As duas sequências  $g_k$  e  $G_q$  são periódicas, com período  $N_0$ . Isso implica que  $g_k$  se repete com um período de  $T_0$  segundos e  $G_q$ , com um período de  $f_s = 1/T_s$  Hz (a frequência de amostragem). O intervalo de amostragem de  $g_k$  é de  $T_s$  segundos e o intervalo de amostragem de  $G_q$  é de  $f_0 = 1/T_0$  Hz, como indicado na Fig. 3.39c e d. Por conveniência, usamos a variável de frequência  $f$  (em hertz) em vez de  $\omega$  (em radianos por segundo).

Presumimos que  $g(t)$  é limitado a  $\tau$  segundos. Isso torna  $G(f)$  não limitado em frequência.\* Em consequência, a repetição do espectro  $G_q$ , como mostrado na Fig. 3.39d, causará sobreposição de componentes espectrais, resultando em erro. A natureza deste erro, conhecido como **erro de mascaramento** (*aliasing error*), é explicado em detalhes no Capítulo 6. O espectro de  $G_q$  se repete a cada  $f_s$  Hz. O erro de mascaramento é reduzido com o aumento de  $f_s$ , a frequência de repetição (ver Fig. 3.39d). Em resumo, o cálculo de  $G_q$  por DFT tem erro de mascaramento quando  $g(t)$  é limitado no tempo. Este erro pode ser feito tão pequeno quanto desejado, com o aumento da frequência de amostragem  $f_s = 1/T_s$  (ou com a redução do intervalo de amostragem  $T_s$ ). O erro de mascaramento é um resultado direto da não satisfação, na Eq. (3.95), da exigência  $T_s \rightarrow 0$ .

Quando  $g(t)$  não é limitado no tempo, precisamos truncá-lo para torná-lo limitado no tempo. Isso provocará erros adicionais em  $G_q$ . Esse erro pode ser reduzido tanto quanto desejado, por meio do aumento adequado do intervalo de truncamento  $T_0$ .\*\*

No cálculo da transformada de Fourier inversa [por meio da DFT inversa na Eq. (3.103b)], encontramos problemas semelhantes. Se  $G(f)$  for limitado em frequência,  $g(t)$  não será limitado no tempo e haverá sobreposição das repetições periódicas das amostras  $g_k$  (mascaramento no domínio do tempo). Podemos reduzir o erro de mascaramento se aumentarmos  $T_0$ , o período de  $g_k$  (em segundos). Isso equivale a reduzir o intervalo  $f_0 = 1/T_0$  entre as frequências em que amostras de  $G(f)$  são colhidas. Caso  $G(f)$  não seja limitado em frequência, será necessário truncá-lo. Isto causará erro adicional no cálculo de  $g_k$ . Com o aumento da largura de banda de truncamento, podemos reduzir esse erro. Na prática, funções (janelas) graduais são usadas para o truncamento<sup>3</sup>, para reduzir a severidade de alguns problemas provocados por funções de truncamento abrupto (também conhecidas como janela retangular).

\*Podemos mostrar que um sinal não pode ser simultaneamente limitado no tempo e na frequência. Se for um, não pode ser o outro, e vice-versa.<sup>3</sup>

\*\* As relações de DFT também representam um par de transformadas e são exatas. Se, no entanto, associarmos  $g_k$  e  $G_q$  às amostras de um sinal  $g(t)$  e de sua transformada de Fourier  $G(f)$ , respectivamente, as relações de DFT se tornam aproximações, devido aos efeitos de mascaramento e truncamento.

Como  $G_q$  é periódica, com período  $N_0$ , precisamos determinar os valores de  $G_q$  em qualquer período. É comum, para a determinação de  $G_q$ , considerar o período no intervalo  $(0, N_0 - 1)$ , em vez de no intervalo  $(-N_0/2, N_0/2 - 1)$ . Observação idêntica se aplica a  $g_k$ .

### Escolha dos Valores de $T_s$ , $T_0$ e $N_0$

No cálculo de DFT, primeiro, precisamos selecionar valores adequados para  $N_0$ ,  $T_s$  e  $T_0$ . Para isso, devemos antes especificar o valor de  $B$ , a largura de banda essencial de  $g(t)$ . Da Fig. 3.39d, fica claro que a sobreposição espectral (mascaramento) ocorre na frequência  $f_s/2$  Hz. Essa sobreposição espectral também pode ser interpretada como se o espectro além de  $f_s/2$  sofresse uma dobra em  $f_s/2$ . Por conseguinte, essa frequência também recebe a denominação **frequência de dobramento**. Se a frequência de dobramento for escolhida de modo que o espectro  $G(f)$  além da mesma seja desprezível, o mascaramento (ou sobreposição espectral) não será relevante. Portanto, a frequência de dobramento deve ser pelo menos igual à maior frequência significativa, ou seja, a frequência além da qual  $G(f)$  é desprezível. Chamaremos essa frequência **largura de banda essencial**  $B$  (em hertz). Caso  $g(t)$  seja limitado em frequência, sua largura de banda será igual à largura de banda essencial. Assim,

$$\frac{f_s}{2} \geq B \quad \text{Hz} \quad (3.105a)$$

Dado que o intervalo de amostragem  $T_s = 1/f_s$  [Eq. (3.104)], temos

$$T_s \leq \frac{1}{2B} \quad (3.105b)$$

Uma vez determinado o valor de  $B$ , podemos escolher o valor de  $T_s$  segundo a Eq. (3.105b). Como

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (3.106)$$

em que  $f_0$  é a **resolução de frequência** [separação entre amostras de  $G(f)$ ], caso  $f_0$  seja dado, podemos selecionar o valor de  $T_0$  segundo a Eq. (3.106). Conhecidos os valores de  $T_0$  e  $T_s$ , determinamos o de  $N_0$  de

$$N_0 = \frac{T_0}{T_s} \quad (3.107)$$

Em geral, se o sinal for limitado no tempo,  $G(f)$  não será limitado em frequência e haverá mascaramento no cálculo de  $G_q$ . Para reduzir o efeito de mascaramento, precisamos aumentar a frequência de dobramento, ou seja, devemos reduzir o valor de  $T_s$  (intervalo de amostragem) tanto quanto praticamente possível. Se o sinal for limitado em frequência,  $g(t)$  não será limitado no tempo, de modo que haverá mascaramento (sobreposição) no cálculo de  $g_k$ . Para reduzir este mascaramento, precisamos aumentar o valor de  $T_0$ , o período de  $g_k$ . Isso implica a redução do intervalo  $f_0$  (em hertz) de amostragem em frequência. Em qualquer dos casos (redução de  $T_s$ , no caso de sinal limitado no tempo, ou aumento de  $T_0$ , no caso de sinal limitado em frequência), para maior precisão, precisamos aumentar o número de amostras  $N_0$ , pois  $N_0 = T_0/T_s$ . Existem, ainda, sinais que não são limitados nem no tempo nem em frequência. Para estes sinais, devemos reduzir  $T_s$  e aumentar  $T_0$ .

### Pontos de Descontinuidade

Caso  $g(t)$  tenha, em um ponto de amostragem, uma descontinuidade do tipo degrau, o valor da amostra deve ser tomado como a média dos valores nos dois lados da descontinuidade, pois a representação de Fourier em um ponto de descontinuidade converge para o valor médio.

### Uso de Algoritmo de FFT no Cálculo de DFT

O número de contas necessário para o cálculo de uma DFT foi drasticamente reduzido em um algoritmo desenvolvido por Tukey e Cooley, em 1965.<sup>6</sup> Esse algoritmo, conhecido como **transformada**



**de Fourier rápida\*** (FFT — *fast Fourier transform*), reduz o número de contas de algo da ordem de  $N_0^2$  para  $N_0 \log N_0$ . Para calcular o valor de uma amostra  $G_r$ , pela Eq. (3.103a), precisamos de  $N_0$  multiplicações complexas e  $N_0 - 1$  adições complexas. Para calcular  $N_0$  valores de  $G_r$  ( $r = 0, 1, \dots, N_0 - 1$ ), precisamos de um total de  $N_0^2$  multiplicações complexas e  $N_0(N_0 - 1)$  adições complexas. Para grandes valores de  $N_0$ , isto pode exigir um tempo proibitivamente grande, mesmo com o uso de computador de alta velocidade. O algoritmo de FFT é um salva-vidas em aplicações de processamento de sinais. O algoritmo de FFT fica simplificado se escolhermos  $N_0$  como uma potência de 2, embora isto não seja, em geral, necessário. Detalhes da FFT podem ser encontrados em qualquer livro sobre processamento de sinais (por exemplo, Ref. 3).

### 3.10 EXERCÍCIOS COM O MATLAB

#### Cálculo de Transformadas de Fourier

Nesta seção de exercícios baseados em computador, consideremos dois exemplos para ilustrar o uso de DFT no cálculo da transformada de Fourier. Usaremos MATLAB para calcular a DFT com o algoritmo de FFT. No primeiro exemplo, o sinal é  $g(t) = e^{-2t}u(t)$ , com início em  $t = 0$ , e no segundo,  $g(t) = \Pi(t)$ , com início em  $t = -1/2$ .

#### EXEMPLO COMPUTACIONAL C3.1

Empreguemos a DFT (implementada pelo algoritmo de FFT) para calcular a transformada de Fourier de  $e^{-2t}u(t)$  e, a seguir, tracemos o gráfico do resultante espectro de Fourier.

Primeiro, devemos determinar  $T_s$  e  $T_0$ . A transformada de Fourier de  $e^{-2t}u(t)$  é  $1/(2\pi f + 2)$ . Esse sinal passa-faixa não é limitado em frequência. Tomemos sua largura de banda essencial como a frequência em que  $|G(f)|$  se torna igual a 1% do valor de pico, que ocorre em  $f = 0$ . Observe-mos que

$$|G(f)| = \frac{1}{\sqrt{(2\pi f)^2 + 4}} \approx \frac{1}{2\pi f} \quad 2\pi f \gg 2$$

O pico de  $|G(f)|$  ocorre em  $f = 0$ , em que  $|G(0)| = 0,5$ . Portanto, a largura de banda essencial  $B$  corresponde a  $f = B$ , com

$$|G(f)| \approx \frac{1}{2\pi B} = 0,5 \times 0,01 \Rightarrow B = \frac{100}{\pi} \text{ Hz}$$

e, da Eq. (3.105b),

$$T_s \leq \frac{1}{2B} = 0,005\pi = 0,0157$$

Arredondemos esse valor para  $T_s = 0,015625$  segundo, de modo que tenhamos 64 amostras por segundo. Agora, devemos determinar  $T_0$ . O sinal não é limitado no tempo. Precisamos truncá-lo em  $T_0$ , tal que  $g(T_0) \ll 1$ . Escolhamos  $T_0 = 4$  (oito constantes de tempo do sinal), o que resulta em  $N_0 = T_0/T_s = 256$ , que é uma potência de 2. Vale ressaltar que há muita flexibilidade na determinação de  $T_s$  e  $T_0$ , dependendo da precisão desejada e da capacidade computacional disponível. Poderíamos ter escolhido  $T_0 = 8$  e  $T_s = 1/32$ , o que também resultaria em  $N_0 = 256$ , mas implicaria um erro de mascaramento ligeiramente maior.

\*No Brasil, é igualmente empregada a denominação “transformada rápida de Fourier”. (N.T.)

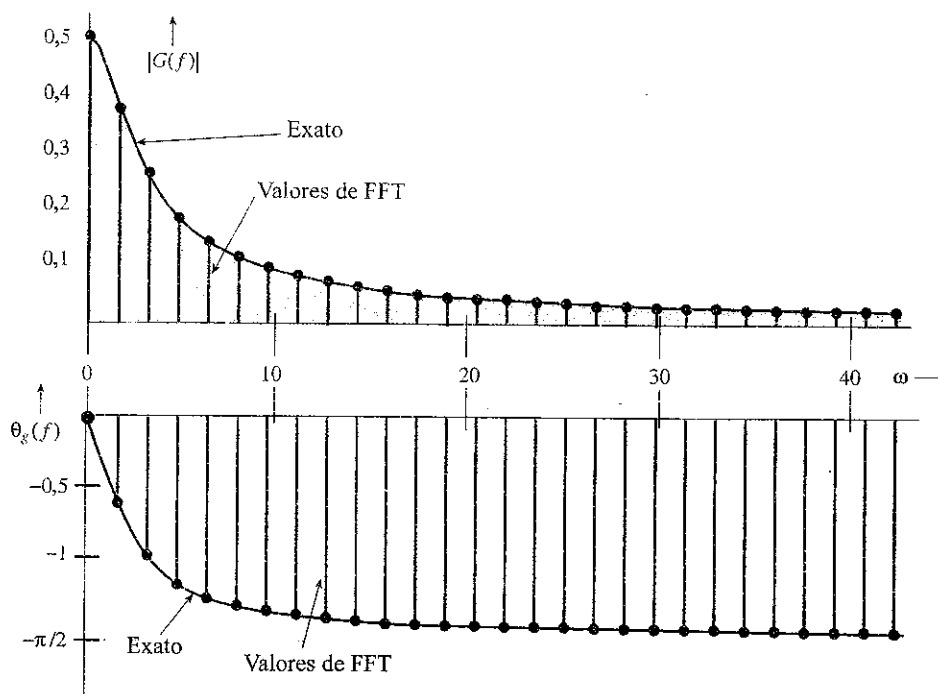
Como o sinal tem uma descontinuidade do tipo degrau em  $t = 0$ , o valor da primeira amostra (em  $t = 0$ ) é 0,5, média dos valores nos dois lados da descontinuidade. O programa de MATLAB que implementa a DFT com o algoritmo de FFT é o seguinte:

```
Ts=1/64; T0=4; N0=T0/Ts;
t=0:Ts:Ts*(N0-1); t=t';
g=Ts*exp(-2*t);
g(1)=Ts*0.5;
G=fft(g);
$[Gp,Gm]=$cart2pol($real(G),imag(G));
k=0:N0-1; k=k';
w=2*pi*k/T0;
subplot(211), stem(w(1:32), Gm(1:32));
subplot(212), stem(w(1:32), Gp(1:32))
```

Como  $G_q$  tem período  $N_0$ ,  $G_q = G_{(q+256)}$ , de modo que  $G_{256} = G_0$ . Portanto, basta traçar o gráfico de  $G_q$  no intervalo  $q = 0$  a  $q = 255$  (e não 256). Além disso, devido à periodicidade,  $G_{-q} = G_{(-q+256)}$ , ou seja, os valores de  $G_q$  no intervalo  $q = -127$  a  $q = -1$  são idênticos aos valores de  $G_q$  no intervalo  $q = 129$  a  $q = 255$ . Logo,  $G_{-127} = G_{129}$ ,  $G_{-126} = G_{130}$ , ...,  $G_{-1} = G_{255}$ . Adicionalmente, devido à propriedade de simetria conjugada da transformada de Fourier,  $G_{-q} = G_q^*$ ; assim,  $G_{129} = G_{127}^*$ ,  $G_{130} = G_{126}^*$ , ...,  $G_{255} = G_1^*$ . Consequentemente, para sinais de valores reais, não é necessário marcar no gráfico os valores de  $G_q$  com  $q$  maior que  $N_0/2$  (128, neste caso), pois são os complexos conjugados dos valores de  $G_q$  com  $q = 0$  a 128.

O gráfico do espectro de Fourier na Fig. 3.40 mostra amplitude e fase das amostras de  $G(f)$  tomadas em intervalos de  $1/T_0 = 1/4$  Hz, ou  $\omega_0 = 1,5708$  rad/s. Na Fig. 3.40, mostramos apenas os primeiros 28 pontos (em vez dos 128 pontos), para evitar o acúmulo excessivo de dados no gráfico.

**Figura 3.40**  
Transformada de Fourier discreta de um sinal exponencial em  $t=0$ . O eixo horizontal é  $\omega$  (em radianos por segundo).



Neste exemplo, dispúnhamos da expressão analítica de  $G(f)$ , o que nos permitiu fazer escolhas INTELIGENTES para  $B$  (ou frequência de amostragem  $f_s$ ). Na prática, em geral, não conhecemos  $G(f)$ . Na verdade, isso é exatamente o que desejamos calcular. Nesses casos, para determinar  $B$  ou  $f_s$ , devemos lançar mão de evidências circunstanciais. Devemos, sucessivamente, reduzir o valor de  $T_s$  e calcular a transformada até que o resultado satisfaça o desejado número de algarismos significativos.

A seguir, calcularemos a transformada de Fourier de  $g(t) = 8 \Pi(t)$ .

### EXEMPLO COMPUTACIONAL C3.2

Empreguemos a DFT (implementada pelo algoritmo de FFT) para calcular a transformada de Fourier de  $8 \Pi(t)$  e tracemos o gráfico do resultante espectro de Fourier.

Essa função retangular e sua transformada de Fourier são mostradas na Fig. 3.41a e b. Para determinar o valor do intervalo de amostragem  $T_s$ , devemos, primeiro, definir a largura de banda essencial  $B$ . Da Fig. 3.41b, vemos que  $G(f)$  decai lentamente com  $f$ . Consequentemente, a largura de banda essencial  $B$  é bastante grande. Por exemplo, em  $B = 15,5$  Hz (97,39 rad/s),  $G(f) = -0,1643$ , o que corresponde a cerca de 2% do valor de pico,  $G(0)$ . Poderíamos, então, tomar a largura de banda essencial como 16 Hz. No entanto, deliberadamente, tomaremos  $B = 4$  Hz, por dois motivos: (1) mostrar o efeito de mascaramento e (2) o uso de  $B > 4$  implicaria enorme número de amostras, que não poderiam ser mostradas de forma adequada em uma página de livro sem perda de detalhes fundamentais. Portanto, aceitaremos a aproximação para que possamos esclarecer conceitos de DFT por meio de gráficos.

A escolha  $B = 4$  resulta em um intervalo de amostragem  $T_s = 1/2B = 1/8$  segundos. Examinando novamente o espectro na Fig. 3.41b, vemos que a escolha da resolução de frequência  $f_0 = 1/4$  Hz é razoável, e corresponde a quatro amostras em cada lóbulo de  $G(f)$ . Neste caso,  $T_0 = 1/f_0 = 4$  segundos, e  $N_0 = T_0/T_s = 32$ . A duração de  $g(t)$  é de apenas 1 segundo. Devemos repetir  $g(t)$  a cada 4 segundos, como indicado na Fig. 3.41c, e tomar amostras a cada 0,125 segundo. Isso nos dará 32 amostras ( $N_0 = 32$ ). Também temos

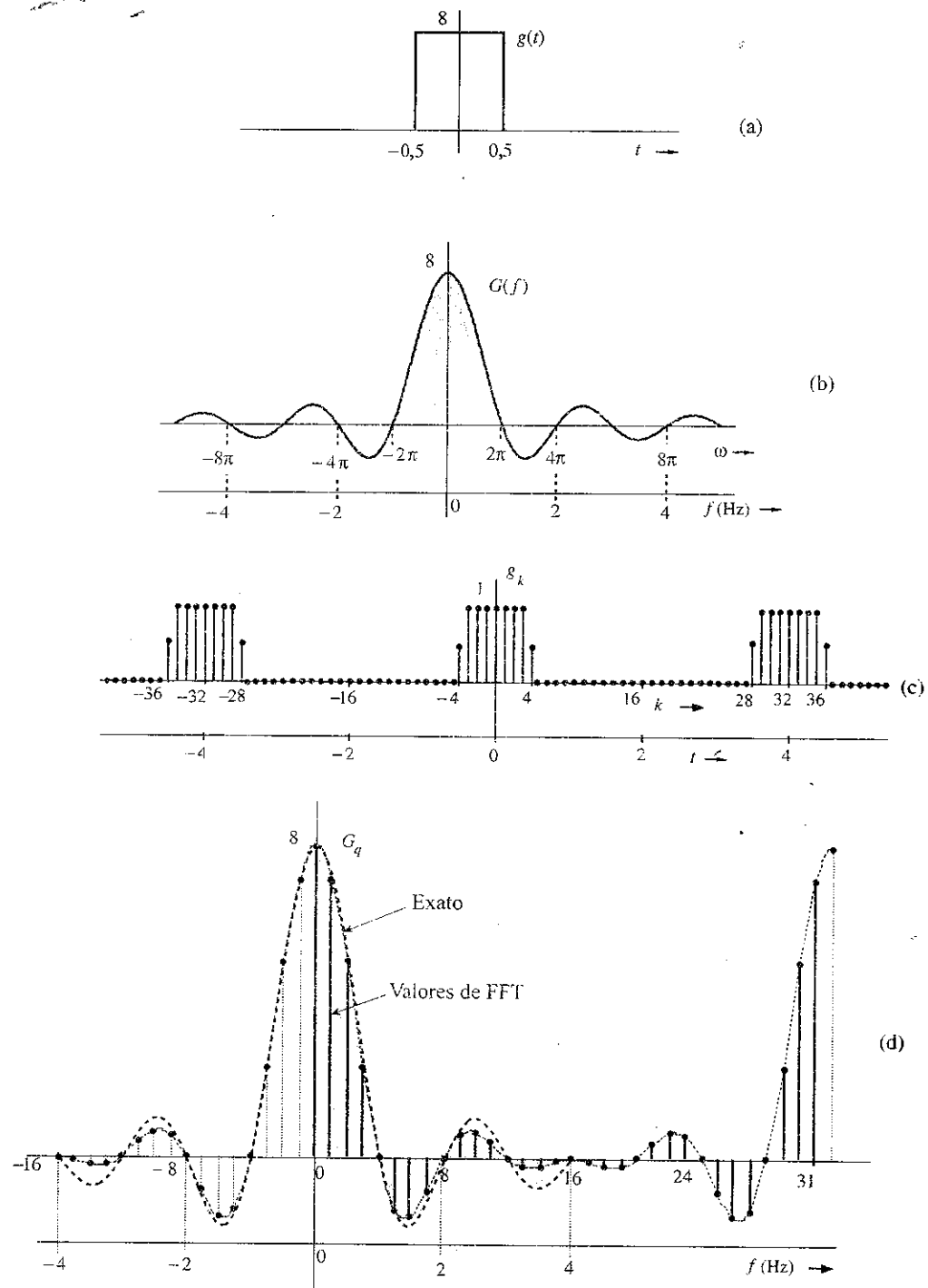
$$\begin{aligned} g_k &= T_s g(kT) \\ &= \frac{1}{8} g(kT) \end{aligned}$$

Como  $g(t) = 8 \Pi(t)$ , os valores de  $g_k$  são 1, 0 ou 0,5 (nos pontos de descontinuidade), como mostrado na Fig. 3.41c; nessa figura, por conveniência,  $g_k$  é mostrado como função de  $t$  e de  $k$ .

Na dedução da DFT, supomos que  $g(t)$  tem início em  $t = 0$  (Fig. 3.39a) e tomamos  $N_0$  amostras no intervalo  $(0, T_0)$ . No caso em consideração, contudo,  $g(t)$  tem início em  $t = -1/2$ . Essa dificuldade é facilmente resolvida quando observamos que a DFT obtida por este procedimento é, na verdade, a DFT de  $g_k$  repetido a cada  $T_0$  segundos. Da Fig. 3.41c, fica claro que a repetição periódica do segmento de  $g_k$  no intervalo de  $-2$  a  $2$  segundos é equivalente à repetição do segmento de  $g_k$  no intervalo de  $0$  a  $4$  segundos. Portanto, a DFT das amostras colhidas entre  $-2$  e  $2$  segundos é igual à DFT das amostras colhidas entre  $0$  e  $4$  segundos. Assim, independentemente do instante em que  $g(t)$  tem início, sempre podemos tomar as amostras de  $g(t)$  e repeti-las periodicamente no intervalo de  $0$  a  $T_0$ . No presente exemplo, os valores das 32 amostras são

$$g_k = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq 3 \text{ e } 29 \leq k \leq 31 \\ 0 & 5 \leq k \leq 27 \\ 0,5 & k = 4, 28 \end{cases}$$

**Figura 3.41**  
Transformada  
de Fourier  
discreta de  
um pulso  
retangular.



Vale ressaltar que a última amostra é tomada em  $t = 31/8$  e não em  $t = 4$ , pois a repetição do sinal reinicia em  $t = 4$ , de modo que a amostra em  $t = 4$  é igual à amostra em  $t = 0$ . Com  $N_0 = 32$ ,  $\Omega_0 = 2\pi/32 = \pi/16$ . Logo, [ver a Eq. (3.103a)],

$$G_q = \sum_{k=0}^{31} g_k e^{-jq \frac{\pi}{16} k}$$

O programa MATLAB que usa o algoritmo de FFT para calcular a DFT é dado a seguir. Primeiro, escrevemos um programa MATLAB para gerar 32 amostras de  $g_k$  e, então, calculamos a DFT.

```
% (c32.m)
B=4;      f0=1/4;
Ts=1/(2*B); T0=1/f0;
N0=T0/Ts;
k=0:N0; k=k';
for m=1:length(k)
$ $ if k(m)>=0 & k(m)<=3, gk(m)=1; end
$ $ if k(m)==4 & k(m)==28 gk(m)=0.5; end
$ $ if k(m)>=5 & k(m)<=27, gk(m)=0; end
$ $ if k(m)>=29 & k(m)<=31, gk(m)=1; end
end
gk=gk';
Gr=fft(gk);
subplot(211),stem(k,gk)
subplot(212),stem(k,Gr)
```

A Fig. 3.41d mostra o gráfico de  $G_q$ .

As amostras  $G_q$  são espaçadas de  $f_0 = 1/T_0$  Hz. Neste exemplo,  $T_0 = 4$  segundos, de modo que a resolução de frequência  $f_0$  é  $1/4$  Hz, como desejado. A frequência de dobramento  $f_s/2 = B = 4$  Hz corresponde a  $q = N_0/2 = 16$ . Como  $G_u$  tem período  $N_0$  ( $N_0 = 32$ ), os valores de  $G_q$  para  $q$  entre  $-16$  e  $-1$  são iguais àqueles para  $q$  entre  $16$  e  $31$ . A DFT nos fornece amostras do espectro  $G(f)$ .

Para facilitar a comparação, a Fig. 3.41d também mostra a curva hachurada  $8 \operatorname{sinc}(\pi f)$ , que é a transformada de Fourier de  $8 \Pi(t)$ . Os valores de  $G_q$  calculados pela DFT exibem erro de mascaramento, o que fica claro quando comparamos os dois gráficos. O erro em  $G_2$  é da ordem de apenas 1,3%. No entanto, o erro de mascaramento aumenta rapidamente com  $r$ . Por exemplo, o erro em  $G_6$  é de cerca de 12%, e o erro em  $G_{10}$ , 33%. O erro em  $G_{14}$  é de assustadores 72%. O erro percentual aumenta de forma muito rápida nas proximidades da frequência de dobramento ( $r = 16$ ), pois  $g(t)$  tem uma descontinuidade degrau, o que faz com que  $G(f)$  decaia muito lentamente, como  $1/f$ . Assim, nas proximidades da frequência de dobramento, a cauda invertida (devido ao mascaramento) é quase igual a  $G(f)$ . Além disso, os valores extremos são a diferença entre os valores exato e da parte que sofreu dobra (quase iguais aos exatos). Consequentemente, o erro percentual nas proximidades da frequência de dobramento ( $r = 16$ , neste exemplo) é muito alto, embora o erro absoluto seja muito pequeno. Fica claro que, para sinais com descontinuidades do tipo degrau, o erro de mascaramento nas proximidades da frequência de dobramento sempre será grande (em termos percentuais), qualquer que seja o valor escolhido para  $N_0$ . Para garantir erro de mascaramento desprezível para qualquer valor de  $q$ , devemos assegurar que  $N_0 \gg q$ . Essa observação se aplica a todos os sinais com descontinuidade do tipo degrau.

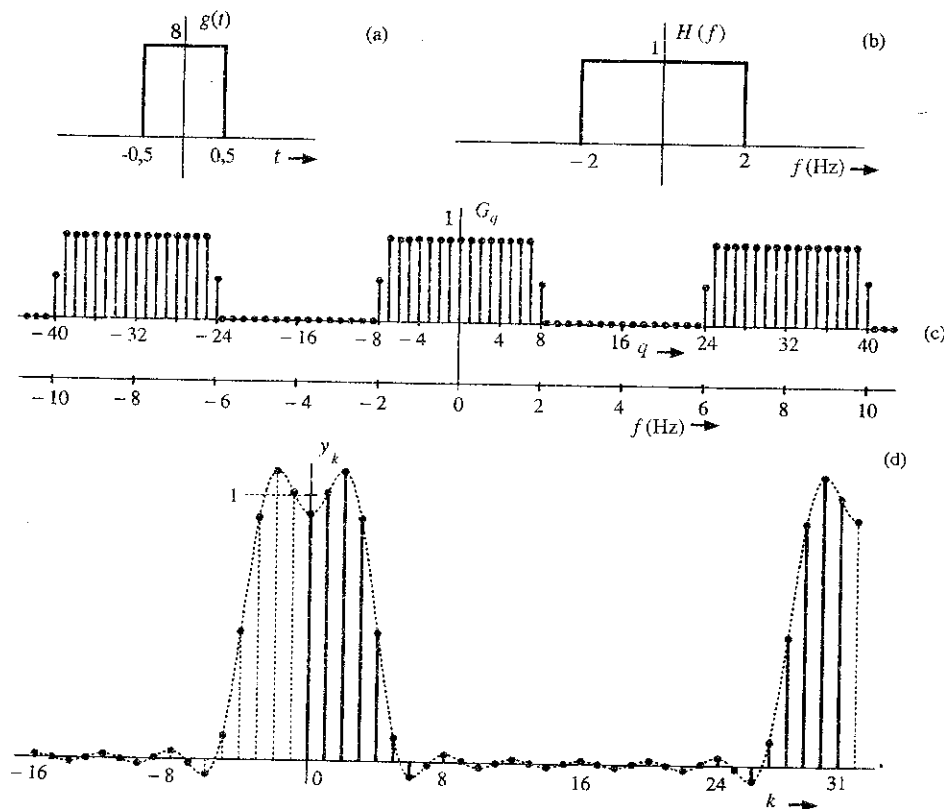
### Filtragem

Quando pensamos em filtragem, em geral, o fazemos em termos de uma solução orientada a hardware (ou seja, montagem de um circuito com componentes *RLC* e amplificadores operacionais). Contudo, a filtragem também admite uma solução orientada a software [algoritmo computacional que fornece a saída filtrada  $y(t)$ , para uma dada entrada  $g(t)$ ]. Isso pode ser implementado de modo conveniente via DFT. Seja  $g(t)$  o sinal a ser filtrado; então, os valores  $G_q$ , DFT de  $g_k$ , são calculados. O espectro  $G_q$  é formatado (filtrado) como desejado através da multiplicação de  $G_q$  por  $H_q$ , em que  $H_q$  são as amostras da função de transferência do filtro,  $H(f)$  [ $H_q = H(qf_0)$ ]. Por fim, calculamos a DFT inversa (ou IDFT) de  $G_q H_q$  e obtemos a saída filtrada  $y_k$  [ $y_k = T_s y(kT)$ ]. O próximo exemplo ilustra este procedimento.

## EXEMPLO COMPUTACIONAL C3.3

O sinal  $g(t)$  na Fig. 3.42a é aplicado a um filtro passa-baixos ideal, cuja função de transferência  $H(f)$  é mostrada na Fig. 3.42b. Usemos a DFT para calcular a saída do filtro.

Figura 3.42  
Filtragem de  
 $g(t)$  por  $H(f)$ .



Já calculamos a DFT de  $g(t)$  com 32 amostras (Fig. 3.41d). Agora, devemos multiplicar  $G_q$  por  $H_q$ . Para calcular  $H_q$ , recordemos que, na determinação da DFT de  $g(t)$  com 32 amostras, usamos  $f_0 = 0,25$  Hz. Como  $G_q$  tem período  $N_0 = 32$ ,  $H_q$  deve ter o mesmo período e, portanto, amostras espaçadas de  $0,25$  Hz. Isso significa que  $H_q$  deve se repetir a cada  $8$  Hz ou  $16\pi$  rad/s (ver Fig. 3.42c). Assim, as 32 amostras de  $H_q$  são produzidas, no intervalo  $0 \leq f \leq 8$ , como

$$H_q = \begin{cases} 1 & 0 \leq q \leq 7 \quad \text{e} \quad 25 \leq q \leq 31 \\ 0 & 9 \leq q \leq 23 \\ 0,5 & q = 8, 24 \end{cases}$$

Multiplicamos  $G_q$  por  $H_q$  e calculamos a DFT inversa. O resultante sinal de saída é mostrado na Fig. 3.42d. A Tabela 3.4 lista valores de  $g_k$ ,  $G_q$ ,  $H_q$ ,  $Y_q$  e  $y_k$ .

No Exemplo C.32, já calculamos a DFT de  $g(t)$  com 32 amostras ( $G_q$ ). O programa MATLAB do Exemplo C3.2 pode ser armazenado como um arquivo .m (por exemplo, "c32.m"). Podemos importar  $G_q$  no ambiente MATLAB via comando "c32". A seguir, geramos 32 amostras de  $H_q$ , multiplicamos  $G_q$  por  $H_q$  e, para obter  $y_k$ , calculamos a DFT inversa. Também podemos obter  $y_k$  calculando a convolução de  $g_k$  e  $h_k$ .

```
c32;
q=0:32; q=q';
for m=1:length(q)
    if q(m)>=0 & q(m)<=7, Hq(m)=1; end
    if q(m)>=25 & q(m)<=31, Hq(m)=1; end
    if q(m)>=9 & q(m)<=23, Hq(m)=0; end
    if q(m)==8 & q(m)==24, Hq(m)=0.5; end
```

```

end
Hq=Hq';
Yq=Gq.*Hq;
yk=ifft(Yq);
clf,stem(k,yk)

```

Tabela 3.4

No.	$gk$	$G_q$	$H_q$	$G_q H_q$	$y_k$
0	1	8,000	1	8,000	0,9285
1	1	7,179	1	7,179	1,009
2	1	5,027	1	5,027	1,090
3	1	2,331	1	2,331	0,9123
4	1	0,000	1	0,000	0,4847
5	0,5	-1,323	1	-1,323	0,08884
6	0	-1,497	1	-1,497	-0,05698
7	0	-0,8616	1	-0,8616	-0,01383
8	0	0,000	0,5	0,000	0,02933
9	0	0,5803	0	0,000	0,004837
10	0	0,6682	0	0,000	-0,01966
11	0	0,3778	0	0,000	-0,002156
12	0	0,000	0	0,000	0,01534
13	0	-0,2145	0	0,000	0,0009828
14	0	-0,1989	0	0,000	-0,01338
15	0	-0,06964	0	0,000	-0,0002876
16	0	0,000	0	0,000	0,01280
17	0	-0,06964	0	0,000	-0,0002876
18	0	-0,1989	0	0,000	-0,01338
19	0	-0,2145	0	0,000	0,0009828
20	0	0,000	0	0,000	0,01534
21	0	0,3778	0	0,000	-0,002156
22	0	0,6682	0	0,000	-0,01966
23	0	0,5803	0	0,000	0,004837
24	0	0,000	0,5	0,000	0,03933
25	0	-0,8616	1	-0,8616	-0,01383
26	0	-1,497	1	-1,497	-0,05698
27	0	-1,323	1	-1,323	0,08884
28	0,5	0,000	1	0,000	0,4847
29	1	2,331	1	2,331	0,9123
30	1	5,027	1	5,027	1,090
31	1	7,179	1	7,179	1,009

## REFERÊNCIAS

1. R. V. Churchill and J. W. Brown, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1978.
2. R. N. Bracewell, *Fourier Transform and Its Applications*, rev. 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1986.
3. B. P. Lathi, *Signal Processing and Linear Systems*, Oxford University Press, 2000.
4. E. A. Guillemin, *Theory of Linear Physical Systems*, Wiley, New York, 1963.
5. F. J. Harris, "On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform," *Proc. IEEE*, vol. 66, pp. 51-83, Jan. 1978.
6. J. W. Tukey and J. Cooley, "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series," *Mathematics of Computation*, Vol. 19, pp. 297-301, April 1965.

## EXERCÍCIOS

3.1-1 Mostre que a transformada de Fourier de  $g(t)$  pode ser expressa como

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cos 2\pi ft \, dt - j \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sin 2\pi ft \, dt$$

A seguir, mostre que, caso  $g(t)$  seja uma função par de  $t$ ,

$$G(f) = 2 \int_0^{\infty} g(t) \cos 2\pi ft \, dt$$

e, caso  $g(t)$  seja uma função ímpar de  $t$ ,

$$G(f) = -2j \int_0^{\infty} g(t) \sin 2\pi ft \, dt$$

Agora, mostre que:

Se  $g(t)$  for:

uma função real e par de  $t$   
 uma função real e ímpar de  $t$   
 uma função imaginária e par de  $t$   
 uma função complexa e par de  $t$   
 uma função real e ímpar de  $t$

Então  $G(f)$  é:

uma função real e par de  $f$   
 uma função imaginária e ímpar de  $f$   
 uma função imaginária e par de  $f$   
 uma função complexa e par de  $f$   
 uma função real e ímpar de  $f$

3.1-2 (a) Mostre que, para uma função  $g(t)$  de valores reais, a transformada inversa, Eq. (3.9b), pode ser expressa como

$$g(t) = 2 \int_0^{\infty} |G(f)| \cos[2\pi ft + \theta_g(2\pi f)] \, df$$

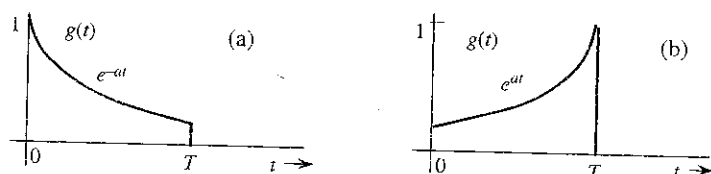
Essa é a forma trigonométrica da transformada de Fourier (inversa).

(b) Expresse a integral de Fourier (transformada de Fourier inversa) para  $g(t) = e^{-at}u(t)$  na forma trigonométrica dada na parte (a).

3.1-3 Se  $g(t) \longleftrightarrow G(f)$ , mostre que  $g^*(t) \longleftrightarrow G^*(-f)$ .

3.1-4 A partir da definição (3.9a), determine a transformada de Fourier de cada sinal mostrado na Fig. E.3.1-4.

Figura E.3.1-4



3.1-5 A partir da definição (3.9a), determine a transformada de Fourier de cada sinal mostrado na Fig. E.3.1-5.

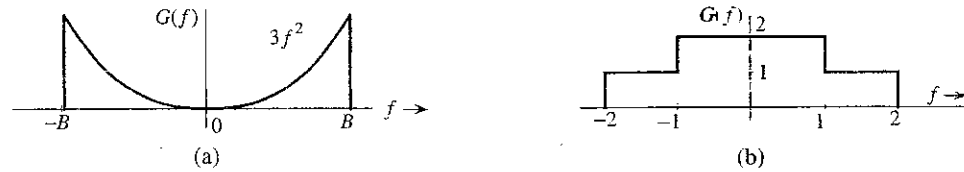
Figura E.3.1-5





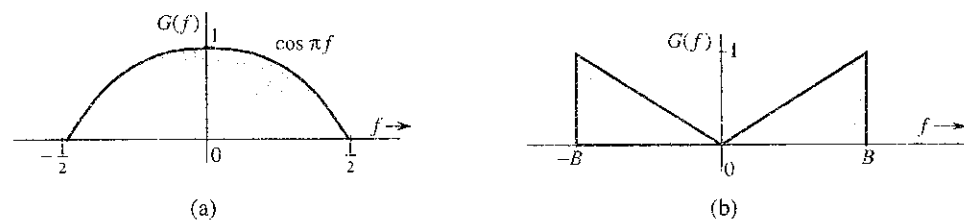
3.1-6 A partir da definição (3.9b), determine a transformada de Fourier inversa de cada espectro mostrado na Fig. E.3.1-6.

Figura E.3.1-6



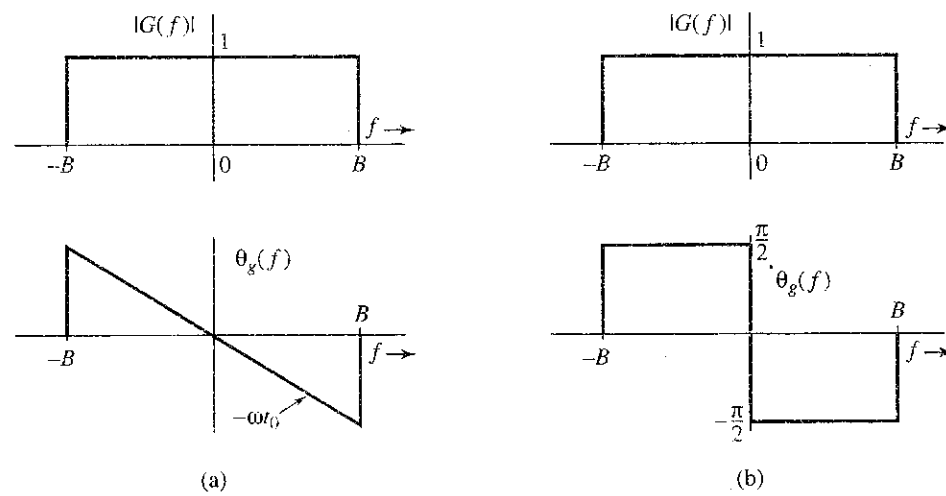
3.1-7 A partir da definição (3.9b), determine a transformada de Fourier inversa de cada espectro mostrado na Fig. E.3.1-7.

Figura E.3.1-7



3.1-8 Mostre que, apesar da semelhança, os dois sinais nas partes (a) e (b) da Fig. E.3.1-8 são totalmente distintos no domínio do tempo.

Figura E.3.1-8



Sugestão:  $G(f) = |G(f)|e^{j\theta_g(f)}$ . Na parte (a),  $G(f) = 1 \times e^{-j2\pi f t_0}$ ,  $|f| \leq B$ , enquanto na parte (b),

$$G(f) = \begin{cases} 1e^{-j\pi/2} = -j & 0 < f \leq B \\ 1e^{j\pi/2} = j & 0 > f \geq -B \end{cases}$$

3.2-1 Esboce gráficos das seguintes funções: (a)  $\Pi(t/2)$ ; (b)  $\Delta(3\omega/100)$ ; (c)  $\Pi(t - 10/8)$ ; (d)  $\text{sinc}(\pi\omega/5)$ ; (e)  $\text{sinc}[(\omega - 10\pi)/5]$ ; (f)  $\text{sinc}(t/5) \Pi(t/10\pi)$ .

Sugestão:  $g(\frac{x-a}{b})$  é  $g(\frac{x}{b})$  deslocada para a direita por  $a$ .

3.2-2 Da definição (3.9a), mostre que a transformada de Fourier de  $\Pi(t - 5)$  é  $\text{sinc}(\pi f)e^{-j10\pi f}$ .

3.2-3 Da definição (3.9b), mostre que a transformada de Fourier inversa de  $\Pi[(2\pi f - 10)/2\pi]$  é  $\text{sinc}(\pi t)e^{j10t}$ .

3.2-4 Use os pares 7 e 12 na Tabela 3.1 e mostre que  $u(t) \iff 0,5 \delta(f) + 1/j2\pi f$ .

Sugestão: Some 1 a  $\text{sgn}(t)$  e verifique o sinal resultante.

3.2-5 Mostre que  $\cos(2\pi f_0 t + \theta) \iff \frac{1}{2}[\delta(f + f_0)e^{-j\theta} + \delta(f - f_0)e^{j\theta}]$ .

Sugestão: Use a fórmula de Euler para expressar  $\cos(2\pi f_0 t + \theta)$  em termos de exponenciais.

**3.3-1** Aplique a propriedade de dualidade a pares adequados na Tabela 3.1 e mostre que:

(a)  $0,5[\delta(t) + (j/\pi t)] \iff u(f)$

(b)  $\delta(t+T) + \delta(t-T) \iff 2 \cos 2\pi fT$

(c)  $\delta(t+T) - \delta(t-T) \iff 2j \operatorname{sen} 2\pi fT$

*Sugestão:*  $g(-t) \iff G(-f)$  e  $\delta(t) = \delta(-t)$ .

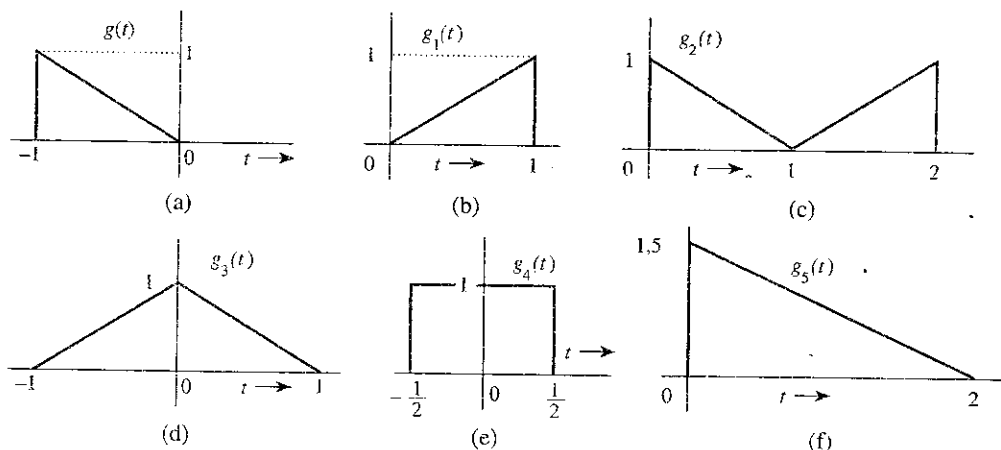
**3.3-2** A transformada de Fourier do pulso triangular  $g(t)$  na Fig. E.3.3-2a é dada por

$$G(f) = \frac{1}{(2\pi f)^2} (e^{j2\pi f} - j2\pi f e^{j2\pi f} - 1)$$

Use essa informação e as propriedades de translação e dilatação no domínio do tempo para determinar a transformada de Fourier de cada sinal mostrado na Fig. E.3.3-2b-f.

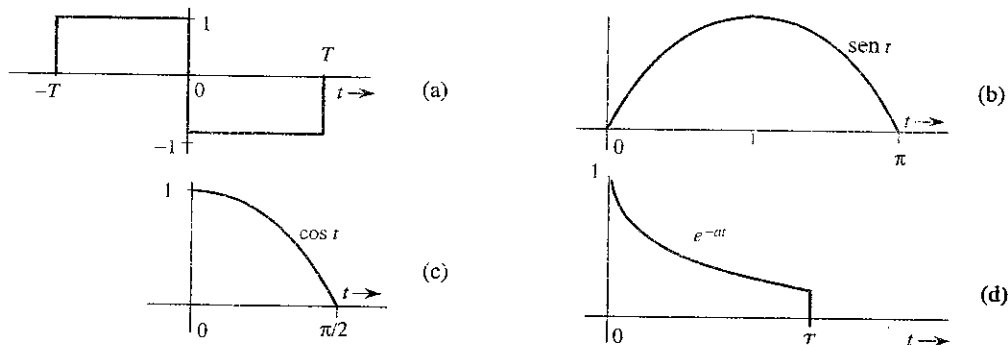
*Sugestão:* O reflexo de  $g(t)$  em relação ao eixo vertical resulta no pulso  $g_1(t)$  na Fig. E.3.3-2b; em consequência,  $g_1(t) = g(-t)$ . O pulso na Fig. E.3.3-2c pode ser expresso como  $g(t-T) + g_1(t-T)$  [soma de  $g(t)$  e  $g_1(t)$  atrasados de  $T$ ]. Os dois pulsos na Fig. 3.3-2d-e podem ser expressos como  $g(t-T) + g_1(t+T)$  [soma de  $g(t)$  atrasado de  $T$  e  $g_1(t)$  adiantado de  $T$ ], para alguma escolha adequada de  $T$ . O pulso na Fig. 3.3-2f pode ser obtido pela dilatação temporal de  $g(t)$  por um fator 2, seguida de um atraso de 2 segundos [ou atraso de 1 segundo e dilatação temporal por um fator 2].

Figura E.3.3-2



**3.3-3** Usando apenas a propriedade de translação no domínio do tempo e a Tabela 3.1, determine a transformada de Fourier de cada um dos sinais mostrados na Fig. E.3.3-3.

Figura E.3.3-3



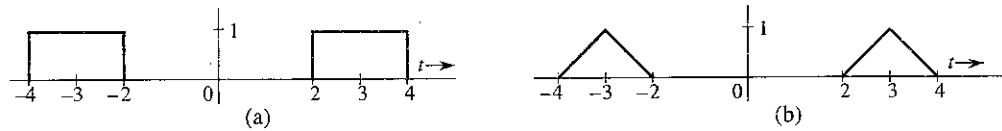
*Sugestão:* O sinal na Fig. E.3.3-3a é a soma de dois pulsos retangulares deslocados. O sinal na Fig. E.3.3-3b é  $\operatorname{sen} t [u(t) - u(t-\pi)] = \operatorname{sen} t u(t) - \operatorname{sen} t u(t-\pi) = \operatorname{sen} t u(t) + \operatorname{sen}(t-\pi) u(t-\pi)$ . Comprove que a soma dessas duas senoides, de fato, resulta no pulso na Fig. E.3.3-3b. De modo similar, o sinal na Fig. E.3.3-3c pode ser expresso como  $\cos t u(t) + \operatorname{sen}(t-\pi/2) u(t-\pi/2)$  (comprove isso traçando os gráficos dos sinais). O sinal na Fig. 3.3-3d é  $e^{-at} [u(t) - u(t-T)] = e^{-at} u(t) - e^{-aT} e^{-a(t-T)} u(t-T)$ .

3.3-4 Use a propriedade de translação no domínio do tempo e mostre que, se  $g(t) \iff G(f)$ , então

$$g(t+T) + g(t-T) \iff 2G(f) \cos 2\pi fT$$

Isso é o dual da Eq. (3.36). Com base neste resultado e nos pares 17 e 19 na Tabela 3.1, determine a transformada de Fourier de cada um dos sinais mostrados na Fig. E.3.3-4.

Figura 3.3-4



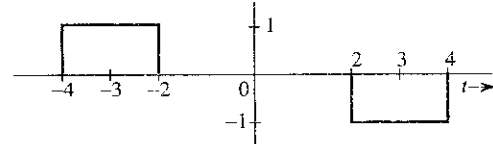
3.3-5 Comprove os seguintes resultados:

$$g(t) \sin 2\pi f_0 t \iff \frac{1}{2j} [G(f - f_0) - G(f + f_0)]$$

$$\frac{1}{2j} [g(t+T) - g(t-T)] \iff G(f) \sin 2\pi fT$$

Com base nesse resultado e na Tabela 3.1, determine a transformada de Fourier do sinal na Fig. E.3.3-5.

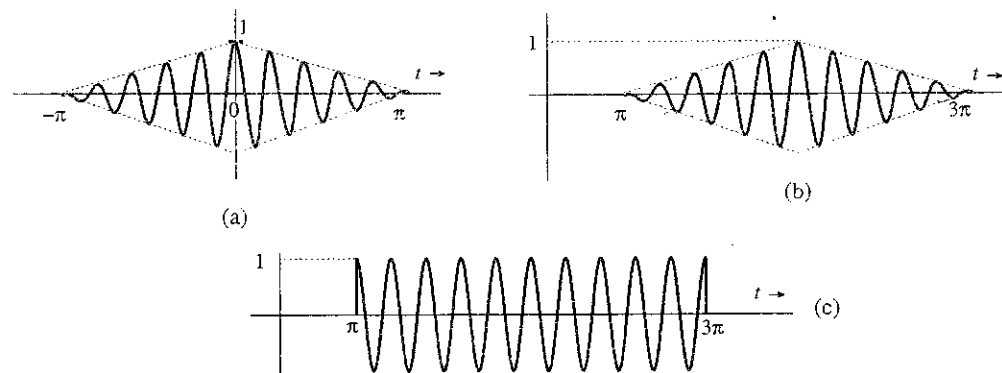
Figura 3.3-5



3.3-6 Os sinais na Fig. E.3.3-6 são modulados com uma portadora  $\cos 10t$ . Utilizando propriedades adequadas da transformada de Fourier e a Tabela 3.1, determine as transformadas de Fourier desses sinais. Esboce os gráficos dos espectros de amplitude e de fase para os sinais nas Fig. E.3.3-6a e b.

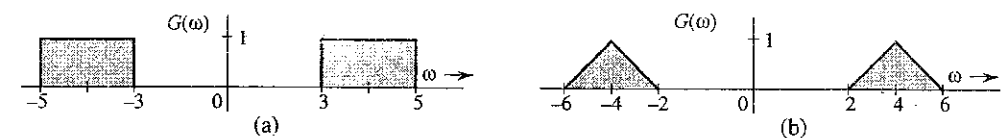
*Sugestão:* Essas funções podem ser expressas na forma  $g(t) \cos 2\pi f_0 t$ .

Figura 3.3-6



3.3-7 Utilizando a propriedade de translação no domínio da frequência e a Tabela 3.1, determine a transformada de Fourier inversa do espectro mostrado na Fig. E.3.3-7. Observe que, nesse exercício, a transformada de Fourier é dada no domínio  $\omega$ .

Figura 3.3-7



3.3-8 Um sinal  $g(t)$  é limitado em frequência a  $B$  Hz. Mostre que o sinal  $g''(t)$  é limitado em frequência a  $nB$  Hz.

*Sugestão:*  $g''(t) \iff [G(f) * G(f)]$ , e assim por diante. Use a propriedade de largura de banda da convolução.

3.3-9 Determine a transformada de Fourier do sinal na Fig. E.3.3-3a empregando três métodos diferentes:

- (a) Por integração direta, utilizando a definição (3.9a).  
 (b) Empregando apenas o par 17 na Tabela 3.1 e a propriedade de translação no domínio do tempo.  
 (c) Usando as propriedades de diferenciação e translação no domínio do tempo, assim como o par  $\delta(t) \longleftrightarrow 1$ .

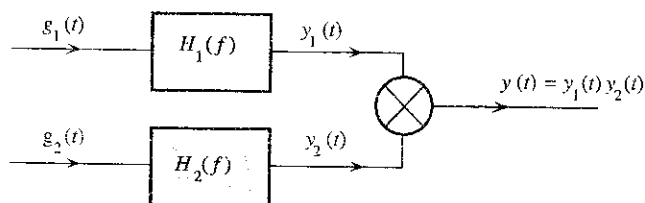
Sugestão:  $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ .

**3.3-10** O processo de recuperação de um sinal  $g(t)$  de um sinal modulado  $g(t) \cos 2\pi f_0 t$  é denominado **demodulação**. Mostre que o sinal  $g(t) \cos 2\pi f_0 t$  pode ser demodulado multiplicando-o por  $2 \cos 2\pi f_0 t$  e aplicando o produto a um filtro passa-baixos de largura de banda  $B$  Hz [a largura de banda de  $g(t)$ ]. Considere  $B < f_0$ . Sugestão:  $2 \cos^2 2\pi f_0 t = 1 + \cos 4\pi f_0 t$ . Observe que o espectro de  $g(t) \cos 4\pi f_0 t$  é centrado em  $2f_0$  e será suprimido pelo filtro passa-baixos de largura de banda  $B$  Hz.

**3.4-1** Os sinais  $g_1(t) = 10^4 \Pi(10^4 t)$  e  $g_2(t) = \delta(t)$  são aplicados às entradas de filtros passa-baixos ideais  $H_1(f) = \Pi(f/20.000)$  e  $H_2(f) = \Pi(f/10.000)$  (Fig. E.3.4-1). As saídas  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  desses filtros são multiplicadas para produzir o sinal  $y(t) = y_1(t) y_2(t)$ .

- (a) Trace os gráficos de  $G_1(f)$  e  $G_2(f)$ .  
 (b) Trace os gráficos de  $H_1(f)$  e  $H_2(f)$ .  
 (c) Trace os gráficos de  $Y_1(f)$  e  $Y_2(f)$ .  
 (d) Determine as larguras de banda de  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  e de  $y(t)$ .

Figura E.3.4-1



**3.5-1** Dentre os sistemas com as respostas ao impulso listadas a seguir, qual é causal?

- (a)  $h(t) = e^{-at} u(t)$ ,  $a > 0$   
 (b)  $h(t) = e^{-a|t|}$ ,  $a > 0$   
 (c)  $h(t) = e^{-a(t-t_0)} u(t-t_0)$ ,  $a > 0$   
 (d)  $h(t) = \text{sinc}(at)$ ,  $a > 0$   
 (e)  $h(t) = \text{sinc}[a(t-t_0)]$ ,  $a > 0$ .

**3.5-2** Considere um filtro com a seguinte função de transferência:

$$H(f) = e^{-k(2\pi kf)^2 - j2\pi ft_0}$$

Usando os critérios dos domínios do tempo [ $h(t)$  não causal] e da frequência (critério de Paley-Wiener), mostre que este filtro é fisicamente irrealizável. É possível, com a escolha de um valor suficientemente grande para  $t_0$ , tornar este filtro aproximadamente realizável? Usando um critério próprio (razoável) de realização aproximada, determine  $t_0$ .

Sugestão: Use o par 22 na Tabela 3.1.

**3.5-3** Mostre que um filtro com a função de transferência

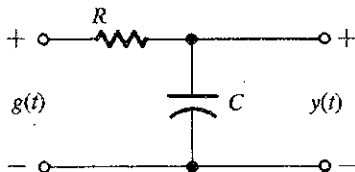
$$H(f) = \frac{2(10^5)}{(2\pi f)^2 + 10^{10}} e^{-j2\pi ft_0}$$

é irrealizável. É possível, com a escolha de um valor suficientemente grande para  $t_0$ , tornar esse filtro aproximadamente realizável? Usando um critério próprio (razoável) de realização aproximada, determine  $t_0$ .

Sugestão: Mostre que a resposta ao impulso é não causal.

- 3.5-4 Determine a máxima largura de banda de um sinal que pode ser transmitida através do filtro passa-baixos RC na Fig. E.3.5-4, com  $R = 1000$  e  $C = 10^{-9}$ ; presuma que, na largura de banda, as variações da resposta de amplitude (ganho) e do atraso temporal são, respectivamente, de 5% e 2%.

Figura E.3.5-4



- 3.5-5 Um sinal passa-faixa  $g(t)$  de largura de banda  $B = 2000$  Hz, centrada em  $f = 10^5$  Hz, é aplicado ao filtro RC mostrado na Fig. E.3.5-4, com  $RC = 10^{-3}$ . Considerando que, na largura de banda, a variação da resposta de amplitude menor que 2% e variação do atraso temporal menor que 1% caracterizam transmissão sem distorção, determine se  $g(t)$  pode ser transmitido sem distorção. Obtenha uma expressão aproximada para o sinal de saída.

- 3.6-1 Um certo canal tem resposta de amplitude ideal e resposta de fase não ideal (Fig. E.3.6-1) dadas por

$$|H(f)| = 1$$

$$\theta_h(f) = -2\pi f t_0 - k \sin 2\pi f T \quad k \ll 1$$

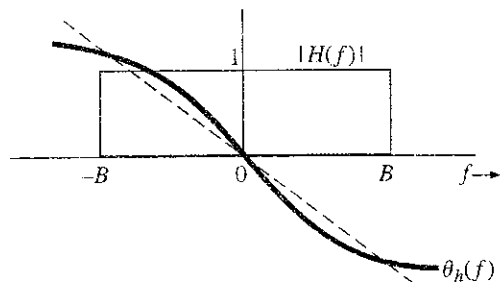
- (a) Mostre que  $y(t)$ , a resposta do canal a um pulso de entrada  $g(t)$  limitado em frequência a  $B$  Hz, é

$$y(t) = g(t - t_0) + \frac{k}{2} [g(t - t_0 - T) - g(t - t_0 + T)]$$

Sugestão: Use  $e^{-jk \sin 2\pi f T} \approx 1 - jk \sin 2\pi f T$ .

- (b) Como este canal afetará sistemas TDM e FDM, do ponto de vista de interferência entre sinais multiplexados?

Figura E.3.6-1

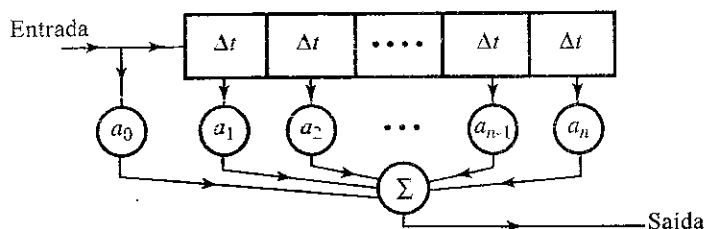


- 3.6-2 A distorção causada por transmissão em multipercurso pode ser parcialmente corrigida por um equalizador com linha de retardo gradual. Mostre que, se  $\alpha \ll 1$ , a distorção no sistema multipercurso na Fig. 3.31a pode ser aproximadamente corrigida se o sinal recebido, representado na Fig. 3.31a, for aplicado ao equalizador com linha de retardo gradual mostrado na Fig. E.3.6-2.

Sugestão: A partir da Eq. (3.64a), fica claro que a função de transferência do filtro equalizador deve ser  $H_{eq}(f) = 1/(1 + \alpha e^{-j2\pi f t_d})$ . Sabendo que, se  $x \ll 1$ ,  $1/(1 - x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ , determine os fatores de amostragem  $a_i$  para que a resultante função de transferência seja

$$H(f)H_{eq}(f) \approx e^{-j2\pi f t_d}$$

Figura E.3.6-2



3.7-1 Por integração direta, mostre que a energia do pulso gaussiano

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

é  $1/2\sigma\sqrt{\pi}$ . Para comprovar esse resultado, use o teorema de Parseval para determinar a energia  $E_g$  de  $G(f)$ .  
*Sugestão:* Veja o par 22 na Tabela 3.1. Use

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

3.7-2 Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(kt) dt = \frac{\pi}{4}$$

*Sugestão:* Observe que a integral é a energia de  $g(t) = \text{sinc}(kt)$ . Use o teorema de Parseval para calcular essa energia.

3.7-3 Generalize o teorema de Parseval e mostre que, para sinais  $g_1(t)$  e  $g_2(t)$  de valores reais e cujas transformadas de Fourier existam,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(-f)G_2(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(f)G_2(-f) df$$

3.7-4 Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(2\pi Bt - m\pi) \text{sinc}(2\pi Bt - n\pi) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{1}{2B} & m = n \end{cases}$$

*Sugestão:* Observe que

$$\text{sinc}(2\pi Bt - k\pi) = \text{sinc}\left[2\pi B\left(t - \frac{k}{2B}\right)\right] \Longleftrightarrow \frac{1}{2B} \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) e^{-j\pi f k/B}$$

Use esta informação e o resultado do Exercício 3.7-2 para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(2\pi Bt - m\pi) \text{sinc}(2\pi Bt - n\pi) dt = \frac{1}{4B^2} \int_{-B}^B e^{j[(n-m)/2B]2\pi f} df$$

Esta integral fornecerá o resultado desejado.

3.7-5 Para o sinal

$$g(t) = \frac{2a}{t^2 + a^2}$$

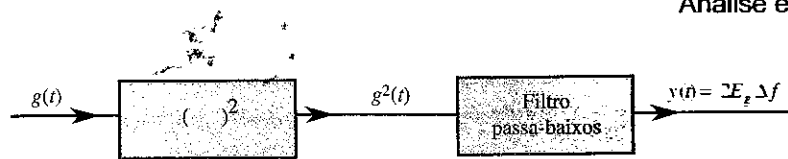
determine a largura de banda essencial  $B$  Hz, de modo que a energia contida nas componentes espectrais de  $g(t)$  de frequências abaixo de  $B$  Hz corresponda a 99% da energia  $E_g$  do sinal.

*Sugestão:* Aplique a propriedade de dualidade [Eq. (3.26)] ao par 3 na Tabela 3.1 e determine  $G(f)$ .

3.7-6 Um sinal passa-baixas  $g(t)$  é aplicado a um dispositivo de resposta quadrática, cuja saída  $g^2(t)$  é aplicada a um filtro passa-baixas ideal de ganho unitário e largura de banda  $\Delta f$  Hz (Fig. E.3.7-6). Mostre que, se  $\Delta f$  for muito pequeno ( $\Delta f \rightarrow 0$ ), a saída do filtro é um sinal dc de amplitude  $2E_g\Delta f$ , em que  $E_g$  é a energia de  $g(t)$ .

*Sugestão:* Quando  $\Delta f \rightarrow 0$ , a saída  $y(t)$  é um sinal dc porque o espectro  $Y(f)$  está concentrado em  $f = 0$ , de  $-\Delta f$  a  $\Delta f$  (impulso na origem). Se  $g^2(t) \Longleftrightarrow A(f)$  e  $y(t) \Longleftrightarrow Y(f)$ , então  $Y(f) \approx [2A(0)\Delta f]\delta(f)$ . Agora, mostre que  $E_g = A(0)$ .

Figura E.3.7-6



- 3.8-1 Mostre que a função de autocorrelação de  $g(t) = C \cos(2\pi f_0 t - \theta_0)$  é dada por  $\mathcal{R}_g(\tau) = (C^2/2) \cos 2\pi f_0 \tau$  e que a correspondente PSD é  $S_g(f) = (C^2/4)[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$ . A seguir, mostre que, para um sinal  $y(t)$  dado por

$$y(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n2\pi f_0 t + \theta_n)$$

a função de autocorrelação e a PSD são dadas por

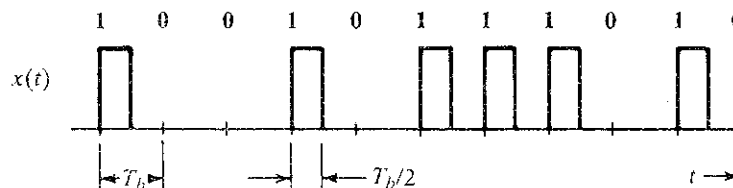
$$\mathcal{R}_y(\tau) = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \cos n2\pi f_0 \tau$$

$$S_y(f) = C_0^2 \delta(f) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 [\delta(f - nf_0) + \delta(f + nf_0)]$$

*Sugestão:* Mostre que, se  $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$ , então  $\mathcal{R}_g(\tau) = \mathcal{R}_{g_1}(\tau) + \mathcal{R}_{g_2}(\tau) + \mathcal{R}_{g_1 g_2}(\tau) + \mathcal{R}_{g_2 g_1}(\tau)$ , em que  $\mathcal{R}_{g_1 g_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} g_1(t) g_2(t + \tau) dt$ . Caso  $g_1(t)$  e  $g_2(t)$  representem quaisquer dois dos infinitos termos em  $y(t)$ , mostre que  $\mathcal{R}_{g_1 g_2}(\tau) = \mathcal{R}_{g_2 g_1}(\tau) = 0$ . Para isso, use o fato de que, considerando um intervalo de tempo muito grande, a área sob qualquer senoide é, no máximo, igual à área correspondente a um meio ciclo da senoide.

- 3.8-2 O sinal binário aleatório  $x(t)$  mostrado na Fig. E.3.8-2 transmite um dígito a cada  $T_b$  segundos. Um 1 binário é transmitido por um pulso  $p(t)$  de largura  $T_b/2$  e amplitude  $A$ ; um 0 binário é transmitido pela ausência de pulso. Os dígitos 1 e 0 têm igual probabilidade de ocorrência, que é aleatória. Determine a função de autocorrelação  $\mathcal{R}_x(\tau)$  e a PSD  $S_x(f)$ .

Figura E.3.8-2



- 3.8-3 Determine o valor quadrático médio (ou potência) da tensão de saída  $y(t)$  do circuito RC mostrado na Fig. E.3.5-4, com  $RC = 2\pi$ , considerando que a PSD da tensão de entrada  $S_x(f)$  seja dada por (a)  $K$ ; (b)  $\Pi(\pi f)$ ; (c)  $[\delta(f + 1) + \delta(f - 1)]$ . Em cada caso, calcule a potência (valor quadrático médio) do sinal de entrada  $x(t)$ .
- 3.8-4 Determine o valor quadrático médio (ou potência) da tensão de saída  $y(t)$  do sistema mostrado na Fig. E.3.8-4, considerando que a PSD da tensão de entrada  $S_x(f)$  seja dada por  $\Pi(\pi f)$ . Calcule a potência (valor quadrático médio) do sinal de entrada  $x(t)$ .

Figura 3.8-4

