Universidade Federal do Pará
Curso de Engenharia Elétrica e da Computação

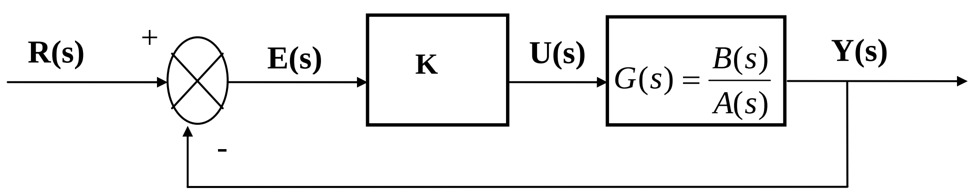
Laboratório de Sistema de Controle - Experiência 5
Lugar Geométrico das Raízes

5.1 Objetivo

Nesta aula será apresentado o método do Lugar Geométrico das Raízes (LGR), que é uma ferramenta bastante útil para o projeto de controladores. O método do LGR permite que as raízes da equação característica sejam representadas graficamente para todos os valores de um parâmetro do sistema (geralmente ganho do sistema em malha aberta). Utilizando O LGR, o projetista pode prever quais os efeitos da variação do valor do ganho ou da adição de pólos e/ou zeros de malha aberta.

5.2 Descrição do método

Seja o sistema realimentado



Onde *A(s)* e *B(s)* são polinômios, representando respectivamente o numerador e o denominador da função de transferência *G(s)* de um processo, e *K* é um ganho.
A função de transferência do sistema realimentado é

$$M(s) = \frac{KB(s)}{A(s) + KB(s)} \tag{1}$$

onde

$$A(s) + kB(s) = 0 \tag{2}$$

é a equação característica do sistema realimentado. As raízes da equação característica dependem do ganho *K*. Para cada valor de *K*, é obtido um conjunto de raízes da equação característica que podem ser representadas no plano complexo. Assim variando-se continuamente K dentro de uma certa faixa, é obtida no plano complexo uma curva, denominada de lugar geométrico das raízes.
Algumas regras qualitativas do LGR são:

- Número de ramos: o número de ramos do LGR é igual ao número de pólos da função de transferência de malha aberta;
- LGR no eixo real: se o número total de pólos e zeros à direita do ponto s no eixo real é impar, então este ponto pertence ao LGR;
- Pontos terminais: para $K = 0$, os pólos de malha aberta pertencem ao LGR. Para $K = \infty$, os zeros de malha aberta pertencem ao LGR.

5.3 Estabilidade

Um dos mais importantes usos do LGR é no estudo da estabilidade. Todo sistema realimentado deve ser estável. A estabilidade de um sistema realimentado contínuo fica garantida se as raízes de sua equação característica tiverem parte real negativa. Assim, se para um determinado ganho K, as raízes da equação característica estiverem à esquerda do eixo imaginário no LGR, o sistema realimentado é estável para aquele ganho.

5.4 Influência de pólos e zeros

A introdução de pólos em G(s) pode ter o efeito de empurrar o LGR para a direita, tendendo a torná-lo instável, enquanto que a introdução de zeros pode ter o efeito de empurrar o LGR para a esquerda, tornando-o mais estável. Isto poderá ser verificado no experimento 1. Este é o princípio usado para o cálculo de compensadores.

EXPERIMENTO 1:

- Encontrar o LGR para:

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)} \tag{3}$$

Determinar a faixa de estabilidade.

- Encontrar o LGR para:

$$G(s) = \frac{2(s+2)}{s(s+1)} \tag{4}$$

Observe que houve a introdução de um zero. Determinar a faixa de estabilidade.

- Encontrar o LGR para:

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \tag{5}$$

Observe, que em relação ao primeiro caso, houve a introdução de um pólo. Determinar a faixa de estabilidade.

5.5 Diversos Casos

Diversos casos de LGR vão agora ser analisados, para confirmação das regras de construção do LGR.

EXPERIMENTO 2:

- Encontrar o LGR para:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1.2s + 1} \tag{6}$$

- Repetir para:

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2 + 1.2s + 1} \tag{7}$$

Observe que houve a introdução de um zero;

- Repetir para:

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + 1.2s + 1)(s+1)} \tag{8}$$

Observe que houve a introdução de um pólo em relação ao primeiro caso;

- Repetir para:

$$G(s)=\frac{(s+2)(s+4)}{s(s+1)(s+3)} \qquad (9)$$

- Repetir para:

$$G(s)=\frac{(s+2)(s+5)}{(s+4)(s+1)(s+3)} \qquad (10)$$

Esboçar LGR para todos os casos e comparar com os resultados obtidos utilizando o Matlab.

5.6 Estudo de Sistemas de Primeira e Segunda ordem

Para sistemas de primeira ordem com pólo simples real R, pode-se estabelecer a tabela abaixo:

Pólo simples real	**Tempo de resposta (5%)**	**Tempo de resposta (2%)**	**Sobre-sinal**
-R	- 3/R	-4/R	Sem

Em sistemas de segunda ordem com pólos duplos reais pode-se estabelecer a seguinte tabela:

Pólo duplos real	**Tempo de resposta (5%)**	**Tempo de resposta (2%)**	**Sobre-sinal**
-R -R	- 3/R	-4/R	Sem

Em sistemas de segunda ordem com pólos complexos, pode-se estabelecer a tabela:

Pólos complexos	**Tempo de resposta (5%)**	**Tempo de resposta (2%)**	**Tempo de pico**	**Sobre-sinal**
$-R \pm jI$	$\frac{3}{\xi w_n}$	$\frac{4}{\xi w_n}$	$\frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}}$	$e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$

EXPERIMENTO 3:

Considere o sistema de primeira ordem:

$$G(s)=\frac{2}{(s+0.1)} \qquad (11)$$

- Com o LGR, encontrar o ganho K tal que o sistema realimentado tenha tempo de resposta igual a 3 segundos (critério 5%).
- Simular em malha fechada tendo como referência o degrau unitário, usando ganho encontrado. Confirmar graficamente tempo de resposta desejado.

EXPERIMENTO 4:

Considere o sistema de segunda ordem:

$$G(s)=\frac{2}{s(s+1)} \qquad (12)$$

- Com o LGR, encontrar o ganho K tal que o sistema realimentado tenha sobre-sinal máximo igual a 0.05.
- Simular em malha fechada tendo como referência o degrau unitário, usando ganho encontrado. Confirmar graficamente sobre-sinal máximo.