UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
FACULDADE DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO
E TELECOMUNICAÇÕES

Técnicas de Otimização

Programação Linear (PL)

Professor Dr. Lamartine Vilar de Souza
lvsouza@ufpa.br
www.lvsouza.ufpa.br

Belém - 2015

Avisos Iniciais

- Os conceitos e textos abordados neste capítulo foram retirados integralmente e textualmente da bibliografia contida no plano de ensino desta disciplina.

- Estes ***slides*** não substituem nem suprem uma leitura detalhada e completa dos assuntos que serão estudados e dos relacionados existentes nas bibliografias sugeridas e em outras referências bibliográficas eventualmente encontradas pelos estudantes.

- Utilize estes ***slides*** **APENAS** como um direcionador para os seus estudos em livros ou materiais da área.

Tópicos

1. Introdução a pesquisa operacional;
2. Programação linear (PL);
3. Forma padrão de um problema de PL;
4. Solução ótima.

INTRODUÇÃO A PESQUISA OPERACIONAL

ATIVIDADE EM GRUPOS – ESTIMATIVA

Grupo 1 e Grupo 2

Problema de Ancoragem

8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 ⇒ Grupo 1

Sem calculadora!! Tempo = 05 s

1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7 x 8 ⇒ Grupo 2

Sem calculadora!! Tempo = 05 s

Cálculos!

Problema de Ancoragem

8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1

2.250 (média dos valores estimados)

1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7 x 8

512 (média dos valores estimados)

Problema de Ancoragem

8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1

= 40.320

1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7 x 8

= 40.320

Ancoragem

Os efeitos de ancoragem surgem quando um fator aparentemente trivial serve como ponto inicial (ou âncora) para estimativas em um problema de análise de decisão.

ATIVIDADE INDIVIDUAL – TOMADA DE DECISÕES

SITUAÇÃO 1:
Você acaba de ganhar R$ 1.000,00 e precisa escolher uma das seguintes alternativas:

a) **Ganhar R$ 500,00 adicionais com certeza;**

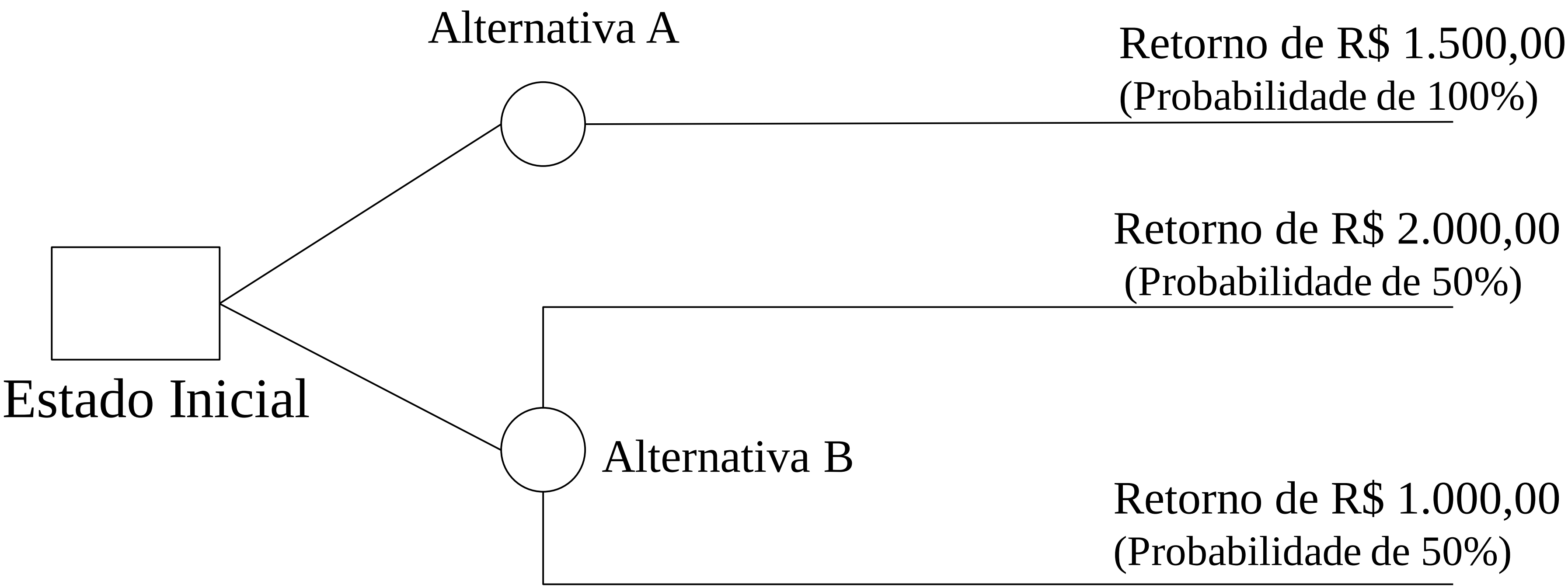
b) **Jogar uma moeda e receber R$ 1.000,00 adicionais se sair cara e receber nada se sair coroa.**

SITUAÇÃO 2:
Você acaba de ganhar R$ 2.000,00 e precisa escolher uma das seguintes alternativas:

a) **Perder R$ 500,00 imediatamente;**

b) **Jogar uma moeda e não devolver nada se sair cara ou devolver R$ 1.000,00 se sair coroa.**

Árvore de decisão para as Situações Apresentadas



Problema de Estruturação

Estruturação

Os efeitos de estruturação se referem à maneira como um tomador de decisão vê ou percebe as alternativas de um problema de decisão, normalmente envolvendo a perspectiva ganhar/perder.

PROGRAMAÇÃO LINEAR (PL)

Programação Matemática...

- (PM) [*Mathematical Programming* (MP)] é um campo da ciência de gerenciamento que encontra a maneira ideal ou mais eficiente de usar recursos limitados para atingir os objetivos de um indivíduo ou de uma empresa.

- Geralmente chamada de **otimização.**

- Determinação da melhor combinação de produtos;
- Fabricação;
- Roteamento e logística;
- Planejamento financeiro.

FORMA PADRÃO DE UM PROBLEMA DE PL

Características dos Problemas de Otimização

- Decisões (variáveis de decisão)
- Restrições (= , >= , <=)
- Objetivos (maximizar ou minimizar)

Formulação Geral de um Problema de Otimização

- MAX (ou MIN): $f_0(X_1, X_2, ..., X_n)$

Sujeito a:

$$f_1(X_1, X_2, ..., X_n) \le b_1$$
$$f_k(X_1, X_2, ..., X_n) \ge b_k$$
$$f_m(X_1, X_2, ..., X_n) = b_m$$

- Nota: Se todas as funções numa otimização são lineares, trata-se de uma **Programação Linear** (PL) [*Linear Programming – LP*]

Um Exemplo de Problema de PL

A Tabajara Banheiras fabrica e vende dois modelos de banheiras: a Aqua-Spa e a Hydro-Lux.

	Aqua-Spa	Hydro-Lux
Bomba	1	1
Produção	9 horas	6 horas
Tubulação	12 m	16 m
Lucro	$ 350	$ 300

O proprietário espera ter **1.566 horas** de trabalho de produção e **2.880 metros** de tubulação disponíveis durante o próximo ciclo de produção. Também terá, para o próximo ciclo de produção, apenas **200 bombas**.

Como ele pode maximizar o seu lucro, dadas as condições existentes?

5 Passos na Formulação de Modelos de PL:

1. Entenda o problema

2. Identifique as variáveis de decisão

X_1= número de Aqua-Spas que serão fabricadas

X_2= número de Hydro-Luxes que serão fabricadas

3. Coloque o objetivo (ou função objetivo) como uma combinação linear das variáveis de decisão

$$MAX: 350X_1 + 300X_2$$

5 Passos na Formulação de Modelos de PL:

4. Coloque as restrições como combinações lineares das variáveis de decisão

$$1X_1 + 1X_2 <= 200 \quad \} \text{ bombas}$$
$$9X_1 + 6X_2 <= 1566 \quad \} \text{ produção}$$
$$12X_1 + 16X_2 <= 2880 \quad \} \text{ tubulação}$$

5. Identifique quaisquer vínculos nas variáveis de decisão

$$X_1 >= 0$$
$$X_2 >= 0$$

Modelo de PL para a Tabajara Banheiras

$$\text{MAX: } 350X_1 + 300X_2$$

Sujeito a:

$$1X_1 + 1X_2 <= 200$$
$$9X_1 + 6X_2 <= 1566$$
$$12X_1 + 16X_2 <= 2880$$
$$X_1 >= 0$$
$$X_2 >= 0$$

Resolução de Problemas de PL: uma Abordagem Intuitiva

- Ideia: Cada Aqua-Spa precisa produzir o maior número de unidades de X_1 possível, pois cada uma delas gera um lucro de \$ 350 enquanto cada unidade de X_2 (Hydro-Luxes) gera um lucro de apenas \$ 300.

- Quanto seria isso?
  - $X_2 = 0$
    - 1ª restrição: $1X_1 <= 200$
    - 2ª restrição: $9X_1 <=1566$ ou $X_1 <=174$
    - 3ª restrição: $12X_1 <=2880$ ou $X_1 <=240$

- $X_2 = 0$
  - 1ª restrição: $1X_1 <= 200$
  - 2ª restrição: $9X_1 <= 1566$ ou $X_1 <= 174$
  - 3ª restrição: $12X_1 <= 2880$ ou $X_1 <= 240$

- Se $X_2 = 0$, o maior valor de X_1 é 174 e seu total de lucro será:

  - **$350*174 + $300*0 = $ 60.900**

- Essa solução é viável, mas é a ***solução ótima***?

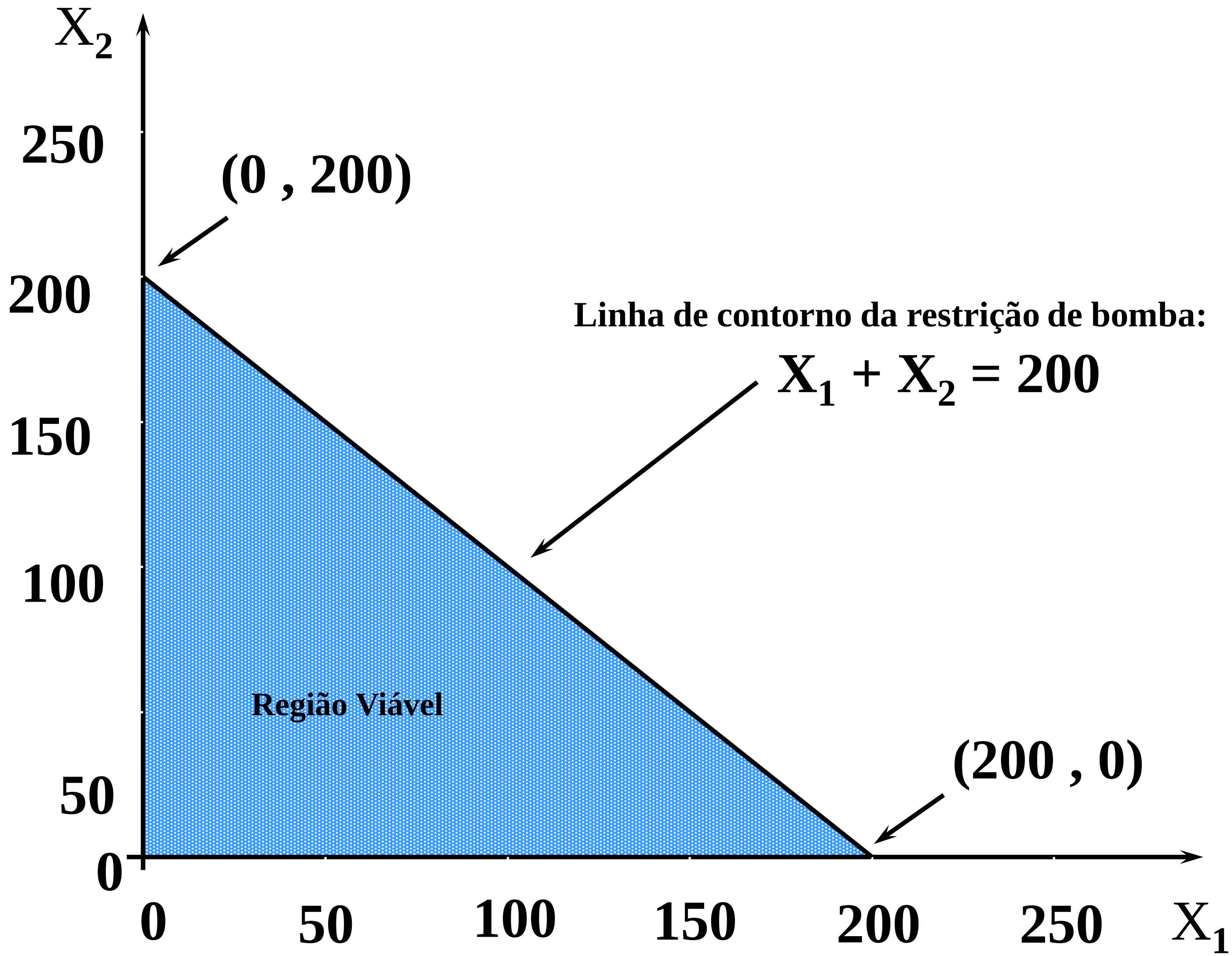
- ***Não! Logo, nem toda solução viável é uma solução ótima!***

SOLUÇÃO ÓTIMA

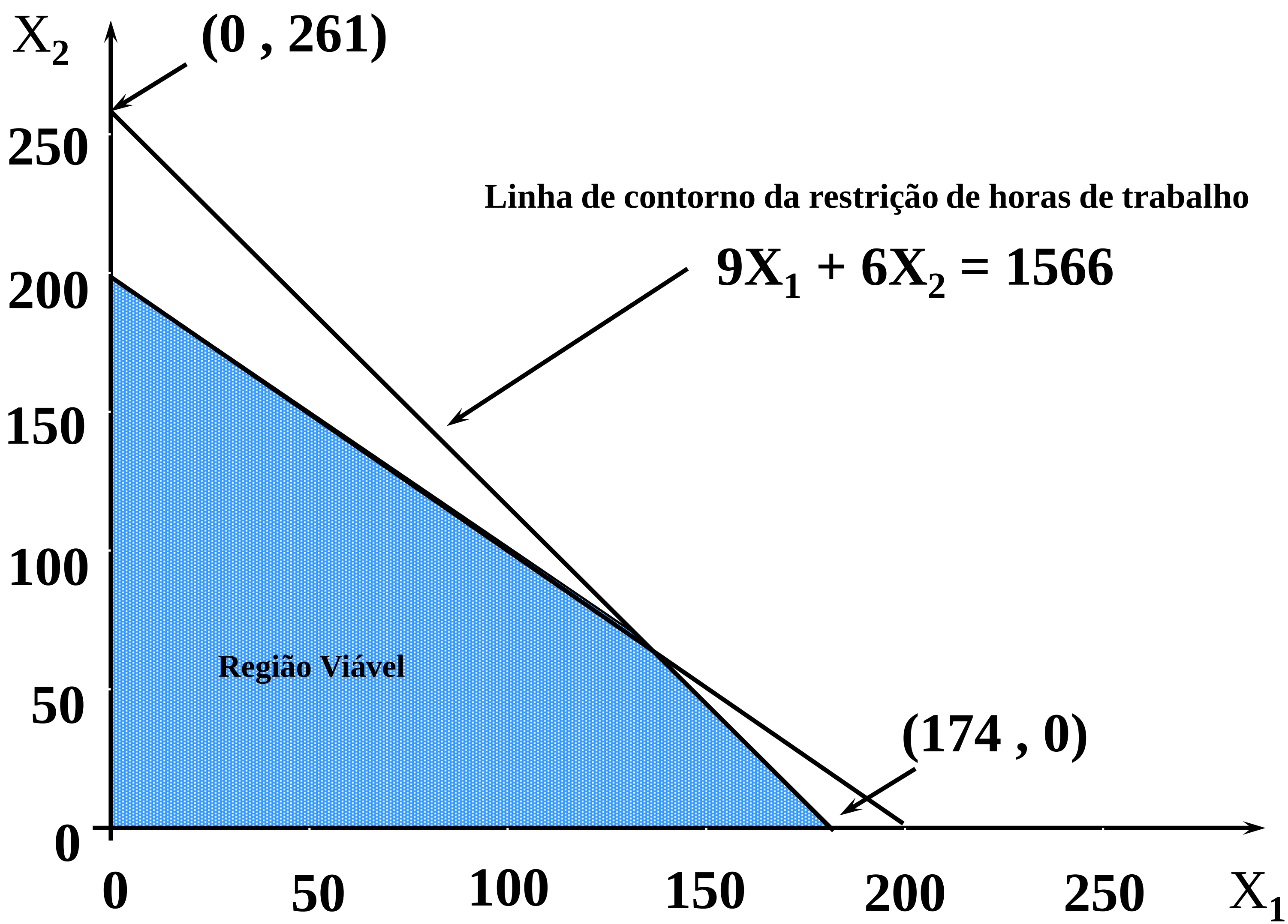
Resolução de problemas de PL: uma Abordagem Gráfica

- As restrições de um modelo de PL definem o conjunto de soluções viáveis.
- A dificuldade em PL é determinar qual ponto ou pontos na região viável correspondem ao melhor valor possível da função.
- Para problemas de PL com duas variáveis, é fácil rascunhar a região viável para o modelo de PL e localizar o ponto viável ideal graficamente.

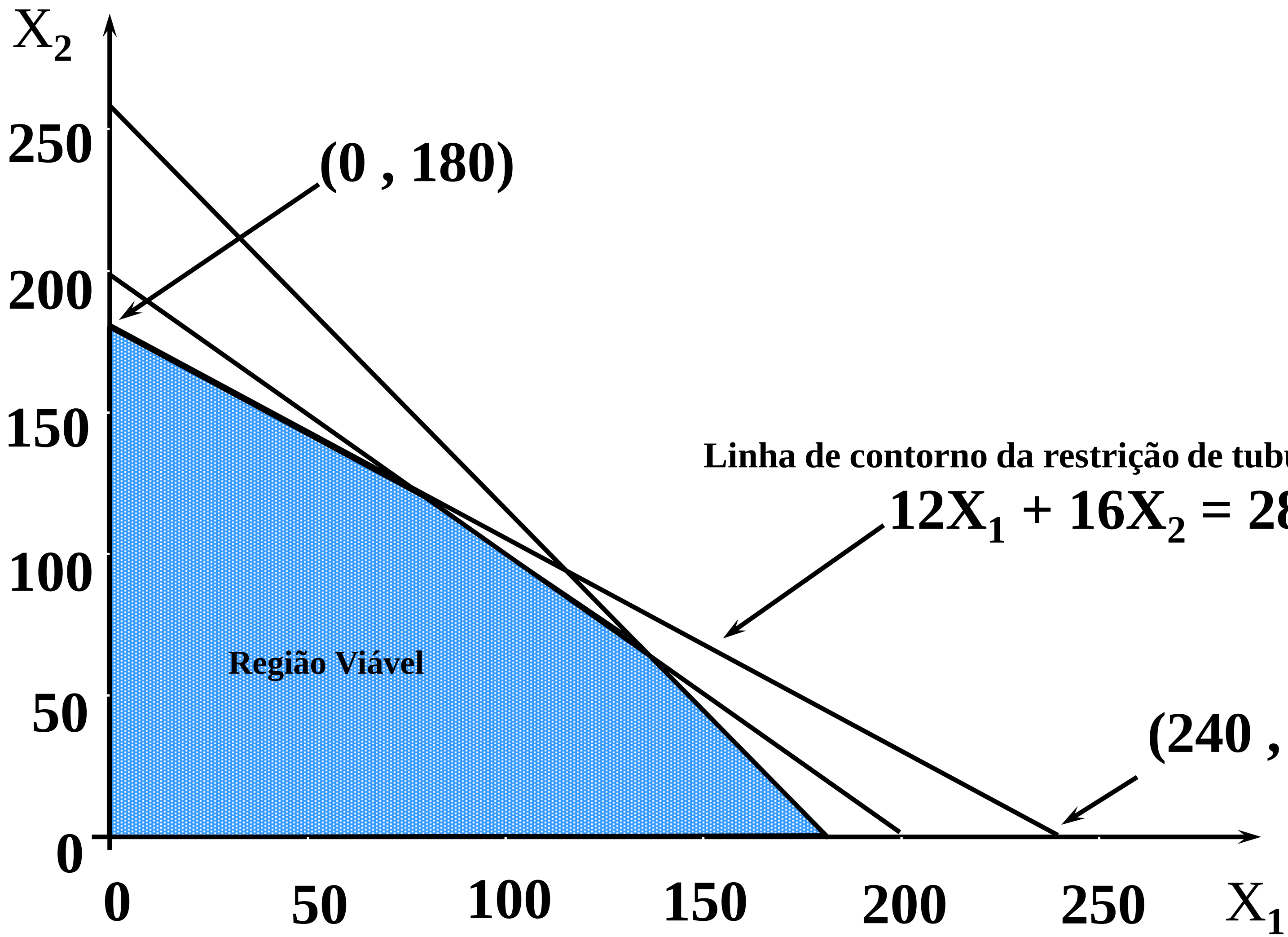
Plotando a Primeira Restrição



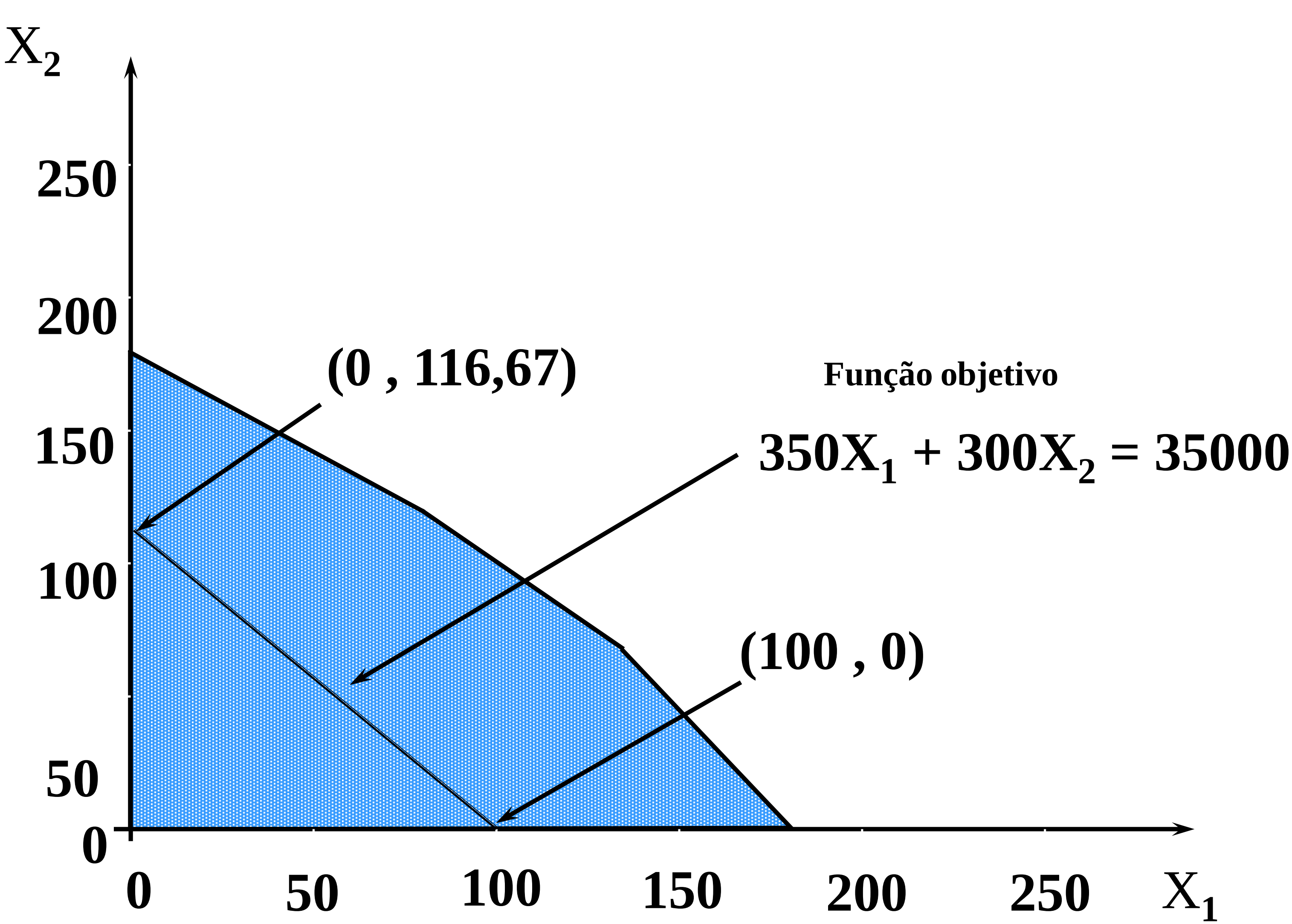
Plotando a Segunda Restrição



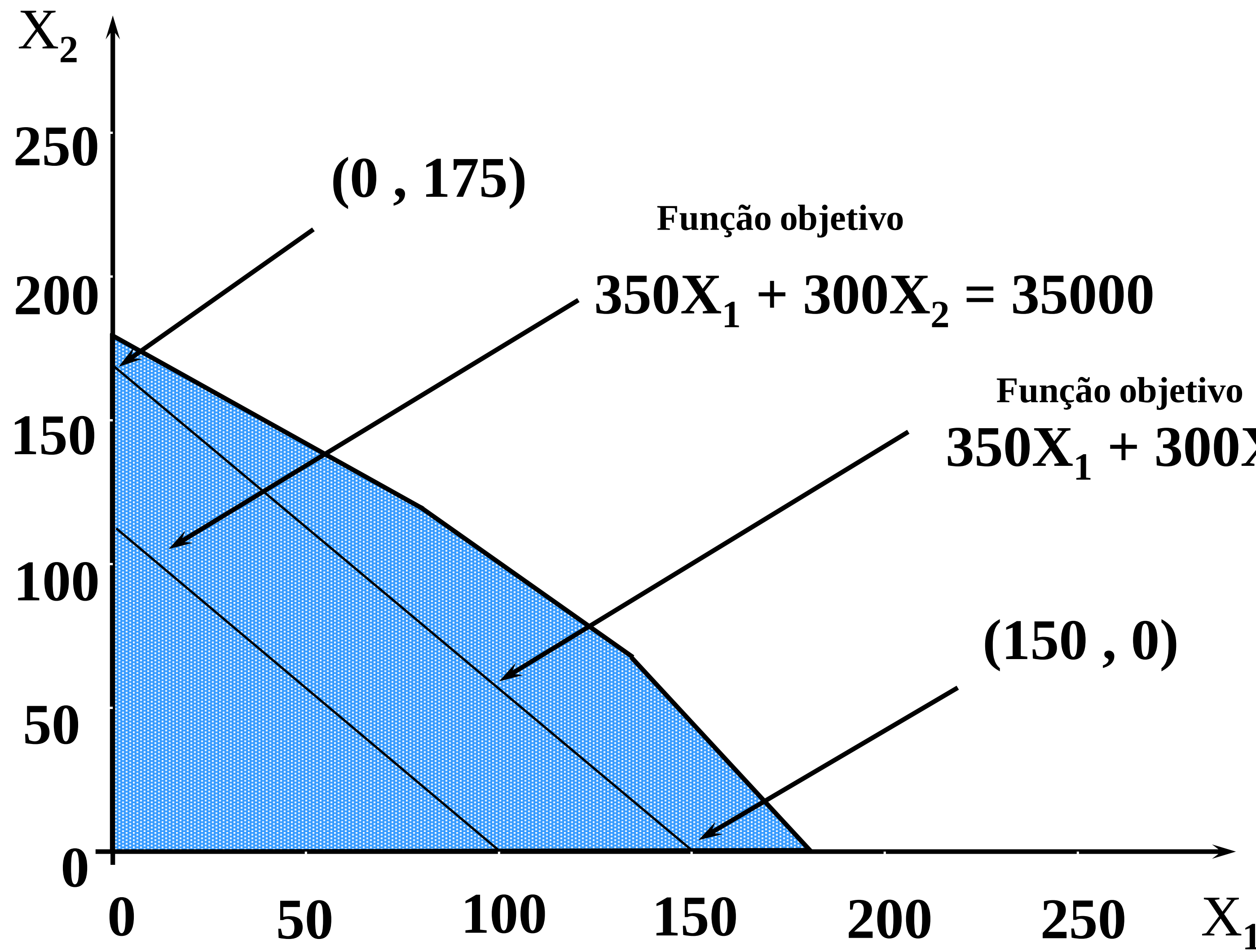
Plotando a Terceira Restrição



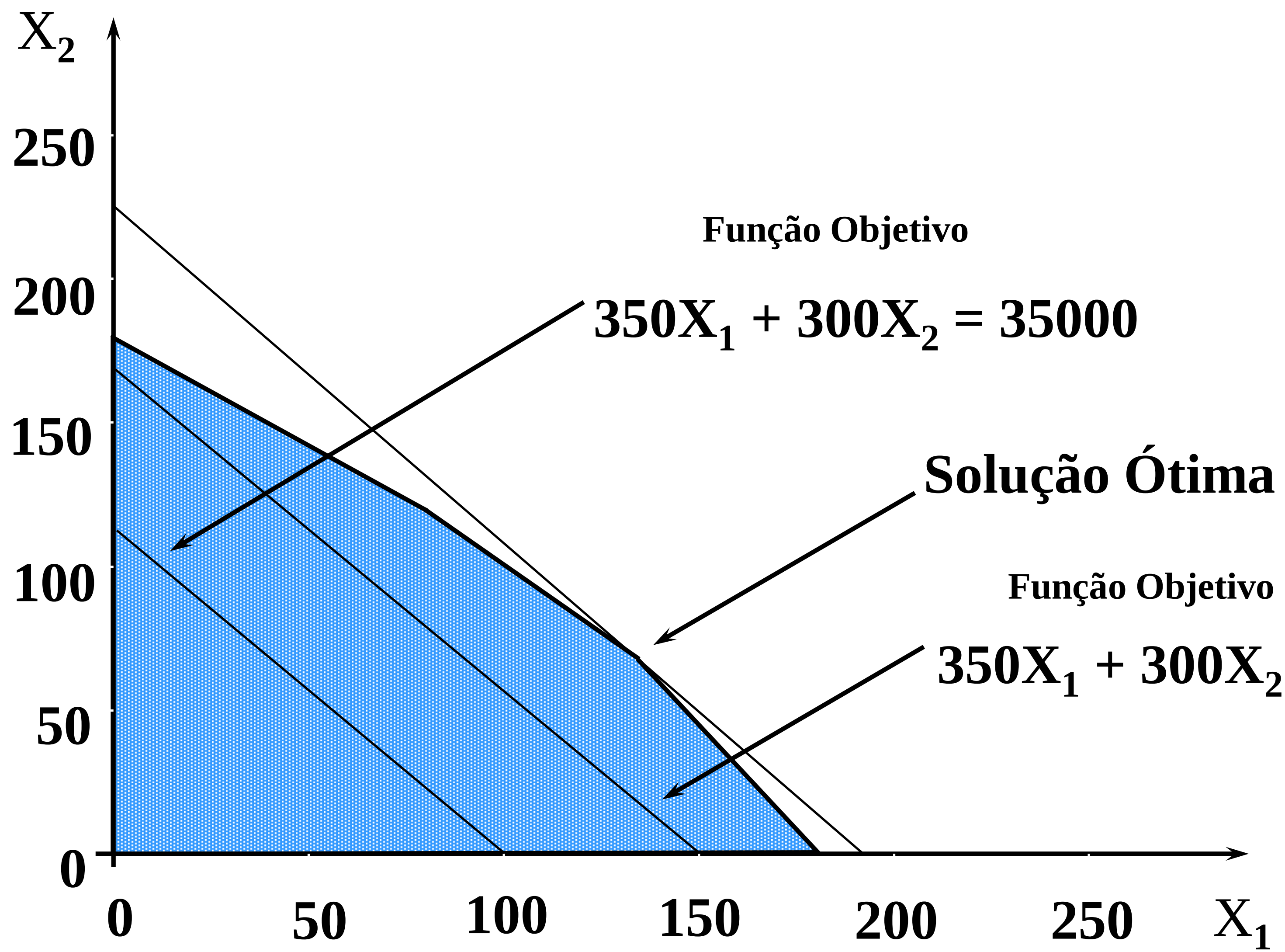
Plotando uma Curva de Nível de uma Função Objetivo



Segunda Curva de Nível de uma Função Objetivo



Encontrar a Solução Ótima Usando a Curva de Nível



Calculando a Solução Ótima

- **A solução ótima para nosso problema do exemplo ocorre no ponto em que a maior curva de nível possível intercepta a região viável em um único ponto.**

- Onde isso ocorre:

$$X_1 + X_2 = 200 \qquad (1)$$

e

$$9X_1 + 6X_2 = 1566 \qquad (2)$$

- Em (1) nós temos, $X_2 = 200 - X_1$ (3)

- Substituindo (3) por X_2 in (2) nós temos,

$$9X_1 + 6\,(200 - X_1) = 1566$$

o que reduz para $X_1 = 122$

Calculando a Solução Ótima

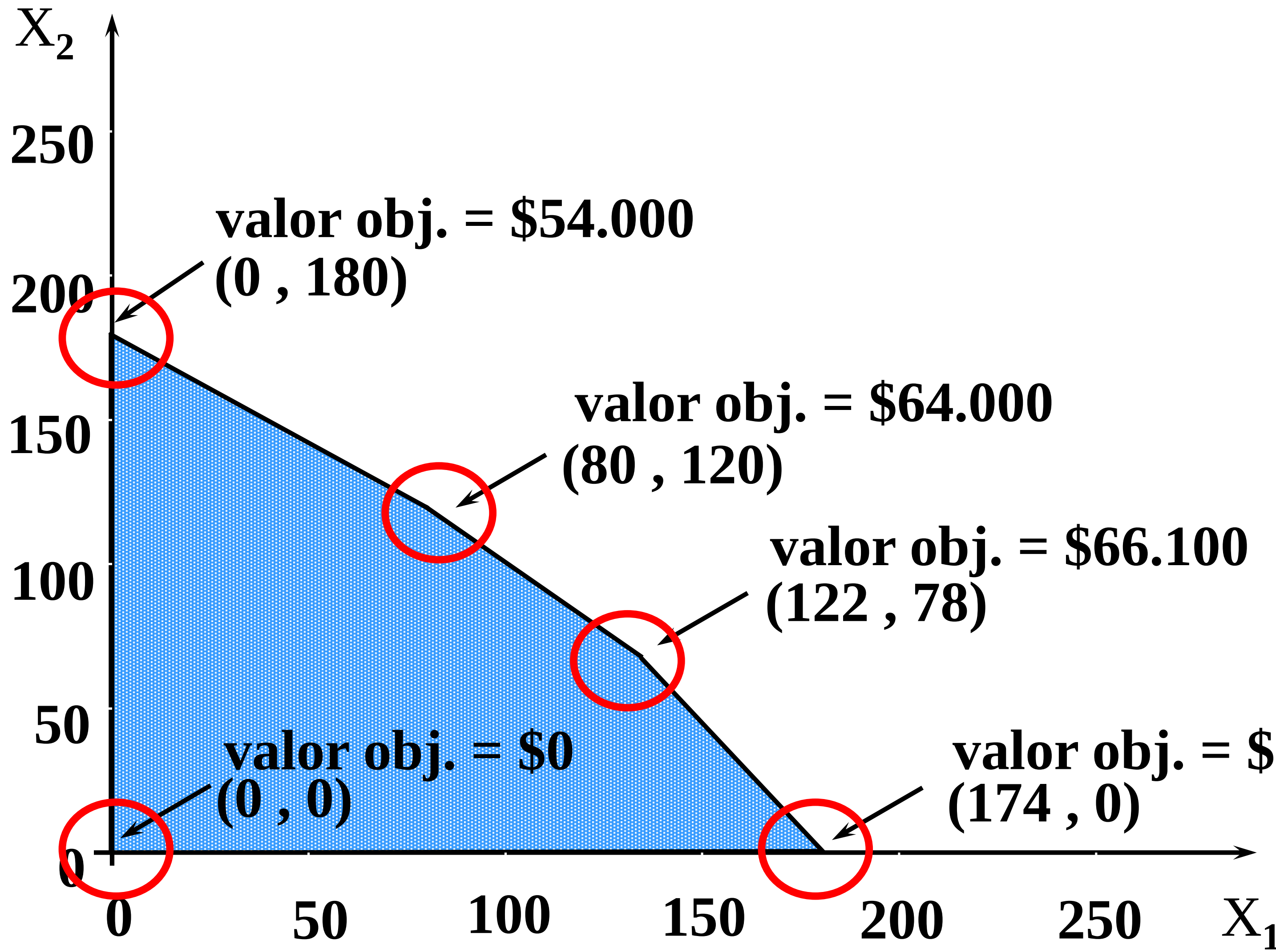
- Então, a solução ótima é:

$$X_1 = 122,$$

$$X_2 = 200 - X_1 = 78$$

Lucro total = $350*122 + $300*78 = $ 66.100

Enumerando os Pontos Extremos



Resumo da Solução Gráfica para Problemas de PL

1. Plote a linha de contorno de cada restrição do modelo.

2. Identifique a região viável

3. Encontre a solução ótima por um dos seguintes métodos:
    a. Plotando curvas de nível;
    b. Enumerando os pontos extremos.

1. **Para a situação abaixo, estabeleça a função objetivo e as restrições existentes para um problema de otimização.**

A refinaria Tabajara extrai minerais em dois locais diferentes do Pará. Cada tonelada de minério Tipo 1 contém 20% de cobre, 20% de zinco e 15% de magnésio. Cada tonelada de minério Tipo 2 contém 30% de cobre, 25% de zinco e 10% de magnésio. O minério Tipo 1 custa $ 90 por tonelada e o minério Tipo 2 custa $ 120 por tonelada. A Tabajara gostaria de comprar minério suficiente para extrair pelo menos 8 toneladas de cobre, 6 toneladas de zinco e 5 toneladas de magnésio com o menor custo possível.

5 Passos na Formulação de Modelos de PL:

1. Entenda o problema

2. Identifique as variáveis de decisões

3. Coloque a função objetivo como uma combinação linear das variáveis de decisão

5 Passos na Formulação de Modelos de PL:

4. Coloque as restrições como combinações lineares das variáveis de decisão

5. Identifique quaisquer vínculos nas variáveis de decisão

Passo 2: **Identifique as variáveis de decisão**

Pergunta principal: quantas toneladas de minério devemos comprar?

Toneladas do minério Tipo 1: $\mathbf{X_1}$

Toneladas do minério Tipo 2: $\mathbf{X_2}$

Passo 3: **Coloque a função objetivo como uma combinação linear das variáveis de decisão**

Objetivo principal: comprar minério com o menor custo possível.

Custo do minério Tipo 1: $90

Custo do minério Tipo 2: $120

MINIMIZAR: $90X_1 + 120X_2$

Passo 4: **Coloque as restrições como combinações lineares das variáveis de decisão**

Restrições:

Cada tonelada de minério Tipo 1 contém 20% de cobre, 20% de zinco e 15% de magnésio.

Cada tonelada de minério Tipo 2 contém 30% de cobre, 25% de zinco e 10% de magnésio.

A Tabajara gostaria de comprar minério suficiente para extrair pelo menos 8 toneladas de cobre, 6 toneladas de zinco e 5 toneladas de magnésio.

Passo 4: **Coloque as restrições como combinações lineares das variáveis de decisão**

Restrições:

$0{,}2\mathbf{X_1} + 0{,}3\mathbf{X_2} >= 8$ } composição dos minérios para o cobre

$0{,}2\mathbf{X_1} + 0{,}25\mathbf{X_2} >= 6$ } composição dos minérios para o zinco

$0{,}15\mathbf{X_1} + 0{,}10\mathbf{X_2} >= 5$ } composição dos minérios para o magnésio

Passo 5: **Identifique quaisquer vínculos nas variáveis de decisão**

$\mathbf{X_1} >= 0$

$\mathbf{X_2} >= 0$

Função Objetivo: Minimizar $\mathbf{90X_1 + 120X_2}$

Sujeito a:

$0{,}2\mathbf{X_1} + 0{,}3\mathbf{X_2} >= 8$

$0{,}2\mathbf{X_1} + 0{,}25\mathbf{X_2} >= 6$

$0{,}15\mathbf{X_1} + 0{,}10\mathbf{X_2} >= 5$

$\mathbf{X_1} >= 0$

$\mathbf{X_2} >= 0$